Aurehøj Gymnasium Studieretningsprojekt 2024

	Elevnavn: Casper Yukun Liu	Klasse: 3.x
Fag og niveau: Fysik A /Matematik A		
Vejleder(e): Lasse Albæk / Alexandra Michelsen		
Kontaktinfo til vejledere (arbejdsmail): las@aurehoej.dk/am@aurehoej.dk		

Opgavebesvarelsen uploades af dig som PDF-fil i netprøver.dk senest torsdag den 11. april 2024 kl. 15.00. Opgavens omfang skal svare til 15-20 sider af 2400 enheder (antal anslag inklusive mellemrum) jf. "Læreplan Studieretningsprojektet (SRP)". Eleven bekræfter ved at aflevere opgaven, at omfanget af opgaven er inden for det angivne antal sider.

Angående omfang: Forside, indholdsfortegnelse, noter, litteraturliste, figurer, tabeller og lignende materialer medregnes ikke i omfanget af opgaven. Eventuelle bilag betragtes ikke som en del af det skriftlige produkt, der indgår i den samlede bedømmelse. *Det dansksprogede resumé derimod indgår i de 15-20 sider.*

Såfremt teksten indeholder større mængder symbolsprog, f.eks. matematiske ligninger og formler, kan disse dele af besvarelsen opgøres ud fra deres omfang på de givne sider uden at tælle antal enheder.

Eleven bekræfter også ved at aflevere opgaven, at opgaven er skrevet af eleven selv, og at der ikke er plagieret – heller ikke ved brug af kunstig intelligens (AI).

Emneområde for SRP-projektet:

Speciel Relativitetsteori

Opgaveformulering for SRP-projektet:

Hvorledes ændrer den specielle relativitetsteori ved begrebet koordinattransformation, og hvordan har det betydning for partiklers levetid?

Gør rede for den specielle relativitetsteori, og udled herfra eksempler på konsekvenser af den specielle relativitetsteori såsom tidsforlængelse og længdeforkortning. Kom derudover ind på Lorentztransformationen og dens brug i forbindelse med omregning mellem inertialsystemer.

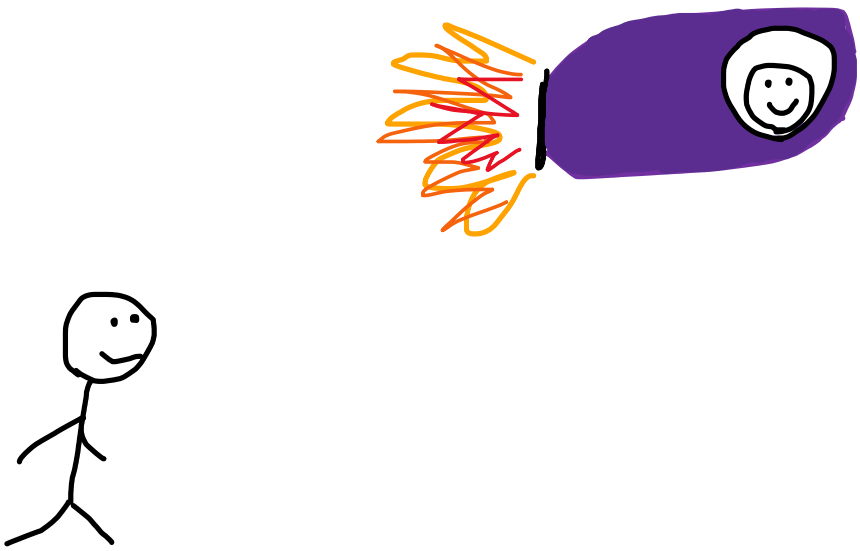
Introducer matrixregning og redegør for udvalgte regneregler med matricer. Kom herunder ind på den inverse matrix og hvordan denne bestemmes.

Vis hvordan Lorentztransformationen kan formuleres ved matrixregning. Beskriv derudover, hvad den inverse Lorentztransformationsmatrix kan benyttes til.

Analyser data fra et forsøg med bestemmelse af myonens levetid, og diskuter resultaternes betydning i forhold til understøttelse af den specielle relativitetsteori.

SRP i Matematik A og Fysik A

DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI



Casper Yukun Liu 3x

Aurehøj Gymnasium
11. april 2024

Emneområde for SRP-projektet:

Speciel Relativitetsteori

Opgaveformulering for SRP-projektet:

Hvorledes ændrer den specielle relativitetsteori ved begrebet koordinattransformation, og hvordan har det betydning for partiklers levetid?

Gør rede for den specielle relativitetsteori, og udled herfra eksempler på konsekvenser af den specielle relativitetsteori såsom tidsforlængelse og længdeforkortning. Kom derudover ind på Lorentztransformationen og dens brug i forbindelse med omregning mellem inertialsystemer.

Introducer matrixregning og redegør for udvalgte regneregler med matricer. Kom herunder ind på den inverse matrix og hvordan denne bestemmes.

Vis hvordan Lorentztransformationen kan formuleres ved matrixregning. Beskriv derudover, hvad den inverse Lorentztransformationsmatrix kan benyttes til.

Analyser data fra et forsøg med bestemmelse af myonens levetid, og diskuter resultaternes betydning i forhold til understøttelse af den specielle relativitetsteori.

Resumé

Denne opgave redegør for den specielle relativitetsteori. Galileitransformationen introduceres, og dens begrænsninger tydeliggøres gennem Michelson-Morley eksperimentet. Herefter introduceres matrixregning og relevante regneregler. Ved hjælp af matrixregning og Einsteins postulater udledes Lorentz-transformationen, og derefter dens inverse. Ved at benytte disse udledes fænomenerne relativistisk samtidighed, tid og længde; fænomener som er relevante for legemer der bevæger sig med hastigheder tæt på lysets. Endelig gennemgås et forsøg med detektion af myoner og måling af deres levetid, der ifølge Galileitransformationen bør være alt for kort til at vi kan måle en konstant rate af myoner på jordoverfladen. Resultatet af forsøget rationaliseres ved hjælp af den specielle relativitetsteori; da myoner bevæger sig med hastigheder meget tæt på lysets oplever de relativistiske effekter der forklarer hvordan vi kan detektere dem ved jordoverfladen.

