Theoretische Physik I - Übungsblatt 2

M. Böhl, A. Kanz, R. Müller, M. Nietschmann

1 Flussintegral bei radialer Strömung

Gegeben ist das Vektorfeld $v(\vec{r}) = \frac{c}{r^3}\vec{r}$ für $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ mit $r = ||\vec{r}||$ und $c \in \mathbb{R}$.

Um den Fluss durch die Konzentrische Kugel K mit Radius R zu berechnen, parametrisieren wir ∂K wie üblich durch

$$f : [0, \pi) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (\vartheta, \varphi) \longmapsto R \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

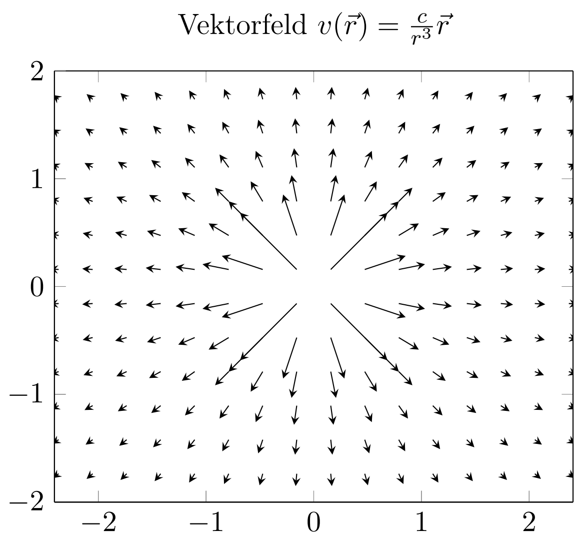
$$f_\vartheta = \partial_\vartheta f(\vartheta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \qquad f_\varphi = \partial_\varphi f(\vartheta, \varphi) = R \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$f_\vartheta \times f_\varphi = R^2 \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta\cos\varphi \\ \sin^2\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\vartheta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \end{pmatrix} = R^2 \sin\vartheta \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Nun zur Berechnung des Flusses durch K:

$$\begin{aligned}
\int_K \operatorname{div} \vec{v} dV &= \int_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{a} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \vec{v}(f(\vartheta, \varphi)) \cdot (f_\vartheta \times f_\varphi) d\vartheta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{c}{R^2} \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \\
&= c \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\vartheta(\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta) d\vartheta d\varphi \\
&= c \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \\
&= 2\pi c(-\cos\vartheta|_0^\pi) = 0.
\end{aligned}$$



2 Kurvenintegral bei Scherströmung

Gegeben ist das Vektorfeld $v(r) = (0, x, 0)$ für $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Seien nun $k \in (0, \infty)$ und $Q(k) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq \frac{k}{2}\}$ das Quadrat mit Seitenlänge k und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt. Um den den Rand des Quadrats zu parametrisieren, definieren wir zunächst $\gamma_i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ für $i \in \{1, \ldots, 4\}$ durch

$$\gamma_1(t) = (1, 2t - 1, 0), \quad \gamma_2(t) = (1 - 2t, 1, 0), \quad \gamma_3(t) = (-1, 1 - 2t, 0), \quad \gamma_4(t) = (2t - 1, -1, 0).$$

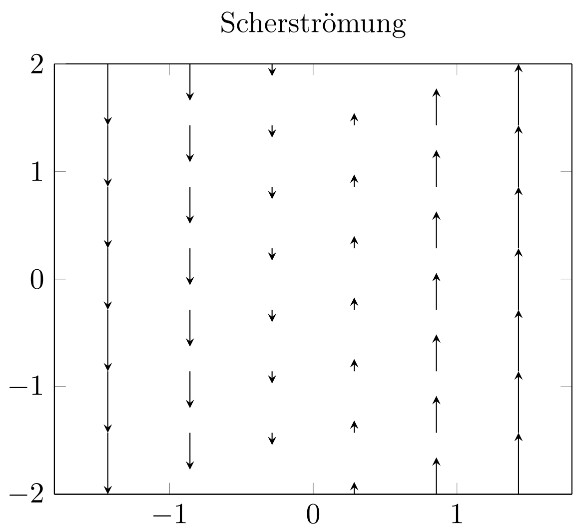
Dann parametrisiert

$$\gamma_k : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \begin{cases} \frac{k}{2}\gamma_1(t) & , t \in [0, 1) \\ \frac{k}{2}\gamma_2(t - 1) & , t \in [1, 2) \\ \frac{k}{2}\gamma_3(t - 2) & , t \in [2, 3) \\ \frac{k}{2}\gamma_4(t - 3) & , t \in [3, 4] \end{cases}$$

