Librería en Python para Matemáticas II (Álgebra Lineal)

https://github.com/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2

Marcos Bujosa

November 27, 2019

Índice

Declaración de intenciones

Uno de los objetivos que me he propuesto para el curso Matemáticas II (Álgebra Lineal) es mostrar que escribir matemáticas y usar un lenguaje de programación son prácticamente la misma cosa. Este modo de proceder debería ser un ejercicio muy didáctico ya que:

> *Un PC es muy torpe y se limita a ejecutar literalmente lo que se le indica (un PC no interpreta interpolando para intentar dar sentido a lo que se le dice... eso lo hacemos las personas, pero no los ordenadores).*
>
> *Por tanto, este ejercicio nos impone una disciplina a la que en general no estamos acostumbrados:* el ordenador hará lo que queremos solo si las expresiones tienen sentido e indican correctamente lo que queremos. *Si el ordenador no hace lo que queremos, será porque que hemos escrito las ordenes de manera incorrecta (lo que supone que también hemos escrito incorrectamente las expresiones matemáticas).*

Con esta idea en mente:

1. La notación de las notas de clase pretende ser operativa, en el sentido de que su uso se pueda traducir en operaciones que debe realizar el ordenador.

2. Muchas demostraciones son algorítmicas (al menos las que tienen que ver con el método de Gauss), de manera que dichas demostraciones describen literalmente la programación en Python de los correspondientes algoritmos.

Una librería de Python específica para la asignatura

Aunque Python tiene librerías que permiten operar con vectores y matrices, *aquí escribimos nuestra propia librería.* Con ello lograremos que la notación empleada en las notas de clase y las expresiones que usemos en Python se parezcan lo más posible.

ESTE DOCUMENTO DESCRIBE TANTO EL USO DE LA LIBRERÍA COMO EL MODO EN EL QUE ESTÁ PROGRAMADA; PERO NO ES UN CURSO DE PYTHON.

No obstante, y pese a la nota de anterior, he escrito unos notebooks de Jupyter que ofrecen unas breves nociones de programación en Python (muy incompletas). Tenga en cuenta que hay muchos cursos y material disponible en la web para aprender Python y que mi labor es enseñar Álgebra Lineal (no Python).

Para hacer más evidente el paralelismo entre las definiciones de las notas de la asignatura y el código de nuestra librería, las partes del código menos didácticas se relegan al final[1] (véase la sección *Literate programming* en la Página 53). Destacar algunas partes del código permitirá apreciar que las definiciones de las notas de la asignatura son implementadas de manera literal en nuestra librería de Python.

Tutorial previo en un Jupyter notebook

Antes de seguir, repase el Notebook **"Listas y tuplas"** en la carpeta "TutorialPython" en `https://mybinder.org/v2/gh/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2/master`

Y recuerde que **¡hacer matemáticas y programar son prácticamente la misma cosa!**).

[1] aquellas que tienen que ver con la comprobación de que los inputs de las funciones son adecuados, con otras formas alternativas de instanciar clases, con la representación de objetos en Jupyter usando código LaTeX, etc.

Capítulo 1

Código principal de la librería. Clases `Vector`, `Matrix` y `T`

Tutorial previo en un Jupyter notebook

Antes de seguir, mírese el Notebook referente a **"Clases"** en la carpeta "TutorialPython" en
`https://mybinder.org/v2/gh/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2/master`

Usando lo mostrado en el Notebook anterior, definiremos una *clase* en Python para los *vectores*, otra para las *matrices*, otra para las *transformaciones elementales* y otra para las *matrices por bloques* (o matrices particionadas).

1.1 La clase `Vector`

En las notas de la asignatura se dice que

Un *vector* de $\mathbb{R}^n$ es un "sistema" de n números reales;

y dicho sistema se muestra entre paréntesis, bien en forma de fila

$$\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$$

o bien en forma de columna

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Python no posee objetos que sean "vectores". Necesitamos crearlos definiendo una nueva *clase*. El texto de ayuda de la clase `Vector` es auto-explicativo y será lo que Python nos muestre cuando tecleemos `help(Vector)`:

4 ⟨*Texto de ayuda de la clase* `Vector` 4⟩≡

```
"""Clase Vector

Un Vector es una secuencia finita (sistema) de números. Los Vectores se
pueden construir con una lista o tupla de números. Cuando el argumento
es un Vector, se crea una copia del mismo. El atributo 'rpr' indica al
entorno Jupyter si el vector debe ser escrito como fila o como columna.

Parámetros:
    sis (list, tuple, Vector) : Sistema de números. Debe ser una lista o
        tupla de números, o bien otro Vector.
    rpr (str) : Representación en Jupyter ('columna' por defecto).
        Indica la forma de representar el Vector en Jupyter. Si
```

```
            rpr='fila' se representa en forma de fila. En caso contrario se
            representa en forma de columna.

    Atributos:
        lista (list): sistema de números almacenado.
        n     (int) : número de elementos de la lista.
        rpr   (str) : modo de representación en Jupyter.

    Ejemplos:
    >>> # Crear un Vector a partir de una lista (o tupla) de números
    >>> Vector( [1,2,3] )   # con lista
    >>> Vector( (1,2,3) )   # con tupla

    Vector([1,2,3])

    >>> # Crear un Vector a partir de otro Vector
    >>> Vector( Vector([1,2,3]) )

    Vector([1,2,3])
    """
```

This code is used in chunk 6b.
Uses Vector 6b.

1.1.1 Implementación de los vectores en la clase Vector

Tanto las listas (`list`) como las tuplas (`tuple`) de Python son “sistemas” (secuencias finitas de objetos). Así que usaremos las listas (o tuplas) de números para instanciar un `Vector`. El sistema de números contenido en la lista (o tupla) será guardado en el atributo `lista` del `Vector` como una lista (`list`). Veamos cómo:

Método de inicialización Comenzamos la clase con el método de inicio: `def __init__(self, ... )`.

- La clase `Vector` usará dos argumentos (o parámetros). Al primero lo llamaremos `sis` y podrá ser una lista o tupla de números, o bien, otro `Vector`. El segundo argumento (`rpr`) nos permitirá indicar si queremos que el entorno Jupyter Notebook represente el vector en forma horizontal o en vertical. Si no se indica nada, se asumirá que la representación del vector es en vertical (`rpr='columna'`).

- Añadimos un breve texto de ayuda sobre el método `__init__` que Python mostrará con: `help Vector.__init__`

- Por último se definen tres atributos para la clase `Vector`: los atributos `lista`, `rpr` y `n`.
  (El modo de generar el atributo `lista` *depende de qué tipo de objeto es* `sis`*).*

  - Cuando `sis` es una `list` o `tuple`, en el atributo “`lista`” se guarda el correspondiente sistema en forma de una `list` de Python: `self.lista = list(sis)`

  - Cuando `sis` es un `Vector`, sencillamente se copia su atributo `lista`: `self.lista = sis.lista.copy()`

  De esta manera el atributo `self.lista` contendrá la lista ordenada de números que constituye el vector. . . por tanto ***¡ya hemos traducido al lenguaje Python la definición de vector!***

  - Cuando `sis` no es ni lista, ni tupla, ni `Vector`, se muestra un mensaje de error.
  - Por conveniencia definimos un par de atributos más. El atributo `self.n` guarda el número de elementos de la lista. El atributo `self.rpr` indica si el vector ha de ser representado en el entorno Jupyter como fila o como columna (por defecto la representación es en forma de columna).

6a
```
⟨Inicialización de la clase Vector 6a⟩≡
  def __init__(self, sis, rpr='columna'):
      """Inicializa un Vector con una lista, tupla, u otro Vector"""

      if isinstance(sis, (list,tuple)):
          self.lista  =  list(sis)

      elif isinstance(sis, Vector):
          self.lista = sis.lista.copy()

      else:
          raise ValueError('¡el argumento: debe ser una lista, tupla o Vector!')

      self.rpr   =  rpr
      self.n     =  len (self.lista)
```

This code is used in chunk 6b.
Uses `Vector` 6b.

La clase `Vector` junto con el listado de sus métodos aparece en el siguiente recuadro:

6b
```
⟨Definición de la clase Vector 6b⟩≡
  class Vector:
      ⟨Texto de ayuda de la clase Vector 4⟩
      ⟨Inicialización de la clase Vector 6a⟩
      ⟨Operador selector por la derecha para la clase Vector 11⟩
      ⟨Operador selector por la izquierda para la clase Vector 12b⟩
      ⟨Suma de Vectores 17b⟩
      ⟨Producto de un Vector por un escalar a su izquierda 18b⟩
      ⟨Producto de un Vector por un escalar, Vector, o Matrix a su derecha 20a⟩
      ⟨Definición de la igualdad entre Vectores 20b⟩
      ⟨Representación de la clase Vector 41b⟩
```

This code is used in chunk 32.
Defines:
`Vector`, used in chunks 4, 6–8, 10–12, 14–21, 23, 24a, 34, 37b, 38a, 42, 43c, and 46a.

En esta sección hemos visto el texto de ayuda y el método de inicialización. El resto de métodos se describen en secciones posteriores (detrás del nombre de cada trozo de código aparece el número de página donde encontrarlo).

Resumen

Los **vectores** son sistemas de números. La clase `Vector` almacena una `list` de números en su atributo `Vector.lista`:

1. Cuando se instancia un `Vector` con una lista, dicha lista se almacena en el atributo `lista`.
2. Cuando se instancia un `Vector` con otro `Vector`, se copia el atributo `lista` de dicho `Vector`.
3. Asociados a los `Vector`es hay una serie de métodos que veremos más adelante.

1.2 La clase `Matrix`

En las notas de la asignatura usamos la siguiente definición

Llamamos *matriz* de $\mathbb{R}^{m\times n}$ a un sistema de n vectores de $\mathbb{R}^m$.

Cuando representamos las matrices, las encerramos entre corchetes

$$\mathsf{A} = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n], \quad \text{donde las } n \text{ columnas } \boldsymbol{v}_i \text{ son vectores de } \mathbb{R}^m.$$

En nuestra implementación crearemos un objeto, `Matrix`, que almacene en uno de sus atributos una lista de `Vectores` (todos con el mismo número de componentes). Dicha lista será la lista de "columnas" de la matriz. El texto de ayuda de nuestra clase `Matrix` es auto-explicativo y Python lo mostrará si se teclea `help(Matrix)`.

7 ⟨*Texto de ayuda de la clase* `Matrix` 7⟩≡

```
"""Clase Matrix

Una Matrix es una secuencia finita (sistema) de Vectores con el mismo
número de componentes. Una Matrix se puede construir con una lista o
tupla de Vectores con el mismo número de componentes (serán las columnas
de la matriz); una lista (o tupla) de listas o tuplas con el mismo
número de componentes (serán las filas de la matriz); una Matrix (el
valor devuelto será una copia de la Matrix); una BlockMatrix (el valor
devuelto es la Matrix que resulta de unir todos los bloques)

Parámetros:
    sis (list, tuple, Matrix, BlockMatrix): Lista (o tupla) de Vectores
        con el mismo núm. de componentes (columnas de la matriz); o
        lista (o tupla) de listas o tuplas con el mismo núm. de
        componentes (filas de la matriz); u otra Matrix; o una
        BlockMatrix (matriz particionada por bloques).

Atributos:
    lista (list): sistema de Vectores almacenado
    m     (int) : número de filas de la matriz
    n     (int) : número de columnas de la matriz

Ejemplos:
>>> # Crea una Matrix a partir de una lista de Vectores
>>> a = Vector( [1,2] )
>>> b = Vector( [1,0] )
>>> c = Vector( [9,2] )
>>> Matrix( [a,b,c] )

Matrix([Vector([1, 2]), Vector([1, 0]), Vector([9, 2])])

>>> # Crea una Matrix a partir de una lista de listas de números
>>> A = Matrix( [ [1,1,9], [2,0,2] ] )
>>> A

Matrix([Vector([1, 2]), Vector([1, 0]), Vector([9, 2])])

>>> # Crea una Matrix a partir de otra Matrix
>>> Matrix( A )

Matrix([Vector([1, 2]), Vector([1, 0]), Vector([9, 2])])
```

```
>>> # Crea una Matrix a partir de una BlockMatrix
>>> Matrix( {1}|A|{2} )

Matrix([Vector([1, 2]), Vector([1, 0]), Vector([9, 2])])
"""
```

This code is used in chunk 9.
Uses BlockMatrix 48, Matrix 9, and Vector 6b.

1.2.1 Implementación de las matrices en la clase Matrix

Método de inicialización Comenzamos la clase con el método de inicio: `def __init__(self, sis)`.

- Una `Matrix` se instancia con el argumento `sis`, que podrá ser *una lista de* `Vector`*es con el mismo número de componentes (serán sus columnas)*; pero que también se podrá ser una lista (o tupla) de listas o tuplas con el mismo número de componentes (serán sus filas), o una `BlockMatrix`, o bien otra `Matrix`.
- Añadimos un breve texto de ayuda del método `__init__`
- Por último se definen tres atributos para la clase `Matrix`. Los atributos: `lista`, `m` y `n`.
  (El modo de generar el atributo `lista` *depende de qué tipo de objeto es* `sis`*. En el recuadro de más abajo solo se muestra el caso en que* `sis` *es una lista de* `Vector`*es).*
  - El atributo `self.lista` guarda una lista de `Vector`es (que corresponden a la lista de columnas de la matriz). El modo de elaborar dicha lista difiere en función de qué tipo de objeto es el argumento `sis`. Si es
    - `list` (o `tuple`) de `Vector`es: entonces la `self.lista` es `list(sis)` (la lista de `Vector`es introducidos).
    - `list` (o `tuple`) de `lists` o `tuples`: entonces se interpreta que `sis` es la "lista de filas" de una matriz y se reconstruye la lista de columnas correspondiente a dicha matriz.
    - `Matrix`: entonces `self.lista` es una copia de la `lista` de `sis` (`self.lista = sis.lista.copy()`).
    - `BlockMatrix`: se guarda la `lista` de la `Matrix` resultante de unificar los bloques en una única matriz.

