

SOLUTION DU PROBLEME DE SERRE PAR QUILLEN-SUSLIN

par David EISENBUD

Le problème de Serre

C'est le suivant : "Soit k un corps. Est-ce que tout module projectif de type fini sur un anneau de polynômes $k[x_1, \dots, x_n]$ est libre ?".

(Curieusement, le problème est plus facile (la réponse étant "oui") si le module n'est pas de type fini (Voir [Bass 1]). Dès maintenant, nous parlerons seulement de modules de type fini.

Ce problème était posé par Serre dans [Fac] par analogie avec les fibrés vectoriels. En peu de mots, on a pour de bons espaces topologiques X une équivalence de catégories entre les fibrés vectoriels de dimension finie sur X et les modules projectifs de type fini sur $C(X)$, l'anneau des fonctions continues sur X à valeurs dans le corps des nombres réels (voir [Swan]). Dans le cas topologique, il y a des relations intéressantes entre la catégorie des fibrés et la topologie de X . L'exemple le plus banal : si X est contractile, tout fibré vectoriel est trivial et le module correspondant est libre. Pour voir l'analogie avec le cas algébrique, on suppose que X est une variété algébrique affine et on remplace $C(X)$

par l'anneau de coordonnées $\Gamma(X)$. Est-ce que la relation entre la topologie de X et les propriétés des modules projectifs persiste ? Par exemple, \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n sont les plus contractiles des espaces. On est arrivé au problème de Serre.

Cette année (en Janvier ou Février semble-t-il) le problème était résolu simultanément par Quillen, à Cambridge (U.S.A.), et Suslin, à Moscou. Bien que les solutions soient complètement indépendantes, elles se ressemblent beaucoup, particulièrement quand on se rend compte des simplifications, dues à Lindel (Münster) et à Swan (Chicago), dans la démonstration du résultat principal utilisé par Quillen, le théorème de Horrocks.

Je vais raconter la solution de Quillen (avec quelques remarques sur celle de Suslin), utilisant les idées de Lindel et Swan sur le théorème de Horrocks.

Sauf mention exprès du contraire (dans la section 2) tous les anneaux sont commutatifs, avec unité, dans ce travail.

Le lecteur trouvera une exposition bien plus systématique et complète en se rapportant à l'exposé de Ferrand au Séminaire Bourbaki, printemps 1976.

Une histoire imaginaire \mathcal{L}'

Ce qui suit est une reconstruction de quelques points dans l'histoire du problème, basée, pour la plupart, sur des remarques qu'on m'a faites pendant les dernières années. J'ignore à quel point elle ressemble ou non à la réalité ; mais elle ne me semble pas invraisemblable. (Pour beaucoup d'autres histoires, dont je ne parlerai point, voir [Bass 2]).

D'abord, quand on rencontre un problème sur les anneaux de polynômes, on a envie de le résoudre par induction sur le nombre de variables. Cette envie a conduit à deux tendances d'importance pour nous :

- 1) Le remplacement de k dans le problème de Serre par un anneau plus général : ce qui est naturel est de considérer pour chaque anneau A l'anneau des polynômes en une variable $A[T]$ et de demander : est-ce que tout A -module projectif P provient d'un A -module (ce qui signifie : est-ce qu'il existe un A -module P_0 tel que $P \cong P_0[A] = P_0 \otimes_A A[T]$) ? On a vu assez tôt que la réponse était non en cette généralité (voir [Bass 1] pour le premier contre-exemple). Mais pour le problème de Serre, il suffirait d'avoir une réponse affirmative seulement dans le cas où A est régulier (i.e. de dimension homologique globale finie), hypothèse qui convient aussi pour des raisons techniques. Ce problème reste ouvert ; le meilleur résultat en ce moment semble être celui de

Murthy (basé, bien entendu, sur les travaux de Quillen et Suslin) : si $\dim \text{gl } A \leq 2$, alors tout module projectif sur $A[T_1, \dots, T_n]$ provient d'un module projectif sur A .

