Par Mohammed Bouayoun, Janvier 2025 (bouyao@gmail.com)

Chapitre 5 : Le Synergistic Connection Network (SCN) : Architecture Générale

5.1. Introduction et Enjeux

5.1.1. Contexte du Chapitre

5.1.1.1. Rappeler le Parcours : Après Avoir Défini (Ch. 3) la Représentation des Entités et (Ch. 4) la Dynamique d'Auto-Organisation, on Aborde Maintenant la "Structuration" d'un SCN au Niveau "Architecture Globale"

Le **Deep Synergy Learning** (*DSL*) progresse selon un fil conducteur qui, jusqu'à présent, a posé les **fondations conceptuelles** (chapitres 2 et 3) et la **dynamique** de l'auto-organisation (chapitre 4). Ces acquis, s'ils permettent de comprendre *comment* un **Synergistic Connection Network** (*SCN*) calcule la **synergie** et met à jour ses pondérations $\omega_{i,j}$, doivent à présent être prolongés par une **réflexion** plus large sur la **structuration logicielle**.

En effet, il ne suffit plus de connaître la formule de mise à jour additive ou la manière d'introduire une inhibition compétitive ; il faut également clarifier la **façon** dont on organise les divers modules et flux de données pour gérer efficacement un SCN de grande taille ou relié à d'autres systèmes.

Le **chapitre 3** a introduit la **représentation** des **entités** $\{\mathcal{E}_i\}$ et a montré comment traduire, dans un espace sub-symbolique, tel que les embeddings, vecteurs ou signaux, ou symbolique, comme les règles et ontologies, la notion de *contenu* d'une entité.

Le **chapitre 4** s'est concentré sur la **dynamique** en détaillant la **mise à jour** $\omega_{i,j}(t+1)$ et le rôle crucial des **paramètres** η, τ ou γ liés à l'inhibition, révélant ainsi comment s'organisent progressivement des **clusters** cohérents. Cette logique d'**auto-organisation**, essentielle à la philosophie du DSL, est désormais bien comprise et la synergie $S(i,j)$ détermine la vitesse à laquelle la pondération $\omega_{i,j}$ grandit ou diminue, ce qui conduit à la formation de blocs d'entités fortement connectées.

Toutefois, disposer d'équations ou d'algorithmes de mise à jour ne garantit pas, à lui seul, la **maintenabilité** et la **scalabilité** du système.

Lorsque l'on souhaite intégrer un SCN dans une application ou un cadre de recherche complexe (pouvant impliquer un grand nombre d'entités, des flux continus de données, ou une interconnexion avec d'autres briques logicielles), il faut régler plusieurs questions d'**architecture**.

Le **chapitre 5** s'attachera donc à expliquer **comment** aller au-delà de la simple dynamique *algorithmique* pour parvenir à un **environnement modulaire**, où les blocs de calcul (mise à jour ω, calcul de synergie, module d'inhibition, etc.) sont clairement découplés. Ce faisant, on pourra gérer la **persistance** des données (stockage de ω sur disque ou en mémoire distribuée), la **synchronisation** (threads multiples, double-buffer, etc.) et l'**interface** avec des frameworks externes (traitement multimodal, robotique, systèmes distribués).

Ainsi, ce **chapitre 5** étendra la démarche amorcée dans les chapitres précédents, en montrant **comment** on fait vivre un **SCN** dans un *code* réaliste. On y retrouvera le **calcul** de **S**, la **dynamique** de ω, et on soulignera la nécessité de séparer en **modules** indépendants tout ce qui relève de la synergie (entités, scoring), de la mise à jour ω (logique de l'auto-organisation), et des mécanismes transverses (inhibition, recuit, gestion des ressources).

Par ailleurs, la question de l'**observabilité** (possibilité de visualiser l'évolution de la matrice ω et l'apparition de clusters) ou celle de la **concurrence** (threading, verrous) seront détaillées, puisqu'elles conditionnent la faisabilité d'un *SCN* à grande échelle.

Ce **parcours** illustre la progression naturelle du DSL. Après avoir étudié **quoi** calculer (chap. 3, la représentation des entités) et **comment** l'actualiser (chap. 4, la dynamique ω), on doit maintenant se pencher sur **comment** organiser *logiciellement* ces éléments, de sorte qu'ils demeurent robustes, évolutifs et faciles à interfacer. C'est précisément la finalité du **chapitre 5**, qui vient *après* la dynamique d'auto-organisation et qui va *ouvrir* sur les chapitres suivants consacrés aux **extensions** (multi-échelle, multimodalité, etc.).

5.1.1.2. Expliquer la Différence entre la "Dynamique" (Vue Algorithme/Math) et l'Architecture (Vue Ingénierie, Mise en Œuvre Concrète)

La distinction fondamentale entre la dynamique, telle qu'elle est présentée au niveau mathématique et algorithmique, et l'architecture, qui représente la concrétisation logicielle et l'ingénierie d'un système, constitue un axe majeur pour la conception d'un **Synergistic Connection Network (SCN)** opérationnel. Au niveau de la **dynamique**, l'accent est mis sur les équations de mise à jour des pondérations $\omega_{i,j}(t+1)$ et sur l'analyse théorique de leur comportement. Par exemple, nous avons vu que la règle additive classique s'exprime par

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left(S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right),$$

ou que, dans une variante multiplicative, la mise à jour peut être formulée comme

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t)\exp\left(\eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right]\right).$$

Ces formules, ainsi que les paramètres associés (η pour le taux d'apprentissage, τ pour la décroissance, et éventuellement γ pour des mécanismes d'inhibition), définissent l'**essence** du comportement du SCN. Elles précisent « quoi » calculer à chaque itération, comment la pondération évolue en fonction de la synergie $S(i,j)$ et comment les liens se renforcent ou se décroissent. Cette vue mathématique permet d'étudier la convergence, la formation de clusters et d'identifier des phénomènes tels que les oscillations ou la multi-stabilité. Elle se traduit généralement par un pseudo-code qui, dans sa forme la plus simple, itère sur les entités pour actualiser $\omega_{i,j}$ selon la formule définie, fournissant ainsi un cadre théorique rigoureux pour la dynamique d'auto-organisation.

En revanche, la **vue architecturelle** se situe à un niveau d'implémentation concrète. Il s'agit ici de concevoir une **infrastructure logicielle** capable d'exécuter la dynamique décrite tout en assurant la **maintenance**, l'**extensibilité** et la **scalabilité** du système dans un environnement réel. Cette infrastructure doit spécifier **comment** organiser les différents **modules** du SCN, en séparant clairement le module de calcul de synergie, le module de mise à jour des pondérations et le module d'inhibition ou de recuit. De plus, elle doit définir la manière de stocker la matrice ω dans des structures de données adaptées, qu'il s'agisse de formats denses ou sparses. La gestion de la **parallélisation** et de la **synchronisation** entre les threads ou processus devient également un enjeu central lorsque le nombre d'entités n est élevé, car la mise à jour de ω a une complexité temporelle de l'ordre de $\mathcal{O}(n^2)$.

L'architecture doit aussi proposer une interface robuste permettant d'interagir avec d'autres modules du système. Par exemple, elle doit pouvoir recevoir les mises à jour de la synergie $S(i,j)$ lorsque celle-ci évolue au fil du temps, notamment lors de modifications des embeddings

ou des règles logiques. De même, elle doit transmettre la matrice ω à des modules dédiés à l'extraction de clusters ou à l'optimisation. Plusieurs choix techniques entrent alors en jeu, comme le double-buffering pour séparer lecture et écriture des données, la gestion asynchrone des mises à jour ou encore l'utilisation de verrous et de mécanismes lock-free pour assurer la cohérence globale du système.

Ainsi, la **dynamique** représente le "**quoi**" et détermine, à travers des formules mathématiques précises, comment les pondérations $\omega_{i,j}$ évoluent en fonction des synergies et des paramètres de stabilisation. Cette approche purement algorithmique se focalise sur l'analyse théorique, les conditions de convergence et les comportements attendus, tels que la convergence vers $\omega_{i,j}^{*} = \frac{S(i,j)}{\tau}$ dans un cas stationnaire.

En revanche, la **vue architecturelle** répond au "**comment**" et concerne la structuration du code, la gestion des ressources, la modularisation, la persistance des données et l'intégration du SCN dans un système à grande échelle. Elle permet de transformer la théorie abstraite en une application concrète où la dynamique mathématique est encapsulée dans un environnement logiciel modulaire, scalable et interopérable.

5.1.2. Objectifs Principaux

Au sein de ce **Chapitre 5**, nous ne restons plus seulement au niveau des **équations** ou des **concepts** (décrits en chapitres 2, 3, 4), mais nous nous focalisons sur la **mise en œuvre** concrète d'un **SCN** (Synergistic Connection Network). Nous allons préciser comment **concevoir** et **organiser** l'ensemble des modules et des données nécessaires à son fonctionnement, en gardant toujours à l'esprit des objectifs tels que la **clarté**, la **robustesse**, la **scalabilité** et l'**extensibilité**.

5.1.2.1. Discuter Comment Organiser le SCN en Modules (Calcul de Synergie, Mise à Jour ω, etc.)

La conception d'un **Synergistic Connection Network (SCN)** opérationnel ne se limite pas à l'implémentation de la dynamique mathématique de mise à jour des pondérations $\omega_{i,j}(t+1)$. Pour que le système puisse être déployé à grande échelle, intégré dans des applications réelles et maintenu dans le temps, il est impératif de l'organiser en **modules distincts**. Cette approche modulaire, qui relève du principe de « separation of concerns », permet de dissocier la logique algorithme/mathématique – qui décrit « ce qu'il faut calculer » – de l'architecture logicielle – qui répond à la question « comment le code est structuré et géré dans un environnement d'exécution complexe ». Nous détaillerons ci-après les différents modules ainsi que les avantages qu'apporte cette organisation.

A. Raison d'Être de la Modularisation

La dynamique d'un SCN repose sur des formules telles que

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left(S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right)$$

ou sa variante multiplicative, qui définissent l'évolution de la matrice $\boldsymbol{\omega}$ en fonction de la **synergie** $S(i,j)$ entre les entités $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$. Ces équations, ainsi que leurs paramètres η, τ et éventuellement γ (pour l'inhibition), décrivent le comportement dynamique du système. Cependant, pour rendre ce comportement exploitable en pratique, il faut structurer le code de

manière à isoler les différentes responsabilités. La modularisation permet notamment de séparer le **calcul de synergie** – qui peut reposer sur des données hétérogènes telles que des embeddings ou des règles logiques – de la **mise à jour** effective des pondérations ω. Cette séparation offre une meilleure lisibilité du code, facilite le débogage et permet de remplacer ou d'améliorer chaque composant sans avoir à repenser l'ensemble du système. En outre, elle rend possible une configuration dynamique des paramètres et une gestion efficace des ressources, deux aspects cruciaux quand le nombre d'entités n devient important.

B. Composition des Modules et Communication

Dans une implémentation modulaire d'un SCN, plusieurs blocs fonctionnels sont identifiés, chacun jouant un rôle spécifique :

- **Module « Calcul de Synergie »** : Ce module est responsable de la détermination de la fonction $S(i,j)$ qui quantifie la proximité ou la complémentarité entre les entités $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$. Pour des données sub-symboliques, il peut s'agir d'une similarité vectorielle (par exemple, une similarité cosinus ou une fonction de noyau gaussien) et, dans un contexte hybride, ce module peut combiner des scores issus d'embeddings et des scores de compatibilité logique. La fonction peut être exprimée, par exemple, sous la forme

$$S_{\text{hybrid}}(i,j) = \alpha\, S_{\text{sub}}\big(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\big) + (1-\alpha)\, S_{\text{sym}}\big(R_i, R_j\big),$$

  où α ajuste l'importance relative des composantes sub-symbolique et symbolique. Ce module reçoit en entrée les données des entités (embeddings, règles, etc.) et renvoie un score numérique exploitable par les autres modules.

- **Module « Mise à Jour de ω »** : Ce bloc implémente la dynamique propre aux pondérations. Il applique la règle de mise à jour, qu'elle soit additive ou multiplicative, et intègre les paramètres de contrôle tels que le taux d'apprentissage η et le facteur de décroissance τ. Par exemple, en mode additif, la mise à jour est donnée par

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\,\Big(S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\Big).$$

  L'objectif de ce module est de transformer, à chaque itération, la matrice $\omega(t)$ en une nouvelle configuration $\omega(t+1)$, en respectant les règles de la dynamique auto-organisée. En encapsulant cette fonction dans un module dédié, on peut facilement expérimenter différentes variantes (par exemple, intégrer des mécanismes de recuit ou de clipping) sans affecter le calcul de $S(i,j)$.

- **Module « Inhibition »** : Afin d'éviter une croissance excessive ou non sélective des pondérations, ce module applique des politiques d'inhibition, telles que l'inhibition compétitive locale ou globale. La règle peut prendre la forme d'un terme additionnel, par exemple

$$-\gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t),$$

  qui pénalise l'activation simultanée de nombreux liens par une même entité. La modularisation de cette fonction permet de l'activer ou de la désactiver aisément, voire de la remplacer par une stratégie de sparsification, en fonction des exigences de l'application.

- **Module « Observer et Extraction de Clusters »** : Ce module a pour rôle de surveiller la matrice ω au fil des itérations, d'extraire des indicateurs de performance (tels que la

modularité ou l'indice de silhouette) et d'identifier les clusters émergents. Il peut s'agir d'un outil de visualisation en temps réel, similaire à TensorBoard, qui permet de suivre l'évolution de la dynamique et d'ajuster les paramètres en conséquence.

La communication entre ces modules s'effectue via des interfaces bien définies. Le module de mise à jour reçoit le score $S(i,j)$ calculé par le module de synergie, et transmet la nouvelle matrice ω aux modules d'inhibition et d'observation. Cette séparation garantit que l'évolution d'un module n'impacte pas directement les autres, permettant ainsi une maintenance aisée et une évolutivité du système.

C. Flexibilité et Extensibilité de l'Architecture

L'un des grands avantages d'une architecture modulaire est sa **flexibilité**. En isolant chaque composant, il devient possible de modifier ou de remplacer une partie du système sans réécrire l'ensemble du code. Par exemple, si l'on souhaite passer d'une formule additive à une mise à jour multiplicative, il suffit d'ajuster le module de mise à jour de ω tout en conservant intact le module de calcul de synergie. De même, l'activation d'un module de recuit stochastique ou l'introduction de techniques de sparsification peut se faire par simple configuration, via des plugins ou des paramètres dans le gestionnaire de la dynamique.

Cette approche modulaire rend également le système **scalable**. Lorsque le nombre d'entités n devient très grand, la matrice ω peut être gérée à l'aide de structures de données adaptées, comme des matrices creuses ou des bases de données distribuées. Le traitement peut être parallélisé de manière efficace grâce à un découpage des tâches entre plusieurs threads ou machines.

Enfin, l'**interopérabilité** est facilitée puisque chaque module communique via des API standardisées. Cette modularité permet d'intégrer le SCN dans des environnements hétérogènes, qu'il s'agisse de systèmes multimodaux, de simulateurs de robotique ou d'autres infrastructures nécessitant une interaction dynamique entre différents sous-systèmes.

D. Exemple d'Organisation Modulaire

Pour illustrer, considérons un exemple hypothétique où le SCN est organisé en quatre modules principaux, orchestrés par un moteur central :

- **SCNCore** : Ce composant central détient la matrice ω et gère le cycle d'itération global. Il initie la boucle de mise à jour et coordonne les appels aux différents modules.

- **SynergyModule** : Responsable du calcul de $S(i,j)$, il reçoit les données d'entrée (embeddings, règles) et produit le score de synergie. Ce module peut être configuré pour utiliser différentes fonctions de similarité selon le contexte.

- **UpdateModule** : Ce module applique la règle de mise à jour de ω. Par exemple, il peut utiliser la formule additive

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left(S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right),$$

  ou une variante multiplicative, selon les paramètres fournis. Il reçoit le score $S(i,j)$ du SynergyModule et intègre les valeurs η et τ pour produire la nouvelle matrice.

- **InhibitionModule** : En tant que composant optionnel, il s'occupe d'appliquer des stratégies d'inhibition ou de sparsification, par exemple en limitant la somme des pondérations par ligne ou en imposant un clipping sur les valeurs extrêmes.

- **ObserverModule** : Ce module effectue des analyses de la matrice ω (par exemple, calcul de la modularité, détection de clusters) et fournit des visualisations ou des rapports pour surveiller la dynamique du SCN.

Chaque module communique avec SCNCore via des interfaces bien définies. Par exemple, le SynergyModule peut être appelé avec une fonction « computeSynergy(E[i], E[j]) » qui retourne $S(i,j)$, et le UpdateModule peut disposer d'une fonction « updateOmega(ω, S, η, τ) » qui produit $\omega(t+1)$. Ce découpage facilite la maintenance et permet de tester indépendamment chaque composant.

5.1.2.2. Aborder la Persistance des Données, la Scalabilité, la Gestion d'Entités Hétérogènes dans un Seul Framework

Dans le contexte d'un **Synergistic Connection Network** (SCN), une fois que les modules essentiels de la dynamique – notamment le **calcul de la synergie** $S(i,j)$ et la **mise à jour** des pondérations $\omega_{i,j}(t+1)$ – ont été définis, il apparaît indispensable de développer une infrastructure logicielle robuste qui intègre des mécanismes de **persistance**, assure la **scalabilité** pour un grand nombre d'entités et permette la gestion homogène d'entités hétérogènes dans un cadre unique. Cette section présente une approche intégrée, en insistant sur la formalisation mathématique des problèmes, sur les choix de structures de données et sur l'architecture logicielle qui facilitent l'implémentation opérationnelle d'un SCN.

A. Persistance des Données

La **persistance** des données constitue un enjeu majeur lorsque la matrice des pondérations, notée $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, peut devenir volumineuse, en particulier lorsque le nombre d'entités n croît de manière significative, entraînant une complexité mémoire de l'ordre de $\mathcal{O}(n^2)$. Dans un tel scénario, il est crucial d'enregistrer l'état du SCN à intervalles réguliers afin de permettre la reprise d'une simulation interrompue ou d'effectuer une analyse a posteriori de la dynamique. Par exemple, on peut définir une fonction de sauvegarde

$$\text{SaveState} : \boldsymbol{\omega}(t) \rightarrow \text{Fichier (ou base de données)},$$

qui stocke l'état courant dans un format binaire ou au format HDF5. Cette approche permet non seulement de garantir la continuité des simulations en cas d'interruption, mais aussi d'enregistrer l'évolution de la dynamique pour une analyse ultérieure. En outre, lorsque la matrice $\boldsymbol{\omega}$ est essentiellement creuse – c'est-à-dire que la majorité des liens $\omega_{i,j}$ restent faibles ou nuls après l'application de techniques de **sparcification** – l'utilisation de structures de données spécialisées telles que les matrices **sparse** contribue à optimiser la persistance et la rapidité d'accès, tout en réduisant l'empreinte mémoire.

B. Scalabilité

La **scalabilité** se réfère à la capacité du SCN à gérer efficacement un grand nombre d'entités, ce qui pose deux défis majeurs. Le premier concerne le coût du stockage de la matrice $\boldsymbol{\omega}$, qui peut devenir prohibitif lorsque le nombre d'entités n augmente significativement. Le second défi réside dans le temps de calcul associé à la mise à jour, qui implique potentiellement de traiter $\mathcal{O}(n^2)$ paires à chaque itération, rendant les opérations coûteuses en ressources computationnelles. Pour pallier ces difficultés, il est judicieux de recourir à des méthodes de **sparcification** qui consistent à filtrer les liens insignifiants. Par exemple, en définissant un opérateur de filtrage Π tel que

$$\widetilde{\omega}_{i,j} = \Pi(\omega_{i,j}) = \begin{cases} \omega_{i,j}, & \text{si } \omega_{i,j} \geq \theta, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

on peut ainsi réduire le nombre total de liens stockés à $\mathcal{O}(n\,k)$, avec $k \ll n$. Par ailleurs, la parallélisation du calcul, en utilisant des techniques telles que le double-buffering et la distribution des tâches sur plusieurs threads ou machines (via MPI ou OpenMP), permet de diviser le travail de mise à jour de manière efficace. La stratégie consiste à partitionner la matrice **ω** en sous-blocs, de sorte que chaque thread traite indépendamment un ensemble de lignes ou de colonnes, réduisant ainsi considérablement le temps de calcul par itération.

C. Gestion d'Entités Hétérogènes dans un Seul Framework

Dans de nombreux cas d'usage, le SCN doit intégrer des entités de nature diverse – par exemple, des **entités sub-symboliques** issues d'embeddings neuronaux, des **entités symboliques** représentées par des ensembles de règles ou d'axiomes, et même des agents physiques comme des robots. Pour assurer une **intégration homogène**, il est essentiel de définir une **interface** abstraite, par exemple une classe **Entity**, qui spécifie les méthodes communes telles que getRepresentation() ou computeSynergy(other). Chaque type d'entité (sub-symbolique, symbolique ou hybride) implémente cette interface en fournissant ses propres méthodes de calcul. Par exemple, dans un scénario où la fonction de synergie est définie par

$$S(i,j) = \alpha\, S_{\text{sub}}(i,j) + (1-\alpha)\, S_{\text{sym}}(i,j),$$

les entités sub-symboliques et symboliques peuvent ainsi être traitées uniformément par le module de **Calcul de Synergie**, qui s'appuie sur les méthodes polymorphiques définies dans la classe **Entity**. Cette approche permet non seulement de faciliter l'extension du SCN à de nouveaux types d'entités, mais également de standardiser la manière dont les différentes représentations interagissent au sein du même réseau.

D. Interfaçage et API

Afin de garantir une intégration efficace du SCN dans un environnement logiciel plus vaste, il est impératif de développer des **API** claires et bien définies. Ces API doivent permettre l'accès aux données du SCN (la matrice **ω** et la fonction de synergie $S(i,j)$), ainsi que la modification dynamique des paramètres essentiels tels que η, τ et γ. Par exemple, une interface du type

$$\text{getOmega()} \quad \text{et} \quad \text{setParameters}(\eta, \tau, \gamma)$$

permet de communiquer avec d'autres modules ou systèmes, tels que des outils de visualisation, des systèmes de contrôle en temps réel ou des simulateurs de tâches complexes. Cette interopérabilité est cruciale pour que le SCN puisse fonctionner en tant que composant intégré dans des frameworks plus larges, notamment dans des applications de robotique ou d'apprentissage multimodal.

5.1.2.3. Préparer les Chapitres Suivants (Multi-Échelle, Optimisations Avancées, Etc.)

Dans les sections précédentes, il a été montré comment une architecture modulaire favorise la clarté et la flexibilité d'un **Synergistic Connection Network** (SCN). Les deux premiers objectifs, à savoir la séparation des rôles entre le calcul de synergie, la mise à jour de ω, l'inhibition et la prise en compte de la persistance, de la scalabilité et de l'hétérogénéité des entités, répondent déjà à la plupart des exigences d'une mise en œuvre robuste. Néanmoins, cet agencement ne représente que la base d'un cadre plus large. Les chapitres suivants détailleront

des domaines où l'architecture doit être étendue ou adaptée à des situations plus sophistiquées. Il pourra s'agir de gérer plusieurs niveaux d'échelles, de recourir à des algorithmes d'optimisation plus élaborés ou d'intégrer des canaux multimodaux variés.

Le **chapitre 6** abordera la question de la **multi-échelle**, qui concerne l'articulation du SCN selon des niveaux hiérarchiques avec la possibilité que la synergie et la mise à jour ω se déclinent sous différentes granularités. On peut envisager des entités formant des micro-clusters locaux enchevêtrés dans de plus grands macro-clusters destinés à fournir un aperçu plus global. Cette hiérarchie demande souvent de disposer de structures de données ou de métadonnées permettant de résumer les sous-réseaux à des niveaux supérieurs et de prévoir des règles distinctes à chaque palier. L'architecture modulaire décrite dans le **chapitre 5** devra permettre l'insertion de niveaux hiérarchiques supplémentaires ou de couches de clustering dans la boucle de mise à jour. Les modules définissant la synergie ou la mise à jour de ω seront ainsi complétés par un gestionnaire multi-niveau supervisant l'échange d'informations entre les différentes échelles.

Le **chapitre 7** se consacrera aux **optimisations avancées** et à l'**adaptation dynamique** des paramètres. L'ajustement automatique des paramètres η, τ ou γ en cours d'exécution, en fonction d'observateurs mesurant la vitesse de convergence ou le taux d'oscillation, nécessitera un composant de rétroaction supplémentaire. Des algorithmes inspirés d'approches globales, comme le recuit simulé avancé ou un gradient global appliqué à la matrice ω, pourront aussi être intégrés au SCN. Une architecture modulaire facilitera l'activation de routines spécialisées, par exemple un gestionnaire de paramètres adaptant η en fonction du rythme d'évolution des liens ω, tout en préservant la mise à jour locale. Il sera également possible d'introduire un mécanisme de contrôle externe permettant d'influencer certaines parties du réseau, dépassant ainsi la simple auto-organisation descendante.

Le **chapitre 8** portera sur la **fusion multimodale**, qui mettra en évidence la souplesse du **Deep Synergy Learning** dans des contextes où les entités représentent des canaux ou des descripteurs hétérogènes. Dans des domaines complexes comme la vision, le langage ou l'audio, les paires d'entités (i, j) pourront être caractérisées par plusieurs sources de synergie $\mathbf{S}_1(i,j), \mathbf{S}_2(i,j), \ldots$ correspondant à différentes modalités telles que le visuel, le textuel ou le sonore. Ce cadre multimodal s'appuie sur la cohabitation naturelle de multiples entités dans le SCN, ce que le **chapitre 5** aura préparé en garantissant une gestion polymorphe des entités et une persistance adaptée aux grandes échelles, indépendamment du mode de calcul du score $S(i, j)$.

L'architecture décrite dans le **chapitre 5** constituera le socle permettant de développer ces différentes extensions. L'ajout d'un module de synergie multi-échelle supervisant un niveau hiérarchique supplémentaire ou d'un module de fusion multimodale manipulant diverses représentations sera considérablement simplifié grâce à la modularité préétablie entre la mise à jour de ω et le calcul de synergie. Une mise en cohérence entre les chapitres **6, 7 et 8** illustrera la capacité du **SCN** à évoluer d'une organisation locale des liens vers des configurations plus complexes intégrant des hiérarchies, des stratégies de contrôle et des sources d'information multimodales. L'ensemble mettra en lumière le **Deep Synergy Learning** comme un paradigme général et extensible, ouvrant la voie à de nombreuses expérimentations et applications concrètes dès lors qu'il repose sur une architecture logicielle rigoureuse et adaptable.

5.2. Vision d'Ensemble de l'Architecture SCN

5.2.1. Notion de "Noyau" vs. "Modules Adjoints"

5.2.1.1. Noyau (Core) : Stocke la Matrice $\{\omega_{i,j}\}$ et Exécute le Cycle de Mise à Jour selon la Formule du DSL

Le **Noyau** représente la pièce maîtresse de l'architecture du réseau SCN dans le cadre du DSL. Il constitue la **colonne vertébrale** du système en assurant à la fois le **stockage** central de la matrice des pondérations $\mathbf{\Omega}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et le **pilotage** de la dynamique d'auto-organisation par la mise à jour itérative des poids $\omega_{i,j}(t)$. Cette section présente en détail le rôle du Noyau, sa formalisation mathématique, la gestion des aspects de stockage et de complexité, ainsi que son interaction avec d'autres modules du système.

A. Rôle Fondamental du Noyau

Le **Noyau** se définit avant tout comme le gardien de la matrice $\mathbf{\Omega}(t)$, qui regroupe l'ensemble des pondérations $\omega_{i,j}(t)$ établies entre toutes les entités $\mathcal{E}_i$ du réseau. En pratique, il doit garantir un **stockage efficace** de ces valeurs, que ce soit sous un format **dense** ou **sparse** afin de minimiser l'empreinte mémoire, notamment lorsque le nombre d'entités n devient très grand (par exemple, $n = 10^4$ à 10^5). Sur le plan **mathématique**, la matrice $\mathbf{\Omega}(t)$ évolue selon une fonction de transition que nous pouvons écrire de manière générale :

$$\boldsymbol{\omega}(t+1) = F(\boldsymbol{\omega}(t),\ \mathbf{S},\ \{\text{inhibition, bruit, etc.}\}),$$

où **S** représente la matrice des **synergies** $S(i,j)$ entre les entités, et les autres termes (inhibition, bruit, etc.) viennent moduler l'évolution du système.

Sur le plan **algorithmique**, le Noyau agit comme une brique centrale qui orchestre l'ensemble du **cycle itératif** de mise à jour. Ce cycle repose sur la formule de mise à jour propre au DSL. Par exemple, dans le cas d'une mise à jour de type **additif**, nous avons :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big] - \gamma \sum_{k\neq j} \omega_{i,k}\,(t) + \cdots,$$

où η représente le **taux d'apprentissage**, τ le **facteur de décroissance** qui module le coût de maintenir un lien élevé, et γ un coefficient d'**inhibition** appliqué sur les liens concurrents. Cette formule exprime l'essence de la **descente d'énergie** qui guide l'auto-organisation du réseau.

B. Stockage de la Matrice Ω et Gestion de la Complexité

Le Noyau doit assurer le **stockage** et la gestion de la matrice $\mathbf{\Omega}(t)$, qui contient $O(n^2)$ éléments pour n entités. Lorsque n est élevé, le coût mémoire d'un stockage dense peut rapidement devenir prohibitif (pouvant atteindre des dizaines ou centaines de gigaoctets). Pour pallier ce problème, des techniques de **sparcification** telles que l'utilisation de structures de données *sparse* ou la limitation des liaisons à un nombre restreint de voisins (k-NN ou ϵ-radius) peuvent être mises en œuvre. Ainsi, le Noyau doit intégrer des routines d'accès rapide et de mise à jour efficaces, en exploitant par exemple des stratégies de **parallélisation** ou de **double-buffer** pour gérer les itérations.

Sur le plan **algébrique**, la mise à jour s'effectue selon la relation :

$$\boldsymbol{\omega}(t+1) = F(\boldsymbol{\omega}(t),\ \mathbf{S},\ \{\text{termes de régulation}\}),$$

ce qui implique un parcours complet (ou partiel en mode sparse) sur tous les indices $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$.

C. Cycle Itératif de Mise à Jour

Le fonctionnement du Noyau peut être décomposé en une série d'étapes séquentielles qui assurent la mise à jour correcte de la matrice **Ω**. Ce **cycle** se réalise généralement en six étapes clés :

1. Lecture : Le Noyau commence par lire la matrice des pondérations $\omega_{i,j}(t)$ depuis un buffer de lecture, souvent désigné par w_{current}.

2. Acquisition de la Synergie : Il sollicite un module externe, tel que le **Module Synergie**, afin d'obtenir les valeurs de $S(i,j)$ qui déterminent la proximité ou la complémentarité entre les entités.

3. Calcul des Incréments : Pour chaque paire (i,j), le Noyau calcule l'incrément $\Delta\omega_{i,j}$ à partir de la formule de mise à jour, tenant compte des paramètres d'apprentissage, des termes d'inhibition et de toute composante stochastique.

4. Écriture : Les nouvelles valeurs $\omega_{i,j}(t+1)$ sont écrites dans un buffer d'écriture, appelé w_{next}.

5. Traitement Postérieur : Un module optionnel d'inhibition ou de post-traitement peut être appliqué pour ajuster les valeurs calculées, par exemple en imposant des limites ou en appliquant des règles de sparsification.

6. Basculement : Enfin, après vérification de la cohérence de l'itération, le Noyau effectue un swap entre w_{current} et w_{next}, marquant la transition de l'itération t à $t+1$.

Cette séquence garantit que la dynamique du DSL se réalise de manière ordonnée et cohérente, en appliquant à chaque itération la formule mathématique qui définit la descente d'énergie du système.

D. Interfaces et Modularité

Le Noyau se veut **minimaliste** dans ses responsabilités et se limite à la gestion de la matrice **Ω** ainsi qu'à l'orchestration de la boucle de mise à jour. Il délègue le calcul détaillé de $S(i,j)$ et des éventuels termes additionnels, comme l'inhibition, à des modules externes. Grâce à cette **modularité**, il est possible de modifier ou de remplacer ces modules indépendamment du cœur de la dynamique. Par exemple, il est envisageable de substituer le **Module Synergie** basé sur la distance euclidienne par un module exploitant la **co-information** ou d'autres critères, sans affecter le mécanisme central de mise à jour de ω. Cette séparation des préoccupations favorise l'**extensibilité** et la **maintenabilité** du système.

E. Le Noyau gérant également les États, Mémoires et Agents (complement)

Dans l'architecture précédente, on a insisté sur le fait que le **Noyau** (ou *Core*) d'un **Synergistic Connection Network (SCN)** se concentrait principalement sur le stockage de la matrice ω et

l'exécution de la boucle de mise à jour du **Deep Synergy Learning (DSL)**. Toutefois, lorsqu'une **entité** $\mathcal{E}_i$ n'est pas un simple nœud statique, mais un **agent** susceptible de disposer d'un **état** interne (mémoire, variables locales, etc.), cette information doit être gérée d'une manière cohérente avec le **Noyau**. En pratique, il est fréquent que le *Core* stocke non seulement les pondérations $\omega_{i,j}$, mais aussi tout ou partie des **états** de ces agents, afin d'assurer un **cycle** de mise à jour unifié.

Intégration des États dans le Noyau

Si chaque entité $\mathcal{E}_i$ possède un vecteur d'état $\mathbf{s}_i(t)$ (par exemple, un accumulateur ou même une cellule LSTM locale), on peut étendre la structure du **Noyau** pour mémoriser ces informations. Au lieu de se contenter d'une simple matrice $\omega(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, le Noyau conserve également :

$$\mathbf{S}_{\text{etats}}(t) = \{\mathbf{s}_1(t),\ \mathbf{s}_2(t),\ \ldots,\ \mathbf{s}_n(t)\},$$

chaque $\mathbf{s}_i(t)$ pouvant être un vecteur (ou un objet plus complexe) décrivant la **mémoire** courante de l'agent $\mathcal{E}_i$. On dispose alors d'une **dynamique** double. La première concerne la mise à jour de $\omega_{i,j}$, qui représente l'évolution des pondérations inter-agents. La seconde concerne la mise à jour de $\mathbf{s}_i(t)$, qui correspond à la mémoire ou à l'état interne des entités et peut être notée :

$$\mathbf{s}_i(t+1) = \Phi\big(\mathbf{s}_i(t),\ \{\omega_{i,j}(t)\},\ \{\mathbf{s}_j(t)\}_{j\neq i}\big).$$

Le **Noyau** coordonne ainsi l'évolution simultanée de ω et $\mathbf{s}_i$, selon les règles du DSL enrichi (une équation couplée permettant aux agents de modifier leur état selon la synergie, et aux poids d'être ajustés en fonction des états et synergies).

Cas où l'Entité est un Agent

Lorsqu'une **entité** $\mathcal{E}_i$ représente un **agent** autonome, capable de prendre des décisions ou de gérer un comportement local, on veut généralement lui attribuer un espace d'état $\mathbf{s}_i(t) \in \mathbb{R}^d$ (ou un ensemble de variables plus symboliques). Le **Noyau** peut stocker ces états dans une structure annexe, par exemple un tableau Etats$[1..n]$ où chaque Etats$[i]$ pointe vers $\mathbf{s}_i(t)$. Il doit également s'assurer que, lors de chaque itération **DSL**, la mise à jour de Etats$[1..n]$ est bien exécutée. Cette mise à jour peut être effectuée avant ou après celle de $\omega_{i,j}(t)$. Sur le plan formel, on définit un couple :

$$\big(\boldsymbol{\Omega}(t),\ \mathbf{S}_{\text{etats}}(t)\big) \quad \mapsto \quad \big(\boldsymbol{\Omega}(t+1),\ \mathbf{S}_{\text{etats}}(t+1)\big),$$

où la fonction de transition prend en compte à la fois la dynamique DSL sur ω et la dynamique interne sur $\mathbf{s}_i$.

Mise à Jour Conjointe ω-$\mathbf{s}_i$

On peut imaginer une **formule** conjointe :

$$\begin{cases} \mathbf{s}_i(t+1) = \Phi_i\big(\mathbf{s}_i(t),\ \{\omega_{i,j}(t)\},\ \{\mathbf{s}_j(t)\}\big), \\ \omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S\left(\mathbf{s}_i(t), \mathbf{s}_j(t)\right) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right] + \cdots \end{cases}$$

La **synergie** $S\big(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j\big)$ dépend alors des **états** respectifs, ce qui justifie que le **Noyau** gère ou au moins coordonne l'accès à $\mathbf{s}_i$. En pratique, on peut loger $\mathbf{s}_i$ dans le **Noyau** ou dans un "Module

État" qui communique fortement avec le **Noyau**. L'important est que la **boucle** de mise à jour globale traite à la fois les poids $\omega_{i,j}$ et les états $\mathbf{s}_i$, maintenant une cohérence entre les deux.

Répercussions sur la Conception

D'un point de vue **architecture**, si l'on ne gérait que ω, le **Noyau** se limite à la "matrice de liens" et sa dynamique. Dès que des entités $\mathcal{E}_i$ possèdent un état interne évolutif, il devient naturel d'étendre le **Noyau** pour inclure la **mémorisation** de ces états, ou au moins l'orchestration de leur mise à jour. Selon le degré de modularité voulu, le Noyau peut :

- Soit conserver physiquement les $\mathbf{s}_i$
- Soit appeler un "Module État" qui, à chaque itération, calcule $\mathbf{s}_i(t+1)$.

Dans tous les cas, la **synchronicité** de la mise à jour de ω et de $\mathbf{s}_i$ doit être garantie. Il est essentiel d'éviter qu'un agent modifie son état en se basant sur une matrice $\omega(t)$ déjà obsolète ou qu'il mette à jour ω avant d'avoir pris en compte son nouvel état. Les algorithmes de double buffer (pour ω) peuvent s'étendre à l'état $\mathbf{s}_i$ s'il faut traiter la mise à jour de façon synchrone.

Conclusion sur l'Intégration de l'État dans le Noyau

Il apparaît donc naturel que le **Noyau** n'héberge pas **uniquement** la matrice ω, mais puisse **inclure** (ou gérer étroitement) les **états** des entités/agents, si l'on souhaite un **DSL** où ces entités possèdent une mémoire ou un comportement local. Les formules mathématiques, dans ce cas, se présentent sous forme de couples $(\omega, \mathbf{s}) \mapsto (\omega', \mathbf{s}')$, assurant la cohérence de la **dynamique** auto-organisée. L'architecture globale reste inchangée. Le **Noyau**, désormais responsable à la fois de $\boldsymbol{\Omega}$ et de $\mathbf{S}_{\text{etats}}$, exécute le **cycle** DSL. Les **Modules** adjacents, tels que le calcul de synergie, l'inhibition ou le recuit simulé, fournissent les composantes nécessaires, qu'il s'agisse de valeurs ou de compléments de formules, tout en déléguant la mise à jour itérative au **Noyau**.

5.2.1.2. Modules

Si le **Noyau (Core)** est la pièce maîtresse qui assure la conservation et la mise à jour de la matrice ω (voir 5.2.1.1), il n'opère pas tout seul. Dans une **architecture** SCN modulaire, nous identifions plusieurs **modules** "adjoints" (ou "satellites") qui viennent se **connecter** au Noyau pour fournir des fonctionnalités supplémentaires :

- **Module Synergie** (calcul de $S(i,j)$),
- **Module Inhibition/Contrôle**,
- **Module d'Interface** (ajout/suppression d'entités, configuration, etc.),
- (Possiblement) d'autres modules : "Recuit simulé", "Analyse/Observateur", "Gestion paramétrique adaptative", etc.

Chacun de ces **modules** sert un **rôle** précis et interagit mathématiquement ou logiquement avec le **Noyau** pour enrichir le comportement du SCN. Nous détaillons ci-après les trois modules majeurs cités.

A. Module Synergie (calcule $S(i,j)$)

Le **Module Synergie** constitue un élément fondamental dans l'architecture d'un **Synergistic Connection Network (SCN)**, car c'est lui qui fournit la **fonction** $S(i,j)$ permettant de mesurer la "distance", la "similarité" ou plus généralement la **coopération** entre deux entités $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$. Dans le **Deep Synergy Learning (DSL)**, chaque pondération $\omega_{i,j}(t)$ se met à jour en tenant explicitement compte de la valeur $S(i,j)$, ce qui fait du Module Synergie un composant déterminant pour l'évolution du réseau.

Il est fréquent de poser, dans la forme la plus simple, une mise à jour additive du type

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big] \; - \; \text{(termes d'inhibition éventuels)},$$

où $S(i,j)$ désigne précisément la valeur fournie par ce **Module Synergie**. Sur le plan **mathématique**, on peut voir S comme une matrice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mais sa construction ou son calcul peut être complexe, en fonction de la nature des entités et des traitements nécessaires pour en déduire la synergie.

L'objectif fondamental du Module Synergie est de **fournir**, pour chaque couple (i,j), une quantité $S(i,j)$ qui sera ensuite exploitée par le Noyau (Core). Le **Module Synergie** peut être envisagé comme un "serveur" auquel le **Noyau** fait appel. À chaque itération du DSL, le **Noyau** demande la valeur de $S(i,j)$ afin de mettre à jour $\omega_{i,j}$.Selon la **typologie** des entités, la fonction S peut adopter diverses formules. Dans un cas sub-symbolique, on peut considérer une distance de type gaussien ou exponentiel :

$$S(i,j) = \exp\big(-\alpha \parallel \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \parallel^2\big),$$

avec $\alpha > 0$, ou encore une similarité cosinus :

$$S(i,j) = \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j}{\parallel \mathbf{x}_i \parallel \parallel \mathbf{x}_j \parallel}.$$

Dans un contexte plus symbolique ou hétérogène, le Module Synergie peut interroger une ontologie, combiner des scores de règles ou de co-occurrences, ou même implémenter une "co-information" statistique

$$S(i,j) = I\big(\mathcal{E}_i;\, \mathcal{E}_j\big),$$

et retourner ce score au Noyau. La **généralité** du DSL impose souvent que le Module Synergie soit écrit de manière suffisamment polymorphe ou extensible, afin que l'on puisse brancher différents calculs de $S(i,j)$ en fonction des types d'entités $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$.

D'un point de vue **implémentation**, le Module Synergie peut contenir des structures d'index (par exemple, KD-Tree, LSH) lorsqu'il s'agit de recherches k-NN ou d'autres formes de *voisinage*, mais peut aussi reposer sur un pré-calcul ou sur un appel direct à des fonctions (similitude de cosinus, distance euclidienne). La forme abstraite se conçoit aisément. À chaque itération, on parcourt les paires (i,j) actives ou autorisées et on invoque une fonction

$$\text{synergyModule.getSynergy}(i,j)$$

qui renvoie la valeur $S(i,j)$.

Sur le plan **algorithmique**, si aucune contrainte de parcimonie, telle que le k-NN ou un ϵ-radius, n'est imposée, le calcul s'effectue en $\mathcal{O}(n^2)$, ce qui peut devenir prohibitif pour de

grands n. Les mêmes techniques de réduction de densité décrites dans la **Section 7.2.3.3** peuvent alors être appliquées. Cela signifie que l'on ne fait appel à getSynergy que pour un nombre restreint de paires sélectionnées selon des critères spécifiques.

Il convient de noter que le **Module Synergie** est **indépendant** de la mise à jour de $\omega_{i,j}$. Il ne modifie pas lui-même les pondérations mais se contente de calculer ou de fournir $S(i,j)$. Cette **séparation** clarifie l'architecture du **SCN** en distinguant clairement les responsabilités. Le **Noyau** exécute la règle du DSL tandis que le **Module Synergie** répond aux requêtes $S(i,j)$.

Sur le plan **mathématique**, la valeur de $S(i,j)$ peut dépendre directement des entités $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$, par exemple en fonction de leurs vecteurs internes. Elle peut aussi s'appuyer sur des états stockés dans un autre module, comme une mémoire interne associée à chaque agent. Quelle que soit l'origine de $S(i,j)$, le **Noyau** reçoit pour chaque couple (i,j) une simple valeur scalaire, qui est ensuite injectée dans la formule de mise à jour $\omega_{i,j}(t+1)$.

B. Module Inhibition/Contrôle

Le **Module Inhibition/Contrôle** joue un rôle complémentaire dans la **dynamique** d'un **Synergistic Connection Network (SCN)**, en ajoutant ou en modulant les termes d'**inhibition** (ou d'autres formes de régulation) pendant la mise à jour des pondérations $\omega_{i,j}$. Sur le plan **mathématique**, il s'agit de façonner la descente ou la dynamique du **Deep Synergy Learning (DSL)** au-delà du simple terme $\eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}\right]$, de manière à imposer une "**compétition**" ou un "**budget**" aux liens sortants. La présentation qui suit précise la nature de ces fonctions et leur intégration au sein du SCN, où le **Noyau** s'en remet à un composant externe (ce Module) pour appliquer le contrôle nécessaire.

1. Fondements Mathématiques de l'Inhibition

Dans de nombreuses variantes du **DSL**, comme décrit dans les sections **4.2.2.2** et **4.4.2**, on considère une **inhibition compétitive**. Lorsque $\omega_{i,j}$ tend à s'amplifier, une partie de cette croissance doit entraîner une **pénalisation** des autres liaisons $\omega_{i,k}$ pour $k \neq j$. L'idée courante est d'ajouter dans la **formule** :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \Delta_{\text{update}}(i,j) + \Delta_{\text{inhibition}}(i,j),$$

où l'inhibition peut s'écrire, par exemple, sous la forme

$$\Delta_{\text{inhibition}}(i,j) = -\,\gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}(t).$$

Le **terme** $\gamma > 0$ règle l'intensité de la compétition. Plus γ est grand, plus l'entité $\mathcal{E}_i$ est poussée à **sélectionner** un ou quelques liens "gagnants" au détriment des autres. Sur le plan **algébrique**, on formalise alors une contrainte de type

$$\sum_{j} \omega_{i,j}(t) \leq \Omega_{\max}$$

pour chaque i, dans une perspective saturante ou dans un style "winner-takes-most". Ce **contrôle** s'interprète comme une régulation additionnelle empêchant la croissance illimitée de multiples $\omega_{i,j}$ autour du même nœud $\mathcal{E}_i$.

2. Rôle du Module Inhibition dans l'Architecture

Dans un SCN **modulaire**, le **Noyau** (Core) détient la boucle principale de mise à jour (cf. 5.2.1.1), mais ne gère pas directement les détails de l'inhibition (ou du contrôle plus vaste). Il se contente d'appeler un composant externe chaque fois qu'il doit ajouter l'effet de la régulation. On obtient un **module** dédié, qu'on peut désigner "Module Inhibition" ou "Module Contrôle" selon l'étendue de ses fonctions, chargé d'appliquer :

$$\Delta_{\text{inhibition}}(i,j) = \text{inhibitionModule.computeTerm}\left(i, j, \omega_{\cdot,\cdot}(t)\right).$$

Ainsi, si l'on souhaite passer d'une inhibition "classique" ($-\gamma \sum_{k\neq j} \omega_{i,k}$) à un schéma plus sophistiqué (budget local, saturation, etc.), on modifie ce **Module** sans altérer la logique interne du **Noyau**. De la même façon, si l'on désire ajouter un terme de "bruit" ou d'autres contrôles (clamping, recuit, activation imposée), on étend simplement ce composant pour retourner la portion $\Delta_{\text{contrôle}}$.

3. Contrôles Additionnels : Règles, Budget, Recuit

Le terme "Inhibition" peut recouvrir différentes formes de **contrôle** :

- Compétition Hebbienne : imposer un frein proportionnel à la somme des poids sortants $\sum_k \omega_{i,k}$.

- Budget local : $\sum_j \omega_{i,j} \leq \Omega_{\max}$. Cela se traduit parfois par un "coût" ou un "clip" imposé si la somme dépasse $\Omega_{\max}$. On peut écrire :

$$\Delta_{\text{budget}}(i,j) = -\lambda(\sum_m \omega_{i,m} - \Omega_{\max})_+,$$

où $(x)_+ = \max\{x, 0\}$.

- Injection de Bruit / Recuit : pour franchir les minima locaux, on peut inclure un "terme stochastique" $\sigma(t)\,\xi_{i,j}$ comme décrit en recuit simulé. Alors, le **Module Contrôle** ajoute $\Delta_{\text{noise}}(i,j)$ pour réaliser la partie aléatoire.

- Rétroaction top-down : dans certains schémas multi-niveaux, un macro-niveau envoie un retour d'information, comme décrit dans la section 6.4.1.2. Ce retour peut prendre la forme d'une instruction telle que "renforce les liens entre $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$ car ils appartiennent à un cluster macro".

Ces divers processus se concentrent dans la même entité conceptuelle, le **Module Inhibition/Contrôle**, un "module" dans l'architecture reliant le **Noyau** via des appels du style *inhibition.apply(i,j)*.

4. Analyse Formelle et Encapsulation

La mise à jour globale s'écrit en un unique bloc :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \Delta_{\text{update}}(i,j) + \Delta_{\text{inhibition}}(i,j) + \Delta_{\text{noise}}(i,j) + \cdots$$

ou, dans une version plus condensée,

$$\omega_{i,j}(t+1) = F_{\text{DSL}}\left(\omega_{i,j}(t),\, S(i,j)\right) + G_{\text{ctrl}}\left(\{\omega_{i,k}(t)\}_k, \{\ldots\}\right).$$

La **séparation** modulaire signifie simplement que la partie **Inhibition/Contrôle** est **extraite** en un **Module**, afin que le code ou l'algorithme correspondant puisse être aisément remplacé ou ajusté. Cela se justifie dans un DSL **flexible**. On veut expérimenter différents **mécanismes** d'inhibition ou de régulation sans retoucher la boucle itérative du **Noyau**.

En conclusion, le **Module Inhibition/Contrôle** occupe une place analogue au **Module Synergie**. Il ne modifie pas ω de son propre chef, sauf dans la logique du cycle imposé par le **Noyau**, mais renvoie ou applique la **composante** $\Delta_{\text{inhibition}}(i,j)$ qu'il calcule. Les **règles** (inhibition compétitive, budgets locaux, bruit stochastique, etc.) sont encodées dans la formule $\Delta_{\text{inhibition}}$. Le **Noyau** intègre ensuite ce terme dans la mise à jour, assurant une **auto-organisation** plus riche, pilotée par plusieurs composantes (Synergie, Inhibition, Contrôle).

C. Module d'Interface (ajout/suppression d'entités, etc.)

Dans un **Synergistic Connection Network (SCN)** qui se veut adaptable ou évolutif, on peut être amené à **insérer** de nouvelles entités $\mathcal{E}_{n+1}$ ou au contraire à **retirer** une entité devenant obsolète. Sur le plan **mathématique**, il s'agit de **changer** la dimension de la matrice des pondérations ω, passant d'un espace de taille $n \times n$ à $(n+1) \times (n+1)$ (ou l'inverse) lorsqu'on introduit (ou supprime) une entité. Sur le plan **logiciel**, le **Noyau** (voir 5.2.1.1) n'a pas à gérer lui-même ces questions de "re-dimensionnement" : le **Module d'Interface** prend en charge ces opérations, assurant une **API** de manipulation externe tout en maintenant la cohérence du SCN.

Besoins Fonctionnels et Motivation

Lorsqu'un SCN évolue de manière **dynamique**, divers scénarios justifient l'ajout ou la suppression d'entités. D'une part, on peut recevoir un **nouveau** flux d'informations conduisant à la création d'une entité inédite (par exemple, l'apparition d'un nouveau robot-agent dans un essaim, ou de nouvelles données dans un système multimodal). D'autre part, on peut devoir **retirer** une entité qui n'est plus pertinente ou qui s'avère défaillante. Formulons cela plus précisément :

$$\boldsymbol{\omega}^{(n\times n)} \quad \mapsto \quad \boldsymbol{\omega}^{\left((n+1)\times(n+1)\right)},$$

dans le cas où l'on ajoute $\mathcal{E}_{n+1}$. Il faut alors initialiser les poids $\omega_{n+1,j}$ et $\omega_{j,n+1}$ pour les anciens j, ce qui revient à insérer une ligne et une colonne dans ω. Le **Module d'Interface** offre donc des fonctions de type

$$\text{addEntity}(\mathcal{E}_{\text{new}}),$$

garantissant l'allocation ou l'expansion du tableau des pondérations, avec une initialisation (par exemple $\omega_{\text{new},j} \approx 0$ ou un petit bruit). Inversement, la **suppression** se modélise comme

$$\boldsymbol{\omega}^{(n\times n)} \quad \mapsto \quad \boldsymbol{\omega}^{\left((n-1)\times(n-1)\right)},$$

lorsqu'on enlève l'entité $\mathcal{E}_q$ et qu'on retire les lignes et colonnes correspondantes. Le Module Interface propose alors une fonction du type

$$\text{removeEntity}(q),$$

pour "nettoyer" la matrice ω (ou un format sparse) et s'assurer que $\mathcal{E}_q$ n'est plus référencée.

Rôle du Module d'Interface dans l'Architecture

Le **Noyau** (Core) se concentre sur la mise à jour itérative de $\omega(t)$, tandis que le **Module d'Interface** assure le "point d'entrée" permettant aux applications externes ou aux administrateurs d'ajuster la configuration du SCN. Sur le plan **logiciel**, on peut envisager une API ou un service :

addEntity(Entity e): Prépare un nouvel ID pour l'entité, insère une ligne et une colonne dans ω, initialise les pondérations $\omega_{\text{new},j}$ et $\omega_{j,\text{new}}$.

removeEntity(ID eID): Retire l'entité eID, supprime la ligne et la colonne associées.

setParameter(paramName, value): Modifie un paramètre $(\eta, \tau, \gamma, \ldots)$ en notifiant éventuellement le Noyau ou le Module Inhibition.

Cette modularité évite de *déranger* le code cœur du Noyau à chaque fois qu'on veut gérer de nouveaux agents ou entités. Sur le plan **mathématique**, la **dimension** n du SCN est ainsi rendue dynamique, ce qui peut être crucial dans un cadre de robotique ou de multimodalité évolutive, où le flux d'informations s'accroît ou se renouvelle fréquemment.

Synchronisation avec le Cycle de Mise à Jour

Le **Module d'Interface** doit, la plupart du temps, insérer ou retirer les entités *entre* deux itérations de mise à jour (plutôt que *pendant* une itération), afin de maintenir la cohérence. Techniquement, on peut concevoir que le Noyau, avant de lancer un "step" suivant, vérifie si des *opérations* en attente (addEntity, removeEntity) doivent être appliquées, met à jour sa structure ω, puis procède au calcul $\omega(t+1) = \cdots$. C'est un **schéma** classique où la synchronisation est assurée en reportant l'"insertion" ou la "suppression" au début ou à la fin d'un cycle.

Interfaces Externes et Gestion des Paramètres

L'Interface ne se limite pas à l'**ajout** ou à la **suppression** d'entités. Dans de nombreux cas, il est également nécessaire d'**exposer** des fonctionnalités telles que

$$\text{setParameter(paramName,value)}$$

pour ajuster en temps réel des paramètres comme η (taux d'apprentissage) ou γ (facteur d'inhibition). Cela revient à "**déformer**" la descente ou la mise à jour $\omega_{i,j}(t+1)$. Dans une architecture modulaire, le **Module d'Interface** transmet cette consigne au Noyau (ou au Module Inhibition), leur indiquant d'appliquer la nouvelle valeur à la prochaine itération. Ce mécanisme rend le **SCN adaptable**. Il permet d'**augmenter** γ pour renforcer la compétition ou de **réduire** τ afin de laisser les poids plus libres, sans avoir à redémarrer tout le système.

Dans des scénarios **massifs** ou temps réel, on peut imaginer un "dashboard" ou un "control center" reliant l'extérieur (l'utilisateur, un orchestrateur, un superviseur IA) au SCN. Cette passerelle d'interface se focalise sur le "**comment** ajouter tel agent ? supprimer tel agent ?" ou "**comment** régler η ?", en interne. Le **Module Interface** se charge de traduire ces requêtes en modifications effectives de la structure **Ω** ou des paramètres.

D. Autres modules éventuels

En plus de **Synergie**, **Inhibition/Contrôle**, et **Interface**, d'autres **modules** peuvent être envisagés :

- **Module Recuit/Brut** (injection de bruit stochastique, planning de “température”),
- **Module d’Observation** (qui calcule la modularité ou extrait les clusters après chaque itération),
- **Module d’Optimisation paramétrique** (qui essaie diverses valeurs de η, τ, γ en cours de route), etc.

Chaque **extension** s’insère dans l’**architecture** par l’ajout d’un bloc additionnel, plutôt que de modifier le **Noyau** en profondeur.

5.2.2. Cycle de Vie du SCN

Au-delà de la simple **séparation** entre le **Noyau** et les **Modules**, abordée en **5.2.1**, il est essentiel de comprendre **comment** un **SCN** (*Synergistic Connection Network*) évolue **dans le temps**. Cela inclut l’**initialisation**, qui crée ou charge la matrice ω et installe les entités, la **boucle itérative**, où s’appliquent la synergie, la mise à jour et l’inhibition, ainsi que la gestion de l’**arrêt** ou de la **poursuite** en flux continu. Cette section (5.2.2) détaille ce **cycle de vie**, en le reliant tant aux **aspects mathématiques** (comment on initialise ω, comment on sait qu’on est stabilisé) qu’aux **aspects ingénierie** (comment on charge/sauvegarde les entités, quels signaux déclenchent l’arrêt, etc.).

5.2.2.1. Initialisation : Chargement des Entités et Création (ou non) d’une Matrice ω Initiale

Un **Synergistic Connection Network (SCN)** opère toujours à partir d’un ensemble d’entités $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ et d’une matrice (ou structure) ω regroupant les liaisons $\omega_{i,j}$. La phase d’**initialisation** vise ainsi à introduire l’ensemble des entités dans le système (lecture, import, création dynamique), à attribuer des identifiants et à choisir la condition initiale pour la matrice ω. D’un point de vue **mathématique**, il s’agit de définir $\omega(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ou une structure équivalente) et de **paramétrer** le SCN (fixer η, τ, γ, etc.) pour que la boucle d’auto-organisation puisse commencer dans de bonnes conditions.

Chargement ou Création des Entités

Le **premier** acte de l’initialisation consiste à **rassembler** les entités $\{\mathcal{E}_i\}$. Selon l’application, on peut :

(1) Lire un jeu de données sub-symboliques $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^d$,

c’est-à-dire importer des vecteurs ou embeddings depuis un fichier, une base de données, etc.

(2) Importer des entités logiques (symboliques) (règles, ontologies, etc.),

ou

(3) Connecter un flot d’agents (p. ex. robots) (chaque agent devenant $\mathcal{E}_i$).

D’un point de vue **algorithmique**, on aboutit à un ensemble $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ d’entités numérotées ou identifiées. Sur le plan **mathématique**, on sait qu’on doit manipuler $\omega_{i,j}$ pour $i, j \in$

$\{1, \ldots, n\}$. Sur le plan **logiciel**, il faut attribuer une numérotation ou un ID à chaque entité, éventuellement en lien avec un stockage distribué (si le SCN est réparti sur plusieurs nœuds).

Choix du Placement (IDs) et Structure Distribuée

Dans un SCN **local**, il suffit de donner des indices $i = 1, \ldots, n$ pour indexer la matrice ω. Si le SCN est **distribué** (voir plus loin, Chap. 5.7), on doit répartir les entités $\mathcal{E}_i$ sur plusieurs machines ou partitions, se dotant d'un mécanisme d'allocation d'ID global (ou d'une table de routage). Cette initialisation inclut donc une "cartographie" des entités, permettant à chaque nœud de connaître les indices qu'il gère. D'un point de vue **mathématique**, la matrice ω peut alors être partitionnée par blocs.

Création (ou Reprise) de la Matrice ω

Une **question** cruciale est de savoir comment initialiser $\omega_{i,j}(0)$. Plusieurs politiques sont possibles :

$$\omega_{i,j}(0) = \begin{cases} 0, & \text{(zéro total)}, \\ \epsilon_{i,j}, & \text{(petit bruit pour casser la symétrie)}, \\ \omega_{i,j}^{(\text{saved})}, & \text{(recharge d'un snapshot antérieur)}. \end{cases}$$

Zéro total : on fixe $\omega_{i,j}(0) = 0$. C'est la solution la plus simple, mais il peut arriver qu'un SCN dont tous les liens sont à zéro ait besoin de plusieurs itérations pour "briser la symétrie" et commencer à se structurer.

Petit bruit : on affecte à chaque $\omega_{i,j}(0)$ une valeur $\epsilon_{i,j}$ aléatoire dans un intervalle $[-\delta, +\delta]$ ou $[0, \delta]$. Cette option est fréquente pour "réveiller" le réseau et éviter un démarrage trop homogène.

Recharge : si l'on dispose d'un état précédent, on le **charge** (avec persistance). Mathématiquement, il suffit d'initialiser $\omega(t = 0) \leftarrow \omega_{\text{saved}}$. On peut ainsi reprendre une simulation, garder le SCN "en mémoire" entre deux sessions, etc.

Dans l'**implémentation**, le **format** de stockage peut être choisi en fonction des besoins. Une représentation **dense** est utilisée lorsqu'un **SCN** complet est visé, attribuant ainsi une matrice de taille $n \times n$. Pour des réseaux plus clairsemés, une structure de **liste d'adjacence** est préférable. Le choix entre ces deux approches dépend de la taille de n et de l'hypothèse de densité du réseau. Sur le plan **mathématique**, chaque $\omega_{i,j}$ se trouve dans un espace $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^+$, si l'on impose non-négativité).

Configuration Paramétrique

L'initialisation est aussi le moment de **fixer** ou **charger** les paramètres du DSL :

η: (taux d'apprentissage), τ: (décroissance), γ: (inhibition), $\omega_{\max}$: (saturation potentielle)

On choisit par exemple $\eta = 0.1$, $\tau = 0.2$, etc. Si l'on veut un mode additif ou multiplicatif (Chap. 4.2.2.1), on le déclare ici. Sur le plan **mathématique**, c'est un jeu de variables dans la mise à jour $\omega_{i,j}(t + 1) = \cdots$. Certains algorithmes autorisent une mise à jour **adaptative** de η ou τ, il faut donc prévoir une structure pour stocker ces variables et un moyen de les changer en cours de route.

Vérifications et Contrôles Avant le Lancement

Avant de démarrer la **boucle** d'auto-organisation, on exécute souvent un **contrôle** :

- **Nombre** d'entités n cohérent.
- **Taille** de la matrice ω adaptée.
- **Paramètres** (ex. η, τ, γ) chargés.
- **Modules** (Synergie, Inhibition…) opérationnels, pouvant calculer $S(i,j)$ ou $\Delta_{\text{inhibition}}(i,j)$.

C'est une sorte de **checkpoint** mathématico-logique. Si tout est validé, l'itération $t = 0 \to 1$ est enclenchée. Dans le cas contraire, une erreur de configuration est signalée.

5.2.2.2. Boucle d'Itérations : Calcul de Synergie, Mise à Jour ω, Éventuelle Inhibition ou Saturation, Extraction de Clusters

Après la **phase d'initialisation** (voir §5.2.2.1) qui a permis de rassembler un ensemble d'entités $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{n}$ et de définir la matrice $\omega(t=0)$ ainsi que les paramètres $\eta, \tau, \gamma, ...$, le **cœur** de la vie d'un **Synergistic Connection Network (SCN)** se déroule dans une **boucle d'itérations**.

Cette boucle actualise, pas après pas, la matrice ω selon une **dynamique** de type **Deep Synergy Learning (DSL)** en s'appuyant sur les **modules** éventuels tels que la synergie, l'inhibition et l'observation.

Sur le plan **mathématique**, l'objectif est de faire converger la suite $\omega(t)$ vers un point fixe, un cycle ou un attracteur plus complexe qui reflète la formation de **clusters** ou de sous-structures.

Sur le plan de l'**implémentation**, on exécute un enchaînement stable comprenant le calcul de la **synergie** $S(i,j)$, la mise à jour de $\omega_{i,j}$, l'application d'**inhibition** ou de **contrôles** spécifiques, puis l'extraction ou l'observation des clusters résultants.

A. Logique Générale de la Boucle

La **boucle itérative** de mise à jour se formalise par l'entrée et la sortie d'un "pas" de temps. À l'itération t, on dispose d'une **matrice** $\omega(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ou un autre format, par exemple sparse). On connaît aussi l'ensemble des **entités** $\{\mathcal{E}_i\}$ et leurs éventuelles représentations (sub-symboliques, symboliques). Les **paramètres** du DSL (η, τ, γ, etc.) sont fixés, ou adaptables si on a un mécanisme paramétrique. De plus, on a chargé les **modules** (synergie, inhibition, etc.) nécessaires. L'**issue** de chaque pas est la nouvelle matrice $\omega(t+1)$, potentiellement couplée à des informations d'observation (clusters, modularité, etc.), puis on recommence au pas suivant. On répète cette itération jusqu'à atteindre un **critère** (nombre maximal d'itérations, stabilisation, flux continu).

B. Calcul de la Synergie $S(i,j)$

Le **Module Synergie** joue un rôle crucial dans chaque itération. Pour que la mise à jour $\omega_{i,j}(t+1)$ prenne en compte la **coopération**, la **distance** ou la **similarité** entre $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$, il est nécessaire d'évaluer $S(i,j)$. Sur le plan **mathématique**, on se dote d'une fonction

$$S: (\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) \mapsto \mathbb{R}^+,$$

que l'on peut voir comme

$$S(i,j) = \mathcal{F}\big(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\big),$$

selon la nature des entités (vecteurs sub-symboliques, symboles avec ontologie, etc.).

D'un point de vue **implémentation**, plusieurs approches sont possibles. On peut recalculer l'intégralité de $\{S(i,j)\}$ en $\mathrm{O}(n^2)$ à chaque itération si n n'est pas trop grand, ou si la synergie dépend de variables qui changent à chaque pas. On peut aussi ne recalculer que les paires (i,j) actives dans un scénario parcimonieux (k-NN, ϵ-radius). Dans certains cas, $S(i,j)$ varie peu dans le temps si les entités $\mathcal{E}_i$ ne changent pas de représentation, et l'on peut donc se contenter d'une mise à jour épisodique ou "à la demande".

Sur le plan **synchrone**, la matrice S peut être figée au début de chaque itération t, utilisée pour mettre à jour ω, puis éventuellement régénérée à l'itération $t+1$. Cette **séparation** assure la cohérence, car chaque étape utilise la même table de synergies.

Dans le cas **asynchrone**, plus rare, S peut fluctuer en continu, mais cette approche complique l'analyse mathématique de la convergence.

C. Mise à Jour $\omega(t+1)$

Une fois $S(i,j)$ disponible (pour chaque paire (i,j) considérée), le **Noyau** applique la **formule** du DSL :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big] + \cdots$$

La partie ... peut inclure des termes de recuit simulé (ajout d'un bruit $\sigma(t)\,\xi_{i,j}$), d'inhibition compétitive, ou de budgets. Sur le plan formel, on peut réécrire :

$$\omega_{i,j}(t+1) = F_{\mathrm{DSL}}\Big(\omega_{i,j}(t),\, S(i,j)\Big) + G_{\mathrm{ctrl}}\big(\{\omega_{i,k}(t)\}_{k\neq j}\big),$$

où F_{DSL} recouvre la "descente locale" $\eta\,\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big]$, et G_{ctrl} est un terme de **contrôle** ou d'**inhibition**. L'application **synchrone** se met aisément en œuvre via un **double-buffer**. Une nouvelle matrice $\omega^{\mathrm{next}}(t+1)$ est créée en lisant $\omega^{\mathrm{current}}(t)$. D'un point de vue **complexité**, si l'on considère chaque paire (i,j) de $\{1,\ldots,n\}^2$, on a un coût $\mathrm{O}(n^2)$, qu'il est parfois nécessaire de réduire par parcimonie ou parallélisation.

D. Éventuelle Inhibition ou Saturation

De nombreux schémas de DSL prévoient une **inhibition** (chap. 4.2.2.2, 4.4.2) imposant une compétition entre les liens sortants de $\mathcal{E}_i$. Sur le plan **mathématique**, on ajoute un terme

$$\Delta_{\mathrm{inhibition}}(i,j) = -\gamma \sum_{k\neq j} \omega_{i,k}\,(t),$$

faisant décroître $\omega_{i,j}(t+1)$ proportionnellement à la somme des autres $\omega_{i,k}$. Il s'agit d'empêcher qu'un nœud $\mathcal{E}_i$ entretienne simultanément trop de liaisons fortes. On peut également imposer une **saturation** $\omega_{\max}$, c'est-à-dire un clipping des valeurs pour éviter que $\omega_{i,j}$ ne devienne trop grande :

$$\omega_{i,j}(t+1) \leftarrow \min\big(\omega_{i,j}(t+1),\, \omega_{\max}\big).$$

On peut aussi envisager un budget local $\sum_j \omega_{i,j} \leq \Omega_{\max}$. Sur le plan **implémentation**, on applique souvent l'inhibition et la saturation comme un "post-traitement" de la mise à jour basique $\Delta_{\text{update}}(i,j)$. L'ordre d'application a un léger impact (on peut d'abord faire l'inhibition, puis clipper). Sur le plan **analyse** mathématique, on conceptualise cela comme une **composition** de fonctions inhib/cut :

$$\omega(t+1) = \text{Clip}\left(\text{Inhib}\left(\omega(t) + \Delta_{\text{update}}(t)\right)\right).$$

Cet enchaînement rend la **dynamique** plus non linéaire, mais confère la possibilité d'une auto-organisation sélective.

E. Extraction de Clusters et Observations

L'**objectif** final d'un SCN est souvent de **révéler** la formation de clusters ou de sous-structures. À l'issue de chaque itération (ou toutes les quelques itérations), on peut :

Seuiler $\omega_{i,j}(t+1)$: on considère les liens $\omega_{i,j} > \theta$ comme "actifs".

Chercher les composantes connexes (si $\omega_{i,j}$ est vue comme un graphe), calculer une **modularité** ou un **score** de clustering.

Visualiser la structure ou fournir un retour dans un "dashboard" (par exemple, un affichage temps réel).

Sur le plan **mathématique**, cette extraction de clusters ou d'indices (silhouette, modularité, etc.) ne modifie pas la mise à jour ω, mais permet de **surveiller** la progression de l'auto-organisation. Il est parfois possible de s'arrêter si la matrice ω ne change plus beaucoup, ou si le score de clustering atteint un plateau.

Conclusion

La **boucle d'itérations** constitue le **processus vivant** d'un SCN, là où la matrice $\omega(t)$ prend forme et se réorganise au fil du DSL. Ce cycle comprend :

- Le **calcul** ou l'**accès** à la synergie $S(i,j)$,
- La **mise à jour** de base de $\omega_{i,j}(t+1)$ (soit additive, soit multiplicative, ou enrichie de termes supplémentaires),
- L'application éventuelle de **mécanismes** : **inhibition** compétitive, **saturation** ou **budget**,
- Un **post-traitement** (extraction de clusters, scores, visualisations) selon la fréquence souhaitée.

Sur le plan **mathématique**, on décrit tout cela par l'opérateur

$$\omega(t+1) = \text{ExtractClusters}\left(\text{Clip}\left(\text{Inhib}\big(\omega(t),\, S(t)\big)\right)\right),$$

mais, en pratique, on sépare le cycle en plusieurs modules ou "étapes" pour la lisibilité et la souplesse. Tant qu'on ne détecte pas de critère d'arrêt ou que le système reste en flux continu, on répète ce cycle, laissant émerger et évoluer les **clusters** internes du SCN.

5.2.2.3. Sortie ou Flux Continu : Stabilisation, ou Mode Perpétuel pour l'Apprentissage Continu

Après la mise en place de la **boucle d'itérations** (§5.2.2.2) dans un **Synergistic Connection Network (SCN)**, plusieurs scénarios de déroulement se présentent quant à la **durée** de fonctionnement ou la **finalité** de l'exécution. Sur le plan **mathématique**, on se demande si la séquence $\omega(t)$ tend à un **point fixe** (ou à un cycle), auquel cas l'évolution peut être considérée comme convergente, ou si le SCN demeure en **flux continu** en raison de l'arrivée de nouvelles entités ou de la transformation perpétuelle des données. Sur le plan **ingénierie**, il s'agit de décider s'il convient de **stopper** le processus une fois atteint un certain critère de stabilisation, ou bien de **maintenir** le SCN actif en permanence, pour un apprentissage ininterrompu.

A. Sortie ou Arrêt après Stabilisation

Sur le plan **mathématique**, la dynamique d'un SCN se décrit par une équation du type

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j)\tau\,\omega_{i,j}(t)\right] - \gamma \ \ldots$$

ou sous forme plus générale $\omega(t+1) = F\big(\omega(t)\big)$, éventuellement enrichie d'inhibition ou de budgets. Si les paramètres η, τ, γ sont choisis de manière à garantir la **stabilité**, il peut exister un **point fixe** ω^* tel que $\omega^* = F(\omega^*)$. Dans ce cas, la suite $\omega(t)$ tend vers ω^* pour $t \to +\infty$, au moins dans un régime local (ou global, si la non-linéarité est contrôlée).

Une façon d'**implémenter** cette convergence est de surveiller, à chaque itération, la **différence** entre $\omega(t+1)$ et $\omega(t)$. Par exemple, on peut calculer la norme

$$\| \omega(t+1) - \omega(t) \|_2$$

ou toute autre mesure de dissimilarité. Lorsque celle-ci passe sous un **seuil** ε (et le reste pendant quelques itérations), on juge que le SCN est **pratiquement convergé**. Un "Module d'Observation" (ou un simple mécanisme dans le **Noyau**) peut ainsi déclencher l'arrêt du programme.

Le code peut aussi être muni d'un **critère supplémentaire** (temps maximum, nombre d'itérations maximum) pour éviter une boucle sans fin si la convergence n'est jamais rigoureusement atteinte. Dans un usage **off-line**, typiquement, on exécute le SCN sur un lot d'entités, puis on s'arrête quand la structure ω s'est figée. Sur le plan **mathématique**, on aboutit à un ω^* qui reflète la répartition des entités en clusters, ou plus généralement la configuration stable.

Juste avant l'arrêt effectif, il est courant de **sauvegarder** la matrice ω^* (persistance), afin de pouvoir la réutiliser plus tard (rechargement) ou de l'exploiter dans un autre module (étiquetage de clusters, visualisation, etc.).

B. Mode Perpétuel ou Flux Continu (Apprentissage Continu)

Dans certains environnements (robotique multi-agent, systèmes de recommandation en ligne, traitement de flux de données), le SCN n'est pas censé s'achever après un certain nombre d'itérations, car les **données** ou les **entités** continuent à évoluer ou à arriver. On parle alors d'un **SCN en flux continu**, où la mise à jour $\omega(t+1)$ se poursuit indéfiniment, accompagnée de modifications potentiellement incessantes du calcul de synergie $S(i,j)$. D'un point de vue

mathématique, la dynamique n'est plus strictement $\omega(t+1) = F\big(\omega(t)\big)$ avec un opérateur fixe, mais peut dépendre du temps :

$$\omega(t+1) = F\big(\omega(t),\, S(\cdot,\cdot,\, t)\big),$$

De nouvelles entités $\mathcal{E}_{n+1}$ peuvent survenir, modifiant la taille de la matrice, ou parce que les entités existantes changent de représentation.

