**Московский физико-технический институт**
**Физтех-школа прикладной математики и информатики**

# ВВЕДЕНИЕ В МАТ. АНАЛИЗ

I СЕМЕСТР

Лекторы: *Лукашов Алексей Леонидович*

h\nu

Авторы: *Дамир Ачох*
*Проект на Github*

осень 2021

# Содержание

# 1 Предел функции

**Определение 1.1.** Проколотой $\delta$-окрестностью точки $a$ называется $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

**Определение 1.2.** (По Коши) $\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(a))\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

**Определение 1.3.** (По Гейне) $\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \{x_n\} \subset X \backslash \{a\}, \lim_{x \to \infty}\{x_n\} = A)\ \lim_{x \to \infty} f(x_n) = A$.

**Теорема 1.1.** *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

*Доказательство.* TO-DO □

**Теорема 1.2.** *Свойства предела функции, связанные неравенствами.*

1. *(Ограниченность). Если* $\lim_{x \to a} = A \in \mathbb{R}$, *то f(x) - ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a (т. е. множество значений в этой окрестности ограничено).*

2. *(Отделимость от нуля и сохранение знака). Если* $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, *то* $\exists C > 0$, *что в некоторой проколотой окрестности точки a* $|f(x)| > C$ *и знак f(x) тот же, что и у A.*

3. *(Переход к предел. неравенству). Если* $(\exists \delta > 0)$ $(\forall x \in U_\delta(a))$ $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim_{x \to a} f(x) = A$, $\lim_{x \to a} g(x) = B$, *то* $A \leqslant B$.

4. *(Теорема о трёх функциях). Если* $(\exists \delta > 0)$ $(\forall x \in U_\delta(a))$ $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ *и* $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A$, *то* $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

*Доказательство.* TO-DO □

**Теорема 1.3.** *Свойства предела функции, связанные с арифметическими операциями. Пусть* $\lim_{x \to a} f(x) = A$, $\lim_{x \to a} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

1. $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B$.

2. $\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = AB$.

3. *Если* $B \neq 0$, *то* $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{A}{B}$.

*Доказательство.* TO-DO □

**Теорема 1.4.** *Критерий Коши существования предела функции.* $\exists \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in U_\delta(a))\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$

*Доказательство.* Необходимость. $\lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in U_\delta(a))\ |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| \leqslant \varepsilon$.

Достаточность. TO-DO. □