    De esta manera el atributo `self.lista` contendrá la lista ordenada de `Vector`es columna que constituye la matriz. . . por tanto ***¡ya hemos traducido al lenguaje Python la definición de matriz!***
  - Por conveniencia definimos un par de atributos más. El atributo `self.m` guarda el número de filas de la matriz, y `self.n` guarda el número de columnas.

8 ⟨*Inicialización de la clase* Matrix 8⟩≡

```
def __init__(self, sis):
    """Inicializa una Matrix"""
    ⟨Creación del atributo lista cuando sis no es una lista (o tupla) de Vectores 42⟩

    elif isinstance(sis[0], Vector):
        ⟨Verificación de que todas las columnas de la matriz tienen la misma longitud 43c⟩
        self.lista  =  list(sis)

    self.m  =  self.lista[0].n
    self.n  =  len(self.lista)
```

This code is used in chunk 9.
Uses Matrix 9 and Vector 6b.

La clase Matrix junto con el listado de sus métodos aparece en el siguiente recuadro:

9 ⟨*Definición de la clase* Matrix 9⟩≡
```
class Matrix:
      ⟨Texto de ayuda de la clase Matrix 7⟩
      ⟨Inicialización de la clase Matrix 8⟩
      ⟨Operador selector por la derecha para la clase Matrix 13⟩
      ⟨Operador transposición para la clase Matrix 14b⟩
      ⟨Operador selector por la izquierda para la clase Matrix 16⟩
      ⟨Suma de Matrix 21b⟩
      ⟨Producto de una Matrix por un escalar a su izquierda 22b⟩
      ⟨Producto de una Matrix por un escalar, un vector o una matriz a su derecha 24a⟩
      ⟨Definición de la igualdad entre dos Matrix 24b⟩
      ⟨Transformaciones elementales de las columnas de una Matrix 30b⟩
      ⟨Transformaciones elementales de las filas de una Matrix 31b⟩
      ⟨Representación de la clase Matrix 43d⟩
```

This code is used in chunk 32.
Defines:
Matrix, used in chunks 7, 8, 12–16, 19–24, 26, 28–31, 35–39, 42, 43a, 46b, 47a, and 51.

En esta sección hemos visto el texto de ayuda y el método de inicialización. El resto de métodos se describen en secciones posteriores.

Resumen

Las **matrices** son sistemas de vectores (dichos vectores son sus columnas). La clase Matrix almacena una list de Vectores en el atributo lista de cuatro modos distintos (el código de los tres últimos se puede consultar en el Capítulo 3 de este documento):

1. Cuando se instancia con una lista de Vectores, dicha lista se almacena en el atributo lista. *Esta es la forma de crear una matriz a partir de sus columnas.*
2. Por comodidad, cuando se instancia una Matrix con una lista (o tupla) de listas o tuplas, se interpreta que dicha lista (o tupla) son las filas de la matriz. Consecuentemente, se dan los pasos para describir dicha matriz como una lista de columnas, que se almacena en el atributo lista. (Esta forma de instanciar una Matrix se usará para programar la **transposición** en la Página 13).
3. Cuando se instancia con otra Matrix, se copia el atributo lista de dicha Matrix.
4. Cuando se instancia con una BlockMatrix, se unifican los bloques en una sola matriz, cuya lista de columnas es copiada en el atributo lista.
5. Asociados a las Matrix hay una serie de métodos que veremos más adelante.

Así pues,

- Vector guarda un sistema de números en su atributo lista
- Matrix guarda una sistema de Vectores en su atributo lista; por tanto:

¡Ya hemos implementado en Python los vectores y matrices tal y como se definen en las notas de la asignatura!

…vamos con el operador selector que nos permitirá definir las operaciones de suma, producto, etc.…

1.3 Operadores selectores

Notación en Mates 2

- Si $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ entonces ${}_{i|}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{|i} = v_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$ entonces $\begin{cases} \mathbf{A}_{|j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, m\} \\ {}_{i|}\mathbf{A} = (a_{i1}, \ldots, a_{im}) \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$.

Pero puestos a seleccionar, aprovechemos la notación para seleccionar más de un elemento:

Notación en Mates 2

- ${}_{(i_1,\ldots,i_r)|}\boldsymbol{v} = \Big(\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_r}\Big) = \boldsymbol{v}_{|(i_1,\ldots,i_r)}$ (es un vector formado por elementos de $\boldsymbol{v}$)
- ${}_{(i_1,\ldots,i_r)|}\mathbf{A} = \Big[{}_{i_1|}\mathbf{A}, \ldots, {}_{i_r|}\mathbf{A}\Big]^{\mathsf{T}}$ (es una matriz cuyas filas son filas de $\mathbf{A}$)
- $\mathbf{A}_{|(j_1,\ldots,j_r)} = \Big[\mathbf{A}_{|j_1}, \ldots, \mathbf{A}_{|j_r}\Big]$ (es una matriz formada por columnas de $\mathbf{A}$)

Queremos manejar una notación similar en Python, así que tenemos que definir el operador selector. Y queremos hacerlo con un método de Python que tenga asociado un símbolo que permita invocar el método de selección

Tutorial previo en un Jupyter notebook

Si no recuerda a qué me estoy refiriendo con los símbolos asociados a métodos, repase de nuevo la sección "Métodos especiales con símbolos asociados" del Notebook referente a **"Clases"** en la carpeta "TutorialPython" en
`https://mybinder.org/v2/gh/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2/master`

Como los métodos `__or__` y `__ror__` tienen asociados la barra vertical a derecha e izquierda, usaremos el siguiente convenio:

Mates II	Python
$\boldsymbol{v}_{\vert i}$	`v|i`
${}_{i\vert}\boldsymbol{v}$	`i|v`
$\mathbf{A}_{\vert j}$	`A|j`
${}_{i\vert}\mathbf{A}$	`i|A`

1.3.1 Operador selector por la derecha para la clase `Vector`.

10 ⟨*Texto de ayuda para el operador selector por la derecha para la clase* `Vector` 10⟩≡

```
"""Selector por la derecha

Extrae la i-ésima componente del Vector, o genera un nuevo vector con
las componentes indicadas en una lista o tupla (los índices comienzan
por la posición 1).
```

```
  Parámetros:
      i (int, list, tuple): Índice (o lista de índices) de los elementos
          a seleccionar.

  Resultado:
      número: Cuando i es int, devuelve el componente i-ésimo del Vector.
      Vector: Cuando i es list o tuple, devuelve el Vector formado por los
          componentes indicados en la lista o tupla de índices.

  Ejemplos:
  >>> # Selección de una componente
  >>> Vector([10,20,30]) | 2

  20

  >>> # Creación de un sub-vector a partir de una lista o tupla de índices
  >>> Vector([10,20,30]) | [2,1,2]
  >>> Vector([10,20,30]) | (2,1,2)

  Vector([20, 10, 20])
  """
```

This code is used in chunk 11.
Uses `Vector` 6b.

Implementación del operador selector por la derecha para la clase `Vector`.

Cuando el argumento `i` es un número entero (`int`), seleccionamos el correspondiente elemento del atributo `lista` del `Vector` (recuerde que en Python los índices de objetos iterables comienzan en cero, por lo que para seleccionar el elemento i-ésimo de `lista`, escribimos `lista[i-1]`; así `a|1` debe seleccionar el primer elemento del atributo `lista`, es decir `a.lista[0]`).

Una vez hemos definido el operador "`|`" cuando el argumento `i` es un entero (`int`), podemos usar el método (`self|a`) para definir el operador cuando el argumento `i` es una lista o tupla `(list,tuple)` de índices (y así generar un `Vector` con la lista de componentes indicadas).

11 ⟨*Operador selector por la derecha para la clase* `Vector` 11⟩≡

```
  def __or__(self,i):
      ⟨Texto de ayuda para el operador selector por la derecha para la clase Vector 10⟩
      if isinstance(i,int):
          return self.lista[i-1]

      elif isinstance(i, (list,tuple) ):
          return Vector ([ (self|a) for a in i ])
```

This code is used in chunk 6b.
Uses `Vector` 6b.

1.3.2 Operador selector por la izquierda para la clase Vector.

12a ⟨*Texto de ayuda para el operador selector por la izquierda para la clase* `Vector` 12a⟩≡

```
"""Selector por la izquierda

Hace lo mismo que el método __or__ solo que operando por la izquierda
"""
```

This code is used in chunk 12b.

Implementación del operador selector por la derecha para la clase Vector.

Como hace lo mismo que el selector por la derecha, basta con llamar al selector por la derecha: `self|i`

12b ⟨*Operador selector por la izquierda para la clase* `Vector` 12b⟩≡

```
def __ror__(self,i):
    ⟨Texto de ayuda para el operador selector por la izquierda para la clase Vector 12a⟩
    return self | i
```

This code is used in chunk 6b.

1.3.3 Operador selector por la derecha para la clase Matrix.

12c ⟨*Texto de ayuda para el operador selector por la derecha para la clase* `Matrix` 12c⟩≡

```
"""
Extrae la i-ésima columna de Matrix; o crea una Matrix con las columnas
indicadas; o crea una BlockMatrix particionando una Matrix por las
columnas indicadas (los índices comienzan por la posición 1)

Parámetros:
    j (int, list, tuple): Índice (o lista de índices) de las columnas a
          seleccionar
      (set): Conjunto de índices de las columnas por donde particionar

Resultado:
    Vector: Cuando j es int, devuelve la columna j-ésima de Matrix.
    Matrix: Cuando j es list o tuple, devuelve la Matrix formada por las
        columnas indicadas en la lista o tupla de índices.
    BlockMatrix: Si j es un set, devuelve la BlockMatrix resultante de
        particionar la matriz por las columnas indicadas en el conjunto

Ejemplos:
>>> # Extrae la j-ésima columna la matriz
>>> Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])]) | 2
```

```
    Vector([0,2])

    >>> # Matrix formada por Vectores columna indicados en la lista (o tupla)
    >>> Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])]) | [2,1]
    >>> Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])]) | (2,1)

    Matrix( [Vector([0,2]), Vector([1,0])] )

    >>> # BlockMatrix correspondiente a la partición por la segunda columna
    >>> Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])]) | {2}

    BlockMatrix( [ [ Matrix([Vector([1, 0]), Vector([0, 2])]),
                     Matrix([Vector([3, 0])]) ] ] )
    """
```

This code is used in chunk 13.
Uses BlockMatrix 48, Matrix 9, and Vector 6b.

Implementación del operador selector por la derecha para la clase Matrix

Como el objeto `Matrix` es una lista de `Vector`es, el código para el selector por la derecha es casi idéntico al de la clase `Vector`. Como antes, una vez definido el operador "|" por la derecha que selecciona una única columna, usaremos repetidamente dicho procedimiento `(self|a)` para crear una `Matrix` formada por las columnas indicadas en una lista (o tupla) de índices.
(*la partición en bloques de columnas de matrices se verá más adelante, en la sección de la clase* `BlockMatrix`).

13 ⟨*Operador selector por la derecha para la clase* Matrix 13⟩≡

```
  def __or__(self,j):
      ⟨Texto de ayuda para el operador selector por la derecha para la clase Matrix 12c⟩
      if isinstance(j,int):
          return self.lista[j-1]

      elif isinstance(j, (list,tuple)):
          return Matrix ([ self|a for a in j ])

      ⟨Partición de una matriz por columnas de bloques 49c⟩
```

This code is used in chunk 9.
Uses Matrix 9.

1.3.4 Operador transposición de una Matrix.

Implementar el operador selector por la izquierda es algo más complicado que en el caso de los `Vector`es, pues ahora no es lo mismo operar por la derecha que por la izquierda. Como paso intermedio definiremos el operador transposición, que después usaremos para definir el operador selector por la izquierda (selección de filas).

Notación en Mates 2

Denotamos la *transpuesta* de $\mathbf{A}$ con: $\mathbf{A}^{\intercal}$; y es la matriz tal que $\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$; $\quad j = 1:n.$

14a ⟨*Texto de ayuda para el operador transposición de la clase* `Matrix` 14a⟩≡

```
"""
Devuelve la traspuesta de una matriz

Ejemplo:
>>> ~Matrix([Vector([1]), Vector([2]), Vector([3])])

Matrix([Vector([1, 2, 3])])
"""
```

This code is used in chunk 14b.
Uses `Matrix` 9 and `Vector` 6b.

Implementación del operador transposición.

Desgraciadamente Python no dispone del símbolo “ ᵀ”. Así que hemos de usar un símbolo distinto para indicar transposición. Y además no tenemos muchas opciones ya que el conjunto de símbolos asociados a métodos especiales es muy limitado.

Tutorial previo en un Jupyter notebook

Si no recuerda a qué me estoy refiriendo con los símbolos asociados a métodos, repase de nuevo la sección “Métodos especiales con símbolos asociados” del Notebook referente a **“Clases”** en la carpeta “TutorialPython” en
`https://mybinder.org/v2/gh/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2/master`

Para implementar la transposición haremos uso del método `__invert__`, que tiene asociado el símbolo del la tilde “`~`”, símbolo que además deberemos colocar a la izquierda de la matriz.

Mates II	Python
$\mathsf{A}^{\intercal}$	`~A`

Recuerde que con la segunda forma de instanciar una `Matrix` (véase el resumen de la página 9), creamos una matriz a partir de la lista de sus filas. Así podemos construir fácilmente el operador trasposición. Basta instanciar `Matrix` con la lista de los n atributos “`lista`” correspondientes a los consecutivos n `Vector`es columna.
(Recuerde que `range(1,self.m+1)` recorre los números: $1, 2, \ldots, m$).

14b ⟨*Operador transposición para la clase* `Matrix` 14b⟩≡

```
def __invert__(self):
    ⟨Texto de ayuda para el operador transposición de la clase Matrix 14a⟩
    return Matrix ([ (self|j).lista for j in range(1,self.n+1) ])
```

This code is used in chunk 9.
Uses `Matrix` 9.

