

**Laboratorium komputerowe oraz Ćwiczenia rachunkowe z przedmiotu  
„Metody obliczeniowe”  
Prowadzący: L. Bieniasz  
(semestr letni 2018)  
Zagadnienia do opanowania przed zajęciami,  
pomocnicze zadania rachunkowe do rozwiązania na ćwiczeniach rachunkowych,  
oraz tematy programów do realizacji na zajęciach laboratoryjnych.**

**Zajęcia nr 1:**

**Zagadnienia do opanowania:**

Rodzaje błędów w obliczeniach numerycznych, reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczb rzeczywistych, standard IEEE 754.

**Zadania:**

(1) Oszacuj wielkość błędu obcięcia przy wyznaczaniu przybliżonej wartości  $\ln(z)$  poprzez sumowanie  $n$  wyrazów rozwinięcia w szereg Taylora wokół  $z_0 = 1$ . Ile wyrazów należy zsumować, aby otrzymać błąd bezwzględny logarytmu nie większy niż  $10^{-8}$ , dla  $z = 2$ ?

(2) Rozważ prosty system reprezentacji zmiennoprzecinkowej

$$rd(x) = (-1)^e m 2^{z-b}$$

liczb rzeczywistych, w którym na mantysę oraz na cechę przeznaczono po dwa bity, zatem jedno słowo maszynowe zajmuje 5 bitów. Wyznacz zbiór wszystkich możliwych liczb rzeczywistych reprezentowalnych w tym systemie, przy założeniu że  $b = 1$ . Uwzględnij możliwość liczb znormalizowanych zakładając  $m \in [1, 2)$ , oraz zdenormalizowanych, i określ jakie słowa maszynowe należałoby zarezerwować na  $+0$ ,  $-0$ ,  $+\text{INF}$ ,  $-\text{INF}$  oraz reprezentacje NaN.

**Program:**

Napisz program w języku „C/C++”, umożliwiający „doświadczalne” wyznaczenie liczby bitów mantysy oraz tzw. *epsylona maszynowego*, dla zmiennych typu **float** i **double**, tj. najmniejszej liczby  $\varepsilon$  takiej, że  $fl(\varepsilon + 1) > 1$ . Jaki jest związek  $\varepsilon$  z precyzją arytmetyki?

## Zajęcia nr 2:

### Zagadnienia do opanowania:

Własności zadań: uwarunkowanie zadań. Metody oceny błędów maszynowych. Zjawisko utraty cyfr znaczących przy odejmowaniu. Własności algorytmów: numeryczna poprawność, numeryczna stabilność.

### Zadania:

(1) Zbadaj uwarunkowanie (względne) zadania obliczenia iloczynu  $p = x \cdot y$  oraz ilorazu  $d = x/y$  dwóch liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ , oraz oszacuj wielkość względnych błędów maszynowych wyników w przypadku numerycznych obliczeń zmiennoprzecinkowych  $p$  i  $d$ .

(2) Oceń błąd względny obliczenia  $a^2 - b^2$  w arytmetyce  $fl$ , przy zastosowaniu algorytmów:

$$A1(a,b) = a \cdot a - b \cdot b$$

$$A2(a,b) = (a - b) \cdot (a + b)$$

zakładając, że  $rd(a) = a$ ,  $rd(b) = b$ .

(3) Zbadaj uwarunkowanie (względne) zadania obliczenia wartości funkcji  $y = f(x) = (1 + x)^{-1}$ .

### Program:

Zaimplementuj w języku „C/C++” algorytm obliczający przybliżone wartości funkcji  $f(x) = [1 - \exp(-x)]/x$  dla  $x \in [10^{-30}, 10^9]$ , korzystając z funkcji standardowej  $\exp()$ . W oparciu o zbiór dokładnych wartości tej funkcji, udostępniony przez prowadzącego zajęcia, zbadaj jak zmieniają się błędy względne przybliżenia funkcji w tym algorytmie, w zależności od  $x$ . Wyjaśnij przyczynę obserwowanych zmian błędów. Na tej podstawie zaproponuj alternatywny sposób obliczania wartości funkcji  $f(x)$  w sytuacjach gdy obserwowany błąd jest duży. Dokonaj stosownej modyfikacji programu, tak aby uzyskać dokładność maszynową dla dowolnego  $x \in [10^{-30}, 10^9]$ . W obliczeniach zastosuj zmienne podwójnej precyzji.