2) L'étude de l'hypothèse de récurrence : que peut-on dire d'un module projectif P sur $k[X_1, \dots, X_n]$ sachant que chaque module projectif sur chaque anneau de polynômes en $n-1$ variables sur chaque corps est libre ? Par exemple, on sait que P devient libre si on tensorise avec $k(X_1)[X_2, \dots, X_n]$ (où $k(X_1)$ est le corps des fractions de $k[X_1]$) ; et, parce que la liberté de P est une question d'existence d'un nombre fini d'éléments, on voit que P devient libre après qu'on a inversé un seul polynôme en X_1 . De ce fait on peut construire une présentation de P d'une forme assez spéciale ; c'est la théorie de Towber et Lindel, faite pendant les années 60. (Les idées de Towber, qui remonte à sa thèse, sont partiellement publiées dans un travail écrit avec Swan ; ceux de Lindel n'ont jamais été publiées).

En fait, on peut tout faire dans un cadre un peu plus général qui s'accorde mieux avec les idées de 1) : on se donne, alors, un module projectif P (toujours de type fini) sur un anneau de polynômes $A[T]$ et on suppose que P devient libre après qu'on ait inversé un polynôme unitaire en T , ou, ce qui revient au même, que P contienne un module libre F tel que le quotient $N = P/F$ soit annulé par un polynôme unitaire g , ou, plus simplement, que N soit de type fini sur A . Ceci étant, on a :

Lemme. Le module N est projectif sur A .

Démonstration: P et F étant projectifs sur A , on aura certainement $\dim_{\text{proj}} A N \leq 1$. On a, de plus, une suite exacte évidente :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{g} F/gF \longrightarrow P/gP \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Or, F/gF et P/gP sont projectifs sur A , parce que g est unitaire et $(*)$ est alors une sorte de résolution périodique de N . Parce que N est de dimension projective finie, il doit être projectif.

A cause de ce résultat, l'épimorphisme $P \twoheadrightarrow N$ se scinde, et on a une décomposition de P en tant que A -module sous la forme :

$$P = N \oplus F \quad \text{avec} \quad TF \subset F.$$

Pour compléter la description de P à partir de cette décomposition, il faut décrire, pour chaque $n \in N$, l'élément φ_n ; ce qui signifie qu'il faut donner le morphisme de A -modules :

$$N \xrightarrow{\quad} N \otimes F \quad \text{avec} \quad \varphi(n) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}^T n$$

L'isomorphisme $N \otimes F \longrightarrow P$ de A -modules s'étend canoniquement en un épimorphisme de $A[T]$ -modules :

$$N[T] \otimes F \longrightarrow P .$$

Le noyau est engendré par les éléments de la forme :

$$\varphi(n) - (nT, 0) ,$$

où on regarde $(nT, 0)$ comme élément de la somme directe $N[T] \otimes F$. Autrement dit, on a une suite exacte :

$$**) \quad 0 \longrightarrow N[T] \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi_1 - T \\ \varphi_2 \end{pmatrix}} N[T] \otimes F \longrightarrow P \longrightarrow 0 ,$$

qui est la présentation distinguée de Lindel-Towber. L'existence d'une telle présentation, avec F libre et N A -projectif, équivaut au fait que P devient libre après qu'on a inversé un polynôme unitaire en T (on peut choisir ce polynôme égal à $\det(\varphi_1 - T)$).

Nous passons maintenant à un résultat qui était en fait un grand pas vers la solution du problème de Serre, le Théorème de Horrocks :

Théorème (Horrocks) : Soit A un anneau local et soit P un $A[T]$ -module projectif. Si P devient libre après qu'on a inversé un polynôme unitaire, alors P est libre.

