Librería en Python para Matemáticas II (Álgebra Lineal)

https://github.com/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2

Marcos Bujosa

August 23, 2019

Uno de los objetivos que me he propuesto para el curso Matemáticas II (Álgebra Lineal) es mostrar que escribir matemáticas y usar un lenguaje de programación son prácticamente la misma cosa. Este modo de proceder debería ser un ejercicio muy didáctico ya que:

> *Un PC es muy torpe y se limita a ejecutar literalmente lo que se le indica (un PC no interpreta interpolando para intentar dar sentido a lo que se le dice... eso lo hacemos las personas, pero no los ordenadores).*
>
> *Por tanto, este ejercicio nos impone una disciplina a la que en general no estamos acostumbrados:* el ordenador hará lo que queremos solo si las expresiones tienen sentido e indican correctamente lo que queremos. *Si el ordenador no hace lo que queremos, será porque que hemos escrito las ordenes de manera incorrecta (lo que supone que también hemos escrito incorrectamente las expresiones matemáticas).*

Con esta idea en mente:

1. La notación de las notas de clase pretende ser operativa, en el sentido de que su uso se pueda traducir en operaciones que debe realizar el ordenador.
2. Muchas demostraciones son algorítmicas (al menos las que tienen que ver con el método de Gauss), de manera que dichas demostraciones describen literalmente la programación en Python de los correspondientes algoritmos.

Una librería de Python específica para la asignatura

Aunque Python tiene librerías que permiten operar con vectores y matrices, *aquí escribimos nuestra propia librería*. Con ello lograremos que la notación empleada en las notas de clase y las expresiones que usemos en Python se parezcan lo más posible.

Este documento describe tanto el uso de la librería como el módo en el que está programada; pero no es un curso de Python.

No obstate, he escrito unos notebooks de Jupyter que ofrecen unas breves nociones de programación en Python (muy incompletas). Piense que hay muchos cursos y material disponible en la web para aprender Python y mi labor es enseñar Álgebra Lineal (no Python).

Para hacer más evidente el paralelismo entre las definiciones de las notas de la asignatura y el código de nuestra librería, las partes del código menos didácticas se relegan al final[1] (véase la sección *Literate programming* en la Página 42). Destacar algunas partes del código permitirá apreciar que las definiciones de las notas de la asignatura son implementadas de manera literal en nuestra librería de Python.

Recuerde que **¡hacer matemáticas y programar son prácticamente la misma cosa!**).

Tutorial previo en un notebook

Antes de seguir, repase el Notebook **"Listas y tuplas"** en la carpeta "TutorialPython" en
https://mybinder.org/v2/gh/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2/master

[1]aquellas que tienen que ver con la comprobación de que los inputs de las funciones son adecuados, con otras formas alternativas de instanciar clases, con la representación de objetos en Jupyter usándo código LaTeX, etc.

Part I
Código principal

1 La clase Vector

En las notas de la asignatura se dice que

Un *vector* de $\mathbb{R}^n$ es un "sistema" de n números reales;

y dicho sistema se muestra entre paréntesis, bien en forma de fila

$$\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

o bien en forma de columna

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Python no posee objetos que sean "vectores". Necesitamos crear dichos objetos definiendo una nueva *clase* en Python.

Tutorial previo en un notebook

Antes de seguir, mírese el Notebook referente a **"Clases"** en la carpeta "TutorialPython" en
https://mybinder.org/v2/gh/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2/master

Usando lo mostrado en el Notebook anterior, hemos definido una *clase* en Python para los vectores, otra para las matrices, otra para las matrices por bloques (o matrices particionadas) y otra para las transformaciones elementales.

El texto de ayuda de la clase Vector es autoexplicativo y Python lo mostrará si se teclea `help(Vector)`:

2 ⟨*Texto de ayuda de la clase* Vector 2⟩≡

```
"""
Clase Vector

Un Vector es una secuencia finita (sistema) de números. Los Vectores se pueden
construir con una lista o tupla de números. Si el argumento es un Vector, el
valor devuelto es el mismo Vector. El atributo 'rpr' indica al entorno Jupyter
el vector debe ser escrito como fila o columna.

Parámetros:
    sis (list, tuple, Vector) : Sistema de números. Debe ser una lista o tupla de
        números, o bien otro Vector
    rpr (str) : Representación en Jupyter ('columna' por defecto). Indica la forma
        de representar el Vector en Jupyter. Si rpr='fila' se representa en forma
        de fila. En caso contrario se representa en forma de columna.

Atributos:
    lista (list): sistema de números almacenado
    n     (int) : número de elementos de la lista
    rpr   (str) : modo de representación en Jupyter

Ejemplos:
>>> # Crea un Vector a partir de una lista de números
>>> Vector( [1,2,3] )

Vector([1,2,3])
```

```
>>> # Crea un Vector a partir de una tupla de números
>>> Vector( (1,2,3) )

Vector([1,2,3])

>>> # Crea un Vector a partir de otro Vector
>>> Vector( Vector([1,2,3]) )

Vector([1,2,3])
"""
```

This code is used in chunk 4b.
Uses `Vector` 4b.

1.1 Implementación de los vectores en la clase `Vector`

En Python, tanto las listas (`list`) como las tuplas (`tuple`) son "sistemas" (secuencias finitas de objetos). Así pues, usaremos las listas (o tuplas) de números para instanciar un `Vector`. El sistema de números contenido en la lista (o tupla) será guardado en el atributo `lista` del `Vector`. Veamos cómo:

Método de inicialización Comenzamos la clase con el método de inicio: `def __init__(self, ... )`.

- La clase `Vector` usará dos argumentos (o parámetros). Al primero lo llamaremos `sis` y podrá ser una lista o tupla de números, u otro `Vector`. El segundo argumento (`rpr`) nos permitirá indicar si queremos que el entorno Jupyter Notebook represente el vector en forma horizontal o en vertical. Si no decimos nada, por defecto asumirá que debe representar el vector de manera vertical (`rpr='columna'`).

- Luego aparece un breve texto de ayuda que indica qué hace el método `__init__` y que Python nos mostrará si escribimos: `help Vector.__init__`.

- Por último se definen tres atributos para la clase `Vector`: los atributos `lista`, `rpr` y `n`.
  (El modo de generar el atributo `lista` *depende del tipo de objeto que es* `sis`*).*

  - Cuando `sis` es una `list` o `tuple`, en el atributo "`lista`" se guarda el correspondiente sistema en forma de una `list` de Python: `self.lista = list(sis)`

  - Cuando `sis` es un `Vector`, sencillamente se copia su atributo `lista`: `self.lista = sis.lista`

  De esta manera el atributo `self.lista` contendrá la lista ordenada de números que constituye el vector… por tanto ***¡ya hemos traducido al lenguaje Python la definición de vector!***

  - Cuando `sis` no es ni lista, ni tupla, ni `Vector`, se muestra un mensaje de error.
  - Por conveniencia definimos un par de atributos más. El atributo `self.n` guarda el número de elementos de la lista. El atributo `self.rpr` indica si el vector ha de ser representado como fila o como columna (representación en columna por defecto).

4a ⟨*Inicialización de la clase* Vector 4a⟩≡

```
def __init__(self, sis, rpr='columna'):
    """
    Inicializa un Vector con una lista, tupla, u otro Vector
    """
    if isinstance(sis, (list,tuple)):
        self.lista  =  list(sis)

    elif isinstance(sis, Vector):
        self.lista = sis.lista

    else:
        raise ValueError('¡el argumento: debe ser una lista, tupla o Vector!')

    self.rpr  =  rpr
    self.n    =  len (self.lista)
```

This code is used in chunk 4b.
Uses `Vector` 4b.