### **Zajęcia nr 3:**

#### **Zagadnienia do opanowania:**

Metody rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych: Picarda, bisekcji, reguła fałsi, Newtona, siecznych. Zbieżność metod iteracyjnych.

#### **Zadania:**

(1) Oceń zbieżność metody iteracyjnej Picarda w zastosowaniu do równań nieliniowych:

- a)  $\sin^2(x/4) - x = 0$
- b)  $\tan(2x) - x - 1 = 0$

(2) Pokaż, że tzw. algorytm Herona, służący do obliczania pierwiastka kwadratowego z liczby rzeczywistej  $a$  w oparciu o wzory:

$$\sqrt{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{gdzie } x_n = (x_{n-1} + a/x_{n-1})/2$$

może być interpretowany jako algorytm Newtona zastosowany do pewnego równania nieliniowego.

#### **Program:**

Napisz program w języku „C/C++”, realizujący metody:

- (a) Picarda
- (b) bisekcji
- (c) Newtona
- (d) siecznych

rozwiązywania pojedynczych algebraicznych równań nieliniowych. Zastosuj program do przykładów z zadania 1. Zastosuj trzy niezależne kryteria zakończenia iteracji. Zadbaj o to, aby wyprowadzać na konsolę wyniki pośrednie obliczeń dla każdej iteracji, tak aby możliwe było obserwowanie zbieżności kolejnych przybliżeń pierwiastków i porównanie liczby iteracji niezbędnych do uzyskania rozwiązania o zadanej dokładności przez każdą z metod. W szczególności oblicz jak zmienia się estymator błędu rozwiązania oraz residuum układu w trakcie iteracji.

## **Zajęcia nr 4:**

### **Zagadnienia do opanowania:**

Rozwiązywanie układów nieliniowych równań algebraicznych. Uogólniona metoda Newtona.

### **Zadania:**

(1) Napisz równania uogólnionej metody Newtona, w zastosowaniu do układu równań nieliniowych:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 = y$$

### **Program:**

Napisz program w języku „C/C++”, realizujący uogólnioną metodę Newtona rozwiązywania układu trzech algebraicznych równań nieliniowych, i zastosuj ten program do przykładu z zadania 1.

Przyjmij takie przybliżenie początkowe, aby uzyskać zbieżność metody. Zastosuj trzy niezależne kryteria zakończenia iteracji. Zadbaj o to, aby wyprowadzać na konsolę wyniki pośrednie obliczeń dla każdej iteracji, tak aby możliwe było obserwowanie zbieżności kolejnych przybliżeń pierwiastków. W szczególności oblicz jak zmienia się estymator błędu rozwiązania oraz residuum układu w trakcie iteracji.

## Zajęcia nr 5:

### Zagadnienia do opanowania:

Obliczanie norm wektorów i macierzy. Wskaźnik uwarunkowania macierzy. Eliminacja Gaussa. Dekompozycja LU macierzy pełnej. Metody bezpośrednie rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych z macierzą pełną.

### Zadania:

(1) Oblicz normę pierwszą, normę drugą, i normę maksimum wektora

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{oraz macierzy} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(2) Oblicz wskaźnik uwarunkowania dla macierzy  $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 20 \end{bmatrix}$  oraz  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$ ,

posługując się normą maksimum. Przyjmij  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Która macierz zapewnia lepsze uwarunkowanie rozwiązania układu równań ( $Ax = b$  lub  $Bx = b$ )?

### Program:

Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 20 & -30 & -4 \\ 4 & 20 & -6 & 50 \\ 9 & -18 & 12 & -11 \\ 16 & -15 & 14 & 130 \end{bmatrix} \quad \text{oraz wektor } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 114 \\ -5 \\ 177 \end{bmatrix}.$$

Napisz program w języku „C/C++”, realizujący dekompozycję LU macierzy  $A$ , przy zastosowaniu eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego, a następnie rozwiązujący układ równań  $Ax = b$ .