Indholdsfortegnelse

Indledning

Få forskere har været så succesfulde som Albert Einstein. Einsteins teori om den specielle relativitetsteori, udgivet i hans såkaldte "mirakel-år" 1905, var startskuddet på det der i dag kaldes den moderne fysik. Men navnet moderne indebærer noget klassisk at stå overfor. I denne opgave vil jeg først redegøre for den klassiske fysik, og derefter forklare nødvendigheden i en ny teori, og hvorledes den specielle relativitetsteori besvarer denne nød. Jeg udleder derefter nogle af konsekvenserne der følger af den specielle relativitetsteori, og til slut eftervises teorien eksperimentelt. Den specielle relativitetsteori er et meget bredt emne, men grundet pladsmangel i opgaven har jeg valgt at prioritere det stof der er relevant for det endelige forsøg.

Den klassiske fysik

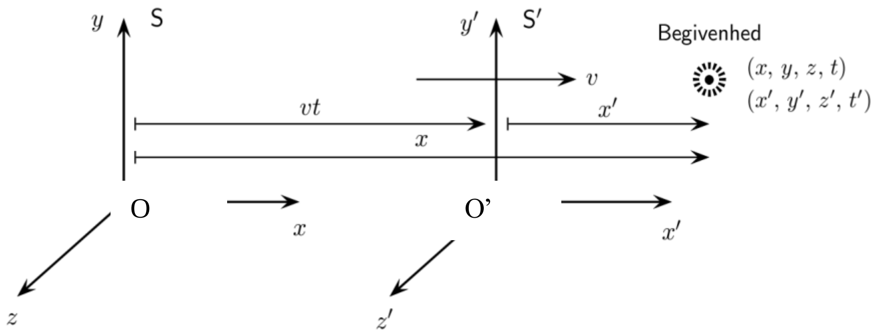
For at forstå nødvendigheden i den specielle relativitetsteori bør man først forstå den klassiske fysik og dens restriktioner.

Galileitransformationen[1]

Et inertialsystem er et fysisk referencesystem i hvilket Newtons 1. lov (inertiens lov) er opretholdt:

$$\vec{F} = \vec{0}$$

Referencesystemet foretager altså en jævn og retlinjet bevægelse med konstant hastighed (ingen acceleration). I den klassiske fysik beskrives to inertialsystemers bevægelse i forhold til hinanden ved hjælp af Galileitransformationen. Betragt et vilkårligt stift legeme i hvile, hvis referencesystem er inertialsystemet S. Et andet referencesystem S' bevæger sig med konstant hastighed $\vec{v}$ i forhold til S. I begge systemer tegnes tre-retvinklede koordinatsystemer som vist på Figur 1:



[2]

Figur 1: To inertialsystemer S og S', hvor S' bevæger sig med hastigheden $\vec{v}$ i forhold til S.

[1] Dam, Mogens: Introduktion til den specielle relativitetsteori
[2] Dam, Mogens: Introduktion til den specielle relativitetsteori (s.3)

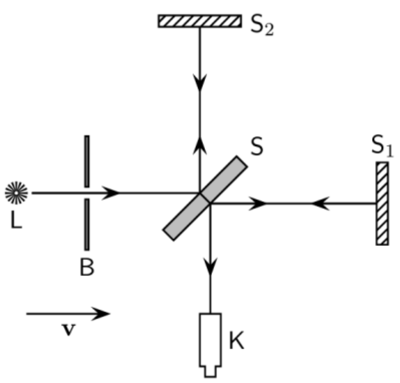
Antag nu, at de to tre-retvinklede koordinatsystemer X-Y-Z og X'-Y'-Z' ligger oven i hinanden, sådan at X'-aksen er sammenfaldende med X-aksen. X,X'-aksen har samme retning som S's bevægelse i forhold til S, altså parallel med $\vec{v}$. Tidstællingen $t = 0$ defineres nu som det punkt hvor origo for S'-koordinatsystemet passerer origo for S-koordinatsystemet, altså $O' = O$. Hvis vi antager, at tiden er invariant[3] ($t = t'$), kan vi ud fra figuren udlede Galileitransformationen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + vt' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - vt \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

Da systemet S' må have bevæget sig afstanden vt' til $t = t'$.

Æterhypotesen og Michelson-Morley forsøget[4]

Den danske astronom Ole Rømer opdagede, at lyset havde en hastighed. Man troede dengang, at lyset måtte kræve et medium - æteren - at bevæge sig i, da det lød usandsynligt at lyset kunne bevæge sig frit i vakuum. Ifølge æterhypotesen ville æteren være i hvile i forhold til fiksstjernesystemet[5], og udgør et absolut rum, fra hvilket alle systemer i bevægelse ville afvige. I ethvert andet inertialsystem der bevæger sig i forhold til æteren ville man altså kunne måle en afvigelse fra lysets "absolutte" hastighed c. I årene 1881-1887 søgte Michelson og Morley at udnytte jordens rotationshastighed (ca. $30\frac{km}{s}$) til at beregne Jordens relative hastighed i forhold til æteren. De gjorde dette ved at sende lys fra en lyskilde L gennem et halvgennemsigtigt spejl S på en 45° vinkel, hvilket deler lysstrålen i to: den ene del fortsætter parallel med jordens bevægelsesretning (mod spejlet S_1), og den anden del vinkelret på jordens bevægelsesretning (mod spejlet S_2). De to stråler reflekteres derefter tilbage til S hvor de danner et interferensmønster i kikkerten K. Opstillingen illustreres på figur 2:



[6]

Figur 2: Michelson-Morley eksperimentet

[3] *Invariant*: uændret under transformation
[4] Dam, Mogens: Introduktion til den specielle relativitetsteori
[5] En fiksstjerne er en betegnelse for de stjerner der befinder sig så langt fra Jorden, at deres position på himlen kan regnes som konstant.
[6] Dam, Mogens: Introduktion til den specielle relativitetsteori (s.10)