La clase `Vector` junto con el listado de sus métodos aparece en el siguiente recuadro:

4b ⟨*Definición de la clase* Vector 4b⟩≡

```
class Vector:
    ⟨Texto de ayuda de la clase Vector 2⟩
    ⟨Inicialización de la clase Vector 4a⟩
    ⟨Operador selector por la derecha para la clase Vector 9a⟩
    ⟨Operador selector por la izquierda para la clase Vector 10a⟩
    ⟨Suma de Vectores 14b⟩
    ⟨Producto de un Vector por un escalar a su izquierda, o por otro Vector a su izquierda 16a⟩
    ⟨Producto de un Vector por un escalar a su derecha, o por una Matrix a su derecha 17a⟩
    ⟨Definición de la igualdad entre Vectores 17b⟩
    ⟨Representación de la clase Vector 35a⟩
```

This code is used in chunk 27.
Defines:
`Vector`, used in chunks 2, 4–6, 8–18, 20, 21a, and 34–38.

En esta sección hemos visto el texto de ayuda y el metodo de inicialización. El resto de métodos se describen en secciones posteriores.

Resumen

Los **vectores** son sistemas de números. La clase `Vector` almacena una `list` de números en su atributo `Vector.lista`:

1. Cuando se instancia un `Vector` con una lista, dicha lista se almacena en el atributo `lista`.
2. Cuando se instancia un `Vector` con otro `Vector`, se copia el atributo `lista` de dicho `Vector`.
3. Asociados a los `Vector`es hay una serie de métodos que veremos más adelante.

2 La clase Matrix

En las notas de la asignatura usamos la siguiente definición

Llamamos *matriz* de $\mathbb{R}^{m\times n}$ a un sistema de n vectores de $\mathbb{R}^m$.

Cuando representamos las matrices, las encerramos entre corchetes

$$\mathbf{A} = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]; \quad \text{donde } \boldsymbol{v}_i \text{ son vectores de } \mathbb{R}^m.$$

Consecuentemente, en nuestra implementación crearmos el objeto `Matrix`, que almacena en uno de sus atributos una lista de `Vectores` (todos con el mismo número de componentes). Dicha lista será la lista de "columnas" de la matriz.

El texto de ayuda de la clase `Matrix` es autoexplicativo y Python lo mostrará si se teclea `help(Matrix)`:

5 ⟨*Texto de ayuda de la clase* Matrix 5⟩≡

```
"""Clase Matrix

Una Matrix es una secuencia finita (sistema) de Vectores con el mismo número de
componentes. Una Matrix se puede construir con una lista o tupla de Vectores con el
mismo número de componentes (serán las columnas de la matriz); una lista (o una tupla)
de listas o tuplas con el mismo número de componentes (serán las filas de la matriz);
otra Matrix (el valor devuelto será la misma Matrix); una BlockMatrix (el valor
devuelto es la Matrix correspondiente a la matriz obtenida al unir todos los bloques).

Parámetros:
    sis (list, tuple, Matrix, BlockMarix): Lista (o tupla) de Vectores con el
        mismo núm. de componentes; lista (o tupla) de listas o tuplas con el mismo
        núm. de componentes; otra matriz; o una matriz particionada por bloques.

Atributos:
    lista (list): sistema de Vectores almacenado
    m     (int) : número de filas de la matriz
    n     (int) : número de columnas de la matriz

Ejemplos:
>>> # Crea una Matrix a partir de una lista de Vectores
>>> a = Vector( [1,2] )
>>> b = Vector( [1,0] )
>>> c = Vector( [9,2] )
>>> Matrix( [a,b,c] )

Matrix([Vector([1, 2]), Vector([1, 0]), Vector([9, 2])])

>>> # Crea una Matrix a partir de una lista de listas de números
>>> A = Matrix( [ [1,1,9], [2,0,2] ] )
>>> A

Matrix([Vector([1, 2]), Vector([1, 0]), Vector([9, 2])])

>>> # Crea una Matrix a partir de otra Matrix
>>> Matrix( A )

Matrix([Vector([1, 2]), Vector([1, 0]), Vector([9, 2])])

>>> # Crea una Matrix a patir de una BlockMatrix
```

```
>>> Matrix( {1}|A|{2} )

Matrix([Vector([1, 2]), Vector([1, 0]), Vector([9, 2])])
"""
```

This code is used in chunk 7.
Uses BlockMatrix 29, Matrix 7, and Vector 4b.

2.1 Implementación de las matrices en la clase Matrix

Comenzamos la clase con el método de inicio: `def __init__(self, sis)`.

- Un `Matrix` se instancia con el argumento `sis`, que podrá ser *una lista de* `Vector`*es con el mismo número de componentes (serán sus columnas)*; pero que también se podrá ser una lista (o tupla) de listas o tuplas con el mismo número de componentes (serán sus filas), una `BlockMatrix` u otra `Matrix`.
- Luego aparece un breve texto de ayuda del método `__init__`.
- Por último se definen tres atributos para la clase `Matrix`. Los atributos: `lista`, `m` y `n`.
  (El modo de generar el atributo `lista` *depende del tipo de objeto que es* `sis`*. En el siguiente recuadro se destaca el caso en que* `sis` *es una lista de* `Vector`*es).*
  - El atributo `self.lista` guarda una lista de `Vector`es (que corresponden a la lista de columnas de la matriz). El modo de elaborar dicha lista difiere en función de qué tipo de objeto es el argumento `sis`. Si es
    - una lista (o tupla) de vectores: entonces la `self.lista` es `list(sis)` (la lista de `Vector`es introducidos).
    - una lista (o tupla) de listas o tuplas: entonces se interpreta que `sis` es la “lista de filas” de una matriz y se reelabora correspondiente la lista de columnas.
    - otra `Matrix`: entonces `self.lista` es la `lista` de dicha matriz (`self.lista = sis.lista`).
    - una `BlockMatrix`: entonces se reelabora la lista de columnas correspondiente a la matriz resultante de unificar los bloques en una única matriz.

    De esta manera el atributo `self.lista` contendrá la lista ordenada de `Vector`es columna que constituye la matrix…por tanto ***¡ya hemos traducido al lenguaje Python la definición de matriz!***
  - Por conveniencia definimos un par de atributos más. El atributo `self.m` guarda el número de filas de la matriz, y `self.n` guarda el número de columnas.

6 ⟨*Inicialización de la clase* Matrix 6⟩≡

```
def __init__(self, sis):
    """
    Inicializa una Matriz con una lista, o tupla de Vectores, listas o tuplas con el
    mismo numero de componentes; con otra Matrix o con una BlockMatrix
    """
    ⟨Creación del atributo lista cuando sis no es una lista o tupla de Vectores 35b⟩

    elif isinstance(sis[0], Vector):
        ⟨Verificación de que todas las columnas de la matriz tendrán la misma longitud 36c⟩
        self.lista  =  list(sis)

    self.m  =  self.lista[0].n
    self.n  =  len(self.lista)
```

This code is used in chunk 7.
Uses BlockMatrix 29, Matrix 7, and Vector 4b.

La clase `Matrix` junto con el listado de sus métodos aparece en el siguiente recuadro:

```
7   ⟨Definición de la clase Matrix 7⟩≡
      class Matrix:
          ⟨Texto de ayuda de la clase Matrix 5⟩
          ⟨Inicialización de la clase Matrix 6⟩
          ⟨Operador selector por la derecha para la clase Matrix 11a⟩
          ⟨Operador transposición para la clase Matrix 12a⟩
          ⟨Operador selector por la izquierda para la clase Matrix 13⟩
          ⟨Suma de Matrix 18b⟩
          ⟨Producto de una Matrix por un escalar a su izquierda 19b⟩
          ⟨Producto de una Matrix por un escalar, un vector o una matriz a su derecha 21a⟩
          ⟨Definición de la igualdad entre dos Matrix 21b⟩
          ⟨Transformaciones elementales de las columnas de una Matrix 25b⟩
          ⟨Transformaciones elementales de las filas de una Matrix 26⟩
          ⟨Representación de la clase Matrix 37a⟩
```

This code is used in chunk 27.
Defines:
`Matrix`, used in chunks 5, 6, 10–13, 16–21, 23–25, 28, 32c, 33a, 35b, 36a, and 38.

En esta sección hemos visto el texto de ayuda y el metodo de inicialización. El resto de métodos se describen en secciones posteriores.