**Uwaga: należy zaimplementować wariant dekompozycji omawiany na wykładzie.**

Program należy zrealizować w postaci dwóch odrębnych procedur: jednej, która operuje wyłącznie na macierzy  $A$ , i drugiej, która operuje wyłącznie na wektorze  $b$ , korzystając z wyników działania procedury pierwszej.

Dodatkowe ćwiczenie, dla chętnych; prawidłowe rozwiązanie będzie premiowane dodatkową oceną 5.0.

Dany jest układ równań z macierzą

$$A = \begin{bmatrix} 1+e & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+e & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+e & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+e \end{bmatrix} \quad \text{oraz wektorem } b = \begin{bmatrix} 6+e \\ 6+2e \\ 6+2e \\ 6+e \end{bmatrix}. \quad \text{Znajdź najpierw rozwiązanie}$$

analityczne, a następnie numeryczne, przyjmując coraz mniejsze wartości  $e = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$ , itd. Porównaj rozwiązania numeryczne z analitycznym, i wyjaśnij ewentualne obserwowane zmiany błędów rozwiązań numerycznych.

## Zajęcia nr 6:

### Zagadnienia do opanowania:

Metody bezpośrednie rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych z macierzami rzadkimi. Algorytm Thomasa. Metody rozwiązywania nad-określonych układów liniowych równań algebraicznych.

### Zadania:

(1) Znajdź pseudorozwiązanie nad-określonego układu równań:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 2 \\ 5x + 6y = 3 \end{array} \right\}$$

posługując się metodą najmniejszych kwadratów, poprzez bezpośrednie rozwiązanie układu równań normalnych.

### Program:

Napisz program w języku „C/C++”, realizujący algorytm Thomasa dla macierzy trój-diagonalnej o dowolnych rozmiarach  $N \times N$ , a następnie zastosuj ten program do rozwiązania układu równań  $Ax = b$ , w którym

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 2/3 & & & & \\ 3/4 & 20 & 5/6 & & & \\ & 7/8 & 10 & 9/10 & & \\ & & 11/12 & 10 & 13/14 & \\ & & & 15/16 & 20 & 17/18 \\ & & & & 19/20 & 30 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 94/3 \\ 173/4 \\ 581/20 \\ -815/28 \\ -6301/144 \\ -319/10 \end{bmatrix}$$

Program należy zrealizować w postaci dwóch odrębnych procedur: jednej, która operuje wyłącznie na macierzy  $A$ , i drugiej, która operuje wyłącznie na wektorze  $b$ , korzystając z wyników działania procedury pierwszej.

## Zajęcia nr 7:

### Zagadnienia do opanowania:

Metody iteracyjne rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych. Metody Richardsona, Jacobiego, Gaussa-Seidela, SOR. Kryteria zbieżności metod iteracyjnych.

### Zadania:

(1) Dany jest układ równań liniowych  $Ax = b$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 49 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Oceń zbieżność metody iteracyjnej Jacobiego (w normie maximum) dla tego układu, posługując się twierdzeniem Banacha o kontrakcji.

### Program:

Napisz program w języku „C/C++”, rozwiązujący układ czterech równań liniowych metodami iteracyjnymi: (a) Jacobiego, (b) Gaussa-Seidela, (c) SOR z parametrem  $\omega = 1/2$ , a następnie zastosuj

ten program do rozwiązania układu równań liniowych  $Ax = b$ , gdzie  $A = \begin{bmatrix} 100 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 300 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & 400 & 9 \\ -10 & 11 & -12 & 200 \end{bmatrix}$ ,

$$b = \begin{bmatrix} 395 \\ 603 \\ -415 \\ -606 \end{bmatrix}.$$

Przyjmij przybliżenie początkowe  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Zastosuj trzy niezależne kryteria zakończenia iteracji. Zadbaj o to, aby wyprowadzać na konsolę wyniki pośrednie obliczeń dla każdej iteracji, tak aby możliwe było obserwowanie zbieżności kolejnych przybliżeń pierwiastków i porównanie liczby iteracji niezbędnych do uzyskania (za pomocą różnych metod) rozwiązania o zadanej dokładności bezwzględnej. W szczególności oblicz jak zmienia się estymator błędu rozwiązania oraz residuum układu w trakcie kolejnych iteracji.