Kalder vi jordens hastighed gennem æteren for v og afstanden fra S til S_1 for l_1 må det tage lyset følgende tid at bevæge sig afstanden l_1:

$$t_1 = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_1 c}{c^2 - v^2}$$

Da lyset ifølge Galileitransformationen må have hastigheden $c - v$ når det bevæger sig fra S til S_1, og hastigheden $c + v$ når det bevæger sig fra S_1 til S. For at beregne afstanden mellem S og S_2 må der tages hensyn til, at Jorden, og dermed forsøgsopstillingen bevæger sig i forhold til æteren med hastigheden $\vec{v}$. Da S_2 står vinkelret på S må lyset bevæge sig med hastigheden $\vec{c}$, som bliver hypotenusen på en retvinklet trekant hvor $\vec{v}$ er den ene katete, og dermed må den anden katete x blive:

$$c^2 = v^2 + x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{c - v}$$

Dermed bliver tiden det tager lyset at bevæge sig afstanden SS_2S:

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Hvis vi indstiller forsøget således at $l_1 = l_2$ får vi følgende forskel i tiden det tager lysets delstråler at komme frem og tilbage:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2lc}{c^2 - v^2} - \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Og da $v \neq 0$ må $\Delta t \neq 0$. Lysets delstråler må altså ifølge Galileitransformationen bevæge sig den samme afstand l på to forskellige tider. Som følge af dette må man observere et anderledes interferensbillede, såfremt opstillingen drejes 90°, altså der byttes rundt på S_1 og S_2. Denne effekt udeblev dog under Michelson-Morley eksperimentet, og den nødvendige konklusion var, at lys må have samme hastighed i alle inertialsystemer. Æterhypotesen var altså ugyldig; der eksisterer intet absolut rum.

Einsteins postulater[7]

Ud fra de ovenstående konklusioner formulerede Einstein sine postulater om den specielle relativitetsteori:

I.

Alle inertialsystemer er ligeberettiget for udførelsen af alle fysiske eksperimenter

II:

Lyets hastighed c i et vakuum er konstant i alle retninger for ethvert inertialsystem.

[7] Dam, Mogens: Introduktion til den specielle relativitetsteori (s.12)

Både I og II går direkte imod den klassiske fysik. Postulatet I forkaster alle antagelser om absolut rum og hermed også æterhypotesen. Postulatet II er iøjnefaldende: Står man på et tog der bevæger sig med hastigheden $0{,}9c$ og tænder en lommelygte, vil lyset fra lygten ikke bevæge sig med hastigheden $(0{,}9 + 1)c$ men i stedet blot med c; i direkte modstrid med Galileitransformationen. Postulatet II forklarer desuden det observerede resultat i Michelson-Morley eksperimentet. Hvor lyset ifølge Galileitransformationen måtte have tre forskellige hastigheder $c - v$, $c + v$ og $\sqrt{c^2 - v^2}$ må lyset ifølge den specielle relativitetsteori kun have hastigheden c. Man får dermed:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2lc}{c^2} - \frac{2l}{c} = 0$$

Præcis som observeret. Opgørelsen med Galileitransformationen betyder at den specielle relativitetsteori kræver derfor en ny transformation - én, der lader lysets hastighed forblive konstant.

Matrixregning[8]

En matrix er et talskema på tabelform. Matricer kan have forskellige størrelser og opskrives på følgende måde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matricen A ovenfor er af typen $m \times n$, med m rækker og n søjler. En matrix med $n = 1$ kaldes en søjlematrix. Matricen M indeholder $m \cdot n$ elementer. Eksempelvis gives følgende matrix M:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Matricen M er en (2×4)-matrix der indeholder $2 \cdot 4 = 8$ elementer.

Identitetsmatricen - også kaldet enhedsmatricen - af størrelse n, er den matrix af typen n x n der har tallet 1 i alle diagonalindgange, og tallet 0 i alle andre elementer. Som eksempel gives identitetsmatricen af størrelse 3:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Totalmatricen $T = (A|B)$ er en matrix af to kolonner der begge indeholder en matrix, A og B.

---

[8] Schmidt, Karsten: Matricer og matrixalgebra

Matrix-skalar produkt[9]

Produktet mellem en matrix A og en skalar k gives ved at gange skalaren på hvert element i matricen. Betragt igen matrix A og et vilkårligt reelt tal k. Da bliver matrix-skalarproduktet:

$$Ak = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \cdots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \cdots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrix-vektorprodukt[10]

Enhver vektor kan opskrives som en søjlematrix. Vektorer på søjlematrixform kaldes søjlevektorer. Et matrix-vektorprodukt er defineret såfremt matricen indeholder samme antal søjler som søjlevektoren indeholder rækker. Ved at bruge vores definition på matrix-skalarproduktet kan vi nu definere matrix-vektorproduktet mellem en matrix $A(m \times n)$ og en vektor $\vec{v}$ som:

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + v_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Resultatet af et matrix-vektorprodukt er altså en søjlevektor med m rækker.

Matrix-matrixprodukt[11]

Matrixproduktet af to matricer C og D er defineret såfremt antallet af søjler i C er lig antallet af rækker i D. Hvis C er af typen m x n skal D altså være af typen n × p. I så fald "opsplittes" matricen D i p søjlevektorer. Matrixproduktet defineres som følger:

$$CD = [Cd_1 \quad Cd_2 \quad \dots \quad Cd_p]$$

Hvor $d_1, d_2, \dots, d_p$ er søjlevektorer dannet ved at dele matricen D i sine søjler. Den resulterende matrix kommer altså til at være af typen m x p.

[9] Ibid.
[10] Ibid.
[11] Ibid.