(L'énoncé original de Horrocks était un peu différent : il disait que si P s'étend -en tant que fibré vectoriel sur $\mathbb{A}_A^1 = \text{Spec } A[T]$, la droite affine sur A , -à \mathbb{P}_A^1 , la droite projective sur A , alors P est libre. Or la condition algébrique dans le théorème est équivalente, pour A local, à cette condition

géométrique, ce que l'on voit en regardant la condition pour P de s'étendre, comme condition sur la restriction de P au "spectre éponté" de $\text{Spec } (\Lambda) \times \{\infty\} \subset \mathbb{P}_\Lambda^1$.

Démonstration du théorème de Horrocks par Swan et Lindel. Considérons une présentation de Lindel-Swan de P

$$**) \quad 0 \longrightarrow N[T] \longrightarrow N[T] \oplus F \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 - T \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

À cause du fait que Λ est local, N est libre, et φ_1 s'écrit comme matrice à éléments dans Λ . On va trouver une nouvelle présentation de Lindel-Towber avec un N dont le rang sera plus petit. Une fois que $\text{rg } N = 0$ la démonstration sera terminée. On peut supposer que $N \neq 0$.

On considère φ_1, φ_2 comme des matrices, et on procède en effectuant des transformations élémentaires de la manière suivante :

1) D'abord en ajoutant des multiples des lignes de $\varphi_1 - T$ aux lignes de φ_2 , on peut garantir que tous les éléments de la matrice φ_2 se trouvent dans Λ .

Prouvons maintenant qu'il n'est pas possible que tous les éléments de φ_2 soient contenus dans l'idéal maximal \mathfrak{m} de Λ ; en effet, s'ils sont tous dans \mathfrak{m} , on réduit modulo \mathfrak{m} . Mais de **), on déduit que :

$$P/\mathfrak{m} P \cong F/\mathfrak{m} F \oplus \text{Coker } (\bar{\varphi}_1 - T), \quad \text{où}$$

$\bar{\varphi}_1 : \Lambda/\mathfrak{m} \otimes N[T] \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{m} \otimes N[T]$ est la réduction de φ_1 . Or $\text{coker}(\bar{\varphi}_1 - T)$ est annulé par $\det(\bar{\varphi}_1 - T)$, le polynôme caractéristique de $\bar{\varphi}_1$, qui n'est pas nul, mais on voit facilement que $\text{coker}(\bar{\varphi}_1 - T) \neq 0$ puisque $N \neq 0$. C'est une contradiction avec le fait que $P/\mathfrak{m} P$ est projectif sur $\Lambda/\mathfrak{m} [T]$! Il y a donc un élément de φ_2 qui est une unité. En changeant au besoin l'ordre de la base de $N[T]$ et de celle de F , nous pouvons supposer que φ a la forme :

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} - T & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - T \dots \\ \vdots & \ddots a_{nn} - T \\ \hline 1 & b_{12} \dots \\ 0 & \vdots \\ 0 & \dots \dots b_{mn} \end{pmatrix} = \varphi_1 - T = \varphi_2$$

Mais en ajoutant des multiples de la première ligne de Ψ_2 aux lignes de Ψ_1 et puis en ajoutant des multiples de la première colonne aux autres colonnes, on voit qu'on a une présentation de P comme conoyau d'une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{-T} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & a_{nn}^{-T} \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & b_{mn} \end{array} \right) \quad \rightarrow N[T] \rightarrow P \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow N[T] \longrightarrow N[T] \oplus F \rightarrow P \rightarrow 0 \quad \times$$

Or, en posant $F' = A \oplus F$ et en notant N' le module quotient de N par le A -sous-module engendré par le 1er vecteur de base de N , on obtient une présentation de Lindel-Towber de la forme :

$$0 \rightarrow N'[T] \longrightarrow N'[T] \oplus F'$$

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{22}^{-T} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n2} & \dots & \ddots & a_{nn}^{-T} \\ \hline b_{22} & b_{23} & & \\ b_{32} & \ddots & & \\ \vdots & & & \end{array} \right)$$

avec $\text{rg } N' \leq \text{rg } N$.