1.3.5 Operador selector por la izquierda para la clase Matrix.

15 ⟨*Texto de ayuda para el operador selector por la izquierda para la clase* Matrix 15⟩≡

```
"""Operador selector por la izquierda

Extrae la i-ésima fila de Matrix; o crea una Matrix con las filas
indicadas; o crea una BlockMatrix particionando una Matrix por las filas
indicadas (los índices comienzan por la posición 1)

Parámetros:
    i (int, list, tuple): Índice (o lista de índices) de las filas a
         seleccionar
      (set): Conjunto de índices de las filas por donde particionar

Resultado:
    Vector: Cuando i es int, devuelve la fila i-ésima de Matrix.
    Matrix: Cuando i es list o tuple, devuelve la Matrix cuyas filas son
        las indicadas en la lista de índices.
    BlockMatrix: Cuando i es un set, devuelve la BlockMatrix resultante
        de particionar la matriz por las filas indicadas en el conjunto

Ejemplos:
>>> # Extrae la j-ésima fila de la matriz
>>> 2 | Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])])

Vector([0, 2, 0])

>>> # Matrix formada por Vectores fila indicados en la lista (o tupla)
>>> [1,1] | Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])])
>>> (1,1) | Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])])

Matrix([Vector([1, 1]), Vector([0, 0]), Vector([3, 3])])

>>> # BlockMatrix correspondiente a la partición por la primera fila
>>> {1} | Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2])])

BlockMatrix( [ [Matrix([Vector([1]),Vector([0])])],
               [Matrix([Vector([0]),Vector([2])])] ] )
"""
```

This code is used in chunk 16.
Uses BlockMatrix 48, Matrix 9, and Vector 6b.

Implementación del operador por la izquierda para la clase Matrix.

Usando el operador selector de columnas y la transposición, es inmediato definir un operador selector de *filas*… ¡que son las columnas de la matriz transpuesta!

`(~self)|j`

(para recordar que se ha obtenido una fila de la matriz, representamos el Vector en horizontal: `rpr='fila'`)

Una vez definido el operador por la izquierda, podemos usarlo repetidas veces el procedimiento `(a|self)` para crear una Matrix con las filas filas indicadas en una lista o tupla de índices.
(*la partición en bloques de filas de matrices se verá más adelante, en la sección de la clase* BlockMatrix).

16 ⟨*Operador selector por la izquierda para la clase* `Matrix` 16⟩≡

```
  def __ror__(self,i):
      ⟨Texto de ayuda para el operador selector por la izquierda para la clase Matrix 15⟩
      if isinstance(i,int):
          return Vector ( (~self)|i, rpr='fila' )

      elif isinstance(i, (list,tuple)):
          return Matrix ( [ (a|self).lista  for a in i ] )

      ⟨Partición de una matriz por filas de bloques 49b⟩
```

This code is used in chunk 9.
Uses `Matrix` 9 and `Vector` 6b.

Resumen

¡Ahora también hemos implementado en Python el operador "|" (tanto por la derecha como por la izquierda tal) y como se define en las notas de la asignatura!

Ya estamos listos para definir el resto de operaciones con vectores y matrices...

1.4 Operaciones con vectores y matrices

Una vez definidas las clases `Vector` y `Matrix` junto con los respectivos operadores selectores "|", ya podemos definir las operaciones de suma y producto. Fíjese que las definiciones de las operaciones en Python (usando el operador "|") son idénticas a las empleadas en las notas de la asignatura:

1.4.1 Suma de Vectores

En las notas de la asignatura hemos definido la suma de dos vectores de $\mathbb{R}^n$ como el vector tal que

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}} \quad \text{para} \quad i = 1:n.$$

Usando el operador selector podemos "literalmente" transcribir esta definición

```
Vector ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

donde `self` es el vector, `other` es otro vector y `range(1,self.n+1)` es el rango de valores: $1:n$.

17a ⟨*Texto de ayuda para el operador suma en la clase* `Vector` 17a⟩≡

```
"""Devuelve el Vector resultante de sumar dos Vectores

Parámetros:
    other (Vector): Otro vector con el mismo número de elementos

Ejemplo
>>> Vector([10, 20, 30]) + Vector([-1, 1, 1])

Vector([9, 21, 31])
"""
```

This code is used in chunk 17b.
Uses `Vector` 6b.

Implementación

17b ⟨*Suma de* `Vectores` 17b⟩≡

```
def __add__(self, other):
    ⟨Texto de ayuda para el operador suma en la clase Vector 17a⟩
    if isinstance(other, Vector):
        if self.n == other.n:
            return Vector ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,self.n+1) ])

        else:
            print("error en la suma: vectores con distinto número de componentes")
```

This code is used in chunk 6b.
Uses `Vector` 6b.

1.4.2 Producto de un `Vector` por un escalar a su izquierda

En las notas hemos definido el producto de $\boldsymbol{a}$ por un escalar x a su izquierda como el vector tal que

$$\boxed{\left(x\boldsymbol{a}\right)_{|i} = x\left(\boldsymbol{a}_{|i}\right)} \quad \text{para} \quad i = 1:n.$$

cuya transcripción será

```
Vector ([ x*(self|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

donde `self` es el vector y `x` es un número entero, de coma flotante o una fracción (`int, float, Fraction`).

18a ⟨*Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda en la clase* `Vector` 18a⟩≡

```
"""Multiplica un Vector por un número a su izquierda

Parámetros:
    x (int, float o Fraction): Número por el que se multiplica

Resultado:
    Vector: Cuando x es int, float o Fraction, devuelve el Vector que
        resulta de multiplicar cada componente por x

Ejemplo:
>>> 3 * Vector([10, 20, 30])

Vector([30, 60, 90])
"""
```

This code is used in chunk 18b.
Uses `Vector` 6b.

Implementación

18b ⟨*Producto de un* `Vector` *por un escalar a su izquierda* 18b⟩≡

```
def __rmul__(self, x):
    ⟨Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda en la clase Vector 18a⟩
    if isinstance(x, (int, float, Fraction)):
        return Vector ([ x*(self|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

This code is used in chunk 6b.
Uses `Vector` 6b.

1.4.3 Producto de un `Vector` por un escalar, un `Vector` o una `Matrix` a su derecha

- En las notas se acepta que el producto de un vector $\boldsymbol{a}$ por un escalar es conmutativo. Por tanto,

$$\boxed{\boldsymbol{a}x = x\boldsymbol{a}}$$

cuya transcripción será

```
x * self
```

donde `self` es el vector y `x` es un número entero, o de coma flotante o una fracción (`int, float, Fraction`).

- El *producto punto* (o producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$) de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{x}$ en $\mathbb{R}^n$ es

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} \;=\; a_1x_1+\cdots+a_nx_n \;=\; \sum_{i=1}^n a_ix_i} \quad \text{para} \quad i=1:n.$$

  cuya transcripción será

```
sum([ (self|i)*(x|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

  donde `self` es el vector $\boldsymbol{a}$ y `x` es otro vector (`Vector`).

- El producto de un vector $\boldsymbol{a}$ de $\mathbb{R}^n$ por una matriz $\mathbf{X}$ con n filas es

$$\boxed{\boldsymbol{a}\mathbf{X} \;=\; \mathbf{X}^{\intercal}\boldsymbol{a}}$$

  cuya transcripción será

```
(~x) * self
```

  donde `self` es el vector y `x` es una matriz (`Matrix`). Para recordar que es una combinación lineal de las filas, su representación es en forma de fila.

  (la definición del producto de una `Matrix` por un `Vector` a su derecha se verá más adelante.)

19 ⟨*Texto de ayuda para el operador producto por la derecha en la clase* `Vector` 19⟩≡

```
"""Multiplica un Vector por un número, Matrix o Vector a su derecha.

Parámetros:
    x (int, float o Fraction): Número por el que se multiplica
      (Matrix): Matrix con tantas filas como componentes tiene el Vector
      (Vector): Vector con el mismo número de componentes.

Resultado:
    Vector: Cuando x es int, float o Fraction, devuelve el Vector que
       resulta de multiplicar cada componente por x
            Cuando x es Matrix, devuelve el Vector combinación lineal de
       las filas de Matrix (los componentes del Vector son los
       coeficientes de la combinación lineal)
    Número: Cuando x es Vector, devuelve el producto punto entre
       vectores (producto escalar usual en R^n)

Ejemplos:
>>> Vector([10, 20, 30]) * 3

Vector([30, 60, 90])

>>> a = Vector([1, 1])
>>> B = Matrix([Vector([1, 2]), Vector([1, 0]), Vector([9, 2])])
>>> a * B

Vector([3, 1, 11])

>>> Vector([1, 1, 1]) * Vector([10, 20, 30])

60
"""
```

This code is used in chunk 20a.
Uses Matrix 9 and Vector 6b.

Implementación

20a ⟨*Producto de un* Vector *por un escalar,* Vector*, o* Matrix *a su derecha* 20a⟩≡

```
def __mul__(self, x):
    ⟨Texto de ayuda para el operador producto por la derecha en la clase Vector 19⟩
    if isinstance(x, (int, float, Fraction)):
        return x*self

    elif isinstance(x, Matrix):
        if self.n == x.m:
            return Vector( (~x)*self, rpr='fila' )
        else:
            print("error en producto: Vector y Matrix incompatibles")

    elif isinstance(x, Vector):
        if self.n == x.n:
            return sum([ (self|i)*(x|i) for i in range(1,self.n+1) ])
        else:
            print("error: vectores con distinto número de componentes")
```

This code is used in chunk 6b.
Uses Matrix 9 and Vector 6b.

1.4.4 Igualdad entre vectores

Dos vectores son iguales cuando lo son los sistemas de números correspondientes a ambos vectores.

20b ⟨*Definición de la igualdad entre* Vector*es* 20b⟩≡

```
def __eq__(self, other):
    """Indica si es cierto que dos vectores son iguales"""
    return self.lista == other.lista
```

This code is used in chunk 6b.

1.4.5 Suma de matrices

En las notas de la asignatura hemos definido la suma de matrices como la matriz tal que

$$\boxed{(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}} \quad \text{para} \quad i = 1:n.$$

de nuevo, usando el operador selector podemos transcribir literalmente esta definición

```
Matrix ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

donde `self` es la matriz y `other` es otra matriz.

21a ⟨*Texto de ayuda para el operador suma en la clase* `Matrix` 21a⟩≡

```
"""Devuelve la Matrix resultante de sumar dos Matrices

Parámetros:
    other (Matrix): Otra Matrix con el mismo número de filas y columnas

Ejemplo:
>>> A = Matrix( [Vector([1,0]), Vector([0,1])] )
>>> B = Matrix( [Vector([0,2]), Vector([2,0])] )
>>> A + B

Matrix( [Vector([1,2]), Vector([2,1])] )
"""
```

This code is used in chunk 21b.
Uses `Matrix` 9 and `Vector` 6b.

Implementación

21b ⟨*Suma de* `Matrix` 21b⟩≡

```
def __add__(self, other):
    ⟨Texto de ayuda para el operador suma en la clase Matrix 21a⟩
    if isinstance(other,Matrix) and self.m == other.m and self.n == other.n:
        return Matrix ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,self.n+1) ])
    else:
        print("error en la suma: matrices con distinto orden")
```

This code is used in chunk 9.
Uses `Matrix` 9.

1.4.6 Producto de una `Matrix` por un escalar a su izquierda

En las notas hemos definido

- El producto de $\mathbf{A}$ por un escalar x a su izquierda como la matriz tal que

$$\boxed{(x\mathbf{A})_{|j} = x(\mathbf{A}_{|j})} \quad \text{para} \quad i = 1:n.$$

cuya transcripción será:

```
Matrix ([ x*(self|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

donde `self` es la matriz y `x` es un número entero, de coma flotante o una fracción (`int, float, Fraction`).

22a ⟨*Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda en la clase* Matrix 22a⟩≡

```
"""Multiplica una Matrix por un número a su izquierda.

Parámetros:
    x (int, float o Fraction): Número por el que se multiplica

Resultado:
    Matrix: Devuelve el múltiplo de la Matrix

Ejemplo:
>>> 10 * Matrix([[1,2],[3,4]])

Matrix([[10,20], [30,40]])
"""
```

This code is used in chunk 22b.
Uses Matrix 9.