Elementære rækkeoperationer[12]

Elementære rækkeoperationer er operationer der sker elementvis over rækker. Der er tre elementære rækkeoperationer for matricer:

1. Der lægges kR_i til R_j:

$$\begin{bmatrix} --R_i-- \\ \vdots \\ --R_j-- \end{bmatrix} \xrightarrow{R_j+kR_i \to R_j} \begin{bmatrix} --R_i-- \\ \vdots \\ --R_j+kR_i-- \end{bmatrix}$$

2. Række R_i skiftes med række R_j:

$$\begin{bmatrix} --R_i-- \\ \vdots \\ --R_j-- \end{bmatrix} \xrightarrow{R_i \Leftrightarrow R_j} \begin{bmatrix} --R_j-- \\ \vdots \\ --R_i-- \end{bmatrix}$$

3. En konstant $k \neq 0$ ganges på række R_i:

$$\begin{bmatrix} --R_i-- \\ \vdots \\ --R_j-- \end{bmatrix} \xrightarrow{kR_i \to R_i} \begin{bmatrix} --kR_i-- \\ \vdots \\ --R_j-- \end{bmatrix}$$

Udføres elementære rækkeoperationer på en totalmatrix $T = (A|B)$ skal hver elementær rækkeoperation udføres på både A og B. Et eksempel på brug af elementære rækkeoperationer gives i udledningen af den inverse Lorentz-transformation.

Den inverse matrix[13]

En kvadratisk matrix A af typen n × n er *invertibel* hvis der eksisterer en matrix B af typen n x n der opfylder følgende:

$$AB = BA = I_n$$

Hvor I_n er identitetsmatricen af størrelsen n. Matricen B kaldes dermed den inverse matrix af A og skrives også som $B = A^{-1}$

Eksempelvis betragtes følgende kvadratiske matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Den inverse matrix til A er følgende:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{34} & -\frac{1}{17} \\ -\frac{1}{34} & \frac{2}{17} \end{bmatrix}$$

A^{-1} må opfylde, at $AA^{-1} = I_2$:

[12] Ibid.
[13] Ibid.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{9}{34} & -\frac{1}{17} \\ -\frac{1}{34} & \frac{2}{17} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \frac{9}{34} \\ -\frac{1}{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{17} \\ \frac{2}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \frac{36}{34} - \frac{2}{34} & -\frac{4}{17} + \frac{4}{17} \\ \frac{9}{34} - \frac{9}{34} & -\frac{1}{17} + \frac{18}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Præcis som ønsket. Såfremt den eksisterer, kan den inverse matrix til en kvadratisk matrix $A(n \times n)$ beregnes ved at opstille totalmatricen $(A|I_n)$. Ved hjælp af elementære rækkeoperationer omdanner man matricen A til enhedsmatricen I_n, hvorefter den inverse matrix af A, nemlig A^{-1}, kan aflæses på højre kolonne af totalmatricen.

Lorentz-transformationen[14]

Lorentz-transformationen transformerer rumtidsafstanden (t, x, y, z) for en punktbegivenhed i et inertialsystem S over til rumtidsafstanden (t', x', y', z') for samme punktbegivenhed i et andet inertialsystem S' der bevæger sig med en relativ hastighed $\vec{v}$ i forhold til S.

Vi antager, at Lorentz-transformationen er en lineær transformation (forklaring følger). Den må altså pr. definition følge formen:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{10} \\ k_{20} \\ k_{30} \\ k_{40} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Hvor alle k'er er konstante. Betragt igen de to tre-retvinklede koordinatsystemer X-Y-Z og X'-Y'-Z' som ligger oven i hinanden, sådan at X'-aksen er sammenfaldende med X-aksen. X,X'-aksen har samme retning som bevægelsen af S' i forhold til S, altså parallel med $\vec{v}$. Tidstællingen $t = 0$ defineres igen som det punkt hvor origo for S'-koordinatsystemet passerer origo for S-koordinatsystemet $(O' = O)$. Denne punktbegivenhed må have følgende rumtidskoordinater:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dermed må der altså gælde, ud fra (1):

$$k_{10} = k_{20} = k_{30} = k_{40} = 0$$

De to dimensioner Y og Z står vinkelret på bevægelsesretningen (X,X'-aksen), og må derfor forblive uforandrede ved enhver transformation af rumtidsafstand. Der må altså gælde:

$$y = y'$$

$$z = z'$$

[14] Bergstein, T. (1966). Speciel Relativitetsteori.

Indsætter vi disse resultater i (1) får vi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \rho \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \rho t \\ y \\ z \\ \sigma x + \gamma t \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Hvor k_{11}, k_{14}, k_{41} og k_{44} er omdøbt til henholdsvis α, ρ, σ og γ for at gøre udregninger mere overskuelige.

Betragt nu den punktbegivenhed til tiden t hvor O' passerer punktet vt på X-aksen, set fra S. Vi får altså $x = vt$ hvilket giver følgende rumtidskoordinater:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Samme punktbegivenhed set fra S' finder sted til tiden t i punktet 0 på X'-aksen:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{bmatrix}$$

Indsættes dette i transformationsmatricen ovenfor fås:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \rho \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha vt + \rho t \\ 0 \\ 0 \\ \sigma vt + \gamma t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v + \rho \\ 0 \\ 0 \\ \sigma v + \gamma \end{bmatrix} \qquad (3)$$

En iagttager i S' ser O bevæge sig med hastigheden $-v$ relativt til O'. Til tiden t' passerer O dermed punktet $-vt'$ på X'-aksen, hvilket kan beskrives af følgende transformationsmatrix:

$$\begin{bmatrix} -vt' \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \rho \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho t \\ 0 \\ 0 \\ \gamma t \end{bmatrix}$$

Dividerer vi de første elementer i den resulterende søjlematrix-ligning med de sidste får vi:

$$-\frac{vt'}{t'} = \frac{\rho t}{\gamma t} \Leftrightarrow -v\gamma = \rho \qquad (4)$$

Vi betragter nu et lysglimt til tiden $t = t' = 0$ fra et fælles begyndelsespunkt i S og S'.

Idet lysets hastighed er invariant ifølge Einsteins 2. postulat, vil dette lysglimt i begge systemer udbredes som en kuglebølge med radius $r = ct$ og $r' = ct'$. Som følge af kuglens ligning[15] vil der gælde følgende, idet kuglens centrum defineres til punktet $(x, y, z) = (0,0,0)$:

$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ for S

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$ for S'

[15] Kuglen. (s.d.). I: Webmatematik.

