
Theoretische Physik I - Übungsblatt 1

M. Böhl, A. Kanz, R. Müller, M. Nietschmann

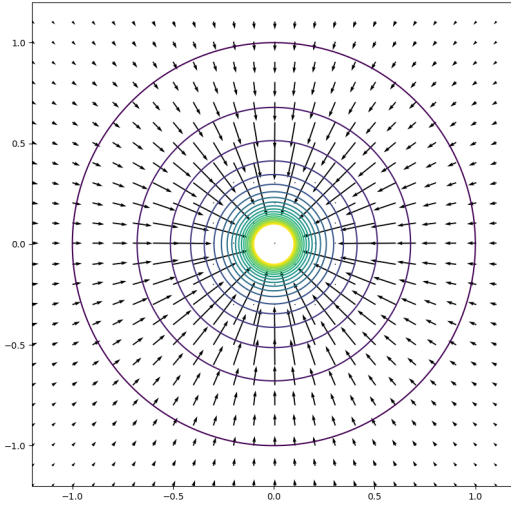
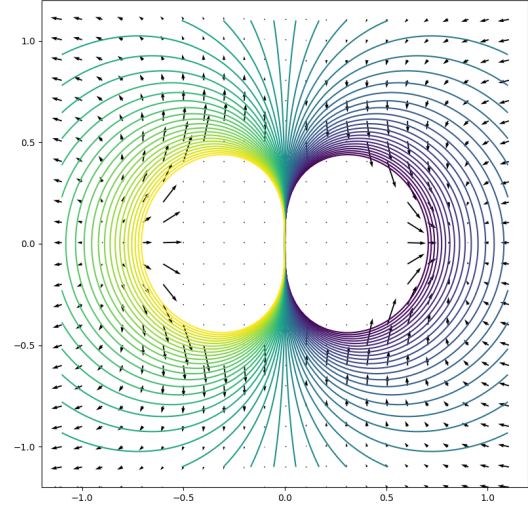
1 Kurven und Flächen im \mathbb{R}^3

Es sind $\vec{x}, \vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

- a) $|\vec{x}| = 1$ beschreibt die Einheitssphäre des \mathbb{R}^3 .
- b) $|\vec{x} - \vec{x}_0| = R$ mit festem $R > 0$ sowie $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ beschreibt eine Sphäre des Radius R mit Mittelpunkt \vec{x}_0 .
- c) Die Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{e} = 0$ mit festem $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$ wird von allen Vektoren des orthogonalen Komplementes des Erzeugnisses von \vec{e} erfüllt, d.h. $\vec{x} \in \text{span}\{\vec{e}\}^\perp$. Das sind alle Vektoren des \mathbb{R}^3 , falls \vec{e} der Nullvektor ist, andernfalls liegen alle diese Vektoren in einer Hyperebene, in diesem (dreidimensionalen) Falle ist dies eine Ebene durch den Koordinatenursprung mit \vec{e} als Normalenvektor.
- d) Die Gleichung $\vec{r} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|$, $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$, wird von allen $\vec{r} \in \vec{k} + \text{span}\{\vec{k}\}^\perp$, d.h. einer Ebene durch \vec{k} orthogonal zu \vec{k} , falls \vec{k} vom Nullvektor verschieden ist, bzw. der gesamte \mathbb{R}^3 , falls $\vec{k} = (0, 0, 0)$, erfüllt.
- e) Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Falls $\vec{a} = (0, 0, 0)$, so wird $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$ von jedem $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ erfüllt; falls $\vec{b} = (0, 0, 0) \neq \vec{a}$, nur von $\vec{x} = (0, 0, 0)$. Sind \vec{a}, \vec{b} vom Nullvektor verschieden, so wird die Gleichung von allen \vec{x} in einem Halbkreis mit Radius $|\vec{b}|$ in der von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Ebene durch den Ursprung erfüllt, wobei dieser in " \vec{b} -Richtung von \vec{a} ausgerichtet sei".
- f) Es wird eine Spirale parametrisiert, deren Punkte auf der Oberfläche eines verzerrten Kreiszylinders liegen. Dieser verzerrte Zylinder hat $\{(0, \pm 1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ als Schnittmenge mit der y - z -Ebene (zwei parallele Geraden) und $\{(\pm Ct, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ als Schnittmenge mit der x - z -Ebene (zwei sich schneidende Geraden).
- g) Hier wird eine obere Halbsphäre mit Radius R parametrisiert.

2 Gradient in krummlinigen Koordinaten

- a) $\nabla V_P(\vec{r}) = \left(-\frac{1}{r^2}, 0\right)$ falls $r \neq 0$. Für $r = 0$ ist V_P nicht differenzierbar.
- b) $\nabla V_D(r, \vartheta) = \left(-2\frac{\cos \vartheta}{r^3}, -\frac{\sin \vartheta}{r^2}\right) = -r^{-3}(2 \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ falls $r \neq 0$. Für $r = 0$ ist V_D nicht differenzierbar.


(a) Gradientenfeld ∇V_P

(b) Gradientenfeld ∇V_D

3 Divergenz

a) $\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} Kxyz \\ Kxyz \\ Kxyz \end{pmatrix} = K(yz + xz + xy).$

b) Wegen $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$, $\omega \in \mathbb{R}$, ist in Zylinderkoordinaten $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -\omega\varphi \\ \omega r \\ 0 \end{pmatrix}$,
also $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r}(-\omega\varphi) + 0 = -\frac{\omega\varphi}{r}.$

c) $\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = \operatorname{div} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \vec{a} = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \vec{a} = \frac{x+y+z}{r} \vec{a}.$

d) Nach Graßmann: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r}) = (\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{r}$. Also $\operatorname{div} \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \operatorname{div} r = -2(\vec{a} \cdot \vec{b}).$

e) Es gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = -Kr^n \hat{r} = -Kr^{n-1} \vec{r} = -K(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n-1}{2}} \vec{r}.$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dx} E_x = -K \left((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n-1}{2}} + 2x^2 \frac{n-1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n-3}{2}} \right) = -K(r^{n-1} + (n-1)x^2 r^{n-3})$$

und man erhält analoge Ergebnisse für die Ableitungen von \vec{E} nach y und z . Also

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= -K (3r^{n-1} + (n-1)(x^2 + y^2 + z^2)r^{n-3}) \\ &= -K (3r^{n-1} + (n-1)r^{n-1}) \\ &= -(n+2)Kr^{n-1}. \end{aligned}$$