Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

МАТ. ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

I СЕМЕСТР

Лекторы: *Мусатов Даниил Владимирович*

h\nu

Авторы: *Дамир Ачох*
Проект на Github

осень 2021

Содержание

1 Предел функции

Определение 1.1. Проколотой δ-окрестностью точки a называется $\overset{\circ}{U}_\delta(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$.

Определение 1.2. (По Коши). $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(a))\ f(x) \in\ U_\varepsilon(A)$.

Определение 1.3. (По Гейне). $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \{x_n\} \subset X \setminus \{a\}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a)\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Теорема 1.1. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что из Коши следует Гейне. Возьмем произвольную $\{x_n\} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $(x_n \neq a)$. Значит, $(\forall \delta > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)$ $|x_n - a| < \delta$. Так как $x_n \neq a$, то $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$. Объединяя это и опр. Коши, получаем: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ f(x_n) \in\ U_\varepsilon(A)$. Значит, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ f(x_n) \in\ U_\varepsilon(A)$. Получается, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Докажем, что из Гейне следует Коши. Пусть опр. Гейне выполняется, а опр. Коши - нет. Если Коши не выполняется, то $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a))$ $f(x) \notin U_\varepsilon(A)$.

$\delta := 1$. $(\exists x_1 \in \overset{\circ}{U}_1(a))\ f(x_1) \notin U_\varepsilon(A)$

$\delta := \dfrac{1}{k}$. $(\exists x_k \in \overset{\circ}{U}_{\frac{1}{k}}(a))\ f(x_k) \notin U_\varepsilon(A)$.

Зададим последовательность x_n по тем x_i, которые нашли выше. Если $a \in \mathbb{R}$, то $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$. По свойству о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Следовательно, по опр. Гейне $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Вспоминаем, что $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$, что противоречит предыдущему утверждению. Аналогично при $a = \infty$. $\square$

Теорема 1.2. *Свойства предела функции, связанные неравенствами.*

1. *(Ограниченность). Если* $\lim\limits_{x\to a} = A \in \mathbb{R}$, *то* $f(x)$ *- ограничена в некоторой* $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ *(т. е. множество значений в этой окрестности ограничено).*

2. *(Отделимость от нуля и сохранение знака). Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, *то* $\exists C > 0$, *такое что* $(\exists \delta > 0)\ (\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a))\ |f(x)| > C$ *и знак* $f(x)$ *тот же, что и у* A.

3. *(Переход к предел. неравенству). Если* $(\exists\delta > 0)$ $(\forall x \in U_\delta(a))$ $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, *то* $A \leqslant B$.

4. *(Теорема о трёх функциях). Если* $(\exists\delta > 0)$ $(\forall x \in U_\delta(a))$ $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Доказательство. TO-DO □

Теорема 1.3. *Свойства предела функции, связанные с арифметическими операциями. Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$.

2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB$.

3. *Если* $B \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{A}{B}$.

Доказательство. TO-DO □

Теорема 1.4. *Критерий Коши существования предела функции.* $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in U_\delta(a))\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in U_\delta(a))$ $|f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| \leqslant \varepsilon$.

Достаточность. TO-DO. □