Resumen

Las **matrices** son sistemas de vectores (dichos vectores son sus columnas). La clase `Matrix` almacena una `list` de `Vector`es en el atributo `lista` de cuatro modos distintos (el código de los tres últimos se puede consultar en la Parte II de este documento):

1. Cuando se instancia con una lista de `Vector`es, dicha lista se almacena en el atributo `lista`. *Esta es la forma de crear una matriz a partir de sus columnas.*
2. Cuando se instancia la clase con una lista (o tupla) de listas o tuplas, se interpreta que dicha lista (o tupla) son las filas de la matriz. Consecuentemente, se dan los pasos para describir dicha matriz como una lista de columnas, que se almacena en el atributo `lista`. (Esta forma de instanciar una `Matrix` se usará para programar la **transposición**).
3. Cuando se instancia con otra `Matrix`, se copia el atributo `lista` de dicha `Matrix`.
4. Cuando se instancia con una `BlockMatrix`, se unifican los bloques en una sola matriz, cuya lista de columnas es copiada en el atributo `lista`.
5. Asociados a las `Matrix` hay una serie de métodos que veremos más adelante.

Así pues, `Vector` guarda un sistema de números en su atributo `lista` y `Matrix` guarda una sistema de `Vector`es en su atributo `lista`; por tanto:

¡Ya hemos implementado en Python los vectores y matrices tal y como se definen en las notas de la asignatura!

…vamos con el operador selector que nos permitirá definir las operaciones de suma, producto, etc.…

3 Operadores selectores

Notación en Mates 2

- Si $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ entonces ${}_{i|}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{|i} = v_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$ entonces $\begin{cases} \mathbf{A}_{|j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, m\} \\ {}_{i|}\mathbf{A} = (a_{i1}, \ldots, a_{im}) \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$.

Queremos manejar la anterior notación, así que tenemos que definir el operador selector en Python. Usaremos el siguiente convenio:

Mates II	Python
$\boldsymbol{v}_{\vert i}$	`v|i`
${}_{i\vert}\boldsymbol{v}$	`i|v`
$\mathbf{A}_{\vert j}$	`A|j`
${}_{i\vert}\mathbf{A}$	`i|A`

Emplearemos los métodos especiales `__or__` y `__ror__`, que son las barras verticales a derecha e izquierda respectivamente. Pero puestos a seleccionar, aprovechemos la notación para seleccionar más de un elemento:

Notación en Mates 2

- ${}_{(i_1,\ldots,i_r)|}\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_r}\right) = \boldsymbol{v}_{|(i_1,\ldots,i_r)}$ (es un vector formado por elementos de $\boldsymbol{v}$)
- ${}_{(i_1,\ldots,i_r)|}\mathbf{A} = \left[{}_{i_1|}\mathbf{A}, \ldots, {}_{i_r|}\mathbf{A}\right]^{\intercal}$ (es una matriz cuyas filas son filas de $\mathbf{A}$)
- $\mathbf{A}_{|(j_1,\ldots,j_r)} = \left[\mathbf{A}_{|j_1}, \ldots, \mathbf{A}_{|j_r}\right]$ (es una matriz formada por columnas de $\mathbf{A}$)

3.1 Operador selector por la derecha para la clase `Vector`.

8 ⟨*Texto de ayuda para el operador selector por la derecha para la clase* `Vector` 8⟩≡

```
"""
Extrae la i-ésima componente del Vector (los índices comienzan por la posición 1)

Parámetros:
    i (int, list, tuple): Índice o lista de índices de los elementos a selecionar

Resultado:
    número: Si el parámetro i es int, devuelve el componente i-ésimo del Vector.
    Vector: Si el parámetro i es list o tuple, devuelve el Vector formado por los
        componentes indicados en la lista de índices.

Ejemplos:
>>> # Seleción de una componente
>>> Vector([10,20,30]) | 2
```

```
20

>>> # Creación de un sub-vector a partir de una lista o tupla de índices
>>> Vector([10,20,30]) | [2,1,2]
>>> Vector([10,20,30]) | (2,1,2)

Vector([20, 10, 20])
"""
```

This code is used in chunk 9a.
Uses `Vector` 4b.

3.1.1 Implementación del operador selector por la derecha para la clase `Vector`.

Cuando el argumento `i` es un número entero (`int`), seleccionamos el correspondiente elemento del atributo `lista` del `Vector` (recuerde que en Python los índices de listas y tuplas comienzan en cero, por lo que para seleccionar el elemento *i*-ésimo de `lista`, escribimos `lista[i-1]`; así `a|1` selecciona el primer elemento de su atributo `lista`, es decir `a.lista[0]`).

Una vez hemos definido el operador "`|`" cuando el argumento `i` es un entero (`int`), podemos usar el método (`self|a`) para definir el operador cuando el argumento `i` es una lista o tupla `(list,tuple)` de índices (para generar un `Vector` con las componentes indicadas).

9a ⟨*Operador selector por la derecha para la clase* `Vector` 9a⟩≡

```
def __or__(self,i):
    ⟨Texto de ayuda para el operador selector por la derecha para la clase Vector 8⟩
    if isinstance(i,int):
        return self.lista[i-1]
    elif isinstance(i, (list,tuple) ):
        return Vector ([ (self|a) for a in i ])
```

This code is used in chunk 4b.
Uses `Vector` 4b.

3.2 Operador selector por la izquierda para la clase `Vector`.

9b ⟨*Texto de ayuda para el operador selector por la izquierda para la clase* `Vector` 9b⟩≡

```
"""Hace lo mismo que el método __or__ solo que operando por la izquierda"""
```

This code is used in chunk 10a.

3.2.1 Implementación del operador selector por la derecha para la clase `Vector`.

Como hace lo mismo que el selector por la derecha, basta con llamar al selector por la derecha: `self|i`

10a ⟨*Operador selector por la izquierda para la clase* `Vector` 10a⟩≡
```
def __ror__(self,i):
    ⟨Texto de ayuda para el operador selector por la izquierda para la clase Vector 9b⟩
    return self | i
```
This code is used in chunk 4b.

3.3 Operador selector por la derecha para la clase `Matrix`.

10b ⟨*Texto de ayuda para el operador selector por la derecha para la clase* `Matrix` 10b⟩≡
```
"""
Extrae la i-ésima columna de Matrix (los índices comienzan por la posición 1)

Parámetros:
    j (int, list, tuple): Índice o lista de índices de las columnas a selecionar
      (set): Conjunto de índices que indican por que columnas particionar la matriz

Resultado:
    Vector: Si el parámetro j es int, devuelve la columna j-ésima de Matrix.
    Matrix: Si el parámetro j es list o tuple, devuelve la Matrix formada por
        las columnas indicadas en la lísta de índices.
    BlockMatrix: Si el parámetro j es un set, devuelve la BlockMatrix que resulta de
        particionar la matriz por las columnas indicadas por los índices del conjunto j

Ejemplos:
>>> # Extrae la j-ésima columna la matriz
>>> Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])]) | 2

Vector([0,2])

>>> # Creación de Matrix formada por los Vectores columna indicados en una lista o tupla
>>> Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])]) | [2,1]
>>> Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])]) | (2,1)

Matrix( [Vector([0,2]), Vector([1,0])] )

>>> # Creación de una BlockMatrix mediante el particionado de la matriz por columnas
>>> Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])]) | {2}

BlockMatrix([[Matrix([Vector([1, 0]), Vector([0, 2])]), Matrix([Vector([3, 0])])]])
"""
```
This code is used in chunk 11a.
Uses `BlockMatrix` 29, `Matrix` 7, and `Vector` 4b.

3.3.1 Implementación del operador selector por la derecha para la clase `Matrix`

Como el objeto `Matrix` es una lista de `Vector`es, el código para el selector por la derecha es casi idéntico al de la clase `Vector`. Como antes, una vez definido el operador "|" por la derecha para seleccionar una única columna (cuando el argumento `j` es un entero), podremos usar repetidamente el procedimiento `(self|j)` para crear otra `Matrix` formada por una selección de columnas (cuando el parámetro `j` es una lista, o tupla, de índices).

(*la explicación de cómo se particiona una matriz en bloques de columnas de matrices se verá más adelante, cuando definamos las* `BlockMatrix`).