Cette **variabilité** implique qu'on n'atteint pas forcément un point fixe, mais plutôt qu'on "poursuit" un **équilibre** mobile ou une adaptation permanente. On peut y voir un système dynamique à paramètres variant dans le temps (non autonome). Sur le plan **implémentation**, on laisse la boucle itérative fonctionner en continu, et on traite les modifications (ajout/suppression d'entités, mise à jour de synergie, etc.) au fur et à mesure. Un "Module Interface" se charge d'**injecter** les nouvelles entités, en allouant la nouvelle ligne/colonne de ω, puis la dynamique reprend son cours, s'ajustant à ce changement.

Cette perspective rappelle l'**apprentissage en ligne** ou l'**apprentissage continu**. À chaque étape, une mise à jour **incrémentale** de ω est effectuée.

Parfois, le **SCN** peut entrer dans des phases **quasi stationnaires** lorsque aucune perturbation majeure ne survient. Il peut ensuite se réorganiser subitement en réponse à un "choc", comme un afflux de nouvelles entités ou un changement de représentation.

C. Bascule Entre Sortie et Flux Continu

Un même SCN peut, en pratique, être utilisé dans deux **modes** :

- **Mode "One-shot" ou "Offline"** : on lance la boucle avec un ensemble fixe $\{\mathcal{E}_i\}$ et on arrête après convergence ou après un nombre de pas défini. On récupère alors ω^* et les clusters.

- **Mode "Online" ou "Continu"** : le SCN tourne indéfiniment, prêt à accepter de nouvelles entités via le "Module Interface" (qui ajoute une ligne/colonne), et la matrice ω s'ajuste en temps réel. On ne parle plus d'arrêt, mais d'**écoulement** permanent, parfois ponctué de vérifications (par exemple, un mini-critère de convergence temporaire, avant qu'une nouvelle perturbation n'apparaisse).

Il est également possible de démarrer en "offline" pour amorcer une structuration, puis de **basculer** en "online" si l'application l'exige, c'est-à-dire laisser le SCN s'adapter aux évolutions ultérieures. Sur le plan **mathématique**, cette bascule revient à transformer un opérateur statique F en un opérateur dynamique dans le temps, sans rebooter la matrice ω. Sur le plan **implémentation**, il suffit de ne plus enclencher le "Critère d'Arrêt" et de laisser le SCN réagir aux notifications d'ajout/suppression d'entités.

5.2.3. Exemples d'Organisation

Au-delà du **cycle de vie** (5.2.2) et de la séparation **Noyau vs. Modules** (5.2.1), il est instructif de voir **comment** un SCN peut s'**organiser** dans des configurations variées, en fonction des **contraintes** et des **échelles**. Parmi les solutions les plus courantes :

- Un **mono-module** minimal, où tout le code (calcul de synergie, mise à jour, inhibition, etc.) se trouve dans un **même bloc** (5.2.3.1),

- Une **architecture** plus **modulaire**, où chaque fonction (synergie, mise à jour, interface…) est un module ou une classe distincte (5.2.3.2),
- Une **architecture distribuée**, déployant plusieurs **sous-SCN** collaborant entre eux (5.2.3.3).

5.2.3.1. Mono-module minimal (tout dans un même bloc)

Lors de la mise en œuvre d'un **Synergistic Connection Network (SCN)**, il est possible de concevoir une **architecture** extrêmement simple et compacte, où toutes les fonctions nécessaires (stockage et mise à jour de ω, calcul de la synergie, inhibition, extraction de clusters, etc.) se retrouvent dans un **unique** module (ou script). Cette approche, qualifiée de "mono-module minimal", vise la **simplicité** et la **rapidité** de développement pour des projets de petite taille ou des expérimentations rapides. Sur le plan **mathématique**, cela revient à écrire l'ensemble de la boucle d'itérations et des opérations connexes au sein d'un seul bloc de code, sans répartition en classes ou en modules séparés.

Principe Général

Dans ce "mono-module", on se contente d'un **unique** script, classe ou notebook — éventuellement appelé *SCN_all_in_one.py* — qui regroupe toutes les étapes. Il initialise la matrice $\omega(t=0)$, gère la boucle d'itérations $\omega(t+1) = F\big(\omega(t)\big)$, calcule la **synergie** $S(i,j)$, applique l'**inhibition** si nécessaire, et, s'il y a lieu, **extrait** les clusters (par un simple code de post-traitement) dans le même fichier. D'un point de vue **organisation**, on peut imaginer un pseudo-code :

(1) Définir entités $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{n}$, charger ou créer $\omega(t=0)$,

(2) Pour $t = 1 \dots T_{\max}$:
- Calculer $S(i,j)$
- $\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big] - \gamma \sum_{k} \dots$
- (Application d'une saturation ou d'un clipping si besoin)
- Extraction possible de clusters (optionnel)

(3) Fin, sauvegarde ou visualisation.

Sur le plan **ingénierie**, tout cela est concentré dans un **même** bloc, sans appel externe à un "Module Synergie" ou un "Module Inhibition" dédié. Les variables globales η, τ, γ résident dans le même fichier, et le calcul de $S(i,j)$ s'inscrit dans une fonction locale.

Avantages : Simplicité et Rapidité

Le premier intérêt de ce "**tout-en-un**" est la facilité de mise en place. Pour un **prototype** académique ou une démonstration dans un **projet réduit**, il suffit d'un script unique :

- On déclare un tableau ou un vecteur pour chaque entité $\mathcal{E}_i$.
- On crée $\omega(t=0)$ en initialisant à zéro ou à un bruit aléatoire.
- On code la boucle $\omega(t+1) = \omega(t) + \eta[S(i,j) - \tau\,\omega(t)] + \cdots$.
- On insère, si nécessaire, quelques lignes pour l'inhibition (par ex., $-\gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}$).

- On ajoute éventuellement un post-traitement pour détecter les clusters (un simple "threshold" sur $\omega_{i,j}$ et un parcours en composantes connexes).

Cette centralisation rend le script particulièrement **facile à comprendre** pour des novices qui veulent voir la **formule** de mise à jour en action. Sur le plan **mathématique**, tout reste sous la forme d'une unique "big loop" :

$$\text{for } t = 1 \dots T_{\max}: \quad \omega_{i,j}(t+1) \;=\; \omega_{i,j}(t) \;+\; \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big] - \gamma \sum_{k} \dots$$

et ainsi de suite.

Limites : Évolutivité et Maintenance

Dès qu'on souhaite aller au-delà d'un **essai** isolé, la **structure** en un bloc unique devient handicapante. Sur le plan **évolutif**, chaque fois qu'on veut changer la définition de $S(i,j)$ (par exemple passer d'une distance euclidienne à une co-information symbolique), on doit altérer ce même code, parfois avec des embranchements (*if/else*). En outre, si l'on désire intégrer un **recuit simulé** ou un **module** d'ajout dynamique d'entités (pour un flux continu), on insère de plus en plus de blocs logiques dans le même script, risquant de produire un "**super-monolithe**" illisible.

Sur le plan **maintenance**, un gros bloc rend plus difficile la **collaboration** entre développeurs. Un collègue voulant modifier l'inhibition ne peut pas simplement isoler un fichier dédié, comme **"inhibition.py"**. Il doit naviguer à travers des centaines de lignes dans un script commun, ce qui complique la maintenance et les évolutions.

Sur le plan des **tests unitaires**, il devient plus difficile de tester chaque composant de manière indépendante, car tout est fortement couplé, rendant l'identification des erreurs plus complexe.

Sur le plan **performance** ou **scalabilité**, un script unique ne prévoit généralement pas d'architecture distribuée ou de parallélisation modulaire. En cas de passage à un $O(n^2)$ massif, il devient périlleux d'adapter ce code monolithique pour incorporer des techniques HPC ou des structures d'indexation complexes.

Vision Mathématique : la "Big Loop" Reste Possible

Rien, d'un point de vue **équations**, n'empêche de **fusionner** dans un même bloc :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \Delta_{\text{update}}(i,j) + \Delta_{\text{inhib}}(i,j)$$

et, si l'on souhaite, d'appeler en fin de boucle une fonction *extract_clusters(w)* qui identifie les composantes fortes. Sur un **petit** dataset comprenant quelques centaines d'entités, cette approche est parfois la plus rapide pour un **proof of concept**. Il est possible de tout coder en une journée et d'obtenir un résultat fonctionnel.

La **réduction** en modules n'est pas une nécessité d'un point de vue **mathématique**, mais elle apporte un **confort** d'ingénierie, facilitant l'évolution et la maintenance du système à plus grande échelle.

Cas d'Usage : Prototypes et Projets Académiques

Les **petits projets** ou les **travaux pratiques** dans un cours peuvent recourir à ce style "all-in-one". L'étudiant ou le chercheur indique directement la **formule** :

$$\omega_{i,j} \leftarrow \omega_{i,j} + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}\big] - \gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k},$$

dans une boucle Python, invoque éventuellement un $\exp\big(-\| \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \|\big)$ pour la synergie, et récupère au final l'état ω. C'est idéal pour un "MVP" (Minimum Viable Product).

En revanche, une extension ultérieure (passer en mode streaming, ou introduire un nouveau calcul de S) demandera de **refactoriser** la base de code en modules séparés (cf. §5.2.3.2).

5.2.3.2. Architecture Modulaire (Chacun s'occupe d'une fonction)

Lorsqu'un **Synergistic Connection Network (SCN)** a pour ambition d'être maintenu, étendu, ou intégré à des systèmes plus vastes, il est recommandé d'adopter une **architecture modulaire** plutôt que de concentrer tout le code et toutes les fonctionnalités dans un monolithe (cf. §5.2.3.1). Cette architecture consiste à **disséquer** le SCN en plusieurs **modules** ou **composants**, chacun dédié à une tâche particulière. Sur le plan **mathématique**, on continue de manipuler la même dynamique $\omega(t+1) = F\big(\omega(t)\big)$ (ou plus détaillée), mais on en sépare clairement les différents "blocs" de calcul. Sur le plan **ingénierie**, on met en place des **interfaces** et des classes (ou fichiers) distincts, afin de pouvoir tester, modifier ou réutiliser chaque composante sans retoucher l'ensemble.

A. Principe Général de la Modularisation

Il s'agit de **découpler** les responsabilités au sein du SCN en divers "modules", afin de mieux maîtriser la complexité et d'**éviter** que tous les calculs (synergie, mise à jour ω, inhibition, interface, etc.) s'entassent dans un même fichier. On établit donc, au minimum, les blocs suivants :

- Un **Noyau (Core)** qui gère la **matrice** ω, orchestre la **boucle** d'itérations et assure la **mise à jour** de base (Δ_{update}).
- Un **Module Synergie** qui calcule la **fonction** $S(i,j)$ suivant la nature des entités (euclidienne, cosinus, co-information, etc.).
- Un **Module Inhibition/Contrôle** qui introduit des mécanismes complémentaires (inhibition compétitive, saturation, budgets locaux, recuit…).
- Un **Module d'Interface** pour gérer l'ajout/suppression d'entités, modifier les paramètres (η, τ, γ), et connecter éventuellement le SCN à un système extérieur (tableau de bord, webservice, etc.).
- (Optionnel) Des **modules** supplémentaires, comme un "Module Observateur" (détection de clusters, visualisation), un "Module RecuitSim" (injection de bruit pour franchir les minima locaux), un "Module Persistence" (sauvegarde/recharge de l'état ω).

Avantages
Dès qu'on s'éloigne d'un simple **prototype**, séparer en modules présente plusieurs atouts notables :

- **Maintenance** améliorée : si la forme de $S(i,j)$ doit évoluer, on ne touche qu'au Module Synergie ; si les règles d'inhibition changent, on modifie le Module Inhibition.
- **Extensibilité** : on peut ajouter un **nouveau** module pour un recuit simulé ou un mécanisme d'apprentissage hiérarchique sans devoir "recoder" le cœur de la boucle.
- **Clarté Mathématique** : chaque bloc de la formule $\omega_{i,j}(t+1) \leftarrow \omega_{i,j}(t) + \cdots$ peut être isolé, testable, et documenté. On sait où se trouve $\Delta_{\text{inhibition}}$ et où se trouve Δ_{update}.
- **Test Unitaire** : on peut tester chaque module en isolement (par exemple, vérifier que le Module Synergie renvoie le score $S(i,j)$ correct pour un duo d'entités) avant de lancer l'ensemble.

Implémentation Logicielle

On peut opter pour une approche **orientée objet** (OOP) en définissant, par exemple, une classe *SCNCore* où se trouvent la matrice ω et la boucle principale, ainsi que des classes *SynergyModule*, *InhibitionModule*, *InterfaceModule*, etc. Chacune possède des méthodes claires (ex. *getSynergy(i,j)*, *applyInhibition(w, i, j)*…), et le **Noyau** les appelle dans le bon ordre à chaque itération. Alternativement, on peut rester en mode **fonctionnel** en dispersant les fonctions dans différents fichiers, tout en ayant un "fichier central" qui enchaîne les appels.

Sur le plan **mathématique**, l'équation de la mise à jour globale reste :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \Delta_{\text{update}}(i,j) + \Delta_{\text{inhibition}}(i,j) + \cdots$$

Le Module Synergie intervient pour fournir $S(i,j)$ à la partie $\Delta_{\text{update}}(i,j) = \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right]$. Le Module Inhibition fournit $\Delta_{\text{inhibition}}(i,j)$. L'**ordre** d'application peut être séquentiel, reflétant la composition des opérateurs (cf. chap. 4.2.2.2).

B. Exemple de Flux Modulaire en une Itération

Pour illustrer la **séquence** dans un cycle d'itérations :

- **Pré-calcul ou accès** de $S(i,j)$ via le Module Synergie. On peut générer une matrice **S**, ou calculer $S(i,j)$ "à la demande" pour chaque (i,j).
- **Mise à Jour de base** : le Noyau applique l'équation additive ou multiplicative pour $\omega_{i,j}$. Ex. $\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right]$.
- **Inhibition/Contrôle** : on appelle alors le Module Inhibition qui peut réaliser $\omega_{i,j}(t+1) \leftarrow \omega_{i,j}(t+1) - \gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t)$, ou imposer un "budget".
- **Saturation** (si on veut clipper ω entre 0 et $\omega_{\max}$). Ce peut être un sous-module du contrôle, ou un post-traitement.
- **Extraction de Clusters / Observations** : un Module Observateur, si défini, peut lire la matrice $\omega(t+1)$ pour en déduire les composantes connexes, un score de modularité, etc.

- **Interface** : en fin de boucle, le Module Interface peut éventuellement enregistrer la progression, traiter une requête d'ajout d'entité, ou modifier η.

Ainsi, on sépare clairement **qui** fait quoi. Les formules mathématiques s'assemblent comme des briques, et le code reflète ce découpage.

C. Comparaison avec l'Approche Mono-Module

Contrairement à un "**all-in-one**" script (voir §5.2.3.1), la modularisation semble plus lourde à configurer pour un très petit projet. Cependant, dès que l'on souhaite :

- Ajouter un **nouveau** mode de synergie S (par exemple, un calcul de co-information au lieu d'une distance)
- Varier l'**inhibition**
- Intégrer un "**Module Recuit**" (ajout de bruit aléatoire pour franchir des minima locaux)
- Gérer l'**arrivée** d'entités en flux continu

on réalise qu'une structure modulaire simplifie grandement la maintenance. Chaque module peut évoluer ou être remplacé sans perturber le **Noyau**.

Sur le plan **mathématique**, cette séparation clarifie également l'analyse. La partie $\eta[S(i,j) - \tau\,\omega]$ est distincte de la partie liée à l'**inhibition**, ce qui permet d'étudier leur impact respectif sur la convergence de manière indépendante avant d'en examiner la composition globale.

D. Extensibilité et Scalabilité

Lorsqu'on parle de **mise à l'échelle** (plus grand nombre d'entités) ou d'**extension** (nouveau type d'entités, nouveau paradigme de synergie), l'architecture modulaire fournit un socle robuste. On peut brancher un "Module Parallélisation" ou un "Module Distribution" (voir §5.2.3.3) pour répartir la matrice ω sur plusieurs nœuds. Le **Noyau** demeure responsable de la logique de mise à jour, mais le "Module Distribution" peut implémenter un mécanisme d'échange ou de partition des données. Sur le plan **mathématique**, on reste fidèle à la même équation, mais on modifie la "plomberie" logicielle.

Cette capacité à empiler de nouveaux modules (Recuit, Observateur, etc.) est cruciale pour un SCN utilisé dans un cadre de recherche à long terme ou un projet industriel, où les besoins évoluent.

5.2.3.3. Architecture distribuée (plusieurs sous-SCN coopérant)

Lorsque le **nombre d'entités** devient très grand (n potentiellement de l'ordre de 10^5 à 10^7) ou que les entités elles-mêmes sont **réparties** sur plusieurs sites (multi-robots géographiquement dispersés, données multimodales venant de différentes sources, etc.), il n'est plus forcément possible ni souhaitable de gérer **un** unique SCN centralisé. On peut alors opter pour une **architecture distribuée** où plusieurs **sous-SCN** (chacun manipulant un sous-ensemble des entités ou un certain "domaine") collaborent pour former un ensemble plus vaste.

Cette approche répond aussi à des besoins de **scalabilité** (on ne peut stocker $O(n^2)$ pondérations sur un seul nœud) et de **résilience** (en cas de panne, on ne veut pas perdre tout le SCN). D'un

point de vue mathématique, on se situe dans un **système** où la matrice ω est "morcelée" ou "partitionnée", et où les mises à jour dans chaque bloc coopèrent pour tendre vers une organisation globale.

A. Principe : plusieurs sous-SCN

Dans une **architecture distribuée** destinée à un **Synergistic Connection Network (SCN)**, le principe fondamental consiste à **partager** l'ensemble d'entités $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ en plusieurs **sous-ensembles** disjoints, chacun étant géré par un **sous-SCN** local. L'objectif est de répartir la **charge** de calcul et de stockage lorsque le nombre total n devient très grand (plusieurs centaines de milliers, voire des millions d'entités), ou lorsque les entités sont **géographiquement** dispersées (agents robotiques sur différents sites, flux multimédias provenant de régions variées, etc.). Sur le plan **mathématique**, on se retrouve avec une matrice ω qui, au lieu d'être stockée et actualisée de manière unique et centralisée, se trouve morcelée ou **partitionnée** en blocs (sous-matrices), chaque bloc traitant ses propres entités.

Partition de l'ensemble d'entités

Pour mettre en place plusieurs **sous-SCN**, on commence par **diviser** l'ensemble $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ en plusieurs parties $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$, par exemple selon un découpage géographique, un découpage thématique, ou un simple partitionnement en blocs d'effectif à peu près égal. On obtient alors

$$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \dots \cup \mathcal{V}_m = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}, \quad \mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q = \varnothing \text{ pour } p \neq q.$$

Chaque sous-SCN, noté SCN_p, gère localement les pondérations $\omega_{i,j}^{(p)}$ correspondant aux liens où $i, j \in \mathcal{V}_p$. Sur le plan **stockage**, cela signifie qu'il existe une (sous-)matrice $\omega^{(p)}$ que SCN_p manipule de manière analogue à ce qui a été décrit pour un SCN simple. Sur le plan **algorithmique**, SCN_p exécute sa **boucle** d'auto-organisation (calcul de synergie, mise à jour ω, etc.) au sein du bloc $\mathcal{V}_p$.

Gestion des liens entre sous-ensembles

Si les entités i et j appartiennent à des blocs différents $\mathcal{V}_p$ et $\mathcal{V}_q$, une question se pose sur le traitement de $\omega_{i,j}$.

Dans un **SCN totalement distribué**, il est a priori possible que $\mathcal{E}_i$ dans $\mathcal{V}_p$ soit fortement synergique avec $\mathcal{E}_j$ située dans $\mathcal{V}_q$. Plusieurs schémas peuvent être envisagés pour gérer ces interactions inter-blocs.

Le premier schéma consiste à **calculer** (ou au moins **approcher**) les pondérations inter-blocs, c'est-à-dire $\omega_{i,j}$ pour $i \in \mathcal{V}_p$ et $j \in \mathcal{V}_q$. On peut dans ce cas parler de "liens inter-SCN", que l'on stocke dans un "**module passerelle**" ou dans une base partagée. D'un point de vue **mathématique**, chaque SCN_p peut avoir besoin, lors de la mise à jour, d'un terme $\omega_{i,j}$ quand $j \notin \mathcal{V}_p$. Cela suppose des échanges de données entre SCN_p et SCN_q. On peut néanmoins décider d'**ignorer** ou de **sous-échantillonner** ces liens inter-blocs si la synergie est censée être trop faible ou trop rare, réduisant ainsi la complexité globale.

Une autre approche, moins coûteuse en communications, est de n'entretenir les liaisons inter-blocs qu'**épisodiquement** (synchronisation toutes les T itérations), ou de **négliger** explicitement les liens trop distants. On peut écrire, par exemple, un protocole de synchronisation dans lequel SCN_p et SCN_q échangent seulement la portion de ω relative aux

entités qui semblent entretenir une synergie notable. Sur le plan **mathématique**, la mise à jour de $\omega^{(p)}(t+1)$ peut faire intervenir un terme de "dépendance inter-blocs" :

$$\omega_{i,j}^{(p)}(t+1) = F^{(p)}\left(\omega_{i,j}^{(p)}(t),\, S^{(p)}(i,j),\, \Delta_{\text{inter}}^{(p)}(t)\right),$$

où $\Delta_{\text{inter}}^{(p)}(t)$ regroupe les informations (indices de synergie, pondérations partielles) reçues des autres sous-SCN. Cela se rapproche d'un système **multi-agent** où chaque agent (ici, SCN_p) a sa propre mise à jour locale, mais s'échange parfois des données globales pour harmoniser le tout.

Coopération entre sous-SCN

Pour aboutir à une organisation **globale**, il faut que ces sous-SCN ne travaillent pas totalement en vase clos. À intervalles réguliers, une **coalescence** ou une **synchronisation partielle** peut être effectuée. Les différents SCN_p consolident alors les pondérations inter-blocs ou partagent des **vecteurs** d'état. Par exemple, la somme $\sum_j \omega_{i,j}^{(p)}$ peut être transmise lorsqu'une entité i migre vers un autre bloc, assurant ainsi une continuité dans son intégration. D'un point de vue **mathématique**, cela se formalise comme une **itération distribuée**. Chaque SCN_p gère les paires internes $\omega_{i,j}^{(p)}$, puis un opérateur $\text{InterSync}\left(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(m)}\right)$ est appliqué pour connecter ou rapprocher les valeurs aux frontières.

Dans certains scénarios, il est également possible de privilégier des **clusters** majoritairement internes, en acceptant que les liens inter-blocs soient minimes ou rarissimes.

Sur le plan **ingénierie**, chaque sous-SCN peut être un **processus** (ou un ensemble de threads) tournant sur un nœud différent. Les communications sur le "réseau" (au sens informatique) portent sur les indices d'entités, les bribes de matrice ω, etc. Sur le plan **mathématique**, on se rapproche d'un "réseau de SCN" ou d'un "réseau de nœuds DSL", chacun pilotant un sous-ensemble.

B. Organisation Logicielle d'une Architecture Distribuée

Lorsqu'il devient indispensable de gérer un **Synergistic Connection Network (SCN)** sur plusieurs machines ou serveurs, il est naturel de **distribuer** non seulement les données (entités et sous-matrices ω) mais aussi la boucle même d'auto-organisation du **Deep Synergy Learning (DSL)**. Cette mise en place **multi-nœuds** ou **multi-blocs** doit alors prendre en compte plusieurs aspects. Il est nécessaire de définir une stratégie pour **partitionner** les entités, synchroniser les sous-SCN locaux et véhiculer les pondérations inter-blocs.

Il faut également assurer la **scalabilité** dans un contexte où le nombre d'entités globales peut atteindre des centaines de milliers, voire des millions.

Nœuds : un SCN local par machine

Une architecture distribuée repose d'abord sur la définition de **nœuds** (ou "workers", "serveurs"), chacun exécutant un **SCN local**. D'un point de vue **logiciel**, on peut imaginer que chaque nœud exécute :

- Un **Core** local qui gère la sous-matrice $\omega^{(p)}$ correspondant aux entités de son bloc $\mathcal{V}_p$.

- Des **Modules** spécialisés (Synergie, Inhibition, Interface) adaptés au bloc local.
- Un mécanisme de **communication** (via TCP/IP, RPC, ou un bus de messages) pour échanger des données avec les autres nœuds.

Sur le plan **mathématique**, si l'ensemble global $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ est partitionné en $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$, le nœud p prend en charge toutes les liaisons $\omega_{i,j}$ où $i, j \in \mathcal{V}_p$. En local, il opère sa propre boucle "mise à jour $\omega_{i,j}^{(p)}(t+1) = \cdots$". Cela donne naissance à des **sous-SCN** SCN_p. Pour gérer les liens inter-blocs $\left(i \in \mathcal{V}_p, j \in \mathcal{V}_q\right)$, on recourt à un mécanisme d'échanges entre nœuds.

Synchronisation : entre "Approche Synchrone" et "Approche Asynchrone"

Le **rythme** des communications inter-nœuds détermine le type de **synchronisation** dans l'architecture distribuée. On discerne deux grandes approches :

1. Approche Synchrone

Tous les sous-SCN SCN_p réalisent leur mise à jour locale (pour leurs entités internes) sur un même "tour" ou "round", puis s'arrêtent à une "barrière" de synchronisation pour **échanger** ou **agréger** les pondérations (ou au moins les informations pertinentes) concernant les liens inter-blocs. Par exemple, on peut imaginer un cycle :

$$\text{(i) Chaque } \text{SCN}_p \text{ met à jour } \omega^{(p)}(t+1),$$

(ii) Attente d'une barrière, (iii) Échange de données sur inter-blocs, (iv) Prochaine itération.

Cette approche facilite l'**analyse** mathématique. On peut considérer que chaque round complet aboutit à un opérateur global $G\left(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(m)}\right)$. En contrepartie, on tolère une **latence** plus élevée (chaque nœud doit attendre les autres avant de poursuivre), ce qui peut ralentir le système pour un grand nombre de nœuds.

2. Approche Asynchrone

Ici, chaque sous-SCN tourne en continu et **demande** les valeurs $\omega_{i,j}$ ou $\mathbf{x}_j$ (pour le calcul de synergie) au fur et à mesure à d'autres nœuds, sans synchronisation globale. Cela signifie qu'on peut avoir des liens $\omega_{i,j}$ "en retard" d'un ou plusieurs tours, donc des **incohérences** momentanées plus élevées. On gagne par contre en **efficacité** si le réseau est très large et que l'on n'a pas envie de bloquer tout le monde à chaque round. Sur le plan **mathématique**, on aboutit à une mise à jour

$$\omega^{(p)}(t+1) = F^{(p)}\left(\omega^{(p)}(t), \text{(informations inter-blocs potentiellement datées)}\right).$$

L'étude de convergence devient plus complexe, souvent liée aux techniques de systèmes dynamiques asynchrones ou aux algorithmes de type "Gossip".

Inter-blocs : meta-SCN et résumé des synergies

Pour **connecter** logiquement les sous-SCN, un "**meta-SCN**" peut être défini au niveau supérieur. Ce graphe a pour nœuds les **blocs** $\mathcal{V}_p$, et ses arêtes représentent un **résumé** des liens inter-blocs.

Ce résumé peut être construit à partir de la somme des pondérations $\omega_{i,j}$ pour $i \in \mathcal{V}_p, j \in \mathcal{V}_q$ dépassant un certain seuil, ou à partir de la moyenne des synergies fortes entre ces blocs.

Le **meta-SCN** ne joue pas nécessairement le même rôle qu'un **SCN** classique, mais il peut **guider** l'échange de données. Si la synergie inter-blocs $\mathcal{V}_p \leftrightarrow \mathcal{V}_q$ est très faible, la fréquence de synchronisation entre SCN_p et SCN_q peut être réduite, optimisant ainsi les ressources utilisées.

D'un point de vue **implémentation**, chaque sous-SCN peut posséder un **cache local** contenant des informations sur les entités extérieures, comme $\mathbf{x}_j$ si l'on calcule une distance, ou sur les pondérations inter-blocs $\omega_{i,j}$. Ce cache est mis à jour selon un protocole de communication spécifique.

Les mathématiciens y verraient un **système dynamique couplé**, où chaque matrice $\omega^{(p)}$ évolue en fonction des données reçues de $\omega^{(q)}$.

Performance et Scalabilité

L'**avantage** principal d'une telle distribution est la **répartition** de la charge. Si chaque nœud gère $|\mathcal{V}_p| \approx \frac{n}{m}$ entités, alors la sous-matrice interne $\omega^{(p)}$ représente $\mathrm{O}\left((\frac{n}{m})^2\right)$ liens potentiels. Cela devient **faisable** lorsque m est suffisamment grand pour que $\frac{n}{m}$ demeure raisonnable.

Cette approche permet de traiter un **SCN** global où n serait impossible à stocker ou à manipuler en un seul bloc mémoire, typiquement pour des ordres de grandeur allant de 10^5 à 10^7. Toutefois, les **communications inter-blocs** impliquent un coût non négligeable, que l'on cherche à limiter par diverses stratégies, comme le rafraîchissement épisodique, l'ignorance des synergies trop faibles ou encore la compression des échanges.

L'**inconvénient** réside dans la difficulté à assurer une **cohérence** globale. Lorsqu'un agent $i \in \mathcal{V}_p$ entretient une relation forte avec un agent $j \in \mathcal{V}_q$, il est nécessaire que SCN_p et SCN_q échangent fréquemment des informations, notamment pour le calcul de la synergie et la mise à jour conjointe de $\omega_{i,j}$.

En mode **asynchrone**, l'accumulation de retards peut compliquer la convergence mathématique et rendre son analyse plus délicate. Sur le plan **pratique**, cette distribution reste néanmoins souvent la seule solution lorsque la complexité $\mathrm{O}(n^2)$ devient inabordable sur un unique nœud.

C. Scénarios d'Utilisation

Lorsque l'on envisage un **Synergistic Connection Network (SCN)** en mode distribué, plusieurs **scénarios** se présentent où la répartition des entités en différents sous-SCN devient non seulement utile, mais parfois indispensable. Au niveau **mathématique**, tous partagent l'idée d'un **partitionnement** des données ou des agents, chaque sous-SCN gérant localement ses pondérations $\omega^{(p)}$, tandis que les **liens** inter-blocs se manipulent au travers d'échanges. Sur le plan **ingénierie**, cela se traduit par divers contextes d'application (très grand nombre d'entités, systèmes multi-robots, hétérogénéité symbolique/sub-symbolique) nécessitant un **prototype** ou une **infrastructure** distribuée.

1. Très Grand n

Lorsqu'on manipule un **grand** nombre d'entités $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$, l'ordre de grandeur de $\mathrm{O}(n^2)$ pour la matrice ω peut rendre impossible son traitement et son stockage en une seule machine. Les ressources (mémoire, CPU) sont vite saturées pour des valeurs de n s'élevant à plusieurs centaines de milliers, voire des millions. Dans ce contexte, on décide de **distribuer** l'ensemble

des entités sur plusieurs serveurs (ou nœuds), chacun exécutant un **sous-SCN** local, noté SCN_p. Chacun de ces sous-SCN ne prend en charge que $\mathrm{O}((n/m)^2)$ liens internes, ce qui peut devenir gérable si m (le nombre de blocs) est choisi de manière judicieuse.

Cette problématique s'inscrit dans la lignée des **algorithmes distribués** pour la **structure** de graphe ou la **clustering** à grande échelle (type "label propagation", "graph partitioning", etc.). Un **SCN** distribué se rapproche de ces approches, car on maintient des **pondérations** (ou "labels"/"scores") localement et on effectue des synchronisations pour converger vers un état global. Au niveau **mathématique**, on conçoit alors que la dynamique $\omega^{(p)}(t+1) = F^{(p)}\left(\omega^{(p)}(t), \mathbf{\Omega}^{\mathrm{inter}}(t)\right)$ se déroule de façon **parallèle** sur chaque nœud, et l'on obtient une **scalabilité** accrue. Les résultats, en termes de convergence, sont plus complexes à analyser que dans un SCN centralisé, mais cette distribution demeure la seule voie dès que n dépasse largement la capacité d'une seule machine.

2. Contexte Multi-Robot ou Multi-Agents

Dans un cadre **multi-robot** (ou multi-agents, plus général), chaque robot peut être perçu comme un "**nœud**" autonome qui gère, localement, un **mini-SCN** représentant ses capteurs, ses états internes, ou les sous-ensembles d'entités qu'il connaît le mieux (en plus de quelques entités externes qu'il héberge symboliquement). Les **interactions** entre robots sont alors modélisées par des **liens** inter-blocs, réels ou potentiels, qui évoluent via messages d'événements ou mesures coopératives.

Sur le plan **mathématique**, on observe un **système** de sous-SCN où chaque robot SCN_p exécute la **boucle** DSL pour ses variables locales $\omega^{(p)}$. Il effectue périodiquement un échange de données, comme des pondérations "intéressantes" ou des vecteurs de capteurs, avec ses **voisins**. Les liens inter-robots $\omega_{i\in\mathcal{V}_p, j\in\mathcal{V}_q}$ sont mis à jour de manière moins fréquente ou selon un protocole asynchrone basé sur des messages d'événements.

Sur le plan de l'**implémentation**, cela correspond à un ensemble de robots ou d'agents virtuels, chacun disposant d'un microprocesseur exécutant en local son **Module Synergie** et sa **Mise à Jour**. La **communication** entre ces entités s'effectue sur un réseau afin de partager l'information relative aux liens inter-blocs.

Une telle **distribution** reflète l'**autonomie partielle** des robots. Chaque entité est libre de se réorganiser en interne tout en contribuant à une **organisation** plus large via la synchronisation inter-blocs.

Sur le plan **ingénierie**, cette approche permet de concevoir des **essaims robotiques** où l'**intelligence** émerge de la coopération entre plusieurs sous-SCN dispersés. Chaque unité met à jour localement ses pondérations $\omega_{i,j}$ tout en échangeant périodiquement des informations sur les relations avec ses robots voisins.

3. Hétérogénéité des Domaines

Un autre scénario met en scène un **SCN** segmenté par **type** ou **domaine** d'entités. Par exemple, un sous-SCN $\mathrm{SCN}_{\mathrm{subsymb}}$ dédié à des entités sub-symboliques (images, embeddings visuels) et un autre sous-SCN $\mathrm{SCN}_{\mathrm{symbol}}$ consacré à des entités purement symboliques (règles logiques, concepts, ontologies). Ces deux blocs communiquent par l'intermédiaire d'un "**pont**" ou d'entités hybrides, assurant la **fusion** ou la **traduction** entre représentations sub-symboliques et logiques.

Chaque sous-SCN gère sa dynamique $\omega^{(p)}$ avec une synergie $S^{(p)}$ adaptée. Par exemple, un calcul de **similarité cosinus** peut être utilisé pour le bloc **sub-symbolique**, tandis qu'une **co-information** ou une **compatibilité sémantique** peut être privilégiée pour le bloc **symbolique**.

Les **entités hybrides** $\mathcal{E}_{\text{hyb}}$ se situent à la frontière entre ces blocs. Elles possèdent **deux représentations**, l'une **sub-symbolique** et l'autre **symbolique**, ou sont capables d'établir des correspondances entre ces deux formes de représentation.

On peut ainsi définir un **coup de pont** $\omega_{i,j}$ lorsqu'une entité $\mathcal{E}_i$ réside dans le bloc **sub-symbolique** et qu'une entité $\mathcal{E}_j$ appartient au bloc **symbolique**. La mise à jour de ce lien peut alors dépendre d'un **Module Synergie** spécialement conçu pour gérer les **transitions visuel ↔ conceptuel**.

Sur le plan **ingénierie**, on réalise deux "clusters" logiques de sous-SCN, chacun spécialisé dans un **domaine** (vision vs. sémantique, par exemple). Sur le plan **mathématique**, on obtient un **réseau** distribué où chaque sous-SCN gère un espace de représentation distinct, et où seuls les **entités-pont** facilitent la synchronisation inter-domaine. Cette hétérogénéité induit souvent des **protocoles** de communication adaptés (ex. on transfère un vecteur embedding quand on veut calculer une synergie cross-domaine). Cela permet au **SCN** global d'intégrer des données multiples (images, texte, logiques de règles) sans forcer un format unique.

D. Points Mathématiques et Ingénierie Avancés

Lorsqu'un **Synergistic Connection Network (SCN)** est déployé de manière distribuée, la gestion de plusieurs sous-blocs $\{\omega^{(p)}\}$ et la coordination inter-blocs soulèvent des **questions avancées** à la fois sur le plan mathématique (convergence, synchronisation) et sur le plan d'ingénierie (implémentation de services, répartition des données, etc.). Le comportement global d'un tel SCN résulte alors d'un **système** d'équations ou d'itérations couplées, tandis que chaque sous-SCN local SCN_p maintient ses entités $\mathcal{V}_p$ et ses pondérations internes $\omega^{(p)}$.

Convergence d'un SCN Distribué

Sur le plan purement **mathématique**, la convergence d'un SCN distribué peut s'analyser comme un **système dynamique** multi-blocs. Chaque bloc $p \in \{1, \dots, m\}$ met à jour $\omega^{(p)}$ suivant une équation du type

$$\omega^{(p)}(t+1) = F^{(p)}\left(\omega^{(p)}(t),\ \mathbf{\Omega}^{\text{inter}}(t)\right),$$

où $\mathbf{\Omega}^{\text{inter}}(t)$ regroupe les informations relatives aux entités ou pondérations situées dans d'autres blocs. Dans une **forme synchrone**, tous les blocs procèdent par **rounds**. Chaque SCN_p actualise ses liens internes $\omega^{(p)}$ en fonction des synergies $\mathbf{S}^{(p)}$ et des données inter-blocs reçues à la fin du round précédent. On parle alors d'une "barrière" ou d'un "rendez-vous" qui garantit la cohérence temporelle à chaque itération.

Lorsqu'on passe à une **forme asynchrone** (souvent dite "gossip" ou "push-pull"), chaque sous-SCN peut déclencher sa mise à jour $\omega^{(p)}(t+1)$ quand bon lui semble, éventuellement en s'appuyant sur des valeurs de $\omega^{(q)}$ (pour $q \neq p$) reçues plus tôt. Le système s'apparente alors à un **système dynamique non autonome**, où la convergence se détermine par l'existence ou non d'une topologie d'échanges suffisamment riche et d'une fréquence de mise à jour inter-blocs assez élevée pour éviter la divergence. Sur le plan théorique, on retrouve des analyses

comparables aux algorithmes de type “consensus” ou “gossip” dans les réseaux multi-agents, qui établissent parfois des résultats de convergence (avec ou sans retards) si la matrice d’adjacence globale satisfait certaines conditions de connexité ou de régularité.

Une **difficulté** réside dans le fait qu’un SCN distribué introduit des non-linéarités (inhibition, saturation, etc.), rendant la démonstration de convergence plus ardue qu’un simple consensus linéaire. On peut devoir imposer des **contraintes** (nombre minimal d’échanges par période, borne sur le retard asynchrone, etc.) pour aboutir à un état final stable ou quasi-stable. Les ingénieurs recherchent souvent un compromis. Ils peuvent exiger que chaque bloc synchronise, même partiellement, ses liens inter-blocs au moins toutes les K itérations. Une autre approche consiste à restreindre le **SCN** aux seuls liens inter-blocs dont la similarité dépasse un certain seuil.

Implémentation et Organisation des Services

Sur le plan de l’**ingénierie**, une architecture distribuée se concrétise par plusieurs “**services**” ou “**modules**” s’exécutant sur des machines distinctes. Chacun possède son **sous-SCN** local, autrement dit une version de la “Core” (voir §5.2.1.1) et éventuellement des modules “Synergie”, “Inhibition”, etc. propres à son sous-ensemble $\mathcal{V}_p$. Les communications inter-blocs, indispensables pour maintenir la cohérence, s’implémentent via :

- **Échanges explicites** (RPC, REST, gRPC) : quand un nœud SCN_p veut actualiser $\omega_{i,j}$ pour $i \in \mathcal{V}_p$ et $j \in \mathcal{V}_q$, il interroge un service sur SCN_q pour obtenir la représentation de $\mathcal{E}_j$ ou la pondération précédente.

- **Synchronisation par rounds** : si la mise à jour est synchrone, on attend la fin d’un “tour” local, puis on échange un “lot” de pondérations inter-blocs.

- **Structures de cache** : parfois, on stocke (en local) une approximation de $\omega_{i,j}$ inter-bloc, actualisée périodiquement, afin de ne pas surcharger le réseau à chaque requête.

Côtés donnés, on peut répartir les entités de façon relativement égale pour équilibrer la charge, ou bien on peut adopter un partitionnement sémantique (les entités “visuelles” sur un cluster, les entités “textuelles” sur un autre). Dans un déploiement massif, chaque bloc local peut gérer $\sim 10^4$ ou $\sim 10^5$ entités, permettant de maintenir $(\frac{n}{m})^2$ liaisons internes dans la mémoire d’une seule machine. Les liens inter-blocs $\omega_{i\in\mathcal{V}_p,\ j\in\mathcal{V}_q}$ se gèrent soit par un stockage partiel (p. ex. un dictionnaire $(i,j) \mapsto \omega_{i,j}$ si $\omega_{i,j}$ est > à un certain seuil), soit par un “recalcul” sur demande en recourant au “Module Synergie” distant.

Applications de l’Architecture Distribuée

Les **applications** d’un SCN distribué se déclinent en plusieurs domaines :

Dans un **Cloud** ou cluster HPC, on veut analyser un énorme graphe ou un volume considérable d’entités. On distribue alors les entités en sous-SCN, chaque sous-SCN tournant sur un ensemble de machines. Les mises à jour itératives de ω ou de $\omega^{(p)}$ progressent en parallèle, synchronisées de temps à autre. Cette configuration répond à un besoin de **scalabilité**, car il est impossible de charger $\mathrm{O}(10^{12})$ liaisons sur un unique serveur.

Dans un **environnement multi-robot** (flottille de drones, essaim de robots de service), chaque robot exécute localement un mini-SCN sur ses propres capteurs, ses propres représentations, et discute via messages d’événements ou protocoles ad hoc avec les autres. Les liens inter-robots

$\omega_{i\in\mathcal{V}_p,\ j\in\mathcal{V}_q}$ s'actualisent au fil d'interactions tangibles (rencontre physique, échange de données). De la sorte, le système complet forme un **SCN** global, potentiellement asynchrone, reflétant la coopération ou la co-information entre robots.

Dans un **contexte Edge computing**, on peut avoir des microcontrôleurs (capteurs, devices IoT) gérant en local un sous-groupe d'entités, puis communiquant avec un "hub" de plus haut niveau. Chaque microcontrôleur agit comme un "petit SCN" local, alors que le hub fait office de "meta-SCN" ou de "SCN central," agrégeant les informations inter-blocs.

Sur le plan **mathématique**, le fonctionnement distribué n'altère pas la logique fondamentale du DSL, mais la décline sous forme d'**itérations couplées**. Sur le plan **implémentation**, on construit un écosystème de **services** (chaque sous-SCN local + un ou plusieurs services de synchronisation) permettant l'apprentissage distribué.

5.3. Structures de Données pour la Matrice ω

Dans un **SCN**, la matrice ω (de dimension $n \times n$) stocke les **pondérations** $\omega_{i,j}$ représentant la force du lien (ou la synergie actualisée) entre chaque entité $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$. Selon la **taille** n et la **densité** réelle des liens (beaucoup ou peu de valeurs non nulles), on choisira une structure de données appropriée (dense, sparse, etc.). Il s'agit d'un choix crucial, car il conditionne à la fois les **performances** (temps de mise à jour, accès mémoire) et la **flexibilité** (ajout/suppression de liens, extension à un mode distribué).

5.3.1. Dense vs. Sparse

Lorsqu'on parle de "**matrice dense**" vs. "**liste d'adjacence**" ou "**structuration sparse**", on se réfère à des stratégies différentes pour **stocker** la grille $\omega_{i,j}$. Il en découle des **avantages** et **inconvénients** mathématiques et pratiques.

5.3.1.1. Avantages/Inconvénients d'une *Matrice Dense* (Accès Direct, Simple) vs. *Liste d'Adjacence* si la Plupart des ω sont Faibles

Dans le contexte d'un **Synergistic Connection Network (SCN)**, la **représentation** des pondérations $\omega_{i,j}$ devient cruciale lorsque le nombre d'entités n augmente. L'important défi consiste à choisir la structure de stockage la plus adaptée pour ces liaisons, notamment en considérant si la majorité des valeurs $\omega_{i,j}$ sont faibles ou nulles en raison de mécanismes d'**inhibition** ou de régularisation. Deux approches se distinguent dans ce cadre, l'**utilisation d'une matrice dense** et celle d'une **structure de stockage sparse**, telle qu'une **liste d'adjacence** ou un dictionnaire.

A. Matrice Dense

La représentation par **matrice dense** consiste à allouer un tableau bidimensionnel $\mathrm{W}[n][n]$ dans lequel chaque élément $\omega_{i,j}$ est stocké de manière explicite à l'indice (i, j). Chaque entité i correspond ainsi à une ligne complète de ce tableau, permettant un **accès direct** aux pondérations avec une complexité en temps de $\mathrm{O}(1)$ pour toute lecture ou écriture. Par exemple, la somme des liens sortants d'une entité i se calcule rapidement par

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j},$$

ce qui peut être optimisé par des techniques de vectorisation, telles que les instructions **SIMD**, ou en utilisant des bibliothèques spécialisées telles que **BLAS**.

Néanmoins, cette approche présente un **inconvénient majeur** car elle est extrêmement **consommatrice de mémoire**. Le stockage d'une matrice dense requiert $\mathrm{O}(n^2)$ éléments, ce qui peut rapidement entraîner une utilisation excessive des ressources lorsque n devient grand. Par exemple, avec quelques dizaines de milliers d'entités, l'espace de stockage peut atteindre plusieurs gigaoctets.

De plus, si une grande partie des pondérations reste négligeable, notamment en raison d'un mécanisme d'inhibition, l'allocation mémoire est en partie gaspillée pour stocker ces valeurs proches de zéro. Le parcours complet de la matrice, également en $O(n^2)$, peut alors s'avérer prohibitif, rendant les mises à jour fréquentes particulièrement coûteuses en temps de calcul.

B. Liste d'Adjacence ou Stockage Sparse

À l'opposé, le **stockage sparse** ne retient que les paires (i, j) pour lesquelles $\omega_{i,j}$ atteint une valeur significative, par exemple, supérieure à un certain seuil ou figurant dans le « top k » des liaisons pour chaque entité i. Plusieurs formats existent pour implémenter cette approche, notamment le format **CSR (Compressed Sparse Row)**, qui regroupe les liaisons non nulles par ligne, ou encore l'utilisation de dictionnaires associant chaque couple (i, j) à sa valeur correspondante $\omega_{i,j}$.

L'avantage principal d'une telle approche réside dans une **réduction substantielle** de l'utilisation mémoire. Si la densité effective des liaisons est faible, on peut passer d'une complexité en $O(n^2)$ à une complexité en $O(\rho\, n^2)$ où $\rho \ll 1$ représente le taux de densité des liaisons significatives. Cette économie de mémoire est particulièrement avantageuse lorsque seules quelques connexions par entité sont réellement non négligeables. Par ailleurs, le parcours des voisins d'une entité i se limite aux entrées présentes dans la liste d'adjacence, ce qui peut considérablement accélérer les algorithmes qui ne nécessitent pas de balayer l'ensemble des n éléments.

Cependant, le **stockage sparse** comporte aussi des inconvénients. L'accès direct à une pondération spécifique $\omega_{i,j}$ n'est plus garanti en $O(1)$ dans tous les cas, en particulier lorsque l'implémentation repose sur une structure de type **hashmap** qui, bien que visant une complexité moyenne de $O(1)$, peut souffrir de surcoûts liés aux collisions ou au ré-hachage. Par ailleurs, lorsqu'on utilise une liste d'adjacence, l'accès à une pondération donnée dépend du nombre de voisins d_i de l'entité i, ce qui introduit une complexité en $O(d_i)$. De plus, la gestion dynamique de ces structures (insertion, suppression ou mise à jour) peut nécessiter des mécanismes supplémentaires, tels que des min-heaps pour conserver les k plus grandes liaisons, ce qui complexifie l'implémentation.

5.3.1.2. Critères de Choix : Taille n, Proportion de Liaisons Fortes

Les réflexions sur la structure la plus adaptée pour stocker la matrice ω dans un **Synergistic Connection Network** (*SCN*) s'articulent autour de deux **critères** principaux. Le premier concerne la **taille** du réseau, définie par le nombre d'entités n. Le second porte sur la **densité** réelle des liaisons "fortes", c'est-à-dire la proportion de valeurs $\omega_{i,j}$ qui restent significatives.

Si la taille n demeure modeste ou si la synergie et l'inhibition entraînent un fort pourcentage de liens non nuls, une **matrice dense** peut s'avérer plus simple et avantageuse. En revanche, pour un très grand n ou un **SCN** où l'inhibition et la compétition rendent la majorité des liaisons négligeables, une **représentation sparse**, comme une liste d'adjacence ou un dictionnaire, permet d'économiser massivement la mémoire et d'accélérer certaines opérations.

A. Taille n

Lorsque le nombre d'entités n reste **relativement petit**, typiquement jusqu'à quelques milliers ou quelques dizaines de milliers, l'utilisation d'une **matrice dense** de taille $O(n^2)$ demeure envisageable. Les architectures mémoire modernes peuvent gérer plusieurs millions d'entrées,

et un parcours complet en $O(n^2)$ par itération n'est pas nécessairement prohibitif si une certaine **parallélisation** est possible, par exemple à l'aide d'un **double-buffer** synchrone et de plusieurs **threads**. Dans ce cas, la simplicité d'accès à $\omega_{i,j}$ en $O(1)$ constitue un atout, surtout si la densité des liens est suffisamment élevée pour justifier l'emploi d'une représentation dense.

En revanche, si n dépasse un certain seuil critique, de l'ordre de **dizaines ou centaines de milliers**, la structure dense devient difficile à stocker, car les $O(n^2)$ éléments peuvent représenter des **centaines de gigaoctets**. De plus, le coût d'un parcours complet à chaque étape en $O(n^2)$ peut rapidement devenir intenable. Dans ce cas, une **sparsification** de la matrice devient nécessaire, en ne conservant qu'un sous-ensemble limité de liens par entité. Une approche courante consiste à ne préserver que les k **liaisons les plus fortes** par entité, ce qui transforme la matrice en une structure plus légère, proche d'une **liste d'adjacence**, réduisant ainsi la complexité de stockage et de calcul à $O(kn)$.

B. Proportion de Liaisons Fortes (Densité)

On note ρ la proportion de liens **non négligeables** dans le réseau, que l'on peut approximer après application de l'**inhibition** ou après un filtrage des liens très faibles.

Si ρ est proche de **1**, cela signifie que la **plupart** des liaisons $\omega_{i,j}$ sont **non nulles**, indiquant un réseau relativement **dense**. Dans ce cas, une **matrice dense** est une option cohérente, évitant des surcoûts liés à la recherche et à la mise à jour des valeurs stockées.

En revanche, si $\rho \ll 1$, c'est-à-dire que la majorité des valeurs $\omega_{i,j}$ sont **quasi nulles**, un **format sparse** tel qu'une **liste d'adjacence** ou un **dictionnaire** devient plus avantageux. Ce type de représentation est **économe en mémoire** et permet d'accélérer les parcours en ne traitant que les **liaisons fortes**, évitant ainsi le stockage et la manipulation d'une grande quantité de zéros inutiles.

C. Couplage des Deux Critères

La taille mémoire d'une **matrice dense** est de $O(n^2)$, tandis que celle d'une **structure sparse** se déduit de $O(\rho\, n^2)$. Lorsque la densité du réseau est $\rho \approx 0.001$ (soit **0.1 %** des liaisons présentes), une structure **sparse** occupe environ un millième de l'espace mémoire nécessaire à une matrice dense.

À l'inverse, si la densité réelle du réseau est $\rho \approx 1$ ou même **50 %**, la représentation sparse retombe pratiquement à $O(n^2)$ en nombre d'entrées, ce qui réduit son intérêt. Dans ce cas, l'accès aux éléments $\omega_{i,j}$ devient plus complexe (via des listes chaînées ou des dictionnaires), sans réel gain en mémoire par rapport à une structure dense.

La **mise à jour** d'un **SCN** implique souvent de parcourir toutes les valeurs $\omega_{i,j}$ ou, à minima, toutes les **liaisons fortes**. Si le réseau est **très dense**, ce parcours peut rester en $O(n^2)$, quelle que soit la représentation. Dans un format **sparse**, le parcours complet demande $O(\rho\, n^2)$, ce qui est avantageux **uniquement** si ρ **est faible**.

Pour un **accès aléatoire** à une pondération $\omega_{i,j}$, une **matrice dense** offre une récupération en $O(1)$, alors qu'une **structure sparse** génère un accès en $O(\log d_i)$ ou $O(d_i)$, selon que l'on utilise une structure de type **dictionnaire** ou **liste d'adjacence**, où d_i représente le degré de l'entité $\mathcal{E}_i$.

5.3.2. Indexation et Accès Rapide

Même après avoir choisi un **format général** (dense vs. sparse) pour la matrice ω (cf. 5.3.1), on peut affiner l'**organisation** interne afin de faciliter les **accès** (lecture/écriture) aux pondérations $\omega_{i,j}$. Dans de nombreux cas, on a besoin d'opérations comme :

- $\text{getWeight}(i,j)$: accéder rapidement à la pondération d'un lien particulier,
- $\text{sumOfWeights}(i)$: sommer les liens d'une entité $\mathcal{E}_i$ (pour l'inhibition ou la normalisation),
- $\text{topLinks}(i,k)$: retrouver les k plus gros liens sortants de i.

Selon la **densité** et la **nature** de la mise à jour (compétition locale, etc.), on peut adopter des **structures** plus sophistiquées, par exemple un **hashmap** associant $(i,j) \mapsto \omega_{i,j}$ (5.3.2.1) ou une **organisation** en "voisinages" (5.3.2.2).

5.3.2.1. Hashmap $(i,j) \mapsto \omega_{i,j}$

L'une des structures de données *sparse* envisageables pour stocker la matrice ω d'un **Synergistic Connection Network** (*SCN*) consiste à employer une **table de hachage** (ou *hashmap*) dont la clé est le couple (i,j) et la valeur est la pondération $\omega_{i,j}$. Cette représentation diffère d'un tableau dense ou d'une liste d'adjacence classique, puisqu'on ne stocke que les paires (i,j) jugées réellement significatives, tout en profitant, en moyenne, d'un accès $O(1)$ pour lire ou écrire une entrée dès lors que le hachage est bien conçu.

A. Principe

La matrice ω n'est plus représentée comme un bloc mémoire rectangulaire $W[n][n]$, ni comme un ensemble de listes par lignes, mais comme un **dictionnaire** (ou *hashmap*) associant toute paire $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ à la valeur $\omega_{i,j}$. Dans un langage comme C++, on peut employer *std::unordered_map<std::pair<int,int>, double>* ; en Python, un simple *dict* avec pour clé un tuple (i,j). Les liens dont la pondération $\omega_{i,j}$ demeure faible (inférieure à un certain seuil) peuvent être omis du dictionnaire, réduisant ainsi la taille mémorielle lorsque la densité du SCN est faible.

Le système devient

$$H: (i,j) \mapsto \omega_{i,j}$$

où seules les paires (i,j) jugées "actives" (i.e. $\omega_{i,j}$ non négligeable) apparaissent dans la table. Cela diffère d'un **stockage dense**, qui crée $O(n^2)$ emplacements, et d'une **liste d'adjacence** structurée par ligne, qui assigne explicitement à chaque entité i sa liste de voisins.

B. Avantages

Un **avantage clé** de cette approche réside dans l'**accès direct** à $\omega_{i,j}$ en temps moyen $O(1)$. En effet, la **table de hachage** permet de retrouver la valeur associée à la clé (i,j) via un calcul de hachage, sans devoir chercher dans une liste d'adjacence. Cette propriété diffère notablement d'une liste classique, où l'on itère sur tous les voisins de i pour trouver si j y est présent.

De plus, la **suppression** ou l'**insertion** d'un lien $\omega_{i,j}$, notamment en cas de mise à zéro ou de réactivation après un changement de synergie, s'effectue en $O(1)$ **amorti**. On bénéficie ainsi d'une grande **flexibilité** pour gérer les liens en dynamique. La représentation ne repose pas sur des structures chaînées ni sur des tris partiels, et la table de hachage s'ajuste efficacement à l'ajout ou à la suppression d'entrées.

Enfin, s'il n'existe qu'un nombre réduit de paires (i, j) réellement non nulles (faible densité ρ), la **mémoire** employée se limite à $O(\rho\, n^2)$. Cela devient un atout majeur dans les scénarios où l'inhibition ou les mécanismes de **sparsification** maintiennent la plupart des pondérations $\omega_{i,j}$ au seuil de zéro, rendant vaine une structure dense.

C. Inconvénients

Une **table de hachage** n'est pas sans **coût caché**. Le temps moyen d'accès en $O(1)$ s'accompagne d'une constante parfois significative, surtout si la structure devient très large (des millions de paires). Les "*re-hashings*" se déclenchent à mesure que le dictionnaire grossit, occasionnant des *slowdowns* sporadiques. Par ailleurs, contrairement à un tableau 2D, il n'existe pas de *layout* mémoire contigu pouvant tirer parti d'instructions vectorielles (SIMD) ou d'algèbre linéaire BLAS.

Un second souci touche au **parcours** par entité i. Dans une liste d'adjacence structurée, on dispose directement d'un vecteur listant les voisins de i. Dans un dictionnaire global $(i, j) \mapsto \omega_{i,j}$, on ne dispose pas en standard d'une répartition par *buckets* regroupés. Parcourir l'ensemble des liens de i exige alors soit un balayage complet de la table (avec un filtrage sur la clé), soit le maintien en parallèle d'une structure secondaire (ex. un "adjIndex[i]" pointant vers une liste de clés (i, j)). Cela ajoute de la **complexité** de maintenance.

Enfin, si la densité ρ n'est pas si faible ou qu'elle évolue vers un SCN plutôt dense, la table de hachage devient lourde à manipuler. On perd alors l'avantage d'avoir éliminé $O(n^2)$ emplacements, et on hérite des surcoûts en dispersion de clés, en collisions, etc.

D. Analyse Mathématique et Cas d'Usage

On suppose que $\rho\, n^2$ paires (i, j) soient actives. Le **coût mémoire** du dictionnaire est alors $O(\rho\, n^2)$, avec un overhead supplémentaire dû aux structures internes de hachage.

En **accès direct**, le temps moyen est $O(1)$, car l'opération s'effectue via $\omega_{i,j} = \mathrm{H}[(i, j)]$. Cette propriété rend la **hashmap** particulièrement avantageuse pour les scénarios où la dynamique du **SCN** implique des **accès aléatoires fréquents** sur des paires (i, j).

Cependant, un **parcours complet** des **liens sortants** d'une entité i ne s'obtient pas naturellement en $O(d_i)$, sauf si une **structure secondaire** ou un **indice** est maintenu en parallèle.

Les **contextes** où cette structure est particulièrement adaptée sont ceux où la densité $\rho \ll 1$, rendant la matrice dense inefficace en termes de mémoire. Elle est également avantageuse lorsque les accès ponctuels à $\omega_{i,j}$ sont fréquents dans le code de mise à jour et que des liens sont régulièrement ajoutés ou supprimés au fil de l'évolution du **SCN**.

De plus, l'**ajout** ou la **suppression** d'un couple (i, j) reste simple, avec une opération **insert** ou **erase** en $O(1)$ **amorti**. Cette flexibilité contraste avec certaines implémentations de **liste d'adjacence**, qui nécessitent de **maintenir un tri par ordre de poids**, rendant la mise à jour plus coûteuse.

5.3.2.2. Organisation en "Voisinages" (Garder les k plus forts liens)

Il est souvent observé dans un **Synergistic Connection Network** (*SCN*) que, pour chaque entité $\mathcal{E}_i$, seul un nombre relativement restreint de liaisons $\omega_{i,j}$ conservent une valeur significative au fil de la dynamique, qu'elle soit **additive** ou **multiplicative**.

Dans ce cas, la **matrice** ω peut être **considérablement épurée** en ne conservant, pour chaque i, que les k **liens les plus forts** sortants. Ce principe, parfois désigné sous les termes **"k plus forts liens"** ou **"voisinage restreint"**, s'inscrit dans une approche de **sparsification contrôlée**.

L'objectif est d'imposer **par construction** que chaque entité **ne conserve qu'un nombre limité de connexions**, réduisant ainsi la **complexité mémoire** et facilitant les **mises à jour** du réseau.

A. Principe : Conserver un Voisinage Restreint par Entité

Un SCN défini via $\omega_{i,j}(t)$ peut atteindre au plus $\mathrm{O}(n^2)$ liens, ce qui devient impraticable si n s'accroît. L'**organisation en voisinage** pose alors la règle :

$$\forall i, \quad \text{voisins}(i) \subseteq \{1,2,\dots,n\}, \quad |\text{voisins}(i)| \leq k,$$

où k représente un nombre fixé (ou un paramètre qui peut varier selon l'entité). Pour chaque i, seuls les $\omega_{i,j}$ **les plus grands** sont conservés, tandis que les liens trop faibles sont éliminés.

Cette sélection s'effectue de manière **dynamique**. Si une liaison $\omega_{i,j}$ devient plus forte qu'un des liens actuellement stockés au fil des itérations, elle peut être intégrée au **voisinage de** i, tandis que le **lien le plus faible** en est évincé.

B. Aspects Mathématiques et Logiques

La **dynamique** $\omega_{i,j}(t+1)$ suit toujours les formules usuelles, comme la mise à jour **additive**. Cependant, un **opérateur** TopK_i est appliqué **périodiquement** ou **à chaque itération**.

Cet opérateur trie ou sélectionne les **liens sortants de** i en fonction de $\omega_{i,j}(t+1)$ et **élimine** ceux qui ne figurent pas parmi les k **plus forts**. Les liaisons exclues sont soit **mises à zéro**, soit **ignorées** dans les calculs ultérieurs. Cela revient à :

$$\omega_{i,j}(t+1) \;=\; \begin{cases} \omega_{i,j}'(t+1) & \text{si } j \in \mathrm{TopK}_i\left(\omega_{i,\cdot}'(t+1)\right), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\omega_{i,j}'(t+1)$ est la mise à jour brute (sans coupes), puis on applique la *sélection* TopK_i. L'effet combiné se rapproche d'une **inhibition latérale** (les liaisons se "battent" pour figurer dans le top-k). Si k est raisonnable (typiquement un ordre de grandeur bien inférieur à n), la structure finale est fortement *sparse*, ce qui diminue le temps de parcours nécessaire pour des opérations (inhibition globale, calcul partiel, etc.).

C. Structure de Données pour le Voisinage

Afin de maintenir ce **voisinage** de taille $\leq k$ pour chaque entité i, on peut employer plusieurs approches :

- Un **heap** de taille k conservant les liens sortants de i. Dès qu'un nouveau lien $\omega_{i,j}$ devient plus grand que le minimum du heap, on insère $(j, \omega_{i,j})$ et éjecte l'élément le plus faible.
- Une **liste** maintenue triée, bien que les insertions/suppressions puissent devenir plus coûteuses ($O(k)$).
- Un **arbre** équilibré (par ex. un *balanced tree*) de taille $\leq k$, permettant insertions et suppressions en $O(\log k)$.

Dans tous ces cas, la mise à jour du top-k pour $\omega_{i,j}(t)$ s'effectue en $O(\log k)$ lorsqu'on envisage d'ajouter ou de remplacer un lien. Ainsi, si l'on effectue un *random access* sur $\omega_{i,j}$ en dehors du top-k, on le considère nul (ou inexistant). Les liens $\omega_{i,j}$ contenus dans le voisinage sont ceux activement mis à jour et considérés comme "vivants".

D. Bilan sur la Complexité

La **taille mémoire** globale devient $O(k\,n)$ à la place de $O(n^2)$. Ceci représente un gain appréciable dès lors que $k \ll n$. À chaque itération, chaque entité i manipule $O(k)$ liens dans son voisinage, et la mise à jour (notamment si on parcourt la liste des voisins pour calculer la somme ou vérifier l'inhibition) s'effectue en $O(k)$. Au besoin, si l'on examine la possibilité de faire "entrer" un nouveau lien, on réalise un insertion-suppression dans la structure $O(\log k)$. Ce schéma devient bien plus soutenable qu'un parcours en $O(n)$ ou $O(n^2)$.

E. Considérations pour la Qualité de l'Auto-Organisation

Le fait de ne maintenir que k liens par entité introduit une forme de **compétition** pour les connexions. Cela peut encourager une meilleure différenciation des clusters et limiter la prolifération de liaisons moyennement fortes. Néanmoins, il faut veiller à ce que k ne soit pas trop restreint, sous peine de **fragmenter** exagérément le réseau ou d'empêcher des liens potentiellement utiles de croître. Dans certains SCN, on commence par un k généreux et on le réduit progressivement pour forcer l'apparition de liens *vraiment* robustes, traduisant une phase de "cristallisation" des clusters.

5.3.3. Synchronisation en Cas de Distribution

Dans certains **scénarios** de grande envergure ou impliquant plusieurs sites, il devient impossible de stocker la **matrice** ω en un seul endroit. On la **répartit** alors sur plusieurs **nœuds** (machines, serveurs, robots, etc.) (cf. 5.2.3.3).

Cette distribution soulève la question de la **synchronisation**. Il est crucial de s'assurer que les mises à jour $\omega_{i,j}(t+1)$ effectuées sur un nœud SCN_p restent **compatibles** avec celles réalisées sur un autre SCN_q, en particulier pour les *liens* et les *entités* situés à la frontière entre les deux sous-SCN.

5.3.3.1. Si la Matrice ω est Répartie sur Plusieurs Nœuds : Protocole de Communication (Verrous, Versioning)

Lorsqu'un **Synergistic Connection Network** (*SCN*) doit gérer un très grand nombre d'entités, la taille totale de la matrice ω, pouvant atteindre $O(n^2)$, dépasse souvent les capacités de stockage et de calcul d'une machine unique. Une approche naturelle consiste alors à **distribuer** les données et le calcul sur plusieurs **nœuds** ou **serveurs**, chacun étant responsable d'un **sous-ensemble** des entités $\{\mathcal{E}_i\}$.

Il est cependant essentiel de garantir une **cohérence** satisfaisante du processus de mise à jour, en particulier pour les **liaisons inter-blocs** reliant deux entités gérées par des nœuds distincts.

À ce niveau, la question d'un **protocole de communication et de synchronisation** devient cruciale. Il peut inclure des **verrous** ou un **mécanisme de versioning** afin d'éviter les **lectures/écritures incohérentes** et de reproduire au mieux la **vision synchrone** du **SCN**.

Répartition de la Matrice ω en Blocs

Le schéma usuel consiste à **découper** l'ensemble des entités $\{1, \dots, n\}$ en plusieurs **blocs** $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$, de sorte que chaque sous-SCN, noté SCN_p, gère localement les pondérations $\omega_{i,j}$ pour $i, j \in \mathcal{V}_p$.

Lorsque le réseau est **réellement distribué**, chaque nœud du cluster est responsable du **stockage** et de la **mise à jour** de la portion $\omega^{(p)}$ correspondant à son bloc $\mathcal{V}_p$.

Se pose alors la question des **liens inter-blocs**. Une pondération $\omega_{i,j}$, avec $i \in \mathcal{V}_p$ et $j \in \mathcal{V}_q$, doit être **physiquement gérée** par un **nœud donné** ou **répartie** entre plusieurs nœuds.

Une solution courante consiste à **attribuer les liaisons** (i, j) **à l'entité** i. Si $i \in \mathcal{V}_p$, alors SCN_p stocke **toutes** les $\omega_{i,j}$, même lorsque j appartient à un autre nœud.

Cette **règle de "détenteur unique"** permet d'éviter les **doublons** dans la gestion des pondérations, mais impose une **synchronisation stricte** pour la lecture des données $\omega_{k,j}$ lorsque celles-ci sont impliquées dans des mécanismes comme **l'inhibition** ou d'autres **couplages** inter-blocs.

Mécanismes de Coordination et de Cohérence

L'enjeu principal est de garantir que la **dynamique** $\omega_{i,j}(t+1) = \cdots$ reste mathématiquement correcte, même lorsque plusieurs nœuds mettent à jour simultanément des portions distinctes de la matrice.

Dans un **SCN unifié**, on suppose généralement un **pas synchrone**, exprimé par :

$$\omega(t+1) = F\big(\omega(t)\big)$$

et on cherche à s'assurer que l'itération $\omega(t) \mapsto \omega(t+1)$ corresponde à un **état global cohérent**.

Dans un **réseau distribué**, chaque nœud SCN_p ne détient qu'une **portion** de $\omega(t)$. Pour maintenir une mise à jour synchrone, un mécanisme de **barrière** peut être imposé. L'état $\omega(t)$ est d'abord **lu globalement et stabilisé**. Chaque nœud calcule ensuite sa portion $\omega^{(p)}(t+1)$ en s'appuyant sur les données inter-blocs. Un échange de **diffs** ou de **trames** met à jour les

liaisons (i, j) traversant les blocs, puis une validation collective est effectuée. Une fois cette étape finalisée, tous les nœuds adoptent un **état global** $\omega(t+1)$.

Ce mode de fonctionnement est typique des systèmes de calcul parallèle utilisant **MPI** (*Message Passing Interface*), où le cluster exécute une phase de **communication collective** après chaque phase de **calcul local**.

D'un point de vue **algorithmique**, cette approche **synchrone** garantit une **cohérence stricte**. La mise à jour $\omega(t+1)$ est toujours basée **intégralement** sur $\omega(t)$, assurant ainsi une **vision globale claire du temps** et évitant les incohérences pouvant survenir dans des modèles purement asynchrones.

Dans certaines infrastructures, un mode **asynchrone** est privilégié afin d'augmenter le parallélisme et de réduire les coûts liés à la synchronisation. Dans ce cas, chaque nœud SCN_p met à jour sa portion $\omega^{(p)}(t+1)$ dès que possible, tout en récupérant progressivement les versions mises à jour (ou non) par les autres nœuds.

Ce fonctionnement expose toutefois à des **phénomènes de lecture/écriture obsolètes**, qui peuvent altérer la dynamique et nuire à la convergence. Pour limiter ces incohérences, on introduit un mécanisme de **versioning**, en associant un identifiant de **round** ou de **version** à chaque état $\omega(t)$. Chaque nœud publie sa propre version ver_p une fois qu'il a terminé l'itération t, et ne traite les communications inter-blocs que si elles portent une version reconnue ou plus récente. Ce suivi temporel permet de distinguer si une pondération $\omega_{i,j}$ provient de l'état courant $\omega(t)$ ou d'une itération précédente $\omega(t-1)$, évitant ainsi les mises à jour incohérentes.

D'un point de vue **mathématique**, cette approche asynchrone fait perdre une partie des garanties de **convergence synchrone**, bien que de nombreux systèmes multi-agents adoptent un tel schéma. L'analyse de la stabilité devient plus délicate, car les nœuds ne partagent plus une vision homogène de l'état du réseau. On se rapproche ainsi d'un paradigme **"Gossip-based"**, où chaque nœud dispose d'une vision **potentiellement décalée** des liaisons $\omega_{k,\ell}$ en fonction des échanges qu'il a reçus.

Verrous et Protocoles de Verrouillage

Lorsqu'une mise à jour **au fil de l'eau** est utilisée, une option consiste à employer un **verrou par bloc**. Le nœud SCN_p peut verrouiller la plage mémoire correspondant à $\omega^{(p)}$ avant d'écrire, vérifier que les autres nœuds ont terminé leurs lectures sur le même round, puis relâcher le verrou. Cette approche empêche les écritures concurrentes sur la même portion de ω, mais peut entraîner des **contentions** si le nombre de blocs manipulés est trop élevé.

Dans un cadre **synchrone plus strict**, on préfère une **barrière globale**. Tous les nœuds terminent d'abord leur calcul local, communiquent leurs modifications, valident collectivement l'étape, puis passent à l'itération suivante $t+1$. Ce mécanisme garantit que la mise à jour suit exactement la règle $\omega(t+1) = F\big(\omega(t)\big)$, tout en répartissant la charge de calcul entre plusieurs nœuds.

Exemple Mathématique de Mise à Jour Synchrone Distribuée

On peut imaginer un SCN divisé en m blocs $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$. Chaque sous-SCN SCN_p calcule, pour $(i, j) \in \mathcal{V}_p \times \mathcal{V}_p$, la mise à jour :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right] - \gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t),$$

puis envoie, pour $\left(i \in \mathcal{V}_p,\ j \in \mathcal{V}_q\right)$ avec $p \neq q$, la nouvelle valeur $\omega_{i,j}(t+1)$ à SCN_q qui mettra à jour la partie inter-blocs si nécessaire. Après ces échanges, tous attendent une barrière. D'un point de vue global, la mise à jour $\omega(t) \mapsto \omega(t+1)$ a bien été calculée selon une étape unique $\mathrm{O}(n^2)$ logiquement, mais physiquement $\mathrm{O}(1)$ par blocs SCN_p.

5.3.3.2. Approche Asynchrone vs. Synchrone pour la Mise à Jour des Liens Inter-sous-SCN

Dans le cadre d'un **SCN** (*Synergistic Connection Network*) réparti sur plusieurs nœuds ou machines, la gestion de la mise à jour des pondérations $\omega_{i,j}$ reliant des entités appartenant à différents sous-ensembles $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$ est un enjeu essentiel.

Chaque nœud, désigné par SCN_p, est responsable d'une portion locale de la matrice des pondérations, notée $\omega^{(p)}$, qui englobe les **liens intra-blocs** pour les indices $(i,j) \in \mathcal{V}_p \times \mathcal{V}_p$.

Cependant, la gestion des **liens inter-blocs**, reliant des entités situées sur des **nœuds distincts**, nécessite une coordination spécifique. Deux grandes approches peuvent être adoptées :

- Une **synchronisation stricte** basée sur des **rounds globaux** (*round-based*), où tous les nœuds avancent en même temps et partagent leurs mises à jour après chaque itération.
- Une **mise à jour asynchrone**, où chaque nœud évolue à son propre rythme en intégrant progressivement les mises à jour reçues des autres nœuds, au risque de gérer des états intermédiaires légèrement décalés dans le temps.

Dans la méthode **synchrone**, à chaque itération t, tous les nœuds du **SCN** disposent d'une **vision commune et figée** de l'état global des pondérations $\omega(t)$.