## Zajęcia nr 8:

### Zagadnienia do opanowania:

Podstawy przybliżeń różnicowych dla pochodnych funkcji. Wyznaczanie błędów obciążenia przybliżeń.

### Zadania:

(1) Udowodnij, że jednostronne przybliżenia trzypunktowe na pierwszą pochodną w początkowym i końcowym węźle sieci jednorodnej  $x_0, \dots, x_n$  o kroku  $h$ , dane wzorami:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2}f(x_2)}{h}, \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_n} \approx \frac{\frac{3}{2}f(x_n) - 2f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_{n-2})}{h}, \text{ mają}$$

dokładność drugiego rzędu.

(2) Udowodnij, że pięciopunktowe przybliżenia różnicowe na pierwszą i drugą pochodną w wewnętrznym węźle sieci jednorodnej  $x_0, \dots, x_n$  o kroku  $h$ , dane wzorami:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{\frac{1}{12}f(x_{i-2}) - \frac{2}{3}f(x_{i-1}) + 0f(x_i) + \frac{2}{3}f(x_{i+1}) - \frac{1}{12}f(x_{i+2})}{h}$$
$$\left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{-\frac{1}{12}f(x_{i-2}) + \frac{4}{3}f(x_{i-1}) - \frac{5}{2}f(x_i) + \frac{4}{3}f(x_{i+1}) - \frac{1}{12}f(x_{i+2})}{h^2}$$

mają dokładność czwartego rzędu.

### Program:

Napisz program w języku „C/C++”, obliczający przybliżone wartości pierwszych pochodnych funkcji  $f(x) = \cos(x/2)$  w punktach końcowych i środkowym przedziału  $[0, \pi]$  zmiennej  $x$ . Zastosuj wszystkie omawiane na wykładzie i na ćwiczeniach przybliżenia różnicowe dwupunktowe i trzypunktowe (jednostronne bądź centralne, w zależności od położenia punktu w przedziale) na sieci jednorodnej o kroku  $h$ . Wykonaj (na jednym rysunku) wykresy przedstawiające zależności błędów bezwzględnych przybliżeń różnicowych od kroku sieci, posługując się skalą logarymiczną (tzn. wykresy zależności  $\log_{10}|\text{błąd}|$  od  $\log_{10} h$ ). Na podstawie wykresów wyznacz doświadczalnie rzędy dokładności przybliżeń różnicowych. Sprawdź, czy tak wyznaczone rzędy dokładności pokrywają się z rzędami teoretycznymi i wyjaśnij ewentualne rozbieżności. Ponadto zidentyfikuj wartości kroku sieci poniżej których pojawia się wpływ błędów maszynowych. Obliczenia powtórz dla dwóch typów zmiennych rzeczywistych (**float**, i **double**) i porównaj wyniki.

*Uwaga: najwygodniej jest zastosować wzorzec funkcji (**function template**) z typem zmiennych jako parametrem wzorca.*



## Zajęcia nr 9:

### Zagadnienia do opanowania:

Metody różnicowe rozwiązywania zagadnień z warunkami brzegowymi dla równań różniczkowych zwyczajnych 2-go rzędu.

### Zadania:

(1) Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu:  $x^2 u''(x) + (2 - x^2) u'(x) - x u(x) + 4 = 0$ , określone na przedziale  $x \in [0, 2]$ , oraz warunki brzegowe  $u(0) = 1$ ,  $u(2) = 3$ . Mając daną jednorodną siatkę węzłów:  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ , wyznacz przybliżone rozwiązanie równania w punkcie  $x = 1$ , przy zastosowaniu centralnych przybliżeń różnicowych na pochodne.

