Theoretische Physik I - Übungsblatt 1

M. Böhl, A. Kanz, R. Müller, M. Nietschmann

1 Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^3$

Es sind $\vec{x}, \vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

a) $|\vec{x}| = 1$ beschreibt die Einheitssphäre des $\mathbb{R}^3$.

b) $|\vec{x} - \vec{x}_0| = R$ mit festem $R > 0$ sowie $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ beschreibt eine Sphäre des Radius R mit Mittelpunkt $\vec{x}_0$.

c) Die Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{e} = 0$ mit festem $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$ wird von allen Vektoren des orthogonalen Komplementes des Erzeugnisses von $\vec{e}$ erfüllt, d.h. $\vec{x} \in \operatorname{span}\{\vec{e}\}^\perp$. Das sind alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$, falls $\vec{e}$ der Nullvektor ist, andernfalls liegen alle diese Vektoren in einer Hyperebene, in diesem (dreidimensionalen) Falle ist dies eine Ebene durch den Koordinatenursprung mit $\vec{e}$ als Normalenvektor.

d) Die Gleichung $\vec{r} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|$, $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$, wird von allen $\vec{r} \in \vec{k} + \operatorname{span}\{\vec{k}\}^\perp$, d.h. einer Ebene durch $\vec{k}$ orthogonal zu $\vec{k}$, falls $\vec{k}$ vom Nullvektor verschieden ist, bzw. der gesamte $\mathbb{R}^3$, falls $\vec{k} = (0,0,0)$, erfüllt.

e) Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Falls $\vec{a} = (0,0,0)$, so wird $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$ von jedem $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ erfüllt; falls $\vec{b} = (0,0,0) \neq \vec{a}$, nur von $\vec{x} = (0,0,0)$. Sind $\vec{a}, \vec{b}$ vom Nullvektor verschieden, so wird die Gleichung von allen $\vec{x}$ in einem Halbkreis mit Radius $|\vec{b}|$ in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene durch den Ursprung erfüllt, wobei dieser in "$\vec{b}$-Richtung von $\vec{a}$ ausgerichtet sei".

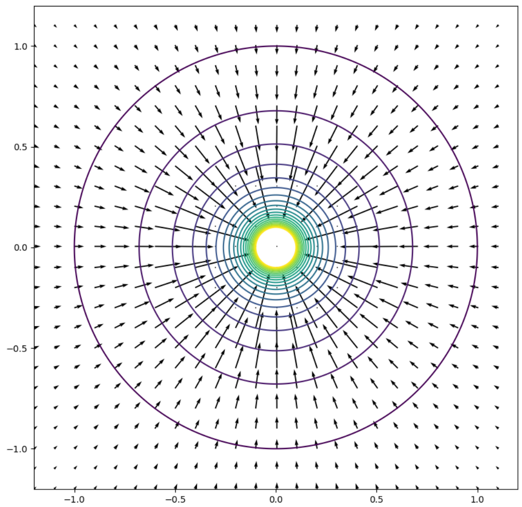
f) Parametrisiert wird eine um einen verzerrten Kreiszylinder gewundene Spirale. Dieser verzerrte Zylinder hat $\{(0, \pm 1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ als Schnittmenge mit der y-z-Ebene (zwei parallele Geraden) und $\{(\pm Ct, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ als Schnittmenge mit der x-z-Ebene (zwei sich schneidende Geraden).

g) Hier wird eine obere Halbsphäre mit Radius R parametrisiert.

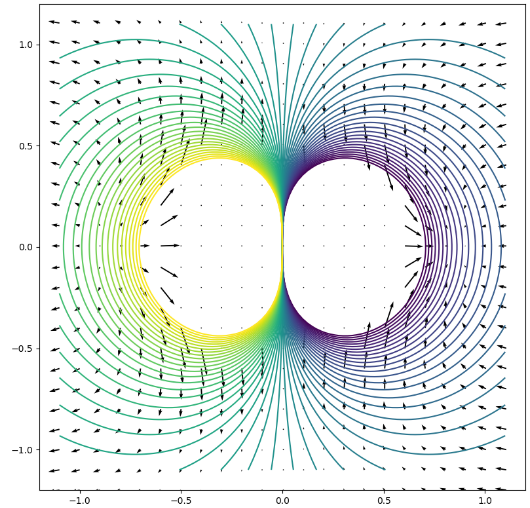
2 Gradient in krummlinigen Koordinaten

a) $\nabla V_P(r, \vartheta) = \left(-\frac{1}{r^2}, 0\right)$ falls $r \neq 0$. Für $r = 0$ ist V_P nicht differenzierbar.

b) $\nabla V_D(r, \vartheta) = \left(-2\frac{\cos\vartheta}{r^3}, -\frac{\sin\vartheta}{r^2}\right) = -r^{-3}(2\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ falls $r \neq 0$. Für $r = 0$ ist V_D nicht differenzierbar.



(a) Gradientenfeld ∇V_P und Höhenlinien



(b) Gradientenfeld ∇V_D und Höhenlinien

3 Divergenz

a) $\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} Kxyz \\ Kxyz \\ Kxyz \end{pmatrix} = K(yz + xz + xy).$

b) Wegen $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$, $\omega \in \mathbb{R}$, ist in Zylinderkoordinaten $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -\omega\varphi \\ \omega r \\ 0 \end{pmatrix}$, also $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r}(-\omega\varphi) + 0 = -\frac{\omega\varphi}{r}$.

c) $\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = \operatorname{div} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{a} = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{a} = \frac{x+y+z}{r}\vec{a}.$

d) Nach Graßmann: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r}) = (\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{r}$. Also $\operatorname{div} \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \operatorname{div} r = -2(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

e) Es gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = -Kr^n\hat{r} = -Kr^{n-1}\vec{r} = -K(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n-1}{2}}\vec{r}.$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dx}E_x = -K\left((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n-1}{2}} + 2x^2\frac{n-1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n-3}{2}}\right) = -K(r^{n-1} + (n-1)x^2r^{n-3})$$

und man erhält analoge Ergebnisse für die Ableitungen von $\vec{E}$ nach y und z. Also

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= -K\left(3r^{n-1} + (n-1)(x^2 + y^2 + z^2)r^{n-3}\right) \\ &= -K\left(3r^{n-1} + (n-1)r^{n-1}\right) \\ &= -(n+2)Kr^{n-1}. \end{aligned}$$