Chaque nœud SCN_p lit son état local $\omega^{(p)}(t)$ et reçoit par communication les valeurs des liaisons **inter-blocs**, c'est-à-dire celles pour lesquelles $i \in \mathcal{V}_p$ et $j \in \mathcal{V}_q$ avec $q \neq p$.

À partir de ces informations, chaque nœud effectue simultanément sa mise à jour locale en appliquant la règle générale de mise à jour du **SCN**, par exemple :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right]$$

Une fois ces calculs effectués, les nœuds **échangent les modifications pertinentes** afin de mettre à jour les liaisons **inter-blocs** correspondantes.

Une **barrière de synchronisation**, souvent implémentée via des opérations collectives telles que *MPI_Barrier* dans les environnements **MPI**, garantit que **tous les nœuds** terminent leur mise à jour avant de passer à l'itération suivante.

Cette approche, qui suit rigoureusement le schéma itératif $\omega(t+1) = F\left(\omega(t)\right)$ défini en **section 2.4.1.1**, permet d'appliquer les **outils théoriques classiques** d'analyse de **convergence** et de **stabilité**, puisque l'état global est évalué de manière **cohérente** à chaque **round**.

Cependant, cette synchronisation impose un **coût élevé**, en particulier dans des **systèmes distribués** ou **hétérogènes**, où la **latence de communication** peut ralentir l'ensemble du réseau si un nœud est en retard par rapport aux autres.

À l'opposé, dans la **mise à jour asynchrone**, chaque nœud évolue de manière autonome sans attendre la fin des calculs des autres.

Dans ce cadre, chaque nœud SCN_p maintient son propre **compteur d'itérations** et met à jour localement les pondérations $\omega_{i,j}$ pour $i \in \mathcal{V}_p$ en utilisant les **informations les plus récentes disponibles** concernant les liaisons **inter-blocs**. Ces informations peuvent provenir de communications précédentes et donc être **légèrement décalées dans le temps**.

ne mise à jour **asynchrone** peut être modélisée par :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S\left(i,j;\tilde{\omega}(t-\delta)\right) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right]$$

où $\tilde{\omega}(t-\delta)$ représente la version retardée des pondérations provenant d'un autre nœud, et δ est le **délai de communication**.

D'un point de vue **mathématique**, cette approche s'apparente à une **mise à jour de type Gauss-Seidel** ou **Gossip**. La **convergence** de la dynamique peut être garantie sous certaines conditions, notamment en imposant des contraintes sur la **contraction** et le **bornage des retards**, comme cela est étudié dans la littérature sur les systèmes distribués asynchrones.

Les **avantages** de cette approche résident dans sa **flexibilité**. Aucun nœud n'est contraint d'attendre la synchronisation de tous les autres, ce qui **améliore le débit global du système** et **le rend plus tolérant aux pannes** ou aux différences de performances entre les nœuds.

Cependant, la **complexité d'analyse** de la convergence **augmente**, car l'état global ω n'est plus instantanément cohérent. Il peut évoluer de manière **désynchronisée**, ce qui **requiert des techniques supplémentaires** pour contrôler **les oscillations** ou **les écarts temporels**.

Comparaison entre les deux approches

Cette comparaison met en évidence un **compromis fondamental**.

- Le mode **synchrone** assure une **cohérence globale** et **simplifie** l'analyse théorique de la dynamique d'auto-organisation, en restant **fidèle** à l'équation itérative centralisée $\omega(t+1) = F\left(\omega(t)\right)$ définie en **section 2.4.1.1**.

- Le mode **asynchrone** offre une meilleure **tolérance aux latences** et une **plus grande flexibilité** dans les environnements distribués, mais au prix d'une **complexité accrue** dans l'analyse de la convergence et la gestion des retards.

5.4. Module de Calcul de la Synergie

5.4.1. Séparation du Calcul de Synergie

La **fonction** $S(i,j)$ n'est pas toujours "une simple distance euclidienne" : elle peut être un **score** de similarité cosinus pour des embeddings, une **compatibilité** logique pour des entités symboliques, ou un **degré** de réussite commune en robotique… Mieux vaut donc **isoler** cette logique dans un **module dédié** plutôt que la noyer dans le code de mise à jour de ω.

5.4.1.1. Raisons : la Fonction $S(i,j)$ Dépend du Type d'Entités (Symbolique, Sub-Symbolique)

Le **calcul** de la fonction de **synergie** $S(i,j)$ dans un **Synergistic Connection Network** (*SCN*) est un élément central de la dynamique d'auto-organisation (chapitre 4). En pratique, les entités $\mathcal{E}_i$ peuvent prendre des formes très variées. Certaines sont **sub-symboliques**, d'autres **symboliques**, et certaines peuvent être **hybrides** ou appartenir à des catégories plus spécialisées. Cette diversité justifie la séparation du **calcul** de $S(i,j)$ dans un **module dédié**, plutôt que de l'intégrer de manière monolithique dans le **noyau du SCN**.

Un **SCN** doit souvent traiter à la fois des **entités sub-symboliques**, comme des **vecteurs d'embeddings** représentant des images ou des documents, et des **entités symboliques**, ancrées dans des **règles logiques** ou des **concepts ontologiques**.

Dans le cadre **sub-symbolique**, la synergie entre deux entités $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j$ est souvent exprimée sous forme de **distance** (euclidienne, Minkowski) ou de **similarité** (cosinus, noyau RBF), parfois transformée pour être normalisée sur un intervalle donné, comme $[0,1]$.

Dans le cadre **symbolique**, la synergie repose davantage sur des critères de **cohérence**. Elle peut être évaluée en fonction de la **quantité de conflits logiques**, de l'**alignement conceptuel** ou des **correspondances sémantiques**, conduisant à des formulations très différentes.

Associer ces deux visions dans une unique fonction S implique parfois une **combinaison** de plusieurs mesures, qu'elle soit **pondérée** ou **hybride**. Cette approche est plus facilement modélisable si le **Module de Synergie** est distinct du noyau du **SCN** et prend en charge la logique de calcul selon la nature des entités concernées $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j$.

Approche en ingénierie logicielle

D'un point de vue **architecture logicielle**, un modèle **monolithique** imposerait d'inscrire **tous les calculs de** S dans le **noyau du SCN**, ce qui rendrait l'ensemble **peu extensible**. L'introduction d'un **nouveau type d'entité**, qu'il s'agisse d'un **format sub-symbolique** différent ou d'une **nouvelle sémantique symbolique**, nécessiterait des modifications au cœur du système.

En **séparant le Module de Synergie**, on offre un **point d'entrée unique** pour intégrer un **nouveau schéma de calcul** S. Chaque **type d'entité** peut ainsi posséder sa propre **méthode de similarité**, ou être intégré dans un **modèle composite** s'il s'agit d'une entité hybride.

Cette approche respecte la **modularisation** exposée dans le chapitre 5. Elle encapsule les dépendances et permet **d'évoluer** ou de **substituer** un mode de calcul S sans affecter directement la mise à jour des pondérations $\omega_{i,j}$ dans le **SCN**.

Formalisation mathématique

D'un point de vue **mathématique**, tenter d'unifier toutes les entités sous un unique calcul S peut être complexe, notamment lorsque l'on mélange des représentations **sub-symboliques** et **symboliques**. En dissociant ce **Module de Synergie**, on obtient un **composant indépendant** que l'on peut **analyser et tester isolément**.

Cela simplifie l'examen des **propriétés de** S, telles que :

- La **borne des valeurs** (ex. $S \in [0,1]$ ou $\mathbb{R}^+$)
- La **symétrie** ou l'**asymétrie** de S
- Son caractère **pseudo-métrique**
- Ses **conditions de contraction**, favorisant la convergence

L'approche **modulaire** renforce cette flexibilité. Le **noyau du SCN** ne s'interroge pas sur la **nature exacte** de S. Il suppose uniquement qu'à chaque **itération**, pour toute paire (i, j), le **Module de Synergie** retourne un score cohérent dans l'intervalle requis **(**$\mathbb{R}^+$**,** $[0,1]$**, etc.)**.

5.4.1.2. Maintenabilité et Extensibilité

La **séparation** du calcul de la fonction $S(i, j)$ dans un module dédié ne s'explique pas seulement par la différence des types d'entités (symboliques vs. sub-symboliques) mentionnée en (5.4.1.1). Un second motif repose sur la **maintenabilité** et la **flexibilité** à long terme, tant du point de vue mathématique que du point de vue de l'ingénierie logicielle. Le fait d'extraire la logique de calcul de S du cœur du Synergistic Connection Network (*SCN*) offre des garanties de facilité d'évolution, de tests et de documentation, assurant que l'ajout ou la modification de la fonction S n'entraîne pas un remaniement lourd de la dynamique globale.

A. Maintenabilité

Une première dimension concerne la **probabilité d'évolution** de la fonction de **synergie** $S(i, j)$ au cours de la vie d'un projet ou d'une plate-forme de recherche.

Dans de nombreux contextes, la manière de mesurer la **cohérence** entre deux entités $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j$ n'est pas figée. On peut découvrir de **nouvelles mesures** mieux adaptées, vouloir **combiner plusieurs critères** (sub-symbolique, information mutuelle, co-occurrence symbolique) ou encore ajuster la **pondération** en fonction d'un **contexte externe**.

Si le code responsable du calcul de S est **dispersé** dans les routines de mise à jour $\omega_{i,j}(t+1)$, chaque modification risque d'avoir des **répercussions multiples** dans un ensemble de **classes** ou de **fichiers**, ce qui **augmente la probabilité de régressions ou d'incohérences**.

En **séparant** la logique dans un **module de synergie**, la mise à jour $\omega_{i,j}(t+1)$ (développée au **chapitre 4**) se limite à appeler une **fonction** ou une **interface** de type ***S(i, j)***.

Les opérations internes à la dynamique, comme le calcul du terme $\eta\left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}\right]$, n'ont pas besoin de connaître les **détails d'implémentation** de la sous-routine évaluant la **similarité** ou la **compatibilité** entre entités.

Cette approche simplifie la **maintenance**. Si S doit être **enrichi**, **remplacé** ou **paramétré plus finement**, seule la logique du **module de synergie** est modifiée.

Sur le plan des **tests unitaires**, cette modularisation permet de **vérifier indépendamment** que le **module de synergie** génère les **scores attendus** selon différents scénarios, sans nécessiter le déploiement complet du **SCN** (grande matrice ω, inhibition, etc.).

Un **correctif** sur la fonction S n'affecte pas les autres parties du code, garantissant ainsi la **stabilité globale** du système.

B. Extensibilité

Une seconde dimension concerne l'**extensibilité** du système. Un **SCN** doit être capable d'absorber de **nouveaux** types d'entités ou de **nouvelles** formules de synergie sans nécessiter de modifications profondes dans son architecture.

Un **SCN** peut initialement manipuler des **entités sub-symboliques** vectorielles, comme des **embeddings d'images**, puis évoluer en intégrant des **entités purement symboliques** ou des **entités hybrides** combinant plusieurs représentations.

Si la logique de calcul de S reste **centralisée**, l'ajout d'un **nouveau type d'entité** exigerait des modifications dans plusieurs parties du **code source**.

En revanche, une **approche modulaire** permet d'adopter un **registre** ou une **interface polymorphe**, où **chaque type d'entité** ou **chaque couplage de types** (sub-symbolique vs. symbolique) peut **déclarer** ses propres **routines de calcul** $S(i,j)$.

L'**architecture du SCN** sollicite alors ce **module** de manière **unifiée**, évitant ainsi des modifications lourdes dans le **noyau** du système.

Si l'on souhaite **fusionner plusieurs approches**, par exemple en définissant une **synergie hybride** sous la forme

$$S_{\text{hybrid}}(i,j) = \alpha\, S_{\text{sub}}(i,j) + (1-\alpha)\, S_{\text{sym}}(i,j),$$

on peut créer un **module hybride** qui, lors du calcul, appelle **séparément** le **module sub-symbolique** et le **module symbolique**, puis **combine** leurs scores en fonction du paramètre α.

Cette **structuration modulaire** offre une **flexibilité maximale**, permettant de **tester et ajuster** la pondération α sans impacter directement la dynamique $\omega_{i,j}(t+1)$.

Cette approche s'inscrit dans la logique **"ouvert/fermé"** en **ingénierie logicielle**.

Le système reste **ouvert** à l'ajout de **nouvelles implémentations** de S, sans nécessiter de **modifications du noyau du SCN**. Celui-ci se contente d'**invoquer dynamiquement** le module **défini par l'utilisateur** ou **l'équipe de recherche**, garantissant ainsi une **évolutivité fluide** du système.

C. Vue Globale Math-Implémentation

Sur le plan **mathématique**, considérer la fonction S comme un **module isolé** clarifie l'analyse de la mise à jour $\omega_{i,j}(t+1)$.

On peut poser comme **contrat** que $S(i,j) \in [0,1]$ ou $\mathbb{R}^+$, éventuellement borné par **1**. La dynamique du **SCN** repose ensuite sur une règle de mise à jour, typiquement de la forme

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \cdots$$

Les **propriétés** de **convergence**, **stabilité** ou **contraction**, étudiées dans le **chapitre 4**, dépendent alors des **hypothèses imposées à** S (ex. **Lipschitz**, **monotonie**, etc.), sans nécessiter de **connaître les détails internes** de son calcul.

Une **entité purement symbolique** ou un **embedding vectoriel** peut ainsi satisfaire les mêmes **contraintes mathématiques**, à condition que **le score de synergie respecte l'API** du module.

Sur le plan **implémentation**, cette approche implique de doter le **Module Synergie** d'une **interface explicite**, par exemple :

```
double synergy(int i, int j);
```

ou d'un **mécanisme polymorphe** permettant d'adapter le calcul en fonction de la nature des entités.

Le **Noyau** du **SCN ne se préoccupe pas** de la manière dont deux entités sont comparées. Il se contente de demander : **"donnez-moi un score de synergie"**.

Le **Module Synergie**, quant à lui, assure :

- Le **dispatch** et la prise de décision en fonction du type des entités $\mathcal{E}_i$ (sub-symbolique, symbolique, hybride).
- La **gestion de l'évolutivité**, en permettant de **substituer** une nouvelle mesure ou de **combiner plusieurs méthodes** de calcul sans modifier la structure du **SCN**.

5.4.2. Méthodes d'Implémentation

Au-delà du **principe** de séparer la logique de la synergie S (5.4.1), on doit choisir **comment** l'implémenter concrètement dans le code. Deux grandes approches se distinguent : l'**Approche Polymorphique** (5.4.2.1) et le **Module Central** (5.4.2.2). La première mise en œuvre est fondée sur l'idée que chaque **entité** sait elle-même évaluer la synergie avec une autre, tandis que la seconde recourt à un **orchestrateur** unique identifiant les types et appliquant la bonne fonction S.

5.4.2.1. Approche Polymorphique : chaque entité sait calculer la synergie avec une autre

Lorsqu'un **Synergistic Connection Network** (SCN) doit intégrer des entités de types hétérogènes – par exemple, des entités **sub-symboliques** issues d'embeddings, des entités **symboliques** définies par des règles, ou encore des entités hybrides qui combinent ces deux aspects – il apparaît judicieux d'adopter une approche **polymorphique** dans la conception logicielle. Cette approche consiste à doter chaque entité de la capacité de calculer elle-même sa **synergie** avec une autre entité, c'est-à-dire de déterminer la valeur de $S(i,j)$ en fonction de sa propre représentation et de celle de son interlocuteur.

L'idée fondamentale repose sur la définition d'une **classe de base** ou d'une **interface** commune, que l'on peut nommer par exemple *Entity*. Cette classe déclare une méthode virtuelle (ou abstraite) destinée à être surchargée par chaque sous-classe spécifique. En notation mathématique, on souhaite qu'une entité $\mathcal{E}_i$ dispose d'une fonction

$$S(i,j) = f(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j),$$

qui exprime la **similarité** ou la **compatibilité** entre $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$. En termes de programmation orientée objet, on peut définir :

```
class Entity { virtual double synergyWith(const Entity& other) const = 0;  ... };
```

Chaque type d'entité hérite de cette classe et fournit sa propre implémentation de la méthode *synergyWith*. Par exemple, une **SubEntity** peut être définie pour des données sub-symboliques, stockant un vecteur $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$. Sa méthode de calcul de synergie peut reposer sur la **similarité cosinus**, telle que :

$$S_{\text{sub}}(i,j) = \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j}{\| \mathbf{x}_i \| \, \| \mathbf{x}_j \|}.$$

En revanche, une **SymEntity** représentant une entité symbolique, caractérisée par un ensemble de règles $\mathcal{R}_i$, peut implémenter la méthode *synergyWith* en fonction d'un indice de compatibilité logique, par exemple :

$$S_{\text{sym}}(i,j) = 1 - \frac{\text{nbContradictions}(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_j)}{\text{nbTotal}(\mathcal{R}_i \cup \mathcal{R}_j)}.$$

Dans le cas où une entité sub-symbolique doit être comparée à une entité symbolique, il est alors possible de définir une fonction hybride $S_{\text{hybrid}}(i,j)$ qui combine de manière pondérée les deux critères, par exemple par :

$$S_{\text{hybrid}}(i,j) = \alpha \, S_{\text{sub}}(i,j) + (1-\alpha) \, S_{\text{sym}}(i,j),$$

avec $\alpha \in [0,1]$ déterminant l'importance relative de la composante sub-symbolique par rapport à la composante symbolique.

Pour que la méthode *synergyWith* prenne correctement en compte non seulement le type de l'objet courant (celui qui appelle la méthode) mais également le type de l'objet passé en argument, on peut recourir à des techniques de **double dispatch** ou au *Visitor pattern*. Ainsi, si l'on a deux entités de types différents, par exemple une SubEntity et une SymEntity, l'appel

```
double s = e1->synergyWith(*e2);
```

se résoudra dynamiquement en invoquant la méthode adaptée à la combinaison des types, par exemple en appelant *e2.synergyWithSubEntity(*e1)* ou une méthode équivalente, de façon à ce que le calcul de $S(i,j)$ soit correctement orienté.

Cette approche présente de nombreux atouts sur le plan de la **cohésion** et de l'**extensibilité**. Chaque classe d'entité intègre la connaissance de sa propre représentation et de la méthode la plus pertinente pour mesurer sa synergie avec une autre entité, ce qui garantit une haute **cohérence** entre la structure interne d'une entité et la manière dont elle interagit. De plus, l'**extensibilité** est facilitée puisque l'ajout d'un nouveau type d'entité ne nécessite que la création d'une nouvelle classe dérivée implémentant *synergyWith*. En revanche, il faut parfois recourir à des mécanismes de **double dispatch** pour gérer les interactions entre types hétérogènes, ce qui peut introduire une complexité supplémentaire au niveau du design.

Voici un extrait de code illustratif en C++ :

```
// Interface de base pour une entité
class Entity {
public:
    virtual ~Entity() {}
    virtual double synergyWith(const Entity &other) const = 0;
};

// Sous-classe pour une entité sub-symbolique
class SubEntity : public Entity {
public:
    std::vector<double> x; // Représentation par un vecteur

    SubEntity(const std::vector<double>& vec) : x(vec) {}

    // Méthode pour calculer la similarité cosinus
    virtual double synergyWith(const Entity &other) const override {
        const SubEntity* subOther = dynamic_cast<const SubEntity*>(&other);
        if(subOther) {
            return cosineSimilarity(this->x, subOther->x);
        }
        // Cas hybride ou incompatibilité : retourner une valeur par défaut ou calculer autrement
        return 0.0;
    }
};

// Sous-classe pour une entité symbolique
class SymEntity : public Entity {
public:
    std::set<std::string> rules; // Ensemble de règles ou axiomes

    SymEntity(const std::set<std::string>& r) : rules(r) {}

    // Méthode pour calculer la compatibilité logique
    virtual double synergyWith(const Entity &other) const override {
        const SymEntity* symOther = dynamic_cast<const SymEntity*>(&other);
        if(symOther) {
            return computeLogicalCompatibility(this->rules, symOther->rules);
        }
        return 0.0;
    }
};
```

Dans cet exemple, la fonction *cosineSimilarity* calcule la similarité entre deux vecteurs, tandis que *computeLogicalCompatibility* évalue la compatibilité entre deux ensembles de règles. On peut bien entendu complexifier ces fonctions pour tenir compte de schémas hybrides ou de pondérations adaptatives.

De même, en Python, on peut définir une structure de classes pour adopter une approche polymorphique. Voici un exemple succinct :

```
import numpy as np
from abc import ABC, abstractmethod

class Entity(ABC):
    @abstractmethod
```

```
    def synergy_with(self, other) -> float:
        pass

class SubEntity(Entity):
    def __init__(self, x: np.ndarray):
        self.x = x  # vecteur d'embedding

    def synergy_with(self, other: Entity) -> float:
        if isinstance(other, SubEntity):
            return np.dot(self.x, other.x) / (np.linalg.norm(self.x) * np.linalg.norm(other.x))
        # Pour le cas hybride, on peut définir un score fixe ou une fonction mixte
        return 0.0

class SymEntity(Entity):
    def __init__(self, rules: set):
        self.rules = rules

    def synergy_with(self, other: Entity) -> float:
        if isinstance(other, SymEntity):
            nb_total = len(self.rules.union(other.rules))
            if nb_total == 0:
                return 1.0
            nb_common = len(self.rules.intersection(other.rules))
            # On définit la compatibilité comme le rapport d'intersection sur union
            return nb_common / nb_total
        return 0.0

# Exemple d'utilisation
entity1 = SubEntity(np.array([1.0, 0.0, 0.0]))
entity2 = SubEntity(np.array([0.8, 0.1, 0.0]))
entity3 = SymEntity({"rule1", "rule2", "rule3"})
entity4 = SymEntity({"rule2", "rule4"})

print("Synergie entre SubEntity:", entity1.synergy_with(entity2))
print("Synergie entre SymEntity:", entity3.synergy_with(entity4))
```

Ici, la méthode *synergy_with* est définie de manière polymorphique dans chacune des classes dérivées, et permet de calculer le score de synergie selon la nature de l'entité. Dans un SCN complet, la boucle de mise à jour du réseau se contenterait d'appeler cette méthode pour chaque paire d'entités, sans avoir à connaître les détails internes de leur représentation.

5.4.2.2. Module Central : un orchestrateur identifie les types et applique la bonne fonction S

Dans un **Synergistic Connection Network (SCN)**, la capacité à quantifier la **synergie** entre deux entités $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$ est cruciale pour la mise à jour des pondérations $\omega_{i,j}$. Lorsque les entités proviennent de domaines hétérogènes – qu'il s'agisse de représentations **sub-symboliques**, **symboliques** ou **hybrides** – la logique de calcul de la synergie ne peut plus être implémentée de manière éparse dans chaque classe. Au lieu de cela, une approche centralisée est envisagée afin de regrouper l'ensemble des règles de calcul dans un **module central** qui, tel un orchestrateur, identifie les types d'entités et applique la fonction S appropriée pour chaque

paire. Nous développerons ici le principe de cette solution, ses avantages théoriques et pratiques, puis nous illustrerons le concept par un exemple de code en Python.

A. Principe d'un Orchestrateur Central

L'idée fondamentale consiste à dissocier la **logique de calcul de la synergie** des classes d'entités elles-mêmes. Plutôt que de faire appel à un polymorphisme distribué – où chaque entité doit implémenter une méthode de comparaison prenant en compte toutes les combinaisons de types (ce qui conduit souvent à une complexité de *double dispatch*) – le SCN intègre un **Module Central**, ici dénommé *SynergyOrchestrator*. Ce module agit comme une table de correspondance, en associant à chaque couple de types d'entités $\left(\text{type}_i, \text{type}_j\right)$ une fonction spécifique de calcul de la synergie. Autrement dit, pour des entités $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$, le module central procède ainsi :

$$S(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) = f_{\left(\text{type}_i, \text{type}_j\right)}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j),$$

où $f_{\left(\text{type}_i, \text{type}_j\right)}$ désigne la fonction adéquate pour traiter la combinaison des types. Par exemple, si $\mathcal{E}_i$ est une **SubEntity** et $\mathcal{E}_j$ une **SymEntity**, la fonction $f_{(\text{Sub,Sym})}$ sera appelée pour renvoyer un score, qui pourra être défini, dans un cas simple, comme une combinaison pondérée des scores sub-symboliques et symboliques :

$$S_{\text{hybrid}}(i,j) = \alpha\, S_{\text{sub}}(i,j) + (1-\alpha)\, S_{\text{sym}}(i,j),$$

avec $\alpha \in [0,1]$. Le rôle du *SynergyOrchestrator* est donc de recevoir les identifiants de type fournis par chaque entité, de consulter une table de correspondance interne et de déléguer le calcul à la fonction adéquate.

B. Avantages de la Centralisation de la Logique de Synergie

La **centralisation** de la logique de calcul présente plusieurs **avantages majeurs**.

La **cohésion** du code est améliorée en regroupant **toutes les règles de calcul** dans un même **module**. Cela simplifie la **maintenance** et facilite la **compréhension** du système.

En cas d'évolution du modèle ou d'ajout d'un **nouveau type d'entité**, il suffit **d'étendre la table de correspondance** du **module central**, plutôt que de modifier le code dans **chaque classe** ou dans plusieurs fichiers dispersés.

Cette approche favorise une **extensibilité fluide**. Par exemple, pour intégrer un **nouveau type d'entité**, tel que **"HybridEntity"**, il suffit d'implémenter les **fonctions spécifiques**

$$f_{(\text{Hybrid},\cdot)} \quad \text{et} \quad f_{(\cdot,\text{Hybrid})}$$

directement dans le **module central**.

Cette structure permet d'ajouter **de nouvelles définitions** de synergie **sans impacter** la logique de mise à jour des pondérations $\omega_{i,j}$ dans le **SCN**.

En séparant les **données** (contenues dans les entités) et la **logique de comparaison** (gérée par le **module central**), on obtient une **architecture plus *data-centric***.

Sur le plan **mathématique**, cela permet de considérer la fonction S comme un **opérateur unique** paramétré par les **attributs des entités**, garantissant ainsi une **cohérence globale** et une **meilleure flexibilité** dans l'évolution du modèle.

C. Implémentation en Python

Pour illustrer ce concept dans un environnement de prototypage rapide, considérons un exemple en Python qui met en œuvre ce module central.

L'exemple suivant présente une version simplifiée où chaque entité expose un identifiant de type et des données internes. Une **SubEntity** utilise un **vecteur** comme représentation, tandis qu'une **SymEntity** repose sur un **ensemble de règles**.

Le module central assure un **dispatch** en fonction des types d'entités et appelle la fonction de calcul correspondante.

```
import numpy as np

# Définition de constantes pour les types d'entités
TYPE_SUB = "SubEntity"
TYPE_SYM = "SymEntity"

# Fonction de calcul de la similarité cosinus pour des vecteurs (pour SubEntity)
def calc_sub_sub(entity1, entity2):
    x1, x2 = entity1.data, entity2.data
    norm1, norm2 = np.linalg.norm(x1), np.linalg.norm(x2)
    if norm1 == 0 or norm2 == 0:
        return 0.0
    return np.dot(x1, x2) / (norm1 * norm2)

# Fonction de calcul de la compatibilité logique pour des ensembles de règles (pour SymEntity)
def calc_sym_sym(entity1, entity2):
    rules1, rules2 = entity1.data, entity2.data
    union_rules = rules1.union(rules2)
    if not union_rules:
        return 1.0  # Si aucun règle, considérer la compatibilité maximale
    common_rules = rules1.intersection(rules2)
    return len(common_rules) / len(union_rules)

# Fonction hybride pour le cas SubEntity vs SymEntity (ici, on retourne une valeur mixte)
def calc_sub_sym(entity1, entity2):
    # Par exemple, retourner 0.0 pour indiquer qu'on ne rapproche pas sub-symbolique et symbolique
    return 0.0

# Module central d'orchestration de la synergie
class SynergyOrchestrator:
    def __init__(self, alpha=0.5):
        self.alpha = alpha
        # Table de correspondance : (type1, type2) -> fonction de calcul
        self.dispatch_table = {
            (TYPE_SUB, TYPE_SUB): calc_sub_sub,
            (TYPE_SYM, TYPE_SYM): calc_sym_sym,
            (TYPE_SUB, TYPE_SYM): calc_sub_sym,
            (TYPE_SYM, TYPE_SUB): lambda e1, e2: calc_sub_sym(e2, e1)
        }
```

```
    def compute_synergy(self, entity1, entity2):
        type1 = entity1.get_type()
        type2 = entity2.get_type()
        key = (type1, type2)
        if key in self.dispatch_table:
            return self.dispatch_table[key](entity1, entity2)
        else:
            # Cas par défaut
            return 0.0

# Classes d'entités utilisant une approche minimaliste
class Entity:
    def __init__(self, entity_type, data):
        self.entity_type = entity_type
        self.data = data  # Peut être un vecteur (np.array) ou un ensemble de règles (set)

    def get_type(self):
        return self.entity_type

# Exemple d'entités sub-symboliques et symboliques
sub_entity1 = Entity(TYPE_SUB, np.array([1.0, 0.0, 0.0]))
sub_entity2 = Entity(TYPE_SUB, np.array([0.8, 0.1, 0.0]))
sym_entity1 = Entity(TYPE_SYM, {"rule1", "rule2", "rule3"})
sym_entity2 = Entity(TYPE_SYM, {"rule2", "rule4"})

# Création de l'orchestrateur de synergie
orchestrator = SynergyOrchestrator()

# Calcul des synergies pour différentes paires
synergy_ss = orchestrator.compute_synergy(sub_entity1, sub_entity2)
synergy_qq = orchestrator.compute_synergy(sym_entity1, sym_entity2)
synergy_hybrid = orchestrator.compute_synergy(sub_entity1, sym_entity1)

print("Synergie entre deux SubEntities :", synergy_ss)
print("Synergie entre deux SymEntities :", synergy_qq)
print("Synergie entre une SubEntity et une SymEntity :", synergy_hybrid)
```

Dans cet exemple, le **SynergyOrchestrator** utilise une table de dispatch pour déterminer quelle fonction de calcul appliquer en fonction des types des entités. Les entités elles-mêmes se contentent de stocker leurs données et de fournir leur identifiant de type via la méthode *get_type()*. Ainsi, l'appel à *orchestrator.compute_synergy(e1, e2)* renvoie le score de synergie approprié pour la paire $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

5.4.3. Gestion du Coût

Dans un **SCN** (Synergistic Connection Network), le calcul de la **synergie** $S(i,j)$ peut représenter un **gros poste** de dépense algorithmique, surtout lorsqu'on considère un nombre n potentiellement élevé d'entités $\mathcal{E}_i$. Il est donc impératif d'étudier en détail **comment** évaluer ces synergies, et **à quel rythme** on doit les recalculer. Cette section (5.4.3) s'intéresse à la **gestion du coût** d'un tel calcul, d'abord en constatant qu'un schéma naïf revient à un $O(n^2)$ (5.4.3.1), puis en exposant des **optimisations** (5.4.3.2) visant à réduire ou partiellement approximer ces évaluations.

5.4.3.1. Calcul $O(n^2)$ si on évalue $S(i,j)$ pour toutes les paires

Un moyen direct et souvent intuitif pour obtenir la fonction de synergie $S(i,j)$ dans un Synergistic Connection Network consiste à la calculer de manière exhaustive, c'est-à-dire à parcourir toutes les paires (i,j) avec $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Cette approche repose sur la formule

$$S(i,j) \;=\; \mathcal{F}\Big(\mathbf{data}(\mathcal{E}_i),\ \mathbf{data}\big(\mathcal{E}_j\big)\Big),$$

où $\mathbf{data}(\mathcal{E}_i)$ représente la représentation interne de l'entité $\mathcal{E}_i$. Sur le plan algorithmique, on se limite alors à une double boucle :

$$\text{for } i = 1 \dots n \qquad \text{for } j = 1 \dots n \quad S[i,j] \;=\; \text{calcSynergy}\big(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j\big).$$

Si l'on exécute cette opération à chaque itération du SCN (par exemple pour mettre à jour la matrice $\omega(t+1)$ en fonction de la nouvelle synergie S), le coût total devient $O(T \times n^2)$ pour T itérations. Cette section examine dans le détail les conséquences de ce choix et les raisons qui poussent, en pratique, à le tempérer ou à l'optimiser.

A. Justification et intérêt mathématique

L'exhaustivité du calcul de $S(i,j)$ revêt une certaine élégance théorique. Elle couvre la totalité des paires d'entités, évitant ainsi de négliger d'éventuelles relations synergiques faibles mais susceptibles de s'amplifier au cours de la dynamique.

Si la fonction S est simple à évaluer, comme une similarité cosinus entre vecteurs en dimension modeste, le coût unitaire est proche de $O(d)$ et le total en $O(d\,n^2)$ peut demeurer acceptable tant que n n'est pas trop grand.

Il existe également une grande transparence dans cette méthode. On n'a besoin ni de structures complexes comme une indexation ou des arbres k-d, ni de stratégies pour exclure certaines paires (i,j). On se contente de remplir ou de rafraîchir une matrice S de dimension $n \times n$.

La mise à jour $\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \cdots$ peut ainsi s'appuyer en toute simplicité sur $S(i,j)$ pour n'importe quels i,j, sans hypothèses de sparsité ou de filtrage.

B. Limites en mémoire et en temps

Si n prend des valeurs importantes (par exemple $n \gtrsim 10^5$), la structure $S[i,j]$ devient de taille $O(n^2)$, ce qui peut dépasser les capacités mémoire d'une machine standard. Même pour un n de l'ordre de 10^4, on atteint une matrice de 100 millions de valeurs, ce qui n'est pas impossible, mais déjà conséquent. À chaque itération du SCN, parcourir la totalité de ces entrées pour recalculer S et en dériver $\omega_{i,j}(t+1)$ s'approche d'un milliard d'opérations, qu'il faut en outre répéter T fois si l'on veut un SCN avec T itérations. Le coût asymptotique $O(T\,n^2)$ se heurte rapidement à des barrières pratiques lorsque n franchit la dizaine de milliers ou plus.

Au plan numérique, l'hypothèse $O(1)$ pour chaque calcul $S(i,j)$ peut se révéler trompeuse si la dimension des vecteurs est élevée, ou si S implique une logique plus complexe (ex. compatibilité symbolique examinant des structures de règles). On peut alors se retrouver avec $O(T \times n^2 \times \alpha)$, où α traduit le coût unitaire de la fonction S.

C. Dynamique du SCN et réactualisation de S

Une question se pose ensuite sur la nécessité de recalculer $S(i,j)$ à chaque itération ou s'il suffit de le faire occasionnellement.

Si les entités $\mathcal{E}_i$ sont stationnaires et que leur contenu ne change pas, il est possible de fixer $S(i,j)$ une fois pour toutes au début et de le réutiliser dans les itérations suivantes. Le coût $O(n^2)$ est alors limité à l'initialisation.

En revanche, dans un cadre plus évolutif où les entités sont modifiées ou soumises à un flux de données, S peut fluctuer dans le temps, imposant une réévaluation fréquente, voire continue.

Cette réévaluation coûteuse s'ajoute alors au schéma de mise à jour $\omega_{i,j}(t+1) = \cdots$. Sur le plan purement mathématique, un **SCN** peut être décrit comme un système d'équations couplées, mais une implémentation en $O(n^2)$ par itération devient rapidement irréaliste à grande échelle.

Cela motive une réflexion sur des **optimisations** qui réduisent le nombre de paires (i,j) à traiter ou qui exploitent des structures plus sélectives (chapitre 5.4.3.2).

D. Architecture logicielle et partition

Si, malgré tout, on choisit le calcul exhaustif S en $O(n^2)$, il est intéressant de se demander comment l'**architecture** logicielle (chap. 5.2.3) peut l'aider à gagner en efficacité. Un partitionnement des entités en sous-blocs, accompagné d'un protocole de communication (synchrone ou asynchrone), peut répartir la charge de calcul S sur plusieurs nœuds. On ne résout cependant pas le facteur $O(n^2)$ total, on ne fait que le distribuer (et éventuellement le paralléliser).

Par ailleurs, la décision de stocker S de façon dense sous forme d'une **matrice de taille** $n \times n$ soulève une problématique de **persistance** (5.3.1).

Pour un **grand** n, l'espace disque ou mémoire nécessaire dépasse souvent les capacités disponibles, sauf à disposer d'une **infrastructure de calcul massif**.

Certains systèmes permettent d'exploiter des **GPU** ou des **clusters HPC**, mais la multiplication des **transferts de données** peut engendrer des **goulots d'étranglement** importants, réduisant ainsi l'efficacité globale du calcul.

5.4.3.2. Optimisations : k-NN, ϵ-radius, indexation spatiale

Le calcul exhaustif $S(i,j)$ en $O(n^2)$ (présenté en 5.4.3.1) devient rapidement prohibitif pour de grands n.

Pour y remédier, il est courant de **cibler** le calcul sur un **sous-ensemble de paires** (i,j) jugées plus pertinentes ou d'accélérer la recherche de voisinages.

Plusieurs stratégies peuvent être mises en place. Il est possible d'exploiter la notion de **"k plus proches voisins"** (k-**NN**), d'utiliser un **"ϵ-radius"** pour ignorer les entités trop distantes, ou encore de recourir à des **structures d'indexation spatiale** comme les **k-d trees**, les **vantage-point trees** ou les **méthodes d'approximate nearest neighbors (ANN)**.

D'un point de vue **mathématique** et **algorithmique**, ces solutions permettent soit de **réduire** le nombre de calculs $S(i,j)$, soit d'en **accélérer** l'identification, ouvrant ainsi la possibilité de sortir du cadre strict de la **complexité** $\mathrm{O}(n^2)$.

A. k-NN (k plus proches voisins)

Les techniques de **"k plus proches voisins"** consistent à restreindre la recherche de synergie $S(i,j)$ aux seuls j qui appartiennent au **top-k** de i, en termes de **proximité** ou de **similarité**.

Si la représentation $\mathbf{x}_i$ est un vecteur dans $\mathbb{R}^d$, une **distance** (euclidienne ou autre) peut servir de critère. Plutôt que de comparer $\mathbf{x}_i$ à toutes les $\mathbf{x}_j$, on se limite aux k **entités les plus similaires**, ce qui réduit considérablement la **complexité du calcul** tout en préservant les relations les plus pertinentes. En pratique, on détermine

$$\mathrm{kNN}(i) \;=\; \{\, j \mid \mathbf{x}_j \text{ est parmi les } k \text{ plus proches de } \mathbf{x}_i \,\}.$$

Le calcul effectif de la k-NN dans un espace vectoriel naïf reste $\mathrm{O}(n)$ par requête, menant à $\mathrm{O}(n^2)$ global pour tous les i. Cependant, on combine généralement cette idée avec des **structures d'index** plus avancées (cf. infra) ou des algorithmes d'**approximate nearest neighbors** (FAISS, Annoy, etc.), qui réduisent la complexité à $\mathrm{O}(n\log n)$ (ou un peu plus) en moyenne. On obtient alors un stockage final $\mathrm{O}(k\,n)$ pour la synergie, au lieu de $\mathrm{O}(n^2)$.

D'un point de vue mathématique, cette approche revient à nier la pertinence de la synergie au-delà de ces k voisins, hypothèse justifiée par une décroissance rapide de S ou une complémentarité faible en dehors du voisinage local. Dans le contexte d'un SCN (Synergistic Connection Network), cela recoupe la notion de "voisinage restreint" ou "parsimonie", évitant de consacrer des ressources à des comparaisons lointaines et souvent négligeables.

B. ϵ-radius : filtrer par distance

Une seconde famille de méthodes, souvent apparentée, repose sur la définition d'un **rayon** ϵ. On ne s'intéresse qu'aux entités $\mathcal{E}_j$ qui se trouvent à une distance inférieure à ϵ de $\mathbf{x}_i$ (selon un certain metric ou kernel). Cela fait sens si la synergie se base sur un *décroissement* rapide avec la distance :

$$S(i,j) \;=\; f\big(\|\,\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\,\|\big) \quad \text{avec } f(r) \approx 0 \text{ si } r > \epsilon.$$

Ainsi, pour chaque $\mathbf{x}_i$, une **recherche** est effectuée dans un rayon ϵ.

En mode naïf, cela reviendrait à tester toutes les $\mathbf{x}_j$, ce qui implique une **complexité** $\mathrm{O}(n)$ par entité et $\mathrm{O}(n^2)$ au total.

Pour éviter cette explosion de calculs, on utilise des **structures spécialisées** comme les **k-d trees** ou les **vantage-point trees**, ainsi que des algorithmes d'**indexation** permettant d'accélérer la **recherche par voisinage** (*range search*).

Le résultat est une **localité optimisée**. Si une entité $\mathbf{x}_j$ est trop éloignée, $S(i,j)$ n'est même pas calculé, ce qui réduit la charge computationnelle sans nuire à la qualité de la synergie.

Ce rayon ϵ est adapté selon le **domaine** et la **géométrie** (en robotique, en vision...). Sur un plan mathématique, on introduit un "**seuil**" d'influence spatiale. Dans un SCN, cela se traduit par :

$$\omega_{i,j}(t+1) = 0 \quad \text{si } \|\,\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\,\| > \epsilon,$$

et donc aucun calcul explicite de S pour ces paires.

C. Indexation spatiale

Afin de rendre efficaces les recherches “k plus proches voisins” ou “ϵ-radius”, on utilise des **structures d’indexation** dans l’espace :

- **k-d tree**, vantage-point tree, ball tree, R*-tree, etc. Dans un espace $\mathbb{R}^d$ de dimension modeste (<= 20–30), ces arbres réduisent le parcours moyen pour un range search ou un k-NN search, passant d’un $O(n)$ naïf à $O(n^{\alpha})$, $\alpha < 1$.

- **Approximate nearest neighbors (ANN)** si la dimension est plus grande, recourant à des solutions comme Faiss (Facebook AI Similarity Search), Annoy (Spotify), HNSW, etc. Elles ne donnent pas toujours *exactement* le top-k ou l’exact ϵ-voisinage, mais en pratique leur “faible erreur” suffit dans un SCN où l’on ne cherche pas la perfection.

Ces techniques, d’un point de vue mathématique, constituent une pré-organisation de l’espace $\mathbf{x}_i$, où l’on sait rapidement restreindre la recherche dans une zone d’intérêt ou un “cluster potentiel”. Sur le plan ingénierie, on construit l’index (qui peut se mettre à jour si les entités changent), puis on exécute des requêtes k-NN ou range à chaque besoin de calcul S. Cela ramène l’effort global parfois à $O(n\log n)$ ou $O(n^{1+\varepsilon})$, bien plus viable que $O(n^2)$.

D. Bénéfices et limites

Ces trois idées (k-NN, ϵ-radius, indexation spatiale) sont souvent **combinées** :

- On accepte une **localité**. La synergie S est considérée comme **non négligeable** uniquement dans un **voisinage restreint**, défini soit par un **rayon** ϵ, soit par une **frontière des k plus proches voisins**.

- Cela diminue drastiquement le **nombre** de paires (i, j) à évaluer, passant d’un potentiel $O(n^2)$ à un $O(n\,k)$ ou $O(n\log n)$ si l’indexation fonctionne bien.

- La limite est que cette hypothèse *peut* omettre certains liens si la synergie n’est pas strictement localisée en distance. Toutefois, pour de nombreux cadres sub-symboliques (embeddings, distances décroissantes), c’est parfaitement cohérent.

Sur un plan pratique, ces méthodes nécessitent une **mise à jour** ou une **reconstruction périodique** de l’index lorsque les entités évoluent ou que de nouvelles apparaissent. Ce processus engendre un certain surcoût, mais celui-ci reste généralement bien inférieur à un **balayage complet en** $O(n^2)$.

L’efficacité de ces techniques dépend également de la **dimension**. Un **k-d tree** peut perdre en performance lorsque d devient trop élevé, rendant la recherche moins efficace. Dans de tels cas, les algorithmes d’**approximate nearest neighbors** prennent le relais. Ils tolèrent une légère imprécision mais garantissent une grande rapidité pour identifier les **“meilleurs” voisins**, optimisant ainsi le compromis entre précision et performance.

5.5. Module de Mise à Jour ω et Inhibition/Contrôle

Dans l'architecture globale du **SCN**, on retrouve un **Module** spécifiquement dédié à la **mise à jour** des pondérations $\omega_{i,j}$. Ce module occupe une place centrale : il assure la transition $\omega(t) \to \omega(t+1)$ à chaque itération, en se basant sur la **synergie** $S(i,j)$ (chap. 5.4) et d'éventuels **mécanismes** de contrôle (inhibition, saturation, recuit stochastique, etc.). En ce sens, il concrétise la boucle fondamentale du Deep Synergy Learning (DSL) décrite en chapitre 4.

Dans cette section (5.5), nous commençons par rappeler les **règles** DSL les plus courantes pour la mise à jour ω (5.5.1), avant de détailler la manière dont on peut y introduire une **inhibition compétitive** (5.5.2), une **saturation** (5.5.3) et, si besoin, un **recuit simulé** ou un **bruit stochastique** (5.5.4). Sur le plan mathématique, chaque composante (inhibition, saturation, bruit) peut être vue comme un opérateur supplémentaire venant se superposer à la formule de base, modulant la convergence et la formation des clusters.

5.5.1. Rappels des Règles DSL

Les travaux exposés en chapitres 2 et 4 introduisent déjà la dynamique d'un SCN : on y voit comment $\omega_{i,j}$ se met à jour en fonction de $S(i,j)$, d'un taux d'apprentissage η et d'un paramètre de décroissance τ. Ici, nous nous concentrons sur l'**implémentation** et l'**intégration** de cette mise à jour dans le **Module** correspondant, tout en rappelant les éléments mathématiques essentiels.

5.5.1.1. Équation additive $\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right]$

Les **mises à jour additives** constituent l'une des formulations les plus intuitives et classiques dans l'analyse d'un **Synergistic Connection Network (SCN)**.

Le principe repose sur l'évolution de chaque **pondération** $\omega_{i,j}$ sous l'effet d'un **terme correctif** intégrant deux contributions opposées.

D'un côté, l'**attraction** induite par la **synergie** $S(i,j)$ tend à renforcer $\omega_{i,j}$. De l'autre, une **décroissance linéaire**, proportionnelle à $\omega_{i,j}$, agit en sens inverse et est contrôlée par le paramètre τ. Cette dualité assure que la mise à jour guide $\omega_{i,j}$ vers un **équilibre** ou **point fixe** donné par

$$\omega_{i,j}^{*} = \frac{S(i,j)}{\tau}.$$

A. Forme canonique et point fixe

La **formule** additive est donnée par

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big].$$

Ici, le **taux d'apprentissage** $\eta > 0$ détermine l'amplitude des corrections à chaque itération, tandis que $\tau > 0$ module la **force de décroissance** appliquée à $\omega_{i,j}(t)$. Au **point fixe** de cette dynamique, lorsque $\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) = \omega_{i,j}^{*}$, l'équation se simplifie en

$$\omega_{i,j}^{*} = \omega_{i,j}^{*} + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}^{*}\right] \quad \Rightarrow \quad S(i,j) = \tau\,\omega_{i,j}^{*}\,,$$

ce qui implique immédiatement

$$\omega_{i,j}^{*} = \frac{S(i,j)}{\tau}.$$

Cette solution montre que, dans des conditions idéales et en l'absence d'effets additionnels (tels que l'inhibition ou le bruit), la **pondération** tend vers un équilibre directement proportionnel à la **synergie** et inversement proportionnel à τ.

B. Interprétation mathématique et convergence

En réécrivant l'équation de mise à jour, on peut mettre en évidence un schéma linéaire :

$$\omega_{i,j}(t+1) = (1 - \eta\,\tau)\,\omega_{i,j}(t) + \eta\,S(i,j)\,.$$

Ce schéma se présente comme une combinaison linéaire entre l'**état** antérieur et un **terme forçant** la valeur vers $\eta\,S(i,j)$. Pour que le système converge de manière stable vers $\omega_{i,j}^{*} = \frac{S(i,j)}{\tau}$, il est impératif que la contraction imposée par le facteur $(1 - \eta\,\tau)$ soit suffisante, ce qui se traduit par la condition

$$\eta\,\tau < 2\,.$$

Sous cette hypothèse, l'écart $\left|\omega_{i,j}(t) - \frac{S(i,j)}{\tau}\right|$ décroît de façon exponentielle au fil des itérations, garantissant une **convergence stable**.

De plus, on peut associer à cette mise à jour une vision en termes de **pseudo-énergie**. En définissant une fonction potentielle

$$\mathcal{J}(\omega) = -\sum_{i,j} \omega_{i,j}\;S(i,j) + \frac{\tau}{2}\sum_{i,j} \omega_{i,j}^{2}\,,$$

la condition de premier ordre pour minimiser $\mathcal{J}$ (c'est-à-dire $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \omega_{i,j}} = 0$) conduit exactement à

$$-S(i,j) + \tau\,\omega_{i,j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{i,j} = \frac{S(i,j)}{\tau}.$$

Ainsi, le système peut être interprété comme effectuant une **descente de gradient** sur $\mathcal{J}$, orientant les mises à jour vers un minimum de cette fonction potentielle.

C. Implémentation dans un SCN

Du point de vue **algorithmique**, l'implémentation de la règle additive est souvent réalisée via une boucle itérative qui applique, pour chaque paire (i,j), la formule de mise à jour. Une approche recommandée consiste à utiliser un **double-buffer** afin d'éviter la modification de $\omega(t)$ en temps réel lors du calcul des mises à jour, garantissant ainsi la cohérence des valeurs lues pour l'ensemble des paires. L'architecture logicielle typique comporte un module de **mise à jour** chargé de parcourir la matrice de pondérations, de récupérer les valeurs de la **synergie** $S(i,j)$ à partir d'un module dédié, et d'appliquer la formule suivante :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right].$$

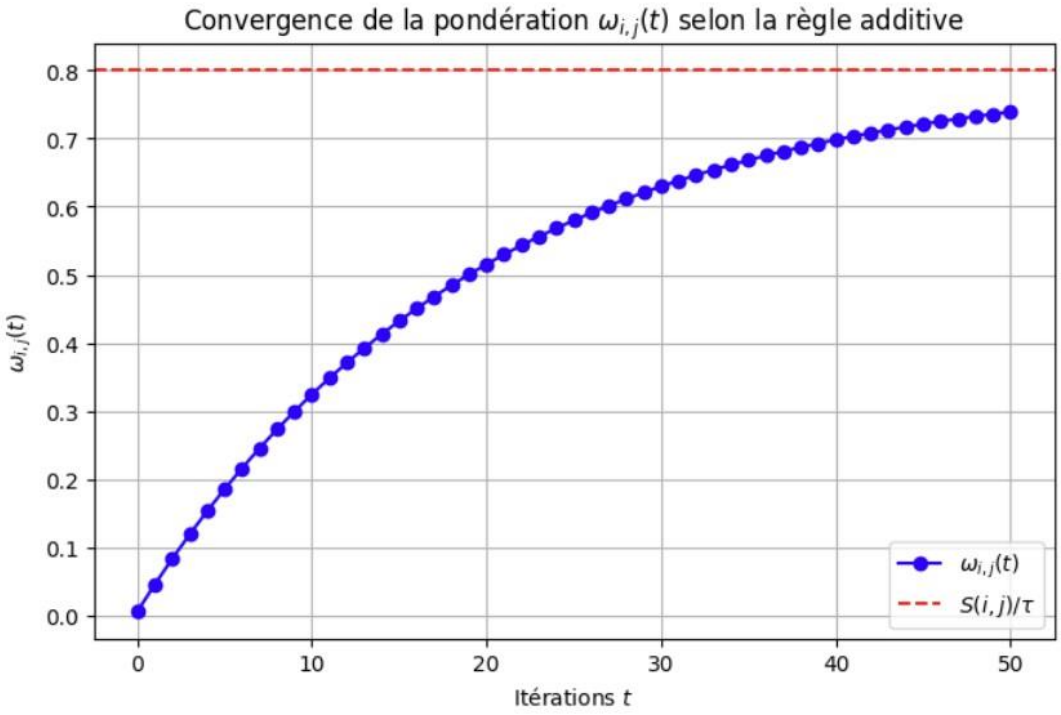
Ce module peut également intégrer des mécanismes complémentaires tels que l'**inhibition** (par exemple, un terme supplémentaire $-\gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}(t)$) ou des techniques de **clipping** pour maintenir les valeurs dans un intervalle souhaité.

D. Exemple de Comportement et Implémentation en Python

Pour illustrer concrètement la mise à jour additive, considérons un exemple simple en Python. Supposons que la synergie $S(i,j)$ soit donnée et stationnaire, et que l'on souhaite observer la convergence de la pondération $\omega_{i,j}(t)$ vers la valeur $\frac{S(i,j)}{\tau}$.

Voici une implémentation en Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètres de la mise à jour
eta = 0.05      # Taux d'apprentissage
tau = 1.0       # Facteur de décroissance
num_iterations = 50  # Nombre d'itérations

# Supposons que S(i,j) est donné et constant
# Pour cet exemple, nous considérons une paire d'entités pour laquelle S(i,j) = 0.8
S_ij = 0.8

# Initialisation de la pondération omega avec un bruit faible (près de 0)
omega = 0.0 + np.random.uniform(-0.01, 0.01)

# Liste pour stocker l'évolution de omega
omega_history = [omega]

# Boucle de mise à jour selon la règle additive
for t in range(num_iterations):
    # Calcul du delta selon la règle additive
    delta = eta * (S_ij - tau * omega)
    # Mise à jour de omega
    omega = omega + delta
    # Enregistrement de l'état courant
    omega_history.append(omega)

# Calcul de la valeur théorique de convergence (point fixe)
omega_fixed = S_ij / tau

# Affichage graphique de l'évolution de omega
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(omega_history, marker='o', linestyle='-', color='b', label=r'$\omega_{i,j}(t)$')
plt.axhline(y=omega_fixed, color='r', linestyle='--', label=r'$S(i,j)/\tau$')
plt.title("Convergence de la pondération $\omega_{i,j}(t)$ selon la règle additive")
plt.xlabel("Itérations $t$")
plt.ylabel(r"$\omega_{i,j}(t)$")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



Dans cet exemple, nous initialisons la pondération $\omega_{i,j}(0)$ avec une valeur proche de 0 et nous appliquons la mise à jour additive sur 50 itérations. Le graphique montre que $\omega_{i,j}(t)$ converge progressivement vers la valeur théorique $\omega_{i,j}^{*} = \frac{S(i,j)}{\tau} = 0.8$. Le schéma de mise à jour est exprimé mathématiquement par :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + 0.05\left(0.8 - 1.0\,\omega_{i,j}(t)\right).$$

La condition de stabilité, $\eta\,\tau < 2$, est vérifiée puisque $0.05 \times 1.0 = 0.05 < 2$, assurant ainsi une **convergence stable** sans oscillations.

E. Conclusion

La **règle additive**

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right]$$

représente une approche simple et efficace pour la mise à jour des pondérations dans un SCN. Elle conduit chaque $\omega_{i,j}$ à converger vers le point fixe $\frac{S(i,j)}{\tau}$ lorsque la synergie est stationnaire et que les paramètres η et τ sont choisis de manière appropriée. L'implémentation en Python illustre comment, à l'aide d'un **double-buffer** conceptuel et d'une boucle itérative, la dynamique mathématique se traduit en une routine algorithmique concrète. Ainsi, cette approche constitue le cœur du mécanisme d'auto-organisation dans un SCN, permettant de fusionner la théorie (descente de gradient et pseudo-énergie) avec la pratique (mise à jour itérative des pondérations) dans une infrastructure logicielle robuste.

5.5.1.2. Variantes (multiplicative, etc.)

Dans le cadre du **Synergistic Connection Network (SCN)**, la règle additive présentée en section 5.5.1.1 constitue l'approche la plus simple pour mettre à jour la matrice des

pondérations $\omega_{i,j}$. Cependant, d'autres formulations permettent de modifier la nature de la correction appliquée à ces pondérations. L'une des alternatives notoires est l'**approche multiplicative**, qui, au lieu d'ajouter un delta fixe à $\omega_{i,j}$, applique un facteur multiplicatif qui dépend de la valeur courante de $\omega_{i,j}$. Ce type de mise à jour est particulièrement pertinent dans les systèmes où l'on souhaite que les liens déjà forts se renforcent plus rapidement, tout en diminuant proportionnellement les liens faibles.

A. Formulation Multiplicative

La règle multiplicative de base se définit par l'équation :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t)\big[1 + \eta\,(S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t))\big].$$

Dans cette formulation, le terme $\eta\,\Big(S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\Big)$ représente la correction relative appliquée à $\omega_{i,j}(t)$. Si ce terme est positif, le facteur multiplicatif dépasse 1 et le lien se renforce de façon proportionnelle à sa valeur actuelle, favorisant ainsi une dynamique « effet boule de neige ». À l'inverse, lorsque le terme est négatif, le facteur est inférieur à 1 et $\omega_{i,j}(t)$ diminue.

L'intérêt de cette approche réside dans sa capacité à **amplifier** les liens déjà établis. En effet, un lien dont $\omega_{i,j}(t)$ est élevé bénéficiera d'une multiplication plus forte (à condition que $S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)$ reste positif), tandis qu'un lien faible aura du mal à sortir de l'état marginal, renforçant ainsi la polarisation des connexions au sein du SCN.

B. Comparaison avec l'Approche Additive

Dans la mise à jour **additive**, la modification est donnée par un incrément absolu :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\,\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big],$$

ce qui signifie que la correction appliquée ne dépend pas de la valeur courante de $\omega_{i,j}(t)$. Ce schéma induit un mouvement linéaire vers le point fixe $\omega_{i,j}^{*} = \frac{S(i,j)}{\tau}$.

Dans le cas multiplicatif, la correction est proportionnelle à $\omega_{i,j}(t)$:

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t)[1 + \eta\,\Delta(t)] \quad \text{avec} \quad \Delta(t) = S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t).$$

Ainsi, si $\omega_{i,j}(t)$ est déjà élevé, la mise à jour entraîne une augmentation plus importante, tandis qu'un lien faible sera mis à jour de manière moins significative. Cette **dynamique exponentielle** peut favoriser la formation de clusters très marqués, mais elle nécessite également une gestion rigoureuse des paramètres pour éviter une divergence (risque d'explosion) ou des oscillations.

C. Autres Variantes et Approches Hybrides

Outre l'approche purement multiplicative, il est envisageable de combiner les aspects additifs et multiplicatifs pour obtenir un schéma **semi-additif** ou **hybride**. Par exemple, une formulation hybride peut être exprimée par :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \alpha\,\omega_{i,j}(t)\,\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big] + \beta\,\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big],$$

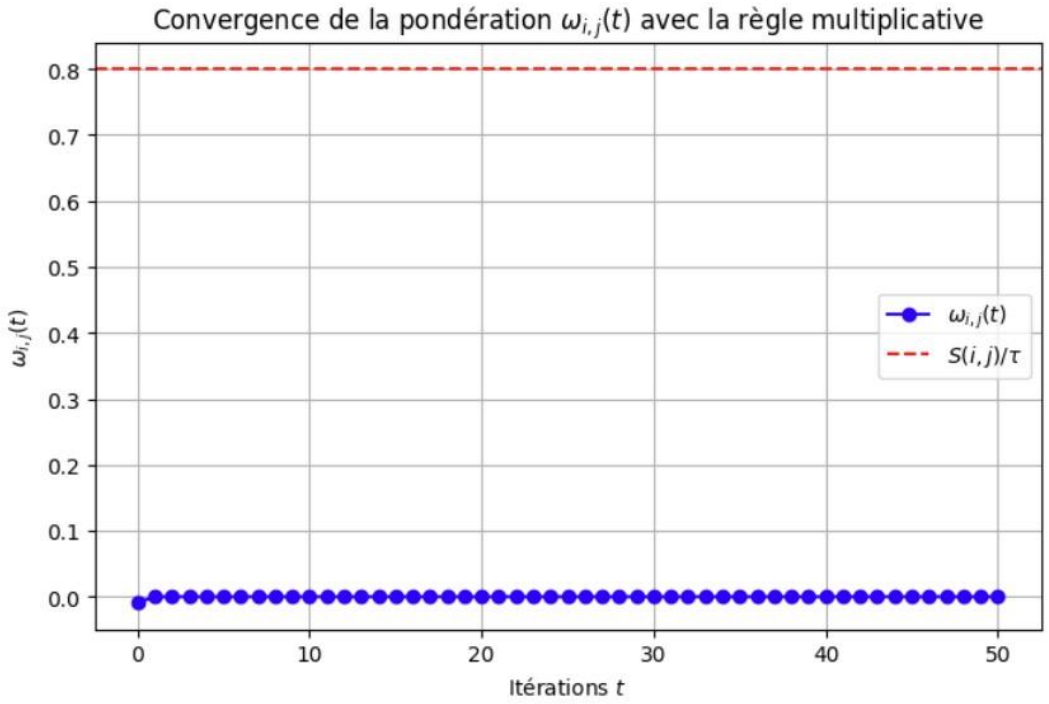
où α et β sont des coefficients permettant d'ajuster l'influence relative des termes multiplicatif et additif. Un tel schéma offre une flexibilité accrue, permettant de moduler finement la dynamique des mises à jour en fonction des besoins spécifiques du système.

D. Implémentation Python avec Visualisation

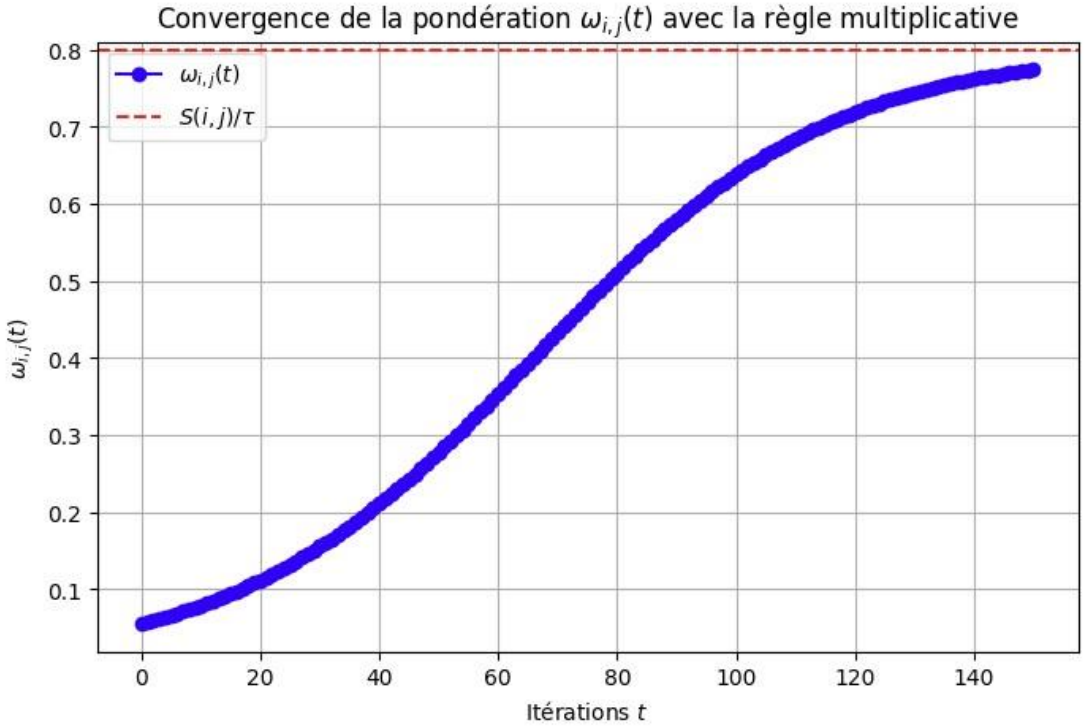
Pour illustrer la règle multiplicative, nous proposons ci-après une implémentation en Python qui simule l'évolution de la pondération $\omega_{i,j}$ pour une paire d'entités, puis affiche la courbe de convergence à l'aide de **matplotlib**.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètres de mise à jour
eta = 0.05      # Taux d'apprentissage
tau = 1.0       # Facteur de décroissance
num_iterations = 50  # Nombre d'itérations
S_ij = 0.8      # Synergie S(i,j) pour la paire considérée
omega_0 = 0.0
# Initialisation de la pondération omega avec un bruit faible autour de 0
omega = omega_0 + np.random.uniform(-0.01, 0.01)

# Liste pour stocker l'évolution de omega
omega_history = [omega]

# Boucle de mise à jour multiplicative
for t in range(num_iterations):
    # Calcul du delta multiplicatif
    delta = eta * (S_ij - tau * omega)
    # Mise à jour multiplicative : on multiplie la valeur courante par un facteur
    omega = omega * (1 + delta)
    # Optionnel : on peut appliquer un clipping pour éviter les valeurs négatives
    if omega < 0:
        omega = 0
    omega_history.append(omega)

# Calcul de la valeur théorique de convergence (point fixe) pour comparaison
omega_fixed = S_ij / tau

# Affichage graphique de l'évolution de omega
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(omega_history, marker='o', linestyle='-', color='blue', label=r'$\omega_{i,j}(t)$')
plt.axhline(y=omega_fixed, color='red', linestyle='--', label=r'$S(i,j)/\tau$')
plt.title("Convergence de la pondération $\omega_{i,j}(t)$ avec la règle multiplicative")
plt.xlabel("Itérations $t$")
plt.ylabel(r"$\omega_{i,j}(t)$")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Lorsqu'on part d'une valeur $\omega = 0$ la règle multiplicative ne parvient pas à remonter.



Pour $\omega = 0.05$



Dans cet exemple, nous initialisons la pondération $\omega_{i,j}(0)$ avec une valeur proche de 0 et appliquons la mise à jour multiplicative pour 50 itérations.

La formule utilisée est :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t)\left[1 + \eta\left(S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right)\right],$$

ce qui signifie que la valeur de $\omega_{i,j}(t)$ est multipliée par le facteur $\left[1+\eta\left(S(i,j)-\tau\,\omega_{i,j}(t)\right)\right]$. La figure générée montre la convergence de $\omega_{i,j}(t)$ vers la valeur théorique $\frac{S(i,j)}{\tau}=0.8$ de manière exponentielle, tout en illustrant le comportement non linéaire inhérent à la formulation multiplicative.

E. Conclusion

La variante multiplicative

$$\omega_{i,j}(t+1)=\omega_{i,j}(t)\left[1+\eta\left(S(i,j)-\tau\,\omega_{i,j}(t)\right)\right]$$

offre une alternative intéressante à la règle additive en amplifiant proportionnellement la correction selon la valeur courante de $\omega_{i,j}(t)$. Cette approche peut accélérer la formation de liens forts et favoriser des dynamiques de polarisation, tout en nécessitant un contrôle rigoureux des paramètres pour éviter une croissance explosive. L'implémentation en Python présentée ci-dessus illustre la convergence vers le point fixe et offre un moyen visuel d'appréhender le comportement de la mise à jour multiplicative dans un SCN. Ce type de schéma, éventuellement combiné avec des approches hybrides ou semi-additives, constitue une composante essentielle dans l'ensemble des stratégies d'auto-organisation que l'on retrouve dans les SCN, et sert de base pour des développements ultérieurs dans le cadre de systèmes plus complexes et adaptatifs.

5.5.2.1. Formule $-\gamma\sum_{k\neq j}\omega_{i,k}$ dans la mise à jour

Dans un **SCN**, il est souvent souhaitable d'instaurer une **compétition** entre les liens issus d'une même entité. En d'autres termes, lorsqu'une entité $\mathcal{E}_i$ renforce la connexion avec l'une de ses cibles $\mathcal{E}_j$ via la pondération $\omega_{i,j}$, il est pertinent de freiner simultanément la croissance des autres connexions $\omega_{i,k}$ pour $k\neq j$. Cette idée, qui s'inspire notamment des mécanismes d'**inhibition latérale** observés dans les réseaux neuronaux biologiques, se formalise mathématiquement par l'ajout d'un terme négatif dans la règle de mise à jour.

A. Idée Générale de l'Inhibition Compétitive

L'objectif est de limiter la capacité d'une entité à « investir » simultanément dans de nombreux liens forts. On introduit ainsi un **budget** de pondération pour chaque entité $\mathcal{E}_i$. En d'autres termes, si $\mathcal{E}_i$ a déjà alloué une part importante de son « capital » de connexion à certains partenaires, il lui reste moins de ressources pour renforcer d'autres liens. Ce mécanisme permet d'obtenir une **spécialisation** des connexions et d'éviter une croissance simultanée excessive qui pourrait conduire à un réseau peu discriminant.

B. Sens et Rôle du Terme d'Inhibition

Le terme $-\gamma\sum_{k\neq j}\omega_{i,k}\,(t)$ introduit une pression négative sur la mise à jour du lien $\omega_{i,j}(t)$. Plus précisément, si l'ensemble des connexions issues de l'entité $\mathcal{E}_i$ est déjà élevé, la somme $\sum_{k\neq j}\omega_{i,k}\,(t)$ sera grande et la correction négative sera plus importante. Cela se traduit par une limitation de l'augmentation de $\omega_{i,j}(t)$, ce qui force l'entité à concentrer ses ressources sur un nombre restreint de liens – idéalement ceux présentant une synergie forte. En d'autres termes, ce mécanisme de **compétition latérale** veille à ce que l'augmentation d'un lien ne se fasse qu'au détriment des autres, créant ainsi un environnement où seuls quelques liens majeurs émergent.

C. Modélisation Mathématique

Considérons la règle de mise à jour additive classique pour la pondération d'un lien, qui s'exprime sans inhibition par :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right].$$

Pour intégrer la notion de compétition entre les connexions issues d'une même entité, on ajoute un terme d'inhibition :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right] - \gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t)\,.$$

Ici, η est le taux d'apprentissage qui détermine l'amplitude de la correction, τ régule la décroissance linéaire de $\omega_{i,j}$, et γ contrôle l'intensité de l'inhibition compétitive. Cette équation montre que, quelle que soit la synergie $S(i,j)$, le renforcement du lien $\omega_{i,j}$ sera toujours freiné par la somme des autres liens issus de $\mathcal{E}_i$.

D. Effets sur la Dynamique du Réseau

L'introduction du terme d'inhibition a plusieurs conséquences notables sur la dynamique du SCN :

- **Spécialisation des Connexions :** Seuls les liens pour lesquels la synergie $S(i,j)$ est suffisamment élevée pourront dépasser l'effet inhibiteur, tandis que les autres resteront faibles. Cela favorise l'émergence de clusters où chaque entité concentre ses connexions sur un nombre limité de partenaires.

- **Prévention de l'Emballement Global :** Même si plusieurs paires présentent une synergie élevée, l'inhibition globale empêche que toutes les connexions soient simultanément fortes, ce qui pourrait diluer l'information sur la structure réelle du réseau.

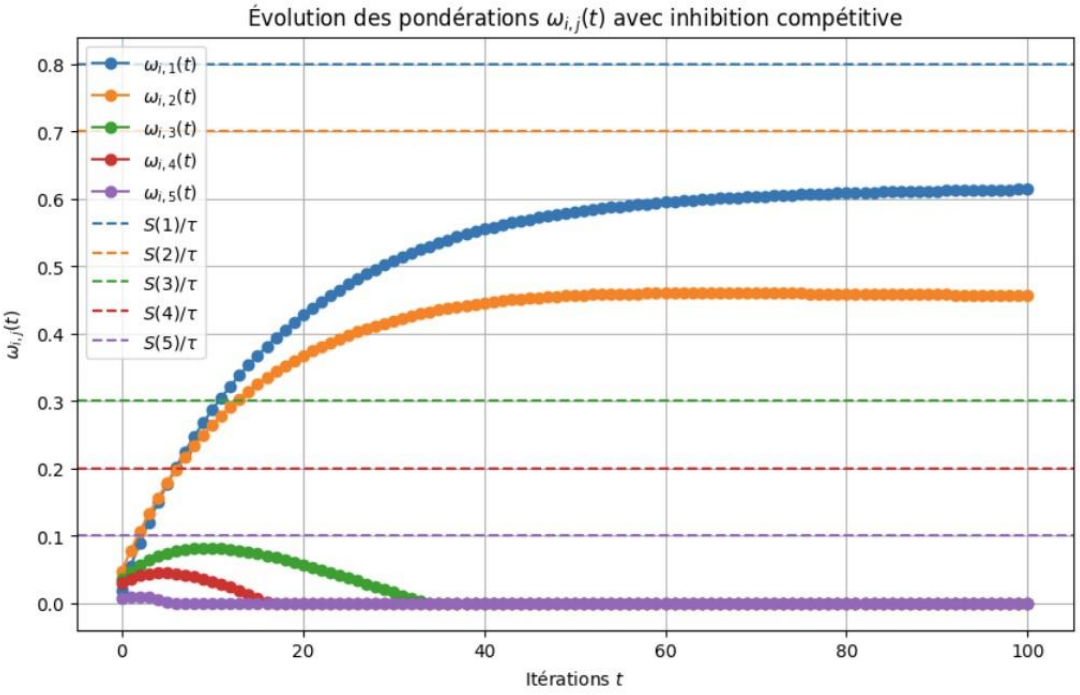
- **Risque d'Oscillations :** Si le paramètre γ est trop élevé, le frein imposé peut entraîner des oscillations dans la dynamique des mises à jour, ce qui nécessitera alors des ajustements ou l'introduction de mécanismes de saturation pour stabiliser le comportement.

