Theoretische Physik I - Übungsblatt 2

M. Böhl, A. Kanz, R. Müller, M. Nietschmann

1 Flussintegral bei radialer Strömung

Gegeben ist das Vektorfeld $v(\vec{r}) = \frac{c}{r^3}\vec{r}$ für $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ mit $r = ||\vec{r}||$ und $c \in \mathbb{R}$.

Um den Fluss durch die Konzentrische Kugel K mit Radius R zu berechnen, parametrisieren wir ∂K wie üblich durch

$$f : [0,\pi) \times [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (\vartheta,\varphi) \longmapsto R\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\end{pmatrix}.$$

Dann folgt

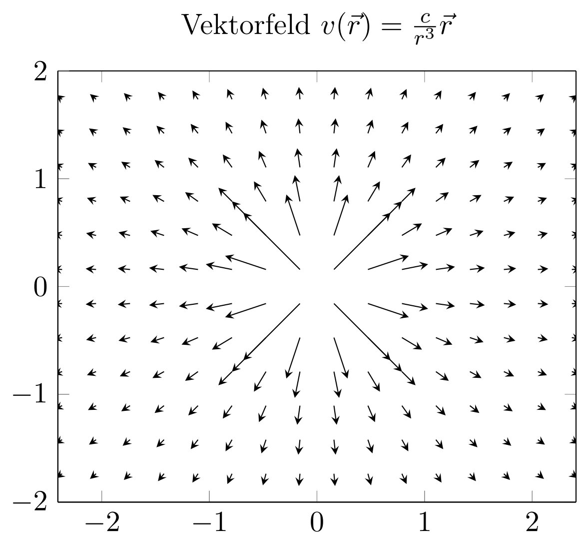
$$f_\vartheta = \partial_\vartheta f(\vartheta,\varphi) = R\begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\end{pmatrix}, \qquad f_\varphi = \partial_\varphi f(\vartheta,\varphi) = R\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ 0\end{pmatrix}$$

und damit

$$f_\vartheta \times f_\varphi = R^2\begin{pmatrix}\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ \sin^2\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\vartheta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\end{pmatrix} = R^2\sin\vartheta\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\end{pmatrix}.$$

Nun zur Berechnung des Flusses durch K:

$$\begin{aligned}
\int_K \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}V &= \int_{\partial K}\vec{v}\cdot\,\mathrm{d}\vec{a} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\vec{v}(f(\vartheta,\varphi))\cdot(f_\vartheta\times f_\varphi)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{c}{R^2}\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\end{pmatrix}R^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\vartheta(\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi c(-\cos\vartheta|_0^\pi) = 0.
\end{aligned}$$



2 Kurvenintegral bei Scherströmung

Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}) = (0, x, 0)$ für $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Seien nun $k \in (0, \infty)$ und $Q(k) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq \frac{k}{2}\}$ das Quadrat mit Seitenlänge k und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt. Um den den Rand des Quadrats zu parametrisieren, definieren wir zunächst $\gamma_i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ für $i \in \{1, \dots, 4\}$ durch

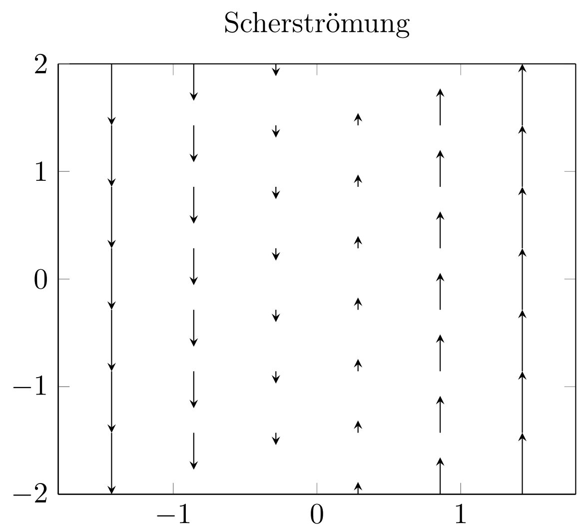
$$\gamma_1(t) = (1, 2t-1, 0), \quad \gamma_2(t) = (1-2t, 1, 0), \quad \gamma_3(t) = (-1, 1-2t, 0), \quad \gamma_4(t) = (2t-1, -1, 0).$$

Dann parametrisiert

$$\gamma_k : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; t \longmapsto \begin{cases} \frac{k}{2}\gamma_1(t) & , t \in [0, 1) \\ \frac{k}{2}\gamma_2(t-1) & , t \in [1, 2) \\ \frac{k}{2}\gamma_3(t-2) & , t \in [2, 3) \\ \frac{k}{2}\gamma_4(t-3) & , t \in [3, 4] \end{cases}$$

den Rand des Quadrates $Q(k)$. Nun können wir das Kurvenintegral berechnen:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_k} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^4 \vec{v}(\gamma_k(t)) \cdot \dot{\gamma}_k(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{k^2}{4} \left(\int_0^1 (0, 1, 0) \cdot (0, 2, 0) dt + \int_0^1 (0, 1-2t, 0) \cdot (-2, 0, 0)\, \mathrm{d}t \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 (0, -1, 0) \cdot (0, -2, 0) dt + \int_0^1 (0, 2t-1, 0) \cdot (2, 0, 0)\, \mathrm{d}t \right) \\ &= 2 \cdot \frac{k^2}{4} \int_0^1 2\, \mathrm{d}t = k^2. \end{aligned}$$