(2) Dane jest częściowo nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu, o postaci:

$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} - F(x, U(x)) = 0$ . Udowodnij, że konwencjonalny schemat różnicowy:

$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - F(x_i, u_i) = 0$  aproksymuje to równanie z dokładnością drugiego rzędu na sieci

jednorodnej o kroku  $h$ , natomiast schemat różnicowy B. Numerowa:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - \left[ \frac{1}{12} F(x_{i-1}, u_{i-1}) + \frac{10}{12} F(x_i, u_i) + \frac{1}{12} F(x_{i+1}, u_{i+1}) \right] = 0$$

aproksymuje to równanie z dokładnością czwartego rzędu, mimo że korzysta z tej samej liczby (trzech) węzłów sieci. (Wyjaśnienie: „Numerow” to nazwisko rosyjskiego astronoma).

### Program:

Napisz program w języku „C/C++”, rozwiązujący równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + 4U(x) + \tan(x) = 0, \text{ określone na przedziale } 0 \leq x \leq \pi/4,$$

z warunkami brzegowymi  $U(0) = 0$ ,  $U(\pi/4) = 1/2$ . Zastosuj typ **double** oraz trzypunktową dyskretyzację konwencjonalną oraz dyskretyzację Numerowa na sieci jednorodnej. Do rozwiązania układu liniowych równań algebraicznych zastosuj algorytm Thomasa (patrz zajęcia nr 6). Wykonaj rysunek przedstawiający porównanie uzyskanych wyników numerycznych z rozwiązaniem

analitycznym  $U(x) = \frac{1}{4} [2x \cos(2x) + 2 \sin(2x) - \ln(2) \sin(2x) - 2 \ln(\cos(x)) \sin(2x)]$ . Pokaż, że rząd

dokładności rozwiązań numerycznych jest zgodny z przewidywaniami teoretycznymi wynikającymi z zadania 2. W tym celu wykonaj (na jednym rysunku) wykresy przedstawiające zależność maksymalnego błędu bezwzględnego rozwiązań od kroku sieci  $h$ , posługując się skalą logarytmiczną (tzn. wykresy zależności  $\log_{10} |\text{błąd}|$  od  $\log_{10} h$ ). Na podstawie wykresów wyznacz doświadczalnie rzędy dokładności rozwiązań uzyskanych za pomocą różnych metod, i porównaj je z rządami teoretycznymi. Ponadto zidentyfikuj wartości kroku sieci poniżej których pojawia się wpływ błędów maszynowych.

## Zajęcia nr 10:

### Zagadnienia do opanowania:

Metody różnicowe rozwiązywania zagadnień z warunkiem początkowym dla równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Metody bezpośrednie i pośrednie a kwestia stabilności numerycznej. Metody: bezpośrednia Eulera, pośrednia Eulera, trapezów.

### Zadania:

(1) Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{10t^2 + 20}{t^2 + 1} [y(t) - 1] = 0, \text{ określone dla zmiennej } t \geq 0,$$

z warunkiem początkowym  $y(0) = 0$ . Określ typ tego równania (rozpadu, wzrostu, oscylacyjne) i zbadaj jakie warunki muszą być spełnione, aby metody:

(a) bezpośrednia Eulera

(b) pośrednia Eulera

(c) metoda trapezów

dawały stabilne bądź niestabilne numerycznie rozwiązanie tego równania.

(2) Przeprowadź analogiczną analizę, jak w zadaniu 1, dla następujących równań różniczkowych zwyczajnych określonych dla  $t \geq 0$ :

$$y'(t) + 2t + 3y(t) = 0, \quad y'(t) + 2t - 3y(t) = 0,$$

$$y'(t) - 3(1+t)y(t) = 0, \quad y'(t) + (1+t^2)y(t) = 0.$$

### Program:

Napisz program w języku „C/C++”, rozwiązujący równanie różniczkowe z zadania 1, za pomocą metod:

(a) bezpośredniej Eulera

(b) pośredniej Eulera

(c) metody trapezów.

Dla metod (b) i (c) wykonaj oddzielne rysunki przedstawiające po dwa wykresy: wykres przykładowego rozwiązania numerycznego oraz (dla porównania) wykres rozwiązania analitycznego:  $y(t) = 1 - \exp\{-10[t + \arctg(t)]\}$ . Oba wykresy winny przedstawiać zależność  $y$  od zmiennej niezależnej  $t$ . Rozwiązania analityczne zaznacz linią ciągłą, a numeryczne punktami. W przypadku metody (a) wykonaj dwa takie rysunki: jeden uzyskany w warunkach numerycznej stabilności metody, a drugi w warunkach numerycznej niestabilności. Wyjaśnij różnice pomiędzy uzyskanymi wykresami.