11a ⟨*Operador selector por la derecha para la clase* `Matrix` 11a⟩≡

```
def __or__(self,j):
    ⟨Texto de ayuda para el operador selector por la derecha para la clase Matrix 10b⟩
    if isinstance(j,int):
        return self.lista[j-1]

    elif isinstance(j, (list,tuple)):
        return Matrix ([ self|a for a in j ])

    ⟨Partición de una matriz por columnas de bloques 31a⟩
```

This code is used in chunk 7.
Uses `Matrix` 7.

3.4 Operador transposición.

Implementar el operador selector por la izquierda para las matrices es algo más complicado que para los vectores, ya que no es lo mismo operar por la derecha que por la izquierda.

Como paso intermedio vamos a definir el operador transposisción, que usaremos después para definir el operador selector por la izquierda (selección de filas).

11b ⟨*Texto de ayuda para el operador transposición de la clase* `Matrix` 11b⟩≡

```
"""
Devuelve la traspuesta de una matriz

Ejemplo:
>>> ~Matrix([Vector([1]), Vector([2]), Vector([3])])

Matrix([Vector([1, 2, 3])])
"""
```

This code is used in chunk 12a.
Uses `Matrix` 7 and `Vector` 4b.

3.4.1 Implementación del operador transposición.

Notación en Mates 2

- Transpuesta de $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^\intercal$

Desgraciadamente Python no dispone del símbolo "$^\intercal$". Hemos de usar un símbolo distinto para indicar transposición. Y no tenemos muchas opciones, pues el conjunto de símbolos asociados a métodos especiales es muy limitado.

Tutorial previo en un notebook

Si no recuerda a qué me estoy refiriendo con los símbolos asociados a métodos, repase de nuevo la sección "Métodos especiales con símbolos asociados" del Notebook referente a **"Clases"** en la carpeta "TutorialPython" en `https://mybinder.org/v2/gh/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2/master`

Para implementar la transposición haremos uso del nombre del método `__invert__`, que tiene asociado el símbolo del la tilde "~", símbolo que además deberemos colocar a la izquierda de la matriz.

Mates II	Python
$\mathbf{A}^\intercal$	`~A`

Recuerde que con la segunda forma de instanciar el objeto `Matrix` (véase el resumen de la página 7), creamos una matriz a partir de la lista de sus filas. Así podemos construir fácilmente el operador trasposición. Basta instanciar `Matrix` con la lista de los n atributos "`lista`" correspondientes a los consecutivos n `Vector`es columna.
(Recuerde también que `range(1,self.m+1)` recorre los números: $1, 2, \ldots, m$).

12a ⟨*Operador transposición para la clase* `Matrix` 12a⟩≡
```
def __invert__(self):
    ⟨Texto de ayuda para el operador transposición de la clase Matrix 11b⟩

    return Matrix ([ (self|j).lista for j in range(1,self.n+1) ])
```
This code is used in chunk 7.
Uses `Matrix` 7.

3.5 Operador selector por la izquierda para la clase `Matrix`.

El siguiente recuadro muestra el texto de ayuda del operador Selector por la izquierda para la clase `Matrix`.

12b ⟨*Texto de ayuda para el operador selector por la izquierda para la clase* `Matrix` 12b⟩≡
```
"""
Extrae la i-ésima fila de Matrix (los índices comienzan por la posición 1)

Parámetros:
    i (int, list, tuple): Índice o lista de índices de las filas a selecionar
      (set): Conjunto de índices que indican por que filas particionar la matriz

Resultado:
    Vector: Si el parámetro i es int, devuelve la fila i-ésima de Matrix.
    Matrix: Si el parámetro i es list o tuple, devuelve la Matrix cuyas filas coinciden
        con las indicadas en la lista de índices.
    BlockMatrix: Si el parámetro i es un set, devuelve la BlockMatrix que resulta de
        particionar la matriz por las filas indicadas por los índices del conjunto i

Ejemplos:
```

```
>>> # Extrae la j-ésima columna la matriz
>>> 2 | Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])])

Vector([0, 2, 0])

>>> # Creación de Matrix formada por los Vectores columna indicados en una lista o tupla
>>> [1,1] | Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])])
>>> (1,1) | Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])])

Matrix([Vector([1, 1]), Vector([0, 0]), Vector([3, 3])])

>>> # Creación de una BlockMatrix mediante el particionado de la matriz por columnas
>>> {1} | Matrix([Vector([1,0]), Vector([0,2])])

BlockMatrix([[Matrix([Vector([1]), Vector([0])])], [Matrix([Vector([0]), Vector([2])])]])
"""
```

This code is used in chunk 13.
Uses `BlockMatrix` 29, `Matrix` 7, and `Vector` 4b.

3.5.1 Implementación del operador por la izquierda para la clase `Matrix`.

Con el operador selector por la derecha y la transposición, es inmediato definir un operador selector de *filas*... ¡pues son las columnas de la matriz transpuesta!

`(~self)|j`

Para recordar que el vector ha sido obtenido de la fila de una matriz, lo representaremos en horizontal (`rpr='fila'`)

De nuevo, una vez definido el operador por la izquierda (`(i|self)`), podemos usar dicho procedimiento repetidas veces para crear `Matrix` con varias filas.

(*la explicación de cómo se particiona una matriz en bloques de columnas de matrices se verá más adelante, cuando definamos las* `BlockMatrix`).

13 ⟨*Operador selector por la izquierda para la clase* `Matrix` 13⟩≡

```
def __ror__(self,i):
    ⟨Texto de ayuda para el operador selector por la izquierda para la clase Matrix 12b⟩
    if isinstance(i,int):
        return Vector ( (~self)|i, rpr='fila' )

    elif isinstance(i, (list,tuple)):
        return Matrix ([ (a|self).lista  for a in i ])

    ⟨Partición de una matriz por filas de bloques 30b⟩
```

This code is used in chunk 7.
Uses `Matrix` 7 and `Vector` 4b.

Resumen

¡Ahora también hemos implementado en Python el operador "|" tanto por la derecha como por la izquierda tal y como se define en las notas de la asignatura!

Ya estamos listos para definir el resto de operaciones con vectores y matrices...

4 Operaciones con vectores y matrices

Una vez definidas las clases `Vector` y `Matrix` junto con el operador selector "`|`", ya podemos definir las operaciones de suma y producto. Fíjese que las definiciones de las operaciones en Pyhton (usando el operador "`|`") son idénticas a las empleadas en las notas de la asignatura:

4.1 Suma de vectores

En las notas de la asignatura hemos definido la suma de dos vectores de $\mathbb{R}^n$ como

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = (\boldsymbol{a})_{|i} + (\boldsymbol{b})_{|i}} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

ahora usando el operador selector, podemos literalmente transcribir esta definición

```
Vector ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

donde `self` es el vector y `other` es otro vector.

14a ⟨*Texto de ayuda para el operador suma en la clase* `Vector` 14a⟩≡

```
"""
Función devuelve el Vector resultante de sumar dos Vectores componente a componente.

Parámetros:
    other (Vector): Otro vector con el mismo número de elementos

Ejemplo
>>> Vector([10, 20, 30]) + Vector([0, 1, 1])

Vector([10, 21, 31])
"""
```

This code is used in chunk 14b.
Uses `Vector` 4b.

4.1.1 Implementación

14b ⟨*Suma de* `Vector`*es* 14b⟩≡

```
def __add__(self, other):
    ⟨Texto de ayuda para el operador suma en la clase Vector 14a⟩
    if isinstance(other, Vector):
        if self.n == other.n:
            return Vector ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,self.n+1) ])

        else:
            print("error en la suma: vectores con distinto número de componentes")
```

This code is used in chunk 4b.
Uses `Vector` 4b.

4.2 Producto de un vector por un escalar u otro vector que estén a su izquierda

En las notas hemos definido

- El producto de $\boldsymbol{a}$ por un escalar x a su izquierda como

$$\boxed{(x\boldsymbol{a})_{|i} = x(\boldsymbol{a}_{|i})} \qquad \text{para } i=1,\dots,n.$$

  cuya transcripción será

```
Vector ([ x*(self|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

  donde `self` es el vector y `x` es un número entero, de coma flotante o fracción (`int, float, Fraction`).