1.4.7 Implementación

22b ⟨*Producto de una* Matrix *por un escalar a su izquierda* 22b⟩≡

```
def __rmul__(self,x):
    ⟨Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda en la clase Matrix 22a⟩
    if isinstance(x, (int, float, Fraction)):
        return Matrix ([ x*(self|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

This code is used in chunk 9.
Uses Matrix 9.

1.4.8 Producto de una `Matrix` por un escalar, un `Vector` o una `Matrix` a su derecha

- En las notas se acepta que el producto de una `Matrix` por un escalar es conmutativo. Por tanto,

  $$\boxed{\mathbf{A}x = x\mathbf{A}}$$

  cuya transcripción será

  ```
  x * self
  ```

  donde `self` es la matriz y `x` es un número entero, o de coma flotante o una fracción (`int, float, Fraction`).

- El producto de $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ por un vector $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$ a su derecha se define como

  $$\boxed{\mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; x_1\mathbf{A}_{|1} + \cdots + x_n\mathbf{A}_{|n} \;=\; \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{A}_{|j}} \qquad \text{para } j = 1:n.$$

  cuya transcripción será

```
sum([ (x|j)*(self|j) for j in range(1,self.n+1) ])
```

donde `self` es el vector y `x` es otro vector (`Vector`).

- El producto de $\underset{m\times k}{\mathbf{A}}$ por otra matriz $\underset{k\times n}{\mathbf{X}}$ de $\mathbb{R}^n$ a su derecha se define como la matriz tal que

$$\boxed{(\mathbf{AX})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_{|j})} \qquad \text{para } j = 1:n.$$

cuya transcripción será

```
Matrix( [ self*(x|j) for j in range(1,x.n+1)] )
```

donde `self` es la matriz y `x` es otra matriz (`Matrix`).

23 ⟨*Texto de ayuda para el operador producto por la derecha en la clase* `Matrix` 23⟩≡

```
"""Multiplica una Matrix por un número, Vector o una Matrix a su derecha

Parámetros:
    x (int, float o Fraction): Número por el que se multiplica
      (Vector): Vector con tantos componentes como columnas tiene Matrix
      (Matrix): con tantas filas como columnas tiene la Matrix

Resultado:
    Matrix: Si x es int, float o Fraction, devuelve la Matrix que
       resulta de multiplicar cada columna por x
    Vector: Si x es Vector, devuelve el Vector combinación lineal de las
       columnas de Matrix (los componentes del Vector son los
       coeficientes de la combinación)
    Matrix: Si x es Matrix, devuelve el producto entre las matrices

Ejemplos:
>>> # Producto por un número
>>> Matrix([[1,2],[3,4]]) * 10

Matrix([[10,20],[30,40]])

>>> # Producto por un Vector
>>> Matrix([Vector([1, 3]), Vector([2, 4])]) * Vector([1, 1])

Vector([3, 7])

>>> # Producto por otra Matrix
>>> Matrix([Vector([1, 3]), Vector([2, 4])]) * Matrix([Vector([1,1])]))

Matrix([Vector([3, 7])])
"""
```

This code is used in chunk 24a.
Uses `Matrix` 9 and `Vector` 6b.

1.4.9 Implementación

24a ⟨*Producto de una* Matrix *por un escalar, un vector o una matriz a su derecha* 24a⟩≡

```
def __mul__(self,x):
    ⟨Texto de ayuda para el operador producto por la derecha en la clase Matrix 23⟩
    if isinstance(x, (int, float, Fraction)):
        return x*self

    elif isinstance(x, Vector):
        if self.n == x.n:
            return sum([(x|j)*(self|j) for j in range(1,self.n+1)], V0(self.m))
        else:
            print("error en producto: vector y matriz incompatibles")

    elif isinstance(x, Matrix):
        if self.n == x.m:
            return Matrix( [ self*(x|j) for j in range(1,x.n+1)] )
        else:
            print("error en producto: matrices incompatibles")
```

This code is used in chunk 9.
Uses Matrix 9, V0 46a, and Vector 6b.

Igualdad entre matrices

Dos matrices son iguales solo cuando lo son las listas correspondientes a ambas.

24b ⟨*Definición de la igualdad entre dos* Matrix 24b⟩≡

```
def __eq__(self, other):
    """Indica si es cierto que dos matrices son iguales"""
    return self.lista == other.lista
```

This code is used in chunk 9.

1.5 La clase transformación elemental T

Notación en Mates 2

Si $\mathbf{A}$ es una matriz, consideramos las siguientes transformaciones:

Tipo I: $\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$ suma λ veces la fila i a la fila j; $\mathbf{A}\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$ lo mismo con las columnas.

Tipo II: $\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$ multiplica la fila i por λ; y $\mathbf{A}\underset{[(\lambda)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$ multiplica la columna j por λ.

Intercambio: $\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$ intercambia las filas i y j; y $\mathbf{A}\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$ intercambia las columnas.

Comentario sobre la notación. Como una trasformación elemental es el resultado del producto con una matriz elemental, esta notación busca el parecido con la notación del producto matricial:

Al poner la *abreviatura* "$\boldsymbol{\tau}$" de la transformación elemental a derecha es como si multiplicáramos la matriz $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ por la derecha por la correspondiente matriz elemental

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1} = \mathbf{A}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1} = \mathbf{A}\mathbf{E}_1 \quad \text{donde} \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1} \quad \text{y donde la matriz } \mathbf{I} \text{ es de orden } n.$$

De manera similar, al poner la *abreviatura* "$\boldsymbol{\tau}$" de la transformación elemental a izquierda, es como si multiplicáramos la matriz $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ por la izquierda por la correspondiente matriz elemental

$$_{\boldsymbol{\tau}_2}\mathbf{A} = {}_{\boldsymbol{\tau}_2}\mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{E}_2\mathbf{A} \quad \text{donde} \quad \mathbf{E}_2 = {}_{\boldsymbol{\tau}_2}\mathbf{I} \quad \text{y donde la matriz } \mathbf{I} \text{ es de orden } m.$$

Con ello se gana, entre otras cosas, que la notación sea asociativa. Pero entonces se plantea ¿qué ventaja tiene introducir en el discurso las transformaciones elementales en lugar de utilizar simplemente matrices elementales?

1. Una matriz cuadrada es un objeto muy pesado... n^2 coeficientes para una matriz de orden n. Afortunadamente una matriz elemental es casi una matriz identidad salvo por uno de sus elementos; por tanto, para describir completamente una matriz elemental basta indicar su orden n y el componente que no coincide con los de la matriz $\mathbf{I}$ de orden n. [1]

2. La ventaja es que las transformaciones elementales omiten el orden n.

Vamos a definir la siguiente traducción a Python de esta notación:

Mates II	Python	Mates II	Python
$\mathbf{A}\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$	`A & T( {i,j} )`	$\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$	`T( {i,j } ) & A`
$\mathbf{A}\underset{[(a)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$	`A & T( (a,j) )`	$\underset{[(a)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$	`T( (a,i) ) & A`
$\mathbf{A}\underset{[(a)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$	`A & T( (a,i,j) )`	$\underset{[(a)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$	`T( (a,i,j) ) & A`

Vemos que:

1. Representar el intercambio con un conjunto, permite admitir la repetición del índice $\{i,i\} = \{i\}$ como un caso especial en el que la matriz no cambia. Esto simplificará el método de Gauss.

2. Tanto para los pares (a,i) como las ternas (a,i,j)
   (a) La columna (fila) que cambia es la del índice que aparece en última posición.
   (b) El escalar aparece en la primera posición y multiplica a la columna (fila) del siguiente índice.

[1] Fíjese que la notación usada en las notas de la asignatura para las matrices elementales $\mathbf{E}$, no las describe completamente (se deja al lector la deducción de cuál es el orden adecuado para poder realizar el producto $\mathbf{AE}$ o $\mathbf{EA}$)

Empleando listas de abreviaturas extendemos la notación para expresar secuencias de transformaciones elementales, es decir, $\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k$. Así logramos la siguiente equivalencia entre expresiones

$$\texttt{T(}\ t_1\texttt{)}\ \texttt{\&}\ \texttt{T(}\ t_2\ \texttt{)}\ \texttt{\&}\cdots\texttt{\&}\ \texttt{T(}\ t_k\texttt{)} \quad = \quad \texttt{T(}\ \texttt{[}t_1\texttt{,}t_2\texttt{,}\ldots\texttt{,}t_k\texttt{]}\ \texttt{)}$$

De esta manera

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} : \qquad \mathbf{A}\ \texttt{\&}\ \texttt{T(}\ t_1\texttt{)}\ \texttt{\&}\ \texttt{T(}\ t_2\ \texttt{)}\ \texttt{\&}\cdots\texttt{\&}\ \texttt{T(}\ t_k\texttt{)} = \mathbf{A}\ \texttt{\&}\ \texttt{T(}\ \texttt{[}t_1\texttt{,}t_2\texttt{,}\ldots\texttt{,}t_k\texttt{]}\ \texttt{)}$$

$$_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{A} : \qquad \texttt{T(}\ t_1\texttt{)}\ \texttt{\&}\ \texttt{T(}\ t_2\ \texttt{)}\ \texttt{\&}\cdots\texttt{\&}\ \texttt{T(}\ t_k\texttt{)}\ \texttt{\&}\ \mathbf{A} = \texttt{T(}\ \texttt{[}t_1\texttt{,}t_2\texttt{,}\ldots\texttt{,}t_k\texttt{]}\ \texttt{)}\ \texttt{\&}\ \mathbf{A}.$$

Si $\mathbf{A}$ es de orden $m \times n$, el primer caso es equivalente a escribir el producto de matrices

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\cdots\mathbf{E}_k \qquad \text{donde } \mathbf{E}_j = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_j} \text{ y donde } \mathbf{I} \text{ es de orden } n.$$

Y el segundo caso es equivalente a escribir el producto de matrices

$$_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\cdots\mathbf{E}_k\mathbf{A} \qquad \text{donde } \mathbf{E}_i = {}_{\boldsymbol{\tau}_i}\mathbf{I} \text{ y donde } \mathbf{I} \text{ es de orden } m.$$

26 ⟨*Texto de ayuda de la clase* T *(Transformación Elemental)* 26⟩≡

```
"""Clase T

T ("Transformación elemental") guarda en su atributo 't' una abreviatura
(o una secuencia de abreviaturas) de transformaciones elementales. Con
el método __and__ actúa sobre otra T para crear una T que es composición
de transformaciones elementales (la lista de abreviaturas), o bien actúa
sobre una Matrix (para transformar sus filas)

Atributos:
    t (set)  : {índice, índice}. Abrev. de un intercambio entre los
                 vectores correspondientes a dichos índices
      (tuple): (índice, número). Abrev. transf. Tipo II que multiplica
                 el vector correspondiente al índice por el número
             : (índice1, índice2, número). Abrev. transformación Tipo I
                 que suma al vector correspondiente al índice1 el vector
                 correspondiente al índice2 multiplicado por el número
      (list) : Lista de conjuntos y tuplas. Secuencia de abrev. de
                 transformaciones como las anteriores.
      (T)    : Transformación elemental. Genera una T cuyo atributo t es
                 una copia del atributo t de la transformación dada
      (list) : Lista de transformaciones elementales. Genera una T cuyo
                 atributo es la concatenanción de todas las abreviaturas
Ejemplos:
>>> # Intercambio entre vectores
>>> T( {1,2} )

>>> # Trasformación Tipo II (multiplica por 5 el segundo vector)
>>> T( (5,2) )

>>> # Trasformación Tipo I (resta el tercer vector al primero)
>>> T( (-1,3,1) )

>>> # Secuencia de las tres transformaciones anteriores
>>> T( [{1,2}, (5,2), (-1,3,1)] )

>>> # T de una T
>>> T( T( (5,5) ) )
```

```
T( (5,2) )

>>> # T de una lista de T's
>>> T( [T([(-8, 2), (2, 1, 2)]), T([(-8, 3), (3, 1, 3)]) ] )

T( [(-8, 2), (2, 1, 2), (-8, 3), (3, 1, 3)] )
"""
```

This code is used in chunk 29c.
Uses Matrix 9 and T 29c.

1.5.1 Implementación

Python ejecuta las órdenes de izquierda a derecha. Fijándonos en la expresión

$$\mathbf{A} \;\&\; \mathtt{T(}\ t_1\mathtt{)} \;\&\; \mathtt{T(}\ t_2\ \mathtt{)} \;\&\cdots\&\; \mathtt{T(}\ t_k\mathtt{)}$$

podríamos pensar que podemos implementar la transformación elemental como un método de la clase `Matrix`. Así, al definir el método `__and__` por la derecha de la matriz podemos indicar que $\mathbf{A}\ \&\ \mathtt{T(}\ t_1\mathtt{)}$ es una nueva matriz con las columnas modificadas. Python no tiene problema en ejecutar $\mathbf{A}\ \&\ \mathtt{T(}\ t_1\mathtt{)}\ \&\ \mathtt{T(}\ t_2\ \mathtt{)}\ \&\cdots\&\ \mathtt{T(}\ t_k\mathtt{)}$ pues ejecutar de izquierda a derecha, es lo mismo que ejecutar $\Big[\big[[\mathbf{A}\ \&\ \mathtt{T(}\ t_1\mathtt{)}]\&\ \mathtt{T(}\ t_2\ \mathtt{)}\big]\&\cdots\Big]\&\ \mathtt{T(}\ t_k\mathtt{)}$ donde la expresión dentro de cada corchete es una `Matrix`, por lo que las operaciones están definidas. La dificultad aparece con

$$\mathtt{T(}\ t_1\mathtt{)} \;\&\; \mathtt{T(}\ t_2\ \mathtt{)} \;\&\cdots\&\; \mathtt{T(}\ t_k\mathtt{)} \;\&\; \mathbf{A}$$

Lo primero que Python tratara de ejecutar es $\mathtt{T(}\ t_1\ \mathtt{)}\ \&\ \mathtt{T(}\ t_2\mathtt{)}$, pero ni $\mathtt{T(}\ t_1\mathtt{)}$ ni $\mathtt{T(}\ t_2\mathtt{)}$ son matrices, por lo que esto no puede ser programado como un método de la clase `Matrix`.

Por tanto, necesitamos definir una nueva clase que almacene las *abreviaturas* "t_i" de las operaciones elementales, de manera que podamos definir $\mathtt{T(}\ t_i\ \mathtt{)}\ \&\ \mathtt{T(}\ t_j\mathtt{)}$, como un método que "compone" dos transformaciones elementales para formar una secuencia de abreviaturas (de operaciones a ejecutar sobre una `Matrix`).

Así pues, definimos un nuevo tipo de objeto: `T` ("transformación elemental") que nos permitirá encadenar transformaciones elementales (es decir, almacenar una lista de abreviaturas). El siguiente código inicializa la clase. El atributo `t` almacenará la abreviatura (o lista de abreviaturas) dada al instanciar `T` o bien creará la lista de abreviaturas a partir de otra `T` (o de una lista de `T`s) empleada para instanciar.

27 ⟨*Inicialización de la clase* `T` *(Transformación Elemental)* 27⟩≡

```
def __init__(self, t):
    """Inicializa una transformación elemental"""
    ⟨Creación del atributo t cuando se intancia con otra T o lista de Ts 44⟩
    else:
        self.t = t
```

This code is used in chunk 29c.

Composición de Transf. element. o llamada al método de transformación de filas de una Matrix

28 ⟨*Texto de ayuda para la composición de Transformaciones Elementales* T 28⟩≡

```
"""Composición de transformaciones elementales (o transformación filas)

Crea una T con una lista de abreviaturas de transformaciones elementales
(o llama al método que modifica las filas de una Matrix)

Parámetros:
    (T): Crea la abreviatura de la composición de transformaciones, es
         decir, una lista de abreviaturas
    (Matrix): Llama al método de la clase Matrix que modifica las filas
         de Matrix
Ejemplos:
>>> # Composición de dos Transformaciones elementales
>>> T( {1, 2} ) & T( (2, 4) )

T( [{1,2}, (2,4)] )