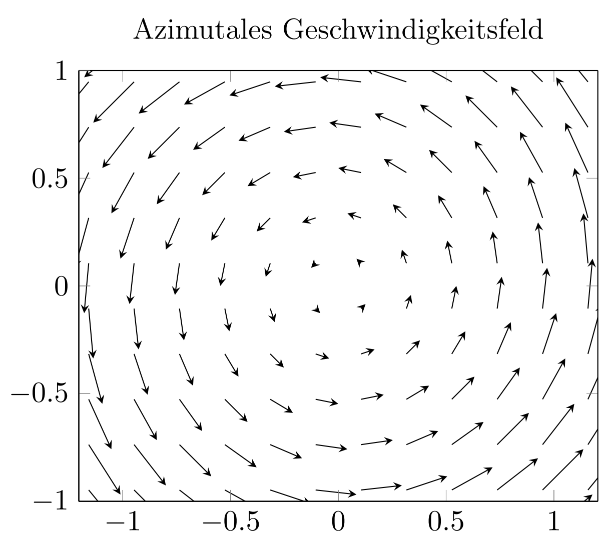
3 Kurvenintegral eines azimutalen Geschwindigkeitsfeldes

Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}) = (-y, x, 0)$ für $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Sei $R \in (0, \infty)$ und $K(R)$ der konzentrische Kreis mit Radius R in der Ebene $z = 0$. Der Rand von $K(R)$ wird von der Kurve

$$\gamma_R : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi \longmapsto R(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

"gegen den Uhrzeigersinn umfahren". Es gilt

$$\oint_{\gamma_R} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = R^2 \int_0^{2\pi} (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \cdot (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\,\mathrm{d}\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^2.$$



4 Linienintegral

Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{f}(x,y,z) = xyz(1,1,1)$. Wir berechnen nun das Integral $\int_\gamma \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ für verschiedene Kurven γ.

a) Definiere zunächst $\gamma_i : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ für $i \in \{1,\dots,3\}$ durch

$$\gamma_1(t) = (t,0,0), \qquad \gamma_2(t) = (1,t,0), \qquad \gamma_3(t) = (1,1,t).$$

Sei nun

$$\gamma : [0,3) \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \gamma_i(t) \text{ falls } t \in [i-1,i) \text{ für } i \in \{1,2,3\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{f}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^1 (0,0,0)\cdot\dot{\gamma}_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (0,0,0)\cdot\dot{\gamma}_2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t(1,1,1)\cdot(0,0,1)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

b) Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t,t,t)$. Dann

$$\int_\gamma \vec{f}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 t^3(1,1,1)\cdot(1,1,1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 3t^3\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}t^4\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

c) Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t^2,t^3,t^4)$. Dann

$$\int_\gamma \vec{f}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 t^9(1,1,1)\cdot(2t,3t^2,4t^3)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2t^{10}+3t^{11}+4t^{12}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{11}+\frac{3}{12}+\frac{4}{13} = \frac{423}{572}.$$

5 Gaußscher Satz im $\mathbb{R}^2$

Gegeben sind die Vektorfelder $\vec{R} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} = \nabla \ln\rho\hat{\rho}$ und $\vec{T} = \rho\hat{\varphi} = \nabla\rho^2\varphi\hat{\varphi}$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge mit glattem Rand. Dann gilt

$$\int_M \operatorname{div}\vec{R}\,\mathrm{d}A = \int_M \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho R_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R_\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\,\mathrm{d}A = \int_M \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}1 + 0\,\mathrm{d}A = \int_M 0\,\mathrm{d}A = 0.$$

und analog

$$\int_M \operatorname{div}\vec{T}\,\mathrm{d}A = \int_M \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho T_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}T_\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\,\mathrm{d}A = \int_M 0 + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\rho\,\mathrm{d}A = \int_M 0\,\mathrm{d}A = 0.$$

Da $\vec{R}$ und $\vec{T}$ Gradientenfelder sind, verschwinden Wegintegrale über geschlossene Kurven, also

$$\oint_{\partial M} \vec{R}\cdot\,\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

und

$$\oint_{\partial M} \vec{T}\cdot\,\mathrm{d}\vec{r} = 0.$$

Alles 0 also alles ok.

6 Oberflächenintegrale

Berechnen Sie die folgenden Oberflächenintegrale $\int_{\partial M} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{a}$

a) $\vec{E}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x + y^2 + z^2 \\ \frac{x}{z} \\ 2z - \frac{y}{x} \end{pmatrix}$ und $M = B_2(0)$. Dann folgt mit dem Satz von Gauß

$$\int_{\partial M} \vec{E}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{a} = \int_M \operatorname{div} \vec{E} \, \mathrm{d}V = 3 \int_M \mathrm{d}V = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi 2^3 = 32\pi.$$

b) $\vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$ und $M = (0,1)^3$. Dann folgt mit Satz von Gauß

$$\int_{\partial M} \vec{E}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{a} = \int_M \operatorname{div} \vec{E} \, \mathrm{d}V = \int_M 2z \, \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 1.$$

c) $\int_{\partial M} \hat{z} \cdot \mathrm{d}\vec{a}$ und $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1 \land z \leq 0\}$ die Nordhalbkugel. Diese parametrisieren wir wie üblich durch

$$f : [0, \tfrac{\pi}{2}) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (\vartheta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Dann

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \hat{z} \cdot \mathrm{d}\vec{a} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \hat{z} \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi \tfrac{1}{2} \sin^2\vartheta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi. \end{aligned}$$