Pokaż, że rząd dokładności uzyskanych stabilnych rozwiązań numerycznych jest zgodny z przewidywaniami teoretycznymi. W tym celu wykonaj (na jednym rysunku) wykresy przedstawiające zależności maksymalnych błędów bezwzględnych rozwiązań uzyskanych trzema metodami, od kroku sieci czasowej  $\delta t$ , posługując się skalą logarytmiczną (tzn. wykresy zależności  $\log_{10}|\text{błąd}|$  od  $\log_{10} \delta t$ ). Na podstawie wykresów wyznacz doświadczalnie rzędy dokładności rozwiązań uzyskanych za pomocą różnych metod i porównaj je z rzędami teoretycznymi. O ile to możliwe, zidentyfikuj też wartości kroku sieci poniżej których pojawia się wpływ błędów maszynowych.

## Zajęcia nr 11

### Zagadnienia do opanowania:

Metody rozwiązywania zagadnień z warunkiem początkowym i brzegowym dla równań różniczkowych cząstkowych w przestrzeni jednowymiarowej.

### Zadania:

(1) Dane jest równanie różniczkowe cząstkowe dyfuzji:  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$  ze współczynnikiem dyfuzji  $D = 1$ .

Równanie określone jest dla  $x \in [-1, 1]$  i towarzyszą mu: warunek początkowy  $u(x, 0) = x^3$ ,

oraz warunki brzegowe  $u(-1, t) = -1 - t$ ,  $u(1, t) = 1 + t$ .

Przyjmij jednorodną siatkę węzłów przestrzennych:  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ , oraz krok czasowy  $\delta t = 1$ . Przy tych założeniach wyznacz przybliżone wartości rozwiązania pow. problemu w węzłach przestrzennych, dla  $t = 1$ , stosując metody:

(a) klasyczną bezpośrednią,

(b) Laasonen, oraz

(c) Cranka-Nicolson.

W każdym przypadku podaj i uzasadnij czy tak uzyskane rozwiązania są numerycznie stabilne.

(2) Zaproponuj uogólnienia pośrednich metod różnicowych: a) Laasonen, b) Cranka-Nicolson, dla jednowymiarowego równania dyfuzji we współrzędnych Kartezjańskich, zależnego od czasu, na

liniowe równanie cząstkowe typu reakcji-dyfuzji:  $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - r U(x,t)$

(gdzie  $r$  jest stałą szybkości reakcji), przy założeniu jednorodnych sieci czasowo-przestrzennych.

Wyprowadź stosowne układy algebraicznych równań liniowych, przy założeniu warunków brzegowych Dirichleta:  $U(0, t) = \alpha(t)$ ,  $U(L, t) = \beta(t)$ .

### Program:

W ramach zajęć konsultacja ćwiczeń zaliczeniowych związanych z rozwiązywaniem równań różniczkowych cząstkowych

## Zajęcia nr 12:

### **Zagadnienia do opanowania:**

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a funkcji jednej zmiennej. Bazy: potęgowa, Lagrange'a i Newtona wielomianów interpolacyjnych. Algorytm Hornera. Algorytm Neville'a. Zjawisko Rungego w interpolacji wielomianowej Lagrange'a funkcji jednej zmiennej. Interpolacja wielomianowa Hermite'a funkcji jednej zmiennej.

### **Zadania:**

(1) Wyznacz wielomian interpolacyjny Lagrange'a przechodzący przez punkty:  $(x_i, f(x_i)) = (4, 2), (-6, -8), (-5, 4), (1, 10)$ , stosując (a) bazę Lagrange'a, (b) bazę Newtona.

(2) Stosując algorytm Neville'a, oblicz wartość wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a przechodzącego przez punkty:

$(x_i, f(x_i)) = (-1, -1), (2, 2), (-3, 3)$ , dla wartości zmiennej niezależnej  $x = 1$ .