- El *producto punto* (o producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$) de dos vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{a}$ en $\mathbb{R}^n$ es

$$\boxed{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a} \;=\; \sum_{i=1}^n x_i a_i} \qquad \text{para } i=1,\dots,n.$$

  cuya transcripción será

```
sum([ (x|i)*(self|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

  donde `self` es el vector y `x` es otro vector (`Vector`).

15 ⟨*Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda en la clase* `Vector` 15⟩≡

```
"""
Multiplica un Vector por un número u otro Vector a su izquierda.

Parámetros:
    x (int, float o Fraction): Número por el que se multiplica
      (Vector): Vector con el mismo número de componentes.

Resultado:
    Vector: Si el parámetro x es int, float o Fraction, devuelve el Vector que resulta
        de multiplicar cada componente por x
    Número: Si el parámetro x es Vector, devuelve el producto punto entre vectores
        (o producto escalar usual en R^n)

Ejemplos:
>>> 3 * Vector([10, 20, 30])

Vector([30, 60, 90])

>>> Vector([1, 1, 1]) * Vector([10, 20, 30])

60
"""
```

This code is used in chunk 16a.
Uses `Vector` 4b.

4.2.1 Implementación

16a ⟨*Producto de un* `Vector` *por un escalar a su izquierda, o por otro* `Vector` *a su izquierda* 16a⟩≡

```
def __rmul__(self, x):
    ⟨Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda en la clase Vector 15⟩
    if isinstance(x, (int, float, Fraction)):
        return Vector ([ x*(self|i) for i in range(1,self.n+1) ])

    elif isinstance(x, Vector):
        if self.n == x.n:
            return sum([ (x|i)*(self|i) for i in range(1,self.n+1) ])
        else:
            print("error en producto: vectores con distinto número de componentes")
```

This code is used in chunk 4b.
Uses `Vector` 4b.

4.3 Producto de un vector por un escalar o una Matrix que estén a su derecha

- En las notas se acepta que el producto de un vector por un escalar es conmutativo. Por tanto,

  $$\boxed{\boldsymbol{b}x = x\boldsymbol{b}}$$

  cuya transcripción será

  ```
  x * self
  ```

  donde `self` es el vector y `x` es un número entero, o de coma flotante o una fracción (`int, float, Fraction`).

- El producto de un vector $\boldsymbol{a}$ de $\mathbb{R}^n$ por una matriz $\mathbf{B}$ con n filas es

  $$\boxed{\boldsymbol{a}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\intercal}\boldsymbol{a}}$$

  cuya transcripción será

  ```
  (~x) * self
  ```

  donde `self` es el vector y `x` es una matriz (`Matrix`). Para recordar que es una combinación lineal de las filas, su representación es en forma de fila.

16b ⟨*Texto de ayuda para el operador producto por la derecha en la clase* `Vector` 16b⟩≡

```
"""
Multiplica un Vector por un número o una Matrix a su derecha.

Parámetros:
    x (int, float o Fraction): Número por el que se multiplica
      (Matrix): Matrix con el mismo número de filas que componentes tiene el Vector.

Resultado:
    Vector: * Si el parámetro x es int, float o Fraction, devuelve el Vector que resulta
       de multiplicar cada componente por x
            * Si el parámetro x es Matrix, devuelve Vector combinación lineal de las
       filas de Matrix (componentes del Vector son los coeficientes de la combinación)
```

```
    Ejemplos:
    >>> Vector([10, 20, 30]) * 3

    Vector([30, 60, 90])

    >>> a = Vector([1, 1])
    >>> B = Matrix([Vector([1, 2]), Vector([1, 0]), Vector([9, 2])])
    >>> a * B

    Vector([3, 1, 11])
    """
```

This code is used in chunk 17a.
Uses `Matrix` 7 and `Vector` 4b.

4.3.1 Implementación

17a ⟨*Producto de un* `Vector` *por un escalar a su derecha, o por una* `Matrix` *a su derecha* 17a⟩≡

```
def __mul__(self, x):
    ⟨Texto de ayuda para el operador producto por la derecha en la clase Vector 16b⟩
    if isinstance(x, (int, float, Fraction)):
        return x*self

    elif isinstance(x, Matrix):
        if self.n == x.m:
            return Vector( (~x)*self, rpr='fila')
        else:
            print("error en producto: Vector y Matrix incompatibles")
```

This code is used in chunk 4b.
Uses `Matrix` 7 and `Vector` 4b.

4.4 Igualdad entre vectores

En las notas de la asignatura se dice que *dos vectores son iguales solo cuando lo son los sistemas de numéros correspondientes a ambos vectores.*

Dos vectores serán iguales si y solo si son idénticos los correspondientes sistemas:

17b ⟨*Definición de la igualdad entre* `Vector`*es* 17b⟩≡

```
def __eq__(self, other):

    """a == b es True si a.lista es igual que b.lista. False en caso contrario"""

    return self.lista == other.lista
```

This code is used in chunk 4b.

4.5 Suma de matrices

En las notas de la asignatura hemos definido la suma de matrices como

$$\boxed{\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)_{|j} = \left(\mathbf{A}\right)_{|j} + \left(\mathbf{B}\right)_{|j}} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

de nuevo, usando el operador selector podemos transcribir literalmente esta definición

```
Matrix ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

donde `self` es la matriz y `other` es otra matriz.

18a ⟨*Texto de ayuda para el operador suma en la clase* `Matrix` 18a⟩≡

```
"""
Función devuelve la Matrix resultante de sumar dos Matrix columna a columna

Parámetros:
    other (Matrix): Otra Matrix con el mismo número de filas y columnas

Ejemplo:
>>> A = Matrix( [Vector([1,0]), Vector([0,1])] )
>>> B = Matrix( [Vector([0,2]), Vector([2,0])] )
>>> A + B

Matrix( [Vector([1,2]), Vector([2,1])] )
"""
```

This code is used in chunk 18b.
Uses `Matrix` 7 and `Vector` 4b.

4.5.1 Implementación

18b ⟨*Suma de* `Matrix` 18b⟩≡

```
def __add__(self, other):
    ⟨Texto de ayuda para el operador suma en la clase Matrix 18a⟩
    if isinstance(other,Matrix) and self.m == other.m and self.n == other.n:
        return Matrix ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,self.n+1) ])
    else:
        print("error en la suma: matrices con distinto orden")
```

This code is used in chunk 7.
Uses `Matrix` 7.

4.6 Producto de una matriz por un escalar a su izquierda

En las notas hemos definido

- El producto de $\mathbf{A}$ por un escalar x a su izquierda como

$$\boxed{\left(x\mathbf{A}\right)_{|j} = x\left(\mathbf{A}_{|j}\right)} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

  cuya transcripción será

```
Matrix ([ x*(self|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

donde `self` es la matriz y `x` es un número entero, de coma flotante o fracción (`int, float, Fraction`).

19a ⟨*Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda en la clase* `Matrix` 19a⟩≡

```
"""
Multiplica una Matrix por un número a su izquierda.

Parámetros:
    x (int, float o Fraction): Número por el que se multiplica

Resultado:
    Matrix: Devuelve la Matrix que resulta de multiplicar cada columna por x

Ejemplo:
>>> 10 * Matrix([[1,2],[3,4]])

Matrix([[10,20], [30,40]])
"""
```

This code is used in chunk 19b.
Uses `Matrix` 7.

4.7 Implementación

19b ⟨*Producto de una* `Matrix` *por un escalar a su izquierda* 19b⟩≡

```
def __rmul__(self,x):
    ⟨Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda en la clase Matrix 19a⟩
    if isinstance(x, (int, float, Fraction)):
        return Matrix ([ x*(self|i) for i in range(1,self.n+1) ])
```

This code is used in chunk 7.
Uses `Matrix` 7.

4.8 Producto de una matriz por un escalar, un vector o una matriz a su derecha

- En las notas se acepta que el producto de una matrix por un escalar es conmutativo. Por tanto,

$$\boxed{\mathbf{A}x = x\mathbf{A}}$$

cuya transcripción será

```
x * self
```

donde `self` es la matriz y `x` es un número entero, o de coma flotante o una fracción (`int, float, Fraction`).

- El producto de $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ por un vector $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$ a su derecha se define como

$$\boxed{\mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{A}_{|j}} \qquad \text{para } j = 1, \ldots, n.$$

cuya transcripción será

```
sum([ (x|j)*(self|j) for j in range(1,self.n+1) ])
```

donde `self` es el vector y `x` es otro vector (`Vector`).

- El producto de $\underset{m\times k}{\mathbf{A}}$ por otra matriz $\underset{k\times n}{\mathbf{X}}$ de $\mathbb{R}^n$ a su derecha se define como

$$\boxed{(\mathbf{AX})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_{|j})} \qquad \text{para } j = 1, \ldots, n.$$

cuya transcripción será

```
Matrix( [ self*(x|j) for j in range(1,x.n+1)] )
```

donde `self` es la matriz y `x` es otra matriz (`Matrix`).

20 ⟨*Texto de ayuda para el operador producto por la derecha en la clase* `Matrix` 20⟩≡

```
"""
Multiplica una Matrix por un número o una Vector o una Matrix a su derecha.