>>> # Composición de dos Transformaciones elementales
>>> T( {1, 2} ) & T( [(2, 4), (2, 1), {3, 1}] )

T( [{1, 2}, (2, 4), (2, 1), {3, 1}] )

>>> # Transformación de las filas de una Matrix
>>> T( [{1,2}, (4,2)] ) & A # multiplica por 4 la segunda fila de A y
                            # luego intercambia las dos primeras filas
"""
```

This code is used in chunk 29a.
Uses Matrix 9 and T 29c.

Describimos la composición de transformaciones T(t_1) & T(t_2) creando una lista de abreviaturas [t_1, t_2] (mediante la concatenación de listas)[2]. Si el atributo del método `__and__` de la clase T es una Matrix, llama al método `__rand__` de la clase Matrix (que transforma las filas de la matriz y que veremos un poco más abajo).

[2]Recuerde que la suma de listas (list + list) concatena las listas

29a ⟨*Composición de Transformaciones Elementales o aplicación sobre las filas de una* `Matrix` 29a⟩≡

```
def __and__(self, other):
    ⟨Texto de ayuda para la composición de Transformaciones Elementales T 28⟩
    ⟨Método auxiliar CreaLista que devuelve listas de abreviaturas 29b⟩
    if isinstance(other, T):
        return T(CreaLista(self.t) + CreaLista(other.t))

    if isinstance(other, Matrix):
        return other.__rand__(self)
```

This code is used in chunk 29c.
Uses `CreaLista` 29b, `Matrix` 9, and `T` 29c.

La composición de transformaciones elementales usa el siguiente procedimiento auxiliar que nos permitirá concatenar listas de abreviaturas.

29b ⟨*Método auxiliar* `CreaLista` *que devuelve listas de abreviaturas* 29b⟩≡

```
def CreaLista(t):
    """Devuelve t si t es una lista; si no devuelve la lista [t]"""
    return t if isinstance(t, list) else [t]
```

This code is used in chunk 29a.
Defines:
`CreaLista`, used in chunk 29a.

La clase `T` junto con el listado de sus métodos aparece en el siguiente recuadro:

29c ⟨*Definición de la clase* `T` *(Transformación Elemental)* 29c⟩≡

```
class T:
    ⟨Texto de ayuda de la clase T (Transformación Elemental) 26⟩
    ⟨Inicialización de la clase T (Transformación Elemental) 27⟩
    ⟨Composición de Transformaciones Elementales o aplicación sobre las filas de una Matrix 29a⟩
    ⟨Representación de la clase T 45⟩
```

This code is used in chunk 32.
Defines:
`T`, used in chunks 26, 28–31, 35–39, 44, and 45.

1.6 Transformaciones elementales de una Matrix

1.6.1 Transformaciones elementales de las columnas de una Matrix

30a ⟨*Texto de ayuda de las transformaciones elementales de las columnas de una* Matrix 30a⟩≡

```
"""Transforma las columnas de una Matrix

Atributos:
    t (T): transformaciones a aplicar sobre las columnas de Matrix

Ejemplos:
>>>  A & T({1,3})                # Intercambia las columnas 1 y 3
>>>  A & T((5,1))                # Multiplica la columna 1 por 5
>>>  A & T((5,2,1))              # suma 5 veces la col. 2 a la col. 1
>>>  A & T([{1,3},(5,1),(5,2,1)])# Aplica la secuencia de transformac.
             # sobre las columnas de A y en el mismo orden de la lista
"""
```

This code is used in chunk 30b.
Uses Matrix 9 and T 29c.

Implementación de la aplicación de las transformaciones elementales sobre las columnas de una Matrix (nótese que hemos incluido el intercambio, aunque usted ya sabe que es una composición de los otros dos tipos de transf.).

30b ⟨*Transformaciones elementales de las columnas de una* Matrix 30b⟩≡

```
def __and__(self,t):
    ⟨Texto de ayuda de las transformaciones elementales de las columnas de una Matrix 30a⟩
    if isinstance(t.t,set):
        self.lista = Matrix( [(self|max(t.t)) if k==min(t.t) else \
                              (self|min(t.t)) if k==max(t.t) else \
                              (self|k) for k in range(1,self.n+1)]).lista.copy()

    elif isinstance(t.t,tuple) and len(t.t) == 2:
         self.lista = Matrix([ t.t[0]*(self|k) if k==t.t[1] else (self|k) \
                               for k in range(1,self.n+1)] ).lista.copy()

    elif isinstance(t.t,tuple) and len(t.t) == 3:
         self.lista = Matrix([ t.t[0]*(self|t.t[1]) + (self|k) if k==t.t[2] else \
                               (self|k) for k in range(1,self.n+1)] ).lista.copy()
    elif isinstance(t.t,list):
         for k in t.t:
             self & T(k)
    return self
```

This code is used in chunk 9.
Uses Matrix 9 and T 29c.

Observación 1. Al actuar sobre `self.lista`, las transformaciones elementales modifican la matriz.

1.6.2 Transformaciones elementales de las filas de una `Matrix`

31a ⟨*Texto de ayuda de las transformaciones elementales de las filas de una* `Matrix` 31a⟩≡

```
"""Transforma las filas de una Matrix

Atributos:
    t (T): transformaciones a aplicar sobre las filas de Matrix

Ejemplos:
>>>  T({1,3})   & A              # Intercambia las filas 1 y 3
>>>  T((5,1))   & A              # Multiplica por 5 la fila 1
>>>  T((5,2,1)) & A              # Suma 5 veces la fila 2 a la fila 1
>>>  T([(5,2,1),(5,1),{1,3}]) & A # Aplica la secuencia de transformac.
            # sobre las filas de A y en el orden inverso al de la lista
"""
```

This code is used in chunk 31b.
Uses `Matrix` 9 and `T` 29c.

Para implementar las transformaciones elementales de las filas usamos el truco de aplicar las operaciones sobre las columnas de la transpuesta y de nuevo transponer el resultado: `~(~self & t)`. Pero hay que recordar que las transformaciones más próximas a la matriz se ejecutan primero, puesto que ${}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\cdots\mathbf{E}_k\mathbf{A}$. Con la función `reversed` aplicamos la sucesión de transformaciones en el orden inverso a como aparecen en la lista:

$$\texttt{T(}[t_1,t_2,\ldots,t_k]\texttt{) \& }\mathbf{A} \quad = \quad \texttt{T(}t_1\texttt{) \&}\cdots\texttt{\& T(}t_{k-1}\texttt{) \& T(}t_k\texttt{) \& }\mathbf{A}$$

31b ⟨*Transformaciones elementales de las filas de una* `Matrix` 31b⟩≡

```
def __rand__(self,t):
    ⟨Texto de ayuda de las transformaciones elementales de las filas de una Matrix 31a⟩
    if isinstance(t.t,set) | isinstance(t.t,tuple):
        self.lista = (~(~self & t)).lista.copy()

    elif isinstance(t.t,list):
        for k in reversed(t.t):
            T(k) & self

    return self
```

This code is used in chunk 9.
Uses `T` 29c.

Observación 2. Al actuar sobre `self.lista`, las transformaciones elementales modifican la matriz.

1.7 Librería completa

Finalmente creamos la librería `notacion.py` concatenando los trozos de código que se describen en este fichero de documentación (recuerde que el número que aparece detrás de nombre de cada trozo de código indica la página donde encontrar el código en este documento).

Pero antes de todo, y para que los vectores funcionen como un espacio vectorial, es esencial importar la clase `Fraction` de la librería `fractions` [3]. Así pues, antes de nada, importamos la clase Fraction de números fraccionarios con el código:

```
from fractions import Fraction
```

32 ⟨*notacion.py* 32⟩≡

```
# coding=utf8

from fractions import Fraction

⟨Método html general 40a⟩
⟨Método latex general 40b⟩
⟨Métodos html y latex para fracciones 41a⟩

⟨Definición de la clase Vector 6b⟩
⟨Definición de la clase Matrix 9⟩
⟨Definición de la clase T (Transformación Elemental) 29c⟩
⟨Definición de la clase BlockMatrix 48⟩

⟨Definición del método particion 49a⟩
⟨Definición del procedimiento de generación del conjunto clave para particionar 51a⟩

⟨Definición de vector nulo: V0 46a⟩
⟨Definición de matriz nula: M0 46b⟩
⟨Definición de la matriz identidad: I 47a⟩

⟨Método pivote calcula el índice del primer coef. no nulo de un Vector a partir de cierta posición 34⟩
⟨Escalonamiento de una matriz mediante eliminación por columnas 35a⟩
⟨Salida de LaTeXdel escalonamiento de una matriz mediante eliminación por columnas 35c⟩
⟨Escalonamiento de una matriz mediante eliminación por columnas (sin divisiones) 36⟩
⟨Salida de LaTeXdel escalonamiento de una matriz mediante eliminación por columnas (sin divisiones) 37a⟩
⟨Escalonamiento de una matriz mediante eliminación por columnas (U) 37b⟩
⟨Escalonamiento de una matriz mediante eliminación por filas (U) 38b⟩
⟨normal 39a⟩
⟨sistema 39b⟩
```

Root chunk (not used in this document).

Consulte el Notebook sobre el **uso de nuestra librería para Mates 2** en la carpeta

[3] el tipo de datos `float` no tiene estructura de cuerpo. Por ello vamos a emplear números fraccionarios del tipo $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros. Así pues, en el fondo estaremos trabajando con vectores de $\mathbb{Q}^n$ (en lugar de vectores de $\mathbb{R}^n$). Más adelante intentaré emplear un cuerpo de números más grande, que incluya números reales tales como $\sqrt{2}$... y también el cuerpo de fracciones de polinomios (para obtener el polinomio característico vía eliminación gaussiana, en lugar de vía determinantes).

"TutorialPython" en
https://mybinder.org/v2/gh/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2/master

Para empaquetar esta librería en el futuro: https://packaging.python.org/tutorials/packaging-projects/

Capítulo 2

Algoritmos del curso

2.1 Escalonamiento de una matríz por eliminación Gaussiana

En las notas de clase llamamos *pivote* (de una columna no nula) a su primer componente no nulo; y *posición de pivote* al índice de la fila en la que está el pivote. Vamos a generalizar esta definición y decir sencillamente que llamamos *pivote* de un `Vector` (no nulo) a su primer componente no nulo; y *posición de pivote* al índice de dicho componente. Así podremos usar la definicón de pivote tanto si programamos el método de eliminación por filas como por columnas.

Por conveniencia, el método `pivote` nos indicará el primer índice mayor que `k` de un componente no nulo del `Vector` (como por defecto `k=0`, si no especificamos el valor de `k`, entonces nos devuelve la posición de pivote de un `Vector`).

34 ⟨*Método* `pivote` *calcula el índice del primer coef. no nulo de un* `Vector` *a partir de cierta posición* 34⟩≡

```
def pivote(v, k=0):
    """
    Devuelve el primer índice(i) mayor que k de un coeficiente(c) no
    nulo del Vector v. En caso de no existir devuelve 0
    """
    return ( [i for i,c in enumerate(v.lista, 1) if (c!=0 and i>k)] + [0] )[0]
```

This code is used in chunk 32.
Defines:
`pivote`, used in chunks 35–39.
Uses `Vector` 6b.

En las notas de la asignatura decimos que la matriz $\mathbf{L}$ *es escalonada*, si toda columna que precede a una no nula $\mathbf{L}_{|k}$ no es nula y su posición de pivote es anterior a la posición de pivote de $\mathbf{L}_{|k}$. Por tanto, en una matriz escalonada por columnas el primer pivote corresponde a la primera columna no nula, el segundo pivote a la segunda colmna no nula, etc. El Teorema del final de las secciones de referencia de la Lección 4 demuestra que toda matriz es escalonable. Y demás nos indica el procedimiento para programar el método.

El procedimento es iterativo. La variable `r` es un contador de pivotes encontrados en la matriz escalonada (inicialmente cero). Vamos proceder iterativamente comenzando por la primera fila. Primero buscamos la posición de pivote de la fila en que vamos a eliminar componentes.

- Si `p` es cero, quiere decir que todos los componentes son cero y hemos acabado con la elminación para esta fila y pasamos a la siguiente.
- Si `p` es positivo, quiere decir que en dicha fila almenos hay un componente distinto de cero en una columna de índice mayor que `r`. Entonces hemos encontrado una nueva columna no nula y consecuentemente hemos encontrado un nuevo pivote. Así que debemos proceder a eliminar de izquierda a derecha hasta anular los componentes de la fila que están más a la izquierda de la posición `r`.

– El contador de pivotes aumenta en una unidad: `r+=1`

– Como en el cuarto caso de la demostración por inducción del teorema, *intercambiamos la posición de las columnas* `p`*-ésima y* `r`*-ésima*: `A & T( {p, r} )` . Nótese que la posición de pivote `p` es necesariamente mayor o igual al número de pivotes encontrado `r` (cuando `p==r` este paso no hace nada, véase la definición de intercambio).

– Como en el tercer caso de la demostración por inducción del teorema, una vez reordenadas las columnas, aplicamos la sucesión de tranformaciones elementales Tipo I, `(Fraction(-(i|A|j),(i|A|r)), r, j)` :

$$\underset{\left[\left(\left(\frac{-a_{ij}}{a_{ir}}\right)\right)\boldsymbol{r}+\boldsymbol{j}\right]}{\boldsymbol{\tau}}, \quad \text{con} \quad j = r : n.$$

Tenga en cuenta que en el teorema sólo se indica el paso para la primera fila no nula (es decir, para `r=1`).[1] Pero en este algorimto se continúa fila a fila con el mismo procedimiento hasta escalonar toda la matriz.

35a ⟨*Escalonamiento de una matriz mediante eliminación por columnas* 35a⟩≡