(3) Posługując się bazą Newtona, wyznacz wielomian interpolacyjny Hermite'a  $p(x)$ , spełniający warunki:

$$p(0) = 0, p'(0) = 1, p''(0) = 2$$

$$p(1) = 3, p'(1) = 4,$$

### **Program:**

(1) Napisz program w języku „C/C++”, demonstrujący zjawisko Rungego w interpolacji wielomianowej Lagrange'a, na przykładzie interpolacji funkcji  $f(x) = x/(1 + 20x^4)$ , określonej na przedziale  $[-1, 1]$ . Zastosuj bazę Newtona do konstrukcji wielomianów interpolacyjnych. Porównaj wyniki interpolacji na węzłach równoodległych z wynikami interpolacji na węzłach Czebyszewa. Wykonaj wykres interpolowanej funkcji oraz uzyskanych wielomianów interpolacyjnych.

## Zajęcia nr 13:

### Zagadnienia do opanowania:

Interpolacja funkcjami sklejanymi. Interpolacja biliniowa funkcji dwóch zmiennych.  
Numeryczne obliczanie całek oznaczonych. Kwadratury.

### Zadania:

(1) Określ wartości współczynników  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , i  $d$  tak, aby otrzymać naturalną funkcję sklejaną stopnia trzeciego z węzłami 0, 1 i 2:

$$S(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^3 & x \in [0, 1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

(2) Dane są węzły i wartości funkcji dwóch zmiennych:

$(x_i, y_j, f(x_i, y_j)) = (0, 0, 1), (2, 0, 2), (0, 4, 3), (2, 4, 4)$ .

Stosując interpolację biliniową, wyznacz przybliżoną wartość funkcji  $f(x, y)$  w punkcie  $(x, y) = (1, 1)$ .

(3) Funkcja  $f(x)$  przyjmuje wartości:  $-1, 3, 7, 8, 6$ , odpowiednio dla  $x = 0, 1, 2, 4$  i  $6$ . Oblicz

przybliżoną wartość całki  $\int_0^6 f(x) dx$ , posługując się złożonymi kwadraturami:

- (a) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji po lewej stronie przedziału)
- (b) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji po prawej stronie przedziału)
- (c) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji w środku przedziału)
- (d) trapezów
- (e) parabol

W przypadkach (c) i (e) zastosuj wzory kwadratur prostych do dwóch pod-przedziałów  $[0,2]$  i  $[2,6]$ , a w pozostałych przypadkach do czterech pod-przedziałów.

(4) Przedział  $[0,8]$  podzielono na 8 równoodległych pod-przedziałów. W węzłach otrzymanej w ten sposób siatki funkcja  $f(x)$  przyjmuje odpowiednio wartości:  $-5, -3, 1, 2, 1, -1, 2, 5$  i  $4$ . Stosując

metodę Romberga, oblicz możliwie najdokładniej przybliżoną wartość całki  $\int_0^8 f(x) dx$ .

(5) Oblicz przybliżoną wartość całki  $\int_{-1}^1 (x^4 + 1) dx$  za pomocą kwadratury Gaussa z dwoma punktami węzłowymi. Porównaj wyznaczoną wartość z wartością dokładną.

### Program:

Napisz program w języku „C/C++”, obliczający numerycznie wartości funkcji:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x \exp(-y^2) dy, \text{ dla } x = 1.0, 2.0, 3.0.$$

Zastosuj złożone kwadratury:

- (a) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji po lewej stronie przedziału)
- (b) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji po prawej stronie przedziału)
- (c) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji w środku przedziału)
- (d) trapezów
- (e) parabol

na sieci o stałym kroku  $h$ . Oblicz błąd względny wyniku dla  $x = 3.0$  w funkcji kroku  $h$  i pokaż, że rzędy dokładności zastosowanych kwadratur są zgodne z przewidywaniami teoretycznymi. W tym celu wykonaj (na jednym rysunku) wykresy zależności  $\log_{10}|\text{błędu}|$  od  $\log_{10} h$ . Na podstawie wykresów wyznacz doświadczalnie rzędy dokładności kwadratur. Do obliczenia ścisłych wartości funkcji  $\text{erf}(x)$  (z dokładnością zbliżoną do maszynowej) zastosuj pakiet CALERF udostępniony przez prowadzącego zajęcia.