Parámetros:
    x (int, float o Fraction): Número por el que se multiplica
      (Vector): Vector con tantos componentes como columnas tiene Matrix.
      (Matrix): con tantas filas como columnas tiene la Matrix.

Resultado:
    Matrix: Si el parámetro x es int, float o Fraction, devuelve la Matrix que resulta
       de multiplicar cada columna por x
    Vector: Si el parámetro x es Vector, devuelve Vector combinación lineal de las
       columnas de Matrix (componentes del Vector son los coeficientes de la combinación)
    Matrix: Si el parámetro x es Vector, devuelve el producto matricial entre matrices

Ejemplos:
>>> # Producto por un número
>>> Matrix([[1,2],[3,4]]) * 10

Matrix([[10,20],[30,40]])

>>> # Producto por un Vector
>>> Matrix([Vector([1, 3]), Vector([2, 4])]) * Vector([1, 1])

Vector([3, 7])

>>> # Producto por otra Matrix
>>> A = Matrix([Vector([1, 3]), Vector([2, 4])])
>>> B = Matrix([Vector([1,1])]))
>>> A * B

Matrix([Vector([3, 7])])
"""
```

This code is used in chunk 21a.
Uses `Matrix` 7 and `Vector` 4b.

4.9 Implementación

21a ⟨*Producto de una* `Matrix` *por un escalar, un vector o una matriz a su derecha* 21a⟩≡

```
def __mul__(self,x):
    ⟨Texto de ayuda para el operador producto por la derecha en la clase Matrix 20⟩
    if isinstance(x, (int, float, Fraction)):
        return x*self

    elif isinstance(x, Vector):
        if self.n == x.n:
            return sum( [(x|j)*(self|j) for j in range(1,self.n+1)], V0(self.m) )
        else:
            print("error en producto: vector y matriz incompatibles")

    elif isinstance(x, Matrix):
        if self.n == x.m:
            return Matrix( [ self*(x|j) for j in range(1,x.n+1)])
        else:
            print("error en producto: matrices incompatibles")
```

This code is used in chunk 7.
Uses `Matrix` 7 and `Vector` 4b.

4.9.1 Igualdad entre matrices

Dos matrices son iguales solo cuando lo son las listas correspondientes a ambas.

Dos matrices serán iguales si y solo si son idénticos los correspondientes sistemas:

21b ⟨*Definición de la igualdad entre dos* `Matrix` 21b⟩≡

```
def __eq__(self, other):
    """A==B es True si A.lista es igual que B.lista. False en caso contrario"""

    return self.lista == other.lista
```

This code is used in chunk 7.

5 La clase Transformación elemental `T`

Notación en Mates 2

Si $\mathbf{A}$ es una matriz, consideramos las siguientes transformaciones:

Tipo I: $\underset{[\boldsymbol{i}+\lambda\cdot\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$ suma a la fila i la fila j multiplicada por λ; $\mathbf{A}\underset{[\boldsymbol{i}+\lambda\cdot\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$ lo mismo con las columnas.

Tipo II: $\underset{[\lambda\cdot\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$ multiplica la fila i por λ; y $\mathbf{A}\underset{[\lambda\cdot\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}$ multiplica la columna i por λ.

Intercambio: $\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$ intercambia las filas i y j; y $\mathbf{A}\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$ intercambia las columnas.

Como una trasformación elemental es el resultado del producto con una matriz elemental, esta notación busca el parecido con la notación del producto matricial. Con ello se gana, entre otras cosas, que la notación sea asociativa. Pero entonces se plantea ¿qué ventaja tiene introducir en el discurso las transformaciones elementales en lugar de utilizar simplemente matrices elementales? En principio hay dos:

1. Una matriz cuadrada es un objeto muy pesado... n^2 coeficientes para una matriz de orden n. Afortunadamente una matriz elemental es casi una matriz identidad salvo por uno de sus elementos; por tanto, para describir completamente[2] una matriz elemental basta indicar su orden n y el coeficiente que no coincide con los de $\mathbf{I}_n$.

2. Las trasformaciones elementales, indicando dicho coeficiente, omiten el orden n.

Escogemos la siguiente traducción de esta notación:

Mates II	Python	Mates II	Python
$\mathbf{A}\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$	`A & T({i,j})`	$\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$	`T({i,j}) & A`
$\mathbf{A}\underset{[a\cdot\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}$	`A & T((i,a))`	$\underset{[a\cdot\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$	`T((i,a)) & A`
$\mathbf{A}\underset{[\boldsymbol{i}+a\cdot\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$	`A & T((i,j,a))`	$\underset{[\boldsymbol{i}+a\cdot\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$	`T((i,j,a)) & A`

Vemos que:

1. Representar el intercambio con un conjunto, permite admitir la repetición del índice $\{i,i\} = \{i\}$ como un caso especial en el que la matriz no cambia. Esto simplificará el método de Gauss.

2. Tanto en los pares (i,a) como en las ternas (i,j,a)
   (a) La columna (fila) que cambia es la del índice que aparece en primera posición.
   (b) El escalar aparece el la ultima posición y multiplica a la columna (fila) con el índice que le precede.

Además vamos a extender esta notación para expresar las secuencias de trasformaciones elementales $_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ con una lista de trasformaciones elementales, de manera que logremos las siguientes equivalencias entre expresiones:

$$\begin{aligned} t_k \;\&\cdots\&\; t_2 \;\&\; t_1 \;\&\; \mathbf{A} &= \texttt{[}t_1\texttt{,}t_2\texttt{,}\ldots\texttt{,}t_k\texttt{]} \;\&\; \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \;\&\; t_1 \;\&\; t_2 \;\&\cdots\&\; t_k &= \mathbf{A} \;\&\; \texttt{[}t_1\texttt{,}t_2\texttt{,}\ldots\texttt{,}t_k\texttt{]} \end{aligned}$$

5.1 Implementación

Definimos un nuevo tipo de objeto: `T` (transformación elemental) que nos permitirá encadenar transformaciones elementales.

[2] Fíjese que la notación usada en las notas de la asignatura para las matrices elementales $\mathbf{E}$, no las describe completamente, pues se deja al lector la deducción de cual es su orden (el adecuado para poder realizar el producto $\mathbf{AE}$ o $\mathbf{EA}$)

23a ⟨*Texto de ayuda de la clase* `T` *(Transformación Elemental)* 23a⟩≡
```
"""
Clase T

T es un objeto que denominamos tranformación elemental. Guarda en su atributo ’t’ una
transformación elemental o una secuencia de transformaciones elementales. Con el método
__and__ actua sobre otra T para crear una T composición de transformaciones elementales,
o actua sobre una Matrix para transformar sus filas

Atributos:
    t (set)  : Conjunto de dos enteros (índice, índice) para realizar un intercambio
                 entre vectores correspondientes a dichos índices
      (tuple): Tupla de dos elementos (índice, número) para realizar una transformación
                 Tipo II que multiplica el vector correspondiente a índice por el número
             : Tupla con tres elementos (índice1, índice2, número) para realizar una
                 transformación Tipo I que suma al vector correspondiente a índice1 el
                 vector correspondiente a índice2 multiplicado por el número
      (list) : Lista con conjuntos y tuplas que describen una secuencia de
                 transformaciones como las anteriores.