Ved at sætte begge ligninger lig nul kan vi nu sætte dem lig hinanden:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

Og da $y = y'$ og $z = z'$ får vi nu:

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$$

Indsætter vi nu udtrykkene for x' og t' fra (2) i denne ligning får vi:

$$x^2 - c^2t^2 = (\alpha x + \rho t)^2 - c^2(\sigma x + \gamma t)^2 \Leftrightarrow x^2 - c^2t^2 - (\alpha x + \rho t)^2 + c^2(\sigma x + \gamma t)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - c^2t^2 - (\alpha^2x^2 + \rho^2t^2 + 2\alpha x\rho t) + c^2(\sigma^2x^2 + \gamma^2t^2 + 2\sigma x\gamma t) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - c^2t^2 - \alpha^2x^2 - \rho^2t^2 - 2\alpha x\rho t + c^2\sigma^2x^2 + c^2\gamma^2t^2 + 2\sigma x\gamma tc^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(1 - \alpha^2 + c^2\sigma^2) - 2xt(\alpha\rho - \sigma\gamma c^2) - t^2(c^2 + \rho^2 - c^2\gamma^2) = 0$$

For enhver x-værdi x_0 må denne ligning være opfyldt for alle $t > \frac{x_0}{c}$ (altså uendelig mange t-værdier), hvilket nødsager at koefficienterne ganget på x^2, $2xt, t^2$ må være lig nul:

$$1 - \alpha^2 + c^2\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = \alpha^2 - c^2\sigma^2 \qquad (5)$$

$$\alpha\rho - \sigma\gamma c^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\rho = \sigma\gamma c^2 \qquad (6)$$

$$c^2 + \rho^2 - c^2\gamma^2 = 0 \Leftrightarrow c^2 + \rho^2 = c^2\gamma^2 \qquad (7)$$

Indsætter vi (4) i (7) får vi:

$$c^2 + (-v\gamma)^2 = c^2\gamma^2 \Leftrightarrow c^2 + v^2\gamma^2 = c^2\gamma^2 \Leftrightarrow c^2 = c^2\gamma^2 - v^2\gamma^2 \Leftrightarrow c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2)$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Kun den positive rod benyttes (forklaring følger), og vi får følgende udtryk for γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

γ kaldes også Lorentz-faktoren, som er et mål for forholdet i tid og længde mellem to inertialsystemer i bevægelse i forhold til hinanden (mere om dette følger).

Indsætter vi udtrykket for γ tilbage i (4) får vi:

$$\rho = \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Som indsat i øverste række i (3) giver os:

$$\alpha v + \rho = 0 \Leftrightarrow \alpha v = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Og:

$$\alpha^2 - c^2\sigma^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 - c^2\sigma^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = c^2\sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = c^2\sigma^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{1}{c^2} = \sigma^2 \Leftrightarrow \sigma = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v}{c^2} = \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Vi indsætter nu disse udtryk for α, ρ, σ og γ tilbage i transformationsmatricen (2):

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

Dette matrix-vektorprodukt giver en søjlevektor med 4 elementer, nemlig Lorentz-transformationens koordinatligninger:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y \\ z \\ -\frac{\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y \\ z \\ \frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Vi ser nu nødvendigheden i kun at beholde den positive rod, da vores transformation må opfylde, at $x' \to x$ for $v \to 0$. Kun den positive rod opfylder dette: $\lim_{v\to 0}(x') = \frac{x-0\cdot t}{\sqrt{1-\frac{0^2}{c^2}}} = x$

Hvorimod $\lim_{v\to 0}(x') = \frac{x-0\cdot t}{-\sqrt{1-\frac{0^2}{c^2}}} = -x$

Lorentz-transformationens linearitet[16]

Det blev i udledningen antaget, at Lorentz-transformationen var en lineær transformation. Nødvendigheden i dette ses i det følgende:

Betragt en ikke-lineær transformation på følgende form:

$$t' = cx + dt$$

$$x' = ax^2 + bt^2$$

Betragt en partikel der foretager en jævn bevægelse ud af x-aksen med den konstante hastighed $\vec{u}$. Bevægelsen følger altså formen $x = ut$, som indsat i ovenstående transformation giver:

$$t' = cut + dt = t(cu + d)$$

$$x' = au^2t^2 + bt^2 = t^2(au^2 + b)$$

Elimineres t i dette ligningssystem fås:

$$x' = \left(\frac{t'}{cu + d}\right)^2 (au^2 + b) = \frac{au^2 + b}{(cu + d)^2} t'^2$$

Denne ligning udtrykker en jævn acceleration[17] af S' i forhold til S, hvilket er i modstrid med vores antagelse om at både S og S' er inertialsystemer, jf. definitionen på et inertialsystem. Lorentz-transformationen må derfor nødvendigvis være lineær.

Den inverse Lorentz-transformation

Det kan være brugbart at finde en transformation der transformerer rumtidsafstanden (t', x', y', z') for en punktbegivenhed i et inertialsystem S' over til rumtidsafstanden (t, x, y, z) for samme punktbegivenhed i et inertialsystem S. I det følgende udledes den inverse Lorentz-transformationsmatrix ved at finde den inverse Lorentz-transformationsmatrix. Kalder vi den inverse Lorentz-transformationsmatrix for L^{-1} må der gælde:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} L^{-1} = I_4$$

[16] Dam, Mogens: Introduktion til den specielle relativitetsteori (s.12)

[17] En jævn acceleration kan beskrives ved en stedfunktion på følgende form: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$

For at løse denne matrixligning opstilles følgende totalmatrix:

$$\left(\left[\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{matrix}\right] \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \qquad (9)$$

Ved brug af elementære rækkeoperationer skal vi nu omregne venstre kolonne til enhedsmatricen af størrelse 4. Anvendes rækkeoperationen $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}R_1 \to R_1$ på (9) får vi:

$$\left(\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{matrix}\right] \middle| \begin{bmatrix} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \left(\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{matrix}\right] \middle| \begin{bmatrix} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Anvendes nu rækkeoperationen $-\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{c^2}}R_4 \to R_4$ fås:

$$\left(\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{v}{c^2}} \end{matrix}\right] \middle| \begin{bmatrix} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{c^2}} \end{bmatrix}\right) = \left(\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\frac{v}{c^2}} \end{matrix}\right] \middle| \begin{bmatrix} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{c^2}} \end{bmatrix}\right)$$