Après avoir vu le théorème de Horrocks, et sachant que le problème de Serre admet une solution positive, il est naturel de se demander ce que l'on peut obtenir, peut être avec davantage d'astuce, dans le cas où A n'est pas local. C'est en effet, ce qu'a fait Suslin. Son argument est aussi élémentaire -bien que nettement plus compliqué- que celui de la démonstration ci-dessus. Cependant, nous suivrons l'argument de Quillen, dont le résultat principal est très frappant et semble pouvoir être utile dans de nombreux autres contextes. (Pour une première application voir [Bass-Wright]).

La contribution de Quillen et la solution du problème

Si nous supposons, par induction, que tout module projectif sur un anneau de polynômes en $n-1$ variables sur un corps est libre, et si P est un module projectif sur $k[X_1, \dots, X_n]$, alors, d'après le théorème de Horrocks, on aura que pour chaque idéal maximal \mathfrak{m} de $k[X_1, \dots, X_{n-1}]$, P devient libre sur $k[X_1, \dots, X_{n-1}]_{\mathfrak{m}}[X_n]$. En particulier, pour chaque \mathfrak{m} , $P \otimes k[X_1, \dots, X_{n-1}]_{\mathfrak{m}}[X_n]$ proviendra d'un $k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ -module. Il suffit donc de prouver que P lui-même provient de $k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ car nous avons supposé que tout $k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ -module projectif est libre.

Alors, le résultat de Quillen suivant résoud le problème de Serre (toujours avec un corps k - mais la même méthode s'étend au cas où k est un anneau de Dedekind et on prouve, alors, que tout module projectif sur $k[X_1, \dots, X_n]$ provient de k).

Pour énoncer le résultat, considérons une situation plus générale : soit A un anneau, M un $A[T]$ -module de présentation finie. Nous dirons que M provient localement de A , si pour tout idéal maximal \mathfrak{m} de A , $A_{\mathfrak{m}}[T] \otimes M$ provient d'un module sur $A_{\mathfrak{m}}[T]$. Le résultat suivant est la grande surprise du travail de Quillen :

Théorème A (Quillen) - Soit M un $A[T]$ -module de présentation finie. Si M provient localement de A , alors il en provient globalement.

Ce théorème se déduit assez facilement du résultat technique suivant :

Soit A un anneau commutatif, R une A -algèbre (non nécessairement commutative) et T une indéterminée. On note $(1 + T R[T])^*$ l'ensemble des unités de l'anneau $R[T]$ qui sont congrues à 1 modulo T . Si $s \in A$, nous noterons R_s l'anneau localisé $R \otimes_A A[s^{-1}]$.

Théorème B - Avec les mêmes notations que ci-dessus, supposons que s_1, s_2 soient des éléments de A tels que $s_1 + s_2 = 1$. Alors l'application :

$$(1 + T R_{s_1}[T])^* \times (1 + T R_{s_2}[T])^* \longrightarrow (1 + T R_{s_1 s_2}[T])^*$$

$$(\theta, \psi) \longrightarrow \theta_{s_2} \psi_{s_1}$$

est un épimorphisme.

Réduction du Théorème A au Théorème B

Supposons que M provient de A , ce qui veut dire que $M \cong A[T] \otimes_A N$ pour un A -module N . Réduisant modulo T , on trouve $N \cong M/TM$. Pour un M quelconque, posons $\tilde{M} = M/TM$, et $\tilde{M} = A[T] \otimes_A \tilde{M}$. Alors, on aura que M provient de A si et seulement si $M \cong \tilde{M}$. On peut même demander que l'isomorphisme induise l'identité modulo T . Mais si M est de présentation finie, alors \tilde{M} l'est aussi, et l'isomorphisme de deux modules de présentation finie est une question d'existence d'un nombre fini d'éléments de $A[T]$ qui satisfont à des équations linéaires (on pense à un isomorphisme entre une présentation pour M et une pour \tilde{M}). Il s'ensuit que si $M \otimes_{A_m} [T]$ provient de A_m , alors il existe un élément $s \in A - m$ tel que $M_s = A_s [T] \otimes M$ provient de A_s .