```
class GCL(Matrix):
    def __init__(self, data):
        """Escalona una Matrix con eliminación por columnas (transf. Gauss)"""
        A = Matrix(data)
        r = 0
        for i in range(1,A.m+1):
           p = pivote((i|A),r)
           if p > 0:
              r += 1
              A & T( {p, r} )
              A & T( [(Fraction(-(i|A|j),(i|A|r)), r, j) for j in range(r+1,A.n+1)] )

        super(self.__class__ ,self).__init__(A.lista)
```

This code is used in chunk 32.
Uses `Matrix` 9, `pivote` 34, and `T` 29c.

35b ⟨*Definición del método* `PasosYEscritura` 35b⟩≡

```
def PasosYEscritura(A,TE,cadena=str()):
    """Aplica TE a la matriz A y escribe en LaTeX los pasos dados"""
    A & TE
    cadena = cadena + '\\xrightarrow{' + latex(TE) + '}' + latex(A)
    return cadena
```

This code is used in chunks 35c, 37a, and 38a.

35c ⟨*Salida de LaTeXdel escalonamiento de una matriz mediante eliminación por columnas* 35c⟩≡

```
class LL(Matrix):
    def __init__(self, data):
```

[1] pues por hipótesis de inducción se supone que la submatriz **B** es escalonable

```
        """Escalona una Matrix con eliminación por columnas (transf. Gauss)"""
        ⟨Definición del método PasosYEscritura 35b⟩
        A      = Matrix(data)
        cadena = latex(data)
        r = 0
        for i in range(1,A.m+1):
           p = pivote((i|A),r)
           if p > 0:
              r += 1
              if p != r:                            # si realmente hay un intercambio
                  cadena = PasosYEscritura(A, T({p,r}), cadena)

              pasos = T([(Fraction(-(i|A|j),(i|A|r)),r,j) for j in range(r+1,A.n+1) \
                                       if (i|A|j) ]) # aquellos que no eliminan "ceros"

              if pasos.t:
                  cadena = PasosYEscritura(A, pasos, cadena)

        self.cadena = cadena

        super(self.__class__ ,self).__init__(A.lista)
```

This code is used in chunk 32.
Uses `Matrix` 9, `pivote` 34, and `T` 29c.

Este procedimiento da lugar a operaciones con fracciones, ya que para eliminar el número b usando a, la estrategia seguida es:

$$b - \left(\frac{b}{a}\right)a = 0;$$

así, en un solo paso se elimina b restándole un múltiplo de a. Pero para escalonar una matriz con componentes enteros no es necesario trabajar con fracciones. Podemos eliminar el número b usando a encadenando dos operaciones:

$$(-a)b + ba = 0.$$

Es decir, multiplicamos b por a y luego restamos ba. Del modo análogo, podemos aplicar la sucesión de pares de tranformaciones elementales Tipo II y Tipo I:

$$\texttt{T([(-(i|A|r), j), ((i|A|j), r, j)])} \longrightarrow \underset{[(-a_{ir})\boldsymbol{j}][(a_{ij})\boldsymbol{r}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}\quad\boldsymbol{\tau}}, \quad \text{con} \quad j = r:n.$$

36 ⟨*Escalonamiento de una matriz mediante eliminación por columnas (sin divisiones)* 36⟩≡

```
  class GCLsd(Matrix):
      def __init__(self, data):
          """Escalona una Matrix con eliminación por columnas (sin div.)"""
          A = Matrix(data)
          r = 0
          for i in range(1,A.m+1):
             p = pivote((i|A),r)
             if p > 0:
                r += 1
                A & T( {p, r} )
                A & T([ T([(-(i|A|r), j), ((i|A|j), r, j)]) for j in range(r+1,A.n+1)])

          super(self.__class__ ,self).__init__(A.lista)
```

This code is used in chunk 32.
Uses `Matrix` 9, `pivote` 34, and `T` 29c.

37a ⟨*Salida de LaTeXdel escalonamiento de una matriz mediante eliminación por columnas (sin divisiones)* 37a⟩≡

```
class LLsd(Matrix):
    def __init__(self, data):
        """Escalona una Matrix con eliminación por columnas (sin div.)"""
        ⟨Definición del método PasosYEscritura 35b⟩
        A      = Matrix(data)
        cadena = latex(data)
        r = 0
        for i in range(1,A.m+1):
           p = pivote((i|A),r)
           if p > 0:
              r += 1
              paso = T( {p, r} )
              if p != r:                           # si realmente hay un intercambio
                  cadena = PasosYEscritura(A, T({p,r}), cadena)
              paso = T([ T([(-(i|A|r), j), ((i|A|j), r, j)]) for j in range(r+1,A.n+1) \
                                       if (i|A|j) ]) # aquellos que no eliminan "ceros"

              if paso.t:
                  cadena = PasosYEscritura(A,paso,cadena)

        self.cadena = cadena

        super(self.__class__ ,self).__init__(A.lista)
```

This code is used in chunk 32.
Uses `Matrix` 9, `pivote` 34, and `T` 29c.

También es arbitrario el orden en que se triangula la matriz. Por ejemplo, podemos obtener una matriz triangular superior mediante eliminación por columnas si en lugar de "ir de arriba a abajo" y de "izquierda a derecha" (escalonando desde la esquina NorOeste a la esquina SurEste: NO→SE), comenzamos por las filas inferiores y realizando la elimnación de derecha a izquierda (NO←SE). Por ejemplo

37b ⟨*Escalonamiento de una matriz mediante eliminación por columnas (U)* 37b⟩≡

```
class GCU(Matrix):
    def __init__(self, data):
        """Escalona una Matrix con eliminación por columnas (transf. Gauss)"""
        A = Matrix(data)
        r = 0
        for i in reversed(range(1,A.m+1)):
           p = pivote( Vector((i|A).lista[::-1]), r)
           if p > 0:
              r += 1
              A & T( {A.n-p+1, A.n-r+1} )
              A & T( [ (Fraction(-(i|A|j),(i|A|(A.n-r+1))), A.n-r+1, j ) \
```

```
                                   for j in reversed(range(1,A.n-r+1)) ] )

        super(self.__class__ ,self).__init__(A.lista)
```

This definition is continued in chunk 38a.
This code is used in chunk 32.
Uses `Matrix` 9, `pivote` 34, `T` 29c, and `Vector` 6b.

38a ⟨*Escalonamiento de una matriz mediante eliminación por columnas (U)* 37b⟩+≡

```
class LaTeXGCU(Matrix):
    def __init__(self, data):
        """Escalona una Matrix con eliminación por columnas (transf. Gauss)"""
        ⟨Definición del método PasosYEscritura 35b⟩
        A      = Matrix(data)
        cadena = latex(data)
        r = 0
        for i in reversed(range(1,A.m+1)):
           p = pivote( Vector((i|A).lista[::-1]), r)
           if p > 0:
              r += 1
              if p != r:                           # si realmente hay un intercambio
                  cadena = PasosYEscritura(A, T({A.n-p+1, A.n-r+1}), cadena)

              pasos = T([ (Fraction(-(i|A|j), (i|A|(A.n-r+1))), A.n-r+1, j ) \
                          for j in reversed(range(1,A.n-r+1)) if (i|A|j)] )
              if pasos.t:
                  cadena = PasosYEscritura(A, pasos, cadena)

        self.cadena = cadena

        super(self.__class__ ,self).__init__(A.lista)
```

This code is used in chunk 32.
Uses `Matrix` 9, `pivote` 34, `T` 29c, and `Vector` 6b.

En la mayoría de los libros de Álgebra Lineal, la eliminación gaussiana consiste en lograr una matriz triangular superior mediante operaciones con las *filas* siguiendo el esquema (NO→SE):

38b ⟨*Escalonamiento de una matriz mediante eliminación por filas (U)* 38b⟩≡

```
class Uf(Matrix):
    def __init__(self, data):
        """Escalona una Matrix con eliminación por filas (transf. Gauss)"""
        A = Matrix(data)
        r = 0
        for j in range(1,A.n+1):
           p = pivote((A|j),r)
           if p > 0:
              r += 1
```

```
                T( {p, r} ) & A
                T( [(Fraction(-(i|A|j),(r|A|j)), r, i) for i in range(r+1,A.m+1)] ) & A

         super(self.__class__ ,self).__init__(A.lista)
```

This code is used in chunk 32.
Uses `Matrix` 9, `pivote` 34, and `T` 29c.

¡Pruebe con otras posibilidades!... aunque no era necesario programar esto, pues `~L(~A)` es lo mismo que `Uf(A)`

39a ⟨*normal* 39a⟩≡

```
class Normal(Matrix):
    def __init__(self, data):
        """Escalona por Gauss obteniendo una matriz cuyos pivotes son unos"""
        A = Matrix(data); r = 0
        self.rank = []
        for i in range(1,A.n+1):
           p = pivote((i|A),r)
           if p > 0:
              r += 1
              A & T( {p, r} )
              A & T( (1/Fraction(i|A|r), r) )
              A & T( [ (-(i|A|k), r, k) for k in range(r+1,A.n+1)] )

           self.rank+=[r]

        super(self.__class__ ,self).__init__(A.lista)
```

This code is used in chunk 32.
Uses `Matrix` 9, `pivote` 34, and `T` 29c.

Con este código ya podemos hacer muchísimas cosas. Por ejemplo, ¡eliminación gaussiana para encontrar el espacio nulo de una matriz!

39b ⟨*sistema* 39b⟩≡

```
def homogenea(A):
     """Devuelve una BlockMatriz con la solución del problema homogéneo"""
     stack=Matrix(BlockMatrix([[A],[I(A.n)]]))
     soluc=Normal(stack)
     col=soluc.rank[A.m-1]
     return {A.m} | soluc | {col}
```

This code is used in chunk 32.
Uses `BlockMatrix` 48 and `Matrix` 9.

Capítulo 3

Otros trozos de código

3.1 Métodos de representación para el entorno Jupyter

El método `html`, escribe el inicio y el final de un párrafo en html y en medio del párrafo escribirá la cadena `TeX`; que contendrá el código LaTeX de las expresiones matemáticas que queremos que se muestren en pantalla cuando usamos Jupyter Notebook. En el navegador, la librería MathJax de Javascript se encargará de convertir la expresión LaTeX en la grafía correspondiente.

40a ⟨*Método html general* 40a⟩≡

```
def html(TeX):
    """ Plantilla HTML para insertar comandos LaTeX """
    return "<p style=\"text-align:center;\">$" + TeX + "$</p>"
```

This code is used in chunk 32.

El método `latex`, convertirá en cadena de caracteres los inputs de tipo `str`, `float` o `int` [1], y en el resto de casos llamara al método `latex` de la clase desde la que se invocó a este método (es un truqui recursivo para que trate de manera parecida la expresiones en LaTeX y los tipos de datos que corresponden a números `int` o `float`).

40b ⟨*Método latex general* 40b⟩≡

```
def latex(a):
     if isinstance(a,float) | isinstance(a,int) | isinstance(a,str):
         return str(a)
     else:
         return a.latex()
```

This code is used in chunk 32.

Si el objeto a representar no es un número de coma flotante (`float`) ni tampoco un entero (`int`), el método general `latex` llamará el método `latex` de la clase correspondiente. Por tanto, si `a` es un `Vector`, una `Matrix`, o una transformación elemental (`T`), se llama al método `a.latex` definido en la clase correspondiente a dicho objeto `a`.[2] Sin

[1] resulta que para los tipos de datos `int` y `float` no es posible definir un nuevo método de representación. Afortunadamente la cadena de caracteres que representa el número nos vale perfectamente en ambos casos (tanto para los números enteros, `int`, como los números con decimales, `float`).

[2] más adelante tendré que incluir métodos de representación para otros tipos de datos, por ejemplo para poder representar vectores o matrices con polinomios.

embargo, la clase `Fraction` no tiene definidos los métodos de representación `html` o `latex`. Así pues, para representar fracciones necesitamos incorporar estos métodos en la preexistente clase `Fraction` que hemos importado desde la librería `fractions`. Primero definimos el método `_repr_html_fraction` (que sencillamente llamara al método `latex`) y luego definimos el método `latex_fraction` (en el nombre de ambos métodos he incluido la coletilla `fraction` para recordar que son los métodos que usaremos para la clase `fraction`). Si en LaTeX queremos representar la frración $\frac{a}{b}$ escribimos el código: `\frac{a}{b}`. Pero cuando el denominador es $b = 1$, no nos gusta escribir $\frac{a}{1}$, preferimos mostrar solamente el numerador a. Esto es precisamente lo que hace el método `latex_fraction` de más abajo.

Finalmente, con la función `setattr`, añadimos a la clase `Fraction` un método que se llamará '`_repr_html_`' (y que hace lo que hemos indicado al definir `_repr_html_fraction`), y un método que se llamará '`latex`' (y que hace los que hemos indicado al definir `latex_fraction`).

41a ⟨*Métodos html y latex para fracciones* 41a⟩≡
```
def _repr_html_fraction(self):
    return html(self.latex())

def latex_fraction(self):
    if self.denominator == 1:
        return repr(self.numerator)
    else:
        return "\\frac{"+repr(self.numerator)+"}{"+repr(self.denominator)+"}"

setattr(Fraction, '_repr_html_', _repr_html_fraction)
setattr(Fraction, 'latex', latex_fraction)
```
This code is used in chunk 32.

3.2 Completando la clase `Vector`

3.2.1 Representación de la clase `Vector`

Ahora necesitamos indicar a Python cómo representar los objetos de tipo `Vector`.

Los vectores, son secuencias finitas de números que representaremos con paréntesis, bien en forma de fila

$$\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

o bien en forma de columna

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Definimos tres representaciones distintas. Una para la línea de comandos de Python de manera que escriba `Vector` y a continuación encierre la representación de `self.lista` (el sistema de números), entre paréntesis. Por ejemplo, si la lista es `[a,b,c]`, Python nos mostrará en la linea de comandos: `Vector([a,b,c])`.

La representación en LaTeX encierra un vector (en forma de fila o de columna) entre paréntesis; y es usada a su vez por la representación html usada por el entorno Jupyter.

41b ⟨*Representación de la clase* `Vector` 41b⟩≡
```
def __repr__(self):
    """ Muestra el vector en su representación python """
    return 'Vector(' + repr(self.lista) + ')'
```