E. Implémentation Python avec Visualisation

Pour illustrer la dynamique induite par la mise à jour avec inhibition compétitive, nous proposons ci-après une implémentation en Python. Le script simule l'évolution de la pondération $\omega_{i,j}(t)$ pour une entité $\mathcal{E}_i$ connectée à plusieurs cibles $\mathcal{E}_j$ et affiche l'évolution de ces poids au cours des itérations.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètres de la mise à jour
eta = 0.05       # Taux d'apprentissage
tau = 1.0        # Facteur de décroissance
gamma = 0.02     # Coefficient d'inhibition
num_iterations = 100  # Nombre d'itérations
n_links = 5      # Nombre de liens sortants pour l'entité E_i
```

```
# Pour cet exemple, fixons une synergie S(i,j) pour chaque lien j
# On peut imaginer que l'entité a une forte synergie avec certains liens et faible avec d'autres
# Par exemple : S = [0.8, 0.7, 0.3, 0.2, 0.1]
S = np.array([0.8, 0.7, 0.3, 0.2, 0.1])

# Initialisation de la matrice des poids pour l'entité E_i (une seule ligne)
# On initialise chaque poids à une petite valeur aléatoire proche de 0
np.random.seed(42)
omega = np.random.uniform(0, 0.05, size=n_links)

# Stockage de l'évolution des poids pour visualisation
omega_history = np.zeros((num_iterations + 1, n_links))
omega_history[0, :] = omega.copy()

# Boucle de mise à jour
for t in range(num_iterations):
    # Calcul de la somme des poids pour l'entité E_i
    total_weight = np.sum(omega)

    # Mise à jour pour chaque lien j
    for j in range(n_links):
        # Calcul du terme d'update de base (sans inhibition)
        delta_update = eta * (S[j] - tau * omega[j])
        # Calcul du terme d'inhibition : somme des poids des autres liens (k != j)
        inhibition = gamma * (total_weight - omega[j])
        # Mise à jour additive avec inhibition
        omega[j] = omega[j] + delta_update - inhibition
        # Assurer que le poids reste positif (clipping à 0)
        if omega[j] < 0:
            omega[j] = 0
    # Enregistrer les poids de l'itération actuelle
    omega_history[t + 1, :] = omega.copy()

# Calcul théorique du point fixe pour chaque lien sans inhibition (pour comparaison)
omega_fixed = S / tau

# Affichage graphique de l'évolution des poids
plt.figure(figsize=(10, 6))
for j in range(n_links):
    plt.plot(omega_history[:, j], marker='o', label=f'$\\omega_{{i,{j+1}}}(t)$')
plt.axhline(y=omega_fixed[0], color='C0', linestyle='--', label=r'$S(1)/\tau$')
plt.axhline(y=omega_fixed[1], color='C1', linestyle='--', label=r'$S(2)/\tau$')
plt.axhline(y=omega_fixed[2], color='C2', linestyle='--', label=r'$S(3)/\tau$')
plt.axhline(y=omega_fixed[3], color='C3', linestyle='--', label=r'$S(4)/\tau$')
plt.axhline(y=omega_fixed[4], color='C4', linestyle='--', label=r'$S(5)/\tau$')
plt.title("Évolution des pondérations $\\omega_{i,j}(t)$ avec inhibition compétitive")
plt.xlabel("Itérations $t$")
plt.ylabel("$\\omega_{i,j}(t)$")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



F. Explications de l'Implémentation

Dans ce script Python :

- **Initialisation**

  On fixe les paramètres $\eta = 0.05$, $\tau = 1.0$ et $\gamma = 0.02$. Le nombre de liens (représentant les connexions sortantes d'une entité $\mathcal{E}_i$) est fixé à 5, avec des valeurs de synergie $S(i,j)$ définies par un vecteur $S = [0.8,0.7,0.3,0.2,0.1]$. Les poids ω sont initialisés à des valeurs aléatoires proches de 0.

- **Mise à jour**

  La mise à jour pour chaque poids suit la formule :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left(S(j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right) - \gamma \left(\sum_{k=1}^{n_{\text{links}}} \omega_{i,k}(t) - \omega_{i,j}(t) \right).$$

  Ici, la somme des poids de toutes les connexions (sauf le lien considéré) est utilisée pour appliquer l'inhibition compétitive, qui réduit la mise à jour si d'autres liens sont déjà forts. Un mécanisme de **clipping** garantit que les poids ne deviennent pas négatifs.

- **Visualisation**

  L'évolution des poids est enregistrée dans la matrice *omega_history*, et à la fin, un graphique montre la trajectoire de chaque $\omega_{i,j}(t)$ au fil des itérations. Les lignes horizontales en pointillés indiquent les valeurs théoriques $\frac{S(i,j)}{\tau}$ (sans inhibition) pour référence.

G. Conclusion

Le terme $-\gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t)$ introduit une **inhibition compétitive** qui force l'entité à concentrer ses ressources sur un nombre limité de liens forts. Ce mécanisme prévient une croissance excessive et favorise la spécialisation des connexions, contribuant ainsi à la formation de clusters plus définis dans le SCN. La mise à jour globale, qui combine un terme d'attraction (provenant de $S(i,j)$) et un terme d'inhibition, se traduit par la formule :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right] - \gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t)\,.$$

L'implémentation Python présentée ci-dessus permet de simuler cette dynamique et d'en observer la convergence ou l'émergence de comportements particuliers, tels que la concentration des liens pour certaines connexions au détriment d'autres, phénomène essentiel dans la formation de clusters dans un SCN.

Ce développement, combinant explications mathématiques et implémentation pratique, illustre la manière dont un terme d'inhibition peut être intégré dans la mise à jour des pondérations pour favoriser une **auto-organisation** efficace dans un Deep Synergy Learning.

5.5.2.2. Paramétrage γ

Dans un **Synergistic Connection Network** (SCN), le coefficient γ apparaît dans le terme d'inhibition compétitive et joue un rôle crucial dans la manière dont une entité $\mathcal{E}_i$ répartit son « potentiel de connexion » entre ses divers liens $\omega_{i,k}$. Pour comprendre ce paramétrage, rappelons d'abord la règle de mise à jour additive de base, à laquelle on ajoute ensuite un terme d'inhibition.

A. Rôle conceptuel et formulation mathématique

Sans inhibition, la mise à jour des pondérations dans un SCN s'exprime par la formule additive classique :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right],$$

où :

- $\eta > 0$ est le **taux d'apprentissage**,
- $S(i,j)$ représente la **synergie** (ou similarité) entre les entités $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$,
- $\tau > 0$ est le paramètre régulant la décroissance linéaire.

Afin d'incorporer une **compétition** entre les différents liens issus de la même entité $\mathcal{E}_i$, on ajoute un terme d'inhibition qui est proportionnel à la somme des pondérations des autres connexions :

$$-\gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t),$$

ce qui conduit à la formule complète :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right] - \gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t).$$

Ici, le coefficient γ contrôle l'intensité de cette inhibition compétitive. Un γ élevé signifie que l'entité $\mathcal{E}_i$ est fortement contrainte à limiter simultanément plusieurs connexions fortes. Ainsi, si un lien $\omega_{i,j}$ tend à se renforcer en raison d'une synergie élevée, la somme des autres liens $\sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t)$ va exercer une pression négative qui réduira l'incrément pour $\omega_{i,j}$.

B. Impact sur la dynamique du réseau

Le paramétrage de γ détermine de manière critique la façon dont les ressources de connexion d'une entité se répartissent :

- **Sélectivité accrue :** Un γ suffisamment grand impose une forte compétition, de sorte que l'entité ne pourra renforcer que quelques liens dominants, tandis que les autres resteront faibles. Ce mécanisme favorise la formation de clusters bien définis, dans lesquels chaque entité investit principalement dans un sous-ensemble de connexions.

- **Prévention de la croissance excessive :** Même lorsque plusieurs synergies $S(i,j)$ sont élevées, l'inhibition empêche une croissance simultanée de tous les liens, limitant ainsi le risque d'un emballement global des pondérations.

- **Risques d'oscillations :** Toutefois, un réglage trop agressif de γ peut entraîner des oscillations ou un comportement chaotique, car la compétition latérale devient trop forte. Dans ce cas, les mises à jour peuvent s'alternancer de manière excessive, empêchant une convergence stable vers des valeurs fixes.

En résumé, γ agit comme un **facteur de contrainte** qui module la spécialisation des liens d'une entité et qui, en modulant la pression compétitive, influence directement la formation des clusters dans le réseau.

C. Ajustement empirique et stratégie de régulation

Le choix de γ doit être ajusté en fonction des exigences du problème et du comportement souhaité du SCN. En pratique, plusieurs approches sont envisageables :

- **Essais par paliers :** Il est courant de tester des valeurs telles que $\gamma = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$, etc., et d'observer la dynamique des mises à jour.

- **Adaptation dynamique :** On peut également concevoir une règle d'auto-ajustement où γ évolue en fonction de la somme des pondérations ou d'un indicateur de congestion. Par exemple, on pourrait définir une mise à jour de γ par :

  $$\gamma(t+1) = \gamma(t) + \alpha\left[\sum_{j} \omega_{i,j}\,(t) - \beta\right],$$

  où α et β sont des paramètres ajustables. Ce mécanisme permet de maintenir la somme des connexions autour d'un niveau prédéfini.

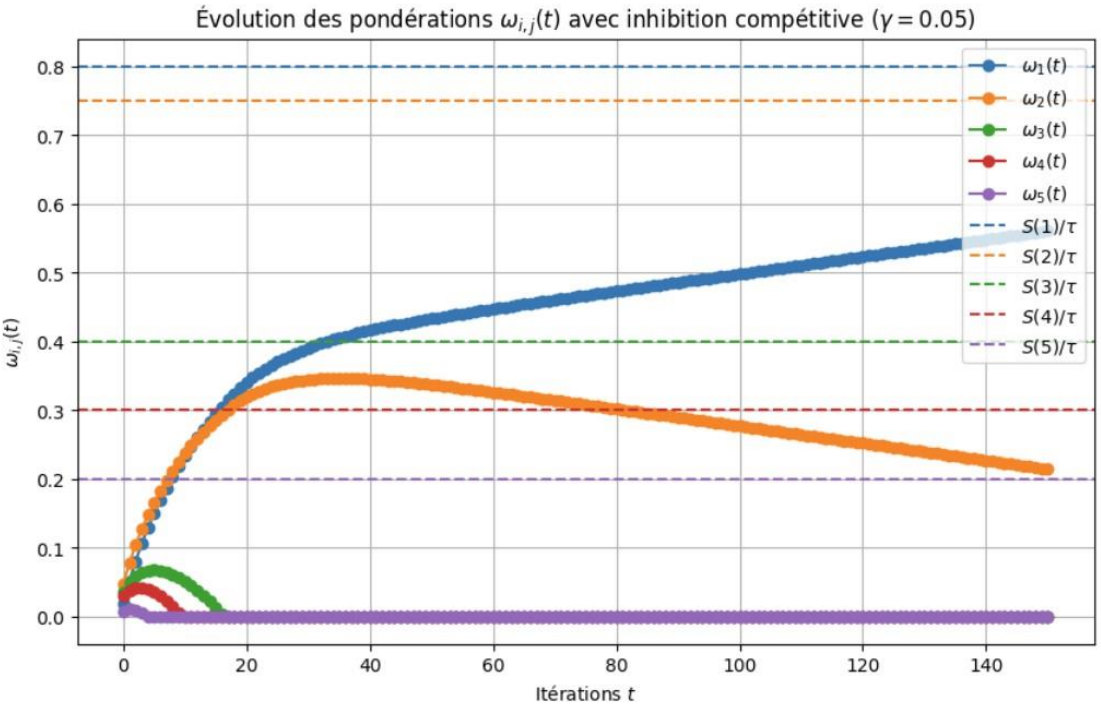
- **Normalisation :** Dans certaines applications, il est souhaitable de normaliser la somme des pondérations pour qu'elle reste inférieure à une valeur maximale (par exemple, 1). Ceci peut être réalisé en combinant γ avec d'autres techniques de **clipping** ou de normalisation des poids.

D. Implémentation Python avec Visualisation

Nous proposons ci-dessous une implémentation complète en Python qui simule la dynamique d'inhibition compétitive avec paramétrage de γ. Ce script calcule l'évolution des pondérations $\omega_{i,j}(t)$ pour une entité donnée disposant de plusieurs liens et affiche la trajectoire de chaque poids au cours des itérations.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètres de la mise à jour
eta = 0.05       # Taux d'apprentissage
tau = 1.0        # Facteur de décroissance
gamma = 0.05     # Coefficient d'inhibition (à ajuster pour observer différents comportements)
num_iterations = 150  # Nombre d'itérations
n_links = 5      # Nombre de liens sortants pour une entité E_i

# Définition des synergies S(i,j) pour chaque lien j
# Pour cet exemple, nous supposons que S(i,j) varie pour simuler différents niveaux de complémentarit
é
# Exemple : l'entité a une forte synergie avec les deux premiers liens, puis des synergies décroissantes.
S = np.array([0.8, 0.75, 0.4, 0.3, 0.2])

# Initialisation des pondérations omega pour l'entité E_i (un vecteur de taille n_links)
np.random.seed(42)
omega = np.random.uniform(0, 0.05, size=n_links)

# Stockage de l'évolution des pondérations pour la visualisation
omega_history = np.zeros((num_iterations + 1, n_links))
omega_history[0, :] = omega.copy()

# Simulation de la dynamique de mise à jour avec inhibition compétitive
for t in range(num_iterations):
    # Calcul de la somme totale des poids de l'entité E_i
    total_weight = np.sum(omega)

    # Mise à jour de chaque lien pour l'entité E_i
    for j in range(n_links):
        # Terme d'update additif classique
        delta_update = eta * (S[j] - tau * omega[j])
        # Terme d'inhibition compétitive: on soustrait la somme des poids des autres liens
        inhibition = gamma * (total_weight - omega[j])
        # Mise à jour totale de omega[j]
        omega[j] = omega[j] + delta_update - inhibition
        # Application d'un clipping pour éviter des valeurs négatives
        if omega[j] < 0:
            omega[j] = 0
    # Enregistrement des poids de l'itération courante
    omega_history[t + 1, :] = omega.copy()

# Calcul théorique du point fixe sans inhibition (pour comparaison) : omega* = S / tau
omega_fixed = S / tau

# Affichage graphique de l'évolution des pondérations
plt.figure(figsize=(10, 6))
```

```
for j in range(n_links):
    plt.plot(omega_history[:, j], marker='o', linestyle='-', label=f'$\\omega_{{{j+1}}}(t)$')
for j in range(n_links):
    plt.axhline(y=omega_fixed[j], linestyle='--', color=f'C{j}', label=f'$S({j+1})/\\tau$')

plt.title("Évolution des pondérations $\\omega_{{i,j}}(t)$ avec inhibition compétitive ($\\gamma = {:.
2f}$)".format(gamma))

plt.xlabel("Itérations $t$")
plt.ylabel("$\\omega_{i,j}(t)$")
plt.legend(loc="upper right")
plt.grid(True)
plt.show()
```



E. Explications de l'Implémentation

Dans ce script :

- **Initialisation et Paramètres :**

  Nous fixons les paramètres $\eta = 0.05$, $\tau = 1.0$ et $\gamma = 0.05$. Le nombre de liens ($n_{\text{links}} = 5$) correspond aux connexions sortantes d'une entité $\mathcal{E}_i$. Le vecteur de synergies S est défini pour simuler différents niveaux de complémentarité entre l'entité et ses cibles (par exemple, 0.8,0.75,0.4,0.3,0.2). Les pondérations ω sont initialisées avec de petites valeurs aléatoires proches de zéro.

- **Mise à jour des Pondérations :**

  Pour chaque itération, nous calculons d'abord la somme totale des poids pour l'entité. Pour chaque lien j, nous appliquons la mise à jour additive standard $\Delta_{\text{update}} = \eta(S(j) - \tau\,\omega[j])$ puis soustrayons le terme d'inhibition γ multiplié par la somme des

autres poids. Ce terme d'inhibition permet de réduire la capacité de l'entité à renforcer simultanément plusieurs liens. Enfin, nous appliquons un mécanisme de clipping pour garantir que les poids restent positifs.

- **Visualisation :**

  La trajectoire de chaque pondération $\omega_j(t)$ est enregistrée et affichée sur un graphique. Des lignes horizontales en pointillés indiquent les valeurs théoriques $\frac{S(j)}{\tau}$ pour référence, ce qui permet de comparer la convergence effective avec le point fixe attendu en l'absence d'inhibition.

F. Conclusion

L'ajout du terme d'inhibition $-\gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t)$ permet d'instaurer une **compétition** entre les liens d'une même entité, ce qui force cette dernière à concentrer ses ressources sur un nombre limité de connexions fortes. Ce mécanisme aide à la formation de **clusters** plus distincts et empêche la croissance simultanée de tous les liens. La formule de mise à jour complète :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right] - \gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t)$$

est ainsi mise en œuvre de manière simple en Python, et la simulation graphique permet d'observer l'effet de l'inhibition compétitive sur la dynamique des pondérations. Ce développement illustre l'importance du paramètre γ et montre comment, en ajustant sa valeur, on peut influencer la spécialisation et la stabilité des connexions dans un SCN.

5.5.2.3. Application concrète : limiter la somme des liens sortants par entité

Dans de nombreux scénarios d'application d'un **Synergistic Connection Network** (SCN), il est essentiel que chaque entité $\mathcal{E}_i$ ne se lie pas de manière excessive à l'ensemble des autres entités. En effet, dans des systèmes inspirés par le fonctionnement des réseaux neuronaux ou par des modèles de ressources limitées en systèmes cognitifs, il est souvent souhaitable de borner la somme des pondérations associées aux liens sortants de $\mathcal{E}_i$ afin de forcer cette entité à "choisir" les partenaires les plus pertinents. Le mécanisme d'inhibition compétitive, introduit sous la forme du terme

$$-\gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t),$$

permet justement de réaliser cette contrainte. En ajoutant ce terme dans la règle de mise à jour, la dynamique de $\omega_{i,j}$ se voit modifiée de sorte que la croissance d'un lien est freinée par la présence d'autres liens déjà établis.

A. Principe et justification

La règle de mise à jour additive classique sans inhibition s'exprime par

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big],$$

où η est le taux d'apprentissage et τ le paramètre de décroissance. L'ajout d'un terme d'inhibition introduit une compétition entre les liens sortants d'une même entité. La formule devient alors

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big] - \gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t).$$

Le terme $-\gamma \sum_{k\neq j} \omega_{i,k}\,(t)$ agit comme un prélèvement ou une pénalité sur chaque lien $\omega_{i,j}$ en fonction de la somme des autres liens sortants de $\mathcal{E}_i$. On peut ainsi interpréter γ comme le **coefficient d'inhibition**, qui définit le budget de connexion de l'entité. Lorsque la somme des autres liens est importante, l'inhibition est plus forte, ce qui freine davantage l'augmentation de $\omega_{i,j}$.

Ce mécanisme de limitation permet d'éviter que l'entité répartisse ses ressources de manière uniforme sur l'ensemble des connexions, favorisant ainsi une spécialisation où seules quelques connexions significatives émergent, tandis que les autres restent faibles. D'un point de vue neuro-inspiré, cela correspond à l'idée d'**inhibition latérale**, dans laquelle un neurone, une fois fortement activé, limite l'activation simultanée de ses voisins. Cette analogie trouve également un écho dans les modèles économiques où une taxe ou un coût additionnel est appliqué lorsque les ressources sont réparties sur trop de partenariats.

B. Étude mathématique

Afin d'analyser l'effet de ce mécanisme sur la somme totale des liens sortants, nous notons

$$\Sigma_i(t) = \sum_j \omega_{i,j}\,(t).$$

En sommant la règle de mise à jour sur tous les j pour une entité $\mathcal{E}_i$, on obtient :

$$\Sigma_i(t+1) = \sum_j \omega_{i,j}\,(t) + \eta \sum_j \big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big] - \gamma \sum_j \sum_{k\neq j} \omega_{i,k}\,(t).$$

Le double-somme $\sum_j \sum_{k\neq j} \omega_{i,k}\,(t)$ se simplifie en $(n_i - 1)\,\Sigma_i(t)$, où n_i est le nombre de liens sortants de l'entité $\mathcal{E}_i$. Ainsi, l'inhibition introduit un terme proportionnel à $\Sigma_i(t)$ lui-même, ce qui tend à stabiliser la somme totale des liens, empêchant ainsi une croissance incontrôlée.

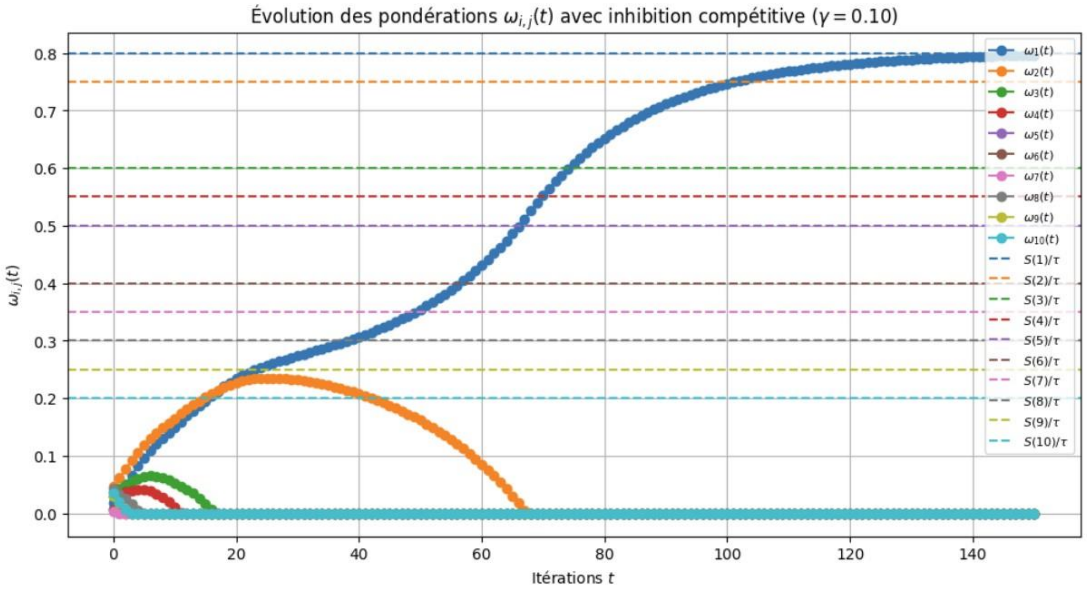
C. Implémentation Python avec Visualisation

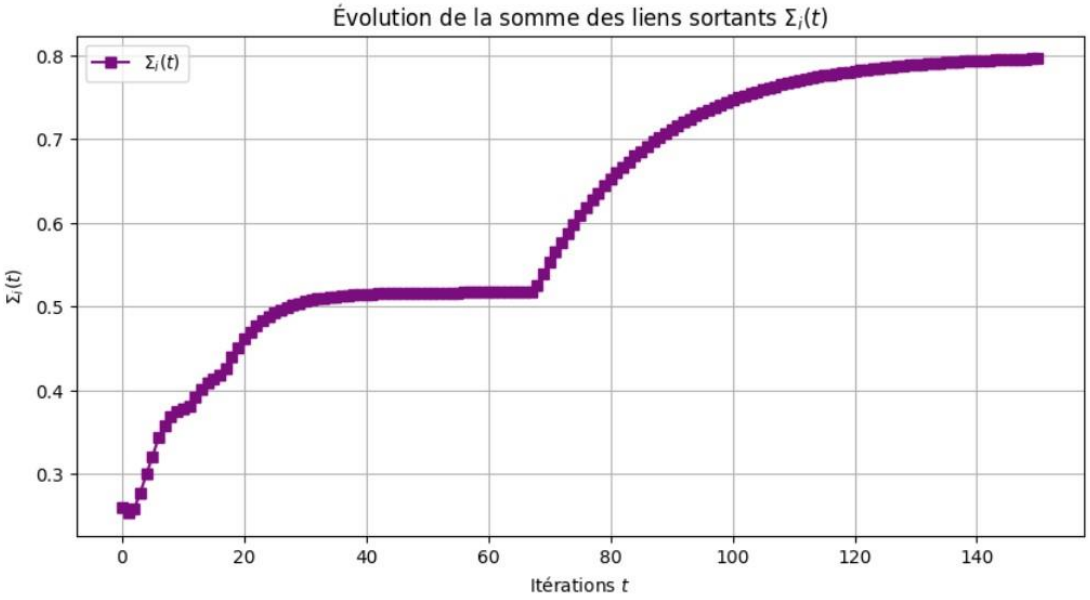
Nous proposons ci-dessous une implémentation en Python qui simule la dynamique de mise à jour avec inhibition compétitive pour une entité $\mathcal{E}_i$ disposant de plusieurs liens. L'exemple permet de visualiser comment la somme des liens se régule et comment les différents liens évoluent au fil des itérations.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètres de la simulation
eta = 0.05       # Taux d'apprentissage
tau = 1.0        # Facteur de décroissance
gamma = 0.1      # Coefficient d'inhibition (à ajuster pour voir l'effet sur la somme)
num_iterations = 150  # Nombre total d'itérations
n_links = 10     # Nombre de liens sortants pour une entité E_i
```

```
# Définir les synergies S(i,j) pour chaque lien j.
# Ici, S est un vecteur de valeurs simulant différentes "forces" de synergie.
# On suppose que certains liens ont une synergie élevée et d'autres faible.
S = np.array([0.8, 0.75, 0.6, 0.55, 0.5, 0.4, 0.35, 0.3, 0.25, 0.2])

# Initialisation des pondérations omega pour l'entité E_i avec de faibles valeurs aléatoires
np.random.seed(42)
omega = np.random.uniform(0, 0.05, size=n_links)

# Stocker l'évolution des pondérations pour visualisation
omega_history = np.zeros((num_iterations + 1, n_links))
sum_history = np.zeros(num_iterations + 1)
omega_history[0, :] = omega.copy()
sum_history[0] = np.sum(omega)

# Simulation de la mise à jour avec inhibition compétitive
for t in range(num_iterations):
    # Calcul de la somme des pondérations de l'entité E_i à l'itération t
    total_weight = np.sum(omega)

    # Mise à jour de chaque lien pour l'entité E_i
    for j in range(n_links):
        # Terme d'update additif classique
        delta_update = eta * (S[j] - tau * omega[j])
        # Terme d'inhibition compétitive : somme des autres liens
        inhibition = gamma * (total_weight - omega[j])
        # Mise à jour totale
        omega[j] = omega[j] + delta_update - inhibition
        # Clipping : s'assurer que les pondérations restent positives
        if omega[j] < 0:
            omega[j] = 0

    # Enregistrement des pondérations et de la somme totale pour la visualisation
    omega_history[t + 1, :] = omega.copy()
    sum_history[t + 1] = np.sum(omega)

# Calcul théorique du point fixe pour chaque lien sans inhibition (pour comparaison) : omega* = S / tau
omega_fixed = S / tau

# Affichage graphique de l'évolution de chaque pondération
plt.figure(figsize=(12, 6))
for j in range(n_links):
    plt.plot(omega_history[:, j], marker='o', linestyle='-', label=f'$\\omega_{{{j+1}}}(t)$')
for j in range(n_links):
    plt.axhline(y=omega_fixed[j], linestyle='--', color=f'C{j}', label=f'$S({j+1})/\\tau$')

plt.title("Évolution des pondérations $\\omega_{i,j}(t)$ avec inhibition compétitive ($\\gamma = {:.2f}$)".format(gamma))
plt.xlabel("Itérations $t$")
plt.ylabel("$\\omega_{i,j}(t)$")
plt.legend(loc="upper right", fontsize=8)
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
# Affichage graphique de l'évolution de la somme des pondérations par entité
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(sum_history, marker='s', linestyle='-', color='purple', label='$\\Sigma_i(t)$')
plt.title("Évolution de la somme des liens sortants $\\Sigma_i(t)$")
plt.xlabel("Itérations $t$")
plt.ylabel("$\\Sigma_i(t)$")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```





D. Explications détaillées de l'implémentation

Dans cet exemple, nous modélisons une entité $\mathcal{E}_i$ dotée de $n_{\text{links}} = 10$ connexions sortantes, chacune caractérisée par une **synergie** $S(i,j)$ fixée. Les pondérations $\omega_{i,j}(t)$ sont initialisées avec de faibles valeurs aléatoires pour simuler un départ quasi nul.

La mise à jour des pondérations s'effectue en deux parties. D'une part, le terme additive classique, $\eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right]$, tend à faire converger chaque lien vers la valeur $\frac{S(i,j)}{\tau}$ en l'absence d'inhibition. D'autre part, le terme d'inhibition, $-\gamma \sum_{k\neq j} \omega_{i,k}\,(t)$, représente le prélèvement effectué sur le lien $\omega_{i,j}$ en fonction de la somme des autres pondérations. Ce mécanisme force l'entité à limiter la somme totale de ses connexions, conduisant à une répartition sélective des ressources.

Le script enregistre, à chaque itération, l'évolution de chaque pondération ainsi que la somme totale $\Sigma_i(t) = \sum_j \omega_{i,j}\,(t)$. Ces données sont ensuite visualisées par deux graphiques : l'un montre l'évolution individuelle de chaque $\omega_{i,j}$ (avec des lignes horizontales indiquant les valeurs théoriques sans inhibition), et l'autre trace l'évolution de la somme totale des liens de l'entité. Ainsi, on peut observer comment le mécanisme d'inhibition stabilise la somme des pondérations et favorise la spécialisation.

E. Conclusion

L'introduction du terme $-\gamma \sum_{k\neq j} \omega_{i,k}\,(t)$ dans la mise à jour permet d'instaurer une compétition interne entre les liens sortants d'une entité. Ce mécanisme de **budget** impose que l'entité ne puisse renforcer simultanément tous ses liens, favorisant ainsi la formation de clusters denses et la spécialisation des connexions. L'implémentation Python présentée illustre concrètement cette dynamique en montrant, à travers des graphiques, la convergence des pondérations et la régulation de leur somme. Le réglage approprié de γ est crucial pour obtenir un équilibre entre l'amplification des liens forts et le freinage des liens faibles, garantissant ainsi une auto-organisation efficace et cohérente dans le SCN.

Ce développement, associant explications mathématiques et implémentation pratique, fournit une base solide pour comprendre et exploiter le mécanisme d'inhibition compétitive dans un cadre de Deep Synergy Learning.

5.5.3. Saturation

La **saturation** constitue un autre mécanisme majeur pour contrôler la croissance des pondérations $\omega_{i,j}$ dans un SCN. Même si l'on dispose d'une dynamique de base (section 5.5.1) et d'un module d'inhibition/contrôle (section 5.5.2), il subsiste fréquemment un risque d'emballement lorsque plusieurs liens $\omega_{i,j}$ se renforcent simultanément ou lorsqu'une seule connexion prend une ampleur disproportionnée. La **saturation** permet alors de **clore** la valeur d'un lien au-delà d'un certain plafond $\omega_{\max}$.

D'un point de vue **mathématique**, la saturation introduit une **barrière** supérieure : même si l'itération calcule une mise à jour positive qui pousserait $\omega_{i,j}$ à dépasser $\omega_{\max}$, on la "coupe" (clipping) pour éviter qu'elle ne franchisse ce seuil. Dans cette section (5.5.3), nous décrirons le **clipping** (5.5.3.1) et son impact, puis nous analyserons comment choisir $\omega_{\max}$ et en quoi cela influe sur la structure de clusters (5.5.3.2).

5.5.3.1. Clipping : $\omega_{i,j} \leftarrow \min(\omega_{i,j}, \omega_{\max})$

Dans un **Synergistic Connection Network** (SCN), les mécanismes d'inhibition compétitive (voir notamment la section 5.5.2.2) permettent de réguler la croissance collective des liens sortants d'une entité $\mathcal{E}_i$. Néanmoins, il reste possible qu'un ou plusieurs liens, par leur dynamique interne ou en raison de paramètres mal ajustés (par exemple, un taux d'apprentissage η trop élevé ou une décroissance τ trop faible), atteignent des valeurs excessives. Pour éviter cette situation, on introduit le **clipping**, qui consiste à borner chaque pondération individuellement en imposant que :

$$\omega_{i,j}(t+1) \leftarrow \min(\omega_{i,j}(t+1), \omega_{\max}).$$

A. Principe du Clipping

Le **clipping** agit comme un opérateur de **saturation** appliqué en post-traitement à la mise à jour des poids. La formule de base d'une mise à jour additive dans un SCN s'exprime généralement par :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right].$$

Lorsque cette règle aboutit à une valeur de $\omega_{i,j}(t+1)$ supérieure à un seuil prédéfini $\omega_{\max}$, le clipping intervient en forçant :

$$\omega_{i,j}(t+1) \leftarrow \min(\omega_{i,j}(t+1), \omega_{\max}).$$

Ce procédé garantit que, quelle que soit la synergie $S(i,j)$ ou les conditions locales de mise à jour, aucune connexion ne pourra dépasser la valeur $\omega_{\max}$. Cette opération est particulièrement pertinente pour éviter une croissance incontrôlée des poids, phénomène pouvant être observé lorsque des paramètres de mise à jour conduisent à une dynamique exponentielle ou à des oscillations.

B. Rôle Mathématique et Effets sur la Convergence

D'un point de vue **mathématique**, le clipping agit comme une contrainte non linéaire dans le système. Sans clipping, le point fixe théorique pour chaque lien, en l'absence d'inhibition supplémentaire, serait donné par

$$\omega_{i,j}^{*} = \frac{S(i,j)}{\tau}.$$

Cependant, lorsque $\frac{S(i,j)}{\tau}$ dépasse la valeur $\omega_{\max}$, le clipping force le lien à se stabiliser à $\omega_{\max}$ plutôt que de continuer à croître. En d'autres termes, le système évolue vers un "point fixe saturé". On obtient ainsi une dynamique par morceaux où la mise à jour se déroule selon la règle linéaire jusqu'à ce que $\omega_{i,j}$ atteigne $\omega_{\max}$, puis la valeur est fixée.

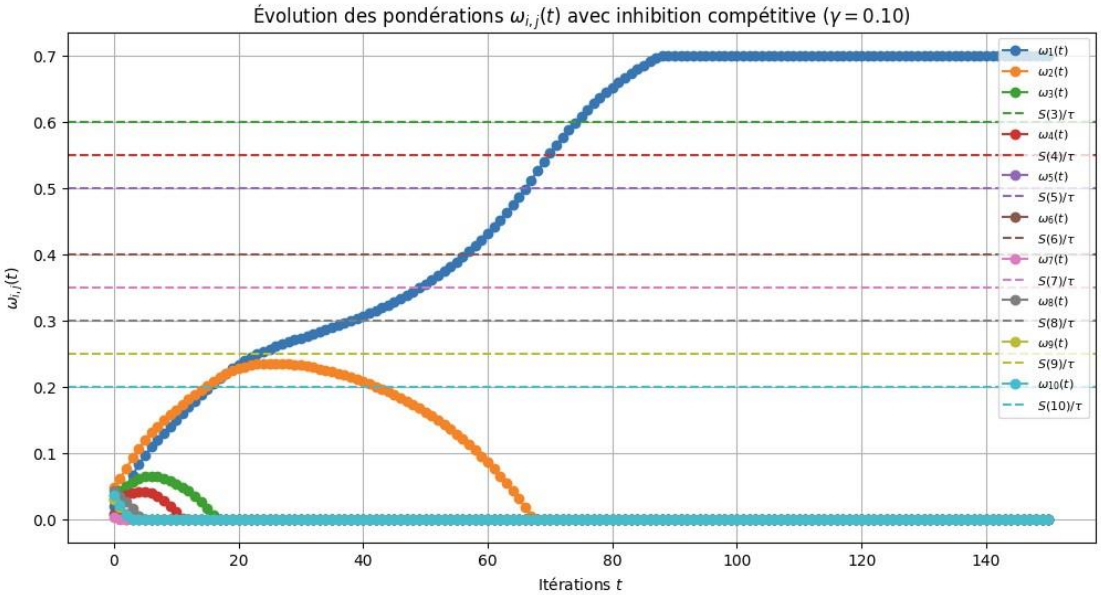
Cette approche présente l'avantage de prévenir l'emballement de certaines pondérations, tout en permettant aux autres liens de converger vers leurs valeurs théoriques lorsque celles-ci sont inférieures à $\omega_{\max}$. En conséquence, le SCN est amené à concentrer ses ressources sur un nombre limité de liens forts, favorisant la formation de clusters plus distincts et économiquement répartis, sans pour autant perdre l'information sur la synergie.

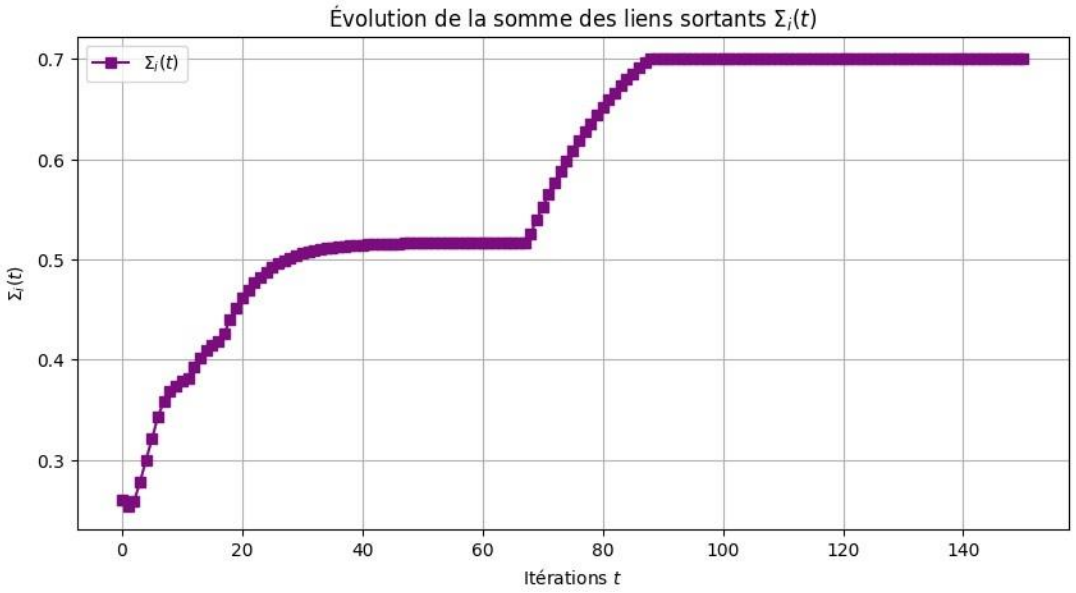
C. Implémentation en Python avec Graphiques

Nous présentons ci-dessous un code Python complet illustrant la dynamique d'un SCN avec mise à jour additive, incluant l'inhibition compétitive et l'opération de clipping. Ce script simule la mise à jour de la pondération d'un lien et trace son évolution au fil des itérations, ainsi que l'évolution de la somme des liens sortants pour une entité donnée.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètres de la simulation
eta = 0.05       # Taux d'apprentissage
tau = 1.0        # Facteur de décroissance
gamma = 0.1      # Coefficient d'inhibition compétitive
omega_max = 0.7  # Valeur de clipping maximale pour chaque lien
num_iterations = 150  # Nombre d'itérations
n_links = 10     # Nombre de liens sortants pour une entité E_i

# Définition des synergies S(i,j) pour l'entité E_i (vecteur de synergies pour chaque lien)
# Supposons que les synergies varient pour illustrer des cas où certains liens devraient théoriquement dépasser omega_max.
S = np.array([0.8, 0.75, 0.6, 0.55, 0.5, 0.4, 0.35, 0.3, 0.25, 0.2])

# Initialisation des pondérations omega pour l'entité E_i avec de faibles valeurs aléatoires
np.random.seed(42)
omega = np.random.uniform(0, 0.05, size=n_links)

# Stockage de l'évolution des pondérations pour visualisation
omega_history = np.zeros((num_iterations + 1, n_links))
sum_history = np.zeros(num_iterations + 1)
omega_history[0, :] = omega.copy()
sum_history[0] = np.sum(omega)

# Simulation de la mise à jour avec inhibition compétitive et clipping
for t in range(num_iterations):
    total_weight = np.sum(omega)  # Somme des pondérations pour l'entité E_i à l'itération t
    for j in range(n_links):
        # Calcul du terme de mise à jour additive
        delta_update = eta * (S[j] - tau * omega[j])
        # Calcul du terme d'inhibition compétitive : somme des autres liens (pour k != j)
        inhibition = gamma * (total_weight - omega[j])
        # Mise à jour additive avec inhibition
        new_omega = omega[j] + delta_update - inhibition
        # Application du clipping pour s'assurer que new_omega ne dépasse pas omega_max
        new_omega = min(new_omega, omega_max)
        # Garantie de non-négativité
        omega[j] = max(new_omega, 0)
    # Enregistrement de l'évolution des pondérations et de la somme totale
    omega_history[t + 1, :] = omega.copy()
    sum_history[t + 1] = np.sum(omega)

# Calcul théorique du point fixe sans clipping pour comparaison (omega* = S / tau)
omega_fixed = S / tau

# Affichage graphique de l'évolution de chaque pondération
```

```
plt.figure(figsize=(12, 6))
for j in range(n_links):
    plt.plot(omega_history[:, j], marker='o', linestyle='-', label=f'$\\omega_{{{j+1}}}(t)$')
    # Ajout d'une ligne horizontale pour la valeur théorique sans clipping, seulement si elle est inférieur
e à omega_max
    if omega_fixed[j] <= omega_max:
        plt.axhline(y=omega_fixed[j], linestyle='--', color=f'C{j}', label=f'$S({j+1})/\\tau$')

plt.title("Évolution des pondérations $\\omega_{{i,j}}(t)$ avec inhibition compétitive ($\\gamma = {:.
2f}$)".format(gamma))
plt.xlabel("Itérations $t$")
plt.ylabel("$\\omega_{i,j}(t)$")
plt.legend(loc="upper right", fontsize=8)
plt.grid(True)
plt.show()

# Affichage graphique de l'évolution de la somme des pondérations pour l'entité E_i
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(sum_history, marker='s', linestyle='-', color='purple', label='$\\Sigma_i(t)$')
plt.title("Évolution de la somme des liens sortants $\\Sigma_i(t)$")
plt.xlabel("Itérations $t$")
plt.ylabel("$\\Sigma_i(t)$")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```





D. Explications Complètes

Dans cet exemple, nous simulons la dynamique d'un lien sortant d'une entité $\mathcal{E}_i$ possédant $n_{\text{links}} = 10$ connexions. Chaque lien $\omega_{i,j}(t)$ évolue selon une règle additive classique à laquelle on ajoute un terme d'inhibition compétitive et, enfin, une opération de clipping. Plus précisément :

- **Mise à jour additive** :

  Chaque pondération est mise à jour en ajoutant le terme $\eta\left[S(j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right]$. Ce terme tend à rapprocher $\omega_{i,j}$ de la valeur théorique $S(j)/\tau$.

- **Inhibition compétitive** :

  La somme $\sum_{k\neq j}\omega_{i,k}\,(t)$ est calculée pour l'entité, et le terme $-\gamma \times$ (total des autres liens) est soustrait à la mise à jour de chaque lien. Ainsi, si d'autres liens sont déjà élevés, l'augmentation de $\omega_{i,j}$ sera freinée.

- **Clipping** :

  Après avoir appliqué la mise à jour, nous utilisons l'opérateur $\min(\cdot, \omega_{\max})$ pour garantir que la valeur de $\omega_{i,j}(t+1)$ ne dépasse jamais le seuil fixé $\omega_{\max}$. Ce mécanisme empêche toute croissance excessive, même si la synergie $S(j)$ et les autres paramètres favoriseraient une augmentation trop importante.

- **Visualisation** :

  Nous traçons deux graphiques : le premier montre l'évolution individuelle de chaque lien $\omega_{i,j}(t)$ au fil des itérations, avec en point de référence les valeurs théoriques $S(j)/\tau$ lorsque celles-ci sont inférieures à $\omega_{\max}$. Le second graphique trace l'évolution de la somme totale des liens sortants $\Sigma_i(t)$ pour l'entité, permettant de vérifier l'effet du mécanisme de "budget" sur la répartition globale des ressources.

E. Conclusion

L'opération de **clipping** constitue un mécanisme essentiel pour stabiliser la dynamique des pondérations dans un SCN, en imposant une borne supérieure $\omega_{\max}$ à chaque lien. Ce procédé, combiné avec l'inhibition compétitive, permet de contrôler la répartition des ressources de connexion d'une entité, empêchant ainsi l'emballement des poids et favorisant la formation de clusters bien définis. L'exemple en Python présenté ici, avec ses graphiques, illustre concrètement comment la mise à jour de $\omega_{i,j}$ converge vers des valeurs régulées et comment la somme totale des liens se stabilise sous l'effet de ces mécanismes.

Ce développement, intégrant explications mathématiques et implémentation pratique, fournit une base solide pour comprendre et exploiter le mécanisme de clipping dans le cadre du Deep Synergy Learning.

5.5.3.2. Réglage de $\omega_{\max}$ et son effet sur l'émergence de clusters

Lorsqu'on introduit un **clipping** dans la mise à jour des pondérations, nous imposons la contrainte suivante :

$$\omega_{i,j}(t+1) \leftarrow \min\big(\omega_{i,j}(t+1),\, \omega_{\max}\big).$$

Ce procédé, bien qu'il puisse paraître comme un simple ajustement, a un impact majeur sur la **dynamique** du SCN et la qualité des **clusters** qui émergent. En effet, le choix de la valeur $\omega_{\max}$ détermine dans quelle mesure chaque lien $\omega_{i,j}$ pourra se développer, et par conséquent comment les entités $\mathcal{E}_i$ vont concentrer leurs ressources de connexion.

A. Importance Fondamentale du Choix de ω_{max}

Le mécanisme de clipping agit localement sur chaque connexion en contraignant la valeur maximale atteinte par $\omega_{i,j}$. Formellement, dans la mise à jour additive classique, nous avons :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\,\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big].$$

Lorsque le résultat de cette mise à jour dépasse $\omega_{\max}$, l'opérateur de clipping force :

$$\omega_{i,j}(t+1) \leftarrow \min\big(\omega_{i,j}(t+1), \omega_{\max}\big).$$

Ainsi, le point fixe théorique sans clipping, qui serait $\omega^*_{i,j} = \frac{S(i,j)}{\tau}$, est remplacé par :

$$\omega^*_{i,j} = \min\left(\frac{S(i,j)}{\tau},\, \omega_{\max}\right).$$

Ce réglage permet de moduler la **sélectivité** du réseau : un $\omega_{\max}$ faible restreint la force maximale de chaque lien, favorisant une répartition plus uniforme, tandis qu'un plafond élevé permet à certains liens de devenir très forts et de se démarquer, ce qui peut conduire à des clusters hiérarchisés.

B. Impact sur la Structure de Clusters

Du point de vue de la formation de clusters, le choix de $\omega_{\max}$ influence directement la topologie du réseau :

- Si $\omega_{\max}$ est trop bas, même les liens qui devraient naturellement devenir forts seront limités. Cela peut conduire à une homogénéisation des connexions où la différenciation entre les liens forts et faibles est atténuée. Dans ce cas, le SCN aura tendance à former des groupes moins contrastés, car toutes les connexions atteignent presque le même niveau maximal.

- Inversement, un $\omega_{\max}$ élevé permet à certains liens de se développer pleinement selon leur synergie intrinsèque $S(i,j)$. Si plusieurs liens sont en compétition, il est alors possible qu'un ou quelques liens dominent l'ensemble des connexions sortantes d'une entité, menant à une formation de clusters très marqués, dans lesquels certains liens sont beaucoup plus forts que d'autres.

Ainsi, la valeur de $\omega_{\max}$ se révèle être un paramètre de **régulation** crucial. En le combinant avec d'autres mécanismes tels que l'inhibition (qui limite la somme totale des connexions d'un nœud), on obtient un contrôle fin sur la manière dont les entités sélectionnent leurs partenaires privilégiés dans le réseau.

C. Ajustement Empirique et Adaptatif

Dans la pratique, le choix de $\omega_{\max}$ peut être réalisé de façon empirique. Par exemple, si l'on connaît l'ordre de grandeur des valeurs de $S(i,j)/\tau$, il est judicieux de fixer $\omega_{\max}$ en fonction de ces valeurs. Une approche consiste à définir

$$\omega_{\max} = \alpha \cdot \max_{i,j} \left\{ \frac{S(i,j)}{\tau} \right\},$$

où $\alpha \geq 1$ est un facteur multiplicatif qui permet de ne pas trop contraindre la dynamique lorsque certaines synergies sont très élevées. Dans certains scénarios, il est également envisageable d'adapter dynamiquement $\omega_{\max}$ au fil des itérations (similaire à un recuit simulé), afin de permettre une phase exploratoire initiale suivie d'une stabilisation plus stricte.

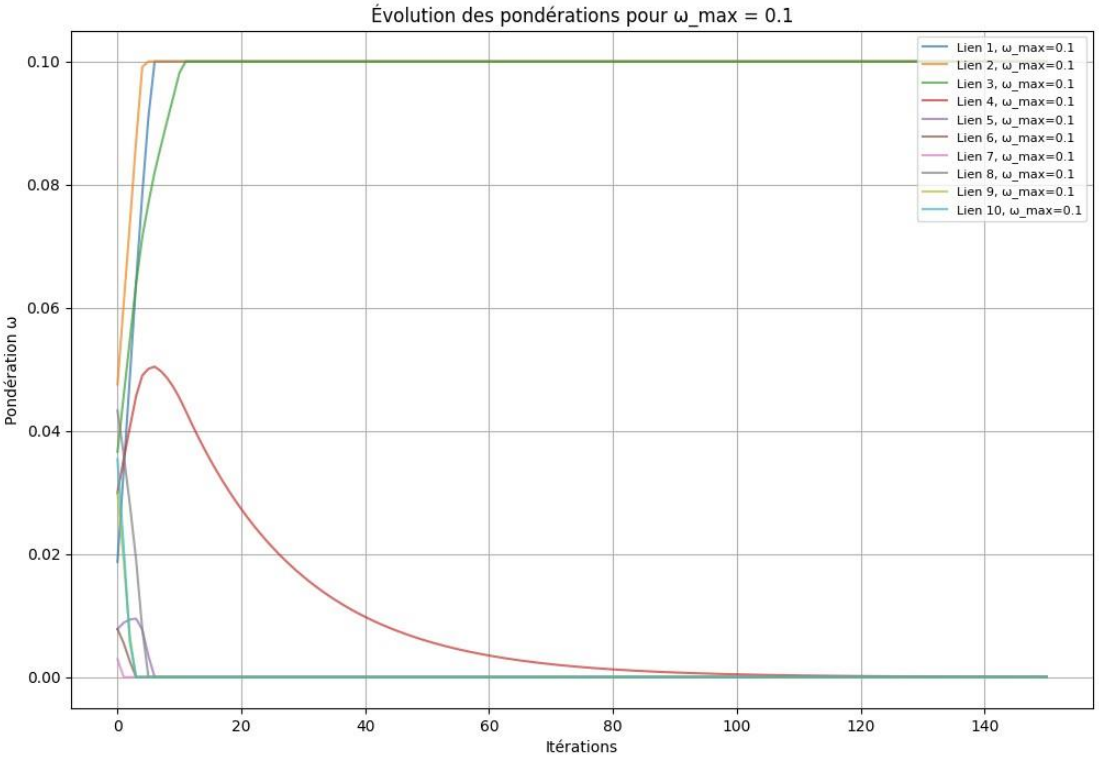
D. Implémentation Python Complète avec Graphiques

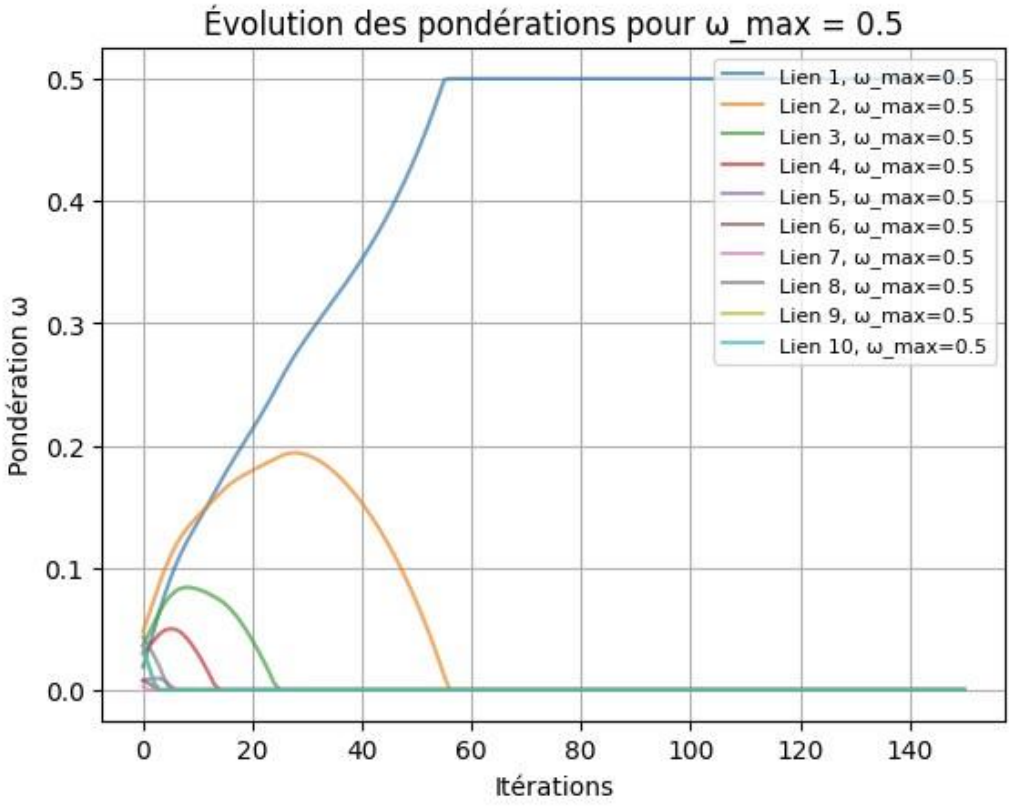
Nous présentons ci-dessous un exemple complet en Python qui illustre l'effet du paramétrage de $\omega_{\max}$ sur la dynamique d'un SCN. Ce script simule la mise à jour d'une matrice de pondérations pour une entité possédant plusieurs liens, intègre le clipping, et affiche l'évolution des pondérations au fil des itérations ainsi que la répartition finale sous forme de heatmap.

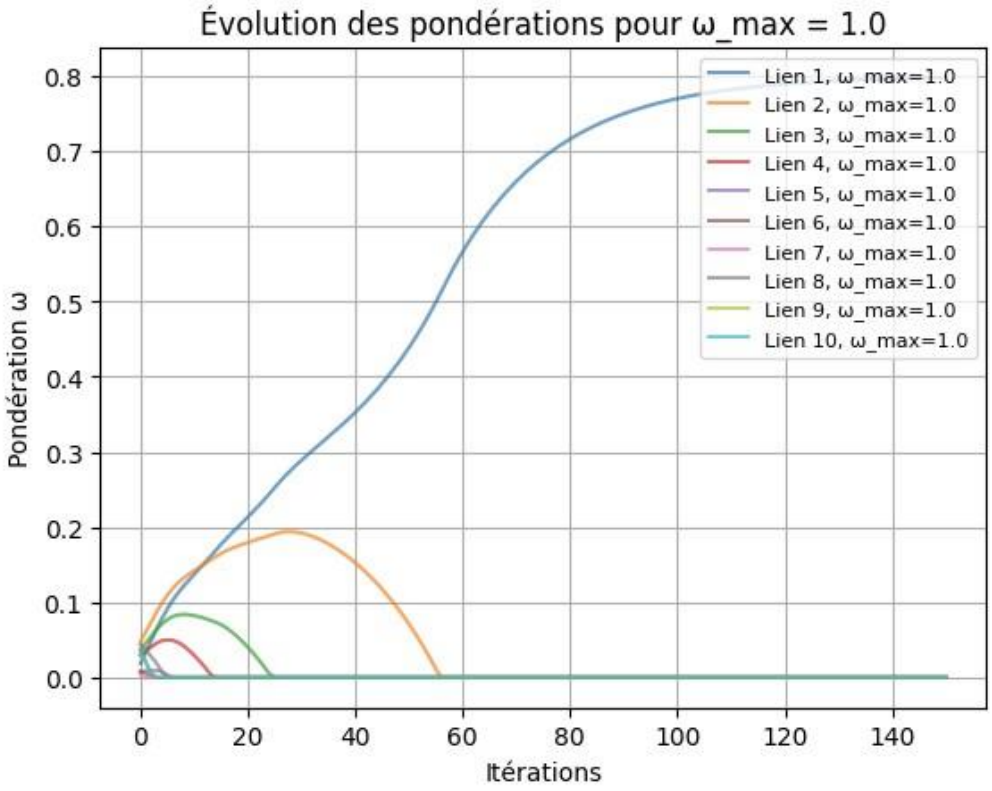
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

# Paramètres de la simulation
eta = 0.05       # Taux d'apprentissage
tau = 1.0        # Facteur de décroissance
gamma = 0.1      # Coefficient d'inhibition compétitive
num_iterations = 150  # Nombre d'itérations
n_links = 10     # Nombre de liens sortants pour une entité

# Paramètre de clipping : on va comparer différents réglages
#omega_max_values = [0.5, 1.0, 2.0]
omega_max_values = [0.1, 0.5, 1.0]

# Définition des synergies S(i,j) pour l'entité E_i
```

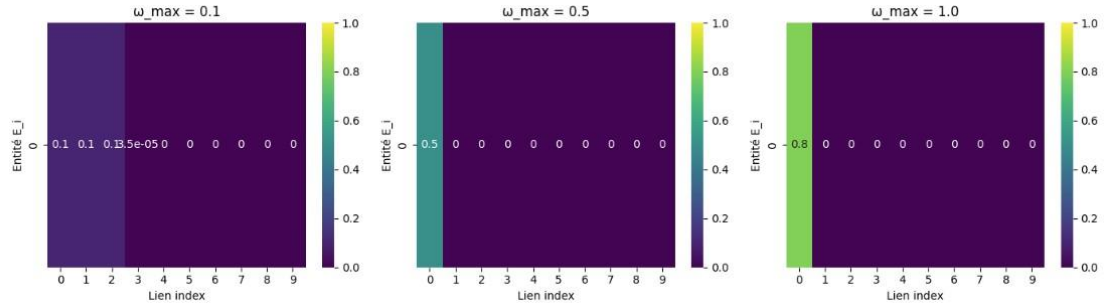
```
# Pour illustrer, nous fixons des valeurs différentes pour chaque lien.
S = np.linspace(0.8, 0.2, n_links)  # Synergies décroissantes de 0.8 à 0.2

# Fonction de mise à jour avec inhibition et clipping
def simulate_update(omega_max, eta, tau, gamma, num_iterations, S):
    # Initialisation des pondérations avec de faibles valeurs aléatoires
    np.random.seed(42)
    omega = np.random.uniform(0, 0.05, size=n_links)
    omega_history = np.zeros((num_iterations + 1, n_links))
    omega_history[0, :] = omega.copy()

    # Simulation de la mise à jour sur num_iterations itérations
    for t in range(num_iterations):
        total_weight = np.sum(omega)  # Somme des pondérations pour l'entité E_i à l'itération t
        for j in range(n_links):
            # Calcul de la mise à jour additive de base
            delta_update = eta * (S[j] - tau * omega[j])
            # Calcul du terme d'inhibition : somme des autres liens pour l'entité E_i
            inhibition = gamma * (total_weight - omega[j])
            # Nouvelle pondération avant clipping
            new_omega = omega[j] + delta_update - inhibition
            # Application du clipping : la nouvelle valeur ne doit pas dépasser omega_max
            new_omega = min(new_omega, omega_max)
            # On garantit que la pondération reste positive
            omega[j] = max(new_omega, 0)
        omega_history[t + 1, :] = omega.copy()

    return omega_history

# Simulation pour chaque valeur de omega_max
histories = {}
for omega_max in omega_max_values:
    histories[omega_max] = simulate_update(omega_max, eta, tau, gamma, num_iterations, S)

# Affichage des trajectoires pour chaque réglage de omega_max
plt.figure(figsize=(12, 8))
for omega_max, history in histories.items():
    for j in range(n_links):
        plt.plot(history[:, j], label=f'Lien {j+1}, ω_max={omega_max}', alpha=0.7)
    plt.title(f'Évolution des pondérations pour ω_max = {omega_max}')
    plt.xlabel("Itérations")
    plt.ylabel("Pondération ω")
    plt.legend(fontsize=8, loc="upper right")
    plt.grid(True)
    plt.show()

# Affichage d'une heatmap finale pour comparer les distributions de pondérations
plt.figure(figsize=(14, 4))
for idx, omega_max in enumerate(omega_max_values):
    final_weights = histories[omega_max][-1, :].reshape(1, -1)
    plt.subplot(1, len(omega_max_values), idx+1)
    sns.heatmap(final_weights, annot=True, cmap="viridis", cbar=True, vmin=0, vmax=max(omega_m
ax_values))
    plt.title(f'ω_max = {omega_max}')
    plt.xlabel("Lien index")
```

```
    plt.ylabel("Entité E_i")
plt.tight_layout()
plt.show()
```









F. Explications Détaillées

Dans cet exemple, nous considérons une entité $\mathcal{E}_i$ qui possède $n_{\text{links}} = 10$ connexions, chacune ayant une synergie fixée $S(j)$ variant linéairement de 0.8 à 0.2. La mise à jour de chaque lien suit l'équation :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right] - \gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}\,(t).$$

Après avoir calculé la mise à jour, nous appliquons le **clipping** :

$$\omega_{i,j}(t+1) \leftarrow \min\left(\omega_{i,j}(t+1), \omega_{\max}\right).$$

Nous comparons trois valeurs de $\omega_{\max}$: 0.5, 1.0 et 2.0. La fonction *simulate_update* effectue la mise à jour sur un nombre fixé d'itérations et retourne l'historique des pondérations pour chaque lien. Ensuite, nous traçons, pour chaque réglage, l'évolution des valeurs de $\omega_{i,j}(t)$ ainsi qu'une heatmap finale montrant la distribution des pondérations après la convergence.

L'analyse graphique permet de constater que :

- Pour un $\omega_{\max}$ faible (par exemple 0.5), les pondérations sont strictement limitées, ce qui peut conduire à une uniformisation des liens et à une perte de différenciation dans la formation de clusters.

- Pour un $\omega_{\max}$ plus élevé (par exemple 1.0 ou 2.0), les liens qui bénéficient d'une synergie forte peuvent atteindre des valeurs proches de leur point fixe théorique (sous réserve de l'effet inhibiteur), permettant ainsi la mise en évidence de clusters plus marqués et hiérarchisés.

G. Conclusion

Le paramétrage de $\omega_{\max}$ est crucial pour contrôler la dynamique des pondérations dans un SCN. Le clipping, en imposant une saturation locale sur chaque lien, agit comme une contrainte de ressources permettant de limiter l'emballement de certains poids et de favoriser une spécialisation des connexions. En ajustant $\omega_{\max}$ et en combinant cet effet avec l'inhibition compétitive, on module la formation des clusters et on contrôle la répartition des ressources de connexion. L'implémentation Python présentée ici, avec ses visualisations, offre un exemple concret de l'impact du réglage de $\omega_{\max}$ sur l'émergence des structures dans un SCN, fournissant ainsi un outil précieux pour l'expérimentation et l'analyse en Deep Synergy Learning.

Cette approche intégrée, alliant explications mathématiques détaillées et implémentation pratique, permet d'illustrer la puissance du clipping dans la stabilisation de la dynamique et dans la formation de clusters au sein d'un SCN.

5.5.4. Recuit Simulé ou Bruit

En plus des mécanismes d'inhibition (section 5.5.2) et de saturation (section 5.5.3), un autre procédé couramment employé dans la mise à jour des pondérations $\omega_{i,j}$ est l'**injection de bruit** ou l'utilisation d'une **méthode de recuit simulé**. Ces approches visent à **perturber** périodiquement le système pour **éviter** qu'il ne se fige trop tôt dans un minimum local, ou pour mieux explorer l'espace des configurations possibles. Sur le plan mathématique, elles introduisent un **terme stochastique** ou un **paramètre de "température"** qui se modifie au fil des itérations.

5.5.3.2. Réglage de $\omega_{\max}$ et son effet sur l'émergence de clusters

Dans un **Synergistic Connection Network** (SCN), la mise à jour des pondérations $\omega_{i,j}$ se fait typiquement selon une règle additive telle que

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right],$$

où $\eta > 0$ est le taux d'apprentissage et $\tau > 0$ représente le coefficient de décroissance. Afin d'empêcher qu'un ou plusieurs liens ne deviennent excessivement forts — situation qui pourrait fausser la dynamique du réseau et masquer la spécialisation souhaitée —, on introduit un **mécanisme de clipping**. Ce procédé consiste à contraindre chaque valeur $\omega_{i,j}(t+1)$ par la relation

$$\omega_{i,j}(t+1) \leftarrow \min\big(\omega_{i,j}(t+1),\, \omega_{\max}\big),$$

ce qui force chaque connexion à ne pas dépasser un plafond fixé, $\omega_{\max}$. Sur le plan mathématique, en l'absence de clipping le point fixe théorique pour la mise à jour additive serait

$$\omega_{i,j}^{*} = \frac{S(i,j)}{\tau}.$$

Or, dans le cas où $\frac{S(i,j)}{\tau} > \omega_{\max}$, la dynamique est « coupée » et le lien se stabilise à $\omega_{\max}$. Cette contrainte a plusieurs conséquences sur la formation des clusters au sein du SCN :

- **Uniformisation versus différenciation** : Si $\omega_{\max}$ est trop faible, même les liens qui devraient être forts seront plafonnés à une valeur inférieure, aboutissant à une homogénéisation des connexions et à des clusters moins différenciés.

- **Hiérarchisation des liens** : Un $\omega_{\max}$ élevé permet à certains liens de se développer pleinement (selon leur synergie intrinsèque $S(i,j)$) tandis que d'autres restent faibles. On obtient alors une structure de clusters plus contrastée, avec des liens dominants entre certaines entités qui se distinguent nettement des connexions moins significatives.

- **Interaction avec l'inhibition** : Le clipping agit sur chaque lien individuellement, alors que l'inhibition (par exemple, un terme du type $-\gamma \sum_{k \neq j} \omega_{i,k}$) régule la somme des connexions sortantes d'une entité. Ensemble, ces deux mécanismes permettent à l'entité de concentrer son « budget de connexion » sur quelques partenaires privilégiés.

La détermination de $\omega_{\max}$ est donc cruciale : elle doit être choisie en fonction de l'échelle des synergies $S(i,j)$ et du coefficient τ pour permettre une discrimination effective entre les connexions. Dans certains cas, il est même envisageable de faire évoluer $\omega_{\max}$ au fil des itérations (similaire à un recuit simulé) afin de favoriser une phase d'exploration initiale suivie d'une consolidation des clusters.

Implémentation Python avec Visualisations

Nous proposons ci-dessous un exemple complet en Python. Ce script simule un SCN où n entités sont organisées en clusters grâce à une matrice de synergie **S** dotée d'une structure en blocs. La mise à jour des pondérations suit la règle additive avec clipping :

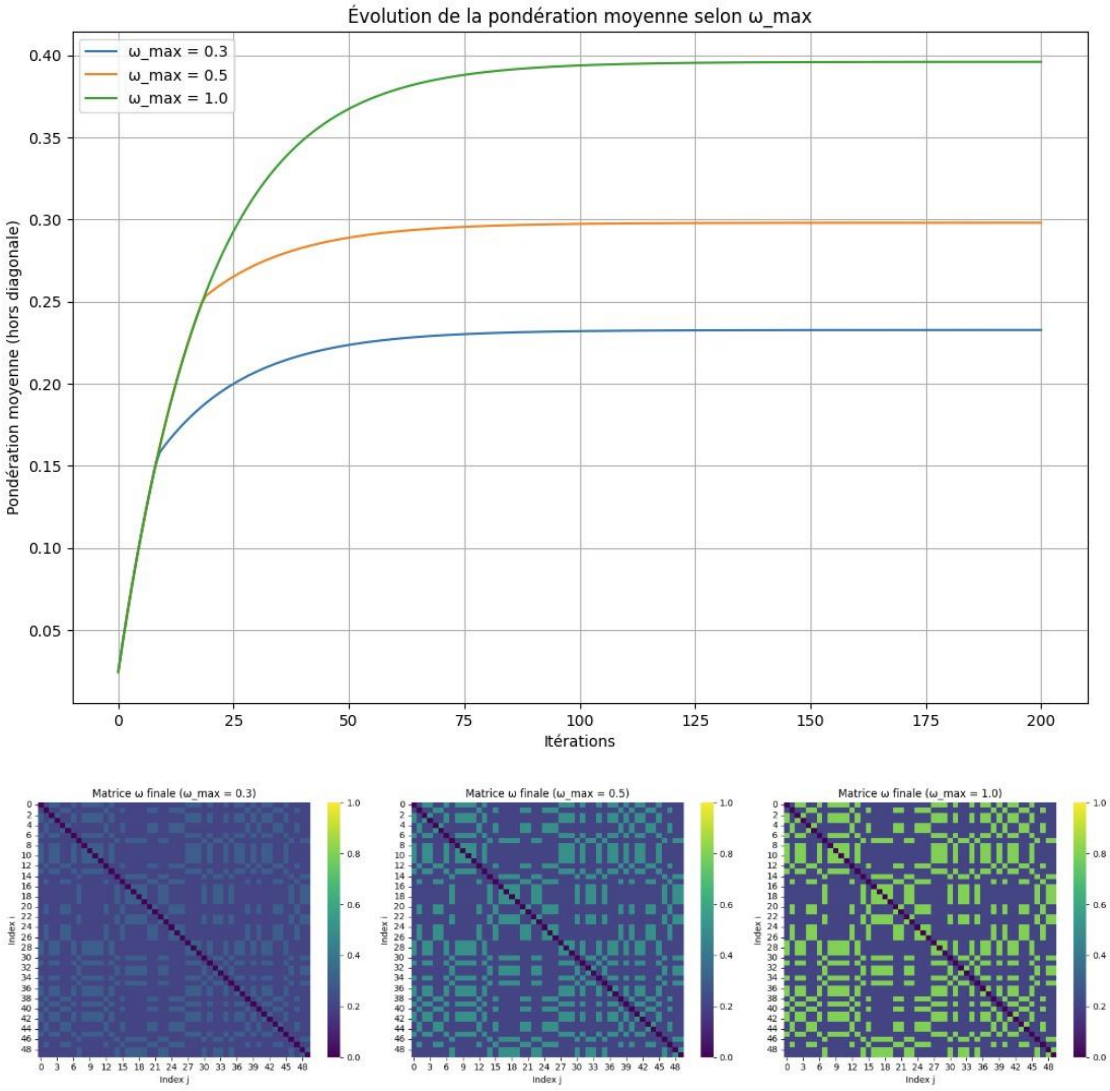
$$\omega_{i,j}(t+1) = \min\big(\omega_{i,j}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big],\ \omega_{\max}\big).$$

Nous étudierons l'impact de différents réglages de $\omega_{\max}$ sur la formation des clusters.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

# ---------------------------
# Paramètres de la simulation
# ---------------------------
np.random.seed(42)

n = 50                  # nombre total d'entités
n_clusters = 3          # nombre de clusters souhaités
eta = 0.05              # taux d'apprentissage
tau = 1.0               # coefficient de décroissance
```

```
num_iterations = 200          # nombre d'itérations
# On va tester différents plafonds
#omega_max_values = [0.3, 0.7, 1.5]
omega_max_values = [0.3, 0.5, 1.0]

# ----------------------------
# Création d'une matrice de synergie S
# ----------------------------
# On suppose que les entités sont réparties en n_clusters,
# avec une forte synergie intra-cluster et une faible synergie inter-cluster.