Og med rækkeoperationen $R_4 - R_1 \to R_4$ får vi:

$$\left(\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\frac{v}{c^2}}-(-v) \end{matrix}\right] \middle| \begin{bmatrix} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{c^2}} \end{bmatrix}\right) = \left(\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v-\frac{1}{\frac{v}{c^2}} \end{matrix}\right] \middle| \begin{bmatrix} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{c^2}} \end{bmatrix}\right)$$

Og da $\left(v-\frac{1}{\frac{v}{c^2}}\right)^{-1} = \frac{1}{v-\frac{c^2}{v}}$ kan vi nu anvende rækkeoperationen $\frac{1}{v-\frac{c^2}{v}}R_4 \to R_4$ hvilket giver:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle\| \begin{bmatrix} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v-\frac{c^2}{v}} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{c^2}}\frac{1}{v-\frac{c^2}{v}} \end{bmatrix}\right) \tag{10}$$

Dette udtryk kan reduceres ved hjælp af et par mellemregninger:

$$-\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v-\frac{c^2}{v}} = -\frac{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}{\left(v-\frac{c^2}{v}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v^2}{c^2}-\frac{c^2}{c^2}}{\left(\frac{v^2}{v}-\frac{c^2}{v}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v^2-c^2}{c^2}}{\left(\frac{v^2-c^2}{v}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{1}{c^2}(v^2-c^2)}{\frac{1}{v}(v^2-c^2)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = v\frac{\frac{1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Og:

$$-\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{c^2}}\frac{1}{v-\frac{c^2}{v}} = -\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(v-\frac{c^2}{v}\right)\frac{v}{c^2}} = -\frac{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}{\left(\frac{v^2}{c^2}-\frac{vc^2}{vc^2}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v^2}{c^2}-1}{\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Indsættes disse mellemregninger i (10) får vi:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle\| \begin{bmatrix} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix}\right)$$

Vi vil nu fjerne $-v$ ved først at anvende den elementære rækkeoperation $-\frac{1}{v}R_1 \rightarrow R_1$ som giver os:

$$\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{v} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle\| \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix}\right)$$

Nu anvendes den elementære rækkeoperation $R_4 - R_1 \rightarrow R_1$:

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle\| \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v-\frac{c^2}{v}} + \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix}\right)$$

Og med en sidste elementær rækkeoperation $vR_1 \rightarrow R_1$ får vi identitetsmatricen af størrelse 4 i venstre kolonne af totalmatricen:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} v\left(-\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v-\frac{c^2}{v}} + \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v}\right) & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix}\right)$$

Følgende mellemregning viser at højre kolonne af totalmatricen kan forkortes:

$$v\left(-\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v-\frac{c^2}{v}} + \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v}\right) = \frac{v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v} - \frac{v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v-\frac{c^2}{v}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v-\frac{vc^2}{v^2}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} -$$

$$\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(1-\frac{v^2}{c^2})\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)}{\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(1-\frac{v^2}{c^2})\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)-(1-\frac{v^2}{c^2})}{\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Vi får altså endelig:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix}\right) = (I_4|L^{-1})$$

Vi har hermed udledt den inverse Lorentz-transformationsmatrix:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix}$$

Hvilket giver den fulde inverse Lorentz-transformation:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}$$

Produktet af den inverse Lorentz-transformationsmatrix og Lorentz-transformationsmatricen må give identitetsmatricen af størrelse 4:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} = I_4$$

At denne relation er opfyldt, bevises i det følgende:

Kalder vi den normale Lorentz-transformationsmatrix for L får vi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} L = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} L & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} L & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} L & \begin{bmatrix} \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} L \end{bmatrix}$$

Idet vi husker regnereglerne for matrix-vektorprodukt genkender vi dette som en matrix bestående af 4 søjlematricer (én for hver søjlematrix-L produkt). Den første søjlematrix bliver:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} L = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 \\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\frac{v}{c^2}-\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Den anden søjlematrix bliver:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Den tredje søjlematrix bliver:

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}L=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Den fjerde søjlematrix bliver:

$$\begin{bmatrix}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\end{bmatrix}L=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\ 0\cdot 1\\ 0\cdot 1\\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{v}{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{v}{1-\frac{v^2}{c^2}}\\0\\0\\\frac{-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Samlet bliver produktet af Lorentz-transformationen og den inverse Lorentz-transformation altså:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=I_4$$

Præcis som ønsket.

Når man benytter den inverse Lorentz-transformation, betragter man altså S’ som værende i hvile, og S som bevægende. Idet S’ bevæger sig med hastigheden v i forhold til S, vil S naturligvis bevæge sig med hastigheden $-v$ i forhold til S’, hvilket også fremkommer af transformationsmatricen. Lorentz-transformationen og dens inverse er matematisk ens og vil altså altid give det samme resultat, blot beskrevet på to forskellige måder. Udledningerne for samtidighedens relativitet, tidsforlængelse og længdeforkortelse kunne lige så godt have blevet udledt vha. den inverse Lorentz-transformation, da de to inertialsystemer S og S’ er ligeberettigede, jf. Einsteins 2. postulat.

Samtidighedens relativitet[18]

En af de mest bemærkelsesværdige konsekvenser ved Lorentz-transformationen er samtidighedens relativitet. Betragt to punktbegivenheder p_1 og p_2, med følgende rumtidskoordinater i de to inertialsystemer S og S’:

[18] Bergstein, T. (1966). Speciel Relativitetsteori.

$$p_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \text{ i S og } \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \\ t_1' \end{bmatrix} \text{ i S'}$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{bmatrix} \text{ i S og } \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ z_2' \\ t_2' \end{bmatrix} \text{ i S'}$$

Indsættes disse punktbegivenheder i Lorentz-transformationsligningen for t, fås:

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Og dermed bliver tidsforskellen mellem de to begivenheder $\Delta t'$:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Vi bemærker her, at hvis de to punktbegivenheder finder sted samtidigt i S (altså $t_1 = t_2$), men på forskellige planer (altså $x_1 \neq x_2$), da vil $\Delta t' \neq 0$, altså er $t_1' \neq t_2'$, hvilket udtrykker at de to punktbegivenheder ikke finder sted på samme tid i S'. Vi bemærker desuden, at hvis de to punktbegivenheder finder sted samtidigt i S og også i samme plan vinkelret på x-aksen (altså $x_1 = x_2$), da vil $\Delta t = 0$, altså er $t_1' = t_2{}'$, hvilket udtrykker at de to punktbegivenheder også finder sted samtidigt i S'. Dette er en logisk nødvendighed eftersom X-aksen og X'-aksen bevæger sig i samme retning som den relative hastighed v mellem de to inertialsystemer.