```
def _repr_html_(self):
    """ Construye la representación para el entorno jupyter notebook """
    return html(self.latex())

def latex(self):
    """ Construye el comando LaTeX """
    if self.rpr == 'fila':
        return '\\begin{pmatrix}' + \
               ',&'.join([latex(self|i)   for i in range(1,self.n+1)]) + \
               '\\end{pmatrix}'
    else:
        return '\\begin{pmatrix}' + \
               '\\\\'.join([latex(self|i) for i in range(1,self.n+1)]) + \
               '\\end{pmatrix}'
```

This code is used in chunk 6b.

3.3 Completando la clase `Matrix`

3.3.1 Otras formas de instanciar una `Matrix`

Si se introduce una lista (tupla) de listas o tuplas, creamos una matriz fila a fila. Si se introduce una `Matrix` creamos una copia de la matriz. Si se introduce una `BlockMatrix` se elimina el particionado y que crea una única matriz. Si el argumento no es correcto se informa con un error.

42 ⟨*Creación del atributo* `lista` *cuando* `sis` *no es una lista (o tupla) de* `Vector`*es* 42⟩≡

```
if isinstance(sis, Matrix):
    self.lista  =  sis.lista.copy()

elif isinstance(sis, BlockMatrix):
    self.lista  =  [Vector([ sis.lista[i][j]|k|s  \
                          for i in range(sis.m) for s in range(1,(sis.lm[i])+1) ])  \
                          for j in range(sis.n) for k in range(1,(sis.ln[j])+1) ]

⟨Verificación de que al instanciar Matrix el argumento sis es indexable 43a⟩

elif isinstance(sis[0], (list, tuple)):
    ⟨Verificación de que todas las filas de la matriz tendrán la misma longitud 43b⟩
    self.lista  =  [ Vector([ sis[i][j] for i in range(len(sis   )) ]) \
                                        for j in range(len(sis[0])) ]
```

This code is used in chunk 8.
Uses `BlockMatrix` 48, `Matrix` 9, and `Vector` 6b.

3.3.2 Códigos que verifican que los argumentos son correctos

43a ⟨*Verificación de que al instanciar* `Matrix` *el argumento* `sis` *es indexable* 43a⟩≡
```
elif not isinstance(sis, (list, tuple)):
    raise ValueError(\
'¡argumento: list (tuple) de Vectores (lists o tuples);  BlockMatrix; o Matrix!')
```

This code is used in chunk 42.
Uses `BlockMatrix` 48 and `Matrix` 9.

43b ⟨*Verificación de que todas las filas de la matriz tendrán la misma longitud* 43b⟩≡
```
if not all ( (type(sis[0])==type(v)) and (len(sis[0])==len(v)) for v in iter(sis) ):
    raise ValueError('no todas son listas o no tienen la misma longitud!')
```

This code is used in chunk 42.

43c ⟨*Verificación de que todas las columnas de la matriz tienen la misma longitud* 43c⟩≡
```
if not all ( isinstance(v, Vector) and (sis[0].n == v.n) for v in iter(sis)):
    raise ValueError('no todos son vectores, o no tienen la misma longitud!')
```

This code is used in chunk 8.
Uses `Vector` 6b.

3.3.3 Representación de la clase `Matrix`

Y como en el caso de los vectores, construimos los dos métodos de presentación. Uno para la consola de comandos que escribe `Matrix` y entre paréntesis la lista de listas (es decir la lista de filas); y otro para el entorno Jupyter (que a su vez usa la representación LaTeX que representa las matrices entre corchetes como en las notas de la asignatura)

43d ⟨*Representación de la clase* `Matrix` 43d⟩≡
```
def __repr__(self):
    """ Muestra una matriz en su representación python """
    return 'Matrix(' + repr(self.lista) + ')'

def _repr_html_(self):
    """ Construye la representación para el  entorno jupyter notebook """
    return html(self.latex())

def latex(self):
    """ Construye el comando LaTeX """
    return '\\begin{bmatrix}' + \
            '\\\\'.join(['&'.join([latex(i|self|j) for j in range(1,self.n+1) ]) \
                                                   for i in range(1,self.m+1) ]) + \
           '\\end{bmatrix}'
```

This code is used in chunk 9.

3.4 Completando la clase T

3.4.1 Otras formas de instanciar una T

Si se instancia T usando otra Transfomación elemental, sencillamente se copia el atributo `t`. Si se instancia T usando una lista (no vacía) de Transfomaciones elementales, el atributo `t` será la lista de abreviaturas resultante de concatenar las abreviaturas de todas las Transfomaciones elementales de la lista empleada en la instanciación.

44 ⟨*Creación del atributo* `t` *cuando se intancia con otra* `T` *o lista de* `T`*s* 44⟩≡

```
if isinstance(t, T):
    self.t = t.t

elif isinstance(t, list) and t and isinstance(t[0], T):
        self.t = [val for sublist in [x.t for x in t] for val in sublist]
```

This code is used in chunk 27.
Uses `T` 29c.

3.4.2 Representación de la clase T

De nuevo construimos los dos métodos de presentación. Uno para la consola de comandos que escribe `T` y entre paréntesis la abreviatura (una tupla o un conjunto) que representa la transformación. Así,

- `T( {1, 5} )` : intercambio entre los vectores primero y quinto.
- `T( (6, 2) )` : multiplica por seis el segundo vector.
- `T( (-1, 2, 3) )`: resta el segundo vector al tercero.

La otra representación es para el entorno Jupyter y replica la notación usada en los apuntes de la asignatura:

Python	Representación en Jupyter
`T( {1, 5} )`	$\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{5}]}{\boldsymbol{\tau}}$
`T( (6, 2) )`	$\underset{[(6)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$
`T( (-1, 2, 3) )`	$\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$

Los apuntes de la asignatura usan una notación matricial, y por tanto es una notación que discrimina entre operaciones sobre las filas o las columnas, situando los operadores a la izquierda o a la derecha de la matriz. En este sentido, nuestra notación en Python hace lo mismo. Así, en la siguiente tabla, la columna de la izquierda corresponde a operaciones sobre las filas, y la columna de la derecha a las operaciones sobre las columnas:

Mates II	Python	Mates II	Python
$\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$	`T( {i,j} ) & A`	$\mathbf{A}\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$	`A & T( {i,j} )`
$\underset{[(a)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$	`T( (a,i) ) & A`	$\mathbf{A}\underset{[(a)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$	`A & T( (a,j) )`
$\underset{[(a)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$	`T( (a,i,j) ) & A`	$\mathbf{A}\underset{[(a)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$	`A & T( (a,i,j) )`

Secuencias de transformaciones

Considere las siguientes transformaciones

- multiplicar por 2 el primer vector, cuya abreviatura es: `(2, 1)`
- intercambiar el tercer vector por cuarto, cuya abreviatura es: `{3, 4}`

Para indicar una secuencia que contiene ambas transformaciones, usaremos una lista de abreviaturas: `[(2,1), {3,4}]`. De esta manera, cuando componemos ambas operaciones: `T( (2, 1) ) & T( {3, 4} )`, nuestra librería nos devuelve la trasformación composición de las dos operaciones **en el orden en el que han sido escritas**:

al escribir `T( (2, 1) ) & T( {3, 4} )` Python nos devuelve `T( [ (1, 2), {3, 4} ] )`

Por tanto, si queremos realizar dichas operaciones sobre las columnas de la matriz **A**, podemos hacerlo de dos formas:

- `A & T( (2, 1) ) & T( {3, 4} )` (indicando las transformaciones de una en una)
- `A & T( [(2, 1), {3, 4}] )` (usando la transformación composición de todas ellas)

y si queremos operar sobre la filas hacemos exactamente igual, pero a la izquierda de la matriz

- `T( (2, 1) ) & T( {3, 4} ) & A`
- `T( [(2, 1), {3, 4}] ) & A`

Representación de una secuencia de transformaciones.

Representación en la consola de Python	Representación en Jupyter
`T( [ (2, 1), (1, 3, 2) ] )`	$\underset{\begin{subarray}{c}\left[(2)\mathbf{1}\right]\\ \left[(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}\right]\end{subarray}}{\tau}$

45 ⟨*Representación de la clase* `T` 45⟩≡

```
def __repr__(self):
    """ Muestra T en su representación python """
    return 'T(' + repr(self.t) + ')'

def _repr_html_(self):
    """ Construye la representación para el entorno jupyter notebook """
    return html(self.latex())

def latex(self):
    """ Construye el comando LaTeX """
    def simbolo(t):
        """Escribe el símbolo que denota una trasformación elemental particular"""
        if isinstance(t,set):
            return '\\left[\\mathbf{' + latex(min(t)) + \
              '}\\rightleftharpoons\\mathbf{' + latex(max(t)) + '}\\right]'
        if isinstance(t,tuple) and len(t) == 2:
            return '\\left[\\left(' + \
              latex(t[0]) + '\\right)\\mathbf{'+ latex(t[1]) + '}\\right]'
        if isinstance(t,tuple) and len(t) == 3:
            return '\\left[\\left(' + latex(t[0]) + '\\right)\\mathbf{' + \
              latex(t[1]) + '}' + '+\\mathbf{' + latex(t[2]) + '} \\right]'

    if isinstance(self.t, (set, tuple) ):
        return '\\underset{' + simbolo(self.t) + '}{\\mathbf{\\tau}}'

    elif isinstance(self.t, list):
        return '\\underset{\\begin{subarray}{c} ' + \
              '\\\\'.join([simbolo(i) for i in self.t])  + \
              '\\end{subarray}}{\\mathbf{\\tau}}'
```

This code is used in chunk 29c.
Uses T 29c.

3.5 Vectores y Matrices especiales

Notación en Mates 2

Los vectores cero **0** y las matrices cero **0** se pueden implementar como subclases de la clase `Vector` y `Matrix` (pero tenga en cuenta que Python necesita conocer el número de componentes del vector y el orden de la matriz):

`V0` es una subclase de `Vector` (por tanto hereda los atributos de la clase `Vector`), pero el código inicia (y devuelve) un objeto de su superclase, es decir, inicia y devuelve un `Vector`.

46a ⟨*Definición de vector nulo:* `V0` 46a⟩≡
```
class V0(Vector):
    def __init__(self, n ,rpr = 'columna'):
        """ Inicializa el vector nulo de n componentes"""
        super(self.__class__ ,self).__init__([0 for i in range(n)], rpr)
```

This code is used in chunk 32.
Defines:
`V0`, used in chunks 24a and 46b.
Uses `Vector` 6b.

Y lo mismo hacemos para matrices

46b ⟨*Definición de matriz nula:* `M0` 46b⟩≡
```
class M0(Matrix):
    def __init__(self, m, n=None):
        """ Inicializa una matriz nula de orden n """
        n = m if n is None else n

        super(self.__class__ ,self).__init__([ V0(m) for j in range(n)])
```

This code is used in chunk 32.
Uses `Matrix` 9 and `V0` 46a.

También debemos definir la matriz identidad de orden n (y sus filas y columnas). En los apuntes de clase no solemos indicar expresamente el orden de la matriz identidad (pues normalmente se sobrentiende por el contexto). Pero esta habitual imprecisión no nos la podemos permitir con el ordenador.

Notación en Mates 2

- I (de orden n) es la matriz tal que ${}_{i|}\mathsf{I}_{|j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$.

47a ⟨*Definición de la matriz identidad:* `I` 47a⟩≡

```
class I(Matrix):
    def __init__(self, n):
        """ Inicializa la matriz identidad de tamaño n """
        super(self.__class__ ,self).__init__(\
                          [[(i==j)*1 for i in range(n)] for j in range(n)])
```

This code is used in chunk 32.
Uses `Matrix` 9.

3.6 La clase `BlockMatrix`. Matrices particionadas

Las matrices particionadas no son tan importantes para seguir el curso, aunque si se usan en esta librería. Piense que cuando invierte una matriz o resuelve un sistema de ecuaciones, usa una matriz particionada (con dos bloques: una matriz arriba, y la matriz identidad con idéntico número de columnas debajo). Como esta librería replica lo que se ve en clase, es necesario definir las matrices particionadas. Si quiere, ***puede saltarse esta sección****: el modo de particionar una matriz es sencillo y se puede aprender rápidamente con el siguiente Notebook*

Tutorial previo en un Jupyter notebook

Este Notebook es un ejemplo sobre el **uso de nuestra librería para Mates 2** en la carpeta "TutorialPython" en
`https://mybinder.org/v2/gh/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2/master`

Las matrices por bloques o cajas $\boxed{\mathbf{A}}$ son tablas de matrices de modo que todas las matrices de una misma fila comparten el mismo número de filas, y todas las matrices de una misma columna comparten el mismo número de columnas. Por ello al "pegar" todas ellas obtenemos una gran matriz.

El argumento de inicialización `sis` es una lista (o tupla) de listas de matrices, cada una de las listas de matrices es una fila de bloques (o submatrices con el mismo número de filas).

El atributo `self.m` contiene el número de filas (de bloques o submatrices) y `self.n` contiene el número de columnas (de bloques o submatrices). Añadimos el atributo `self.ln`, que es una lista con el número de filas que tienen las submatrices de cada fila, y `self.lm` con el número de columnas de las submatrices de cada columna.

47b ⟨*Inicialización de la clase* `BlockMatrix` 47b⟩≡

