ISITCom Hammam Sousse Examen A. U. : 2021/2022	
Niveau: 1ére année LM *Module* : Logique Formelle *Enseignant* : Haykal Tej	*Date* : 29 / 01 /2022 *Durée* : 1h30 *Session :* Principale

CORRECTION

Exercice 1 : (8 pts) (correction)

En associant les énoncés élémentaires « Béchir est étudiant », « Kamel est étudiant », « Ridha est étudiant » aux propositions ***B, K, R***, respectivement ; associer à chacun des énoncés suivants la formule propositionnelle qui semble lui correspondre sémantiquement :

1) Un seul parmi Béchir et Kamel est étudiant

   $(B \wedge \neg K) \vee (\neg B \wedge K)$ ou
   $(B \leftrightarrow \neg K)$ ou
   $\neg (B \leftrightarrow K)$

2) Ridha n'est étudiant que si un seul parmi les deux autres est un étudiant.

   $R \rightarrow ((B \wedge \neg K) \vee (\neg B \wedge K))$

3) Au moins l'un des trois n'est pas étudiant.

   $(\neg B \vee \neg K \vee \neg R)$ ou
   $\neg (B \wedge K \wedge R)$ ou
   $(\neg B \wedge K \wedge R) \vee (B \wedge \neg K \wedge R) \vee (B \wedge K \wedge \neg R) \vee (\neg B \wedge \neg K \wedge R) \vee$
   $(\neg B \wedge K \wedge \neg R) \vee (B \wedge \neg K \wedge \neg R) \vee (\neg B \wedge \neg K \wedge \neg R)$

4) Au plus l'un des trois est étudiant.

   $\neg (B \vee K \vee R) \vee (\neg B \wedge K \wedge R) \vee (B \wedge \neg K \wedge R) \vee (B \wedge K \wedge \neg R)$ ou
   $(\neg B \wedge \neg K \wedge \neg R) \vee (\neg B \wedge K \wedge R) \vee (B \wedge \neg K \wedge R) \vee (B \wedge K \wedge \neg R)$

5) Aucun parmi les trois n'est étudiant.

   $\neg (B \vee K \vee R)$ ou
   $(\neg B \wedge \neg K \wedge \neg R)$

6) Si Béchir est étudiant, alors Kamel est un étudiant ; sinon Kamel n'est pas un étudiant.

   $B \leftrightarrow K$ ou
   $(B \rightarrow K) \wedge (\neg B \rightarrow \neg K)$ ou
   $(B \rightarrow K) \wedge (K \rightarrow B)$

7) Béchir est étudiant à condition que Ridha soit un étudiant.

   $B \rightarrow R$

8) Si Béchir est étudiant alors au moins l'un des deux autres n'est pas un étudiant.

$B \rightarrow (\neg R \vee \neg K)$ ou
$B \rightarrow \neg (R \wedge K)$

Exercice 2 : (5 pts) (correction)

Utiliser les tables de vérité pour classer les formules qui suivent en « valide », « contingente», « contradictoire ». ***Justifier vos réponses***

Donner pour chaque formule, si c'est possible, un modèle et un contre modèle.

1. $F1 = (A \vee B) \wedge (A \rightarrow B) \wedge \neg B$

A	B	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$\neg B$	$(A \vee B) \wedge (A \rightarrow B)$	$(A \vee B) \wedge (A \rightarrow B) \wedge \neg B$
1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0

- F1 est une formule ***contradictoire*** puisqu'elle n'admet aucun modèle.
- **Modèle pour F1**: F1 n'admet aucun modèle
- **Contre-modèle pour F1**: l'interpretation I telle que I(A) =1 et I(B) =1 puisque I(F1) = 0

2. $F2 = (\neg (A \leftrightarrow B)) \rightarrow (\neg A \leftrightarrow B)$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\neg (A \leftrightarrow B)$	$\neg A$	$\neg A \leftrightarrow B$	$(\neg (A \leftrightarrow B)) \rightarrow (\neg A \leftrightarrow B)$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1

- F2 est une formule ***valide*** puisqu'elle n'admet que des modèle.
- **Modèle pour F2**: l'interpretation I telle que I(A) =1 et I(B) =1 puisque I(F2) = 1
- **Contre-modèle pour F2**: F2 n'admet aucun contre -modèle

3. F3 = ((A ∨ B) ∧ (¬ A ∨ B)) ∨ ¬ B

A	B	A ∨ B	¬ A	¬ A ∨ B	¬ B	(A ∨ B) ∧ (¬ A ∨ B)	((A ∨ B) ∧ (¬ A ∨ B)) ∨ ¬ B
1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1

- F3 est une formule ***valide*** puisqu'elle n'admet que des modèle.
- **Modèle pour F3**: l'interpretation I telle que I(A) =1 et I(B) =1 puisque I(F3) = 1
- **Contre-modèle pour F3**: F3 n'admet aucun contre-modèle