Tidsforlængelse[19]

Vi betragter nu tilfældet, hvor de to punktbegivenheder p_1 og p_2 finder sted i samme sted, men ikke til samme tid. Vi har altså:

$$x_2 = x_1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 0$$

Indsættes dette i ligningen for tidsforskellen $\Delta t'$ ovenfor, fås:

[19] Bergstein, T. (1966). Speciel Relativitetsteori.

$$\Delta t' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t$$

Tid er altså relativ. Det bemærkes desuden, at $0 < \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$ og dermed $\gamma > 1$, idet $v < c$. Enhver iagttager i et system i bevægelse vil altså opleve at tiden går langsommere (med en faktor γ) relativt til en iagttager i et system i hvile.

Længdeforkortelse[20]

Vi betragter nu tilfældet hvor p_1 og p_2 finder sted til samme tidspunkt, men ikke samme sted. Hvis vi anvender den inverse Lorentz-transformation på disse punktbegivenheder får vi:

$$x_1 = \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_2 = \frac{x_2' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Og afstanden mellem de to punkter bliver:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta x'$$

Igen bemærker vi, at de to afstande er relative. Kalder vi afstanden mellem de to punktbegivenheder set fra S for l_0 og afstanden mellem de to punktbegivenheder set fra S' for l får vi:

$$l_0 = l\gamma$$

Alle legemer i bevægelse i forhold til et system i hvile vil altså forkortes med en faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Det er desuden værd at pointere, at disse fænomener, både tidsforlængelse og længdeforkortelse, kun bliver bemærkelsesværdige for hastigheder meget tæt på lyshastigheden c.

Er $v \ll c$, da vil $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1$ og både tidsforlængelsen og længdeforkortelsen vil føles ubetydelige, i overensstemmelse med vores oplevelser fra hverdagen.

[20] Bergstein, T. (1966). Speciel Relativitetsteori.

Eksperimentel eftervisning af den specielle relativitetsteori

Teori er én ting, men eksperimentel eftervisning er den ultimative bekræftelse af enhver fysisk teori. Jeg tog derfor til Niels Brock Instituttet for at lave et forsøg med myoners levetid som de tilbyder gymnasieelever op til SRP-skriveperioden. Myoner er ustabile, ladede partikler der dannes højt oppe i atmosfæren[21] i en højde på cirka 15km. Myoner bevæger sig med meget høje hastigheder, tæt på lysets hastighed, og de henfalder ved følgende henfaldsskema[22]:

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

$$\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

Hvor ν_μ og $\bar{\nu}_\mu$ er henholdsvis myonneutrinoen og anti-myonneutrinoen. Formålet med vores forsøg var at bestemme myonens levetid. Der vil i det følgende kun gives en forsimplet udgave af forsøgsopstillingen, da mange detaljer er komplicerede og ligger uden for opgavens omfang. Det er dataet vi er interesserede i. Grundlæggende består opstilling af en aluminiumsplade som bremser indkommende myoner. Over og under aluminiumspladerne sidder to plader der kan detektere myonens henfaldsprodukt (en elektron eller en positron). Når en myon detekteres i aluminiumspladen udsendes et signal til en skalar (en tæller), som begynder at tælle tid. Hvis de to plader ikke detekterer et henfaldsprodukt inden myonen forlader aluminiumspladen ugyldiggøres dette signal. Hvis de to plader derimod når at detektere et henfaldsprodukt inden myonen forlader aluminiumspladen stoppes tællingen, og tiden noteres på computeren. Resultatet af forsøget vedhæftes i bilag 1: venstre kolonne angiver levetiden i intervaller, og højre kolonne angiver antallet af myoner talt med den levetid. Antallet af radioaktive partikler $N(t)$ til et givent tidspunkt t vil have følgende sammenhæng, ifølge henfaldsloven:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Hvor τ er partiklens levetid. Vi var i vores forsøg desuden nødt til at tage højde for en fejlkilde: to tilfældige myoner kan komme gennem detektoren således at det ligner én myon der stopper og henfalder. Denne målestøj må være konstant, da det er to tilfældige myoner. Støjen kan derfor inkluderes ved at tilføje en konstant k til henfaldsloven. Vi fitter dermed efter en modificeret henfaldslov:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + k$$

Hvilket giver os følgende funktion[23]:

$$N(t) = 11345{,}66 \cdot e^{-\frac{t}{2{,}227885\mu s}} + 432{,}8966$$

[21] Liu, Lulu: The Speed and Lifetime of Cosmic Ray Muons.
[22] Muon. (s.d.). I: Wikipedia.
[23] Grundet pladsmangel har jeg i opgaven valgt at fokusere på resultatet fremfor alle nuancerne bag databehandlingen.

Det ses, at støjen k er meget lille i forhold til N_0, og forsøget regnes derfor som værende korrekt udført. På funktionen $N(t)$ aflæses myonens levetid til $t_\mu = \tau \approx 2{,}228\mu s$. Denne levetid er selvfølgelig en gennemsnitsværdi, og det vil i det følgende antages, at alle myoner har denne levetid (hvilket er en god tilnærmelse, da antallet af myoner aftager eksponentielt med tiden ifølge henfaldsloven). Den accepterede tabelværdi for myonens gennemsnitslevetid[24] er $2{,}197\mu s$, hvilket giver en afvigelse på:

$$\frac{2{,}228\mu s - 2{,}197\mu s}{2{,}197\mu s} \approx 1{,}41\%$$

Denne afvigelse er lav, og vi kan dermed konkludere at det faktisk var myoner vi målte på. Men der opstår her et problem: Selv hvis disse myoner bevæger sig med lyshastighed ville de ifølge Galileitransformationen kun nå følgende afstand:

$$\Delta x = vt = ct_\mu = 2{,}9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 2{,}228 \cdot 10^{-6} s \approx 668m$$