Supposons maintenant que M provient localement de A , comme dans le théorème A, et considérons l'ensemble $S = \{s \in A \mid M_s \text{ provient de } A_s\}$. Notre but est de prouver que 1 appartient à S . Mais notre hypothèse nous dit que S n'est contenu dans aucun idéal maximal. Donc il suffirait de prouver que S est un idéal de A . Evidemment, $s \in S$ entraîne $as \in S$ pour n'importe quel $a \in A$. Il suffit, alors, de prouver que $s_1, s_2 \in S$ entraîne $s_1 + s_2 \in S$. Mais localisant à $s_1 + s_2$, nous pouvons supposer $s_1 + s_2 = 1$. Le théorème A est donc réduit au lemme suivant :

Lemme : Soit M un $A[T]$ -module et soient $s_1, s_2 \in A$ tels que $s_1 + s_2 = 1$. Si M_{s_i} provient de A_{s_i} ($i=1,2$), alors M provient de A .

Preuve : on utilise les suites exactes :

$$*) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M_{s_1} \times M_{s_2} \longrightarrow M_{s_1 s_2} \\ \tilde{M} & \longrightarrow & \tilde{M}_{s_1} \times \tilde{M}_{s_2} \longrightarrow \tilde{M}_{s_1 s_2} \end{array} \right.$$

On a, par hypothèse, des isomorphismes $\alpha_i : M_{s_i} \longrightarrow \tilde{M}_{s_i}$ qui induisent l'identité modulo T . Si on avait :

$$\alpha_1|_{s_2} = \alpha_2|_{s_1} : M_{s_1 s_2} \longrightarrow \tilde{M}_{s_1 s_2},$$

*) nous donnerait $M \cong \tilde{M}$. Sinon on chercherait à changer les α_i en les composant avec des automorphismes $\beta_i : \tilde{M}_{s_i} \longrightarrow \tilde{M}_{s_i}$. On a gagné si on peut trouver des β_i

tels que :

$$\begin{aligned} (\beta_1 \alpha_1)_{s_2} &= (\beta_2 \alpha_2)_{s_1} \quad \text{ou bien} \\ (***) \quad (\beta_1^{-1})_{s_2} (\beta_2)_{s_1} &= (\alpha_1)_{s_2} (\alpha_2^{-1})_{s_1}. \end{aligned}$$

Soit $R = \text{End}_A \tilde{M}$. On voit que $\text{End } \tilde{M} = R[T]$, et alors l'ensemble des automorphismes de \tilde{M} qui induisent l'identité modulo T s'écrit comme $(1 + T R[T])^*$. De pareils calculs étant possibles pour \tilde{M}_S et $\tilde{M}_{S_1 S_2}$, on voit que le problème de trouver des β_i qui satisfont à $(**)$ est un cas particulier du problème résolu par le Théorème B. Cela nous réduit à là :

Démonstration du théorème B

Etant donné $\gamma(T) \in (1 + T R_{S_1 S_2}[T])^*$ on peut, pour chaque $a \in A$, écrire :

$$\gamma(T) = \gamma(aT) (\gamma(aT)^{-1} \gamma(T))$$

Nous allons voir qu'il existe un entier N tel que si a est divisible par s_2^N et $a-1$ est divisible par s_1^N , alors :

$$\begin{aligned} \gamma(aT) &\in (1 + T R_{S_1}[T])^* \\ \text{et} \quad \gamma(aT)^{-1} \gamma(T) &\in (1 + T R_{S_2}[T])^*. \end{aligned}$$