4. F4 = (A ∨ B) ∧ (A → B)

A	B	A ∨ B	A → B	(A ∨ B) ∧ (A → B)
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

- F4 est une formule ***contingente*** puisqu'elle admet des modèles et des contre-modèles.
- **Modèle pour F4**: l'interpretation I telle que I(A) =1 et I(B) =1 puisque I(F4) = 1
- **Contre-modèle pour F4**: l'interpretation I telle que I(A) =1 et I(B) = 0 puisque I(F4) = 0

<u>Exercice 3 :</u> (5 pts) (correction)

1) Démontrer les conséquences logiques suivantes :

a. ¬ Q, (P → Q) ⊨ ¬ P (utiliser le théorème de déduction et table de vérité)

D'après le théorème de déduction il suffit de démontrer que : ¬ Q ∧ (P → Q) → ¬ P est valide.

P	Q	¬ Q	P → Q	¬ Q ∧ (P → Q)	¬ P	¬ Q ∧ (P → Q) → ¬ P
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Puisque ¬ Q ∧ (P → Q) → ¬ P est valide, donc d'après
le théorème de déduction on a : ¬ Q, (P → Q) ⊨ ¬ P

b. $Q \models P \rightarrow Q$ (utiliser le théorème de réfutation et table de vérité)

D'après le théorème de réfutation il suffit de démontrer que : $Q \wedge \neg (P \rightarrow Q)$ est un contradiction.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg (P \rightarrow Q)$	$Q \wedge \neg (P \rightarrow Q)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

Puisque $Q \wedge \neg (P \rightarrow Q)$ est un contradiction, donc d'après le théorème de réfutation on a : $Q \models (P \rightarrow Q)$

c. $\neg Q, (\neg P \vee Q) \models \neg P$ (utiliser la définition de $\models$ et table de vérité)

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q$	$\neg P$
1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1

donc on a : $\neg Q, (\neg P \vee Q) \models \neg P$

2) Démontrer que la conséquence logique suivante n'est pas correcte :

a- $\neg P, (\neg P \vee Q) \models \neg Q$ (utiliser la définition de $\models$ et table de vérité)

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q$
1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1

Puisque pour l'interprétation I telle que I(P) = 0 et I(Q) = 1 on a $I(\neg P) = 1$ et $I(\neg P \vee Q) = 1$ mais $I(\neg Q) = 0$, on a donc : $\neg P, (\neg P \vee Q) \models \neg Q$ n'est pas correcte.

b- $\neg P, (\neg P \vee Q) \models \neg Q$ (utiliser théorème de déduction et table de vérité)

d'après le théorème de déduction il suffit de démontrer que : $\neg P \wedge (\neg P \vee Q) \rightarrow \neg Q$ n'est pas valide (c'est-à-dire falsifiable)

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q$	$\neg P \wedge (\neg P \vee Q)$	$\neg P \wedge (\neg P \vee Q) \rightarrow \neg Q$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1

Puisque $\neg P \wedge (\neg P \vee Q) \rightarrow \neg Q$ n'est pas valide, donc d'après le théorème de déduction on a : $\neg P, (\neg P \vee Q) \models \neg Q$ n'est pas correcte

c- $\neg P, (\neg P \vee Q) \models \neg Q$ (utiliser théorème de réfutation et table de vérité)

d'après le théorème de réfutation il suffit de démontrer que : $\neg P \wedge (\neg P \vee Q) \wedge Q$ n'est pas contradictoire (c'est-à-dire satisfiable)

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$\neg P \wedge (\neg P \vee Q)$	$\neg P \wedge (\neg P \vee Q) \wedge Q$
1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0

Puisque $\neg P \wedge (\neg P \vee Q) \wedge Q$ n'est pas contradictoire, donc d'après le théorème de réfutation on a : $\neg P, (\neg P \vee Q) \models \neg Q$ n'est pas correcte

Exercice 4 : (2 points) (correction)

Déterminer pour chacun des cas suivants les valeurs de n (n entier naturel) pour lesquelles la formule est vraie :

1- $(n=1) \rightarrow (n=2)$

$(n=1) \rightarrow (n=2)$ est fausse <==> $(n = 1)$ et $(n \neq 2)$ <==> $(n=1)$

Ce qui implique

$(n=1) \rightarrow (n=2)$ est vrai <==> $(n \neq 1)$ **ssi** $n \in IN \setminus \{1\}$

Donc pour $n \in IN \setminus \{1\}$, *la formule* $(n=1) \rightarrow (n=2)$ est vrai

2- $(n=1) \leftrightarrow (n=2)$

$(n=1) \leftrightarrow (n=2)$ est vrai <==>

$((n = 1)$ et $(n = 2))$ *ou* $((n \neq 1)$ et $(n \neq 2))$ <==>

$((n \neq 1)$ et $(n \neq 2))$ <==>

$n \in IN \setminus \{1, 2\}$

Donc pour $n \in IN \setminus \{1, 2\}$, *la formule* $(n=1) \leftrightarrow (n=2)$ est vrai