Men denne afstand er ikke engang tæt på de 15km højde som myonerne bliver dannet i. Hvis myonerne kan bevæge sig højest 668m, men dannes i en højde på 15km - hvordan kan det så være vi måler så mange af dem? Forklaringen ligger hos den specielle relativitetsteori. Myonerne bevæger sig med relativistiske hastigheder[25] $v \approx c$, og oplever derfor en betydelig længdeforkortningseffekt af Jorden og dens atmosfære. Fra myonernes synspunkt er der altså ikke 15km ned til jordoverfladen, men i stedet mindre end $668m$, hvilket gør det muligt for at de kan nå ned i massevis. Vi kan vha. formlen for længdeforkortning udlede den *mindst mulige*[26] Lorentz-faktor for en myon der bevæger sig med lyshastighed, der kan nå ned til jordoverfladen fra en højde (målt fra jordoverfladen) på 15km:

$$l_0 = l\gamma \Leftrightarrow \gamma = \frac{l_0}{l} = \frac{15km}{0{,}668km} \approx 22{,}45509$$

Hvilket svarer til en hastighed på:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 22{,}455 \Leftrightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1}{22{,}42}\right)^2 \Leftrightarrow v = 0{,}999c$$

Kun den positive rod anvendes, idet hastigheden betragtes som positiv. Myonerne må altså bevæge sig med en hastighed på *mindst* $v = 0{,}999c$ for at nå ned til jordoverfladen fra en 15km højde målt fra jordoverfladen.

Det kan her tænkes at der dukker en uoverensstemmelse op: en iagttager på jordoverfladen ville jo måle myonens starthøjde til 15km, så hvordan kan højden være $15km$ set fra Jorden, men samtidig mindre end

---

[24] Liu, Lulu: The Speed and Lifetime of Cosmic Ray Muons.
[25] Muon. (s.d.). I: Wikipedia.
[26] Den mindst mulige Lorentz-faktor udledes her. At den faktiske Lorentz-faktor er højere end det, ligger ude for opgavens omfang, da opgaven kun benytter levetidsforsøget som eksperimentiel understøttelse af den specielle relativitetsteori.

$670m$ set fra myonen? Der er dog ingen modstrid at finde, hvis blot man husker på, at længdeforkortelse og tidsforlængelse hænger sammen. For personen på jordoverfladen er det ikke de 15km der er blevet kortere, men derimod myonens levetid der er blevet længere:

$$\Delta t'_\mu = \gamma \Delta t_\mu = 22{,}455 \cdot 2{,}23\mu s = 50{,}07465\mu s$$

Denne relativistiske levetid svarer til, at myonen kan rejse følgende afstand set fra jordoverfladen:

$$\Delta x_\mu = t_\mu \cdot v_\mu = 50{,}07 \cdot 10^{-6} s \cdot 0{,}999 \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \approx 15km$$

Præcis i overensstemmelse med hvad myonen oplever. Der er altså ingen diskrepans der træder frem som konsekvens af den specielle relativitetsteori; Hvor en iagttager på Jorden oplever at myonen har fået en forlænget levetid (tidsforlængelse), så oplever myonen, at Jordens atmosfære er blevet betydelig kortere (længdeforkortning). Konklusionen bliver dog den samme uanset hvorfra man observerer: myoner fra rummet når ned til jordoverfladen i en rate der ikke kan forklares ved andet end den specielle relativitetsteori.

Konklusion

Den klassiske fysik er tilstrækkelig til at beskrive langt de fleste hverdagsfænomener til uhyre præcision. Men ikke alle; i grænsetilfældet hvor legemer bevæger sig med meget høje hastigheder er den specielle relativitetsteori og Lorentz-transformationen nødvendige. Den moderne fysik er dog ikke uden begrænsninger: diskrepansen mellem kvantemekanikken og relativitetsteorien er blevet til det ultimative problem i fysikken i det 21. århundrede. Da Einstein døde var hans skrivebord fyldt med papirer der vrimlede med ligninger. Til det sidste jagtede han forgæves den forenede feltteori, den såkaldte ”teorien om alting”. En sådan teori, hvis den altså eksisterer, skulle efter sigende kunne beskrive hele universet på blot et sæt ligninger. Newton sagde, at han stod på skuldre af kæmper. Senere blev han netop en af de kæmper, hvis skuldre Einstein stod på. Og nu er det vores tur.

Bilag 1: Data fra forsøget med myoners levetid på NBI

Tid (µs)	Tællerate
<0 or (blank)	3
0-2	7662
2-4	3426
4-6	1609
6-8	904
8-10	629
10-12	582
12-14	444
14-16	454
16-18	462
18-20	395
20-22	163
Grand Total	**16733**

Litteraturliste

Bergstein, T. (1966). Speciel Relativitetsteori. Gyldendal.

Dam, M. (2007). Introduktion til den specielle relativitetsteori (7. udg.). https://nbi.ku.dk/bibliotek/noter-og-undervisningsmateriale-i-fysik/introduktion-til-den-specielle-relativitetsteori/Introduktion_til_den_specielle_relativitetsteori.pdf

Kuglen. (s.d.). I: Webmatematik. Lokaliseret den 10. april 2024 på https://www.webmatematik.dk/lektioner/matematik-a/vektorer-i-3d/kuglen

Liu, L. (2007, 18. november). The Speed and Lifetime of Cosmic Ray Muons. I: MIT. Lokaliseret den 10. april 2024 på http://web.mit.edu/lululiu/Public/pixx/not-pixx/muons.pdf

Muon. (s.d.). I: Wikipedia. Lokaliseret den 10. april 2024 på https://en.wikipedia.org/wiki/Muon

Schmidt, K. (2021). Elementære rækkeoperationer. https://01005.compute.dtu.dk/enotes/06_-_Lineaere_Ligningssystemer.pdf

Schmidt, K. (2021). Matricer og matrixalgebra. https://01005.compute.dtu.dk/enotes/07_-_Matricer_og_matrixalgebra.pdf