Ejemplos:
>>> # Intercambio entre vectores
>>> T( {1,2} )

>>> # Trasformación Tipo II (multiplica por 5 es segundo vector)
>>> T( (2,5) )

>>> # Trasformación Tipo I (suma al primer vector el tercero multiplicado por -1)
>>> T( (1,3,-1) )

>>> # Secuencia de las tres transformaciones anteriores
>>> T( [{1,2}, (2,5), (1,3,-1)] )
"""
```
This code is used in chunk 25a.
Uses `Matrix` 7 and `T` 25a.

El siguiente recuadro inicializa la clase con una lista, tupla o conjunto `t`

23b ⟨*Inicialización de la clase* `T` *(Transformación Elemental)* 23b⟩≡
```
def __init__(self, t):
    """
    Inicializa una transformación elemental
    """
    self.t = t
```
This code is used in chunk 25a.

Describimos la composición de transformaciones elementales creando una lista de todas ellas (mediante la concatenación de listas)[3]. Si el atributo es una `Matrix`, aplica la transformación o secuencia de transformaciones sobre las filas

[3] Recuerde que la suma de listas (`list + list`) concatena las listas

de la matriz: `T & Matrix` (método de la clase `Matrix` que se describe un poco más abajo).

24 ⟨*Composición de Trasformaciones Elementales o aplicación sobre las filas de una* `Matrix` 24⟩≡

```
def __and__(self,t):
    """
    Crea una trasformación composición de dos
    >>> T( {1, 2} ) & T( (2, 4) )

    T( [{1,2}, (2,4)] )

    Crea una trasformación composición de varias
    >>> T( {1, 2} ) & T( [(2, 4), (1, 2), {3, 1}] )

    T( [{1, 2}, (2, 4), (1, 2), {3, 1}] )

    O aplica la transformación sobre las filas de una Matrix
    >>> T( {1, 2} ) & A  # (intercambia las dos primeras filas de A)

    O aplica una secuencia de transformaciones sobre las filas de una Matrix
    >>> T( [{1,2}, (2,4)] ) & A # (intercambia las dos primeras filas de A y
                                # luego multiplica la segunda por 4)
    """

    def CreaLista(a):
        """
        Transforma una tupla (un conjunto) en una lista que la (lo) contiene

        Parámetros:
            a (list) : lista que contiene tuplas y/o conjuntos
              (tuple): tupla que describe una transformación Tipo I o II
              (set)  : conjunto que describe un intercambio

        Resultado:
             list : 'a'   cuando 'a' si a es list
                    '[a]' cuando 'a' no es lista

        """
        return (a if isinstance(a,list) else [a])

    if isinstance(t,T):
        return T(CreaLista(self.t) + CreaLista(t.t))

    if isinstance(t,Matrix):
        return t.__rand__(self)
```

This code is used in chunk 25a.
Uses `Matrix` 7 and `T` 25a.

La clase `T` junto con el listado de sus métodos aparece en el siguiente recuadro:

25a ⟨*Definición de la clase* `T` *(Transformación Elemental)* 25a⟩≡

```
class T:
    ⟨Texto de ayuda de la clase T (Transformación Elemental) 23a⟩
    ⟨Inicialización de la clase T (Transformación Elemental) 23b⟩
    ⟨Composición de Trasformaciones Elementales o aplicación sobre las filas de una Matrix 24⟩
```

This code is used in chunk 27.
Defines:
`T`, used in chunks 23–26 and 28a.

5.2 Trasformaciones elementales de las columnas de una Matrix

Y implementamos las tres trasformaciones elementales sobre las columnas de una Matrix (incluimos el intercambio, aunque usted sabe que realmente es una composición de los otros dos tipos de transformaciones):

25b ⟨*Transformaciones elementales de las columnas de una* `Matrix` 25b⟩≡

```
def __and__(self,t):
    """ Aplica una o una secuencia de transformaciones elementales por columnas:
    >>>  A & T({1,3})                 # intercambia las columnas 1 y 3
    >>>  A & T((1,5))                 # multiplica la columna 1 por 5
    >>>  A & T((1,2,5))               # suma a la columna 1 la 2 por 5

    >>>  A & T([{1,3},(1,5),(1,2,5)]) # aplica la secuencia de transformaciones
    """
    if isinstance(t.t,set) and len(t.t) == 2:
        self.lista = Matrix( [(self|max(t.t)) if k==min(t.t) else \
                              (self|min(t.t)) if k==max(t.t) else \
                              (self|k) for k in range(1,self.n+1)]).lista

    elif isinstance(t.t,tuple) and len(t.t) == 2:
         self.lista = Matrix([ t.t[1]*(self|k) if k==t.t[0] else (self|k) \
                              for k in range(1,self.n+1)] ).lista

    elif isinstance(t.t,tuple) and len(t.t) == 3:
         self.lista = Matrix([ (self|k) + t.t[2]*(self|t.t[1]) if k==t.t[0] else \
                              (self|k) for k in range(1,self.n+1)] ).lista
    elif isinstance(t.t,list):
         for k in t.t:
             self & T(k)
    return self
```

This code is used in chunk 7.
Uses `Matrix` 7 and `T` 25a.

Observación 1. Las trasformaciones elementales modifican la matriz.

5.3 Trasformaciones elementales de las filas de una Matrix

Para transformaciones por filas filas usamos el truco de aplicar las operaciones sobre la filas de la transpuesta y de nuevo transponer el resultado. Para una sucesión de transformaciones por la izquierda, tenemos en cuenta que se aplican en el orden inverso a como aparecen en la lista de transformaciones (con la función `reversed`):

26 ⟨*Transformaciones elementales de las filas de una* `Matrix` 26⟩≡

```
def __rand__(self,t):
    """ Aplica una o una secuencia de transformaciones elementales por filas:
    >>>    {1,3} & A               # intercambia las filas 1 y 3
    >>>    (1,5) & A               # multiplica la fila 1 por 5
    >>>  (1,2,5) & A               # suma a la fila 1 la 2 por 5

    >>>  [(1,2,5),(1,5),{1,3}] & A # aplica la secuencia de transformaciones
    """
    if isinstance(t.t,set) | isinstance(t.t,tuple):
        self.lista = (~(~self & t)).lista

    elif isinstance(t.t,list):
        for k in reversed(t.t):
            T(k) & self

    return self
```

This code is used in chunk 7.
Uses `T` 25a.

Observación 2. Las trasformaciones elementales modifican la matriz.

6 Librería completa

...creamos la librería `notacion.py`...

27 ⟨*notacion.py* 27⟩≡

```
# coding=utf8
"""
Librería para la asignatura Matemáticas II del grado en Economía de la UCM que sigue
la notación de las notas de clase de Marcos Bujosa
"""

⟨Copyright y licencia GPL 41⟩

from fractions import Fraction

⟨Métodos html y latex generales 33b⟩
⟨Métodos html y latex para fraciones 33c⟩

⟨Definición de inverso 34a⟩

⟨Definición de la clase Vector 4b⟩
⟨Definición de la clase Matrix 7⟩
⟨Definición de la clase T (Transformación Elemental) 25a⟩
⟨Definición de la clase BlockMatrix 29⟩

⟨Definición del método particion 30a⟩
⟨Definición del procedimiento de generación del conjunto clave para particionar 32b⟩

⟨Definición de vector nulo: V0 37b⟩
⟨Definición de matriz nula: M0 38a⟩
⟨Definición de la matriz identidad: I 38c⟩
⟨Definición de vector fila o columna de la matriz identidad e 38b⟩

⟨normal 28a⟩
⟨sistema 28b⟩
```

Root chunk (not used in this document).

7 Ejemplo de uso

Con este código ya podemos hacer muchísimas cosas. Por ejemplo, ¡eliminación gaussiana para encontrar el espacio nulo de una matriz!

28a ⟨*normal* 28a⟩≡
```
class Normal(Matrix):
    def __init__(self, data):
        """ Escalona por Gauss obteniendo una matriz cuyos pivotes son unos """
        def pivote(v,k):
            """ Devuelve el primer índice mayor que k de de un
            un coeficiente no nulo del vector v. En caso de no existir
            devuelve 0
            """
            return ([x[0] for x in enumerate(v.lista, 1) \
                                 if (x[1] !=0 and x[0] > k)]+[0])[0]