# Attribution aléatoire de clusters
cluster_labels = np.random.choice(n_clusters, n)

# Initialisation de la matrice S
S = np.zeros((n, n))
for i in range(n):
    for j in range(n):
        if cluster_labels[i] == cluster_labels[j]:
            # Synergie élevée pour les entités dans le même cluster
            S[i, j] = 0.8
        else:
            # Synergie faible pour les entités dans des clusters différents
            S[i, j] = 0.2
# On s'assure que la diagonale est nulle (pas de self-connexion)
np.fill_diagonal(S, 0)

# ----------------------------
# Fonction de simulation avec clipping
# ----------------------------
def simulate_scn(omega_max, eta, tau, num_iterations, S):
    n = S.shape[0]
    # Initialisation des pondérations avec un bruit faible
    omega = np.random.uniform(0, 0.05, (n, n))
    np.fill_diagonal(omega, 0)
    omega_history = np.zeros((num_iterations+1, n, n))
    omega_history[0] = omega.copy()

    # Mise à jour itérative
    for t in range(num_iterations):
        # Calcul de la nouvelle matrice selon la règle additive
        omega_new = omega + eta * (S - tau * omega)
        # Application du clipping
        omega_new = np.minimum(omega_new, omega_max)
        # S'assurer que les self-connections restent nulles
        np.fill_diagonal(omega_new, 0)
        # Mettre à jour pour la prochaine itération
        omega = omega_new.copy()
        omega_history[t+1] = omega.copy()

    return omega_history

# ----------------------------
# Exécution de la simulation pour différents omega_max
# ----------------------------
```

```
results = {}
for omega_max in omega_max_values:
    results[omega_max] = simulate_scn(omega_max, eta, tau, num_iterations, S)

# ----------------------------
# Visualisation des trajectoires moyennes des pondérations
# ----------------------------
plt.figure(figsize=(12, 8))
for omega_max in omega_max_values:
    # Calcul de la moyenne des pondérations hors diagonale pour chaque itération
    mean_values = [np.mean(omega_history[np.triu_indices_from(omega_history, k=1)])
                   for omega_history in results[omega_max]]
    plt.plot(mean_values, label=f'ω_max = {omega_max}')
plt.xlabel("Itérations")
plt.ylabel("Pondération moyenne (hors diagonale)")
plt.title("Évolution de la pondération moyenne selon ω_max")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# ----------------------------
# Visualisation finale : Heatmaps des matrices ω
# ----------------------------
plt.figure(figsize=(18, 5))
for idx, omega_max in enumerate(omega_max_values):
    final_omega = results[omega_max][-1]
    plt.subplot(1, len(omega_max_values), idx+1)
    sns.heatmap(final_omega, cmap="viridis", vmin=0, vmax=max(omega_max_values), annot=False)
    plt.title(f'Matrice ω finale (ω_max = {omega_max})')
    plt.xlabel("Index j")
    plt.ylabel("Index i")
plt.tight_layout()
plt.show()
```



Explications

A. Principe du Clipping et Réglage de $\omega_{\max}$

La formule de mise à jour initiale est donnée par

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right].$$

Pour éviter que certains liens ne deviennent trop forts, nous appliquons ensuite le **clipping** :

$$\omega_{i,j}(t+1) \leftarrow \min\left(\omega_{i,j}(t+1),\, \omega_{\max}\right).$$

Cette contrainte force chaque connexion à être bornée, ce qui, en fonction de la valeur choisie pour $\omega_{\max}$, influencera la capacité des liens à atteindre leur point fixe théorique $\frac{S(i,j)}{\tau}$. Si $\frac{S(i,j)}{\tau}$ excède $\omega_{\max}$, alors la croissance est limitée par cette borne.

B. Impact sur l'Émergence de Clusters

Dans notre simulation, la matrice de synergie S est construite de manière à favoriser une forte cohésion au sein d'un même cluster (valeur de 0.8) et une faible cohésion entre des entités de

clusters différents (valeur de 0.2). Le clipping intervient ensuite pour influencer la distribution finale des poids $\omega_{i,j}$.

- Un **ω_max** faible force toutes les pondérations à rester en dessous d'un seuil strict, ce qui peut engendrer des clusters moins différenciés.
- Un **ω_max** élevé permet aux liens d'exprimer pleinement leurs différences, conduisant à une hiérarchisation plus marquée des connexions.

C. Implémentation et Visualisation

Le script Python présenté ci-dessus simule la dynamique de mise à jour du SCN sur un nombre donné d'itérations et pour plusieurs valeurs de $\omega_{\max}$. La fonction *simulate_scn* réalise la mise à jour des poids selon la règle additive, applique le clipping, et stocke l'historique de la matrice de pondérations. Les graphiques générés montrent l'évolution moyenne des pondérations ainsi qu'une heatmap de la matrice finale, permettant d'observer l'impact du réglage de $\omega_{\max}$ sur la structure émergente.

Conclusion

L'ajustement de $\omega_{\max}$ joue un rôle clé dans la régulation des connexions au sein d'un SCN. Par l'intermédiaire du **clipping**, on impose une borne sur chaque pondération, empêchant ainsi un emballement individuel et favorisant une répartition plus sélective des ressources de connexion. L'implémentation en Python ci-dessus, accompagnée de visualisations graphiques, permet d'illustrer concrètement comment la dynamique évolue pour différentes valeurs de $\omega_{\max}$ et comment ce paramètre influence l'émergence des clusters dans le réseau. Cette approche offre ainsi un outil précieux pour expérimenter et affiner la structure auto-organisée d'un SCN dans des contextes variés d'apprentissage profond et de systèmes multi-agents.

5.5.4.1. Ajout d'un Terme Stochastique dans la Mise à Jour

A. Principes Généraux et Analogie avec le Recuit Simulé

Dans un SCN, la mise à jour classique des pondérations se réalise selon une règle additive déterministe de la forme

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right],$$

où $\eta > 0$ est le taux d'apprentissage et $\tau > 0$ représente le coefficient de décroissance. Cette mise à jour tend à conduire chaque $\omega_{i,j}$ vers un point fixe théorique $\omega_{i,j}^{*} = \frac{S(i,j)}{\tau}$. Toutefois, dans un environnement purement déterministe, le réseau peut se figer dans des configurations localement stables qui ne sont pas optimales, car certains liens potentiellement pertinents pourraient être négligés en raison du verrouillage dans un minimum local.

Pour pallier ce problème, un **terme stochastique** est ajouté à la règle de mise à jour. Ce terme, généralement de la forme $\alpha\,\xi_{i,j}(t)$, apporte une perturbation aléatoire contrôlée :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right] + \alpha\,\xi_{i,j}(t).$$

Ici, $\xi_{i,j}(t)$ est une variable aléatoire tirée d'une distribution centrée, par exemple $\xi_{i,j}(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ pour une distribution normale ou $\mathcal{U}(-\delta, \delta)$ pour une distribution uniforme, et $\alpha > 0$ ajuste l'amplitude relative de cette perturbation par rapport au terme déterministe.

Ce procédé s'inspire du **recuit simulé**, une méthode d'optimisation stochastique dans laquelle l'injection de bruit permet d'éviter un blocage prématuré dans un minimum local, tout en favorisant l'exploration de l'espace de recherche. Le terme stochastique permet ainsi à la dynamique du SCN de « rebondir » hors d'un point fixe potentiellement sous-optimal et d'explorer d'autres configurations qui pourraient conduire à une meilleure organisation globale du réseau.

B. Modélisation Mathématique et Impact sur la Dynamique

La dynamique complète, avec l'ajout du bruit, s'exprime par :

$$\Delta\, \omega_{i,j}(t) = \omega_{i,j}(t+1) - \omega_{i,j}(t) = \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right] + \alpha\, \xi_{i,j}(t).$$

En l'absence de bruit ($\alpha = 0$), la suite $\{\omega_{i,j}(t)\}$ converge vers $\omega_{i,j}^{*} \approx \frac{S(i,j)}{\tau}$ (ou s'éteint si $S(i,j)$ est trop faible). L'ajout du terme $\alpha\, \xi_{i,j}(t)$ modifie cette convergence : plutôt que de converger exactement vers un point fixe, la dynamique converge vers une **distribution** autour du point fixe déterministe. La variance de cette distribution est fonction de l'amplitude α et de la variance σ^2 de la variable aléatoire.

En outre, la possibilité de faire varier α au fil du temps (par exemple en appliquant une décroissance exponentielle du type

$$\alpha(t+1) = \delta\, \alpha(t) \quad \text{avec} \quad 0 < \delta < 1,$$

) permet d'initier la dynamique dans un régime d'**exploration** (fort bruit initial) et de la laisser se stabiliser en réduisant progressivement le niveau de perturbation, à l'instar d'un processus de recuit.

C. Potentiel d'Exploration et Risques d'Instabilité

L'introduction d'un terme stochastique offre plusieurs avantages en termes d'exploration de l'espace de configuration. Parfois, même si la dynamique déterministe se rapproche d'un attracteur, de légères fluctuations permettent au système de s'extraire de minima locaux peu profonds pour atteindre des configurations plus globalement optimales. Cependant, un niveau de bruit excessif (un α trop grand ou une variance trop élevée pour $\xi_{i,j}(t)$) peut empêcher la convergence, générant des oscillations persistantes ou même un comportement chaotique.

Le défi consiste donc à **équilibrer** le niveau d'exploration induit par le terme stochastique avec la nécessité de convergence pour que le SCN puisse former des **clusters** stables et significatifs.

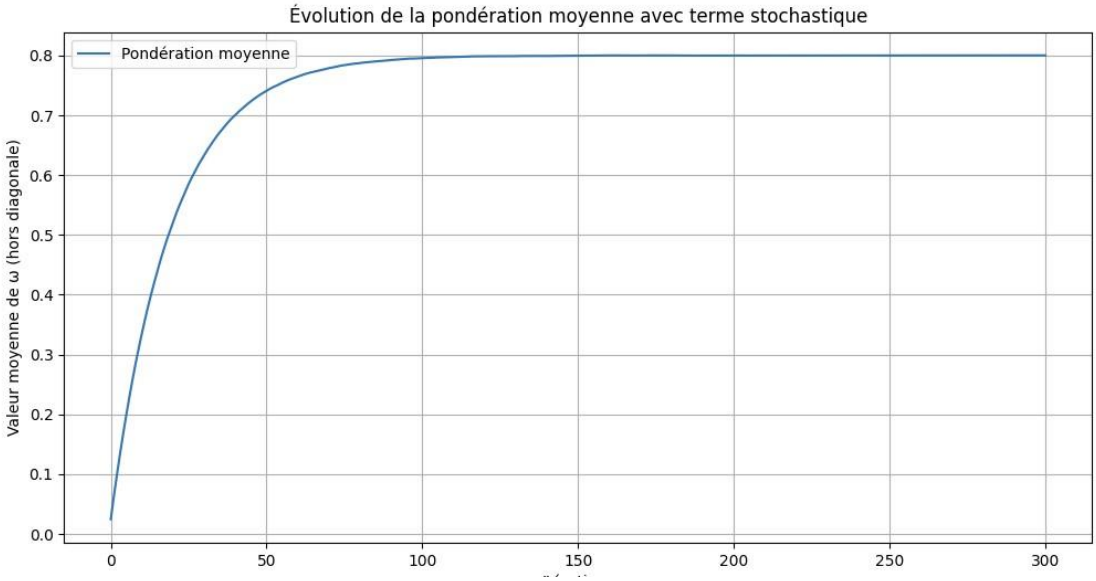
D. Implémentation Python Complète avec Graphiques

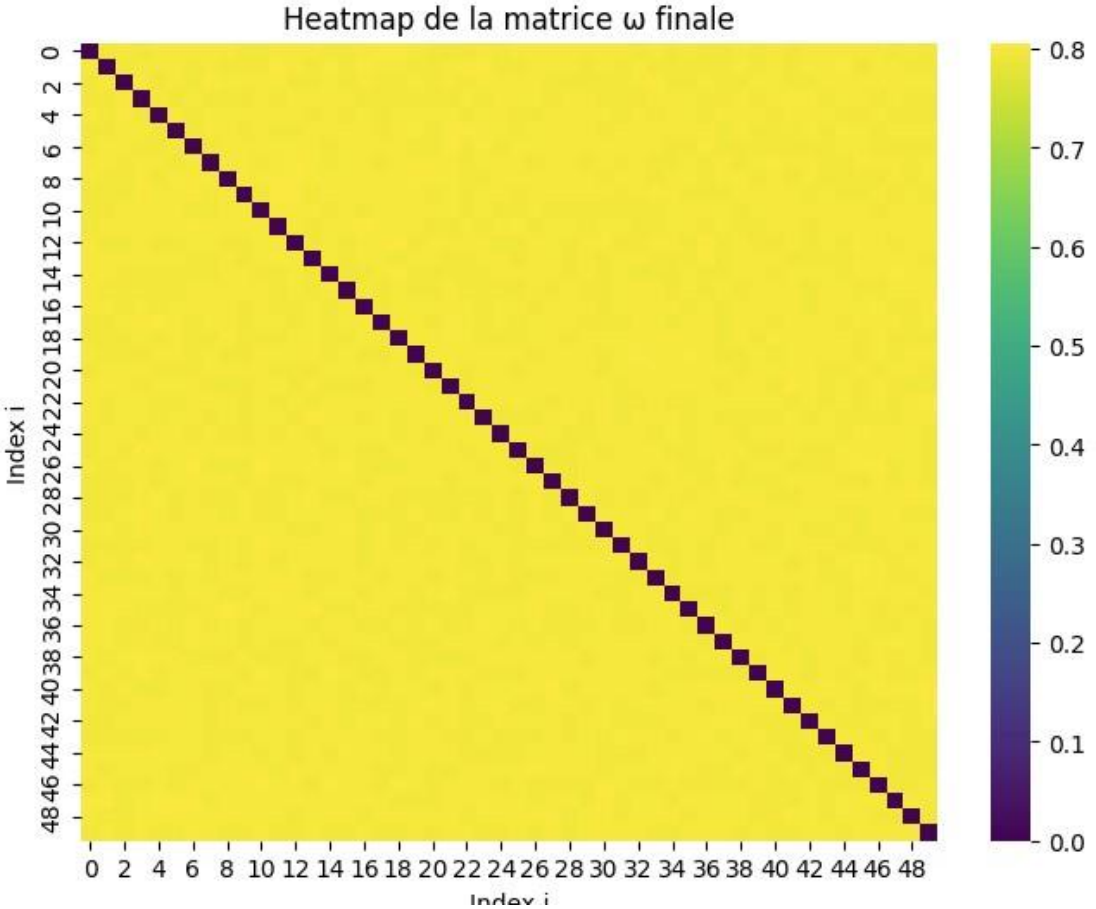
Nous présentons ci-dessous une implémentation en Python qui simule la mise à jour des pondérations dans un SCN avec ajout d'un terme stochastique. Le code inclut la visualisation graphique de la dynamique de quelques liens pour observer l'effet du bruit et de la décroissance de α.

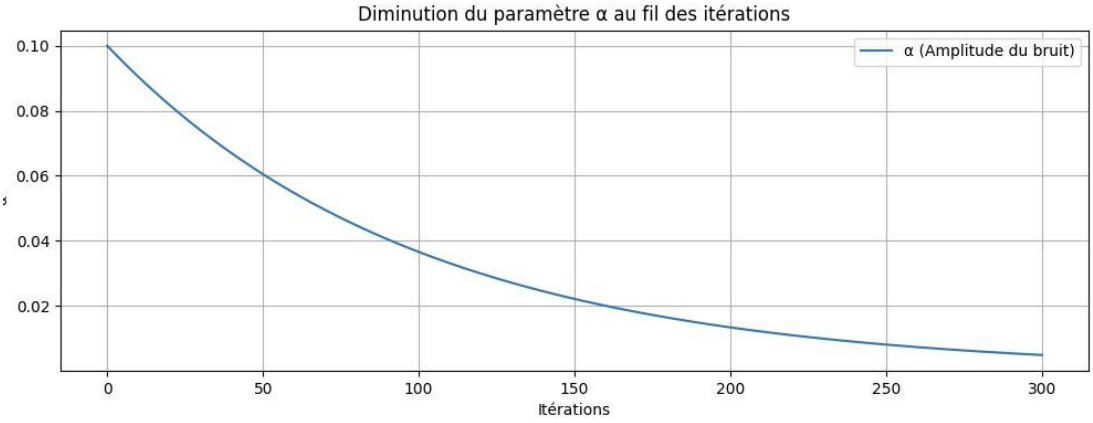
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
```

```
# Fixation d'une graine pour la reproductibilité
np.random.seed(42)

# ----------------------------
# Paramètres de la simulation
# ----------------------------
n = 50  # Nombre d'entités (pour la matrice, on considère une simulation dense)
eta = 0.05  # Taux d'apprentissage
tau = 1.0   # Coefficient de décroissance
initial_alpha = 0.1  # Amplitude initiale du terme stochastique
delta = 0.99  # Facteur de décroissance de alpha (baisse de température)
sigma = 0.1  # Écart-type pour la distribution normale du bruit
num_iterations = 300  # Nombre total d'itérations

# ----------------------------
# Création d'une matrice de synergie S
# ----------------------------
# Pour simplifier, nous supposons que S(i,j) est constant et uniforme
# sur le réseau, par exemple S(i,j)=0.8 pour i != j.
S = np.full((n, n), 0.8)
np.fill_diagonal(S, 0)  # Pas de self-synergie

# ----------------------------
# Initialisation des pondérations ω
# ----------------------------
omega = np.random.uniform(0, 0.05, (n, n))
np.fill_diagonal(omega, 0)

# Stockage de l'historique pour la visualisation
omega_history = np.zeros((num_iterations + 1, n, n))
omega_history[0] = omega.copy()

# Initialisation de alpha
alpha = initial_alpha
alpha_history = [alpha]

# ----------------------------
# Simulation de la mise à jour avec terme stochastique
# ----------------------------
for t in range(num_iterations):
    # Mise à jour alpha (recuit simulé)
    alpha *= delta
    alpha_history.append(alpha)

    # Mise à jour de ω pour chaque paire (i,j)
    omega_next = omega.copy()
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i != j:
                # Calcul déterministe de la mise à jour additive
                deterministic_update = eta * (S[i, j] - tau * omega[i, j])
                # Terme stochastique: bruit tiré de N(0, sigma^2)
                stochastic_term = alpha * np.random.normal(0, sigma)
                # Mise à jour totale
```

```
            omega_next[i, j] = omega[i, j] + deterministic_update + stochastic_term
            # Option de clipping pour éviter des valeurs négatives
            if omega_next[i, j] < 0:
                omega_next[i, j] = 0
    # Mise à jour de la matrice pour la prochaine itération
    omega = omega_next.copy()
    omega_history[t+1] = omega.copy()

# ----------------------------
# Visualisation des résultats
# ----------------------------
# Exemple de visualisation : moyenne des pondérations au fil du temps
mean_omega = [np.mean(omega_history[t][np.triu_indices(n, k=1)]) for t in range(num_iterations+1)]
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(mean_omega, label="Pondération moyenne")
plt.xlabel("Itérations")
plt.ylabel("Valeur moyenne de ω (hors diagonale)")
plt.title("Évolution de la pondération moyenne avec terme stochastique")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Visualisation d'une heatmap de la matrice finale ω
plt.figure(figsize=(8, 6))
sns.heatmap(omega_history[-1], cmap="viridis", annot=False)
plt.title("Heatmap de la matrice ω finale")
plt.xlabel("Index j")
plt.ylabel("Index i")
plt.show()

# Visualisation de l'évolution de alpha
plt.figure(figsize=(12, 4))
plt.plot(alpha_history, label="α (Amplitude du bruit)")
plt.xlabel("Itérations")
plt.ylabel("α")
plt.title("Diminution du paramètre α au fil des itérations")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```


Évolution de la pondération moyenne avec terme stochastique
Pondération moyenne
Valeur moyenne de ω (hors diagonale)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0
50
100
150
200
250
300


Heatmap de la matrice ω finale
Index i
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8



Explications Complètes

Principe et Formulation

La mise à jour déterministe initiale est donnée par

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right].$$

Pour introduire un **terme stochastique**, nous ajoutons une perturbation $\alpha\,\xi_{i,j}(t)$ où $\xi_{i,j}(t)$ est une variable aléatoire suivant une distribution normale centrée $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (vous pouvez également utiliser une distribution uniforme). Le paramètre α contrôle l'amplitude du bruit. Ainsi, la mise à jour devient :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right] + \alpha\,\xi_{i,j}(t).$$

En outre, pour favoriser une phase d'exploration initiale, on peut permettre à α de décroître au fil des itérations selon :

$$\alpha(t+1) = \delta\,\alpha(t) \quad \text{avec} \quad 0 < \delta < 1.$$

Impact sur la Dynamique

L'ajout du terme stochastique permet au réseau de s'extraire des minima locaux en introduisant une variabilité qui, dans certains cas, peut mener à un réaménagement des clusters. La dynamique ainsi obtenue est alors celle d'un **processus stochastique** qui converge non pas vers un unique point fixe, mais vers une distribution autour de ce point, dont la variance dépend de α et σ.

Lorsque le bruit est élevé, le système explore un plus grand nombre de configurations avant de se stabiliser. À mesure que α décroît (baisse de « température »), le réseau se stabilise progressivement, permettant la formation de clusters plus robustes et adaptés à la variabilité des données.

Implémentation et Visualisations

Le code Python ci-dessus simule la mise à jour des pondérations $\omega_{i,j}$ dans un SCN avec injection de bruit. Nous utilisons des bibliothèques standards telles que **NumPy** pour le calcul matriciel et **Matplotlib** ainsi que **Seaborn** pour la visualisation.

- La **fonction de simulation** initialise une matrice ω avec de faibles valeurs aléatoires, puis met à jour cette matrice selon la règle stochastique.

- À chaque itération, le paramètre α est multiplié par δ pour simuler le recuit simulé.
- La mise à jour est effectuée pour chaque paire (i, j) (hors diagonale) en ajoutant le terme déterministe et le terme stochastique.
- Finalement, plusieurs visualisations sont proposées : l'évolution de la pondération moyenne, la heatmap de la matrice finale, et la décroissance de α.

Ces visualisations permettent d'observer comment le bruit influence la convergence des liens et la formation de clusters, offrant ainsi une compréhension concrète de l'impact de l'**ajout d'un terme stochastique** dans la dynamique d'un SCN.

Conclusion

L'ajout d'un **terme stochastique** dans la mise à jour des pondérations, via la formule

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right] + \alpha\,\xi_{i,j}(t),$$

permet de surmonter le risque de figement dans des minima locaux et favorise l'exploration de nouvelles configurations. Le paramètre α (avec une décroissance programmée) joue un rôle crucial en équilibrant l'exploration initiale et la stabilisation ultérieure. L'implémentation en Python ci-dessus, accompagnée de graphiques explicatifs, illustre concrètement comment cette dynamique peut être réalisée et visualisée dans un SCN. Ce procédé constitue une stratégie efficace pour améliorer la **flexibilité** et la **robustesse** d'un réseau auto-organisé dans des applications variées telles que la robotique multi-agent ou l'apprentissage non supervisé.

5.5.4.2. Diminution Progressive de la "Température" pour Éviter de Rester Piégé dans un Minimum Local

Dans le cadre d'un **Synergistic Connection Network (SCN)**, la mise à jour des pondérations $\omega_{i,j}$ repose sur une dynamique qui, dans sa version déterministe, tend à figer les valeurs autour d'un point fixe. Or, cette stabilité peut être trompeuse puisqu'elle risque de conduire le système à se retrouver bloqué dans un **minimum local** qui ne reflète pas l'optimum global de la synergie. Pour pallier ce problème, il est pertinent d'introduire un **terme stochastique** dans la mise à jour, de manière à favoriser l'**exploration** des configurations alternatives. Afin de contrôler cette exploration, on rend l'amplitude du bruit variable dans le temps en introduisant le concept de **"température"** qui décroît progressivement.

A. Principes du Recuit Simulé et Rôle de la Température

Le principe du **recuit simulé** est inspiré du processus de refroidissement en métallurgie, où un matériau est chauffé à haute température pour permettre aux atomes de se réarranger librement, puis refroidi lentement pour stabiliser une structure ordonnée. Dans le contexte d'un SCN, la mise à jour stochastique des pondérations s'exprime par :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right] + \alpha(t)\,\xi_{i,j}(t),$$

où η est le taux d'apprentissage, τ le coefficient de décroissance, et $\alpha(t)$ représente la **température** à l'itération t. La variable aléatoire $\xi_{i,j}(t)$ est tirée d'une distribution centrée (par exemple, $\xi_{i,j}(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$). La fonction de température $\alpha(t)$ est conçue pour décroître au fil

du temps afin de favoriser une phase initiale d'exploration, suivie d'une phase de stabilisation. Une loi exponentielle de décroissance peut être utilisée, par exemple :

$$\alpha(t+1) = \delta\,\alpha(t) \quad \text{avec} \quad 0 < \delta < 1.$$

Ainsi, au début, lorsque $\alpha(t)$ est élevé, le bruit introduit des fluctuations importantes qui permettent au SCN d'explorer un vaste espace de solutions et d'échapper à des minima locaux peu profonds. Au fur et à mesure que $\alpha(t)$ décroît, les fluctuations diminuent, ce qui permet au réseau de se stabiliser autour d'une configuration optimale.

B. Impact sur la Dynamique du Système

La dynamique globale devient alors celle d'un **processus stochastique non autonome** où la mise à jour des pondérations est influencée par un bruit dont l'amplitude évolue avec t. En l'absence de bruit ($\alpha = 0$), le système converge généralement vers le point fixe déterministe :

$$\omega_{i,j}^{*} \approx \frac{S(i,j)}{\tau}.$$

Avec le terme stochastique, la suite $\{\omega_{i,j}(t)\}$ ne converge pas vers une valeur unique, mais plutôt vers une **distribution** centrée autour de ce point fixe. La variance de cette distribution dépend de la magnitude de $\alpha(t)$ et de σ. Le processus de décroissance de $\alpha(t)$ assure qu'après une phase d'exploration, le système « refroidit » et se stabilise progressivement, permettant la formation de **clusters** robustes et la convergence vers une configuration qui maximise la synergie globale.

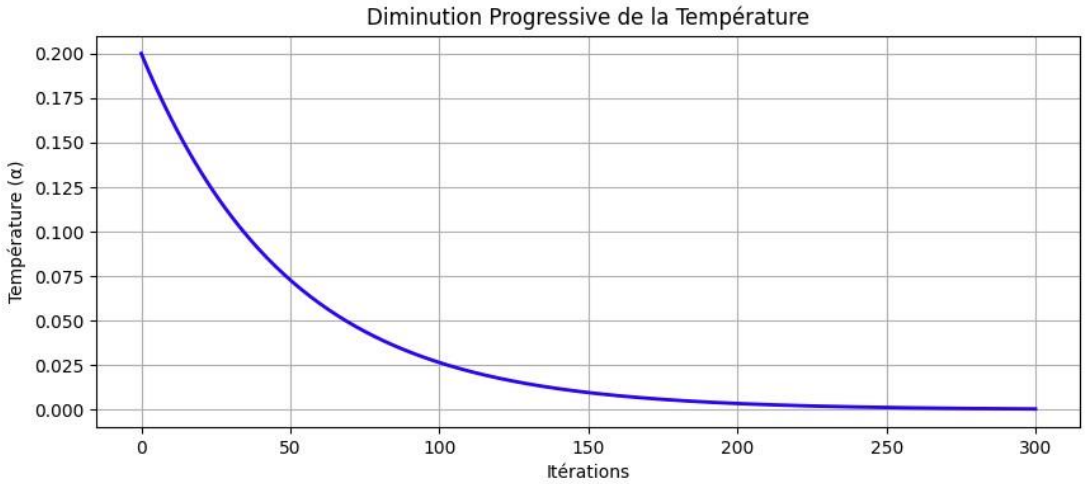
C. Implémentation Python Complète avec Visualisation

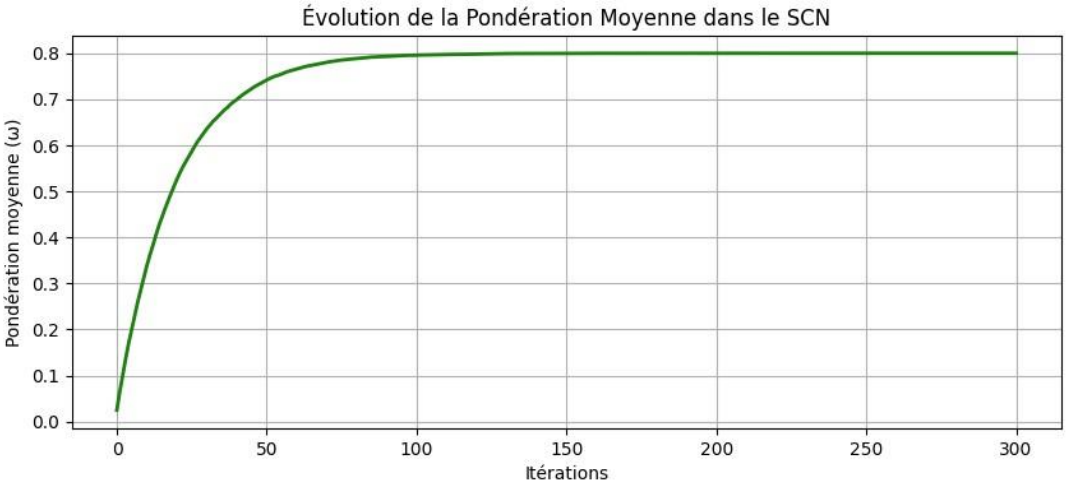
Le code Python suivant simule cette dynamique dans un SCN en utilisant la mise à jour stochastique avec recuit simulé. Nous générons également plusieurs graphiques pour illustrer l'évolution des pondérations, la décroissance de la température, et une heatmap finale de la matrice ω.

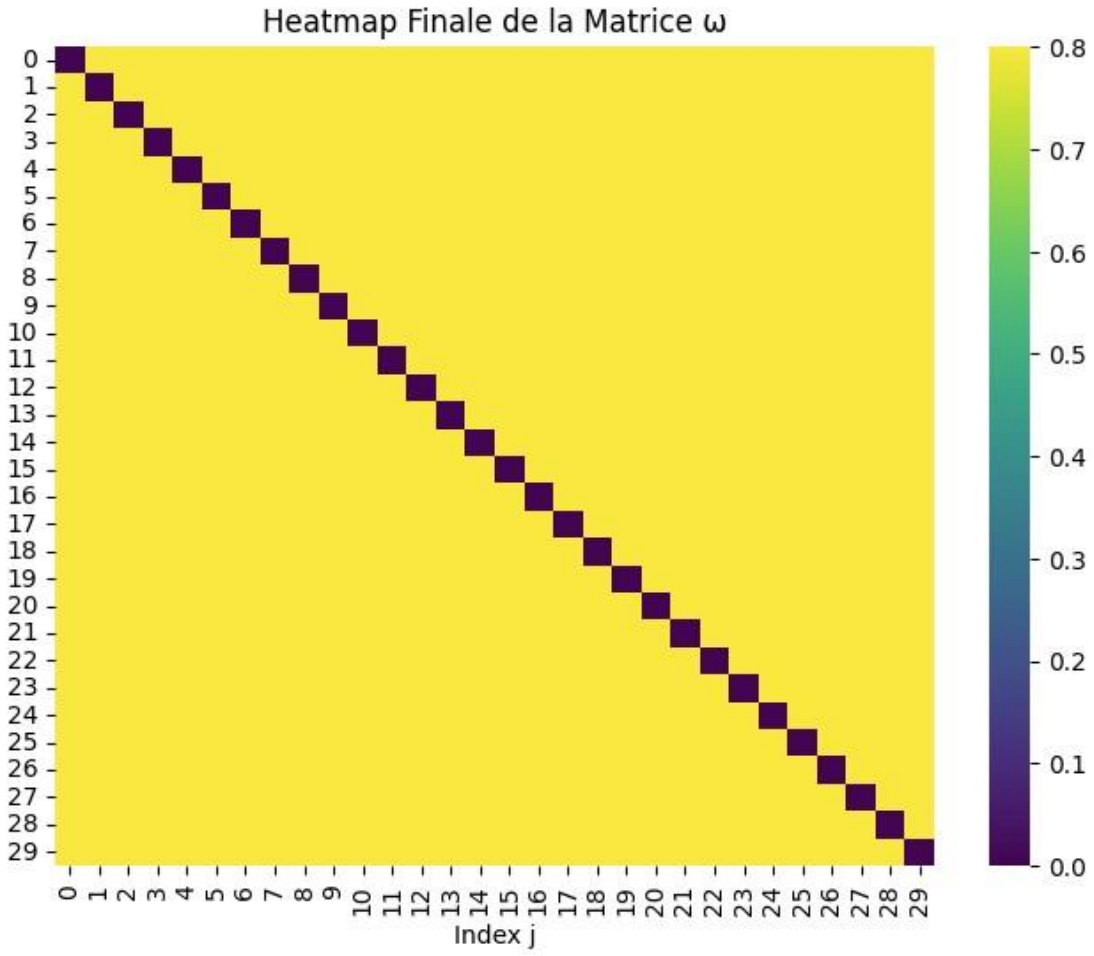
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

# Fixer une graine pour la reproductibilité
np.random.seed(42)

# Paramètres de la simulation
n = 30  # nombre d'entités (pour la simulation dense)
eta = 0.05  # taux d'apprentissage
tau = 1.0   # coefficient de décroissance
alpha0 = 0.2  # température initiale (amplitude du bruit)
delta = 0.98  # facteur de décroissance de la température (0 < delta < 1)
sigma = 0.1   # écart-type du bruit (pour N(0, sigma^2))
iterations = 300  # nombre d'itérations

# Création d'une matrice de synergie S (par exemple, S(i,j)=0.8 pour i != j)
S = np.full((n, n), 0.8)
np.fill_diagonal(S, 0)  # pas de synergie sur la diagonale

# Initialisation de la matrice des pondérations ω
omega = np.random.uniform(0, 0.05, (n, n))
```

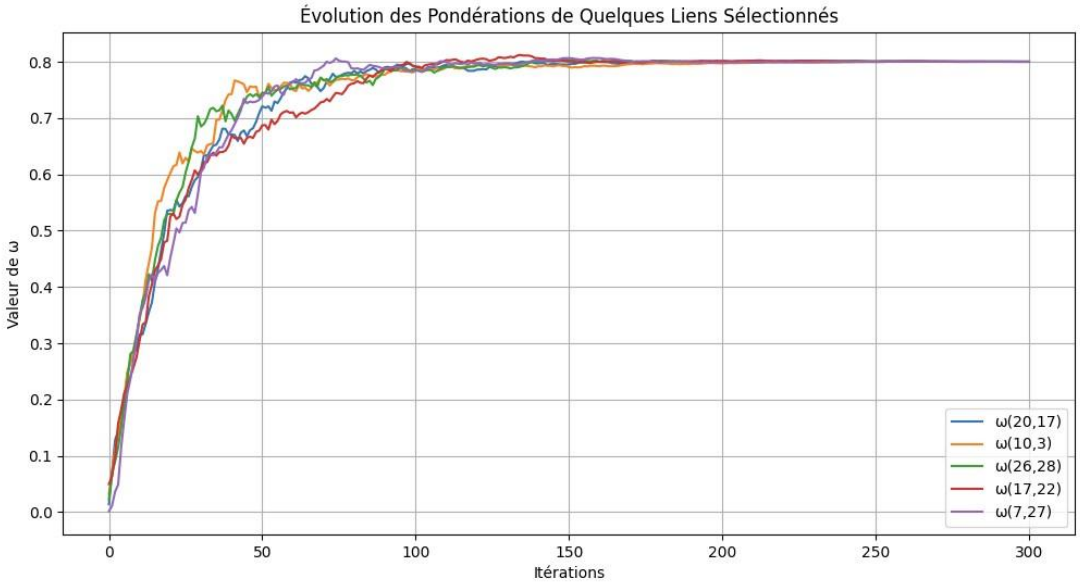
```
np.fill_diagonal(omega, 0)

# Stocker l'évolution de ω et de la température
omega_history = np.zeros((iterations + 1, n, n))
omega_history[0] = omega.copy()
alpha_history = [alpha0]

# Température initiale
alpha = alpha0

# Simulation de la dynamique avec recuit simulé
for t in range(iterations):
    # Mise à jour de la température (recuit simulé)
    alpha *= delta
    alpha_history.append(alpha)

    # Initialiser une nouvelle matrice pour ω(t+1) (double-buffer)
    omega_next = omega.copy()
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i != j:
                # Calcul déterministe de la mise à jour additive
                delta_det = eta * (S[i, j] - tau * omega[i, j])
                # Génération du bruit aléatoire (N(0, sigma^2))
                noise = alpha * np.random.normal(0, sigma)
                # Mise à jour complète
                omega_next[i, j] = omega[i, j] + delta_det + noise
                # Option de clipping pour éviter des valeurs négatives
                if omega_next[i, j] < 0:
                    omega_next[i, j] = 0
    # Passage à l'itération suivante
    omega = omega_next.copy()
    omega_history[t+1] = omega.copy()

# ---------------------------
# Visualisations
# ---------------------------

# 1. Évolution de la température alpha au fil des itérations
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.plot(alpha_history, color='blue', lw=2)
plt.xlabel("Itérations")
plt.ylabel("Température (α)")
plt.title("Diminution Progressive de la Température")
plt.grid(True)
plt.show()

# 2. Évolution de la pondération moyenne (hors diagonale) au fil des itérations
mean_omega = [np.mean(omega_history[t][np.triu_indices(n, k=1)]) for t in range(iterations+1)]
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.plot(mean_omega, color='green', lw=2)
plt.xlabel("Itérations")
plt.ylabel("Pondération moyenne (ω)")
plt.title("Évolution de la Pondération Moyenne dans le SCN")
plt.grid(True)
```

```
plt.show()

# 3. Heatmap de la matrice ω à la fin de la simulation
plt.figure(figsize=(8, 6))
sns.heatmap(omega_history[-1], cmap="viridis", annot=False)
plt.title("Heatmap Finale de la Matrice ω")
plt.xlabel("Index j")
plt.ylabel("Index i")
plt.show()

# 4. Visualisation de l'évolution de quelques liens spécifiques
# Choisissons 5 liens aléatoires pour suivre leur évolution
num_links_to_plot = 5
links = []
while len(links) < num_links_to_plot:
    i, j = np.random.randint(0, n, 2)
    if i != j and (i, j) not in links:
        links.append((i, j))

plt.figure(figsize=(12, 6))
for (i, j) in links:
    link_values = [omega_history[t][i, j] for t in range(iterations+1)]
    plt.plot(link_values, label=f"ω({i},{j})")
plt.xlabel("Itérations")
plt.ylabel("Valeur de ω")
plt.title("Évolution des Pondérations de Quelques Liens Sélectionnés")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```




Évolution de la Pondération Moyenne dans le SCN
Pondération moyenne (ω)
Itérations
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0
50
100
150
200
250
300


Heatmap Finale de la Matrice ω
Index j
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8



Explications et Analyse

Principe et Formulation

La mise à jour stochastique des pondérations dans un SCN s'exprime par la formule :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right] + \alpha(t)\, \xi_{i,j}(t),$$

où $\xi_{i,j}(t)$ est une variable aléatoire centrée, typiquement distribuée selon $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. La **température** $\alpha(t)$ décroît selon une loi exponentielle définie par

$$\alpha(t+1) = \delta\, \alpha(t),$$

ce qui signifie que le bruit est fort en début de simulation (favorisant l'exploration) et diminue progressivement pour stabiliser la configuration finale.

Impact sur la Dynamique

Grâce à ce mécanisme de recuit simulé, le système peut sortir des minima locaux en autorisant temporairement des fluctuations importantes dans les pondérations. La dynamique converge ensuite vers une distribution autour de la valeur théorique $\frac{S(i,j)}{\tau}$, avec une variance qui diminue au fil du temps lorsque $\alpha(t)$ tend vers zéro. Ce procédé permet d'obtenir des **clusters** plus robustes et mieux adaptés aux données.

Implémentation et Visualisations

Le code Python présenté simule la mise à jour itérative de la matrice ω dans un SCN, en intégrant un terme stochastique dont l'amplitude diminue progressivement. Plusieurs graphiques sont générés pour visualiser :

- La décroissance de la température α,
- L'évolution de la pondération moyenne (hors diagonale),
- Une heatmap de la matrice ω à la fin de la simulation,
- L'évolution temporelle de quelques liens spécifiques.

Ces visualisations permettent d'observer comment le **recuit simulé** aide le système à explorer l'espace des configurations dans un premier temps, puis à se stabiliser pour former des clusters cohérents.

5.6. Interfaces Entrée-Sortie et Gestion en Temps Réel

Dans l'environnement d'un **SCN** (Synergistic Connection Network), la **gestion** des entités en temps réel revêt une importance cruciale.

Au cours d'une **simulation** ou d'une **application concrète**, il est fréquent de devoir **ajouter** de nouvelles entités, qu'il s'agisse de **nouveaux objets, agents ou données**, ou au contraire de **supprimer** celles devenues obsolètes ou inutiles. Il peut également être nécessaire d'effectuer des mises à jour en **mode flux (streaming)** plutôt que selon un **calendrier fixe (batch)**, afin de s'adapter aux changements fréquents du système.

La **section (5.6)** explore les **interfaces d'entrée-sortie** permettant de gérer le **SCN** en temps réel. Elle détaille les mécanismes d'**ajout et de suppression d'entités (5.6.1)**, les **stratégies de mise à jour** selon une approche **périodique ou événementielle (5.6.2)**, ainsi que les méthodes permettant d'**extraire et de visualiser des clusters dynamiquement (5.6.3)**.

5.6.1. Ajouter / Retirer une Entité

L'une des fonctionnalités clés d'une interface temps réel est la possibilité de **modifier** dynamiquement l'ensemble $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ que le SCN prend en charge. Nous décrivons ici les opérations fondamentales addEntity et removeEntity, indispensables pour maintenir la cohérence de la structure ω.

5.6.1.1. addEntity$(\mathcal{E}_i)$: Initialisation des Liens $\omega_{i,\dots}$

L'opération addEntity$(\mathcal{E}_i)$ permet d'incorporer une **nouvelle entité** $\mathcal{E}_i$ dans un **réseau SCN** en cours de fonctionnement. Cette fonctionnalité est essentielle dans de nombreux contextes pratiques où l'intégration de données dynamiques est nécessaire. Elle intervient par exemple lors de l'apparition d'un **flux multimédia massif**, de l'**arrivée d'utilisateurs** dans un réseau social ou encore de l'**activation de nouveaux agents** dans un système robotique.

L'ajout d'une entité modifie la **dimension** de la matrice ω, qui passe de $(n \times n)$ à $\big((n+1) \times (n+1)\big)$. Cette transition implique une **procédure d'initialisation** des **liaisons** $\omega_{i,j}$ associées au nouvel index i, garantissant ainsi l'intégration cohérente de la nouvelle entité au sein du **SCN**.

Dans la plupart des applications, on choisit de **réserver** un *identifiant* supplémentaire — souvent $i = n + 1$ — et de créer les lignes et colonnes nécessaires. Les connexions $\omega_{i,j}$ et $\omega_{j,i}$ sont alors insérées avec des valeurs nulles ou très faibles, comme

$$\omega_{i,j}(0) \;=\; 0, \quad \omega_{j,i}(0) \;=\; 0, \quad \forall\, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Cette option garantit que le nouvel élément $\mathcal{E}_i$ ne perturbe pas immédiatement la structure du réseau et autorise la **dynamique** du DSL à faire croître ou décroître ses liaisons de manière autonome selon la règle

$$\omega_{i,j}(t+1) \;=\; \omega_{i,j}(t) \;+\; \eta\,\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big],$$

ou selon la version intégrant des mécanismes d'**inhibition** ou de **bruit**. Dans certains schémas plus rapides, il est concevable de fixer

$$\omega_{i,j}(0) \propto S(i,j) \quad \text{et} \quad \omega_{j,i}(0) \propto S(j,i),$$

afin d'accorder une forme de "démarrage accéléré" à $\mathcal{E}_i$ en exploitant l'information de synergie dès son arrivée.

Du point de vue **ingénierie**, cette démarche s'accompagne souvent de l'allocation nécessaire en mémoire pour stocker les poids $\omega_{i,\dots}$. Dans le cas d'un **SCN** dense, cela implique de redimensionner la matrice, tandis que dans une implémentation **sparse**, il suffit d'ajouter un *champ* ou une *structure* associée au nouvel identifiant i.

Il est aussi crucial de gérer les index pour que chaque module du DSL (mise à jour, synergie, parsimonie) reconnaisse la nouvelle entité. L'insertion d'une *API* claire pour la fonction addEntity(e) assure la cohérence entre la phase d'ajout et la poursuite de l'apprentissage local.

Exemple de Programme Python pour Illustrer l'Intégration d'une Nouvelle Entité

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def initialize_network(n_nodes):
    """
    Initialise la matrice de poids ω avec un petit bruit aléatoire.
    """
    omega = np.random.uniform(0, 0.1, (n_nodes, n_nodes))
    np.fill_diagonal(omega, 0.0)
    return omega

def compute_synergy(i, j, n_nodes):
    """
    Calcule une fonction de synergie déterministe entre les nœuds i et j.
    Ici, une fonction basée sur la distance normalisée.
    """
    d = abs(i - j) / n_nodes
    return np.exp(-d**2)

def update_weights(omega, eta, tau):
    """
    Met à jour la matrice de poids ω selon la règle DSL.
    """
    n = omega.shape[0]
    S = np.fromfunction(lambda i, j: compute_synergy(i, j, n), (n, n))
    omega_next = omega + eta * (S - tau * omega)
    return omega_next

def add_entity(omega, eta, tau):
    """
    Ajoute une nouvelle entité au SCN en étendant la matrice ω.
    Les nouvelles liaisons sont initialisées à zéro.
    """
```

```
    n = omega.shape[0]
    # Créer une nouvelle matrice (n+1) x (n+1)
    omega_new = np.zeros((n+1, n+1))
    # Copier les anciennes valeurs
    omega_new[:n, :n] = omega
    # Les nouvelles lignes et colonnes sont initialisées à zéro
    return omega_new

# Paramètres initiaux
n_initial = 100
eta = 0.05
tau = 0.1
n_iterations = 50

# Initialiser le réseau avec n_initial entités
omega = initialize_network(n_initial)

# Simuler quelques itérations pour le réseau initial
for t in range(n_iterations):
    omega = update_weights(omega, eta, tau)

# Ajouter une nouvelle entité
omega = add_entity(omega, eta, tau)
print(f"Dimension de la matrice ω après ajout : {omega.shape}")

# Poursuivre la mise à jour pour le réseau étendu
n_total = omega.shape[0]
history = []
for t in range(n_iterations):
    omega = update_weights(omega, eta, tau)
    # Pour illustration, on extrait la moyenne des liaisons de la nouvelle entité
    mean_new_links = np.mean(omega[n_total-1, :n_total-1])
    history.append(mean_new_links)

# Affichage de l'évolution des liaisons de la nouvelle entité
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(history, marker='o')
plt.xlabel("Itération")
plt.ylabel("Moyenne des liaisons (nouvelle entité)")
plt.title("Évolution des liaisons pour la nouvelle entité dans le SCN")
plt.grid(True)
plt.show()
```

Analyse du Programme

Initialisation et Mise à Jour :

Le programme initialise une matrice ω de taille 100×100 avec un bruit faible, puis simule 50 itérations de mise à jour en utilisant la règle DSL, où chaque ω_{ij} évolue selon la synergie déterminée par la fonction $S(i,j)$.

Ajout d'une Nouvelle Entité :

La fonction *add_entity* étend la matrice ω à une dimension 101×101. Les nouvelles liaisons associées à la nouvelle entité sont initialisées à zéro, garantissant ainsi une insertion douce dans le réseau.

Suivi de la Convergence :

Après l'ajout de la nouvelle entité, le programme continue la mise à jour et trace l'évolution de la moyenne des liaisons entre la nouvelle entité et les entités existantes. Ce graphique permet d'observer la manière dont le réseau intègre progressivement la nouvelle entité, et comment ses liens se renforcent pour converger vers des valeurs compatibles avec la fonction de synergie.

Cette approche démontre comment, par une simple règle de mise à jour et une initialisation soignée des nouvelles liaisons, le SCN peut s'adapter de manière autonome et converger vers une configuration stable qui intègre de nouvelles données.

5.6.1.2. removeEntity($\mathcal{E}_i$) : Suppression de ses Liens et Mise à Jour de la Structure

Dans un **SCN** dynamique, la possibilité de **retirer une entité** déjà présente est aussi essentielle que l'**ajout**, abordé en **Section 5.6.1.1**.

Les raisons de cette suppression sont diverses. Une entité peut être supprimée lorsque ses **données deviennent obsolètes**, lorsqu'un **agent quitte un système multi-agent**, ou encore pour **réduire la complexité du réseau** et améliorer ses **performances**.

L'élément clé est de garantir la **disparition cohérente** de $\mathcal{E}_i$, afin d'**éviter toute corruption** des indices et d'assurer la **mise à jour correcte** des **liaisons** ω restantes.

A. Motivations et Cadre Mathématique

La suppression d'une entité $\mathcal{E}_i$ dans un SCN implique de **réduire** la dimension de l'espace des connexions. Lorsque la matrice ω était de taille $(n \times n)$, le retrait d'une entité transforme cet espace en $(n-1) \times (n-1)$, à moins de conserver les emplacements vides pour ne pas réindexer.

Du point de vue des règles d'**auto-organisation** (voir **Section 5.5** sur la mise à jour), toute entité disparue ne doit plus influer sur la synergie ou la dynamique de **clusters**. Les liaisons $\omega_{i,\cdot}$ et $\omega_{\cdot,i}$ doivent cesser d'exister, et la matrice ω n'a plus à entretenir la structure associée à l'index i.

Les circonstances menant à une telle suppression sont variées.

Dans un réseau temps réel, une **donnée** peut n'être plus valide après un délai, ou bien se révéler obsolète au sens où sa synergie $\{S(i,j)\}$ n'est plus calculée.

Dans un réseau social ou un système multi-agent, un **utilisateur** ou un **robot** peut quitter la scène et libérer les ressources y afférentes. Sans suppression, des lignes et colonnes fantômes peuvent se maintenir, produisant un bruit inutile et encombrant la topologie du SCN.

B. Opération de Suppression et Conséquences sur la Structure

La commande removeEntity($\mathcal{E}_i$) doit éliminer toutes les références à l'entité $\mathcal{E}_i$ dans l'ensemble des liaisons. Cela équivaut à annuler ou à effacer les *lignes* $\omega_{i,j}$ pour tout j et les *colonnes* $\omega_{j,i}$ pour tout j.

L'implémentation diffère selon que la matrice ω est en format **dense** ou **sparse**. Dans un format dense, on peut choisir de mettre à zéro tous les $\omega_{i,j}$ et $\omega_{j,i}$, quitte à laisser une ligne morte, ou alors reconstruire une matrice $(n-1) \times (n-1)$ en réindexant toutes les entités. Dans un format sparse (hashmaps ou listes d'adjacence), il suffit de balayer les entrées associées à l'index i et de les supprimer.

Cette manipulation impacte directement la **dynamique** du **SCN**. Toute entité $\mathcal{E}_k$ possédant des **liaisons** $\omega_{k,i}$ non négligeables perd ce **canal de synergie**, ce qui entraîne une **réorganisation progressive** dans les itérations suivantes, permettant aux entités affectées d'adapter leurs connexions en fonction des nouvelles conditions du réseau. Du point de vue mathématique, on retire un ensemble de degrés de liberté, et la dynamique locale

$$\omega_{k,j}(t+1) \;=\; \omega_{k,j}(t) \;+\; \eta\big[S(k,j) \;-\; \tau\,\omega_{k,j}(t)\big]$$

se poursuit en l'absence de l'index i. Dans le cas d'une **inhibition compétitive**, la somme $\sum_m \omega_{k,m}$ peut également s'en trouver modifiée, libérant ainsi de la "place" pour d'autres connexions.

C. Cohérence Logique et Implantation dans l'API

Une **API** clairement définie, par exemple *removeEntity(e)*, assure la cohérence de l'opération. Cette fonction :

- Identifie l'entité $\mathcal{E}_i$ (via son ID).
- Supprime ou met à zéro l'ensemble $\omega_{i,j}$ et $\omega_{j,i}$.
- Informe éventuellement les autres modules (mise à jour, synergie, monitoring) que $\mathcal{E}_i$ n'est plus active.

Si le SCN fonctionne en mode **temps réel**, il peut être préférable de gérer cette suppression en fin d'itération, afin de ne pas altérer les boucles de mise à jour en cours. Dans un **cadre distribué** (voir **Section 5.2.3.3**), il est également important d'annoncer la disparition aux autres nœuds afin qu'ils ne continuent pas de calculer $\omega_{i,j}$ pour des valeurs qui ne sont plus censées exister.

Les considérations de **performance** et de **stabilité** justifient l'implémentation d'une telle opération. Sur le plan de la **complexité**, maintenir des entités obsolètes génère un surcoût systématique, tant en calcul de synergie $\{S(i,j)\}$ qu'en stockage de ω. Sur le plan de la **stabilité**, la persistance d'entités inactives peut orienter les mises à jour vers de fausses configurations ou influencer négativement les clusters.

D. Conséquences Dynamiques et Réorganisation de Clusters

La disparition d'une entité $\mathcal{E}_i$ peut entraîner une **réorganisation** notable si $\mathcal{E}_i$ occupait un rôle clé (par exemple, un "hub" au sein d'un cluster). Les entités $\mathcal{E}_k$ qui appuyaient leur synergie sur la présence de $\mathcal{E}_i$ vont connaître un nouvel équilibre. Sur le plan purement mathématique, les règles d'**update** (cf. **Section 5.5**) s'appliquent désormais sur l'espace $(n-1)$. Les

pondérations associées à d'autres liens peuvent se renforcer ou diminuer afin de compenser la perte de contribution de $\omega_{k,i}$.

Si l'on considère un **SCN** avec règles d'**inhibition** (voir **Section 5.5.2**) qui contraint $\sum_j \omega_{k,j} \leq \Omega_{\max}$, la suppression de $\mathcal{E}_i$ libère un potentiel de croissance pour d'autres liaisons de $\mathcal{E}_k$, modifiant parfois la morphologie des clusters existants.

E. Conséquences sur la Convergence et la Stabilité

L'absence de l'entité $\mathcal{E}_i$ entraîne une réduction du nombre total de degrés de liberté dans le système. Si le SCN était convergent avant la suppression, la dynamique de mise à jour (basée sur la règle DSL) continuera à évoluer pour converger vers un nouvel état stationnaire ω^*_{new}.

En effet, les règles de mise à jour sont appliquées de manière itérative sur l'ensemble des liens restants, et, sous des hypothèses de Lipschitzianité locale (et autres conditions classiques de stabilité pour les systèmes dynamiques), on peut démontrer l'existence d'un point fixe stable.

On peut utiliser une fonction de Lyapunov, par exemple :

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k,\ j,k \neq i} \Big(\omega_{j,k}(t) - S(j,k)\Big)^2,$$

pour montrer que, sous la dynamique de mise à jour, $V(t)$ décroît au fil des itérations.

La décroissance de $V(t)$ implique que la configuration des pondérations converge vers la configuration optimale dictée par les synergies $S(j,k)$ pour tous $j,k \neq i$.

Démonstration :

Considérons la mise à jour des pondérations $w_{ij}(t)$ dans un Synergistic Connection Network (SCN) régie par la règle suivante :

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\, w_{ij}(t)\big],$$

où :

- $\eta > 0$ est le taux d'apprentissage,
- $\tau > 0$ est un paramètre de décroissance,
- $S(i,j)$ est la fonction de synergie (supposée ici constante ou indépendante de w_{ij}) pour la paire d'entités $(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j)$.

Pour simplifier l'analyse, nous passerons en temps continu et considérerons la dynamique suivante :

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = \eta\big[S(i,j) - \tau\, w_{ij}(t)\big].$$

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire que la fonction de synergie $S(i,j)$ est symétrique, monotone et bornée, et pour simplifier l'exemple nous supposerons que $\tau = 1$. Dans ce cas, l'équilibre recherché est $w^*_{ij} = S(i,j)$.

Nous définissons une fonction de Lyapunov $V(t)$ qui mesure l'écart global entre les pondérations actuelles et leurs valeurs cibles :

$$V(t) = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \Big(w_{ij}(t) - S(i,j)\Big)^2.$$

L'objectif est de montrer que $V(t)$ décroît strictement le long des trajectoires du système, ce qui garantira la convergence asymptotique vers l'état $w_{ij}(t) \to S(i,j)$ pour tout i,j.

Pour chaque paire (i,j) (avec $i < j$), posons :

$$e_{ij}(t) = w_{ij}(t) - S(i,j).$$

La fonction de Lyapunov s'écrit alors :

$$V(t) = \frac{1}{2}\sum_{i<j} e_{ij}\,(t)^2.$$

En temps continu, la dérivée de $V(t)$ par rapport au temps est :

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i<j} e_{ij}\,(t)\,\frac{de_{ij}(t)}{dt}.$$

Puisque $S(i,j)$ est constante (indépendante de t), on a :

$$\frac{de_{ij}(t)}{dt} = \frac{dw_{ij}(t)}{dt} = \eta\big[S(i,j) - \tau\, w_{ij}(t)\big].$$

En remplaçant $w_{ij}(t)$ par $e_{ij}(t) + S(i,j)$, nous obtenons :

$$\frac{de_{ij}(t)}{dt} = \eta\left[S(i,j) - \tau\,\Big(e_{ij}(t) + S(i,j)\Big)\right] = \eta\big[(1-\tau)S(i,j) - \tau\, e_{ij}(t)\big].$$

Pour $\tau = 1$, cette équation se simplifie immédiatement :

$$\frac{de_{ij}(t)}{dt} = -\eta\, e_{ij}(t).$$

Ainsi, la dérivée de $V(t)$ devient :

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i<j} e_{ij}\,(t)\,\Big(-\eta\, e_{ij}(t)\Big) = -\eta\sum_{i<j} e_{ij}\,(t)^2.$$

On peut réécrire cela en termes de $V(t)$:

$$\frac{dV}{dt} = -2\eta\, V(t).$$

Puisque $\eta > 0$ et $V(t) \geq 0$, il s'ensuit que :

$$\frac{dV}{dt} \leq 0,$$

avec $\frac{dV}{dt} = 0$ si et seulement si $e_{ij}(t) = 0$ pour toutes les paires, c'est-à-dire lorsque $w_{ij}(t) = S(i,j)$ pour tout i, j.

La fonction de Lyapunov $V(t)$ décroît de manière exponentielle au fil du temps (en temps continu, $V(t) = V(0)\exp(-2\eta\, t)$). Cela garantit que, sous la dynamique de mise à jour du DSL, les pondérations $w_{ij}(t)$ convergent vers $S(i,j)$ – c'est-à-dire que le système atteint un état d'équilibre optimal dicté par les synergies entre les entités.

5.6.2. Mise à Jour Périodique vs. Événementielle

Au sein d'un **SCN** (Synergistic Connection Network) opérant en **temps réel**, la question de l'**orchestration** de la dynamique de mise à jour des pondérations ω devient essentielle lorsque l'environnement évolue, qu'il s'agisse de l'**ajout ou suppression d'entités** ou de l'**arrivée de nouvelles informations**.

Deux stratégies principales se distinguent. La **mise à jour par batch** repose sur un mode **périodique**, où l'on attend l'accumulation d'un certain nombre d'événements avant d'exécuter un **recalcul global** des pondérations. À l'inverse, la **mise à jour événementielle** fonctionne en **streaming**, ajustant les pondérations **localement** à chaque événement ou de manière **quasi continue**.

5.6.2.1. Stratégie Batch : Attendre un Certain Nombre d'Événements avant un Recalcul Massif

La **stratégie batch** repose sur l'idée de ne pas actualiser en continu le réseau de connexions synergiques (SCN) à chaque arrivée ou départ d'entité, ni à chaque fluctuation de flux. Au lieu de cela, on définit des intervalles – soit en nombre d'événements, soit en durée temporelle – au terme desquels une mise à jour globale et approfondie des liaisons ω est effectuée.

Principe de Base

L'idée fondamentale est que de nombreux petits changements rapprochés ne justifient pas nécessairement un recalcul complet des pondérations $\omega_{i,j}(t)$. On se contente donc de :

- Maintenir les règles d'update (cf. Section 5.5) sans intégrer immédiatement les nouvelles entités ni supprimer les entités obsolètes.
- Enregistrer ces modifications dans une **liste d'attente** ou un **buffer d'événements**.

Mécanisme de Déclenchement

La mise à jour complète du SCN se déclenche lorsque :

- Le nombre de changements atteint un seuil prédéfini (défini par un compteur d'événements κ), ou
- Un intervalle de temps Δt fixé par l'horloge système est atteint.

Au moment du déclenchement, toutes les opérations différées sont appliquées en bloc :

- Les nouvelles entités sont ajoutées et les entités obsolètes sont supprimées.
- La matrice ω ou la structure sparse correspondante est mise à jour.
- Si nécessaire, le score de synergie est recalculé pour les nouveaux nœuds.

Formalisation avec un Compteur d'Événements

Le processus peut être formalisé à l'aide d'un compteur κ qui s'incrémente à chaque ajout ou suppression d'entité. Tant que $\kappa < \kappa_{\max}$, la topologie du réseau reste inchangée et les pondérations $\{\omega_{i,j}(t)\}$ évoluent selon la règle habituelle, par exemple :

$$\omega_{i,j}(t+1) \;=\; \omega_{i,j}(t) \;+\; \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right].$$

Lorsque $\kappa \geq \kappa_{\max}$, toutes les modifications enregistrées sont appliquées simultanément et le compteur est remis à zéro.

Cette logique peut également être transposée dans le domaine temporel en définissant un pas de temps Δt, de sorte que le recalcul n'intervient qu'aux instants multiples de Δt.

Parmi les avantages de cette approche, il y a une importante économie de calcul, particulièrement bénéfique pour un système volumineux ou très dynamique, car il est souvent plus efficace de procéder à une mise à jour massive ponctuelle que d'effectuer un ajustement continu à chaque nouvel échantillon.

De plus, en évitant des modifications constantes, la structure du SCN conserve une certaine stabilité temporelle, ce qui facilite son interprétation et son exploitation.

Cependant, un inconvénient majeur est la perte de réactivité. En cas d'événement critique, le réseau ne sera mis à jour qu'au prochain lot, entraînant un décalage entre l'évolution réelle du système et son état effectif.

Exemple d'Application

Un système de recommandation en ligne peut illustrer cette stratégie. Dans un tel système, de nouveaux utilisateurs et produits apparaissent continuellement. Une mise à jour événement par événement obligerait à recalculer constamment la topologie du réseau $\{\omega_{i,j}\}$, engendrant une charge de calcul excessive. La stratégie batch permet alors de regrouper ces modifications et de mettre à jour le réseau de façon périodique, assurant ainsi une gestion efficace des ressources tout en maintenant une cohérence globale du SCN.

Problème : Analyse de la Convergence d'un SCN en Stratégie Batch dans le Deep Synergy Learning

Dans le cadre du Deep Synergy Learning (DSL), nous considérons que la mise à jour des pondérations d'un Synergistic Connection Network (SCN) se fait selon la dynamique suivante (dans une phase de batch, c'est-à-dire en l'absence de modifications structurelles) :

$$\omega_{ij}(t+1) = \omega_{ij}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{ij}(t)\right],$$

où :

- $\omega_{ij}(t)$ représente la pondération entre les entités $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$ à l'itération t,

- $S(i,j)$ est la valeur de synergie (supposée ici constante ou indépendante de ω),
- $\eta > 0$ est le taux d'apprentissage (step size),
- $\tau > 0$ est le coefficient de décroissance (régularisation).

On suppose que $S(i,j)$ est constant pour chaque couple (i,j) et que la dynamique est appliquée de manière itérative pendant une phase batch (aucune modification structurelle n'intervient).

Question 1 – Reformulation de l'Équation

(a) Montrez que l'équation de mise à jour peut être réécrite sous la forme :

$$\omega_{ij}(t+1) = (1-\eta\tau)\,\omega_{ij}(t) + \eta\,S(i,j).$$

Indice : Factorisez $\omega_{ij}(t)$ dans le terme en parenthèses.

Question 2 – Résolution de l'Équation aux Différences Linéaires

(a) En considérant l'équation générale du premier ordre non homogène :

$$x_{t+1} = a\,x_t + b,$$

rappelons la solution générale de cette équation.

(b) Identifiez les paramètres a et b dans notre cas, et en déduisez la solution générale pour $\omega_{ij}(t)$ en fonction de la condition initiale $\omega_{ij}(0) = \omega_0$.

Indice : La solution générale s'écrit souvent sous la forme $x_t = a^t\,x_0 + \frac{b}{1-a}\,(1-a^t)$ lorsque $a \neq 1$.

Question 3 – Convergence Asymptotique

(a) Montrez que, sous l'hypothèse que $\eta\tau > 0$, la solution trouvée converge lorsque $t \to \infty$ vers :

$$\lim_{t\to\infty} \omega_{ij}(t) = \frac{S(i,j)}{\tau}.$$

(b) Expliquez brièvement ce que représente cette limite dans le contexte du DSL.

Question 4 – Analyse par Fonction de Lyapunov

Pour démontrer rigoureusement la convergence, on définit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = \frac{1}{2}\sum_{i<j} (\,\omega_{ij}(t) - \frac{S(i,j)}{\tau})^2.$$

(a) En utilisant la solution trouvée pour $\omega_{ij}(t)$, démontrez que $V(t)$ décroît de manière exponentielle, c'est-à-dire que

$$V(t) = V(0)\,e^{-2\eta\tau t}.$$

(b) Concluez sur la stabilité asymptotique du système à partir de cette décroissance.

Indice : Vous pouvez exprimer l'erreur $e_{ij}(t) = \omega_{ij}(t) - \frac{S(i,j)}{\tau}$ et montrer que $e_{ij}(t) = \left(\omega_{ij}(0) - \frac{S(i,j)}{\tau}\right) e^{-\eta\tau t}$.

Question 5 – Extension au Cadre Stochastique

Supposons maintenant que le taux d'apprentissage η soit variable dans le temps, noté $\eta(t)$, et que la mise à jour de la dynamique inclut une dépendance temporelle, c'est-à-dire :

$$\omega_{ij}(t+1) = \omega_{ij}(t) + \eta(t)\,\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{ij}(t)\big].$$

(a) Discutez des conditions sur la suite $\{\eta(t)\}$ (par exemple, une décroissance appropriée) qui garantiraient toujours la convergence de $\omega_{ij}(t)$ vers $\frac{S(i,j)}{\tau}$.

(b) En vous appuyant sur les critères classiques en théorie des systèmes dynamiques (conditions de Robbins–Monro ou d'algorithmes stochastiques), proposez une condition sur $\eta(t)$ telle que :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \eta\,(t) = \infty \quad \text{et} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \eta\,(t)^2 < \infty.$$

Expliquez pourquoi ces conditions sont utiles pour la convergence.

Question 6 – Discussion et Applications

(a) Interprétez la signification de la convergence de $\omega_{ij}(t)$ dans le contexte d'un SCN utilisant le DSL. Quel est l'impact sur la formation des clusters et la qualité globale du réseau ?

(b) Discutez comment la fonction de Lyapunov et l'analyse par valeurs propres du Jacobien peuvent fournir des garanties supplémentaires de stabilité, même dans des cas où la fonction de synergie $S(i,j)$ présente des non-linéarités ou des discontinuités.

5.6.2.2. Stratégie Streaming : Mise à Jour Locale Itérative

La stratégie streaming consiste à mettre à jour de manière continue et en temps réel le réseau de connexions synergiques (SCN), sans attendre l'accumulation d'un certain nombre d'événements pour déclencher une mise à jour massive. Chaque événement, qu'il s'agisse de l'arrivée ou du départ d'une entité, ou de la réception d'un nouveau flux de données, est immédiatement intégré à la structure du SCN.

Ainsi, dès qu'une nouvelle entité $\mathcal{E}_{n+1}$ est ajoutée, le SCN s'étend instantanément, par exemple en agrandissant la matrice ω en dimension $(n+1) \times (n+1)$ dans une implémentation dense, ou en créant uniquement les références nécessaires dans une structure sparse. De même, lorsqu'une entité disparaît, les lignes et colonnes correspondantes sont supprimées sans délai, conformément aux procédures décrites dans les Sections 5.6.1.1 et 5.6.1.2.

Cette approche privilégie un ajustement incrémental de la dynamique des pondérations $\{\omega_{i,j}\}$ plutôt qu'un recalcul global et périodique, comme c'est le cas avec la stratégie batch. Dans le mode streaming, chaque perturbation du système se répercute immédiatement sur le SCN, garantissant ainsi une réactivité indispensable dans des contextes où les données évoluent rapidement, par exemple dans des flux sensoriels en temps réel ou dans des réseaux d'agents mobiles. La mise à jour locale itérative assure que le SCN reflète en permanence l'état du système, ce qui est crucial pour des applications critiques telles que la surveillance, la détection de fraude ou la coordination robotique.

Sur le plan de l'implémentation, il est essentiel de concevoir une mécanique de mise à jour efficace, surtout lorsque la fréquence des événements est très élevée (des centaines voire des milliers de changements par minute). Pour éviter de parcourir systématiquement l'ensemble des $O(n^2)$ liaisons à chaque modification, la pratique courante consiste à limiter les mises à jour au voisinage immédiat, en se concentrant uniquement sur les entités présentant une synergie initiale élevée. De plus, dans un environnement hautement distribué, la propagation asynchrone des événements vers les sous-ensembles concernés, ainsi que la gestion de la synchronisation, représentent des défis supplémentaires qu'il convient de relever à l'aide de techniques avancées, telles que des mécanismes de réplication ou des stratégies de cohérence partielle.

La stratégie streaming peut également être modulée par des approches hybrides, comme le concept de « micro-batch » ou de « fenêtre glissante », qui consiste à limiter simultanément la mise à jour à un nombre restreint d'entités. Par exemple, une nouvelle entité $\mathcal{E}_{n+1}$ peut être immédiatement ajoutée au SCN, mais la réallocation globale des synergies peut être différée si son impact initial est minime, permettant ainsi d'ajuster le niveau de réactivité en fonction du taux de modification du réseau.

En résumé, la stratégie streaming offre une réactivité immédiate et un suivi en temps réel de l'évolution du SCN, ce qui est primordial pour les applications critiques. Cependant, cette approche nécessite une gestion rigoureuse de la charge algorithmique et de la synchronisation dans les environnements distribués, afin de garantir la stabilité du système face à un flux continu d'événements.

5.6.3. Extraction de Clusters / Sous-Réseaux

Même lorsqu'un **SCN** (Synergistic Connection Network) opère en temps réel (sections 5.6.1 et 5.6.2), il demeure essentiel de pouvoir **extraire** ou **observer** en continu la structure émergente : quels liens sont réellement "forts" ? Quels **clusters** ou sous-réseaux se constituent ? Cette section (5.6.3) aborde donc les opérations par lesquelles on récupère des informations sur le SCN pour les exploiter ou les visualiser. Nous nous concentrons d'abord sur deux fonctions couramment rencontrées : getTopLinks(i, k) et getAllClusters(θ) (5.6.3.1), puis sur la manière de mettre ces informations à disposition d'autres systèmes (5.6.3.2).

5.6.3.1. getTopLinks(i, k)**,** getAllClusters(θ)

Le **Deep Synergy Learning** amène souvent à gérer un *Synergistic Connection Network* (SCN) où les entités $\{\mathcal{E}_i\}$ sont reliées par une matrice de liens ω. L'**objectif** de ce réseau est la mise en évidence de *clusters* ou sous-réseaux fortement cohérents, toutefois la matrice ω, qu'elle soit dense ou présentée en format sparse, ne fournit pas automatiquement l'information structurée sous forme de communautés. Dans cette optique, les opérations internes getTopLinks(i, k) et getAllClusters(θ) permettent une extraction commode des connexions les plus significatives, qu'il s'agisse d'une analyse locale (pour un nœud donné) ou d'une identification globale de clusters par seuil.

A. Motivation Générale pour l'Extraction de Clusters

L'évolution d'un SCN sous les règles d'auto-organisation (décrites en **Section 5.5**) vise à établir, renforcer ou inhiber des liaisons $\{\omega_{i,j}\}$ en fonction de la **synergie** $S(i, j)$. À l'issue de cette dynamique, on espère discerner des *communautés* ou *composantes* où les liens internes conservent une grande valeur, traduisant un haut degré de similarité ou d'interaction entre les entités. Néanmoins, la matrice ω peut atteindre une taille considérable, et son contenu n'est pas directement lisible si l'on se contente de parcourir l'ensemble $\{\omega_{i,j}\}$. Les fonctions getTopLinks et getAllClusters s'inscrivent donc dans un registre **opérationnel**, conçu pour extraire les liens les plus pertinents et révéler la structure de *clusters* à un instant donné de l'itération.

B. getTopLinks(i, k) *: Extraction Locale des Liens Principaux*

L'opération getTopLinks(i, k) fournit, pour une entité $\mathcal{E}_i$, les k liens $\omega_{i,j}$ de plus forte valeur. L'idée est de rapidement identifier le **voisinage principal** de $\mathcal{E}_i$, c'est-à-dire les entités $\mathcal{E}_j$ vers

lesquelles $\mathcal{E}_i$ entretient la relation la plus intense. Cette notion rappelle la pratique du "k plus proches voisins" (k-NN), à la différence que la mesure de proximité ou d'intérêt est ici fixée par la valeur courante de $\omega_{i,j}$.

Sur le plan **mathématique**, la requête getTopLinks(i, k) se fonde sur un tri (ou un ordre partiel) des valeurs $\{\omega_{i,1}, \omega_{i,2}, \dots, \omega_{i,n}\}$. Pour $\omega_{i,j}$ susceptible de prendre des valeurs faibles ou nulles, une structure de données adaptée (section **5.3.2.2** sur les indexations et accès rapides) permet de retrouver les k premières liaisons en un temps réduit, souvent $O(k\log n)$ ou $O(n\log k)$. La liste retournée reflète l'état du SCN à l'itération en cours, et peut aisément changer dans le temps au fur et à mesure que la synergie entre $\mathcal{E}_i$ et les autres entités $\mathcal{E}_j$ évolue.

En ingénierie logicielle, la fonction getTopLinks(i, k) est très utile pour la visualisation locale. Elle permet d'afficher l'entité $\mathcal{E}_i$ et ses k connexions dominantes, ce qui facilite la navigation progressive dans le SCN.

Cette méthode est également adaptée pour les systèmes de recommandation, où il s'agit d'identifier les voisins d'un utilisateur $\mathcal{E}_i$ dans un espace de préférences. Par ailleurs, elle se révèle précieuse pour des algorithmes incrémentaux qui préfèrent analyser une partie seulement de la matrice ω plutôt que l'ensemble complet.

C. getAllClusters(θ) : Vue Globale par Seuil

L'opération getAllClusters(θ) vise à révéler la structure des *clusters* en appliquant un **seuil** θ sur les liaisons $\{\omega_{i,j}\}$. Plus précisément, on considère le sous-graphe dont les arêtes satisfont

$$\omega_{i,j} \geq \theta,$$

tandis que celles situées en dessous de θ sont ignorées. Il en résulte un graphe binaire où seuls sont préservés les liens jugés « forts ». Sur ce graphe, il devient aisé d'identifier des composantes connexes ou des communautés, par exemple au moyen d'un parcours DFS/BFS ou d'algorithmes de détection de clusters (type Louvain ou analyse de modularité). Ainsi, l'utilisateur choisit θ pour ajuster la granularité : un seuil proche de 0 rend le graphe très dense, tandis qu'un seuil élevé ne conserve que quelques connexions majeures, formant des clusters réduits mais très cohésifs.

Le choix de θ se rattache à la fois à la distribution des valeurs $\omega_{i,j}$ et aux intentions d'exploration. On peut également faire varier θ par paliers pour observer les transitions dans la structure de clusterisation (cf. « coupes » successives dans la matrice ω). Sur le plan mathématique, getAllClusters(θ) décrit un instantané : il se peut que deux appels consécutifs, à des itérations différentes t et $t + 10$, n'aboutissent pas au même regroupement si les liaisons ont significativement changé entre-temps.

D. Intégration dans l'Interface SCN et Avantages

Le fait de **fournir** getTopLinks(i, k) et getAllClusters(θ) de manière native dans un *SCN* présente plusieurs avantages. Tout d'abord, l'utilisateur ou les modules applicatifs n'ont pas besoin de manipuler la matrice ω dans sa totalité, laquelle peut être massive pour un grand n. Ensuite, si l'implémentation de ω emploie des structures de données **sparse** ou exploite des mécanismes de **parsimonie** (voir **Section 5.5.3**), la fonction "top-k" et le filtrage par θ peuvent être réalisés efficacement, sans avoir à traiter toutes les paires (i, j). Par ailleurs, cette capacité d'extraction **internationale** (en lien direct avec l'état du réseau) permet des mises à jour rapides

et cohérentes en fin d'itération, ou même pendant un flux streaming (voir **Sections 5.6.2.1** et **5.6.2.2**).

Les usages pratiques sont nombreux. Dans des systèmes de **recommandation**, getTopLinks(i, k) sert à déterminer quelles entités, produits ou contenus sont les plus proches d'un utilisateur $\mathcal{E}_i$. Dans un **dashboard** de supervision, on peut régulièrement appeler getAllClusters(θ) pour dévoiler l'évolution des communautés en temps réel. Dans un cadre purement analytique, ces fonctions constituent la base de l'examen de la structure *multi-échelle* du SCN. Si θ décroît, on obtient des regroupements plus vastes ; s'il croît, on isole les noyaux les plus cohésifs.

E. Exemple d'Utilisation : Visualisation Locale et Regroupement Global

Dans la pratique, on peut imaginer un scénario où la commande getTopLinks$(i, 5)$ est utilisée pour naviguer dans le SCN à la manière d'un explorateur. Partant d'une entité $\mathcal{E}_i$, on obtient ses 5 liens les plus forts, puis on se déplace vers l'un de ces voisins et on réitère l'opération, formant ainsi un chemin au sein du réseau. Cette approche de visualisation locale permet d'éviter de charger l'intégralité des relations ω.

Pour obtenir une vue d'ensemble, on fait appel à la commande getAllClusters$(\theta = 0.2)$. Ici, le réseau est filtré pour ne conserver que les liens dont la valeur est supérieure ou égale à 0.2, puis on détecte les sous-ensembles fortement connectés, qui correspondent à des composantes connexes dans le cas d'un graphe non orienté, ou à des communautés plus élaborées si un algorithme spécialisé est appliqué. Le résultat est un partitionnement en clusters qui reflète la structure issue de l'auto-organisation : à un seuil bas, les clusters sont volumineux et moins distincts, tandis qu'à un seuil élevé, seuls subsistent des groupements extrêmement soudés.

5.6.3.2. Usage Externe (Visualisation, Classification), Design des Formats de Sortie (JSON, CSV, etc.)

Une fois la structure d'un Synergistic Connection Network (SCN) extraite – par exemple via des outils internes tels que *getTopLinks* ou *getAllClusters* présentés en Section 5.6.3.1 –, la question se pose de savoir comment mettre ces informations à la disposition d'autres modules ou analyses.

Dans la plupart des applications, le réseau n'existe pas pour lui-même, car on souhaite exploiter les pondérations ω, les clusters ou la topologie qui en résulte pour des finalités concrètes telles que la visualisation en temps réel, la classification dans un autre système d'apprentissage machine ou la détection de motifs et d'anomalies.

Cette section détaille les aspects relatifs au design des interfaces et aux formats de sortie afin de diffuser la structure de clusterisation et les liens du SCN vers l'extérieur.