den Rand des Quadrates $Q(k)$. Nun können wir das Kurvenintegral berechnen:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_k} v(r) \cdot dr &= \int_0^4 v(\gamma_k(t)) \cdot \dot{\gamma}_k(t) dt \\ &= \frac{k^2}{4} \left(\int_0^1 (0, 1, 0) \cdot (0, 2, 0) dt + \int_0^1 (0, 1 - 2t, 0) \cdot (-2, 0, 0) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 (0, -1, 0) \cdot (0, -2, 0) dt + \int_0^1 (0, 2t - 1, 0) \cdot (2, 0, 0) dt \right) \\ &= 2 \cdot \frac{k^2}{4} \int_0^1 2 dt = k^2. \end{aligned}$$

Die Rotation berechnet sich als $\operatorname{rot} v(r) = (0, 0, 1)$.



3 Kurvenintegral eines azimutalen Geschwindigkeitsfeldes

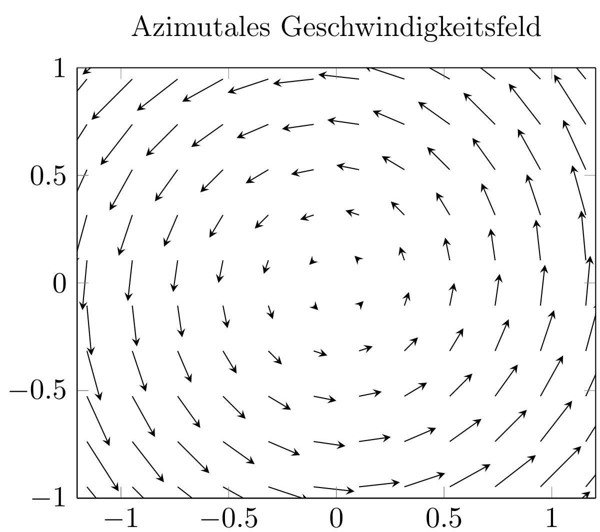
Gegeben ist das Vektorfeld $v(r) = (-y, x, 0)$ für $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Sei $R \in (0, \infty)$ und $K(R)$ der konzentrische Kreis mit Radius R in der Ebene $z = 0$. Der Rand von $K(R)$ wird von der Kurve

$$\gamma_R : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi \longmapsto R(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

"gegen den Urzeigersinn umfahren". Es gilt

$$\oint_{\gamma_R} v(r) \cdot dr = R^2 \int_0^{2\pi} (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \cdot (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi + \cos^2\varphi d\varphi = 2\pi R^2$$

und $\operatorname{rot} v(r) = (0, 0, 2)$.



4 Linienintegral

Gegeben ist das Vektorfeld $f(x,y,z) = xyz(1,1,1)$. Wir berechnen nun das Integral $\int_\gamma f(r)\cdot dr$ für verschiedene Kurven γ.

a) Definiere zunächst $\gamma_i : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ für $i \in \{1,\dots,3\}$ durch

$$\gamma_1(t) = (t,0,0), \qquad \gamma_2(t) = (1,t,0), \qquad \gamma_3(t) = (1,1,t).$$

Sei nun

$$\gamma : [0,3) \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \gamma_i(t) \text{ falls } t \in [i-1,i) \text{ für } i \in \{1,2,3\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(r)\cdot dr &= \int_0^1 (0,0,0)\cdot\dot\gamma_1(t)dt + \int_0^1 (0,0,0)\cdot\dot\gamma_2(t)dt + \int_0^1 t(1,1,1)\cdot(0,0,1)dt \\ &= \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}t\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

b) Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t,t,t)$. Dann

$$\int_\gamma f(r)\cdot dr = \int_0^1 t^3(1,1,1)\cdot(1,1,1)dt = \int_0^1 3t^3 dt = \frac{3}{4}t^4\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

c) Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t^2,t^3,t^4)$. Dann

$$\int_\gamma f(r)\cdot dr = \int_0^1 t^9(1,1,1)\cdot(2t,3t^2,4t^3)dt = \int_0^1 2t^{10}+3t^{11}+4t^{12}dt = \frac{2}{11}+\frac{3}{12}+\frac{4}{13} = \frac{423}{572}.$$

Außerdem gilt $\operatorname{rot} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz-xy \\ xy-yz \\ yz-xz \end{pmatrix}$.