Or, en fait, on peut trouver un tel a pour n'importe quel N (il suffit de considérer l'égalité $(s_1 + s_2)^{2N+1} = 1$) et ceci terminera la démonstration. En effet soit $s \in A$ et $\gamma(T) \in (1 + T R_S[T])^*$. Nous allons prouver qu'il existe un entier p tel que, pour n'importe quels $X, Y \in A$, l'élément :

$$H_p(X, Y, T) = \gamma(XT)^{-1} \gamma((X + s^p Y)T)$$

se trouve dans l'image de l'application naturelle

$$(1 + T R[T])^* \longrightarrow (1 + T R_S[T])^*.$$

Or on peut évidemment supposer que X et Y sont de nouvelles variables (commutant avec R) ; ça veut dire que nous regardons H_K comme élément de l'anneau des polynômes $R_S[T, X, Y]$. Nous pouvons alors écrire la formule de Taylor :

$$\gamma(X + s^p Y T) = \gamma(XT) + s^p Y T \cdot \delta(T, X, Y)$$

et donc :

$$H_p(T, X, Y) = 1 + s^p T \epsilon(T, X, Y)$$

où $\varepsilon(T, X, Y) \in R_s[T, X, Y]$. Mais pour λ assez grand, $s^\lambda \varepsilon(T, X, Y) = \varepsilon_1(T, X, Y)$ appartient à l'image de $R[T, X, Y]$. Donc, pour $p \geq \lambda$,

$$H_p = 1 + s^{p-\lambda} T \varepsilon_1(T, X, Y)$$

est l'image d'un élément de la forme

$$\tilde{H}_p = 1 + s^{p-\lambda} T \tilde{\varepsilon}_1(T, X, Y) \in 1 + T R_s[T, X, Y].$$

Nous devons montrer que pour p suffisamment grand, \tilde{H}_p est inversible.

Or on trouve, par les mêmes méthodes, que, pour p supérieur à un entier λ' , le polynôme :

$$J_p = \gamma((X + s^p Y)T)^{-1} \gamma(XT) \in (1 + T R_s[T, X, Y])^*$$

est l'image de :

$$\tilde{J}_p = 1 + s^{p-\lambda'} T \tilde{\phi}_1(T, X, Y)$$

avec $\tilde{\phi}_1(T, X, Y) \in R_s[T, X, Y]$. Le produit $\tilde{H}_p \tilde{J}_p$ a la forme $1 + s^N \xi(T, X, Y)$, ($N = 2p - \lambda - \lambda'$), et son image dans $R_s[T, X, Y]$ est 1. Donc tous les coefficients de ξ sont annulés par une puissance de s et pour p grand on aura :

$$\tilde{H}_p \tilde{J}_p = 1.$$

Donc \tilde{H}_p sera une unité de $R_s[T, X, Y]$ et la démonstration est terminée.

BIBLIOGRAPHIE

- [BASS 1] Torsion free and projective modules
Trans. Amer Math Soc 102 (1962) pp. 319-327.
- [BASS 2] Libération des modules projectifs sur certains anneaux de polynômes
Séminaire Bourbaki 26ème année 1973/1974 - p. 448
- [BASS-CONNELL-WRIGHT] Locally polynomial algebras are symmetric (à paraître)
- [HORROCKS] Projective modules over an extension of a local ring, Proc. London Math. Soc. (3) 14 (1964) - p. 714-718

- [LINDEL] Eine Bemerkung zur Quillensche Lösung des serreschen Problem .
(à paraître - pour obtenir des preprints écrire à Hirtmut Lindel Inst.
für Math. der Universität. Münster)
- [QUILLEN] Projective Modules over Polynomial Rings Inv. Math., (à paraître)
- [SWAN] Vector Bundles and Projective Modules, Trans. Amer. Math. Soc., 105
1962, p. 264-277

Reçu le 10 Mai 1976