A. Visualisation et Classification : Motivations et Approches

Dans un grand nombre de cas d'usage, les données structurées par le SCN — qu'il s'agisse de regroupements (clusters) ou de liaisons pondérées en cours d'évolution — doivent être **communiquées** à des composants externes. Il peut s'agir d'une librairie de visualisation, typiquement pour représenter un graphe dynamique, ou d'un pipeline d'apprentissage souhaitant intégrer les *communautés* ou la *mesure de synergie* comme caractéristiques supplémentaires.

1. **Visualisation interactive**

En ingénierie de **dashboard** ou en contextes de **monitoring**, il est fréquent qu'on veuille afficher la disposition des entités, leurs liens forts et les clusters qu'ils forment. Des bibliothèques comme D3.js, Sigma.js ou Cytoscape nécessitent des **formats** standards (JSON, GraphML, etc.) pour représenter la liste des nœuds et des arêtes. Un composant "SCN" doit donc être en mesure de fournir ces informations, idéalement à la demande (API REST) ou via une mise à jour continue (WebSocket). Cela permet de voir "en direct" quels liens $\omega_{i,j}$ sont hauts et comment les regroupements évoluent à mesure que la dynamique s'applique.

1. **Classification et analyse en aval**

De plus, le SCN peut servir de **préalable** à la classification d'entités, par exemple en exportant la **structure de cluster** comme une étiquette de "classe" ou de "communauté". Un autre module de type "machine learning supervisé" récupère alors ces *labels* et les exploite comme feature ou comme partition de référence. De même, des algorithmes de détection d'anomalies peuvent comparer les comportements d'entités supposées être dans le même cluster et repérer d'éventuelles divergences. Les services externes ont donc besoin d'accéder :

- Soit aux **clusters** (chaque entité $\mathcal{E}_i$ étant associée à un cluster $\mathcal{C}_i$),
- Soit aux **scores** $\omega_{i,j}$ directement, afin de calculer leur propre fonction.

Dans un système évolutif (voir **Section 5.6.2**), il est d'autant plus important d'actualiser ces informations dès que le réseau subit une transformation (arrivées, départs, renforcement de liens). Les modules externes peuvent alors "pull" (requête périodique) ou se faire "push" (notification en temps réel) d'un snapshot mis à jour du SCN.

B. Formats de Sortie : JSON, CSV, GraphML, etc.

L'**export** des données du SCN peut prendre plusieurs formes, en fonction de la taille, de l'usage et des standards adoptés dans l'environnement applicatif. Les formats textuels comme JSON et CSV dominent largement, mais des formats plus spécifiques à la représentation de graphes (GraphML, GEXF) ou des formats binaires peuvent également être requis.

1. **JSON**

JSON (JavaScript Object Notation) est le plus fréquemment employé, aussi bien pour une exposition **web** (via REST) que pour un échange **machine-to-machine**. On peut par exemple renvoyer un objet JSON structuré comme suit :

```
{
  "nodes": [
    { "id": i, "label": ..., "attributes": {...} },
    ...
  ],
  "links": [
    { "source": i, "target": j, "weight": \omega_{i,j} },
    ...
  ],
  "clusters": [
    { "clusterId": c_1, "nodes": [i_1, i_2, ...] },
    ...
  ]
}
```

Les bibliothèques de visualisation comme D3.js, Cytoscape.js, etc. comprennent aisément ce type de structure, et il est simple d'y associer des informations graphiques (couleurs, positions, etc.). JSON est aussi facile à générer ou à parser dans la plupart des langages.

1. **CSV (Comma-Separated Values)**

CSV demeure très populaire pour un usage **off-line** ou pour un import/export rapide vers Excel, pandas ou R. On peut créer :

- Un **fichier d'arêtes** (*edges.csv*) :

  source,target,weight
  i,j,ω
  i',j',ω
  ...

- Un **fichier de clusters** (*clusters.csv*) :

  node,clusterId
  i,c
  i',c
  ...

  Bien que cette forme tabulaire soit succincte, elle est facilement analysable par une large gamme d'outils. En revanche, elle n'est pas idéale pour coder des structures plus complexes (attributs multiples par lien ou par nœud).

1. **GraphML, GEXF**

Dans le champ de la **visualisation de graphes** et de la recherche en réseau, des formats comme GraphML ou GEXF (Graph Exchange XML Format) sont couramment utilisés, notamment pour la compatibilité avec des outils comme Gephi, Tulip ou NetworkX. Le SCN peut être converti dans l'un de ces formats afin de bénéficier des algorithmes et interfaces de ces logiciels (layout, calcul de modularité, etc.).

1. **Autres possibilités**

Pour des **SCN** de très grande envergure (millions de nœuds, millions d'arêtes), le volume de données devient prohibitif dans un format JSON ou CSV. On recourt alors à des exports **binaires** ou à des protocoles de sérialisation plus compacts (Protobuf, Cap'n Proto). L'essentiel est de réduire la taille des liens enregistrés, éventuellement en exploitant la **parcimonie** et en ne stockant que les arêtes supérieures à un certain seuil.

C. Mécanismes de Production et d'Accès

Pour offrir de tels formats, un composant interne peut réaliser :

- Une **API** ou un **service** spécialisé dans l'export. Celui-ci reçoit une requête, par exemple *GET /scn/clusters?threshold=0.3*, exécute *getAllClusters(0.3)*, puis sérialise le résultat en JSON ou CSV.

- Une **fonction** locale, telle que *exportLinks(format="CSV")*, qui génère un fichier ou un flux textuel contenant la liste des liaisons.

- Des instantanés programmés se produisent à chaque itération ou toutes les N itérations, générant un « snapshot » de l'état actuel du SCN (avec labels de cluster) qui est stocké dans un répertoire ou envoyé à un pipeline de data-mining.

Le **temps réel** (visualisation en continu) peut être assuré par des technologies comme WebSocket ou SSE (Server-Sent Events), où le SCN pousse automatiquement des mises à jour sous forme de JSON chaque fois qu'un changement notable (évolution de la matrice ω, arrivée/suppression d'entité) se produit.

D. Exemples d'Usage Externe

Visualisation d'un Graphe Dynamique

Un tableau de bord (exemple avec D3.js) récupère l'état courant via *getAllClusters(θ)*, puis construit un JSON "nodes/links". L'interface affiche un graphe évolutif où les nœuds sont colorés par *cluster*. Si un nœud $\mathcal{E}_i$ change de cluster suite à un réajustement de ω, le prochain appel reflète cette mutation, donnant un effet d'animation ou de transition dans la vue utilisateur.

Réintégration dans une Chaîne de Classification

Un module aval, chargé de classifier les entités (ex. détection de fraude dans des transactions), demande régulièrement la partition $\{\mathcal{C}_i\}$ ou la liste des top-k liens de chaque entité. Il intègre ces données comme *features*, afin de compléter l'information sur chaque transaction ou utilisateur. Par exemple, un utilisateur dont le cluster diffère subitement de son historique peut être marqué comme suspect.

Diagnostic et Archivage

Dans des systèmes complexes, on peut consigner — à intervalles réguliers — un export CSV ou JSON de la matrice ω seillée. Ces archives constituent une base d'analyse a posteriori pour valider la stabilité de l'auto-organisation, expliquer des événements remarquables (consolidation ou éclatement de clusters), ou confronter le réseau à un "oracle" de vérité terrain.

5.7. Distribution, Scalabilité et Architecture Modulaire

Dans l'optique d'un **SCN** (Synergistic Connection Network) de très grande taille (nombre d'entités n élevé) ou réparti entre différents sites, la question de la **distribution** et de la **scalabilité** se pose inévitablement.

Le chapitre **5.7** aborde la structuration d'un **SCN** en plusieurs sous-parties, où chaque sous-SCN gère une portion du réseau ou un sous-ensemble d'entités. Il examine également l'organisation de la communication et la synchronisation inter-blocs, afin d'assurer une cohérence globale tout en maintenant une évolution locale efficace.

Même si cette approche s'éloigne d'une vision purement locale ou centralisée (chapitres précédents), elle s'avère indispensable pour une **architecture** modulaire et apte à traiter des volumes importants de données ou des entités éparpillées sur plusieurs nœuds.

5.7.1. SCN Distribué sur Plusieurs Nœuds

Lorsque la dimension n d'un SCN devient considérable ou que les entités se trouvent déjà distribuées (ex. multiples robots, serveurs distants, etc.), on procède à un **partitionnement** du réseau en "sous-SCN". Cette section (5.7.1) en présente les justifications (5.7.1.1), puis explore les questions de communication (5.7.1.2) et de synchronisation (5.7.1.3).

5.7.1.1. Motifs : si n est grand, on peut diviser en sous-SCN (chacun gère un sous-ensemble d'entités)

Lorsqu'un **réseau SCN** doit gérer un nombre très élevé d'entités $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$, les défis se multiplient tant sur le plan **mathématique**, **algorithmique** que **matériel**. Si n atteint des valeurs de l'ordre de 10^5 à plusieurs millions, la gestion centralisée d'une matrice de pondérations $\boldsymbol{\Omega}$ de taille $n \times n$ devient rapidement problématique.

D'un point de vue **mémoire**, le coût de stockage de $\boldsymbol{\Omega}$ croît en $\mathcal{O}(n^2)$, ce qui peut représenter plusieurs dizaines, voire centaines de gigaoctets, même avec des structures **sparse**. D'un point de vue **algorithmique**, la mise à jour des pondérations impose un nombre quadratique d'opérations par itération, rendant la boucle de mise à jour extrêmement coûteuse en temps de calcul. Sur le plan **matériel**, l'accès à la bande passante mémoire et les contraintes du parallélisme deviennent des goulots d'étranglement majeurs lorsque des millions de liaisons sont traitées simultanément.

Une solution consiste à segmenter le SCN en plusieurs **sous-SCN**, où chaque sous-SCN gère un sous-ensemble d'entités. Cela permet de partitionner la matrice globale $\boldsymbol{\Omega}$ en blocs plus petits, notés $\boldsymbol{\Omega}^{(p)}$ pour $p = 1, \dots, m$. Si les entités sont réparties en m groupes $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$ avec $|\mathcal{V}_p| \approx \frac{n}{m}$, chaque sous-SCN gère une matrice de taille $\left(\frac{n}{m}\right)^2$. Le coût de stockage et de mise à jour est ainsi réduit en $\mathcal{O}\left(\frac{n^2}{m^2}\right)$, limitant les interactions inter-blocs aux cas strictement nécessaires.

Le partitionnement en sous-SCN permet aussi de mieux capturer des **structures naturelles** ou des **séparations géographiques** dans le réseau. Dans un réseau de robots répartis sur plusieurs sites ou un système multi-agent où les entités ont des caractéristiques distinctes (capteurs, actuateurs, utilisateurs), il est logique de regrouper les entités par affinité ou proximité. Ce découpage réduit les coûts mémoire et calculatoires tout en améliorant la **résilience**, chaque sous-SCN restant fonctionnel indépendamment des autres en cas de panne.

L'implémentation d'un SCN partitionné repose sur une **architecture logicielle modulaire**, où chaque sous-SCN peut être déployé sur un serveur ou un nœud de calcul différent. Les interactions inter-blocs sont gérées par des interfaces standardisées facilitant la **parallélisation** et l'usage de **calcul distribué**. La mise à jour locale s'effectue indépendamment dans chaque sous-SCN, et les communications entre blocs sont optimisées via des protocoles d'échange de messages ou des agrégations périodiques.

Implémentation Python

Le code Python suivant simule un SCN avec un grand nombre d'entités que nous partitionnons en plusieurs sous-SCN. Chaque sous-SCN gère la mise à jour de ses propres pondérations $\omega_{i,j}$ en utilisant la règle additive classique, et nous visualisons ensuite la structure finale des matrices pour observer l'effet de la segmentation.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

# Paramètres de base
n = 200           # Nombre total d'entités
m = 4             # Nombre de sous-SCN (groupes)
eta = 0.05        # Taux d'apprentissage
tau = 1.0         # Coefficient de décroissance
iterations = 100  # Nombre d'itérations pour chaque sous-SCN

# Création d'une matrice de synergie S globale pour toutes les entités
# Pour simplifier, on fixe S(i,j) = 0.8 pour i != j et 0 sur la diagonale
S_global = np.full((n, n), 0.8)
np.fill_diagonal(S_global, 0)

# Partitionner les entités en m groupes égaux
group_size = n // m
subSCN_indices = [range(i * group_size, (i + 1) * group_size) for i in range(m)]

# Initialisation des matrices de pondérations pour chaque sous-SCN
omega_sub = {}
for idx, indices in enumerate(subSCN_indices):
    size = len(indices)
    # Initialisation aléatoire faible pour éviter l'absence de signal
    omega_sub[idx] = np.random.uniform(0, 0.05, (size, size))
    np.fill_diagonal(omega_sub[idx], 0)

# Fonction de mise à jour déterministe additive pour un sous-SCN
def update_omega(omega, S, eta, tau):
    new_omega = omega.copy()
    size = omega.shape[0]
    for i in range(size):
```

```
        for j in range(size):
            if i != j:
                delta = eta * (S[i, j] - tau * omega[i, j])
                new_omega[i, j] = omega[i, j] + delta
                # Éviter les valeurs négatives par clipping
                new_omega[i, j] = max(new_omega[i, j], 0)
    return new_omega

# Stockage de l'évolution pour visualisation
omega_history = {idx: [] for idx in range(m)}

# Simulation de mise à jour pour chaque sous-SCN
for idx, indices in enumerate(subSCN_indices):
    omega = omega_sub[idx]
    # On suppose que la matrice de synergie S pour chaque sous-SCN est extraite de S_global
    S_local = S_global[np.ix_(list(indices), list(indices))]
    # Stockage initial
    omega_history[idx].append(omega.copy())
    for t in range(iterations):
        omega = update_omega(omega, S_local, eta, tau)
        omega_history[idx].append(omega.copy())
    omega_sub[idx] = omega  # Sauvegarde finale dans le dictionnaire

# Visualisation : Heatmap finale de chaque sous-SCN
plt.figure(figsize=(14, 10))
for idx in range(m):
    plt.subplot(2, m // 2, idx + 1)
    sns.heatmap(omega_sub[idx], cmap="viridis", cbar=True)
    plt.title(f"Sous-SCN {idx+1} (taille = {group_size}x{group_size})")
plt.tight_layout()
plt.show()

# Visualisation : Évolution de la moyenne des pondérations dans chaque sous-SCN
plt.figure(figsize=(10, 6))
for idx in range(m):
    mean_values = [np.mean(omega_history[idx][t]) for t in range(iterations + 1)]
    plt.plot(mean_values, label=f"Sous-SCN {idx+1}")
plt.xlabel("Itérations")
plt.ylabel("Pondération moyenne")
plt.title("Évolution de la Pondération Moyenne dans Chaque Sous-SCN")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Analyse et Discussion

Principes et Formulation Mathématique

La mise à jour de chaque pondération dans un SCN est déterminée par la formule additive

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t) \right].$$

Dans le contexte d'un grand nombre d'entités, la division en **sous-SCN** permet de limiter les coûts de stockage et de calcul en traitant séparément des blocs de la matrice **Ω**. Chaque sous-

SCN est associé à une sous-matrice $\omega^{(p)}$ de taille réduite, ce qui rend l'algorithme de mise à jour plus gérable, tant du point de vue algorithmique que matériel.

Implémentation et Visualisation

L'implémentation Python proposée simule le processus de mise à jour pour chaque sous-SCN. Le code partitionne les entités en m groupes égaux, extrait la matrice de synergie locale correspondante, et applique itérativement la règle de mise à jour additive.

Les visualisations générées – des heatmaps finales pour chaque sous-SCN et des courbes montrant l'évolution de la pondération moyenne – illustrent clairement l'auto-organisation locale dans chaque partition. Ces graphiques permettent d'observer la convergence progressive des pondérations, tout en montrant que la division en sous-SCN réduit la complexité du problème global.

Avantages du Partitionnement

En divisant le réseau en sous-SCN, on réduit le coût en mémoire de la matrice $\boldsymbol{\Omega}$ et on limite le nombre d'opérations par itération. Ce découpage favorise également la parallélisation, car chaque sous-SCN peut être traité indépendamment, voire sur des machines différentes. De plus, dans des scénarios où les entités présentent des caractéristiques géographiques ou typologiques distinctes, le partitionnement permet d'adapter la dynamique locale aux spécificités de chaque sous-ensemble.

5.7.1.2. Communication et Protocole d'Échange ω Inter-sous-SCN

Dans un **réseau SCN** segmenté en plusieurs sous-réseaux distincts, la gestion des interactions entre entités réparties dans différents sous-SCN devient une question cruciale. Lorsqu'un ensemble d'entités $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ est divisé en plusieurs blocs $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m$, chaque sous-SCN gère localement sa propre matrice de pondérations, c'est-à-dire les valeurs $\omega_{i,j}$ pour $i, j \in \mathcal{V}_p$. Cependant, les liaisons inter-blocs, c'est-à-dire celles pour lesquelles $i \in \mathcal{V}_p$ et $j \in \mathcal{V}_q$ avec $p \neq q$, nécessitent une coordination particulière. La présente section expose en détail les principes et enjeux de la **communication** et des **protocoles d'échange** permettant de synchroniser les pondérations inter-sous-SCN.

A. Notion de Liens Inter-Blocs et Rôle du Protocole

Lorsque le SCN est segmenté, il ne s'agit pas de traiter chaque sous-SCN comme un système isolé ; en effet, des **synergies** $S(i,j)$ importantes peuvent exister entre des entités appartenant à des blocs différents. Mathématiquement, pour des entités $\mathcal{E}_i \in \mathcal{V}_p$ et $\mathcal{E}_j \in \mathcal{V}_q$ avec $p \neq q$, la pondération $\omega_{i,j}$ est une variable d'importance qui doit être intégrée dans la dynamique globale du SCN. Dans un tel cadre, le protocole de communication a pour objectif de garantir que ces valeurs inter-blocs soient correctement mises à jour et que les informations échangées entre les sous-SCN reflètent la synergie réelle entre les entités, même si elles résident sur des nœuds ou des serveurs différents.

D'un point de vue mathématique, la dynamique globale peut être vue comme un système couplé, dans lequel chaque sous-SCN contribue à l'évolution de l'ensemble des pondérations. Ainsi, les mises à jour locales dans un sous-SCN, notées par exemple $\boldsymbol{\omega}^{(p)}(t)$ pour le bloc $\mathcal{V}_p$, doivent être complétées par des échanges d'informations pour les pondérations $\omega_{i,j}$ lorsque $i \in$

$\mathcal{V}_p$ et $j \in \mathcal{V}_q$. Le protocole doit donc assurer la **transmission** et la **synchronisation** de ces données inter-blocs afin de préserver la cohérence globale.

B. Protocoles de Communication et de Synchronisation

Pour assurer un échange efficace et cohérent des pondérations inter-sous-SCN, plusieurs stratégies peuvent être envisagées. Parmi elles, deux approches principales se dégagent :

- **Responsabilité Unique :** Dans ce mode, une sous-SCN est désignée comme responsable de la gestion d'un lien inter-blocs particulier. Par exemple, si $\omega_{i,j}$ relie une entité de $\mathcal{V}_p$ à une entité de $\mathcal{V}_q$, alors le sous-SCN de $\mathcal{V}_p$ (ou un module central dédié) stocke et met à jour cette pondération. Les autres blocs qui doivent accéder à cette information effectuent des requêtes périodiques pour obtenir la valeur actualisée. Cette méthode centralise la mise à jour d'un lien spécifique, ce qui facilite la garantie d'une cohérence temporelle, mais nécessite une définition claire de la responsabilité de chaque lien.

- **Copie Locale et Synchronisation :** Alternativement, chaque sous-SCN peut maintenir sa propre copie locale des pondérations inter-blocs. Dans ce cas, lorsqu'un sous-SCN modifie une pondération $\omega_{i,j}$ pour $i \in \mathcal{V}_p$ et $j \in \mathcal{V}_q$, il doit diffuser cette modification aux autres sous-SCN concernés. Pour gérer ce processus, un mécanisme de synchronisation est indispensable, souvent via l'attribution de **timestamps** ou de **numéros de version** pour chaque mise à jour. La synchronisation peut se faire de manière asynchrone, avec une stratégie de réconciliation en cas de divergence entre copies, ou par des rounds synchrones qui imposent un "barrier" d'échange à la fin de chaque itération.

Sur le plan algorithmique, ces stratégies se traduisent par des protocoles de type **round-based synchronization** dans lesquels, à chaque cycle d'itération, les sous-SCN effectuent d'abord leurs mises à jour locales, puis entrent dans une phase de communication où ils échangent les valeurs des pondérations inter-blocs. Ce mécanisme garantit que, au début de chaque itération, toutes les parties du système disposent d'une version cohérente de la matrice ω.

C. Gestion des Conflits et Garanties de Cohérence

Dans un système distribué, l'actualisation concurrente des liens inter-blocs peut générer des **conflits** si plusieurs sous-SCN tentent de modifier la même pondération simultanément. Pour éviter ce genre de problèmes, plusieurs méthodes peuvent être employées :

- L'usage de **verrous** (locks) ou de mécanismes de synchronisation fine qui assurent qu'une seule mise à jour d'une pondération donnée se réalise à la fois. Bien que cette approche garantisse une cohérence forte, elle peut ralentir la dynamique si le nombre de conflits est important.

- La technique du **double-buffer**, dans laquelle la matrice $\omega(t)$ est lue en lecture seule pendant que les mises à jour sont écrites dans une matrice distincte ω_{next}. À la fin de l'itération, un **barrier** de synchronisation permet d'effectuer un swap complet entre ω_{next} et $\omega(t+1)$, assurant ainsi la cohérence sans verrouillage fin.

- Des **algorithmes lock-free** ou de type **Gossip**, qui permettent une mise à jour asynchrone tout en utilisant des numéros de version ou des timestamps pour réconcilier les divergences. Ces algorithmes, bien qu'efficaces en termes de performances, requièrent une analyse rigoureuse pour garantir la convergence du système.

Le choix entre ces approches dépend fortement de la taille du SCN et de la vitesse de communication entre les sous-SCN. Pour des systèmes de grande envergure, où la latence et la bande passante peuvent devenir critiques, une approche hybride combinant rounds synchrones périodiques et mises à jour asynchrones intermédiaires peut s'avérer optimale.

5.7.1.3. Risque d'Incohérence et Solutions (Synchronisation Épisodique, etc.)

Dans le cadre d'un **réseau SCN** divisé en plusieurs sous-réseaux, la répartition des entités en blocs distincts pose inévitablement le problème de la cohérence des mises à jour des liens inter-blocs. En effet, alors que chaque sous-SCN gère localement la dynamique de ses propres pondérations $\omega_{i,j}$ pour i, j appartenant à un même ensemble $\mathcal{V}_p$, les connexions reliant des entités de blocs différents, c'est-à-dire des pondérations pour lesquelles $i \in \mathcal{V}_p$ et $j \in \mathcal{V}_q$ avec $p \neq q$, ne sont plus mises à jour de manière centralisée. Cette situation engendre plusieurs défis, notamment des retards dans la diffusion des mises à jour et des déphasages pouvant conduire à une incohérence globale du SCN.

A. Nature du Risque d'Incohérence

Dans un **SCN centralisé**, la mise à jour de la matrice $\omega(t)$ est effectuée de manière **homogène**, grâce à une fonction d'itération unique. Chaque composante $\omega_{i,j}$ évolue en fonction des mêmes informations à chaque étape, garantissant ainsi une cohérence globale.

Dans un SCN distribué, la gestion des mises à jour devient plus complexe. Chaque sous-SCN conserve une portion locale de la matrice et les liens inter-blocs $\omega_{i,j}$ sont modifiés localement par différents agents ou processus de calcul.

Cette distribution peut entraîner des incohérences temporelles entre sous-SCN. Par exemple, un sous-SCN SCN_p peut mettre à jour $\omega_{i,j}$ et obtenir une valeur de 0.65, tandis qu'un autre sous-SCN SCN_q conserve encore la valeur 0.50 en raison d'un retard de synchronisation.

Ce décalage temporel pose un problème car il peut générer des corrections contradictoires. Chaque sous-SCN applique ses propres mises à jour en se basant sur des informations obsolètes, ce qui peut altérer la convergence du réseau.

Mathématiquement, les pondérations inter-blocs suivent une dynamique couplée asynchrone.

Si la fonction de mise à jour locale dans un **sous-SCN** p est donnée par

$$\omega_{i,j}^{(p)}(t+1) = F\left(\omega_{i,j}^{(p)}(t), S_{i,j}\right),$$

l'absence de synchronisation exacte avec $\omega_{i,j}^{(q)}(t)$ peut empêcher les versions locales de converger vers un unique point fixe commun.

Ce phénomène peut entraîner des oscillations persistantes ou une divergence progressive des valeurs d'une même liaison dans différents blocs du SCN.

B. Solutions pour Limiter l'Incohérence

Différentes stratégies peuvent être mises en place pour réduire l'incohérence dans un SCN distribué. Les approches les plus efficaces reposent sur la synchronisation épisodique et l'attribution d'une responsabilité unique pour la mise à jour des liens inter-blocs.

Synchronisation Épisodique

Une approche consiste à instaurer des phases de synchronisation périodique.

Durant une phase d'itération locale, chaque sous-SCN met à jour ses propres pondérations en utilisant les données disponibles à l'instant t.

Après un certain nombre d'itérations, une synchronisation globale est déclenchée, permettant à tous les sous-SCN d'échanger leurs valeurs des pondérations inter-blocs.

Cette synchronisation repose sur un mécanisme de barrière (*barrier synchronization*), qui bloque temporairement l'évolution du réseau jusqu'à ce que toutes les mises à jour locales aient été communiquées.

Mathématiquement, si chaque sous-SCN p maintient une version $\omega_{i,j}^{(p)}(t)$, alors après un cycle de synchronisation, la version globale peut être définie par une moyenne ou un mécanisme de sélection :

$$\omega_{i,j}^{\text{global}}(t) = \frac{1}{M}\sum_{p=1}^{M} \omega_{i,j}^{(p)}(t),$$

où M représente le **nombre total de sous-SCN** impliqués.

Cette méthode réduit les écarts et réaligne les mises à jour avant de reprendre la dynamique d'auto-organisation.

Elle garantit une cohérence périodique, mais introduit une latence dans la propagation des mises à jour.

Responsabilité Unique (Bloc Maître)

Une autre solution consiste à attribuer la mise à jour de chaque lien inter-blocs $\omega_{i,j}$ à un sous-SCN unique.

Si $\omega_{i,j}$ relie une entité de $\mathcal{V}_p$ à une entité de $\mathcal{V}_q$, la mise à jour peut être confiée à SCN_p (ou à un module central dédié).

Tous les sous-SCN concernés consultent alors une seule source de vérité pour la valeur de $\omega_{i,j}$, éliminant ainsi la redondance des mises à jour.

Cette approche préserve la cohérence en garantissant que chaque pondération inter-blocs repose sur une valeur unique.

Toutefois, elle peut générer un goulet d'étranglement si trop de liens inter-blocs sont gérés par un seul sous-SCN, ce qui impose l'utilisation de protocoles de consultation et de notification efficaces.

Approches Hybrides et Paramétrage

Pour atténuer les effets des retards et des divergences, il est possible d'ajuster finement les paramètres de mise à jour locale, notamment le taux d'apprentissage η, afin de réduire les fluctuations.

En combinant la synchronisation épisodique avec un lissage des mises à jour à l'aide de coefficients d'inertie, on peut obtenir une dynamique plus stable.

Ces ajustements permettent de limiter les oscillations dues aux décalages temporels entre sous-SCN et de favoriser une convergence harmonieuse vers des configurations cohérentes.

5.7.2. Mise en Place d'un "meta-SCN"

Lorsqu'un SCN est segmenté en plusieurs sous-SCN (voir Section 5.7.1), il devient parfois nécessaire d'introduire un niveau de coordination supérieur afin de préserver une cohésion globale.

Un meta-SCN est une structure qui surplombe les sous-SCN et joue un rôle d'agrégateur d'information inter-blocs.

Ce réseau de plus haut niveau permet de synchroniser les interactions entre sous-SCN, d'assurer une meilleure répartition des mises à jour et de structurer la propagation des synergies au sein du SCN distribué.

La Section 5.7.2 explore ce concept en détaillant :

- **La définition et l'utilité d'un meta-SCN** (**5.7.2.1**)
- **La gestion de la périodicité des mises à jour** (**5.7.2.2**)
- **L'illustration d'une architecture microservices appliquée au SCN** (**5.7.2.3**)

5.7.2.1. Idée : un SCN global reliant plusieurs sous-SCN, usage d'un "graphon" ou d'un "meta-nœud"

Dans un réseau SCN de grande envergure, où le nombre d'entités n est si élevé qu'il devient impossible de gérer une matrice de pondérations ω de taille $n \times n$ dans un système monolithique, une segmentation en plusieurs sous-SCN s'avère nécessaire.

Chaque sous-SCN, noté SCN_p pour $p = 1, \dots, m$, prend en charge un sous-ensemble d'entités $\mathcal{V}_p \subset \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$.

Afin de préserver la cohérence globale du SCN, une couche d'agrégation supérieure doit être introduite pour relier les sous-SCN entre eux.

Cette couche peut être représentée sous la forme d'un SCN global, basé sur un graphon ou, de manière équivalente, sur un système de meta-nœuds, jouant le rôle d'interface entre les différents sous-SCN.

A. Motivation pour un SCN global

La division du SCN en sous-ensembles répond à des contraintes de scalabilité et de complexité computationnelle.

Lorsque n devient très grand, la complexité mémoire et temporelle d'un traitement centralisé, en $O(n^2)$, devient rapidement prohibitive.

Dans des environnements distribués ou hétérogènes, comme des réseaux de robots géographiquement dispersés ou des systèmes multi-agents fonctionnant sur des infrastructures distinctes, des séparations naturelles apparaissent dans les interactions entre les entités.

Cette segmentation en blocs autonomes permet d'optimiser la gestion des ressources, mais isoler totalement ces blocs entraînerait une perte d'information sur les synergies inter-blocs.

Il devient alors nécessaire d'introduire un mécanisme d'agrégation, permettant de condenser l'information relative aux connexions inter-blocs sous la forme de pondérations agrégées.

Ce principe se rapproche de la notion de graphon en théorie des graphes, qui représente une approximation continue d'une matrice d'adjacence pour un réseau de grande taille.

Il est également comparable à la structure de meta-nœuds dans une approche hiérarchique, où chaque sous-SCN est représenté par un nœud unique dans un graphe de niveau supérieur.

B. Construction d'un Meta-SCN et Modélisation par Graphon

Le meta-SCN repose sur l'agrégation des liaisons inter-blocs afin de simplifier la structure globale du SCN.

Soit $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$ une partition de l'ensemble des entités. Pour chaque paire de blocs (p, q) avec $p \neq q$, on définit une pondération agrégée selon

$$\widehat{\omega}_{p,q} = \Psi\big(\{\omega_{i,j} : i \in \mathcal{V}_p,\ j \in \mathcal{V}_q\}\big),$$

où Ψ représente une fonction d'agrégation adaptée aux besoins du système, comme la moyenne, la somme pondérée ou encore le maximum des $\omega_{i,j}$ entre deux blocs.

Cette méthode permet de réduire la complexité du SCN, en passant d'une matrice de taille $n \times n$ à une matrice $\widehat{\omega}$ de dimension $m \times m$, avec $m \ll n$. Cette transformation simplifie les calculs et optimise la gestion des ressources.

Dans certains contextes, un graphon est utilisé pour représenter la limite d'un graphe dense lorsque $n \to \infty$. Ce cadre mathématique permet une modélisation continue des interactions à grande échelle.

Le **graphon** est défini comme une **fonction W: $[0,1]^2 \to \mathbb{R}^+$, qui par un rééchelonnement des indices, offre une représentation continue des interactions entre blocs au sein du meta-SCN.**

C. Avantages et Enjeux de l'Agrégation Inter-blocs

L'utilisation d'un **meta-SCN** présente des avantages aussi bien sur le plan mathématique que sur le plan ingénierie.

Sur le plan mathématique, l'agrégation des interconnexions permet de simplifier l'analyse de convergence et de stabilité du système global. En réduisant la dimension de l'espace dynamique, il devient plus facile d'identifier les attracteurs et d'analyser les transitions de phase.

Sur le plan ingénierie, cette approche réduit la charge de communication entre les différents sous-SCN. Plutôt que d'échanger individuellement toutes les valeurs des liens inter-blocs, les sous-SCN peuvent transmettre uniquement des agrégats (moyennes, totaux, etc.). Cela réduit la surcharge en bande passante et accélère les phases de synchronisation.

Malgré ces bénéfices, la centralisation partielle introduite par un meta-SCN comporte certaines limites. L'agrégation des connexions peut masquer des structures fines qui émergent à un niveau microscopique, rendant plus difficile l'identification de certaines dynamiques locales.

De plus, l'ajout d'un nœud central ou d'un ensemble de meta-nœuds introduit des risques de congestion ou de panne unique, en particulier si ces éléments ne sont pas correctement redondants ou répartis dans l'architecture du réseau.

5.7.2.2. Périodicité de la Mise à Jour, Agrégation de Clusters Émergents

Lorsqu'un réseau SCN est subdivisé en plusieurs sous-réseaux locaux, il devient essentiel d'établir un mécanisme d'unification afin de maintenir une vision globale cohérente.

Chaque sous-SCN évolue selon ses propres dynamiques locales, ce qui lui permet d'affiner ses connexions internes de manière indépendante.

Toutefois, pour qu'un réseau global homogène puisse émerger et permettre la formation de clusters transcendant les frontières locales, une synchronisation périodique des liens inter-blocs est nécessaire.

Ce processus de mise à jour périodique se déroule à un niveau méta, permettant de reconstruire la structure globale à partir des agrégats de chaque sous-SCN, tout en assurant la cohésion de l'ensemble du réseau.

A. Principe d'une Mise à Jour Périodique du Méta-SCN

La démarche consiste à laisser chaque sous-SCN évoluer de manière autonome pendant un certain nombre d'itérations locales, noté T (ou sur un intervalle de temps Δt), pendant lesquelles la règle de mise à jour des pondérations

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big]$$

est appliquée de façon répétée pour les liens internes ou déjà établis entre les sous-SCN.

À l'issue de cette phase, chaque sous-SCN compile un résumé de ses liaisons inter-blocs, par exemple en calculant une agrégation telle que la moyenne ou la somme pondérée des pondérations reliant ses entités aux entités d'un autre sous-SCN. Pour deux sous-SCN, $\mathcal{V}_p$ et $\mathcal{V}_q$, on peut définir la pondération agrégée

$$\widehat{\omega}_{p,q} = \Psi\big(\{\omega_{i,j} \mid i \in \mathcal{V}_p,\ j \in \mathcal{V}_q\}\big),$$

où Ψ désigne une fonction d'agrégation adaptée (par exemple, la moyenne ou la somme). Ainsi, le méta-SCN se construit en tant que graphe de m nœuds (correspondant aux m sous-SCN) et de $\widehat{\omega}_{p,q}$ définissant les liaisons entre ces nœuds.

Ce schéma permet de limiter le trafic et la charge de calcul en regroupant les mises à jour inter-blocs de manière périodique plutôt qu'en continu, et de préserver l'autonomie locale des sous-SCN entre ces phases de synchronisation.

B. Méthodologie d'Agrégation et Implications sur la Cohérence Globale

Sur le plan mathématique, l'ensemble du système peut être vu comme évoluant à deux échelles distinctes. Pendant les intervalles entre deux synchronisations globales, la dynamique locale est gouvernée par la mise à jour

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big],$$

pour tous les i, j appartenant à un même sous-SCN ou déjà associés par des liaisons inter-blocs précédemment synchronisées. Puis, à chaque période T, une fonction d'agrégation globale, notée G, est appliquée. Formellement, si l'on note $\boldsymbol{\omega}^{\text{global}}(T_k)$ l'ensemble des pondérations inter-blocs au bout du k-ème round global, alors la transition vers le round suivant s'exprime par

$$\boldsymbol{\omega}^{\text{global}}(T_{k+1}) = G\big(\boldsymbol{\omega}^{\text{global}}(T_k), \{\omega^{(p)}(T_k)\}_{p=1}^{m}\big).$$

Cette opération d'agrégation joue un rôle essentiel dans la réinitialisation de la cohérence inter-blocs en compensant les retards et divergences accumulés au fil des mises à jour locales.

Un équilibre optimal doit être trouvé entre la fréquence de synchronisation et la liberté d'évolution locale.

- Une synchronisation trop fréquente impose des corrections rigides, risquant de perturber les dynamiques internes des sous-SCN et de ralentir l'auto-organisation.
- Une synchronisation trop espacée favorise l'autonomie locale, mais peut engendrer des écarts trop importants entre sous-SCN, compromettant l'émergence de clusters cohérents au niveau global.

L'efficacité du meta-SCN repose donc sur un compromis dynamique, ajustant la périodicité des synchronisations en fonction de la stabilité du réseau et du degré d'interdépendance des blocs.

C. Impact sur la Formation des Clusters

Le mécanisme d'agrégation périodique joue un rôle central dans la formation des clusters à l'échelle globale.

Chaque sous-SCN s'auto-organise localement, créant des clusters internes qui reflètent la cohésion des entités au sein de son propre bloc.

Cependant, pour identifier des clusters globaux, il est nécessaire d'examiner les liaisons inter-blocs.

Lorsque les agrégats $\widehat{\omega}_{p,q}$ révèlent une forte synergie entre des entités de sous-SCN distincts, il devient possible de fusionner les clusters locaux correspondants en un cluster global.

Ce processus de fusion, réalisé lors des phases de synchronisation globale, permet de structurer le SCN en deux niveaux :

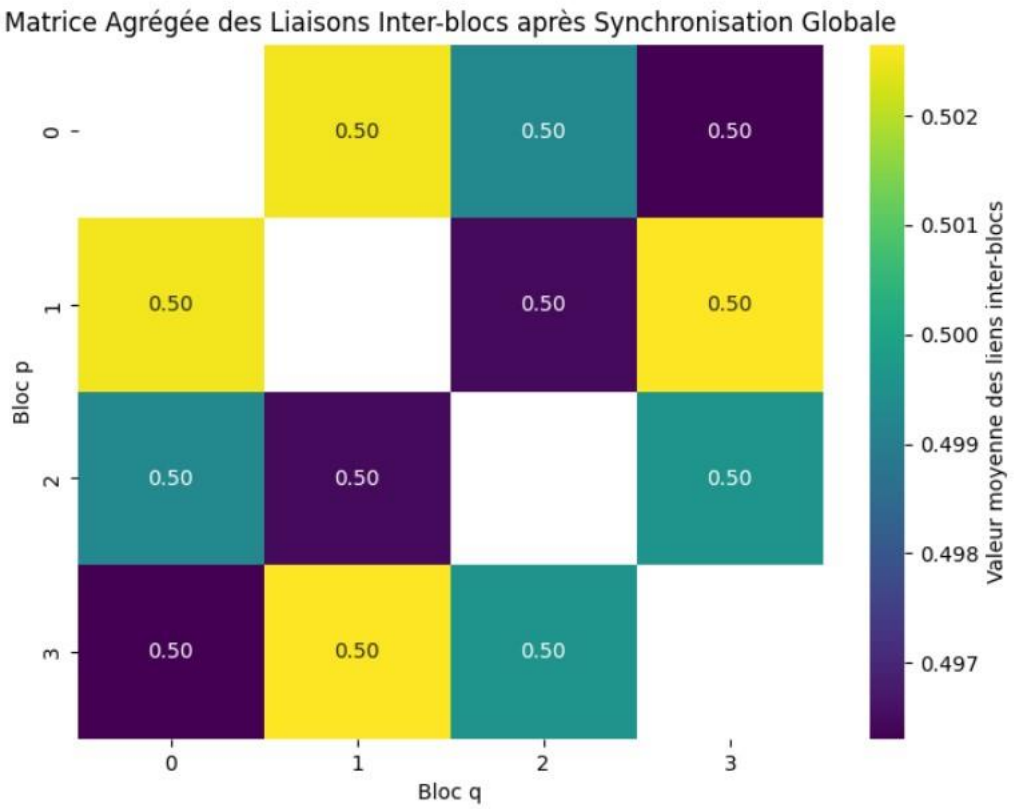
- Un niveau local, où chaque sous-SCN optimise ses connexions internes.
- Un niveau global, où un méta-SCN agrège et fusionne les clusters en fonction des connexions inter-blocs.

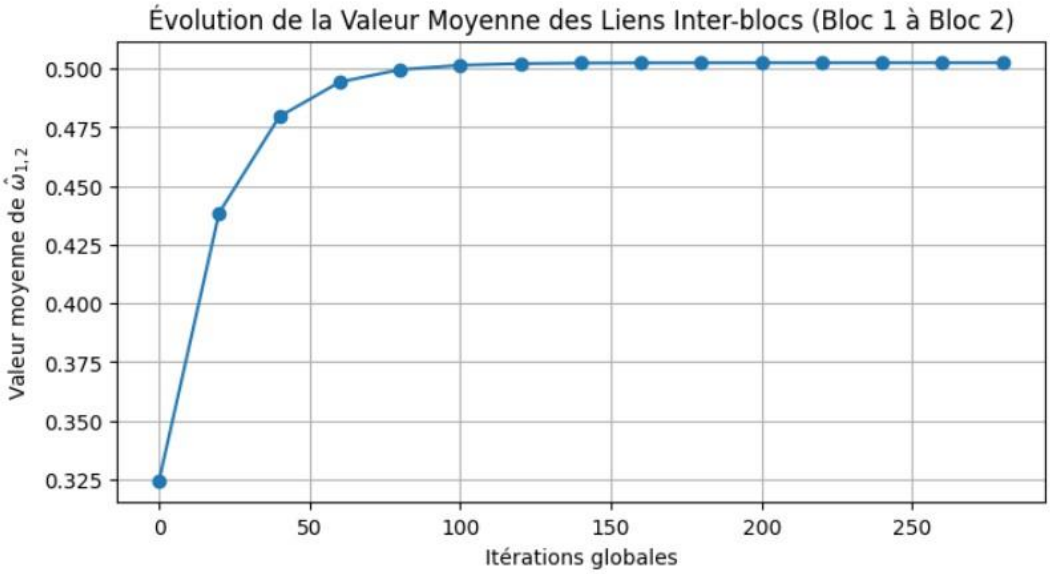
Ce couplage multi-échelle assure une convergence plus robuste, tout en favorisant une meilleure adaptation aux variations de la synergie inter-blocs.

Programme Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

# Paramètres de la dynamique locale
eta = 0.05       # Taux d'apprentissage
tau = 1.0        # Coefficient de décroissance
n_total = 200    # Nombre total d'entités
m = 4            # Nombre de sous-SCN (blocs)
T_max = 300      # Nombre total d'itérations locales
T_period = 20    # Période de synchronisation globale (en itérations)

# Distribution homogène des entités entre les blocs
n_block = n_total // m

# Initialisation de la matrice globale omega (dense)
omega = np.random.uniform(0.0, 0.01, (n_total, n_total))
np.fill_diagonal(omega, 0.0)  # Pas de liaison auto-connectée

# Initialisation d'une matrice S de synergie aléatoire (pour simplifier)
S = np.random.uniform(0.2, 0.8, (n_total, n_total))
S = (S + S.T) / 2  # Rendre la matrice symétrique
np.fill_diagonal(S, 0.0)

# Stockage des agrégats inter-blocs pour visualisation
meta_history = []

def update_local(omega, S, eta, tau):
    """Mise à jour additive locale pour l'ensemble du réseau."""
    return omega + eta * (S - tau * omega)

def aggregate_inter_block(omega, m, n_block):
    """Agrège les valeurs inter-blocs en calculant la moyenne pour chaque paire de blocs."""
    meta_matrix = np.zeros((m, m))
    for p in range(m):
        for q in range(m):
            # Indices des entités dans le bloc p et q
            idx_p = slice(p * n_block, (p + 1) * n_block)
            idx_q = slice(q * n_block, (q + 1) * n_block)
            # Si p == q, on peut ignorer ou mettre NaN car ce sont des liens internes
            if p == q:
                meta_matrix[p, q] = np.nan
            else:
                # Calcul de la moyenne des omega inter-blocs
                meta_matrix[p, q] = np.mean(omega[idx_p, idx_q])
    return meta_matrix

# Pour visualiser la dynamique globale, on va stocker la matrice meta à chaque période
meta_list = []
```

```
# Simulation de la dynamique locale avec synchronisation périodique
for t in range(T_max):
    # Mise à jour locale
    omega = update_local(omega, S, eta, tau)

    # À chaque période T, réaliser l'agrégation inter-blocs
    if (t + 1) % T_period == 0:
        meta = aggregate_inter_block(omega, m, n_block)
        meta_list.append(meta)

# Affichage graphique de la dynamique du meta-SCN
plt.figure(figsize=(8, 6))
# On affiche la dernière matrice meta agrégée
sns.heatmap(meta_list[-1], annot=True, fmt=".2f", cmap="viridis",
            cbar_kws={'label': 'Valeur moyenne des liens inter-blocs'})
plt.title("Matrice Agrégée des Liaisons Inter-blocs après Synchronisation Globale")
plt.xlabel("Bloc q")
plt.ylabel("Bloc p")
plt.show()

# Affichage de l'évolution d'un exemple de lien inter-blocs
# On choisit, par exemple, la liaison entre le bloc 1 et le bloc 2
link_history = [meta[0, 1] for meta in meta_list]

plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(np.arange(len(link_history)) * T_period, link_history, marker='o')
plt.title("Évolution de la Valeur Moyenne des Liens Inter-blocs (Bloc 1 à Bloc 2)")
plt.xlabel("Itérations globales")
plt.ylabel("Valeur moyenne de $\hat{\omega}_{1,2}$")
plt.grid(True)
plt.show()
```





Dans cette **implémentation**, le **SCN global** est représenté par une **matrice** ω qui évolue selon une **règle additive locale**, avec une mise à jour effectuée à chaque **itération**. Le **réseau est segmenté en** m **blocs**, chaque **sous-SCN** gérant ses propres connexions internes.

Toutes les T itérations, une agrégation des pondérations inter-blocs est réalisée pour former une matrice de niveau supérieur $\hat{\omega}$ qui synthétise les interactions entre blocs. Cette matrice permet une vision globale du réseau et met en évidence, via une heatmap, les zones de forte synergie pour identifier les clusters émergents.

La synchronisation périodique ajuste les connexions inter-blocs, stabilisant ainsi la structure du SCN global et assurant une meilleure coordination entre sous-SCN. Cette approche hiérarchique favorise une convergence robuste, améliore l'adaptabilité du réseau et garantit une meilleure résilience face aux évolutions dynamiques des entités.

5.7.2.3. Cas d'une Architecture Microservices : Chaque Service = Sous-SCN

Dans un **réseau** SCN de grande échelle, la gestion centralisée de la matrice de pondérations $\{\omega_{i,j}\}$ peut poser des problèmes de mémoire et de calcul, limitant ainsi les performances du système.

Pour surmonter ces contraintes, le SCN est segmenté en sous-réseaux autonomes, chacun hébergé dans un microservice dédié. Chaque sous-SCN gère un sous-ensemble d'entités $\mathcal{V}_p$ et exécute localement sa propre dynamique de mise à jour des poids.

Une coordination hiérarchique est instaurée pour synchroniser les informations inter-blocs, assurant une vue globale cohérente du réseau. Cette approche modulaire améliore la scalabilité, renforce la résilience du système et apporte une plus grande flexibilité architecturale.

A. Conception d'une Architecture Microservices pour un SCN

L'ensemble des entités $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ est divisé en groupes disjoints $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$, chacun étant géré par un microservice dédié, noté SCN_p pour $p = 1, \dots, m$. Chaque microservice stocke et met à jour la matrice locale $\omega^{(p)}$, qui représente les pondérations internes entre les entités de son groupe. Cette segmentation permet de réduire la complexité de $\mathcal{O}(n^2)$ d'une unique matrice globale en la fragmentant en blocs plus petits, optimisant ainsi le stockage (notamment en format *sparse*) et accélérant les mises à jour.

L'architecture microservices repose sur un découplage fonctionnel, où chaque microservice gère son sous-SCN de manière indépendante et communique via une API dédiée. Cette API facilite les échanges d'informations inter-blocs, notamment la publication des agrégats de pondérations ou la transmission de requêtes sur la configuration des clusters locaux.

Ce modèle permet également de gérer la latence et d'allouer dynamiquement les ressources de calcul, garantissant ainsi une scalabilité horizontale. Si le nombre total d'entités n devient trop élevé, chaque microservice peut être dimensionné indépendamment ou encore subdivisé en unités plus petites, renforçant ainsi la flexibilité et la robustesse du système.

B. Considérations Mathématiques et Modélisation

Mathématiquement, si l'on note $\omega_{i,j}^{(p)}(t)$ la pondération entre deux entités i et j au sein du sous-SCN SCN_p, la dynamique locale suit typiquement une équation de mise à jour du type

$$\omega_{i,j}^{(p)}(t+1) = \omega_{i,j}^{(p)}(t) + \eta \left[S^{(p)}(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}^{(p)}(t) \right],$$

où $S^{(p)}(i,j)$ représente la synergie locale entre les entités de $\mathcal{V}_p$. Pour les liaisons inter-blocs, c'est-à-dire pour $i \in \mathcal{V}_p$ et $j \in \mathcal{V}_q$ avec $p \neq q$, on définit un agrégat global qui peut être noté

$$\widehat{\omega}_{p,q} = \Psi\left(\{\omega_{i,j}\}_{i \in \mathcal{V}_p,\, j \in \mathcal{V}_q} \right),$$

où Ψ est une fonction d'agrégation (par exemple, la moyenne ou la somme pondérée). Ce **meta-SCN**, ou **sur-graphe**, représente la cohésion inter-blocs et permet d'optimiser la gestion du réseau à un niveau macro. Il facilite la fusion de clusters lorsque des sous-SCN affichent une forte synergie et permet d'adapter dynamiquement l'organisation des microservices en cas de reconfiguration nécessaire.

Ce modèle mathématique traduit la hiérarchie du système, où la dynamique locale de chaque microservice s'articule avec une dynamique globale issue de l'agrégation des interactions inter-blocs. Cette approche assure une meilleure adaptabilité, en structurant le SCN de manière flexible et scalable, tout en maintenant une cohérence globale dans l'évolution du réseau.

C. Avantages et Limites de l'Approche Microservices

Du point de vue de l'ingénierie logicielle, l'architecture microservices offre plusieurs avantages essentiels. Elle permet un déploiement indépendant, où chaque sous-SCN peut être développé, testé et mis à jour sans perturber le réseau global. Cette modularité facilite la maintenance et l'extension du système, en rendant chaque service spécialisé dans la gestion d'un sous-ensemble d'entités.

La scalabilité horizontale est également optimisée, car il devient possible d'allouer dynamiquement des ressources à un microservice surchargé ou de le subdiviser si nécessaire. Cette flexibilité améliore la répartition de la charge et assure une meilleure résilience face à l'évolution du réseau.

Toutefois, cette approche introduit des défis liés à la coordination entre microservices et à la gestion des liaisons inter-blocs. La communication entre services doit être soigneusement orchestrée pour éviter les incohérences et garantir la convergence globale du SCN. Une synchronisation efficace est donc essentielle pour maintenir une structure cohérente et éviter les divergences entre blocs.

5.7.3. Ingénierie Logicielle

Même s'il s'agit d'un ouvrage à dominante mathématique ou théorique, un **SCN** (Synergistic Connection Network) de grande envergure, distribué en plusieurs sous-SCN (5.7.1) et éventuellement chapeauté par un meta-SCN (5.7.2), requiert une **organisation logicielle** suffisamment robuste et modulaire.

Le chapitre 5.7.3 vise à souligner les principales approches d'ingénierie employées pour structurer et maintenir un système de ce type, dans la perspective d'une mise en œuvre pérenne ou d'un cadre de recherche-application.

5.7.3.1. Patterns de Conception (Observer, Strategy, etc.) pour Moduler l'Implémentation

La mise en œuvre d'un **réseau SCN**, tel que défini par ses équations d'évolution de pondération $\omega_{i,j}(t+1) = F\big(\omega_{i,j}(t), S(i,j), \dots\big)$, nécessite non seulement une compréhension rigoureuse de sa dynamique mathématique, mais également une traduction concrète dans un environnement logiciel modulaire et évolutif.

Dans ce contexte, l'utilisation de **patterns de conception** (design patterns) issus du génie logiciel orienté objet – notamment les patterns **Strategy** et **Observer** – permet de découpler la

logique de mise à jour, la gestion des synergies, et le suivi des événements, tout en facilitant la maintenance et l'extension du système.

A. Contexte et Problématique

Le cœur mathématique d'un SCN se résume souvent à une équation générique telle que

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big],$$

où :

- $\omega_{i,j}(t)$ représente la pondération entre les entités $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$ à l'itération t,
- $S(i,j)$ est la **synergie** entre ces entités,
- η est le **taux d'apprentissage** et τ le coefficient de décroissance.

Cependant, dans une implémentation réelle, cette formule n'est qu'un composant d'un système beaucoup plus vaste qui doit aussi :

- **Calculer** la synergie $S(i,j)$ de manière adaptée aux types d'entités,
- **Adapter** la règle de mise à jour à différentes variantes (par exemple, additive, multiplicative, avec termes stochastiques ou d'inhibition),
- **Observer** et **notifier** les changements de l'état du réseau pour permettre une analyse en temps réel ou une adaptation dynamique.

Pour répondre à ces enjeux, des **patterns de conception** offrent un cadre permettant de modulariser ces préoccupations. Ils permettent d'isoler le « **quoi** » (la formule de mise à jour et le calcul de S) du « **comment** » (la manière dont le code est organisé, exécuté et surveillé). Dans ce cadre, deux patterns se distinguent particulièrement :

- **Strategy** : Pour encapsuler la variation des algorithmes de mise à jour dans des classes interchangeables.
- **Observer** : Pour mettre en place un système de notifications qui informe d'un changement dans l'état des pondérations, sans alourdir le module central.

B. Pattern Strategy : Flexibilité dans la Mise à Jour

Le pattern **Strategy** consiste à définir une **interface** abstraite pour un algorithme, permettant ainsi d'encapsuler différentes implémentations concrètes qui pourront être interchangées au moment de l'exécution. Dans le cas du SCN, cela signifie créer une interface pour la mise à jour de ω qui se présente, par exemple, sous la forme :

$$\text{applyUpdate}\big(\omega_{i,j}(t),\, S(i,j),\, \text{params}\big) \to \omega_{i,j}(t+1).$$

La fonction F qui intervient dans l'équation de mise à jour peut ainsi être décomposée en modules distincts, chacun implémentant une stratégie particulière. Par exemple :

- **AdditiveUpdateRule** :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big].$$

- **MultiplicativeUpdateRule** :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) \times \Big[1 + \eta \left(S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right)\Big].$$

En définissant une interface **UpdateRule** (par exemple, en Python ou en Java), le module central du SCN peut appeler une méthode *applyUpdate* sans se préoccuper des détails de l'algorithme utilisé. Ce découplage facilite l'expérimentation et la comparaison entre différentes dynamiques d'apprentissage.

C. Pattern Observer : Suivi et Notification des Changements

Le pattern **Observer** permet d'établir un mécanisme de **notification** dans lequel un objet (le **sujet**) informe un ensemble d'**observateurs** lorsqu'un événement pertinent se produit. Dans le cadre d'un SCN, le sujet peut être le module qui gère la matrice ω et qui, à chaque itération ou à chaque changement significatif, émet une notification indiquant l'évolution des poids.

Cette approche est utile pour plusieurs raisons :

- Elle permet de **déclencher** des actions supplémentaires, comme l'actualisation de visualisations ou l'extraction de clusters, sans alourdir le code de la mise à jour.
- Elle offre une **décorrélation** entre la logique de mise à jour et les modules d'analyse, ce qui facilite la maintenance.
- Elle permet d'implémenter des **règles adaptatives**, par exemple pour ajuster dynamiquement les paramètres η ou τ en fonction des fluctuations observées.

En pratique, le module central du SCN peut inclure une méthode pour **enregistrer** des observateurs, qui seront appelés par exemple via une méthode *notifyObservers()* dès que l'état de ω est mis à jour.

D. Intégration des Patterns dans une Architecture Modulaire

L'architecture globale du SCN se structure autour d'un **noyau** central qui gère la matrice ω et orchestre la boucle d'auto-organisation. Ce noyau fait appel aux modules suivants :

- Un **UpdateModule** qui, via le pattern Strategy, applique la règle de mise à jour appropriée.
- Un **SynergyModule** qui fournit les valeurs de $S(i,j)$ à partir des représentations des entités.
- Un **ObserverModule** qui, via le pattern Observer, capte les changements dans ω et déclenche des actions (visualisation, logging, ajustement des paramètres).

Mathématiquement, la mise à jour d'un poids peut être réécrite comme :

$$\omega_{i,j}(t+1) = F\big(\omega_{i,j}(t),\, S(i,j),\, \eta,\, \tau\big),$$

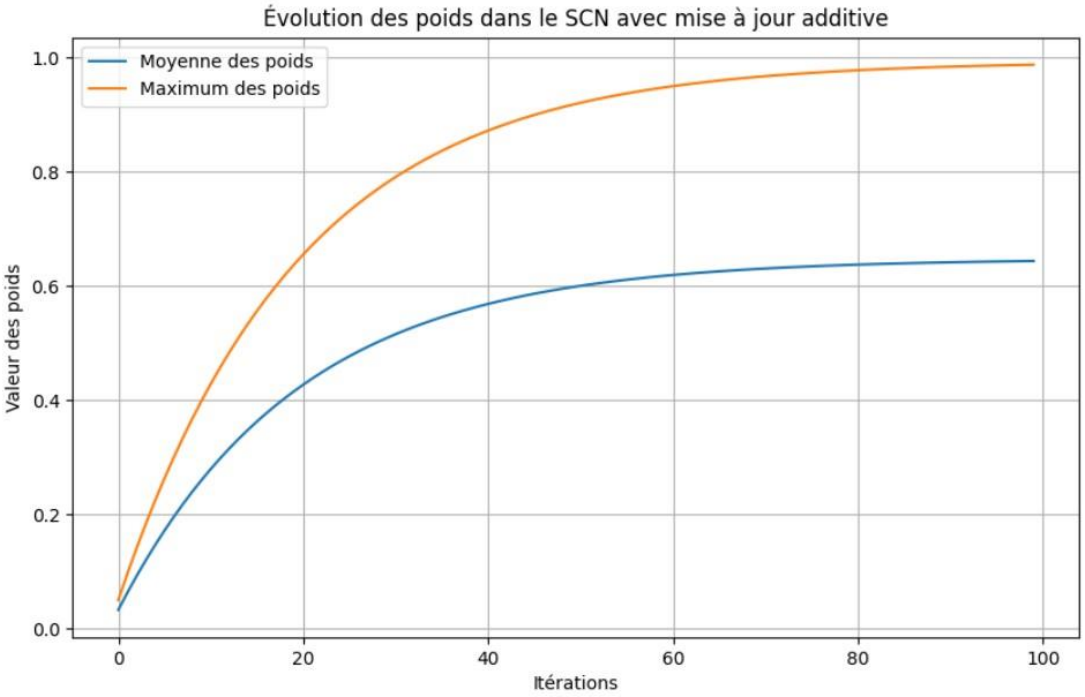
où F est encapsulée dans la *Strategy* utilisée, et où le noyau se contente de parcourir la matrice et d'appliquer cette fonction à chaque composante. Les observateurs, quant à eux, reçoivent la notification du changement et effectuent des traitements complémentaires.

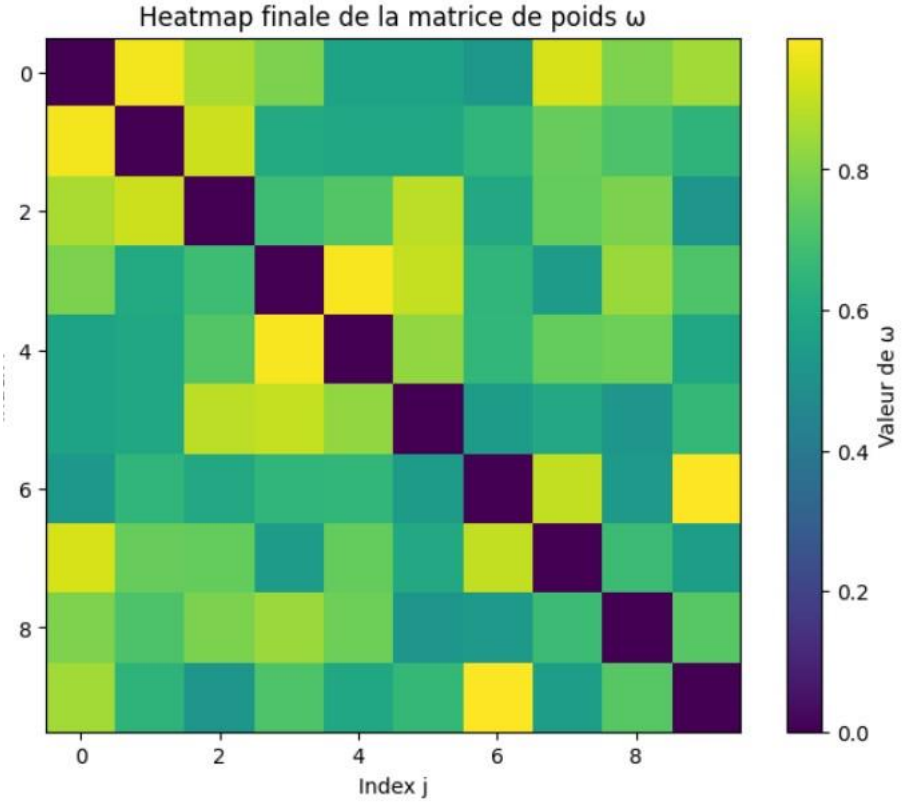
Exemple Pseudo-implémentation en Python

Voici une implémentation simplifiée en Python qui illustre l'utilisation des patterns **Strategy** et **Observer** dans le cadre de la mise à jour des poids d'un SCN :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Définition des paramètres généraux
params = {'eta': 0.05, 'tau': 1.0}
T_max = 100  # Nombre d'itérations
n = 10       # Nombre d'entités

# Création d'une matrice de synergie S (symétrique, sans auto-connexion)
np.random.seed(42)
S = np.random.uniform(0.5, 1.0, (n, n))
for i in range(n):
    S[i, i] = 0.0
    for j in range(i + 1, n):
        S[j, i] = S[i, j]

# Initialisation de la matrice de poids w
w = np.zeros((n, n))

# ----------------------------
# Pattern Strategy: Interface de mise à jour
# ----------------------------
class UpdateRule:
    def apply(self, old_weight, synergy, params):
        raise NotImplementedError

class AdditiveUpdateRule(UpdateRule):
    def apply(self, old_weight, synergy, params):
        return old_weight + params['eta'] * (synergy - params['tau'] * old_weight)

class MultiplicativeUpdateRule(UpdateRule):
    def apply(self, old_weight, synergy, params):
        return old_weight * (1 + params['eta'] * (synergy - params['tau'] * old_weight))

# Choix de la stratégie de mise à jour
update_rule = AdditiveUpdateRule()  # On peut changer pour MultiplicativeUpdateRule()

# ----------------------------
# Pattern Observer: Système de notification
# ----------------------------
class Observer:
    def update(self, w, t):
        raise NotImplementedError

class WeightObserver(Observer):
    def __init__(self):
        self.mean_history = []
        self.max_history = []

    def update(self, w, t):
        self.mean_history.append(np.mean(w))
        self.max_history.append(np.max(w))

# Instanciation de l'observer
observer = WeightObserver()
```

```
# Historique pour visualisation
w_history = [w.copy()]

# Boucle d'itération principale du SCN
for t in range(T_max):
    w_next = np.copy(w)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i != j:
                w_next[i, j] = update_rule.apply(w[i, j], S[i, j], params)
    w = w_next
    w_history.append(w.copy())
    observer.update(w, t)

# Visualisation des statistiques de poids au fil des itérations
iterations = range(T_max)
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(iterations, observer.mean_history, label="Moyenne des poids")
plt.plot(iterations, observer.max_history, label="Maximum des poids")
plt.xlabel("Itérations")
plt.ylabel("Valeur des poids")
plt.title("Évolution des poids dans le SCN avec mise à jour additive")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Visualisation finale de la matrice de poids sous forme de heatmap
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.imshow(w, cmap="viridis", interpolation="nearest")
plt.colorbar(label="Valeur de ω")
plt.title("Heatmap finale de la matrice de poids ω")
plt.xlabel("Index j")
plt.ylabel("Index i")
plt.show()
```





Explications

Dans cette implémentation, le **pattern Strategy** est appliqué à travers l'interface *UpdateRule*, dont les implémentations concrètes comme *AdditiveUpdateRule* permettent de choisir la dynamique de mise à jour du SCN. Le module central se contente d'appeler la méthode *apply*

pour chaque paire (i, j), rendant le système facilement extensible et expérimental, puisqu'un simple changement d'instance permet de tester différentes formules.

Le **pattern Observer** est utilisé pour capturer l'évolution du réseau en temps réel. La classe *WeightObserver* enregistre des statistiques globales, telles que la moyenne et le maximum des pondérations, facilitant ainsi la visualisation et l'analyse de la dynamique auto-organisée.

Cette approche garantit une **séparation claire** entre la **logique mathématique**, qui définit les règles d'évolution des pondérations, et l'**orchestration logicielle**, qui gère l'exécution et la surveillance du SCN. Les graphiques générés permettent d'illustrer la convergence ou d'éventuelles oscillations, validant ainsi le comportement du réseau.

L'utilisation conjointe des patterns **Strategy** et **Observer** permet d'assurer une **flexibilité maximale** tout en conservant une **cohérence mathématique**, garantissant ainsi une architecture modulaire, extensible et adaptée à un cadre logiciel évolutif.

5.7.3.2. Approches NoSQL, BDD Orientée Graphe (Neo4j, Titan) pour Stocker ω

La gestion de la **persistance** des pondérations $\omega_{i,j}$ dans un réseau SCN à grande échelle pose des défis majeurs tant sur le plan **mémoire** que sur celui des **requêtes complexes**. Lorsque le nombre d'entités n devient très important, la matrice $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ contenant l'ensemble des $\omega_{i,j}$ peut atteindre une taille de l'ordre de $O(n^2)$. Dans ces conditions, un simple stockage en mémoire vive ou sous forme de fichiers plats ne suffit pas pour assurer des mises à jour efficaces, l'extraction rapide de sous-ensembles pertinents ou l'analyse ultérieure de la structure globale du réseau.

A. Choix d'une Base de Données NoSQL ou Graph

Les **bases de données relationnelles** traditionnelles, malgré leur maturité, peinent à gérer de très grandes quantités de données lorsqu'il s'agit de modéliser des graphes denses. Par exemple, le stockage d'une table *Edges(source, target, weight)* dans une base SQL génère rapidement des contraintes en termes de bande passante et de temps de réponse pour des requêtes complexes telles que la recherche des top-k liens sortants ou la détection de communautés.

Les **bases NoSQL** offrent une solution alternative en se focalisant sur la scalabilité horizontale et la distribution des données. Parmi celles-ci, les bases **orientées graphe** — telles que **Neo4j** et **JanusGraph/Titan** — se distinguent par leur capacité native à représenter directement les **nœuds** et les **arêtes**. Dans ce paradigme, chaque entité $\mathcal{E}_i$ est modélisée comme un nœud, et chaque pondération $\omega_{i,j}$ apparaît comme une arête dotée d'un attribut « weight ». Mathématiquement, on peut assimiler cette représentation à une fonction

$$\omega : V \times V \to \mathbb{R}^+,$$

où V désigne l'ensemble des nœuds. Les langages de requête dédiés, tels que **Cypher** pour Neo4j ou **Gremlin** pour JanusGraph, permettent d'extraire aisément des sous-graphes, de calculer des agrégats ou d'appliquer des algorithmes de détection de communautés sur le graphe persistant.

B. Intégration dans la Dynamique du SCN

Du point de vue de l'**auto-organisation**, le SCN évolue selon une dynamique décrite par la relation générale

$$\omega_{i,j}(t+1) = F\big(\omega_{i,j}(t),\, S(i,j),\, \text{paramètres}\big),$$

où F représente la fonction de mise à jour (qui peut être additive, multiplicative ou comporter des termes stochastiques). Dans un contexte de grande échelle, il devient impératif de persister les valeurs de $\omega_{i,j}$ afin de :

- **Conserver** un historique des évolutions pour des analyses ultérieures (audit, vérification de convergence ou détection d'événements anormaux),
- **Exécuter** des requêtes en temps réel pour extraire les **clusters** ou les **top-k** liens, et
- **Distribuer** la charge en exploitant les capacités de partitionnement et de réplication offertes par les bases NoSQL.

L'intégration de la dynamique dans une base orientée graphe consiste donc à synchroniser, de manière périodique ou en temps réel, la matrice **Ω** avec la structure persistée. Pour cela, des mécanismes de *batch update* ou de mise à jour épisodique sont mis en place afin de limiter le nombre d'opérations d'écriture, souvent regroupées par des algorithmes d'agrégation sur les liens inter-blocs.

C. Approches de Stockage et de Requête

L'utilisation d'une base **orientée graphe** présente plusieurs avantages du point de vue algorithmique et mathématique. Premièrement, la représentation d'un SCN dans un graphe $G = (V, E)$ se traduit naturellement par :

- Chaque nœud $v \in V$ représente une entité $\mathcal{E}_i$,
- Chaque arête $e = (u, v) \in E$ est associée à une pondération $\omega_{u,v}$.

Cette correspondance directe facilite l'implémentation de **requêtes** complexes, telles que la recherche des voisins d'un nœud ayant un poids supérieur à un seuil donné, ou l'extraction des chemins les plus courts pondérés par ω. Par exemple, une requête Cypher dans Neo4j pour récupérer les liens les plus forts pourrait être formulée ainsi :

MATCH (i)-[r]->(j) WHERE r.weight > θ RETURN i, j, r.weight ORDER BY r.weight DESC LIMIT k,

ce qui permet de visualiser la structure des **clusters** émergents et d'identifier les **communautés** présentes dans le réseau.

De plus, l'aspect distribué des bases telles que **JanusGraph** (souvent couplée à des backends comme Cassandra ou HBase) permet de gérer efficacement des graphes contenant des millions de nœuds et d'arêtes, en assurant une **scalabilité horizontale** ainsi qu'une haute disponibilité.

D. Avantages et Contraintes des Approches NoSQL/Graph

D'un point de vue **mathématique**, l'utilisation d'une base orientée graphe permet de traiter les pondérations $\omega_{i,j}$ comme des composantes d'un opérateur linéaire défini sur l'espace des nœuds, facilitant l'application d'algorithmes de partitionnement ou de clustering. Les **algorithmes de détection de communautés** (par exemple, Louvain ou Label Propagation) peuvent directement exploiter la structure du graphe pour déterminer des clusters à différents niveaux de granularité.

Sur le plan **ingénierie**, l'utilisation d'une BDD NoSQL/Graph offre la possibilité de distribuer le stockage et le calcul, en permettant un **sharding** du graphe sur plusieurs machines. Toutefois, cette approche nécessite une phase de conception soignée pour définir les schémas d'indexation, les stratégies de réplication et les protocoles de mise à jour afin d'éviter des incohérences ou des retards importants dans les opérations d'écriture.

Par ailleurs, la nature même d'un graphe persistant implique que l'on puisse réaliser des **snapshots** ou des **logs** d'évolution, ce qui est particulièrement utile pour l'analyse rétroactive de la dynamique du SCN et la validation des hypothèses théoriques sur la convergence.

5.7.3.3. Équilibrage de Charge (Sharding de la Matrice ω)

Dans un réseau SCN à très grande échelle, la matrice de pondérations $\mathbf{\Omega}$ qui regroupe les connexions $\omega_{i,j}$ entre toutes les entités peut rapidement devenir volumineuse, avec une complexité mémoire de l'ordre de $O(n^2)$ lorsque le nombre d'entités n augmente. Pour pallier ce problème, il est souvent nécessaire de recourir à des techniques d'**équilibrage de charge** par le *sharding*, c'est-à-dire en partitionnant la matrice en fragments plus petits répartis sur plusieurs nœuds ou serveurs. Cette approche permet non seulement de réduire la charge de calcul et la pression sur la mémoire, mais également de réduire la latence lors de l'accès aux données et de faciliter la mise à l'échelle horizontale du système.

Sur le plan **mathématique**, on peut formaliser le sharding comme suit. Soit $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice complète des pondérations, et supposons que nous partitionnons l'ensemble des entités $V = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ en m sous-ensembles disjoints, notés $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m$, de sorte que chaque sous-SCN SCN_p gère la matrice locale $\mathbf{\Omega}^{(p)}$ de dimensions $|\mathcal{V}_p| \times |\mathcal{V}_p|$. Dans le cas idéal d'un partitionnement homogène, chaque bloc contient environ $\frac{n}{m}$ entités, et la taille de chaque matrice locale est alors de l'ordre de $O\left(\left(\frac{n}{m}\right)^2\right)$. Ainsi, le coût global de stockage pour les données internes aux shards est réduit à

$$m \times O\left(\left(\frac{n}{m}\right)^2\right) = O\left(\frac{n^2}{m}\right),$$

ce qui, pour un m suffisamment grand, constitue une amélioration significative par rapport à une gestion centralisée.

Le partitionnement par sharding améliore également l'**efficacité des requêtes**. Par exemple, lorsque l'on cherche à extraire les k plus fortes connexions pour une entité donnée, il est beaucoup plus rapide de consulter la ligne correspondante dans le shard local que d'effectuer un parcours exhaustif sur une matrice globale gigantesque. De plus, l'**accès local** aux données réduit la latence réseau et permet une meilleure exploitation du cache dans les environnements distribués.

Toutefois, le sharding introduit la problématique des **liaisons inter-shards**. Les connexions $\omega_{i,j}$ reliant des entités situées dans des shards différents (par exemple, $i \in \mathcal{V}_p$ et $j \in \mathcal{V}_q$ avec $p \neq q$) nécessitent une gestion particulière. La communication entre shards peut être réalisée de deux manières principales :

- Dans une première approche, chaque shard est responsable de stocker et de mettre à jour les liens pour lesquels il détient la ligne correspondante. Par exemple, on peut définir que le shard auquel appartient l'entité $\mathcal{E}_i$ est le maître de toutes les pondérations $\omega_{i,j}$

pour tout j. Les autres shards doivent alors interroger ce maître pour obtenir la version la plus récente de ces liens.

- Dans une seconde approche, chaque shard maintient une **copie locale** des liens inter-shards, et un mécanisme de synchronisation périodique (par exemple, via des barrières synchrones ou des protocoles de type *gossip*) est mis en œuvre afin d'harmoniser les divergences éventuelles.

Sur le plan **ingénierie**, la répartition des entités peut être réalisée par **partitionnement par hachage** ou via des algorithmes de **graph partitioning** comme METIS ou Kernighan–Lin. Le partitionnement par hachage assigne chaque entité à un fragment en utilisant une fonction comme $p = \text{hash}(i) \bmod m$, garantissant une répartition uniforme. En revanche, le partitionnement par graphes cherche à minimiser les connexions inter-shards en regroupant les entités fortement liées au sein d'un même fragment.