```
def __init__(self, sis):
    """Inicializa una BlockMatrix con una lista de listas de matrices"""
    self.lista = list(sis)
    self.m     = len(sis)
    self.n     = len(sis[0])
    self.lm    = [fila[0].m for fila in sis]
    self.ln    = [c.n for c in sis[0]]
```

This code is used in chunk 48.
Uses BlockMatrix 48.

La clase `BlockMatrix` junto con el listado de sus métodos aparece en el siguiente recuadro:

48 ⟨*Definición de la clase* `BlockMatrix` 48⟩≡
```
class BlockMatrix:
        ⟨Inicialización de la clase BlockMatrix 47b⟩
        ⟨Repartición de las columnas de una BlockMatrix 50a⟩
        ⟨Repartición de las filas de una BlockMatrix 50b⟩
        ⟨Representación de la clase BlockMatrix 51d⟩
```
This code is used in chunk 32.
Defines:
`BlockMatrix`, used in chunks 7, 12c, 15, 39b, 42, 43a, 47b, 49, and 50.

3.6.1 Particionado de matrices

Vamos a completar las capacidades de los operadores "`i|`" y "`|j`" sobre matrices. Hasta ahora, si los argumentos `i` o `j` eran *enteros* (`int`), se seleccionaba una fila o una columna respectivamente; y si los argumentos `i` o `j` eran *listas o tuplas* de índices, se generaba una submatriz con las filas o las columnas indicadas.

Aquí, si los argumentos `i` o `j` son conjuntos de enteros, asumimos que dicho números enteros indican las filas o columnas por las que se debe particionar una `Matrix` según el siguiente cuadro explicativo:

Notación en Mates 2

- Si $p \leq q \in \mathbb{N}$ denotaremos con $(p:q)$ a la secuencia $p, p+1, \dots, q$, (es decir, a la lista ordenada de los números de $\{k \in \mathbb{N} | p \leq k \leq q\}$).
- Si $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$ con $i_1 < \dots < i_r \leq m$ donde m es el número de filas de $\mathbf{A}$, entonces ${}_{\{i_1,\dots,i_r\}|}\mathbf{A}$ es la matriz de bloques
$$ {}_{\{i_1,\dots,i_r\}|}\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} {}_{(1:i_1)|}\mathbf{A} \\ \hline {}_{(i_1+1:i_2)|}\mathbf{A} \\ \hline \vdots \\ \hline {}_{(i_r+1:m)|}\mathbf{A} \end{array}\right] $$
- Si $j_1, \dots, j_s \in \mathbb{N}$ con $j_1 < \dots < j_s \leq n$ donde n es el número de columnas de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}_{|\{j_1,\dots,j_s\}}$ es la matriz de bloques
$$ \mathbf{A}_{|\{j_1,\dots,j_s\}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_{|(1:j_1)} & \mathbf{A}_{|(j_1+1:j_2)} & \cdots & \mathbf{A}_{|(j_s+1:n)} \end{array}\right] $$

Comencemos por la partición de índices a partir de un conjunto y un número (correspondiente al último índice).

49a ⟨*Definición del método* `partcion` 49a⟩≡

```
def particion(s,n):
    """ genera la lista de particionamiento a partir de un conjunto y un número
    >>> particion({1,3,5},7)

    [[1], [2, 3], [4, 5], [6, 7]]
    """
    p = list(s | set([0,n]))
    return [ list(range(p[k]+1,p[k+1]+1)) for k in range(len(p)-1) ]
```

This code is used in chunk 32.

y ahora el método de partición por filas y por columnas resulta inmediato:

49b ⟨*Partición de una matriz por filas de bloques* 49b⟩≡

```
elif isinstance(i,set):
    return BlockMatrix ([ [a|self] for a in particion(i,self.m) ])
```

This code is used in chunk 16.
Uses `BlockMatrix` 48.

49c ⟨*Partición de una matriz por columnas de bloques* 49c⟩≡

```
elif isinstance(j,set):
    return BlockMatrix ([ [self|a for a in particion(j,self.n)] ])
```

This code is used in chunk 13.
Uses `BlockMatrix` 48.

Pero aún nos falta algo:

Notación en Mates 2

- Si $i_1,\ldots,i_r \in \mathbb{N}$ con $i_1 < \ldots < i_r \leq m$ donde m es el número de filas de $\mathbf{A}$ y $j_1,\ldots,j_s \in \mathbb{N}$ con $j_1 < \ldots < j_s \leq n$ donde n es el número de columnas de $\mathbf{A}$ entonces

$$
{}_{\{i_1,\ldots,i_y\}|}\mathbf{A}_{|\{j_1,\ldots,j_s\}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
{}_{(1:i_1)|}\mathbf{A}_{|(1:j_1)} & {}_{(1:i_1)|}\mathbf{A}_{|(j_1+1:j_2)} & \cdots & {}_{(1:i_1)|}\mathbf{A}_{|(j_s+1:n)} \\ \hline
{}_{(i_1+1:i_2)|}\mathbf{A}_{|(1:j_1)} & {}_{(i_1+1:i_2)|}\mathbf{A}_{|(j_1+1:j_2)} & \cdots & {}_{(i_1+1:i_2)|}\mathbf{A}_{|(j_s+1:n)} \\ \hline
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline
{}_{(i_k+1:m)|}\mathbf{A}_{|(1:j_1)} & {}_{(i_k+1:m)|}\mathbf{A}_{|(j_1+1:j_2)} & \cdots & {}_{(i_k+1:m)|}\mathbf{A}_{|(j_s+1:n)}
\end{array}\right]
$$

es decir, queremos poder particionar una `BlockMatrix`. Los casos interesantes son cuando particionamos por el lado contrario por el que se particionó la matriz de partida, es decir,

$$_{\{i_1,\ldots,i_r\}|}\left(\mathsf{A}_{|\{j_1,\ldots,j_s\}}\right) \qquad \text{y} \qquad \left(_{\{i_1,\ldots,i_r\}|}\mathsf{A}\right)_{|\{j_1,\ldots,j_s\}}$$

que, por supuesto, debe dar el mismo resultado. Para dichos casos, programamos el siguiente código que particiona una `BlockMatrix`. Primero el procedimiento para particionar por columnas cuando hay una única columna de matrices (`self.n == 1`). El caso general se verá más tarde:

50a ⟨*Repartición de las columnas de una* `BlockMatrix` 50a⟩≡

```
  def __or__(self,j):
      """ Reparticiona por columna una matriz por cajas """
      if isinstance(j,set):
          if self.n == 1:
              return BlockMatrix([ [ self.lista[i][0]|a  \
                                      for a in particion(j,self.lista[0][0].n)] \
                                      for i in range(self.m) ])

          ⟨Caso general de repartición por columnas 51b⟩
```

This code is used in chunk 48.
Uses `BlockMatrix` 48.

y hacemos lo mismo para particionar por filas cuando `self.m == 1` (la matriz por bloques tiene una única fila):

50b ⟨*Repartición de las filas de una* `BlockMatrix` 50b⟩≡

```
      def __ror__(self,i):
          """ Reparticiona por filas una matriz por cajas """
          if isinstance(i,set):
              if self.m == 1:
                  return BlockMatrix([[ a|self.lista[0][j]  \
                                        for j in range(self.n) ] \
                                        for a in particion(i,self.lista[0][0].m)])

              ⟨Caso general de repartición por filas 51c⟩
```

This code is used in chunk 48.
Uses `BlockMatrix` 48.

Falta implementar el caso general. Debemos decidir el significado de reparticionar una matriz por el mismo lado por el que ya ha sido particionada. Seguiremos un criterio práctico... eliminar el anterior particionado y aplicar el nuevo:

$$\begin{aligned}
_{\{i'_1,\ldots,i'_r\}|}\left(_{\{i_1,\ldots,i_k\}|}\mathsf{A}_{|\{j_1,\ldots,j_s\}}\right) &= {}_{\{i'_1,\ldots,i'_r\}|}\mathsf{A}_{|\{j_1,\ldots,j_s\}}\\
\left(_{\{i_1,\ldots,i_k\}|}\mathsf{A}_{|\{j_1,\ldots,j_s\}}\right)_{|\{j'_1,\ldots,j'_r\}} &= {}_{\{i_1,\ldots,i_k\}|}\mathsf{A}_{|\{j'_1,\ldots,j'_r\}}
\end{aligned}$$

Para ello nos viene bien extraer el conjunto selector a partir del resultado:

51a ⟨*Definición del procedimiento de generación del conjunto clave para particionar* 51a⟩≡

```
def key(L):
    """Genera el conjunto clave a partir de una secuencia de tamaños
    número
    >>> key([1,2,1])

    {1, 3, 4}
    """
    return set([ sum(L[0:i]) for i in range(1,len(L)+1) ])
```

This code is used in chunk 32.

Así, los casos generales consisten en reparticionar de nuevo:

51b ⟨*Caso general de repartición por columnas* 51b⟩≡

```
elif self.n > 1:
     return (key(self.lm) | Matrix(self)) | j
```

This code is used in chunk 50a.
Uses `Matrix` 9.

51c ⟨*Caso general de repartición por filas* 51c⟩≡

```
elif self.m > 1:
    return i | (Matrix(self) | key(self.ln))
```

This code is used in chunk 50b.
Uses `Matrix` 9.

Observación 3. El método `__or__` está definido para conjuntos . . . realiza la unión. Por tanto si `A` es una matriz, la orden `{1,2}|({3}|A)` no da igual que `({1,2}|{3})|A`. La primera es igual da `{1,2}|A`, mientras que la segunda da `{1,2,3}|A`.

3.6.2 Representación de la clase `BlockMatrix`

A continuación definimos las reglas de representación para las matrices por bloques. `Matrix` y `BlockMatrix` son objetos distintos. Los bloques se separan con lineas verticales y horizontales; pero si hay un único bloque, no habrá ninguna línea vertical u horizontal por medio de la representación de la `BlockMatrix`. Así, si una matriz por bloques tienen un único bloque, pintaremos una caja alrededor para distinguirla de una matriz ordinaria.

51d ⟨*Representación de la clase* `BlockMatrix` 51d⟩≡

```
def __repr__(self):
```

```
        """ Muestra una matriz en su representación Python """
        return 'BlockMatrix(' + repr(self.lista) + ')'

    def _repr_html_(self):
        """ Construye la representación para el  entorno Jupyter Notebook """
        return html(self.latex())

    def latex(self):
        """ Escribe el código de LaTeX """
        if self.m == self.n == 1:
            return \
              '\\begin{array}{|c|}' + \
              '\\hline ' + \
              '\\\\ \\hline '.join( \
                    ['\\\\'.join( \
                    ['&'.join( \
                    [latex(self.lista[0][0]) ]) ]) ])  + \
              '\\\\ \\hline ' + \
              '\\end{array}'
        else:
            return \
              '\\left[' + \
              '\\begin{array}{' + '|'.join([n*'c' for n in self.ln])  + '}' + \
              '\\\\ \\hline '.join( \
                    ['\\\\'.join( \
                    ['&'.join( \
                    [latex(self.lista[i][j]|k|s) \
                    for j in range(self.n) for k in range(1,self.ln[j]+1) ]) \
                    for s in range(1,self.lm[i]+1) ]) for i in range(self.m) ])  + \
              '\\\\' + \
              '\\end{array}' + \
              '\\right]'
```

This code is used in chunk 48.

Appendix A

Sobre este documento

Con ánimo de que esta documentación sea más didáctica, en el Capítulo 1 muestro las partes más didácticas del código, y relego las otras al Capítulo 3. Así puedo destacar cómo la librería de Python es una implementación literal de las definiciones dadas en mis notas de la asignatura de Mates II. Para lograr presentar el código en un orden distinto del que realmente tiene en la librería uso la herramienta noweb. Una breve explicación aparece en la siguiente sección...

Literate programming con noweb

Este documento está escrito usando noweb. Es una herramienta que permite escribir a la vez tanto código como su documentación. El código se escribe a trozos o "chunks" como por ejemplo este:

53a ⟨*Chunk de ejemplo que define la lista* `a` 53a⟩≡

```
a = ["Matemáticas II es mi asignatura preferida", "Python mola", 1492, "Noweb"]
```

This code is used in chunk 53c.

y este otro chunk:

53b ⟨*Segundo chunk de ejemplo que cambia el último elemento de la lista* `a` 53b⟩≡

```
a[-1] = 10
```

This code is used in chunk 53c.

Cada chunk recibe un nombre (que yo uso para describir lo que hace el código dentro del chunk). Lo maravilloso de este modo de programar es que dentro de un chunk se pueden insertar otros chunks. Así, podemos programar el siguiente guión de Python (`EjemploLiterateProgramming.py`) que enumera los elementos de una tupla y después hace unas sumas:

53c ⟨*EjemploLiterateProgramming.py* 53c⟩≡

```
⟨Chunk de ejemplo que define la lista a 53a⟩
⟨Segundo chunk de ejemplo que cambia el último elemento de la lista a 53b⟩

for indice, item in enumerate(a, 1):
    print (indice, item)
```

⟨*Chunk final que indica qué tipo de objeto es* `a` *y hace unas sumas* 56b⟩
Root chunk (not used in this document).

Este modo de escribir el código permite destacar unas partes y pasar por alto otras. Por ejemplo, *del chunk del recuadro de arriba me interesa que se vea el código del bucle que permite enumerar los elementos de una lista*. Lo demás es accesorio y se puede consultar en los correspondientes chunks. Como el nombre de dichos chunks es auto-explicativo, mirando el recuadro anterior es fácil hacerse una idea de que hace el programa "`EjemploLiterateProgramming.py`" en su conjunto.

Fíjese que el número al final del nombre de cada chunk corresponde a la página donde se puede consultar su código. Por ejemplo, el último chunk de este ejemplo se encuentra en la Página 56 de este documento.

El código completo del ejemplo usado para explicar cómo funciona el "Literate Programming" queda así:

```
a = ["Matemáticas II es mi asignatura preferida", "Python mola", 1492, "Noweb"]
a[-1] = 10

for indice, item in enumerate(a, 1):
    print (indice, item)

type(a)
2+2
3+20
```

A.1 Secciones de código

Licencia

56a ⟨*Copyright y licencia GPL* 56a⟩≡

```
# Copyright (C) 2019  Marcos Bujosa

# This program is free software: you can redistribute it and/or modify
# it under the terms of the GNU General Public License as published by
# the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
# (at your option) any later version.

# This program is distributed in the hope that it will be useful,
# but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
# MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  See the
# GNU General Public License for more details.

# You should have received a copy of the GNU General Public License
# along with this program.  If not, see <https://www.gnu.org/licenses/
```

Root chunk (not used in this document).

Último chunk del ejemplo de Literate Programming

Este es uno de los trozos de código del ejemplo.

56b ⟨*Chunk final que indica qué tipo de objeto es* `a` *y hace unas sumas* 56b⟩≡

```
type(a)
2+2
3+20
```

This code is used in chunk 53c.