Funkcje ciągłe i różniczkowalne

Magdalena Bonczkowska

14 grudnia 2010

Spis treści

1 Funkcje ciągłe

Definicja 1.1. (funkcja ciągła). Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ oraz niech $x_0 \in (a,b)$. Mówimy, że funkcja jest ciągła w punkcie $_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall x \in (a,b) \mid x - x_o \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(x_o) \mid < \varepsilon$$

Przykład 1.2. Wielomiany, funkcje trygonometryczne, wykładnicze, logarytmiczne sa ciagłe w kazdym punkcie swojej dziedziny.

Przykład 1.3. Funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ dla } x \neq 0 \\ 0 \text{ dla } x = 0 \end{cases}$$

Jest ciągła w każdym punkcie poza $x_o = 0$.
Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych.

Przykład 1.4. Funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie jest ciągła w każdym punkcie.

Przykład 1.5. Funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \in \mathbb{Q} \\ x \text{ dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_o = 0$, ale nie jest ciągła w pozostałych punktach dzidziny.

Zadanie 1. Udowodnij prawdziwość podanych przykładów.

Definicja 1.6. Jeśli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dzidziny A to mówimy krótko, że jest ciągła.
Ponizsze twierdzenie zbiera podstawowe własnosci zbioru funkcji ciagłych.

Twierdzenie 1.7. $Niech\, funkcje f, g : R \to \mathbb{R} \quad bd\, cige, oraz\, niech\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. Wtedy funkcje :$
a) $h_1(x) = \alpha * f(x) + \beta * g(x)$,
b)$h_2(x) = f(x) * g(x)$,
c)$h_3(x) = f(x)\frac{}{g(x)}$ *(o ile* $g(x) \neq 0$ *dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}$*),*
d)$h_4(x) = f(g(x))$,
są ciągłe.

Następne twierdzenie zwane powszechnie „własnoscia Darboux" lub twierdzeniem o wartosci posredniej ma liczne praktyczne zastosowania. Mówi ono o tym, ze jesli funkcja ciagła przyjmuje jakies dwie wartosci, to przy odpowiednich załozeniach co do dziedziny, przyjmuje tez wszystkie wartosci posrednie. Mozemy sobie to łatwo wyobrazic na przykładzie funkcji, która opisuje zmiane temperatury w czasie. Jeśli o 7:00 było $-1°$ *C a o 9:00 było* $2°$ *C. To zapewne gdzieś między 7:00, a 9:00 był taki moment, że temperatura wynosiła dokładnie* $0°$ *C.*

2 Różniczkowalność

Definicja 2.1. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$ oraz f ciągła w otoczeniu punktu x_0. Jeśli istnieje granica:

$$\lim_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

i jest skończona, to oznaczamy przez $f'(x_0)$ i nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0.

Definicja 2.2. Jeśli funkcja f posiada pochodną w każdym punkcie swojej dziediny,to mówimy, że f jest różniczkowalna. Istnieje wtedy funkcja f', która każdemu punktowi z dziediny funkcji f przyporządkowuje warość pochodnej funkcji f w tym punkcie.

Przykład 2.3. Wielomiany, funkcje trygonometryczne, wykładnicze, logarytmiczne są różniczkowalne w każdym punkcie dziedziny.

Przykład 2.4. Funkcja $f(x) =\mid x \mid$ jest ciągła, ale nie posiada pochodnej w punkcie $x_0 = 0$

Twierdzenie 2.5. *Niech* $f : [a, b] \to \mathbb{R}\, ciga\, i\, rniczkowalna\, na\, (a, b). Dodatkowo\, niech f'(x) \equiv 0\, dla\, x \in (a, b),\ oraz\, niech\, m = min_{x \in [a,b]}\, f(x),\ M = max_{x \in [a,b]}\, f(x). Wtedy\, na\, pewno f(a) = m,\ f(b) = M\, lub\, f(a) = M\, i\, f(b) = m.$