Le **sharding** présente plusieurs avantages. Il permet une **scalabilité horizontale** en répartissant la charge sur plusieurs serveurs, améliore la **localité** des données pour un accès plus rapide, et accroît la **résilience** du système en évitant qu'une défaillance locale ne compromette l'ensemble du réseau. Cependant, il peut entraîner des **incohérences** entre les shards et requiert une gestion rigoureuse des mises à jour inter-fragments pour maintenir la cohésion du SCN.

L'optimisation du partitionnement de la matrice ω est donc essentielle pour les SCN de grande échelle. La fragmentation en blocs plus petits réduit les coûts mémoire et le temps de calcul par itération, tout en augmentant la réactivité du système. Toutefois, la communication et la synchronisation entre shards doivent être soigneusement orchestrées afin de garantir la **cohérence globale** du réseau.

Exemple de mise en œuvre en Python (sans visualisation graphique)

Bien que nous nous concentrions ici sur l'explication théorique, il est pertinent d'illustrer brièvement comment l'on pourrait organiser le sharding de la matrice ω dans un environnement Python. Supposons que nous partitionnions nos entités en m shards et que nous stockions chaque shard sous forme d'un tableau NumPy. Une implémentation simple pourrait ressembler à :

```
import numpy as np

def initialize_shard(n, m, shard_index):
    """Initialise le shard pour le sous-ensemble d'entités du shard_index.
       n : nombre total d'entités
       m : nombre de shards
       shard_index : index du shard courant (0 <= shard_index < m)
    """
    # On suppose un partitionnement uniforme : chaque shard gère n/m entités
    entities_per_shard = n // m
    # Dimensions du shard: (entities_per_shard x n)
    # On stocke uniquement les lignes correspondantes à ce shard
    shard = np.zeros((entities_per_shard, n))
    return shard

def update_shard(shard, S, eta, tau, gamma):
    """Applique la règle de mise à jour sur le shard.
       S : matrice complète de synergie (n x n)
       shard : matrice du shard courant (entities_per_shard x n)
```

```
    Cette fonction met à jour chaque poids selon la formule additive avec inhibition.
    """
    entities_per_shard, n = shard.shape
    new_shard = np.copy(shard)
    for i in range(entities_per_shard):
        global_i = i  # Dans un partitionnement uniforme, global_i = shard_index * entities_per_shard +
i
        for j in range(n):
            # Calcul de la mise à jour additive
            delta = eta * (S[global_i, j] - tau * shard[i, j])
            # Ajout du terme d'inhibition : somme sur k != j
            inhibition = gamma * (np.sum(shard[i, :]) - shard[i, j])
            new_shard[i, j] = shard[i, j] + delta - inhibition
    return new_shard

# Paramètres
n = 1000      # nombre total d'entités
m = 10        # nombre de shards
eta = 0.05
tau = 1.0
gamma = 0.01

# Initialisation de la matrice de synergie S (pour l'exemple, valeurs aléatoires)
np.random.seed(42)
S = np.random.uniform(0, 1, (n, n))

# Initialisation des shards
shards = [initialize_shard(n, m, p) for p in range(m)]

# Mise à jour sur plusieurs itérations (par exemple, 100 itérations)
iterations = 100
for t in range(iterations):
    for p in range(m):
        shards[p] = update_shard(shards[p], S, eta, tau, gamma)
    # Ici, on pourrait synchroniser les mises à jour inter-shards si nécessaire (non implémenté)

# À ce stade, chaque shard contient sa partie mise à jour de la matrice ω.
```

Ce code illustre l'approche de **sharding** où chaque shard gère un sous-ensemble des lignes de la matrice ω. Bien que cet exemple ne couvre pas la synchronisation des liaisons inter-shards, il démontre la manière dont la mise à jour locale est effectuée sur chaque fragment, réduisant ainsi la charge de calcul par rapport à une matrice centralisée. Dans une application réelle, des mécanismes supplémentaires seraient intégrés pour synchroniser les valeurs des liens inter-blocs et pour assurer une cohérence globale.

En synthèse, l'équilibrage de charge par sharding permet de gérer efficacement des SCN à grande échelle en divisant la matrice ω en blocs plus petits, améliorant ainsi la scalabilité, la localité des accès et la résilience du système tout en maintenant la dynamique mathématique fondamentale du réseau.

5.8. Sécurité, Fiabilité et Vérifications

Dans une optique de **grande échelle** et de **distribution** (cf. sections précédentes), la sécurité et la fiabilité d'un **SCN** (Synergistic Connection Network) ne sauraient être laissées de côté, en particulier lorsqu'on envisage des scénarios collaboratifs ou ouverts (accès par divers agents, partage de données, etc.). Le chapitre 5.8 vise à souligner les problématiques de **vulnérabilité** face à des attaques ou manipulations (5.8.1), la robustesse en cas de pannes (5.8.2) et la question du contrôle d'intégrité (5.8.3).

Même si l'on se concentre principalement sur l'aspect mathématique et théorique, il est crucial de prévoir des mécanismes de sécurité et de vérification pour un SCN qui puisse fonctionner de façon fiable dans des environnements potentiellement hostiles ou imprévisibles.

5.8.1. Vulnérabilités au Bruit ou à l'Attaque

Dans un **SCN** ouvert, surtout en environnement **distribué** (5.7), les entités et liens peuvent subir des **perturbations** externes comme du **bruit**, des **agents malveillants** ou des **données corrompues**.

La sous-section **(5.8.1.1)** aborde les **risques d'attaques** et de **sabotage** pouvant altérer la dynamique du réseau. La sous-section **(5.8.1.2)** présente des **contre-mesures**, incluant la surveillance par **logs**, **watchers** et des **détections d'anomalies**.

5.8.1.1. Si un agent malveillant manipule $\omega_{i,j}$, risque de clusters artificiels ou sabotage de la dynamique

Dans le cadre d'un **Synergistic Connection Network** (SCN), la robustesse de la formation des *clusters* repose sur la mise à jour itérative et locale des pondérations $\omega_{i,j}$ par l'équation

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t) \right],$$

où η est le **taux d'apprentissage** et τ le **coefficient de décroissance**. Ce mécanisme vise à renforcer les liaisons correspondant à une **synergie** élevée entre entités tout en assurant une régulation préventive d'une croissance non contrôlée. Cependant, si un **agent malveillant** parvient à intervenir sur $\omega_{i,j}$ ou sur le calcul de $S(i,j)$, il est possible d'injecter des perturbations qui peuvent induire la formation de *clusters artificiels* ou, inversement, empêcher l'émergence des structures attendues, compromettant ainsi la **stabilité** et la **légitimité** du SCN.

A. Enjeu Mathématique et Opérationnel

La dynamique de mise à jour, symbolisée par la fonction F définie par

$$F\left(\omega_{i,j}(t), S(i,j)\right) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t) \right],$$

est au cœur de la formation des clusters. La **convergence** vers un état stable se traduit par l'atteinte d'un équilibre approximatif $\omega_{i,j}^{*}$ tel que

$$\omega_{i,j}^{*} \approx \frac{S(i,j)}{\tau}.$$

L'**intégrité** de cette dynamique dépend de la fiabilité des valeurs de $S(i,j)$ et de $\omega_{i,j}$. Un attaquant qui intervient sur ces paramètres peut, par exemple, **injecter** des valeurs anormalement élevées dans certains éléments de la matrice ω ou altérer le module de calcul de $S(i,j)$ afin de renvoyer des valeurs décalées. En conséquence, l'agent malveillant peut fausser la perception de la *cohérence* entre entités, menant à la formation de **clusters fictifs** – où certaines entités paraissent artificiellement surconnectées – ou, au contraire, paralyser la capacité d'auto-organisation du réseau en annulant les liens essentiels.

Sur le plan **opérationnel**, de telles manipulations peuvent compromettre des systèmes critiques, tels que des algorithmes de recommandation, la coordination de robots ou encore des systèmes de détection d'anomalies, dans lesquels la configuration de $\omega_{i,j}$ reflète la structure réelle et utile des données. Une altération des pondérations conduit ainsi à une perte de **fiabilité** et de **prédictibilité** dans l'évolution du réseau.

B. Scénarios d'Attaques Possibles

Plusieurs vecteurs d'attaque peuvent être envisagés pour manipuler les valeurs de $\omega_{i,j}$ ou de $S(i,j)$:

Dans ce scénario, un **agent interne** ou une entité ayant acquis un accès privilégié au système modifie directement la matrice des pondérations. Les actions possibles incluent :

- **Gonflement artificiel** : en assignant par exemple $\omega_{i,j} = 100$ pour certaines paires (i,j), l'attaquant force la dynamique à renforcer de manière excessive des liaisons qui ne reflètent pas la réalité de la synergie entre entités. Ce gonflement crée des *clusters* artificiels, induisant une surconnexion entre des entités qui, en conditions normales, ne devraient pas être regroupées.

- **Affaiblissement ciblé** : en réduisant à zéro ou en diminuant fortement des liens cruciaux pour la cohésion du réseau, l'attaquant peut empêcher la formation de clusters réellement cohésifs, sabotant ainsi le processus d'auto-organisation.

Une autre approche consiste à intercepter ou à altérer le module de calcul de la **synergie**. Par exemple, si le composant $S(i,j)$ est implémenté dans un module nommé *synergyCalculator*, une corruption de ce module peut renvoyer des valeurs exagérément élevées (par exemple $S(i,j) = 10^5$) ou des valeurs très faibles, indépendamment de la relation réelle entre $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$. Cette falsification trompe la mise à jour locale de $\omega_{i,j}$ et conduit le réseau à renforcer des connexions basées sur des indicateurs erronés.

Dans des architectures distribuées, où plusieurs sous-SCN communiquent pour mettre à jour la matrice globale, l'attaquant peut interférer avec la transmission des messages. Les stratégies comprennent :

- **Spoofing des messages** : l'envoi de fausses informations sur les valeurs de $\omega_{i,j}$ ou la synergie calculée, induisant une mise à jour erronée dans les différents nœuds du réseau.

- **Retard ou suppression** : en retardant la transmission ou en supprimant certains messages inter-blocs, l'attaquant crée des incohérences temporelles qui perturbent la convergence du système.

C. Impact sur la Dynamique

Lorsque des valeurs de $\omega_{i,j}$ sont artificiellement gonflées, la dynamique du SCN tend à regrouper les entités associées dans un même cluster, même si elles n'ont pas de synergie naturelle élevée. Le mécanisme de mise à jour renforce ces liaisons aberrantes, menant à l'émergence de *clusters fictifs* qui ne reflètent pas la structure intrinsèque des données. Par exemple, dans un système de recommandation, un groupe d'utilisateurs pourrait être rassemblé artificiellement, faussant ainsi les résultats et la pertinence des recommandations.

Inversement, la réduction ou l'annulation de certains liens cruciaux par l'attaquant empêche la consolidation de clusters légitimes. Le résultat peut être une oscillation continue des valeurs de $\omega_{i,j}$ ou une dispersion générale qui rend impossible l'atteinte d'un état d'équilibre. Dans un contexte de robotique ou de systèmes d'intelligence collective, une telle perturbation conduit à un manque de coordination et à une incapacité d'atteindre une **stabilité opérationnelle**.

Les preuves mathématiques assurant la convergence de la dynamique du SCN reposent sur l'hypothèse d'un comportement aléatoire (et non adversarial) dans la perturbation des pondérations. En présence d'une **perturbation dirigée**, la fonction de mise à jour

$$\omega_{i,j}(t+1) = F\left(\omega_{i,j}(t), S(i,j)\right)$$

se voit remplacée par

$$\omega_{i,j}(t+1) = F\left(\omega_{i,j}(t), S(i,j)\right) + \text{Perturbation}_{\text{adv}}(i,j,t),$$

où $\text{Perturbation}_{\text{adv}}(i,j,t)$ est choisie par l'attaquant pour maximiser son effet destructeur. Ainsi, les garanties de stabilité, de convergence et de formation de clusters sont compromises, rendant l'analyse théorique du SCN caduque en conditions adversariales.

D. Dimension Mathématique : Perturbation Adversariale de F

D'un point de vue mathématique, l'attaque peut être formalisée par l'introduction d'un **terme perturbateur** dans l'opérateur de mise à jour. Ainsi, au lieu d'avoir

$$\omega_{i,j}(t+1) = F\left(\omega_{i,j}(t), S(i,j)\right),$$

on considère que

$$\omega_{i,j}(t+1) = F\left(\omega_{i,j}(t), S(i,j)\right) + \Delta_{adv}(i,j,t),$$

où

$$\Delta_{adv}(i,j,t) = \text{Perturbation}_{\text{adv}}(i,j,t)$$

représente l'action malveillante. Si cette perturbation est suffisamment grande et choisie de manière stratégique, elle peut modifier la trajectoire dynamique de $\omega_{i,j}(t)$ au point de rendre la convergence vers $\omega_{i,j}^{*} \approx \frac{S(i,j)}{\tau}$ impossible. En d'autres termes, la présence de Δ_{adv} introduit une **incertitude** et une **instabilité** qui empêchent la formation d'un état stable, rendant ainsi le SCN vulnérable à des modifications arbitraires de sa topologie.

5.8.1.2. Solutions : Logs, Watchers, Checks d'Anomalies

La robustesse d'un **Synergistic Connection Network** (SCN) face aux attaques malveillantes, telles que celles décrites en **Section 5.8.1.1**, repose sur la mise en place de mécanismes complémentaires destinés à surveiller, tracer et valider en temps réel la dynamique de mise à jour des pondérations $\omega_{i,j}$. Bien que ces solutions ne modifient pas le **cœur mathématique** du modèle – défini par l'équation de mise à jour

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right],$$

– elles jouent un rôle essentiel pour **fiabiliser** l'auto-organisation en introduisant une surcouche de sécurité et de contrôle. Nous détaillons trois axes complémentaires de défense. La **traçabilité** via les journaux (*logs*), la **surveillance en temps réel** par des *watchers* et l'utilisation d'**algorithmes de détection d'anomalies**.

A. Journaux (Logs) et Traçabilité

La **traçabilité** est une condition indispensable pour détecter toute modification suspecte dans la dynamique du SCN. En enregistrant chaque événement de mise à jour des pondérations, il est possible de reconstituer l'historique complet de l'évolution de $\omega_{i,j}$. Pour ce faire, chaque mise à jour est loggée avec des métadonnées détaillées, telles que :

- **Identifiants** des entités concernées, (i,j),
- La **variation** appliquée, notée

$$\Delta\omega_{i,j}(t) = \omega_{i,j}(t+1) - \omega_{i,j}(t),$$

- Le **timestamp** de la mise à jour,
- L'**ID de l'agent** ou du composant initiateur de la mise à jour,
- Des **paramètres contextuels** (valeur calculée de la synergie $S(i,j)$, paramètres η et τ, etc.),
- Une **signature cryptographique** ou un *hash* du message, par exemple

$$H(i,j,t) = \text{Hash}\big(i,j,\omega_{i,j}(t),\Delta\omega_{i,j}(t),\text{timestamp}\big),$$

Ces **logs** constituent un registre immuable exploitable pour une **analyse forensique**. Leur utilité est double. Ils permettent d'identifier en temps différé des anomalies, comme une variation exceptionnelle de $\Delta\omega_{i,j}(t)$ passant de 0.2 à 100 en une seule itération. Ils offrent aussi une base pour **corréler** les événements avec les actions d'un potentiel attaquant. Dans un contexte distribué, la centralisation ou la synchronisation des logs via des solutions de stockage sécurisées, comme des bases NoSQL ou des systèmes de fichiers distribués avec intégrité garantie, assure une **traçabilité** à l'échelle du réseau.

B. Watchers et Monitoring en Temps Réel

Les **watchers** sont des modules de surveillance intégrés dans la boucle de mise à jour des pondérations. Leur rôle est de **filtrer** en temps réel les variations de $\omega_{i,j}$ afin de détecter immédiatement toute anomalie qui pourrait résulter d'une action malveillante. Mathématiquement, on peut considérer un Watcher comme une fonction de contrôle W appliquée à chaque mise à jour :

$$W\left(\Delta\omega_{i,j}(t)\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } \left|\Delta\omega_{i,j}(t)\right| > \kappa, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où κ est un **seuil critique** défini en fonction de la dynamique attendue du SCN. Lorsqu'une condition d'alerte est satisfaite – par exemple, si

$$\left|\omega_{i,j}(t+1) - \omega_{i,j}(t)\right| > \kappa \quad \text{ou} \quad \omega_{i,j}(t+1) > \omega_{\max},$$

– le Watcher déclenche une **alerte en temps réel**. Cette alerte peut conduire à diverses actions immédiates :

- **Blocage** temporaire de la mise à jour pour le lien concerné,
- **Demande de validation manuelle** ou automatisée via des protocoles d'authentification renforcée,
- **Transmission** d'un signal de sécurité à un module central de surveillance ou à d'autres nœuds du réseau pour une **réaction collective**.

En contexte distribué, plusieurs Watchers peuvent coopérer et partager leurs observations via un protocole de consensus, assurant ainsi une **vérification mutuelle** des mises à jour anormales avant qu'elles ne perturbent la dynamique globale.

C. Checks d'Anomalies et Méthodes Avancées

Au-delà des contrôles immédiats et locaux effectués par les Watchers, il est possible d'implémenter des algorithmes d'**anomaly detection** qui s'intéressent à la **distribution** globale des pondérations et à l'évolution des **clusters**. Ces méthodes avancées incluent :

Une approche consiste à surveiller des métriques statistiques sur l'ensemble des pondérations. Par exemple, en calculant la **variance** σ^2 et l'**entropie** H de la distribution des ω_{ij} :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i<j}\left(\omega_{i,j} - \bar{\omega}\right)^2, \quad H = -\sum_{i<j} p\left(\omega_{i,j}\right)\ln p\left(\omega_{i,j}\right),$$

où $\bar{\omega}$ est la moyenne des $\omega_{i,j}$ et $p\left(\omega_{i,j}\right)$ la distribution empirique des poids. Une variation brutale de σ^2 ou une chute/incrément inattendu de H par rapport aux valeurs historiques peut être le signe d'une **injection malveillante**.

En complément de l'analyse statistique, l'observation de la **topologie** des clusters peut révéler des configurations anormales. Par exemple, l'apparition soudaine d'un cluster isolé dont la cohésion interne serait extrêmement élevée, ou au contraire, la disparition d'un cluster connu, peut être détectée par des techniques de **clustering supervisé ou non supervisé**. On peut alors définir un indice de **cohérence cluster** C tel que :

$$C = \frac{1}{|G|}\sum_{(i,j)\in G}\omega_{i,j},$$

où G désigne l'ensemble des paires au sein d'un cluster donné. Une valeur de C anormalement haute ou basse par rapport aux attentes théoriques indique un dysfonctionnement, pouvant être imputé à une attaque.

Lorsque des anomalies sont détectées, il est impératif de disposer de **mécanismes de réaction** qui permettent de limiter l'impact d'une attaque. Parmi ceux-ci, on peut citer :

- Le **rollback**, consistant à rétablir les valeurs antérieures de $\omega_{i,j}$ issues des logs jugées fiables,
- La mise en quarantaine des nœuds ou des liens suspectés d'avoir été altérés,
- La déclinaison de procédures de **vérification renforcée** (p.ex. via des signatures numériques ou des protocoles de consensus) pour valider les mises à jour futures.

Ces politiques de réaction reposent sur une modélisation mathématique du problème sous la forme d'un opérateur de perturbation, où l'on cherche à minimiser l'écart entre la trajectoire observée et la trajectoire attendue définie par $F\big(\omega(t)\big)$.

5.8.2. Robustesse Face aux Pannes

Même lorsque le **SCN** (Synergistic Connection Network) est doté de mécanismes de sécurité (5.8.1) et d'une architecture soigneusement construite (5.7), il subsiste toujours la possibilité de **pannes**. Un sous-SCN peut cesser de fonctionner, un serveur peut tomber en panne ou un module logiciel critique peut se bloquer. La robustesse d'un système à ces défaillances est alors un point essentiel. Il s'agit d'assurer que le **réseau** global ne s'écroule pas et qu'il puisse, si nécessaire, se **reconfigurer** pour continuer de fonctionner.

Dans cette section (5.8.2), nous examinons d'abord (5.8.2.1) les scénarios de panne d'un module SCN et la possibilité de reconfiguration. Ensuite, (5.8.2.2) discute les approches de basculement automatique et de redondance.

5.8.2.1. Quid si un module SCN tombe ? Le réseau peut-il se reconfigurer ?

Dans un **Synergistic Connection Network** (SCN) distribué, la robustesse et la résilience du système dépendent de sa capacité à absorber les perturbations, notamment lorsque l'un des modules ou sous-réseaux, noté SCN_p, tombe en panne. Un tel module gère un sous-ensemble d'entités, $\mathcal{V}_p$, ainsi que les liaisons internes associées, c'est-à-dire l'ensemble $\{\omega_{i,j} \mid i,j \in \mathcal{V}_p\}$.

La question se pose alors de savoir si le réseau global peut se reconfigurer pour continuer à fonctionner malgré la perte partielle ou totale d'un module, et quelles stratégies – tant du point de vue opérationnel que mathématique – permettent d'assurer une telle résilience.

A. Scénarios de Panne dans un SCN Distribué

Dans un système décomposé en plusieurs modules $\mathrm{SCN}_1, \ldots, \mathrm{SCN}_m$, les pannes peuvent se manifester de diverses manières, affectant différemment la dynamique globale. Nous distinguons principalement trois scénarios.

Tout d'abord, dans le **cas mineur**, la panne d'un module SCN_p est de courte durée. Par exemple, un crash temporaire dû à une défaillance matérielle ou à un incident réseau provoque l'arrêt de la mise à jour des liaisons concernant les entités $\mathcal{V}_p$ pendant une période limitée. Pendant ce temps, le reste du SCN poursuit son évolution selon la dynamique standard

$$\omega(t+1) = F\big(\omega(t)\big) \quad \text{où} \quad F\big(\omega(t)\big) = \omega(t) + \eta\,[S - \tau\,\omega(t)].$$

Les liens impliquant $\mathcal{V}_p$ peuvent être alors mis en veille ou temporairement ignorés. Une fois le module rétabli, une phase de **re-synchronisation** est nécessaire pour réintégrer les entités affectées dans le calcul global, en récupérant les valeurs sauvegardées (logs, snapshots) afin de minimiser la rupture de la dynamique.

Ensuite, dans le **cas majeur**, la panne est définitive. Deux issues complémentaires peuvent être envisagées. Les données associées à $\mathcal{V}_p$ peuvent être irrémédiablement perdues, ou il devient nécessaire de migrer ces entités vers un autre module SCN_q.

Dans ce dernier cas, la réaffectation entraîne une **réorganisation de la partition** initiale $\{\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m\}$ de l'ensemble des entités. Concrètement, les lignes et colonnes de la matrice ω correspondant aux indices de $\mathcal{V}_p$ sont soit supprimées, soit transférées dans un nouvel espace de calcul, ce qui entraîne une modification structurelle de la dynamique.

Enfin, un **cas hybride** peut survenir lorsqu'une panne initialement mineure se prolonge, rendant la réintégration problématique. Dans ce scénario, la solution de reconfiguration doit prendre en compte la durée d'inactivité et les conséquences sur la **topologie** du réseau, en adoptant par exemple une approche hybride qui combine le gel temporaire des liaisons avec une éventuelle réallocation progressive des entités affectées.

B. Reconfiguration ou Dégradation du SCN

La résilience du réseau repose sur sa capacité à se reconfigurer en réponse à la perte d'un module. Deux approches principales peuvent être envisagées :

Dans le cas d'une panne définitive ou prolongée, la stratégie la plus souhaitable est la **migration** des entités $\mathcal{V}_p$ vers un autre module SCN_q. Cette procédure de réaffectation s'effectue en plusieurs étapes :

- **Sauvegarde et restauration** : Si des mécanismes de backup ou des logs détaillés existent, ils permettent de reconstruire l'historique des mises à jour des liaisons $\omega_{i,j}$ pour $i, j \in \mathcal{V}_p$. On dispose alors d'une base de données pour réintégrer ces valeurs dans le nouveau module.

- **Réaffectation de la partition** : La partition initiale $\{\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m\}$ est redéfinie en intégrant les entités de $\mathcal{V}_p$ dans un autre sous-ensemble, par exemple en formant un nouvel ensemble $\mathcal{V}_q{}' = \mathcal{V}_q \cup \mathcal{V}_p$. La mise à jour de la dynamique se fait alors sur une matrice ω' de dimension réduite ou réallouée, avec

$$\omega' : \mathcal{V}_{\text{nouvelle}} \times \mathcal{V}_{\text{nouvelle}} \to \mathbb{R}^+.$$

- **Re-synchronisation inter-blocs** : Une fois les entités migrées, il est crucial que les liaisons inter-blocs soient actualisées afin de restaurer la cohérence globale. Ceci peut être réalisé par un protocole de synchronisation qui met à jour les valeurs de $S(i,j)$ pour les nouveaux liens entre $\mathcal{V}_q{}'$ et les autres sous-ensembles.

Si la panne est de courte durée, il est souvent préférable d'adopter une **stratégie de dégradation** temporaire. Dans ce cas, les entités appartenant à $\mathcal{V}_p$ sont mises hors circuit, et le SCN global continue à fonctionner en excluant les mises à jour associées à ce bloc. Mathématiquement, cela revient à définir une fonction indicatrice I_p telle que :

$$I_p(i) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \in \mathcal{V}_p, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La dynamique de mise à jour est alors adaptée de la forme

$$\omega_{i,j}(t+1) = I_p(i) I_p(j) \left[\omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right]\right],$$

ce qui garantit que les liens impliquant des entités hors ligne ne perturbent pas la convergence du réseau. Lorsque le module défaillant revient en ligne, un protocole de **reconnexion** permet de réintégrer progressivement les entités concernées dans la dynamique globale.

C. Analyse Mathématique de la Panne

D'un point de vue formel, la panne d'un module SCN se traduit par la suppression des lignes et colonnes correspondant aux entités $\mathcal{V}_p$ dans la matrice des pondérations ω. Soit $\omega(t)$ une matrice $N \times N$ décrivant la dynamique initiale, et soit $P \subset \{1, \dots, N\}$ l'ensemble des indices associés à $\mathcal{V}_p$. La panne entraîne la considération d'une nouvelle matrice réduite

$$\omega_{\text{réduit}}(t) = (\omega_{i,j}(t))_{i,j \notin P}.$$

La dynamique de mise à jour s'exprime alors par

$$\omega_{\text{réduit}}(t+1) = \omega_{\text{réduit}}(t) + \eta\, [S_{\text{réduit}} - \tau\, \omega_{\text{réduit}}(t)],$$

où $S_{\text{réduit}}$ désigne la restriction de la fonction de synergie aux entités encore actives. Plusieurs questions se posent à ce stade :

- **Robustesse de la convergence** : Les théorèmes de convergence établissant que $\omega(t)$ tend vers un équilibre de la forme $\omega^* \approx S/\tau$ reposent sur la structure complète du réseau. La suppression d'un sous-ensemble de nœuds représente une perturbation du système dynamique qui doit être analysée à l'aide des théories de la robustesse des systèmes dynamiques et de la résilience des graphes.

- **Impact sur la connectivité** : La disparition d'un bloc peut modifier la **connectivité** globale du SCN, affectant ainsi la capacité du réseau à former des clusters cohérents. Des résultats de théorie des graphes indiquent que la suppression d'un sous-ensemble de nœuds (ou de liens) peut, dans le pire des cas, décomposer le graphe en plusieurs composantes, mais si le réseau initial possède une **redondance** suffisante, la connectivité résiduelle permettra au système de continuer à converger de manière partielle.

- **Temps de re-synchronisation** : La migration des entités vers un autre module ou le retour d'un module en panne induit un délai pendant lequel la matrice ω évolue sous une topologie modifiée. Il est alors nécessaire d'étudier le temps de convergence de la dynamique modifiée, qui peut être exprimé en fonction des paramètres η et τ, ainsi que de la proportion d'entités affectées.

Ces considérations mathématiques traduisent le fait que, bien que la disparition d'un module perturbe la dynamique initiale, si la structure du réseau est suffisamment redondante et si des mécanismes de reconfiguration sont en place, le système peut retrouver un nouvel état d'équilibre qui, bien que différent de celui initial, reste fonctionnel.

5.8.2.2. Basculement Automatique ou Redondance des Données ω

Dans un **Synergistic Connection Network** (SCN) distribué, la dynamique des pondérations $\omega(t)$ – régie par la mise à jour itérative

$$\omega(t+1) = F\big(\omega(t)\big) = \omega(t) + \eta\,[S - \tau\,\omega(t)]$$

– doit continuer à évoluer de manière cohérente même en cas de défaillance d'un sous-réseau ou d'un microservice. Pour ce faire, il est essentiel d'implémenter des mécanismes de **basculement automatique** (failover) et de **redondance** (réplication) des données ω. Ces dispositifs, couramment utilisés en ingénierie des systèmes distribués, permettent d'assurer la continuité de l'auto-organisation et la résilience du SCN, en minimisant l'impact d'une panne prolongée ou définitive d'un module.

A. Basculement Automatique (Failover)

Le basculement automatique, ou failover, se définit comme le processus par lequel la responsabilité d'un module défaillant est transférée à un nœud opérationnel afin de garantir la disponibilité du service. Dans le contexte d'un SCN composé de plusieurs sous-réseaux $\mathrm{SCN}_1, \ldots, \mathrm{SCN}_m$, chaque sous-ensemble d'entités $\mathcal{V}_p$ est géré par son bloc dédié. Lorsque le module SCN_p devient injoignable en raison d'une panne (causée par exemple par un crash matériel, un problème de réseau ou une défaillance logicielle), un orchestrateur de surveillance, qui utilise des signaux de type « heartbeat », détecte l'absence de réponse et déclenche un mécanisme de failover.

Ce mécanisme repose sur la re-partition de l'ensemble des entités initialement réparties selon la collection $\{\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m\}$. Dès lors, les entités de $\mathcal{V}_p$ sont transférées vers un autre bloc opérationnel, par exemple SCN_q. Mathématiquement, cela revient à redéfinir la partition du système en posant, pour un basculement réussi,

$$\mathcal{V}'_q = \mathcal{V}_q \cup \mathcal{V}_p,$$

et à mettre à jour la dynamique locale en appliquant la fonction F sur la nouvelle matrice de pondérations $\omega'(t)$ qui est reconstruite à partir de la réunion des données des blocs concernés. En pratique, cette opération nécessite que les informations relatives aux pondérations $\omega_{i,j}$ pour $i,j \in \mathcal{V}_p$ soient immédiatement accessibles via un système de stockage redondant. La transparence de ce mécanisme repose sur la rapidité avec laquelle l'orchestrateur détecte la panne et redirige les flux de données, de manière à ce que la continuité de la dynamique globale ne soit que temporairement perturbée.

B. Redondance (Réplication) des Données ω

La redondance des données constitue le second pilier de la résilience d'un SCN. Sans réplication, la panne d'un module entraînerait la perte définitive des pondérations associées aux entités de ce module, rendant impossible toute opération de failover. La réplication consiste à stocker simultanément plusieurs copies des données critiques, en l'occurrence les valeurs de ω, sur des nœuds ou dans des clusters de stockage distribués.

Plusieurs stratégies de réplication peuvent être mises en œuvre.

D'abord, la stratégie **N-Way** consiste à répliquer chaque portion de la matrice ω sur N nœuds distincts. Formellement, pour chaque lien $\omega_{i,j}$ lié aux entités d'un sous-ensemble $\mathcal{V}_p$, on

maintient N copies, notées $\omega_{i,j}^{(1)}, \omega_{i,j}^{(2)}, \ldots, \omega_{i,j}^{(N)}$, telles que la mise à jour de l'une ou plusieurs d'entre elles garantit la disponibilité de l'information en cas de défaillance d'un nœud.

Une autre approche courante est le modèle **Master–Slave**, dans lequel un nœud maître détient la version actuelle et définitive de $\omega_{i,j}$ pour un sous-ensemble donné, et plusieurs nœuds esclaves reçoivent les mises à jour en quasi temps réel. En cas de défaillance du maître, l'un des esclaves peut prendre le relais, en assurant la continuité du service. On peut représenter ce mécanisme par l'équation de synchronisation suivante. Si $\omega_{i,j}^{(M)}(t)$ désigne la version maître et $\omega_{i,j}^{(S)}(t)$ la version esclave, alors

$$\omega_{i,j}^{(S)}(t) = \omega_{i,j}^{(M)}(t) + \delta_{i,j}(t),$$

où $\delta_{i,j}(t)$ est un terme de décalage que l'on s'efforce de maintenir très faible grâce à des protocoles de consensus (par exemple, via le protocole Paxos ou Raft).

Enfin, des méthodes telles que **Erasure Coding** permettent d'optimiser l'espace de stockage tout en garantissant la possibilité de reconstruire la matrice ω en cas de perte de certaines portions de données. Dans ce cadre, ω est codée en plusieurs fragments, dont un nombre suffisant permet de reconstituer l'information d'origine, suivant un schéma de correction d'erreurs.

C. Conséquences sur la Continuité de la Dynamique

L'intégration de mécanismes de basculement automatique et de redondance a pour objectif fondamental de permettre au SCN de poursuivre sa dynamique d'auto-organisation malgré la perte ou l'inaccessibilité temporaire d'un module. Lorsqu'un basculement est déclenché, la reconfiguration du réseau se traduit par une mise à jour de la partition des entités et par la restauration des pondérations via les copies redondantes, de sorte que la dynamique

$$\omega(t+1) = F\big(\omega(t)\big)$$

peut reprendre son évolution sans perte significative de la structure initialement acquise.

Le basculement automatique permet, dès qu'un module défaillant est détecté, de transférer les entités concernées vers un nouveau nœud afin de poursuivre la mise à jour du **SCN** sans interruption. La redondance des données ω garantit que l'historique des liaisons et la **mémoire** du réseau restent intacts.

Même si une légère asynchronie peut apparaître à cause des délais de synchronisation des copies, des protocoles d'agrégation et de réconciliation limitent ces écarts. L'utilisation de **vecteurs d'horodatage** ou de **mécanismes de fusion d'updates** permet de maintenir la cohérence globale et d'éviter toute divergence dans la dynamique du réseau.

L'architecture résiliente ainsi obtenue permet au SCN de s'adapter à des environnements imprévisibles en maintenant une **convergence partielle** ou, idéalement, une **reconvergence** vers un nouvel équilibre qui préserve les propriétés essentielles de l'auto-organisation, notamment la formation de clusters et la stabilité de la dynamique.

5.8.3. Contrôle d'Intégrité

Même avec des mécanismes de sécurité en place (5.8.1) et une robustesse face aux pannes (5.8.2), il reste essentiel de **vérifier l'intégrité** de la dynamique ω en continu. Cette vérification permet de détecter aussi bien des anomalies locales, comme des liens invraisemblables, que des incohérences globales pouvant entraîner une perte de cohérence statistique du réseau.

Dans un **SCN** à grande échelle ou évolutif, un **contrôle d'intégrité** assure que la formation des clusters et la stabilisation des pondérations ne sont pas dévoyées par des artefacts tels que des erreurs, des manipulations ou des accidents. La section 5.8.3 aborde d'abord la détection des liens aberrants (5.8.3.1), avant de présenter des indicateurs de cohérence globale (5.8.3.2).

5.8.3.1. Détection de Liens Aberrants (Trop Forts Trop Vite)

Dans un **Synergistic Connection Network** (SCN), la stabilité de la dynamique repose sur une évolution progressive et contrôlée des pondérations $\omega_{i,j}$. La mise à jour classique

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right]$$

assure un ajustement cohérent des valeurs des liens, en fonction des paramètres du système comme le taux d'apprentissage η et le coefficient de décroissance τ.

Cependant, des situations anormales peuvent survenir où certaines pondérations $\omega_{i,j}$ augmentent de manière excessive en une seule itération. Ce phénomène, qualifié de **trop forts trop vite**, peut résulter d'erreurs de calcul, de bugs logiciels ou d'interférences malveillantes. La détection précoce de ces liens aberrants est essentielle pour garantir la cohérence du réseau et mettre en place des corrections adaptées avant qu'ils n'affectent la dynamique globale du SCN.

A. Motivation et Contexte

Le principe fondamental de l'auto-organisation dans un **Synergistic Connection Network** (SCN) repose sur une mise à jour itérative des pondérations. En conditions normales, cette mise à jour suit l'équation

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right],$$

où la synergie $S(i,j)$ oriente le renforcement ou l'affaiblissement du lien, tandis que le facteur η contrôle l'amplitude des modifications. Un système bien calibré se caractérise par des variations $\Delta\omega_{i,j} = \left|\omega_{i,j}(t+1) - \omega_{i,j}(t)\right|$ limitées, suivant une distribution stable ou un intervalle prévisible.

Toutefois, une croissance anormalement rapide d'un lien – par exemple, une augmentation par un facteur de 100 en une seule itération – constitue un signal **aberrant**. Cette anomalie peut résulter d'une erreur logicielle, d'un dysfonctionnement numérique (overflow, arrondis en environnement GPU/HPC) ou d'une manipulation malveillante. Identifier et corriger ces écarts permet d'assurer la stabilité et la fiabilité du SCN.

B. Définition et Caractéristiques d'un Lien Aberrant

Dans un SCN mature, la majorité des pondérations $\omega_{i,j}$ se situent dans un intervalle relativement restreint, par exemple entre 0 et 1, voire un peu au-dessus en fonction de la

normalisation appliquée. Pour quantifier ce qui constitue une valeur « hors norme », on peut définir des indicateurs statistiques tels que la moyenne μ et l'écart-type σ de la distribution des ω. Un lien est considéré comme aberrant s'il se trouve en dehors de l'intervalle

$$\mu \pm k\,\sigma,$$

où k est un paramètre choisi en fonction du degré de tolérance souhaité (par exemple, $k = 3$ pour une détection de valeurs extrêmes dans une distribution gaussienne). De même, la définition d'un seuil statique ω_{limit} – par exemple, une valeur de 2.0 ou 10.0 – permet d'identifier rapidement des liens dont la valeur excède largement la plage normale.

Au-delà de la valeur absolue d'un lien, l'analyse de la vitesse d'évolution, c'est-à-dire du saut

$$\Delta\omega_{i,j} = \left|\omega_{i,j}(t+1) - \omega_{i,j}(t)\right|,$$

est tout aussi cruciale. Dans un contexte de mise à jour graduelle, le paramètre η limite généralement l'amplitude des incréments. Ainsi, si dans des conditions standards on observe des variations d'ordre $O(10^{-2})$ ou $O(10^{-1})$, une variation de $O(1)$ ou supérieure en une seule itération suggère une anomalie. On peut introduire un test simple sous la forme

$$\left|\omega_{i,j}(t+1) - \omega_{i,j}(t)\right| > \delta,$$

où δ est un seuil défini en fonction de la dynamique attendue. Le franchissement de ce seuil constitue un signal d'alerte indiquant qu'un lien évolue de manière trop rapide.

C. Mécanismes de Détection

La détection des liens aberrants dans un SCN peut s'appuyer sur plusieurs mécanismes complémentaires qui, ensemble, forment une couche de sécurité supplémentaire dans la boucle de mise à jour des pondérations.

La méthode la plus directe consiste à imposer un seuil statique, noté ω_{limit}, au-delà duquel un lien est automatiquement marqué comme suspect. Parallèlement, on peut effectuer un contrôle sur la variation entre deux itérations. Concrètement, si l'on observe

$$\omega_{i,j}(t+1) > \omega_{\text{limit}} \quad \text{ou} \quad \left|\omega_{i,j}(t+1) - \omega_{i,j}(t)\right| > \delta,$$

alors le lien concerné est considéré comme aberrant. Ces seuils peuvent être définis de manière statique pour un SCN donné ou ajustés dynamiquement en fonction de la phase de convergence du réseau.

Une approche plus globale consiste à analyser la distribution des valeurs de ω sur l'ensemble du réseau. En estimant la moyenne μ et l'écart-type σ des pondérations, il est possible d'identifier les valeurs qui se trouvent en dehors d'un intervalle de confiance, par exemple $\mu \pm 3\sigma$. Cette approche permet de repérer non seulement des liens isolés, mais aussi des motifs d'anomalies lorsque plusieurs liens s'écartent simultanément des valeurs attendues. De plus, l'analyse des quantiles (par exemple, considérer que 99 % des liens se trouvent en dessous d'une valeur donnée) peut servir d'indicateur pour fixer dynamiquement un seuil.

Les techniques de **machine learning** appliquées à la détection d'anomalies offrent une méthode avancée pour identifier les comportements aberrants dans le réseau. Ces algorithmes, entraînés sur des données historiques ou simulées du SCN, permettent de reconnaître des patterns anormaux, tels que des sauts brusques de plusieurs liens simultanément ou l'apparition soudaine d'un cluster entier présentant des valeurs extrêmes. L'intégration de ces méthodes peut se faire

en parallèle de la mise à jour des pondérations et fournir des alertes en temps réel sur la base d'un score d'anomalie calculé pour chaque lien.

D. Réactions et Mesures Correctives

La détection d'un lien aberrant n'est que la première étape ; il est essentiel de mettre en place des mécanismes de réaction pour limiter l'impact de tels événements.

Lorsqu'un lien est détecté comme aberrant, un système de surveillance (souvent appelé « Watcher ») peut générer une alerte immédiate, notifiant un administrateur ou un module de contrôle central. Cette alerte peut inclure des informations détaillées telles que l'identifiant du lien, la valeur observée, le saut $\Delta\omega_{i,j}$, et l'instant de l'événement, facilitant ainsi une analyse ultérieure.

Dans des environnements critiques, la détection d'un comportement anormal peut déclencher la suspension temporaire du lien concerné. Le système peut alors appliquer un mécanisme de rollback, annulant la mise à jour problématique et rétablissant la valeur précédente de $\omega_{i,j}$ jusqu'à ce qu'un recalcul soit effectué en toute sécurité. Par exemple, on peut définir la mise à jour corrective suivante :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \min\{\omega_{i,j}(t+1),\, \omega_{\text{limit}}\},$$

ce qui impose un clamp (ou clip) sur la valeur du lien afin d'empêcher toute croissance incontrôlée.

Enfin, en complément des réactions immédiates, le SCN peut être équipé d'un module de réévaluation qui, après détection d'un lien aberrant, effectue une nouvelle estimation de la synergie $S(i,j)$ ou applique une mise à jour plus prudente pour ce lien. Cette stratégie peut inclure la mise en œuvre d'un facteur de pondération adaptatif temporaire ou d'un filtre qui atténue la réponse de mise à jour dans la zone de détection de l'anomalie.

5.8.3.2. Calcul d'Indicateurs de Cohérence Globale (ex. Distribution Statistique des ω)

Dans le contexte d'un **Synergistic Connection Network** (SCN), la dynamique d'auto-organisation repose sur l'évolution contrôlée des pondérations $\omega_{i,j}$ qui relient les entités. Alors que la détection locale de liens aberrants (voir Section 5.8.3.1) permet d'identifier des sauts brusques dans la mise à jour de $\omega_{i,j}$, il est tout aussi crucial d'assurer qu'à l'échelle globale la matrice ω conserve une structure cohérente et ne dérive pas vers un état artificiellement faussé.

La surveillance globale repose sur le calcul et le suivi d'indicateurs statistiques qui quantifient la « bonne santé » de la distribution des pondérations, garantissant ainsi la pertinence des clusters formés par le SCN. Cette démarche permet d'anticiper d'éventuelles dérives, de valider la stabilité du réseau et d'ajuster les paramètres si nécessaire.

A. Motivation et Contexte de la Surveillance Globale

L'évolution normale d'un SCN repose sur une mise à jour graduelle de $\omega_{i,j}$ selon la règle

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right],$$

où les paramètres η et τ régulent respectivement le taux d'apprentissage et la décroissance. Dans un système bien calibré, la majorité des liens évolue dans une plage prédéfinie et stable,

souvent centrée autour d'une valeur moyenne avec une dispersion modérée. Toutefois, plusieurs risques peuvent compromettre cette cohérence globale :

- **Dérive systémique** : Même en l'absence d'erreurs locales, un mauvais paramétrage (valeurs inappropriées de η ou τ) peut entraîner une dérive collective des valeurs de ω. Par exemple, une croissance exponentielle de la somme totale des pondérations,

$$\Sigma(t) = \sum_{i,j} \omega_{i,j}\,(t),$$

  ou un effondrement généralisé vers zéro, pourraient indiquer un problème de convergence global.

- **Manipulations malveillantes** : Comme évoqué dans la Section 5.8.1, un attaquant peut altérer certaines valeurs, créant des biais qui, même s'ils ne se manifestent pas immédiatement sur un lien isolé, perturbent l'ensemble de la distribution.

- **Effets numériques** : Des erreurs d'arrondi, des overflow ou des problèmes de précision dans des environnements de calcul intensif (GPU, HPC) peuvent provoquer des modifications subtiles mais cumulatives dans la répartition des ω.

Ainsi, il est essentiel de disposer d'indicateurs globaux qui, en agrégeant les données sur l'ensemble du SCN, permettent de détecter des dérives ou des anomalies pouvant compromettre la formation et la stabilité des clusters.

B. Exemples d'Indicateurs de Cohérence Globale

Pour évaluer la « santé » globale de la matrice ω, plusieurs indicateurs peuvent être calculés et suivis dans le temps.

Une première approche consiste à analyser la distribution statistique des valeurs de ω en calculant des moments de la distribution. La **moyenne** $\bar{\omega}$ et la **variance** $\mathrm{Var}(\omega)$ sont définies par :

$$\bar{\omega} = \frac{1}{N}\sum_{i,j} \omega_{i,j}\,, \qquad \mathrm{Var}(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{i,j} \left(\omega_{i,j} - \bar{\omega}\right)^2,$$

où N est le nombre total de liaisons. En outre, l'analyse des **quantiles** permet de connaître la répartition des valeurs : par exemple, on peut déterminer le 95e percentile et vérifier que 95 % des liens se situent en dessous d'une certaine valeur. Des écarts brusques dans ces indicateurs, par exemple une augmentation soudaine de la moyenne ou un élargissement de la variance, peuvent signaler un déséquilibre dans la dynamique globale.

L'**entropie** $H(\omega)$ offre une mesure de la diversité des pondérations et se définit par :

$$H(\omega) = -\sum_{b} p\,(b)\,\log p(b),$$

où $p(b)$ est la probabilité qu'un lien $\omega_{i,j}$ se situe dans le bin b d'un histogramme construit sur les valeurs de ω. Une entropie élevée indique une distribution diversifiée, tandis qu'une entropie faible pourrait suggérer une homogénéisation anormale (par exemple, si presque tous les ω convergent vers une valeur unique). Un changement soudain de l'entropie au fil du temps peut donc être un indicateur puissant d'une dérive globale.

Le suivi de la **somme globale** des pondérations,

$$\Sigma(t) = \sum_{i,j} \omega_{i,j}\,(t),$$

permet de détecter des tendances globales d'emballement ou d'inhibition. Une croissance exponentielle de $\Sigma(t)$ ou, inversement, une diminution drastique vers zéro, signale une perturbation de la dynamique du réseau. Par ailleurs, le ratio entre la valeur maximale et la valeur minimale,

$$R(t) = \frac{\max_{i,j}\omega_{i,j}(t)}{\min_{i,j}\omega_{i,j}(t)},$$

peut servir d'indicateur de dispersion extrême. Si $R(t)$ augmente de manière anormale, cela suggère que certaines liaisons se renforcent de manière disproportionnée par rapport aux autres, ce qui peut être symptomatique d'une dérive globale.

Les propriétés topologiques du SCN, telles que la **modularité** et la **connectivité** des clusters, sont également des indicateurs pertinents. La modularité Q d'une partition du graphe, qui quantifie la densité des liens à l'intérieur des clusters par rapport aux liens entre les clusters, peut être calculée pour évaluer la qualité des communautés formées. Une fluctuation soudaine de Q pourrait indiquer que la structure interne du SCN se modifie de manière inattendue, potentiellement en raison d'un emballement des ω.

C. Méthodes de Surveillance et Seuils d'Alarme

Afin de garantir que le SCN reste dans un état de cohérence global acceptable, il est nécessaire de mettre en place des systèmes de surveillance qui calculent périodiquement ces indicateurs. Deux approches complémentaires peuvent être déployées :

- **Surveillance en continu** : À chaque itération (ou à intervalles réguliers), on collecte un échantillon représentatif de la matrice ω et on calcule les indicateurs (moyenne, variance, entropie, somme globale). Ces valeurs sont comparées à des plages acceptables, définies à partir d'un historique ou d'un modèle théorique. Un dépassement des seuils prédéfinis déclenche une alerte.

- **Analyses « offline »** : Des snapshots de la matrice ω sont stockés périodiquement pour permettre une analyse plus approfondie des tendances sur le long terme. Ces analyses rétrospectives offrent la possibilité de détecter des dérives lentes mais significatives et de reconfigurer le système en cas de besoin.

D. Considérations Mathématiques et Pratiques

D'un point de vue mathématique, l'étude de la distribution des pondérations peut être assimilée à une analyse de la stabilité d'un système dynamique. Le SCN, qui évolue selon

$$\omega(t+1) = F\big(\omega(t)\big),$$

doit converger vers un état stable ou présenter une distribution stationnaire. L'introduction de contrôles statistiques (moyenne, variance, entropie) constitue une forme de rétroaction qui permet de comparer l'état actuel à l'état attendu, en appliquant des tests d'hypothèse pour détecter des écarts significatifs. Par exemple, si l'on définit une fenêtre de confiance $\mu \pm k\,\sigma$

(avec k fixé par la théorie ou l'expérience), toute valeur dépassant cette fenêtre peut être considérée comme une anomalie.

Sur le plan pratique, ces calculs doivent être implémentés de manière efficace, notamment dans des environnements distribués où le nombre de liaisons peut être très élevé. L'utilisation de techniques d'échantillonnage et l'agrégation des statistiques sur des bases de données NoSQL ou des systèmes de traitement de graphes permettent de réduire le coût computationnel tout en assurant une surveillance robuste.

5.9. Exemples d'Implémentations et Études de Cas

Dans cette dernière partie du chapitre 5, nous proposons d'illustrer comment un **SCN** (Synergistic Connection Network) peut être **implémenté** ou employé dans des situations variées, montrant ainsi la **mise en œuvre** pratique des concepts théoriques et d'architecture présentés jusque-là.

Les études de cas (5.9.1, 5.9.2, 5.9.3) visent à donner des **exemples** concrets — chacun abordant un type différent de données ou d'environnement — et à détailler la **structure logicielle** (modules, boucles de mise à jour, etc.) nécessaire pour un fonctionnement effectif.

Même si l'on s'est concentré en amont sur la dimension mathématique et la distribution (chap. 5.7), ces exemples montrent comment passer du cadre théorique à l'expérimentation ou à l'application dans des domaines multimodaux, hybrides (symbolique/sub-symbolique) ou robotiques.

5.9.1. SCN Multimodal

Lorsqu'un SCN doit manipuler plusieurs **types** de données (images, sons, textes, etc.) au sein d'un même réseau, il doit non seulement organiser la distribution ou la gestion de la matrice ω, mais aussi prévoir des **modules** de synergie adaptés à chaque modalité. La sous-section (5.9.1.1) décrit un **schéma modulaire** commun, puis (5.9.1.2) s'attache à la **boucle de mise à jour** concrète.

Dans cette section, nous développons en détail le schéma modulaire appliqué à un **Synergistic Connection Network** (SCN) multimodal, en mettant en évidence les différents modules qui interviennent dans le calcul de la synergie entre entités hétérogènes, ainsi que leur intégration dans le cœur du SCN.

Nous présenterons d'abord le cadre théorique et mathématique de cette approche, puis nous proposerons une implémentation en Python de l'ensemble des modules évoqués, à savoir : *ModuleSynergySub*, *ModuleSynergySym* et *SCNCore*. Cette démarche permet d'illustrer comment, en séparant la logique de calcul de similarité selon les modalités (sub-symbolique vs. symbolique), on obtient une architecture évolutive, lisible et extensible.

I. Schéma Modulaire : Cadre Théorique et Mathématique

A. Contexte Multimodal et Besoin de Modulation

Dans de nombreux systèmes d'auto-organisation, notamment dans le cadre du **Deep Synergy Learning (DSL)**, les entités $\{\mathcal{E}_i\}$ ne sont pas homogènes. Certaines représentent des caractéristiques d'images (extraits d'un CNN), d'autres des descripteurs audio (par exemple, MFCC, spectrogrammes), et d'autres encore des tokens ou des concepts issus du traitement du langage naturel. Chaque entité est ainsi associée à un espace particulier $\mathcal{X}_i$, ce qui impose de définir la fonction de synergie $S(i,j)$ de manière adaptée à la modalité considérée.

Pour gérer cette hétérogénéité, il est naturel de séparer le calcul de la synergie en plusieurs modules spécialisés :

- **ModuleSynergySub** s'occupe des représentations sub-symboliques (images, audio, signaux sensoriels) et implémente des méthodes de calcul de similarité adaptées à des vecteurs continus (par exemple, similarité cosinus pour les images, distance inversée pour l'audio).

- **ModuleSynergySym** prend en charge le calcul de la synergie pour des entités symboliques, par exemple en exploitant des méthodes issues de l'analyse sémantique ou de la co-occurrence dans des espaces discrets.

- Le **SCNCore** constitue le noyau du système. Il maintient la matrice de pondérations ω qui encode les liaisons entre entités et applique la règle de mise à jour typique, par exemple dans sa forme additive :

  $$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right].$$

  Pour calculer $S(i,j)$, le *SCNCore* délègue l'opération au module spécialisé approprié, selon la nature des entités i et j.

Cette factorisation, qui revient mathématiquement à écrire

$$S(i,j) = f_{m(i,j)}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j),$$

où $m(i,j)$ désigne la modalité (ou la combinaison de modalités) concernée, permet non seulement d'alléger la complexité logicielle (en évitant un "god object" regroupant toutes les conditions) mais aussi d'assurer une extensibilité du système, chaque module pouvant être mis à jour ou remplacé indépendamment.

B. Bénéfices du Schéma Modulaire

- **Séparation des responsabilités** : chaque module est responsable d'un type spécifique de calcul de similarité. Cela permet de garantir la clarté du code, de faciliter le débogage et la maintenance, ainsi que l'ajout de nouvelles modalités.

- **Extensibilité** : l'architecture modulaire autorise l'intégration de nouvelles sources de données sans modifier le cœur de la dynamique $\omega(t)$. Par exemple, l'ajout d'une nouvelle modalité (données Lidar, signaux physiologiques, etc.) ne nécessite que l'implémentation d'un nouveau module de calcul de synergie.

- **Réutilisabilité et Déploiement Distribué** : chaque module peut être déployé sous forme de microservice indépendant, permettant une architecture distribuée où chaque sous-SCN conserve une structure modulaire similaire.

II. Implémentation en Python

Nous proposons ci-dessous une implémentation en Python de l'architecture modulaire décrite. Le code comporte trois classes principales :

- **ModuleSynergy** (classe de base abstraite)

- **ModuleSynergySub** et **ModuleSynergySym**, qui dérivent de la classe de base et implémentent chacune une méthode de calcul de similarité adaptée aux représentations sub-symboliques et symboliques, respectivement.

- **SCNCore** qui gère la matrice de pondérations ω et orchestre les mises à jour en appelant le module de synergie approprié selon la modalité des entités.

Pour illustrer cette implémentation, nous définirons également une classe **Entity** permettant de représenter les entités multimodales.

Voici le code complet :

```
import numpy as np
from abc import ABC, abstractmethod
from typing import Any, Dict, List, Tuple

# Définition d'une classe Entity pour encapsuler les entités multimodales
class Entity:
    """
    Représente une entité dans le SCN.

    Attributes:
        id (str): Identifiant unique de l'entité.
        modality (str): Type de modalité ('sub' pour sub-symbolique, 'sym' pour symbolique).
        data (Any): Données associées à l'entité.
    """
    def __init__(self, id: str, modality: str, data: Any):
        self.id = id
        self.modality = modality
        self.data = data

# Classe de base abstraite pour les modules de calcul de synergie
class ModuleSynergy(ABC):
    """
    Classe abstraite définissant l'interface pour le calcul de la synergie entre deux entités.
    """
    @abstractmethod
    def compute_similarity(self, entity1: Entity, entity2: Entity) -> float:
        """
        Calcule et renvoie un score de similarité entre entity1 et entity2.
        """
        pass

# ModuleSynergySub : pour les représentations sub-symboliques (images, audio, etc.)
class ModuleSynergySub(ModuleSynergy):
    """
    Module pour le calcul de la synergie entre entités sub-symboliques.
    On suppose que les données sont des vecteurs numpy.
    """
    def compute_similarity(self, entity1: Entity, entity2: Entity) -> float:
        # Vérifier que les deux entités appartiennent à la modalité sub-symbolique
        if entity1.modality != 'sub' or entity2.modality != 'sub':
            raise ValueError("ModuleSynergySub ne peut traiter que des entités sub-symboliques.")

        # Par exemple, on peut utiliser la similarité cosinus
        vec1 = np.array(entity1.data)
        vec2 = np.array(entity2.data)
        # Calcul de la similarité cosinus
        norm1 = np.linalg.norm(vec1)
```

```
        norm2 = np.linalg.norm(vec2)
        if norm1 == 0 or norm2 == 0:
            return 0.0
        similarity = np.dot(vec1, vec2) / (norm1 * norm2)
        # On peut normaliser pour qu'elle soit dans [0, 1] (si besoin)
        return max(0.0, similarity)

# ModuleSynergySym : pour les entités symboliques (textes, concepts, etc.)
class ModuleSynergySym(ModuleSynergy):
    """
    Module pour le calcul de la synergie entre entités symboliques.
    Ici, on utilise une méthode simplifiée basée sur la correspondance exacte ou une mesure de similarit
é simple.
    """
    def compute_similarity(self, entity1: Entity, entity2: Entity) -> float:
        if entity1.modality != 'sym' or entity2.modality != 'sym':
            raise ValueError("ModuleSynergySym ne peut traiter que des entités symboliques.")

        # Par exemple, si les données sont des chaînes de caractères représentant des concepts,
        # on renvoie 1.0 si elles sont identiques, 0.0 sinon, ou on pourrait utiliser une mesure plus fine.
        if entity1.data == entity2.data:
            return 1.0
        else:
            return 0.0

# SCNCore : le cœur du SCN qui maintient la matrice des pondérations et orchestre la mise à jour.
class SCNCore:
    """
    SCNCore gère la dynamique du réseau en conservant la matrice des pondérations ω
    et en appliquant la règle de mise à jour sur la base des scores de synergie.
    """
    def __init__(self, entities: List[Entity], eta: float = 0.1, tau: float = 0.2):
        """
        Initialise le SCNCore avec la liste d'entités, le taux d'apprentissage (eta) et le coefficient de décro
issance (tau).
        La matrice ω est initialisée aléatoirement pour toutes les paires d'entités.
        """
        self.entities = entities
        self.N = len(entities)
        self.eta = eta
        self.tau = tau
        # Initialisation de la matrice ω avec de petites valeurs aléatoires
        self.omega = np.random.uniform(0.01, 0.05, size=(self.N, self.N))
        # Pour garantir la symétrie, on peut symétriser la matrice
        self.omega = (self.omega + self.omega.T) / 2.0

        # Instanciation des modules de synergie
        self.module_synergy_sub = ModuleSynergySub()
        self.module_synergy_sym = ModuleSynergySym()

    def compute_synergy(self, i: int, j: int) -> float:
        """
        Calcule le score de synergie entre les entités d'indices i et j
        en fonction de leur modalité.
        """
```

```
        entity1 = self.entities[i]
        entity2 = self.entities[j]
        # Si les deux entités ont la modalité sub-symbolique, utiliser ModuleSynergySub
        if entity1.modality == 'sub' and entity2.modality == 'sub':
            return self.module_synergy_sub.compute_similarity(entity1, entity2)
        # Si les deux entités ont la modalité symbolique, utiliser ModuleSynergySym
        elif entity1.modality == 'sym' and entity2.modality == 'sym':
            return self.module_synergy_sym.compute_similarity(entity1, entity2)
        # Pour des paires de modalités différentes, on définit une stratégie de fusion (ici, on prend la moy
enne)
        else:
            score_sub = 0.0
            score_sym = 0.0
            count = 0
            if entity1.modality == 'sub' or entity2.modality == 'sub':
                try:
                    score_sub = self.module_synergy_sub.compute_similarity(entity1, entity2)
                    count += 1
                except ValueError:
                    pass
            if entity1.modality == 'sym' or entity2.modality == 'sym':
                try:
                    score_sym = self.module_synergy_sym.compute_similarity(entity1, entity2)
                    count += 1
                except ValueError:
                    pass
            # Si aucun module n'est applicable, renvoyer 0
            if count == 0:
                return 0.0
            return (score_sub + score_sym) / count

    def update_weights(self):
        """
        Met à jour la matrice des pondérations ω selon la règle :
        ω(t+1) = ω(t) + η [ S(i,j) - τ ω(t) ]
        Pour chaque paire (i,j) avec i < j, la mise à jour est effectuée et
        la symétrie est rétablie.
        """
        new_omega = self.omega.copy()
        for i in range(self.N):
            for j in range(i+1, self.N):
                S_ij = self.compute_synergy(i, j)
                # Calcul de la mise à jour pour la paire (i,j)
                delta = self.eta * (S_ij - self.tau * self.omega[i, j])
                new_val = self.omega[i, j] + delta
                new_omega[i, j] = new_val
                new_omega[j, i] = new_val  # Symétrie
        self.omega = new_omega

    def run_iterations(self, iterations: int = 10):
        """
        Exécute un nombre d'itérations de mise à jour de la matrice ω et affiche les valeurs moyennes.
        """
        for t in range(iterations):
            self.update_weights()
```

```
            mean_val = np.mean(self.omega)
            print(f"Itération {t+1}: moyenne des ω = {mean_val:.4f}")

# Exemple d'utilisation du schéma modulaire dans un SCN multimodal
def main():
    # Création d'une liste d'entités avec différentes modalités
    entities = [
        # Entités sub-symboliques (images ou audio) : on simule avec des vecteurs numpy
        Entity("E1", "sub", [0.2, 0.4, 0.6]),
        Entity("E2", "sub", [0.1, 0.3, 0.5]),
        Entity("E3", "sub", [0.25, 0.35, 0.45]),
        # Entités symboliques (textuelles ou conceptuelles)
        Entity("E4", "sym", "chat"),
        Entity("E5", "sym", "chat"),
        Entity("E6", "sym", "chien"),
        # Entités mixtes : ici nous les traiterons par fusion (le calcul renverra la moyenne des scores disp
onibles)
        Entity("E7", "sub", [0.5, 0.2, 0.1]),
        Entity("E8", "sym", "oiseau")
    ]

    # Initialisation du cœur du SCN avec les entités
    scn_core = SCNCore(entities, eta=0.1, tau=0.2)

    # Affichage initial de la matrice des pondérations
    print("Matrice ω initiale:")
    print(np.round(scn_core.omega, 4))

    # Exécuter plusieurs itérations de mise à jour
    scn_core.run_iterations(iterations=10)

    # Affichage final de la matrice des pondérations
    print("Matrice ω finale:")
    print(np.round(scn_core.omega, 4))

if __name__ == "__main__":
    main()
```

Explications Complémentaires

1. ModuleSynergySub

Ce module est dédié au calcul de la synergie entre des entités dont les représentations sont sub-symboliques, c'est-à-dire des vecteurs continus (par exemple, les sorties d'un CNN pour des images ou des descripteurs audio). Dans l'implémentation proposée, nous utilisons la **similarité cosinus** :

$$\text{similarity}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\| \mathbf{x} \| \| \mathbf{y} \|}$$

ce qui permet d'obtenir un score de similarité compris entre 0 et 1. Ce module lève une exception si des entités d'un type incompatible lui sont passées.

2. ModuleSynergySym

Ce module gère les entités de nature symbolique. Pour simplifier, nous utilisons ici un test d'égalité entre les données associées aux entités. Dans un contexte réel, on pourrait envisager des mesures plus fines (par exemple, des distances sémantiques basées sur des graphes ontologiques ou des embeddings pré-entraînés).

3. SCNCore

Le cœur du SCN, *SCNCore*, orchestre la dynamique globale en maintenant la matrice des pondérations ω et en appliquant la règle de mise à jour. Pour chaque paire d'entités, il interroge le module de synergie approprié (en fonction de la modalité) pour obtenir $S(i,j)$ et met à jour $\omega_{i,j}$ selon le schéma DSL. La symétrie de la matrice est assurée lors de la mise à jour.

4. Cohabitation et Fusion

Dans le cas où deux entités présentent des modalités différentes (par exemple, une entité sub-symbolique et une entité symbolique), nous avons implémenté une stratégie simple qui tente de combiner les scores obtenus par chacun des modules. Si l'un des modules ne peut pas traiter la paire, le score de l'autre est utilisé seul. Ce mécanisme de fusion simple peut être étendu ou modifié selon les besoins spécifiques d'intégration multimodale.

5.9.1.2. Expliquer comment se fait la boucle de mise à jour

Dans un SCN multimodal, la boucle de mise à jour est structurée de manière à intégrer deux aspects complémentaires :

- D'une part, le calcul du score de **synergie** $S(i,j)$ entre chaque paire d'entités, qui dépend de la nature (modalité) des données de chaque entité ;
- D'autre part, la mise à jour de la matrice des pondérations ω selon une règle d'auto-organisation (par exemple, une règle additive) qui se base sur le score $S(i,j)$.

Nous allons décrire les étapes d'une itération complète de mise à jour du SCN.

A. Les Étapes de la Boucle de Mise à Jour

Pour chaque paire d'entités (i,j), le SCN doit déterminer la valeur de synergie qui mesure la « compatibilité » ou l'**affinité** entre les deux entités. Dans un SCN multimodal, cette opération se fait de la manière suivante :

- **Identification de la modalité** : Chaque entité $\mathcal{E}_i$ porte une étiquette (par exemple, « sub » pour sub-symbolique, « sym » pour symbolique). Le **SCNCore** détermine ainsi si la paire (i,j) doit être traitée par le module *ModuleSynergySub* (données continues, vecteurs issus d'images ou d'audio) ou par *ModuleSynergySym* (données symboliques ou conceptuelles).
- **Délégation du calcul** : Le SCNCore appelle le module de synergie approprié pour obtenir un score $S(i,j)$. Ce score est généralement normalisé (par exemple, dans l'intervalle $[0,1]$).

Une fois le score $S(i,j)$ connu, la mise à jour des pondérations se fait via une règle d'auto-organisation. Dans la forme additive classique, la mise à jour s'exprime par :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t) \right]$$

où :

- η est le **taux d'apprentissage**,
- τ est le **coefficient de décroissance** qui assure une régulation en empêchant $\omega_{i,j}$ de croître indéfiniment.

Ce calcul est effectué pour chaque paire (i, j) concernée. Dans une implémentation pratique, on ne met à jour que les liaisons actives (par exemple, celles qui sont au-dessus d'un certain seuil ou dans un voisinage défini) afin de limiter le coût computationnel lorsque le nombre d'entités est très grand.

Après la mise à jour des valeurs :

- **Logs et Traçabilité** : Chaque modification de $\omega_{i,j}$ est enregistrée dans un journal (log) pour permettre le suivi et la détection d'anomalies ultérieures.
- **Watchers** : Des modules de surveillance vérifient que l'incrément $\Delta\omega_{i,j}$ n'est pas trop important (par exemple, qu'il ne dépasse pas un seuil δ).
- **Synchronisation (pour les architectures distribuées)** : Dans un SCN réparti, la mise à jour locale est synchronisée avec d'autres blocs via des messages inter-blocs afin de garantir la cohérence globale du réseau.

Une fois que toutes les liaisons ont été mises à jour et que les contrôles ont été effectués, la nouvelle matrice $\omega(t+1)$ sert d'état de départ pour la prochaine itération. La boucle se répète ainsi, permettant au SCN de converger vers une organisation stable et de former des clusters représentatifs des synergies entre entités.

B. Implémentation en Python

Nous présentons ici un exemple d'implémentation qui intègre les modules suivants :

- **ModuleSynergySub** : pour le calcul de la synergie entre entités sub-symboliques (par exemple, en utilisant la similarité cosinus).
- **ModuleSynergySym** : pour le calcul de la synergie entre entités symboliques (ici, une simple comparaison d'égalité).
- **SCNCore** : le cœur du SCN qui maintient la matrice ω et orchestre la boucle de mise à jour.

Vous trouverez ci-dessous le code complet, avec des commentaires détaillés pour expliquer chaque étape.

```
import numpy as np
from abc import ABC, abstractmethod
from typing import Any, List

# Définition d'une classe Entity pour représenter une entité multimodale
class Entity:
```

```
    """
    Représente une entité dans le SCN.

    Attributs:
        id (str): Identifiant unique de l'entité.
        modality (str): 'sub' pour sub-symbolique, 'sym' pour symbolique.
        data (Any): Données associées (par exemple, un vecteur pour sub ou une chaîne pour sym).
    """
    def __init__(self, id: str, modality: str, data: Any):
        self.id = id
        self.modality = modality
        self.data = data

# Classe de base abstraite pour le calcul de synergie
class ModuleSynergy(ABC):
    @abstractmethod
    def compute_similarity(self, entity1: Entity, entity2: Entity) -> float:
        """
        Calcule et renvoie un score de similarité entre entity1 et entity2.
        """
        pass

# Module pour les données sub-symboliques
class ModuleSynergySub(ModuleSynergy):
    def compute_similarity(self, entity1: Entity, entity2: Entity) -> float:
        # Vérification des modalités
        if entity1.modality != 'sub' or entity2.modality != 'sub':
            raise ValueError("ModuleSynergySub ne peut traiter que des entités sub-symboliques.")
        # On suppose que les données sont des vecteurs numpy
        vec1 = np.array(entity1.data)
        vec2 = np.array(entity2.data)
        norm1 = np.linalg.norm(vec1)
        norm2 = np.linalg.norm(vec2)
        if norm1 == 0 or norm2 == 0:
            return 0.0
        similarity = np.dot(vec1, vec2) / (norm1 * norm2)
        # On normalise pour obtenir un score dans [0, 1]
        return max(0.0, similarity)

# Module pour les données symboliques
class ModuleSynergySym(ModuleSynergy):
    def compute_similarity(self, entity1: Entity, entity2: Entity) -> float:
        if entity1.modality != 'sym' or entity2.modality != 'sym':
            raise ValueError("ModuleSynergySym ne peut traiter que des entités symboliques.")
        # Méthode simple : renvoie 1 si les données sont identiques, 0 sinon
        return 1.0 if entity1.data == entity2.data else 0.0

# SCNCore : le cœur du SCN
class SCNCore:
    def __init__(self, entities: List[Entity], eta: float = 0.1, tau: float = 0.2):
        """
        Initialise le SCN avec une liste d'entités, et définit les paramètres η et τ.
        La matrice ω est initialisée avec de petites valeurs aléatoires.
        """
        self.entities = entities
```

```
        self.N = len(entities)
        self.eta = eta
        self.tau = tau
        # Initialisation de la matrice ω (symétrique) de dimension N x N
        self.omega = np.random.uniform(0.01, 0.05, size=(self.N, self.N))
        self.omega = (self.omega + self.omega.T) / 2.0

        # Instanciation des modules de synergie
        self.module_synergy_sub = ModuleSynergySub()
        self.module_synergy_sym = ModuleSynergySym()

    def compute_synergy(self, i: int, j: int) -> float:
        """
        Calcule le score de synergie S(i,j) en fonction des modalités des entités.
        """
        e1 = self.entities[i]
        e2 = self.entities[j]
        if e1.modality == 'sub' and e2.modality == 'sub':
            return self.module_synergy_sub.compute_similarity(e1, e2)
        elif e1.modality == 'sym' and e2.modality == 'sym':
            return self.module_synergy_sym.compute_similarity(e1, e2)
        else:
            # Pour les cas mixtes, on combine les scores (ici par moyenne simple)
            scores = []
            try:
                scores.append(self.module_synergy_sub.compute_similarity(e1, e2))
            except ValueError:
                pass
            try:
                scores.append(self.module_synergy_sym.compute_similarity(e1, e2))
            except ValueError:
                pass
            return np.mean(scores) if scores else 0.0

    def update_weights(self):
        """
        Met à jour la matrice ω pour chaque paire (i, j) en appliquant la règle :
        ω(t+1) = ω(t) + η [ S(i,j) - τ ω(t) ]
        """
        new_omega = self.omega.copy()
        for i in range(self.N):
            for j in range(i + 1, self.N):
                S_ij = self.compute_synergy(i, j)
                delta = self.eta * (S_ij - self.tau * self.omega[i, j])
                new_val = self.omega[i, j] + delta
                # Application éventuelle d'un mécanisme de saturation (ici simple clamping)
                new_val = min(new_val, 1.0)  # par exemple, on impose ω_max = 1.0
                new_omega[i, j] = new_val
                new_omega[j, i] = new_val  # symétrie
        self.omega = new_omega

    def run_update_cycle(self, iterations: int = 10):
        """
        Exécute la boucle de mise à jour pour un nombre donné d'itérations.
        À chaque itération, on met à jour ω et on peut enregistrer l'état ou effectuer des contrôles.
```

```
        """
        for t in range(iterations):
            self.update_weights()
            mean_omega = np.mean(self.omega)
            print(f"Itération {t+1} : moyenne de ω = {mean_omega:.4f}")
            # Ici, on pourrait ajouter des appels à des modules de logs ou watchers

# Exemple d'utilisation
def main():
    # Création d'un ensemble d'entités multimodales
    entities = [
        # Entités sub-symboliques : représentées par des vecteurs (ex. d'images ou d'audio)
        Entity("E1", "sub", [0.2, 0.4, 0.6]),
        Entity("E2", "sub", [0.1, 0.3, 0.5]),
        Entity("E3", "sub", [0.25, 0.35, 0.45]),
        # Entités symboliques : représentées par des chaînes de caractères
        Entity("E4", "sym", "chat"),
        Entity("E5", "sym", "chat"),
        Entity("E6", "sym", "chien"),
        # Entités mixtes, pour démonstration, nous utilisons un calcul de fusion simple
        Entity("E7", "sub", [0.5, 0.2, 0.1]),
        Entity("E8", "sym", "oiseau")
    ]

    # Initialisation du SCNCore avec les entités
    scn_core = SCNCore(entities, eta=0.1, tau=0.2)
    print("Matrice ω initiale :")
    print(np.round(scn_core.omega, 4))

    # Exécution de la boucle de mise à jour sur 10 itérations
    scn_core.run_update_cycle(iterations=10)

    print("Matrice ω finale :")
    print(np.round(scn_core.omega, 4))

if __name__ == "__main__":
    main()
```

Explications et Développement

A. Cycle d'Itération

Chaque itération dans le SCN se décompose en plusieurs étapes :

1. **Calcul de $S(i,j)$**

   Pour chaque paire (i,j) (typiquement, on parcourt uniquement $i < j$ pour maintenir la symétrie), le **SCNCore** interroge le module de synergie adéquat (sub-symbolique ou symbolique) via la méthode *compute_synergy*. Cette fonction retourne un score qui reflète l'affinité entre les entités i et j.

2. **Application de la règle de mise à jour**

À partir de la valeur $S(i,j)$ obtenue, la mise à jour se fait en ajoutant un terme $\eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}\right]$ à la valeur actuelle de $\omega_{i,j}$. Dans notre exemple, nous appliquons aussi une saturation (clamping à 1.0) afin d'éviter des valeurs trop élevées.

3. **Contrôles et Enregistrement**

   Après chaque mise à jour, des opérations de contrôle peuvent être exécutées (par exemple, via des watchers ou des logs) pour assurer la stabilité et la traçabilité de la dynamique. Dans notre implémentation, nous affichons la moyenne de la matrice ω pour suivre l'évolution globale.

4. **Itération Suivante**

   La nouvelle matrice ω devient l'état de départ pour l'itération suivante. Cette boucle permet de simuler l'auto-organisation du réseau, qui converge progressivement vers une structure stable.

B. Gestion de la Multimodalité

Le **dispatching** de la fonction de calcul de synergie se fait dans la méthode *compute_synergy* de la classe *SCNCore*. Selon que les entités soient de type « sub » ou « sym », la méthode délègue le calcul au module approprié. Pour les cas mixtes, une stratégie simple de fusion (ici, la moyenne) est appliquée, mais cette logique peut être enrichie selon les exigences de votre système.

C. Extension et Intégration

Dans un système réel, d'autres modules pourraient être intégrés à ce pipeline :

- Des modules d'**inhibition** ou de **saturation** plus élaborés, qui ajusteraient les mises à jour en fonction de la dynamique globale.
- Des mécanismes de **logging** et de **surveillance** (voir les sections 5.8) qui enregistreraient et contrôleraient en temps réel la validité des mises à jour.
- Des protocoles de **synchronisation** pour des SCN distribués, permettant de garantir que la mise à jour se fasse de manière cohérente entre plusieurs nœuds.

Un code Python complet qui reprend la structure modulaire déjà développée (avec les classes *Entity*, *ModuleSynergySub*, *ModuleSynergySym* et *SCNCore*), auquel nous ajoutons une classe **SynergyDispatcher** et une fonction **scn_distributed_iteration**.

Ces éléments illustrent la manière dont le calcul de la synergie peut être dispatché selon le type des entités et comment, dans un scénario distribué, la mise à jour des pondérations se fait en tenant compte de l'appartenance locale ou non d'une entité.

```
import numpy as np
from abc import ABC, abstractmethod
from typing import Any, Dict, List, Tuple

##############################################
# 1. Classes de Base pour les Entités et Modules de Synergie
```

```
##############################################

class Entity:
    """
    Représente une entité dans le SCN.

    Attributs:
        id (str): Identifiant unique de l'entité.
        modality (str): Type de modalité, par exemple 'subsymbolic' ou 'symbolic'.
        data (Any): Données associées à l'entité (vecteur pour subsymbolic, chaîne pour symbolic).
    """
    def __init__(self, id: str, modality: str, data: Any):
        self.id = id
        self.modality = modality  # Exemple : 'subsymbolic' ou 'symbolic'
        self.data = data

# Classe abstraite pour le calcul de synergie
class ModuleSynergy(ABC):
    @abstractmethod
    def compute_similarity(self, entity1: Entity, entity2: Entity) -> float:
        """
        Calcule et renvoie un score de similarité entre entity1 et entity2.
        """
        pass

# Module pour les données subsymboliques (ex. images, audio)
class ModuleSynergySub(ModuleSynergy):
    def compute_similarity(self, entity1: Entity, entity2: Entity) -> float:
        if entity1.modality != 'subsymbolic' or entity2.modality != 'subsymbolic':
            raise ValueError("ModuleSynergySub ne peut traiter que des entités subsymboliques.")
        # Exemple : similarité cosinus sur des vecteurs
        vec1 = np.array(entity1.data)
        vec2 = np.array(entity2.data)
        norm1 = np.linalg.norm(vec1)
        norm2 = np.linalg.norm(vec2)
        if norm1 == 0 or norm2 == 0:
            return 0.0
        similarity = np.dot(vec1, vec2) / (norm1 * norm2)
        # On renvoie une valeur entre 0 et 1
        return max(0.0, similarity)

# Module pour les données symboliques (ex. mots, concepts)
class ModuleSynergySym(ModuleSynergy):
    def compute_similarity(self, entity1: Entity, entity2: Entity) -> float:
        if entity1.modality != 'symbolic' or entity2.modality != 'symbolic':
            raise ValueError("ModuleSynergySym ne peut traiter que des entités symboliques.")
        # Exemple simple : 1.0 si les données sont identiques, 0 sinon.
        return 1.0 if entity1.data == entity2.data else 0.0

##############################################
# 2. SynergyDispatcher
##############################################

class SynergyDispatcher:
    """
```

```
    Classe qui répartit le calcul de la synergie selon le type des entités.
    Elle fait appel aux modules spécialisés pour les entités subsymboliques et symboliques.
    """
    def __init__(self, synergy_sub: ModuleSynergy, synergy_sym: ModuleSynergy):
        self.sub = synergy_sub
        self.sym = synergy_sym

    def get_synergy(self, entity1: Entity, entity2: Entity) -> float:
        # Si les deux entités sont subsymboliques
        if entity1.modality == "subsymbolic" and entity2.modality == "subsymbolic":
            return self.sub.compute_similarity(entity1, entity2)
        # Si les deux entités sont symboliques
        elif entity1.modality == "symbolic" and entity2.modality == "symbolic":
            return self.sym.compute_similarity(entity1, entity2)
        else:
            # Pour un cas cross-modal, on peut par exemple renvoyer la moyenne des scores obtenus sur l
es deux modules
            scores = []
            try:
                scores.append(self.sub.compute_similarity(entity1, entity2))
            except Exception:
                pass
            try:
                scores.append(self.sym.compute_similarity(entity1, entity2))
            except Exception:
                pass
            return np.mean(scores) if scores else 0.0

##############################################
# 3. SCNCore (Version Simplifiée)
##############################################

class SCNCore:
    """
    Le cœur du SCN qui gère la matrice des pondérations ω et orchestre la mise à jour.
    """
    def __init__(self, entities: List[Entity], eta: float = 0.1, tau: float = 0.2):
        self.entities = entities
        self.N = len(entities)
        self.eta = eta
        self.tau = tau
        # Initialisation de la matrice ω avec de petites valeurs aléatoires (symétrique)
        self.omega = np.random.uniform(0.01, 0.05, size=(self.N, self.N))
        self.omega = (self.omega + self.omega.T) / 2.0
        # Instanciation du dispatcher pour calculer la synergie
        self.dispatcher = SynergyDispatcher(ModuleSynergySub(), ModuleSynergySym())

    def compute_synergy(self, i: int, j: int) -> float:
        """
        Calcule S(i,j) en déléguant au dispatcher.
        """
        return self.dispatcher.get_synergy(self.entities[i], self.entities[j])

    def update_weights(self):
        """
```

```
        Met à jour la matrice ω selon la règle additive :
        ω(t+1) = ω(t) + η [ S(i,j) - τ ω(t) ]
        """
        new_omega = self.omega.copy()
        for i in range(self.N):
            for j in range(i + 1, self.N):
                S_ij = self.compute_synergy(i, j)
                delta = self.eta * (S_ij - self.tau * self.omega[i, j])
                new_val = self.omega[i, j] + delta
                # Optionnel : clamp pour éviter un dépassement excessif
                new_val = min(new_val, 1.0)
                new_omega[i, j] = new_val
                new_omega[j, i] = new_val  # symétrie
        self.omega = new_omega

    def run_iterations(self, iterations: int = 10):
        for t in range(iterations):
            self.update_weights()
            print(f"Itération {t+1}: moyenne de ω = {np.mean(self.omega):.4f}")

##############################################
# 4. Fonction pour la Mise à Jour dans un SCN Distribué
##############################################

def is_local(entity: Entity, local_block_ids: List[str]) -> bool:
    """
    Simule une fonction qui détermine si une entité appartient au bloc local.
    Ici, on suppose que l'identifiant de la modalité peut servir à cet effet.
    """
    return entity.id in local_block_ids

def apply_inhibition_saturation(w_value: float, i: int, j: int) -> float:
    """
    Applique éventuellement un mécanisme d'inhibition ou de saturation.
    Pour cet exemple, on effectue simplement un clamping à 1.0.
    """
    return min(w_value, 1.0)

# Exemple d'interface réseau simplifiée pour la communication inter-blocs.
class NetInterface:
    def request_synergy_other_block(self, entity1: Entity, entity2: Entity) -> float:
        """
        Simule une requête pour obtenir S(i, j) depuis un autre bloc.
        Dans une implémentation réelle, cette méthode enverrait une requête réseau.
        """
        # Pour simplifier, on renvoie une valeur fixe (par exemple, 0.5)
        return 0.5

    def send_local_updates(self, block_id: str, w_local: Dict[Tuple[int, int], float]):
        """
        Simule l'envoi des mises à jour locales vers un orchestrateur central.
        """
        print(f"Bloc {block_id}: envoi des mises à jour, nombre de liens mis à jour = {len(w_local)}")

def scn_distributed_iteration(block_id: str,
```

```
                        w_local: Dict[Tuple[int, int], float],
                        local_links: List[Tuple[int, int]],
                        synergy_module: SynergyDispatcher,
                        update_rule,
                        entities: List[Entity],
                        net_interface: NetInterface):
    """
    Fonction simulant une itération de mise à jour dans un SCN distribué.

    Paramètres:
        block_id : identifiant du bloc.
        w_local : dictionnaire local des pondérations ω pour les liaisons gérées par ce bloc.
        local_links : liste des paires (i, j) appartenant à ce bloc.
        synergy_module : instance de SynergyDispatcher pour calculer S(i, j) localement.
        update_rule : fonction qui applique la règle DSL, par exemple:
                update_rule(w_old, s_val) = w_old + η (s_val - τ * w_old)
        entities : liste globale des entités.
        net_interface : interface pour échanger les mises à jour avec d'autres blocs.
    """
    for (i, j) in local_links:
        # Détermine si l'entité j est locale au bloc courant.
        # Pour cet exemple, nous supposons que la liste local_links ne contient que des paires locales.
        s_val = synergy_module.get_synergy(entities[i], entities[j])
        w_old = w_local.get((i, j), 0.0)
        w_new = update_rule(w_old, s_val)
        w_new = apply_inhibition_saturation(w_new, i, j)
        w_local[(i, j)] = w_new

    # Envoi des mises à jour locales via l'interface réseau
    net_interface.send_local_updates(block_id, w_local)

##################################################
# 5. Fonction d'Update Rule DSL (Exemple Additif)
##################################################

def update_rule_additive(w_old: float, s_val: float, eta: float = 0.1, tau: float = 0.2) -> float:
    """
    Applique la règle additive : w_new = w_old + η (s_val - τ * w_old)
    """
    return w_old + eta * (s_val - tau * w_old)

##################################################
# 6. Exemple d'Utilisation Globale
##################################################

def main():
    # Création d'une liste d'entités (certaines subsymboliques et certaines symboliques)
    entities = [
        Entity("E1", "subsymbolic", [0.2, 0.4, 0.6]),
        Entity("E2", "subsymbolic", [0.1, 0.3, 0.5]),
        Entity("E3", "subsymbolic", [0.25, 0.35, 0.45]),
        Entity("E4", "symbolic", "chat"),
        Entity("E5", "symbolic", "chat"),
        Entity("E6", "symbolic", "chien")
    ]
```

```
    # Initialisation du SCNCore pour une utilisation non distribuée
    scn_core = SCNCore(entities, eta=0.1, tau=0.2)
    print("Matrice ω initiale:")
    print(np.round(scn_core.omega, 4))

    scn_core.run_iterations(iterations=5)
    print("Matrice ω finale:")
    print(np.round(scn_core.omega, 4))

    # Exemple de mise à jour distribuée
    # Supposons que le bloc local gère les entités E1, E2, E3 (indices 0,1,2)
    local_block_ids = ["E1", "E2", "E3"]
    local_links = [(0, 1), (0, 2), (1, 2)]
    # Initialisation d'un store local des pondérations pour ce bloc
    w_local = {(i, j): 0.05 for (i, j) in local_links}
    # Utilisation d'une instance de SynergyDispatcher (dépendant de la modalité)
    dispatcher = SynergyDispatcher(ModuleSynergySub(), ModuleSynergySym())
    # Création d'une interface réseau simulée
    net_interface = NetInterface()
    print("\nMise à jour distribuée pour le bloc 'Bloc_A' sur les entités locales E1, E2, E3:")
    scn_distributed_iteration("Bloc_A", w_local, local_links, dispatcher, update_rule_additive, entities,
net_interface)
    print("Store local w après update:")
    print({k: round(v, 4) for k, v in w_local.items()})

if __name__ == "__main__":
    main()
```

Explications Détaillées

1. La Boucle de Mise à Jour dans le SCNCore

- **Calcul de la Synergie $S(i,j)$:**

  La méthode *compute_synergy* du **SCNCore** fait appel au **SynergyDispatcher**, lequel, en fonction des modalités des entités i et j, appelle le module approprié (*ModuleSynergySub* ou *ModuleSynergySym*). Ainsi, la logique de calcul de la synergie est encapsulée et séparée du reste du système.

- **Application de la Règle DSL :**

  La méthode *update_weights* parcourt toutes les paires (i,j) avec $i < j$, calcule $S(i,j)$, et applique la règle additive

  $$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right]$$

  Le résultat est ensuite éventuellement passé par une fonction de saturation (ici, on impose un maximum de 1.0).

- **Cycle d'Itération :**

  La méthode *run_iterations* effectue plusieurs itérations de mise à jour et affiche la moyenne de la matrice ω afin de suivre la progression globale.

2. La Fonction scn_distributed_iteration

Cette fonction simule le comportement d'un bloc dans un environnement distribué. Pour chaque liaison locale (définie dans *local_links*), la fonction :

- Vérifie si la paire est locale (pour simplifier, nous considérons ici que toutes les paires sont locales, mais la fonction pourrait être étendue pour interroger d'autres blocs via *net_interface*).
- Calcule $S(i,j)$ via le module de synergie (dispatcher).
- Applique la règle DSL (ici, *update_rule_additive*) pour obtenir la nouvelle valeur de $\omega_{i,j}$.
- Applique un mécanisme d'inhibition/saturation.
- Envoie, en fin de traitement, les mises à jour locales vers un orchestrateur via *net_interface.send_local_updates*.

3. La Classe SynergyDispatcher

Cette classe permet de déléguer le calcul de la synergie en fonction du type des entités. Elle teste la modalité de chaque entité et appelle le module correspondant. En cas de modalités mixtes, une stratégie de fusion (ici, une moyenne) est appliquée.

5.9.2. SCN Hybride (Symbolique + Sub-symbolique)

5.9.2.1. Entités Logiques, Vecteurs, Gestion via la Synergie Multiple

Dans un **Synergistic Connection Network** (SCN) hybride, l'objectif est de traiter simultanément des entités de nature très différente. Certaines sont purement **sub-symboliques** et se présentent sous forme de vecteurs numériques issus de descripteurs, comme des embeddings d'images, d'audio ou de texte. D'autres sont **purement symboliques** et correspondent à des objets logiques, des formules ou des concepts définis dans des ontologies. Enfin, certaines entités combinent ces deux aspects, comme un concept lexicalisé qui possède à la fois un embedding vectoriel et une définition logique formalisée.

Pour gérer cette hétérogénéité, le SCN doit être capable de calculer plusieurs fonctions de **similarité** ou de **compatibilité**, puis de fusionner ces résultats en un unique score $S(i,j)$ qui guidera l'auto-organisation du réseau. Ce mécanisme, appelé **synergie multiple**, assure une prise en compte équilibrée des différentes représentations des entités et permet une structuration plus cohérente du réseau.

A. Rappel : Sub-symbolique et Symbolique

Sur le plan mathématique, les **entités sub-symboliques** sont généralement représentées par des vecteurs x_i^{sub} appartenant à un espace vectoriel $\mathcal{X}_{\text{sub}} \subseteq \mathbb{R}^d$. Ces représentations numériques proviennent de techniques d'extraction de features, telles que celles issues des réseaux de neurones convolutionnels (CNN) pour les images, ou des méthodes de traitement du signal pour l'audio. La similarité entre deux entités sub-symboliques peut être évaluée par des mesures

continues comme la similarité cosinus ou une fonction exponentielle de la distance euclidienne, par exemple :

$$S_{\text{sub}}(i,j) = \exp\left(-\alpha \parallel x_i^{\text{sub}} - x_j^{\text{sub}} \parallel^2\right) \quad \text{ou} \quad S_{\text{sub}}(i,j) = \frac{x_i^{\text{sub}} \cdot x_j^{\text{sub}}}{\parallel x_i^{\text{sub}} \parallel \parallel x_j^{\text{sub}} \parallel},$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre de réglage.

En revanche, les **entités symboliques** sont représentées par des objets logiques ou des symboles, notés ξ_i^{sym}, qui vivent dans un espace non vectoriel, voire discret, $\mathcal{X}_{\text{sym}}$. Le calcul de leur synergie ne repose pas sur des distances métriques classiques, mais plutôt sur des critères de compatibilité sémantique ou logique. Par exemple, pour deux concepts issus d'une ontologie, on peut définir :

$$S_{\text{sym}}(i,j) = g\left(\xi_i^{\text{sym}}, \xi_j^{\text{sym}}\right),$$

où g est une fonction qui évalue le degré de similarité sémantique, pouvant être basée sur des mesures d'alignement ou de co-occurrence dans un graphe conceptuel.

B. Synergie Multiple : Principe et Fusion des Scores

Face à la nécessité de gérer des entités hétérogènes, le SCN hybride définit une **synergie globale** pour un couple d'entités (i,j) en combinant les contributions issues des aspects sub-symboliques et symboliques. Mathématiquement, cette combinaison se traduit par :

$$S_{\text{hyb}}(i,j) = \alpha\, S_{\text{sub}}(i,j) + \beta\, S_{\text{sym}}(i,j),$$

où α et β sont des poids non négatifs qui déterminent l'importance relative de chaque modalité. Le choix des coefficients α et β peut être fixe ou adaptatif en fonction des caractéristiques des entités :

- **Entités sub-symboliques pures** : on peut imposer $\beta = 0$ afin que seule la contribution vectorielle soit prise en compte.
- **Entités symboliques pures** : on peut fixer $\alpha = 0$.
- **Entités mixtes** : des valeurs telles que $\alpha = 0.7$ et $\beta = 0.3$ permettent de donner une importance plus forte à la représentation sub-symbolique tout en conservant une influence significative de la dimension symbolique.

D'autres stratégies de fusion sont envisageables. Par exemple, le score global pourrait être défini par le **produit** des sous-scores, ou par une fonction non linéaire telle qu'un maximum ou une combinaison pondérée par une fonction softmax. Ces stratégies ont pour objectif de garantir que le score $S(i,j)$ reflète à la fois la proximité dans l'espace vectoriel et la cohérence sémantique ou logique, renforçant ainsi la pertinence de la mise à jour de la matrice ω.

C. Stockage des Entités et Mises à Jour dans un Espace Hybride

Chaque entité $\mathcal{E}_i$ dans un SCN hybride est représentée par une paire de composantes :

$$\mathcal{E}_i = \left(x_i^{\text{sub}},\ \xi_i^{\text{sym}}\right),$$

où x_i^{sub} est un vecteur dans $\mathbb{R}^d$ et ξ_i^{sym} est une représentation symbolique. La fonction de synergie globale $S_{\text{hyb}}(i,j)$ est alors utilisée dans la règle de mise à jour de la matrice des pondérations, qui demeure inchangée par rapport à la formulation classique du DSL :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S_{\text{hyb}}(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t)\right].$$

Ici, l'apport de la synergie multiple permet d'enrichir le processus d'auto-organisation en tenant compte des deux dimensions de l'information. Ce mécanisme assure que la connexion entre deux entités est renforcée si elles présentent à la fois une similarité vectorielle élevée et une forte compatibilité sémantique.

Sur le plan **ingénierie**, cette approche se traduit par l'implémentation d'un module de type *ModuleSynergyHyb* ou, de manière plus générale, par un **dispatcher** capable d'orienter le calcul vers les modules spécialisés appropriés, puis de fusionner les résultats selon une stratégie choisie (par exemple, la somme pondérée présentée ci-dessus).

5.9.2.2. Rapide cas d'usage, mini-dataset

Dans un **SCN hybride**, les **entités sub-symboliques** sont représentées par des vecteurs numériques dans un espace continu $\mathcal{X}_{\text{sub}} \subseteq \mathbb{R}^d$, tandis que les **entités symboliques** reposent sur des règles logiques ou des axiomes sans représentation vectorielle directe.

Fusionner ces deux types d'entités permet de tirer parti des relations métriques des données sub-symboliques et des structures sémantiques des données symboliques. Cette combinaison améliore l'organisation du réseau et la cohérence des interactions.

A. Description du Mini-Dataset

Pour illustrer le concept, considérons un mini-dataset composé de 10 entités réparties comme suit :

Entités Sub-symboliques (les entités $\mathcal{E}_1$ à $\mathcal{E}_5$)

Chaque entité est représentée par un vecteur de dimension 4. Par exemple :

- $\mathcal{E}_1$: $(0.2,\ 0.8,\ 0.1,\ 0.1)$
- $\mathcal{E}_2$: $(0.1,\ 0.75,\ 0.05,\ 0.3)$
- $\mathcal{E}_3$: $(0.6,\ 0.2,\ 0.05,\ 0.15)$
- $\mathcal{E}_4$: $(0.3,\ 0.6,\ 0.2,\ 0.1)$
- $\mathcal{E}_5$: $(0.25,\ 0.65,\ 0.15,\ 0.2)$

Entités Symboliques (les entités $\mathcal{E}_6$ à $\mathcal{E}_{10}$)

Chaque entité est représentée par un ensemble simple de règles ou d'axiomes. Par exemple :

- $\mathcal{E}_6$: $\{A \to B,\ B \wedge C \to D\}$
- $\mathcal{E}_7$: $\{X \to Y,\ \neg(Z \wedge Y)\}$
- $\mathcal{E}_8$: $\{P \to Q\}$

- $\mathcal{E}_9$: $\{A \to B,\ B \to C\}$
- $\mathcal{E}_{10}$: $\{M \to N,\ N \wedge O \to P\}$

Ce mini-dataset représente ainsi un échantillon réduit d'entités où la première partie apporte une information continue (ex. issue d'un moteur NLP ou d'un CNN), et la seconde des informations purement logiques.

L'idée est d'observer comment le SCN peut, à travers le calcul d'une **synergie multiple**, regrouper ces entités selon des critères qui tiennent compte simultanément de la proximité vectorielle et de la compatibilité sémantique.

B. Principe de la Synergie Multiple

Pour chaque paire d'entités (i, j), on définit la synergie globale $S(i, j)$ comme une combinaison des deux sous-synergies :

$$S(i,j) = \alpha\, S_{\text{sub}}(i,j) + \beta\, S_{\text{sym}}(i,j),$$

où :

- $S_{\text{sub}}(i, j)$ est la similarité entre les représentations vectorielles (ex. similarité cosinus) pour les entités sub-symboliques ;
- $S_{\text{sym}}(i, j)$ est un score de compatibilité logique ou sémantique, qui peut être calculé par le recoupement ou l'alignement des règles ;
- α et β sont des coefficients (non négatifs) qui pondèrent l'influence de chaque modalité. Par exemple, pour des entités mixtes, on pourra choisir $\alpha = 0.7$ et $\beta = 0.3$.

Si les entités sont de même nature (pures sub-symboliques ou purement symboliques), on peut adapter ces coefficients en conséquence (ex. $\beta = 0$ pour des paires sub-symboliques pures).

C. La Règle de Mise à Jour DSL dans le Contexte Hybride

La mise à jour de la matrice des pondérations ω suit la règle classique du DSL, c'est-à-dire :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\,\big[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\big],$$

où le score $S(i, j)$ est ici le score hybride $S(i,j) = \alpha\, S_{\text{sub}}(i,j) + \beta\, S_{\text{sym}}(i,j)$. Ainsi, le renforcement de la liaison entre deux entités repose sur l'accord simultané de leurs représentations vectorielles et de leurs composantes logiques. L'objectif est que la dynamique renforce les liens entre entités « proches » sur les deux dimensions, formant ainsi des clusters cohérents tant sur le plan neuronal (sub-symbolique) que sur le plan sémantique (symbolique).

Implémentation en Python du Cas d'Usage avec Mini-Dataset

Nous proposons ci-dessous un code Python qui illustre la gestion d'un mini-dataset hybride par un SCN. Ce code définit :

- Une classe **Entity** qui intègre une représentation sub-symbolique et/ou symbolique.
- Deux modules de synergie, l'un pour les entités subsymboliques et l'autre pour les entités symboliques.

- Un module hybride qui fusionne ces deux scores à l'aide des coefficients α et β.
- Un **SCNCore** qui applique la règle de mise à jour DSL sur la matrice des pondérations ω à partir des scores hybrides.

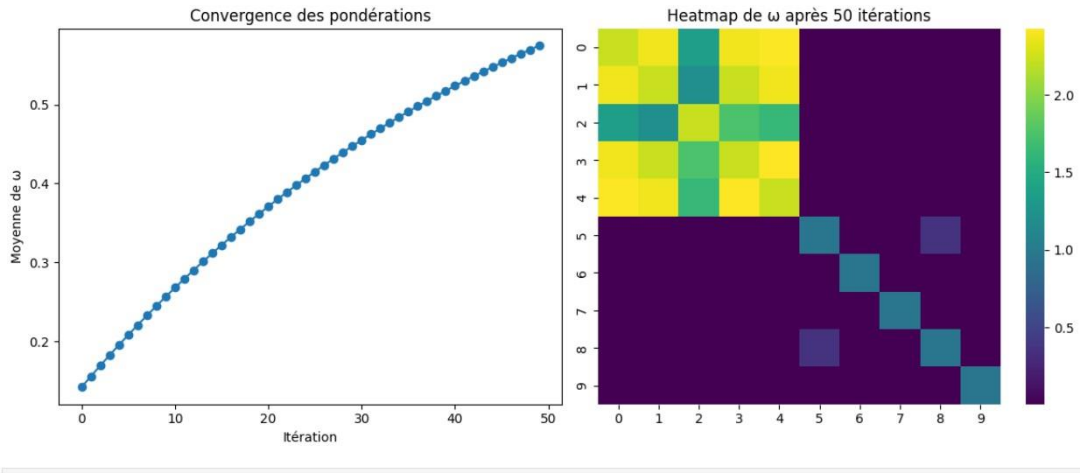
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from abc import ABC, abstractmethod
from typing import Any, List

##############################################
# 1. Classe Entity pour le Mini-dataset Hybride
##############################################

class Entity:
    """
    Représente une entité hybride dans le SCN.

    Chaque entité combine une représentation sub-symbolique (vecteur)
    et une représentation symbolique (ensemble de règles ou axiomes).

    Attributes:
        id (str): Identifiant unique.
        modality (str): 'hybrid' pour indiquer qu'il s'agit d'une entité combinée.
        sub_data (List[float]): Vecteur numérique (None si l'entité est purement symbolique).
        sym_data (Any): Représentation symbolique (par exemple, une liste de règles).
    """
    def __init__(self, id: str, sub_data: List[float] = None, sym_data: Any = None):
        self.id = id
        self.modality = 'hybrid'
        self.sub_data = sub_data
        self.sym_data = sym_data

##############################################
# 2. Modules de Synergie pour les Composantes
##############################################

class ModuleSynergySub(ABC):
    @abstractmethod
    def compute_similarity(self, vec1: List[float], vec2: List[float]) -> float:
        pass

class CosineSimilarity(ModuleSynergySub):
    def compute_similarity(self, vec1: List[float], vec2: List[float]) -> float:
        """Calcule la similarité cosinus entre deux vecteurs."""
        v1 = np.array(vec1)
        v2 = np.array(vec2)
        norm1 = np.linalg.norm(v1)
        norm2 = np.linalg.norm(v2)
        if norm1 == 0 or norm2 == 0:
            return 0.0
        similarity = np.dot(v1, v2) / (norm1 * norm2)
        # On retourne 0 si la similarité est négative pour garder des valeurs positives.
        return max(0.0, similarity)
```

```python
class ModuleSynergySym(ABC):
    @abstractmethod
    def compute_similarity(self, rules1: Any, rules2: Any) -> float:
        pass

class SimpleRuleMatch(ModuleSynergySym):
    def compute_similarity(self, rules1: List[str], rules2: List[str]) -> float:
        """
        Calcule la similarité symbolique comme le rapport entre le nombre de règles communes et le no
mbre total de règles.
        """
        if not rules1 or not rules2:
            return 0.0
        set1, set2 = set(rules1), set(rules2)
        common = set1.intersection(set2)
        total = set1.union(set2)
        return len(common) / len(total) if total else 0.0

##############################################
# 3. Module de Synergie Hybride (Dispatcher)
##############################################

class ModuleSynergyHyb:
    """
    Calcule le score hybride S(i, j) pour des entités hybrides.

    La synergie globale est définie par :
        S_hyb(i, j) = α * S_sub(i, j) + β * S_sym(i, j)
    """
    def __init__(self, alpha: float = 0.7, beta: float = 0.3):
        self.alpha = alpha
        self.beta = beta
        self.sub_module = CosineSimilarity()
        self.sym_module = SimpleRuleMatch()

    def compute_hybrid_similarity(self, entity1: Entity, entity2: Entity) -> float:
        # Calcul de la similarité sub-symbolique
        if entity1.sub_data is not None and entity2.sub_data is not None:
            s_sub = self.sub_module.compute_similarity(entity1.sub_data, entity2.sub_data)
        else:
            s_sub = 0.0
        # Calcul de la similarité symbolique
        if entity1.sym_data is not None and entity2.sym_data is not None:
            s_sym = self.sym_module.compute_similarity(entity1.sym_data, entity2.sym_data)
        else:
            s_sym = 0.0
        # Fusion linéaire des deux scores
        return self.alpha * s_sub + self.beta * s_sym

##############################################
# 4. SCNCore pour le SCN Hybride
##############################################

class SCNCore:
```

```
    """
    SCNCore gère la matrice des pondérations ω et la mise à jour selon la règle DSL hybride.

    La dynamique de mise à jour suit :
       ωᵢ,ⱼ(t+1) = ωᵢ,ⱼ(t) + η [ S(i,j) - τ ωᵢ,ⱼ(t) ]
    """
    def __init__(self, entities: List[Entity], eta: float = 0.1, tau: float = 0.2):
        self.entities = entities
        self.N = len(entities)
        self.eta = eta
        self.tau = tau
        # Initialisation de ω avec de petites valeurs aléatoires (matrice symétrique)
        self.omega = np.random.uniform(0.01, 0.05, size=(self.N, self.N))
        self.omega = (self.omega + self.omega.T) / 2.0
        np.fill_diagonal(self.omega, 0)
        # Instanciation du module de synergie hybride
        self.hybrid_module = ModuleSynergyHyb(alpha=0.7, beta=0.3)

    def compute_synergy(self, i: int, j: int) -> float:
        """
        Calcule la synergie hybride entre l'entité i et l'entité j.
        """
        return self.hybrid_module.compute_hybrid_similarity(self.entities[i], self.entities[j])

    def update_weights(self):
        """
        Met à jour la matrice ω selon la règle DSL hybride.
        """
        new_omega = self.omega.copy()
        for i in range(self.N):
            for j in range(i + 1, self.N):
                S_ij = self.compute_synergy(i, j)
                delta = self.eta * (S_ij - self.tau * self.omega[i, j])
                new_val = self.omega[i, j] + delta
                # Appliquer un clamp pour que les poids ne dépassent pas 1.0
                new_val = min(new_val, 1.0)
                new_omega[i, j] = new_val
                new_omega[j, i] = new_val  # Assurer la symétrie
        self.omega = new_omega

    def run_iterations(self, iterations: int = 10):
        """
        Exécute un nombre donné d'itérations de mise à jour.
        Affiche la moyenne des poids à chaque itération.
        """
        for t in range(iterations):
            self.update_weights()
            print(f"Itération {t+1} : moyenne de ω = {np.mean(self.omega):.4f}")

##############################################
# 5. Exemple d'Utilisation avec Visualisation
##############################################

def main():
    # Création d'un mini-dataset de 10 entités hybrides
```

```
    # Entités 1 à 5 : données sub-symboliques (vecteurs de dimension 4)
    entities = [
        Entity("E1", sub_data=[0.2, 0.8, 0.1, 0.1]),
        Entity("E2", sub_data=[0.1, 0.75, 0.05, 0.3]),
        Entity("E3", sub_data=[0.6, 0.2, 0.05, 0.15]),
        Entity("E4", sub_data=[0.3, 0.6, 0.2, 0.1]),
        Entity("E5", sub_data=[0.25, 0.65, 0.15, 0.2]),
        # Entités 6 à 10 : données symboliques (ensembles de règles)
        Entity("E6", sym_data=["A->B", "B∧C->D"]),
        Entity("E7", sym_data=["X->Y", "¬(Z∧Y)"]),
        Entity("E8", sym_data=["P->Q"]),
        Entity("E9", sym_data=["A->B", "B->C"]),
        Entity("E10", sym_data=["M->N", "N∧O->P"])
    ]

    # Initialisation du SCNCore pour le mini-dataset hybride
    scn_core = SCNCore(entities, eta=0.1, tau=0.2)
    print("Matrice ω initiale:")
    print(np.round(scn_core.omega, 4))

    # Exécute 10 itérations de mise à jour
    scn_core.run_iterations(iterations=10)

    print("Matrice ω finale:")
    final_omega = np.round(scn_core.omega, 4)
    print(final_omega)

    # Visualisation de l'évolution (affichage de la moyenne des poids par itération)
    # Pour une démonstration simple, nous allons re-simuler quelques itérations et tracer l'évolution
    iterations = 50
    omega_hist = []
    mean_history = []
    omega = scn_core.omega.copy()
    for t in range(iterations):
        omega = update_weights(omega,
                               S=np.array([[scn_core.compute_synergy(i, j) for j in range(scn_core.N)] for i in r
ange(scn_core.N)]),
                               eta=scn_core.eta,
                               tau=scn_core.tau)
        omega_hist.append(omega.copy())
        mean_history.append(np.mean(omega))

    # Trace l'évolution de la moyenne des pondérations
    plt.figure(figsize=(12, 5))
    plt.subplot(1, 2, 1)
    plt.plot(mean_history, marker='o')
    plt.xlabel('Itération')
    plt.ylabel('Moyenne de ω')
    plt.title('Convergence des pondérations')

    # Affiche la heatmap de la matrice ω finale
    plt.subplot(1, 2, 2)
    sns.heatmap(omega_hist[-1], cmap='viridis')
    plt.title('Heatmap de ω après 50 itérations')
    plt.tight_layout()
```

```
    plt.show()

if __name__ == "__main__":
    main()
```



Explications Complémentaires

A. Mini-Dataset Hybride

Le mini-dataset contient 10 entités réparties de la manière suivante :

- Les entités **sub-symboliques** (E1 à E5) sont définies par des vecteurs en $\mathbb{R}^4$. Ces vecteurs pourraient provenir d'un modèle d'embedding ou d'un descripteur d'image/audio.
- Les entités **symboliques** (E6 à E10) sont définies par des listes de chaînes représentant des règles logiques ou des axiomes. Dans un contexte réel, ces données pourraient être extraites d'une ontologie ou d'un système de raisonnement logique.

B. Calcul de la Synergie Multiple

Le module **ModuleSynergyHyb** combine le score de similarité sub-symbolique, calculé par la similarité cosinus, et le score symbolique, évalué ici par un simple ratio de règles communes. Le score hybride est obtenu via une combinaison linéaire pondérée par α et β. Par exemple, avec $\alpha = 0.7$ et $\beta = 0.3$, si deux entités possèdent un score subsymbolique de 0.8 et un score symbolique de 1.0, le score hybride sera :

$$S_{\text{hyb}} = 0.7 \times 0.8 + 0.3 \times 1.0 = 0.56 + 0.3 = 0.86.$$

Ce score est ensuite utilisé dans la mise à jour des pondérations.

C. Règle de Mise à Jour DSL Hybride

La mise à jour de $\omega_{i,j}$ se fait toujours selon la formule :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta \left[S_{\text{hyb}}(i,j) - \tau\, \omega_{i,j}(t) \right],$$

ce qui garantit que les liens se renforcent lorsque la synergie est élevée et se décroissent lorsque le score est faible, tout en maintenant une dynamique stable.

D. Observation des Résultats

En exécutant le script, vous pourrez observer la matrice ω évoluer au fil des itérations. On s'attend, par exemple, à voir que les entités sub-symboliques similaires (ex. E1 et E2) voient leur lien se renforcer, tandis que les entités symboliques identiques (E6 et E9 pourraient présenter une forte similarité si leurs règles se recoupent) voient également leur connexion s'accroître. Par ailleurs, des liens entre des entités de modalités différentes (par exemple, entre E2 et une entité symbolique) recevront un score fusionné qui, même s'il est modeste, pourra créer un pont hybride entre les deux mondes.

5.9.3. Robotique ou Multi-Agent

5.9.3.1. Rappeler la Distribution Possible, la Synchro Inter-Robots

Dans les systèmes robotiques ou multi-agents, un SCN (Synergistic Connection Network) permet de modéliser et de renforcer la coopération entre chaque robot ou agent à travers des liaisons pondérées $\omega_{i,j}$. Ces pondérations reflètent la capacité de deux entités à collaborer et s'auto-organiser en fonction de leurs états locaux, lesquels intègrent des informations telles que la position, les capteurs, et même des objectifs spécifiques. Dans ce contexte, la distribution des $\omega_{i,j}$ au sein du réseau et la synchronisation inter-robots sont des éléments essentiels pour assurer une cohérence globale, même dans des environnements dynamiques et distribués.

Nous détaillons ci-après les principaux aspects de cette problématique.

A. Pourquoi un SCN Distribué pour la Robotique ou le Multi-Agent ?

1. Multiplicité et Autonomie des Robots

Dans un essaim composé de dizaines voire de centaines de robots, chacun possède un état local caractérisé par sa position, son orientation, ses mesures capteurs et ses objectifs propres. Mathématiquement, on considère l'ensemble des robots comme un ensemble d'entités $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ et chaque lien $\omega_{i,j}$ représente la force de coopération entre l'agent i et l'agent j. La synergie $S(i,j)$ peut être définie, par exemple, en fonction de la proximité géographique ou de la complémentarité dans la tâche (ex. couverture de zone, échange d'informations), et la mise à jour des $\omega_{i,j}$ via une règle DSL permet de renforcer les connexions efficaces et de diminuer celles qui sont moins pertinentes.

2. Décentralisation et Scalabilité

Pour un essaim de grande taille, il est impraticable de disposer d'un serveur central collectant toutes les informations et calculant globalement l'ensemble des $\omega_{i,j}$. Ainsi, dans un SCN distribué, chaque robot gère localement une portion des liens, souvent ceux qui concernent ses voisins immédiats. La synchronisation inter-robots s'effectue alors par échanges périodiques de mises à jour ou de résumés d'état. Du point de vue mathématique, on peut modéliser le système comme un ensemble de sous-systèmes autonomes qui communiquent via des

opérateurs de synchronisation, de manière à obtenir un équilibre global malgré des retards et une mise à jour asynchrone.

3. Adaptation à un Environnement Dynamique

Les robots évoluent dans des environnements changeants et leur état se modifie en continu. Un SCN distribué doit donc permettre une mise à jour dynamique et continue des pondérations ω. Le fait que chaque robot ne connaisse qu'une partie locale du réseau, avec des échanges inter-robots ponctuels, rend le système non-autonome. Cela signifie que la fonction de mise à jour F appliquée aux ω dépend de variables externes et temporelles, rendant la convergence vers un état fixe moins réaliste qu'une adaptation continue aux changements. L'important est alors d'assurer que les communications et la synchronisation permettent de maintenir une cohérence globale acceptable, même si la matrice ω évolue en permanence.

B. Synchronisation Inter-Robots et Paramètres de Mise à Jour

1. Protocole de Communication et Synchronisation

Dans un environnement distribué, la synchronisation inter-robots repose sur un protocole de communication qui permet d'échanger les mises à jour des pondérations ou des informations résumées sur les états locaux. Typiquement, chaque robot diffuse périodiquement des messages contenant ses mises à jour $\Delta\omega_{i,j}$ aux agents voisins ou à un orchestrateur local. Ces messages peuvent être envoyés de manière asynchrone, ce qui induit des délais et des déphasages dans la synchronisation. Sur le plan mathématique, on peut considérer que la mise à jour locale d'un robot i est donnée par un opérateur F_i et que la synchronisation globale se fait par une agrégation de ces opérateurs, par exemple :

$$\omega_{i,j}(t+1) = F_i\left(\omega_{i,j}(t)\right) + \Delta_{comm}(t),$$

où $\Delta_{comm}(t)$ représente la correction apportée par les échanges inter-robots pour harmoniser les valeurs de $\omega_{i,j}$ dans l'ensemble du réseau. Des mécanismes de consensus (comme ceux inspirés des algorithmes de Paxos ou de Raft) peuvent être utilisés pour minimiser les incohérences dues aux retards.

2. Paramètres de Mise à Jour : η et τ

La règle de mise à jour classique est donnée par :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right].$$

Ici :

- η est le **taux d'apprentissage** qui détermine la réactivité du système aux changements de synergie. Un η élevé rend le système très sensible aux variations, mais peut également conduire à des oscillations, notamment en présence de retards de synchronisation.

- τ est le **coefficient de décroissance** qui sert de régulateur pour éviter une croissance excessive des pondérations. Dans un environnement robotique dynamique, un choix judicieux de τ permet de modérer les variations en fonction des perturbations externes (par exemple, des changements rapides de position).

Le réglage de ces paramètres doit prendre en compte le niveau de bruit dans les communications et les délais de synchronisation. Une réactivité trop forte (valeur élevée de η) peut compromettre la stabilité en raison des communications asynchrones entre robots.

3. Convergence et Dynamique Continue

Contrairement à des systèmes statiques qui cherchent une convergence vers un état fixe, les systèmes robotiques fonctionnent dans des environnements en perpétuel changement. Ainsi, la matrice ω est amenée à évoluer continuellement. Le protocole de synchronisation doit alors assurer que, malgré des retards et des mises à jour locales asynchrones, l'ensemble du SCN conserve une **cohérence globale** suffisante pour permettre la formation de clusters opérationnels. Par exemple, dans un essaim de drones surveillant une zone, même si les valeurs de $\omega_{i,j}$ changent en fonction des mouvements et des échanges, la synchronisation assure que les drones restent regroupés en sous-équipes effectuant des missions spécifiques.

C. Impact sur la Coordination et la Répartition des Tâches

L'architecture distribuée d'un SCN offre plusieurs avantages pour la coordination inter-robots :

- **Formation de Groupes** : Les robots dont les synergies sont élevées se regroupent, formant des clusters qui correspondent à des équipes collaborant sur des tâches communes (par exemple, surveillance d'une zone, cartographie, ou transport d'objets).
- **Adaptation Dynamique** : En fonction des changements d'état (position, orientation, capteurs) et des échanges inter-robots, le réseau s'adapte en temps réel. Un robot peut changer de cluster s'il se rapproche d'un autre groupe, ce qui permet une répartition flexible des missions.
- **Robustesse Distribuée** : Chaque robot ne gère qu'une partie locale des informations et les synchronise avec ses voisins. Cela rend le système moins vulnérable à une panne centralisée et facilite la redondance et la reprise après une défaillance.

Sur le plan **mathématique**, on modélise le système comme un ensemble d'équations différentielles discrètes couplées, où chaque robot applique localement une mise à jour selon la règle DSL, et où les corrections de synchronisation agissent comme des perturbations qui tendent à harmoniser l'ensemble du réseau. Cette approche permet de garantir, malgré l'asynchronie et les délais de communication, que le SCN atteint un état de coordination fonctionnelle.

5.9.3.2. Visualisation d'un SCN en Essaim Robotique

I. Analyse et Motivations de la Visualisation d'un SCN en Essaim Robotique

A. Objectifs et Bénéfices

Dans un environnement multi-agent, la matrice des pondérations ω issue du SCN encode l'intensité des interactions entre robots. Toutefois, lorsqu'on manipule un grand nombre de

robots, il devient difficile d'extraire intuitivement la structure du réseau à partir de simples tableaux ou listes de valeurs numériques. La visualisation permet alors de :

Comprendre le comportement collectif

Une représentation graphique (par exemple, un graphe en 2D) permet de détecter visuellement la formation de clusters ou de groupes coopératifs. Chaque robot est représenté par un nœud, et les arêtes qui relient deux robots sont colorées ou dont l'épaisseur varie en fonction de la valeur de $\omega_{i,j}$. Ainsi, des arêtes épaisses et de couleurs vives indiquent une forte coopération, tandis que des arêtes fines ou absentes traduisent une faible synergie.

Diagnostiquer et Ajuster les Paramètres

En visualisant l'évolution des liens, un opérateur peut détecter des anomalies (par exemple, des liens excessivement forts ou faibles) qui pourraient résulter d'un mauvais paramétrage ou d'une défaillance du système. Ceci aide à régler les paramètres de la dynamique d'auto-organisation, tels que le taux d'apprentissage η et le coefficient de décroissance τ.

Suivre l'Adaptation Dynamique

Dans un environnement robotique dynamique, la disposition des robots change en continu. La visualisation permet de suivre en temps réel comment les robots se regroupent, se séparent ou se réorganisent en fonction de leur position et des échanges de données (par exemple, les retours capteurs ou les informations de mission).

B. Approches de Visualisation

Plusieurs méthodes de représentation graphique sont envisageables :

Graphe en 2D ou 3D

On positionne chaque robot en fonction de ses coordonnées physiques (par exemple, sur un plan réel) et on trace des arêtes entre les robots. La couleur et l'épaisseur des arêtes sont déterminées par la valeur de $\omega_{i,j}$. Un *layout force-directed* peut être utilisé pour obtenir une représentation qui révèle la structure topologique des interactions.

Heatmap ou Matrice de Pondérations

Pour un essaim de taille modérée, une heatmap de la matrice ω fournit une vision globale des niveaux d'interaction. Les valeurs élevées apparaissent en couleurs vives, ce qui facilite l'identification des clusters internes.

Vue de Clusters

Un algorithme de détection de communautés (ex. Louvain) peut être appliqué pour extraire les groupes d'agents fortement connectés. La visualisation se fait alors par des couleurs ou des labels indiquant à quel cluster appartient chaque robot.

C. Exemple d'Application : Essaim d'une Douzaine de Robots

Considérons un essaim de 12 robots terrestres évoluant dans une zone. Chaque robot, assimilé à une entité $\mathcal{E}_i$, possède des liaisons $\omega_{i,j}$ avec les autres robots, qui évoluent selon la dynamique d'auto-organisation décrite par :

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right].$$

Pour faciliter la compréhension du comportement collectif, on peut visualiser le réseau de robots à intervalles réguliers. Ainsi, sur une carte 2D, chaque robot est représenté par un nœud (placé selon sa position réelle ou simulée), et les arêtes entre les robots sont dessinées avec une épaisseur ou une couleur proportionnelle à la valeur de $\omega_{i,j}$. Cette représentation permet de voir par exemple :

- Des clusters où des robots se regroupent pour effectuer une mission commune (fortes interactions),
- Des robots isolés ou en dérive, dont les liens sont faibles,
- La répartition spatiale des sous-groupes et l'évolution de la coordination dans le temps.

II. Implémentation Python pour la Visualisation d'un Essaim de 12 Robots

Nous proposons ci-après un programme Python complet qui simule un essaim de 12 robots. Le programme crée des positions aléatoires pour chaque robot sur un plan, génère une matrice de pondérations ω simulant des interactions (par exemple, basée sur la distance entre robots), et affiche le graphe du réseau en utilisant la bibliothèque **NetworkX** et **Matplotlib**.

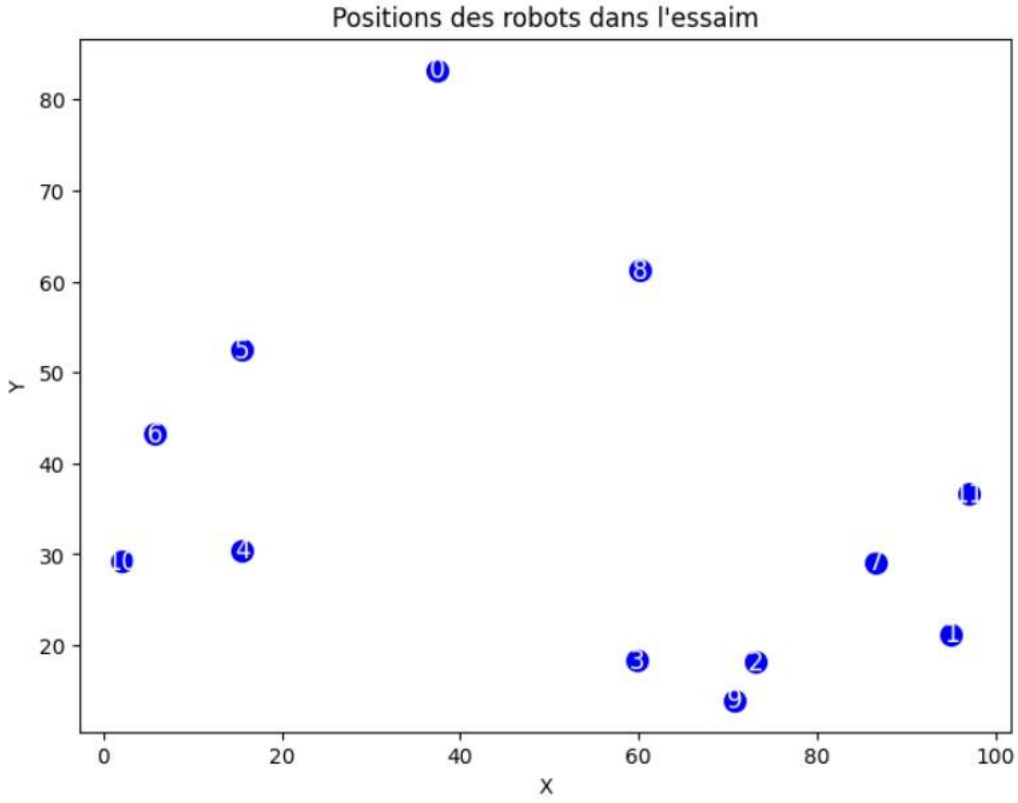
Le programme intègre les étapes suivantes :

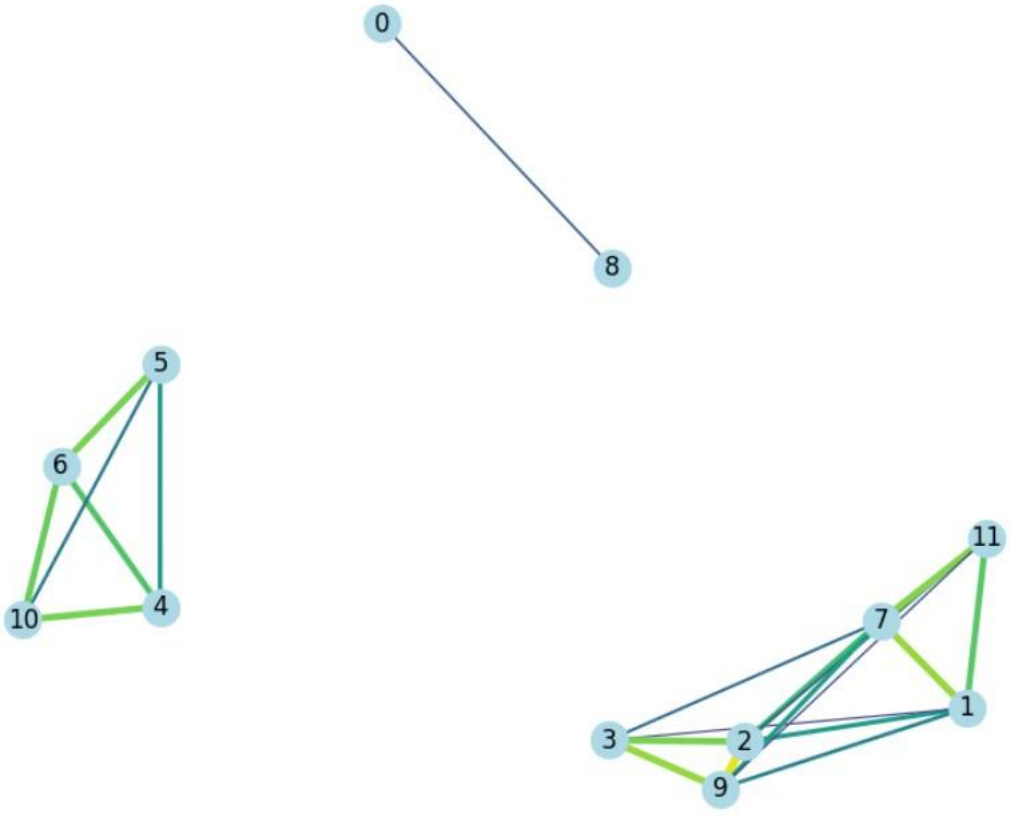
- Génération des positions des robots,
- Calcul d'une matrice de pondérations simulée, où une valeur élevée de $\omega_{i,j}$ correspond à des robots proches ou en coopération,
- Visualisation du graphe avec des arêtes dont l'épaisseur et la couleur reflètent la force $\omega_{i,j}$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx
from typing import Any, List, Tuple  # Importation de Tuple et d'autres types

# Pour assurer la reproductibilité
np.random.seed(42)

##############################################
# 1. Génération des Positions des Robots
##############################################

def generate_robot_positions(num_robots: int, area_size: Tuple[float, float] = (100, 100)) -> np.ndarra
y:
    """
    Génère des positions aléatoires pour num_robots dans une zone de dimensions area_size.
    Renvoie un tableau de forme (num_robots, 2).
    """
    x_positions = np.random.uniform(0, area_size[0], num_robots)
    y_positions = np.random.uniform(0, area_size[1], num_robots)
    return np.column_stack((x_positions, y_positions))
```

```
##############################################
# 2. Calcul de la Matrice de Pondérations
##############################################

def compute_weight_matrix(positions: np.ndarray, sigma: float = 20.0) -> np.ndarray:
    """
    Calcule une matrice de pondérations ω basée sur une fonction gaussienne de la distance.
    Plus deux robots sont proches, plus ω est élevé.
    La fonction utilisée est : ω(i,j) = exp(-d(i,j)^2 / (2*sigma^2)).
    """
    num_robots = positions.shape[0]
    omega = np.zeros((num_robots, num_robots))
    for i in range(num_robots):
        for j in range(i + 1, num_robots):
            distance = np.linalg.norm(positions[i] - positions[j])
            weight = np.exp(- (distance ** 2) / (2 * sigma ** 2))
            omega[i, j] = weight
            omega[j, i] = weight  # symétrie
    return omega

##############################################
# 3. Visualisation du SCN
##############################################

def visualize_scn(positions: np.ndarray, omega: np.ndarray, threshold: float = 0.2):
    """
    Visualise le SCN sous forme de graphe où les nœuds sont les positions des robots.
    Seules les arêtes dont la pondération est supérieure au seuil sont affichées.
    L'épaisseur et la couleur des arêtes varient en fonction de la valeur de ω.
    """
    num_robots = positions.shape[0]
    G = nx.Graph()
    # Ajout des nœuds avec leur position
    for i in range(num_robots):
        G.add_node(i, pos=(positions[i, 0], positions[i, 1]))

    # Ajout des arêtes avec les poids
    for i in range(num_robots):
        for j in range(i + 1, num_robots):
            weight = omega[i, j]
            if weight > threshold:  # Seuil pour afficher une liaison
                G.add_edge(i, j, weight=weight)

    pos = nx.get_node_attributes(G, 'pos')
    weights = [G[u][v]['weight'] for u, v in G.edges()]

    # Normaliser les poids pour l'épaisseur des arêtes
    max_weight = max(weights) if weights else 1.0
    widths = [4 * (w / max_weight) for w in weights]

    # Choix d'une palette de couleurs (ici, on utilise la colormap viridis)
    edge_colors = [plt.cm.viridis(w) for w in weights]

    plt.figure(figsize=(10, 8))
```

```
    nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_size=300, node_color='lightblue')
    nx.draw_networkx_labels(G, pos)
    nx.draw_networkx_edges(G, pos, width=widths, edge_color=edge_colors)
    plt.title("Visualisation d'un SCN en Essaim Robotique")
    plt.axis('off')
    plt.show()

##############################################
# 4. Programme Principal
##############################################

def main():
    num_robots = 12
    positions = generate_robot_positions(num_robots, area_size=(100, 100))
    omega = compute_weight_matrix(positions, sigma=20.0)

    # Affichage des positions
    plt.figure(figsize=(8, 6))
    plt.scatter(positions[:, 0], positions[:, 1], c='blue', s=100)
    for i, (x, y) in enumerate(positions):
        plt.text(x, y, f"{i}", fontsize=12, color='white', ha='center', va='center')
    plt.title("Positions des robots dans l'essaim")
    plt.xlabel("X")
    plt.ylabel("Y")
    plt.show()

    # Visualisation du SCN sous forme de graphe
    visualize_scn(positions, omega, threshold=0.2)

if __name__ == "__main__":
    main()
```


Positions des robots dans l'essaim
Y
X
0
20
40
60
80
100
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11


Visualisation d'un SCN en Essaim Robotique
0
8
5
6
10
4
11
7
1
3
2
9

Explications

Importation des Types

Nous avons ajouté *from typing import Tuple* (ainsi que d'autres types utiles) pour pouvoir utiliser le type *Tuple[float, float]* dans la fonction *generate_robot_positions*.

Génération des Positions

La fonction *generate_robot_positions* crée un tableau de positions aléatoires pour un nombre donné de robots dans une zone définie par *area_size*.

Calcul de la Matrice de Pondérations

La fonction *compute_weight_matrix* calcule une matrice ω en appliquant une fonction gaussienne sur la distance entre chaque paire de robots. Plus deux robots sont proches, plus la valeur retournée sera proche de 1.

Visualisation du SCN

La fonction *visualize_scn* construit un graphe avec NetworkX où chaque robot est un nœud, et les arêtes sont tracées uniquement pour des liaisons dont le poids dépasse un seuil donné. L'épaisseur et la couleur des arêtes sont proportionnelles à la valeur des pondérations, ce qui permet de visualiser la force des connexions.

Programme Principal

La fonction *main()* orchestre l'ensemble du processus :

- Génération des positions pour 12 robots,
- Calcul de la matrice ω,
- Affichage des positions sur un scatter plot,
- Visualisation du graphe du SCN.

5.10. Conclusion et Ouverture

Après avoir exploré la **dynamique** d'un SCN (chapitre 4) et esquissé divers **exemples** de mise en œuvre dans des cas multimodaux, hybrides et distribués, ce chapitre 5 s'est consacré à la **structure générale** d'un SCN sur le plan « architecture et ingénierie ». Nous avons vu comment l'on passe du schéma mathématique $\omega_{i,j}(t+1) = F\big(\omega_{i,j}(t), S(i,j), \dots\big)$ à une organisation modulaire — avec des **modules** dédiés (calcul de la synergie, mise à jour, inhibition, etc.) —, des interfaces temps réel (ajout/suppression d'entités, extraction de clusters), et une approche distribuée (sharding, synchronisation, robustesse) garantissant la **scalabilité** et la **fiabilité** du système.

5.10.1. Bilan du Chapitre

Le présent **chapitre 5** a exposé les fondements **techniques** et **architecturaux** nécessaires à l'**implémentation** d'un **Synergistic Connection Network (SCN)** à partir des principes **mathématiques** vus antérieurement. L'ensemble des **équations** formant la dynamique de mise à jour $\omega(t+1) = F\big(\omega(t)\big)$ a ainsi trouvé sa transposition dans des structures de données appropriées, des "modules" logiques, et des mécanismes de distribution et de sécurité. Il convient de souligner plusieurs avancées majeures qui ont jalonné ce chapitre :

Dans un premier temps, la notion de **structure de données** a été précisée. Selon la **taille** du SCN et la **parsimonie** recherchée, on choisit entre une **matrice dense** $\{\omega_{i,j}\}$ et une **représentation sparse**, comme des listes d'adjacence ou des dictionnaires (hashmaps).

D'un point de vue **mathématique**, cela revient à identifier les paires (i,j) pertinentes et à ne stocker que la portion active de ω. Pour un SCN de grande dimension, les mécanismes de "top-k" ou de filtrage ϵ-radius (cf. Section 5.4.3) permettent d'optimiser cette parcimonie et d'assurer une implémentation scalable.

Ensuite, le concept de **module** a permis de dissocier la **logique** du calcul de la **synergie** $S(i,j)$ exposée en Section 5.4 de celle du **noyau** qui pilote la **mise à jour** de ω.

Le **Module Synergie** applique différentes formules selon la nature des entités. Il utilise S_{sub} pour les entités sub-symboliques représentées sous forme de vecteurs et S_{sym} pour les entités symboliques. De son côté, le **Module Mise à Jour** décrit en Section 5.5 orchestre la **règle DSL** en version additive ou multiplicative, tout en intégrant des compléments comme l'inhibition compétitive ou la saturation en s'appuyant sur les équations du chapitre 4.

L'organisation en modules garantit à la fois **clarté** et **modularité**. Une règle d'inhibition peut être ajoutée ou modifiée sans affecter la logique de similarité, et inversement.

La question des **interfaces** (Section 5.6) a été abordée en mettant en avant les mécanismes permettant d'**ajouter** ou de **retirer** des entités $\mathcal{E}_i$ en temps réel, impliquant une reconfiguration dynamique de la matrice ω. Cette flexibilité est essentielle dans les environnements évolutifs tels que les flux de données, les systèmes robotiques ou les bases adaptatives. De plus, l'extraction des **clusters** et des **liens forts** a été étudiée afin de faciliter l'intégration avec des modules externes de visualisation ou de classification. Ces interfaces sont conçues pour fonctionner en harmonie avec la logique d'**auto-organisation** du SCN, tout en favorisant son interopérabilité avec d'autres systèmes.

Le chapitre a ensuite approfondi la **distribution** (Section 5.7) et la **sécurité** (Section 5.8). La **distribution**, qu'elle repose sur des **sous-SCN** interconnectés ou sur un modèle de **microservices**, vise à permettre l'expansion d'un SCN de grande envergure sans qu'un point unique de centralisation ne devienne un goulot d'étranglement. Sur le plan **mathématique**, cela revient à fragmenter la matrice ω en **shards** et à assurer un protocole de **synchronisation** efficace, qu'il soit synchrone ou asynchrone, pour préserver la **cohérence** du réseau. Sur le plan **ingénierie**, ce modèle s'appuie sur des solutions de **sharding**, d'**équilibrage de charge** et de **méta-SCN** (Section 5.7.2).

Concernant la **sécurité**, différentes approches ont été introduites, notamment les **logs**, les **watchers** et les **checks d'anomalies** (cf. 5.8.1, 5.8.3), ainsi que des techniques de **basculement automatique** et de **redondance** (5.8.2) visant à protéger un SCN distribué contre les attaques et les pannes matérielles. L'ensemble de ces éléments constitue l'ossature d'une **architecture résiliente**, conçue pour permettre l'exploitation d'un SCN dans des environnements réels ou contraints.

5.10.2. Lien vers Chapitres 6, 7, 8

Au terme de ce **chapitre 5**, où l'on a soigneusement défini la **colonne vertébrale** d'un **SCN** (Synergistic Connection Network) du point de vue **architectural** et **implémentationnel**, il est naturel de se pencher sur la manière dont cette infrastructure va s'articuler avec les développements plus **avancés** des chapitres ultérieurs. Les **modules**, le **partage** ou la **distribution**, la **sécurité**, et l'ensemble des mécanismes présentés servent de **fondation** à des thématiques plus spécialisées, telles que la **multi-échelle** (Chapitre 6), les **optimisations** et **adaptations** (Chapitre 7), ou encore l'**expansion** du DSL à de vastes environnements **multimodaux** (Chapitre 8).

Chap. 6 : Apprentissage Synergique Multi-Échelle

Le **Chapitre 6** explore la gestion d'un **SCN** opérant à **plusieurs niveaux** ou **échelles** d'entités et de synergies. L'objectif est de permettre une décomposition simultanée en **micro-clusters** précis et en **macro-structures** globales, reflétant différents degrés de granularité ou d'abstraction.

Sur le plan **mathématique**, cette approche repose sur la répétition des principes d'**auto-organisation** incluant la règle DSL, l'inhibition et la saturation à plusieurs **couches**, ou sur l'introduction d'un *méta-niveau* chargé de superviser l'assemblage des clusters locaux.

D'un point de vue **architectural**, elle mobilise les concepts de **modularité** (séparation des fonctions de synergie et de mise à jour) et de **distribution** (Section 5.7) pour structurer ces différentes **couches** ou **blocs**.

Le **multi-échelle** enrichit ainsi la capacité d'**auto-organisation** du SCN en introduisant un jeu d'interactions locales et globales, impliquant une orchestration plus subtile. Ce **Chapitre 6** s'appuie donc sur l'**infrastructure** décrite précédemment pour l'adapter à une structure où plusieurs **niveaux** de représentation se connectent et interagissent.

Chap. 7 : Algorithmes d'Optimisation et Méthodes d'Adaptation Dynamique

Le **Chapitre 7** explore des **mécanismes avancés** visant à améliorer la **convergence**, la **stabilité** et le **temps de réponse** d'un SCN. Bien que les **règles** DSL de base (additive, multiplicative,

etc.) offrent déjà un cadre efficace, l'intégration de techniques plus élaborées permet d'atteindre un **minimum d'énergie** plus global et d'éviter certaines bifurcations indésirables.

L'**architecture** décrite dans le **Chapitre 5**, avec la séparation en **modules**, facilite l'ajout de nouvelles méthodes d'optimisation sans modifier la structure fondamentale du SCN. Il devient alors possible d'injecter des algorithmes tels que le **recuit simulé raffiné**, des **heuristiques inspirées de la physique statistique** ou des **descentes adaptatives** directement dans la boucle de mise à jour, tout en conservant intacte l'organisation des **modules de synergie** et la **gestion distribuée** du réseau.

Le **Chapitre 7** mettra ainsi l'accent sur la **performance** et la **résilience algorithmique** d'un SCN, en tirant parti de son architecture modulaire et des protocoles de synchronisation détaillés précédemment.

Chap. 8 : DSL Multimodal

Si l'on souhaite approfondir la **multimodalité**, c'est-à-dire manipuler plusieurs types de données à **grande échelle** (images, texte, audio, signaux divers), le **Chapitre 8** explorera les méthodes nécessaires pour gérer un **SCN** imposant intégrant des entités de natures variées.

Les concepts d'**architecture** (Section 5.9) et de **distribution** (Section 5.7) deviennent alors essentiels. Lorsque le nombre d'entités et de flux multimodaux augmente, l'utilisation de **sharding** pour gérer les liens $O(n^2)$, la **synchronisation inter-blocs**, et la **sécurisation** (Section 5.8) sont indispensables pour garantir une organisation efficace du réseau.

Le **Chapitre 8** mettra ainsi en avant l'application de la **logique DSL** aux **sources massives** (vision, langage, son), en s'appuyant sur la modularité (Module Synergy spécifique à chaque modalité) et sur l'éventuel **recuit** (5.5.4) pour optimiser l'**auto-organisation** d'un SCN multimodal.

5.10.3. Conclusion Générale

Le **chapitre 5** établit la véritable **charnière** entre la formulation mathématique de la **dynamique** d'un **SCN** et les usages avancés (multi-échelle, optimisations, multimodalité) que l'on retrouvera dans les prochains chapitres. Jusque-là, le **chapitre 4** avait détaillé la mise à jour $\omega_{i,j}(t+1) = F\left(\omega_{i,j}(t), S(i,j)\right)$ et ses variations (additive, multiplicative, etc.). Toutefois, ces principes demeurent purement **théoriques** tant qu'ils ne sont pas insérés dans une **architecture** capable d'héberger la matrice ω, de gérer le calcul du score de synergie, et d'assurer la gestion distribuée ou la robustesse nécessaire à un usage concret.

Ce **chapitre 5** a précisément comblé cet écart, en introduisant un **canevas** technique, du niveau des **structures de données** jusqu'aux mécanismes de **sécurité**.

Dans un premier mouvement, on a rappelé que la **taille** du SCN et la nature plus ou moins parcimonieuse de ses liaisons influencent le choix des **structures** de données. Une matrice dense $\{\omega_{i,j}\}$ est privilégiée pour un réseau fortement connecté, tandis que des schémas **spars** comme les listes d'adjacence ou les hashmaps conviennent mieux aux réseaux plus dispersés. D'un point de vue **mathématique**, cela revient à définir le domaine effectif de ω en déterminant quelles paires (i,j) participent à la dynamique et comment optimiser leur stockage.

L'organisation en **modules** s'est ensuite imposée comme un levier d'extensibilité. Le **Module de Synergie** (Section 5.4) encapsule le calcul de $S(i,j)$, qui peut varier en fonction des

modalités sub-symboliques ou symboliques, tandis que le **Module Mise à Jour** (Section 5.5) applique la règle DSL et intègre des mécanismes comme l'inhibition, la saturation ou le recuit. Cette **modularité** permet de modifier indépendamment l'algorithme de synergie ou la règle d'évolution de $\omega_{i,j}(t+1)$ sans perturber l'ensemble du SCN.

Le chapitre a également abordé les **interfaces** (5.6) qui rendent le SCN plus interactif. Il devient possible d'**ajouter** ou de **supprimer** des entités $\mathcal{E}_i$ en temps réel, de **consulter** les clusters et d'identifier les liens les plus significatifs. Sur le plan **ingénierie**, ces interfaces offrent une ouverture vers d'autres modules et facilitent l'intégration avec des outils de visualisation ou d'analyse de graphes, rendant le SCN adaptable aux flux continus de données.

La **distribution** (Section 5.7) s'est imposée comme un point clé pour le passage à l'échelle. Les principes de **sharding**, qui fragmentent la matrice ω en blocs, de **communication inter-blocs**, qui assure la mise à jour des liaisons réparties, et de **synchronisation**, qui garantit la cohérence des calculs malgré les retards, permettent une **scalabilité** horizontale et une meilleure résilience face à des volumes massifs de connexions. D'un point de vue **mathématique**, cela revient à coupler plusieurs opérateurs locaux, où la mise à jour $\omega_{i,j}(t+1) = F\left(\omega_{i,j}(t), S(i,j)\right)$ doit rester stable malgré les contraintes topologiques et les latences.

Enfin, la **sécurité** (Section 5.8) et la **robustesse** complètent l'architecture du SCN pour qu'il puisse fonctionner dans des environnements soumis à des risques d'anomalies ou de pannes. La détection de comportements anormaux, comme une croissance excessive de certaines pondérations, les **logs**, la surveillance par **watchers**, ainsi que la mise en place de mécanismes de **failover** et de **redondance**, garantissent que le SCN conserve son intégrité et sa capacité d'**auto-organisation**, même en présence de perturbations. Le SCN ne se limite donc plus à un simple algorithme, il devient un **système autonome** capable de s'adapter et de survivre à des conditions adverses.

Lien direct avec la Dynamique (Chap. 4).

L'essentiel des équations de mise à jour, comme $\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t) + \eta\left[S(i,j) - \tau\,\omega_{i,j}(t)\right]$, prennent **forme concrète** lorsqu'on sait où stocker ω, comment appeler la fonction $S(i,j)$, et comment manipuler ω en flux continu (ajout/suppression d'entités). Les sections 5.4 (Module Synergie) et 5.5 (Module Mise à Jour) traduisent directement les formulations mathématiques (Chap. 4) en entités logicielles, paramétrables et agencées dans un pipeline.

Porte d'accès aux Chapitres 6, 7 et 8.

Les chapitres qui suivent s'adossent à l'infrastructure présentée ici :

- Le **Chap. 6** traite du "multi-échelle", c'est-à-dire de SCN capables de se structurer selon plusieurs niveaux (micro-clusters, macro-structures). Il mobilise la répartition (Section 5.7) et la modularité (Sections 5.4, 5.5) pour illustrer l'auto-organisation dans des contextes hiérarchiques ou à échelles imbriquées.

- Le **Chap. 7** introduit des **algorithmes d'optimisation** et des heuristiques d'amélioration (recuit plus poussé, stratégies de minimisation d'énergie, etc.). On y voit comment la "colonne vertébrale" du SCN, déjà paramétrée (Section 5.5, 5.5.4), se prête à l'insertion de techniques plus avancées, tant dans un cadre local que distribué.

- Le **Chap. 8** approfondit la notion de **DSL Multimodal**, où l'on manipule potentiellement des flux massifs (vision, audio, langage). Les principes d'architecture

(modules de synergie spécialisés, distribution) et de sécurité (Section 5.8) se révèlent alors indispensables pour supporter la "montée en charge" et la gestion de multiples types d'entités.

Robustesse et Évolutivité.

On retiendra que le **chapitre 5** établit une **colonne vertébrale** pour un SCN robuste et évolutif. Le choix des **structures de données** adapte la représentation de ω selon la densité des connexions, entre matrice dense, format **sparse** ou base NoSQL. L'**organisation modulaire** sépare le **Module de Synergie**, qui calcule $S(i,j)$, du **Module Mise à Jour**, qui applique la dynamique DSL et gère l'inhibition et le recuit. La **distribution à grande échelle** repose sur des stratégies de **sharding** et de **synchronisation** pour assurer la cohérence d'un SCN réparti sur plusieurs nœuds. Les **mécanismes de robustesse**, incluant **logs**, **watchers** et **reprise sur panne**, garantissent la stabilité du système face aux anomalies et interruptions.

L'ensemble confère à la **dynamique** DSL (Chap. 4) une base **solide** pour fonctionner dans des conditions **réalistes** et **évolutives**. On peut ainsi envisager un SCN **déployé en cluster**, mis à jour **en flux**, résistant aux **perturbations**, et capable de **s'adapter** aux évolutions structurelles du réseau.

Conclusion générale du Chapitre 5 :

On dispose désormais des **bases** d'ingénierie et d'architecture pour qu'un **SCN** devienne un système complet, joignant l'**auto-organisation** interne (mise à jour ω) à une gestion modulaire (synergie, distribution, sécurité) et à la **flexibilité** (ajout/suppression d'entités, extraction de liens). Les **chapitres suivants** (6, 7, 8) puiseront dans cette infrastructure pour développer :

- La **multi-échelle** (Chap. 6),
- Les **algorithmes d'optimisation** (Chap. 7),
- Les **extensions multimodales** plus complexes (Chap. 8).

Ce faisant, la **puissance** du Deep Synergy Learning se déploiera pleinement, soutenue par un canevas technique et algorithmique solide.