        A = Matrix(data)
        r = 0
        self.rank = []
        for i in range(1,A.n+1):
           p = pivote((i|A),r)
           if p > 0:
              r += 1
              A & T({p,r})
              A & T((r,inverso(i|A|r)))
              A & T([(k, r, -(i|A|k)) for k in range(r+1,A.n+1)])

           self.rank+=[r]

        super(self.__class__ ,self).__init__(A.lista)
```

This code is used in chunk 27.
Uses `Matrix` 7 and `T` 25a.

28b ⟨*sistema* 28b⟩≡
```
def homogenea(A):
     """ Devuelve una BlockMatriz con la solución del problema homogéneo """
     stack=Matrix(BlockMatrix([[A],[I(A.n)]]))
     soluc=Normal(stack)
     col=soluc.rank[A.m-1]
     return {A.m} | soluc | {col}
```

This code is used in chunk 27.
Uses `BlockMatrix` 29 and `Matrix` 7.

Tutorial previo en un notebook

Este Notebook es un vistazo sobre el **uso de nuestra librería para Mates 2** en la carpeta "TutorialPython" en
https://mybinder.org/v2/gh/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2/master

Part II
Trozos de código secundarios

A Matrices particionadas (o matrices por bloques)

Esta sección no es muy importante para seguir el curso, aunque si es importante para el funcionamiento de la librería. Piense que cuando invierte una matriz o resuelve un sistema de ecuaciones, usa una matriz particionada (con dos bloques: una matriz arriba, y la matriz identidad con idéntico número de columnas debajo). Como esta librería replica lo que se ve en clase, es necesario definir las matrices particionadas.

Si quiere, ***puede saltarse inicialmente esta seccion****: el modo de particionar una matriz es sencillo y se puede aprender rápidamente con el siguiente Notebook*

Tutorial previo en un notebook

Este Notebook es un vistazo sobre el **uso de nuestra librería para Mates 2** en la carpeta "TutorialPython" en
`https://mybinder.org/v2/gh/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2/master`

Las matrices por bloques o cajas $\boxed{\mathbf{A}}$ son tablas de matrices de modo que todas las matrices de una misma fila comparten el mismo número de filas, y todas las matrices de una misma columna comparten el mismo número de columnas. Por ello al "pegar" todas ellas obtenemos una gran matriz.

El argumento de inicialización `sis` es una lista (o tupla) de listas de matrices, cada una de las listas de matrices es una fila de bloques (o submatrices con el mismo número de filas).

29 ⟨*Definición de la clase* `BlockMatrix` 29⟩≡

```
class BlockMatrix:
    def __init__(self, sis):
        """ Inicializa una matriz por bloques usando una lista de listas de matrices.
        """
        self.lista = list(sis)
        self.m     = len(sis)
        self.n     = len(sis[0])
        self.lm    = [fila[0].m for fila in sis]
        self.ln    = [c.n for c in sis[0]]

    ⟨Repartición de las columnas de una BlockMatrix 31b⟩
    ⟨Repartición de las filas de una BlockMatrix 32a⟩
    ⟨Representación de la clase BlockMatrix 39⟩
```

This code is used in chunk 27.
Defines:
`BlockMatrix`, used in chunks 5, 6, 10b, 12b, 28b, 30–32, 35b, and 36a.

El atributo `self.m` contiene el número de filas (de bloques o submatrices) y `self.n` contiene el número de columnas (de bloques o submatrices). Añadimos el atributo `self.ln`, que es una lista con el número de filas que tienen las submatrices de cada fila, y `self.lm` con el número de columnas de las submatrices de cada columna.

A.1 Particionado de matrices

Vamos a completar las capacidades de los operadores "`i|`" y "`|j`" sobre matrices. Hasta ahora, si los argumentos `i` o `j` eran *enteros* (`int`), se selecionaba una fila o una columna respectivamente; y si los argumentos `i` o `j` eran *listas o tuplas* de índices, se generaba una submatriz con las filas o las columnas indicadas.

Aquí, si los argumentos `i` o `j` son conjuntos de enteros, asumimos que dicho numeros enteros indican las filas o columnas por las que se debe particionar una `Matrix` según el siguiente cuadro explicativo:

Notación en Mates 2

- Si $n \leq m \in \mathbb{N}$ denotaremos con $(n:m)$ a la secuencia $n, n+1, \ldots, m$, (es decir, a la lista ordenada de los números de $\{k \in \mathbb{N} | n \leq k \leq m\}$).
- Si $j_1, \ldots, j_s \in \mathbb{N}$ con $j_1 < \ldots < j_s \leq m$ donde m es el número de columnas de A, entonces $\mathsf{A}_{|\{j_1,\ldots,j_s\}}$ es la matriz de bloques[a]

$$\mathsf{A}_{|\{j_1,\ldots,j_s\}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathsf{A}_{|(1:j_1)} & \mathsf{A}_{|(j_1+1:j_2)} & \cdots & \mathsf{A}_{|(j_s+1:m)} \end{array}\right]$$

- Si $i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{N}$ con $i_1 < \ldots < i_r \leq n$ donde n es el número de filas de A, entonces ${}_{\{i_1,\ldots,i_r\}|}\mathsf{A}$ es la matriz de bloques

$${}_{\{i_1,\ldots,i_r\}|}\mathsf{A} = \left[\begin{array}{c} {}_{(1:i_1)|}\mathsf{A} \\ \hline {}_{(i_1+1:i_2)|}\mathsf{A} \\ \hline \vdots \\ \hline {}_{(i_r+1:n)|}\mathsf{A} \end{array}\right]$$

[a] Falta incluir esta notación en las notas de clase

Comencemos construyendo la partición a partir del conjunto y un número (que indicará el número de filas o columnas de la matriz);

30a ⟨*Definición del método* `particion` 30a⟩≡

```
def particion(s,n):
    """ genera la lista de particionamiento a partir de un conjunto y un número
    >>> particion({1,3,5},7)

    [[1], [2, 3], [4, 5], [6, 7]]
    """
    p = list(s | set([0,n]))
    return [ list(range(p[k]+1,p[k+1]+1)) for k in range(len(p)-1) ]
```

This code is used in chunk 27.

y ahora el método de partición por filas y por columnas resulta inmediato:

30b ⟨*Partición de una matriz por filas de bloques* 30b⟩≡

```
elif isinstance(i,set):
    return BlockMatrix ([ [a|self] for a in particion(i,self.m) ])
```

This code is used in chunk 13.
Uses `BlockMatrix` 29.

31a ⟨*Partición de una matriz por columnas de bloques* 31a⟩≡
```
  elif isinstance(j,set):
      return BlockMatrix ([ [self|a for a in particion(j,self.n)] ])
```
This code is used in chunk 11a.
Uses `BlockMatrix` 29.

Pero aún nos falta algo:

Notación en Mates 2

- Si $i_1,\ldots,i_r \in \mathbb{N}$ con $i_1 < \ldots < i_r \leq n$ donde n es el número de filas de $\mathbf{A}$ y $j_1,\ldots,j_s \in \mathbb{N}$ con $j_1 < \ldots < j_s \leq m$ donde m es el número de columnas de $\mathbf{A}$ entonces

$$ {}_{\{i_1,\ldots,i_y\}|}\mathbf{A}_{|\{j_1,\ldots,j_s\}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} {}_{(1:i_1)|}\mathbf{A}_{|(1:j_1)} & {}_{(1:i_1)|}\mathbf{A}_{|(j_1+1:j_2)} & \cdots & {}_{(1:i_1)|}\mathbf{A}_{|(j_s+1:m)} \\ \hline {}_{(i_1+1:i_2)|}\mathbf{A}_{|(1:j_1)} & {}_{(i_1+1:i_2)|}\mathbf{A}_{|(j_1+1:j_2)} & \cdots & {}_{(i_1+1:i_2)|}\mathbf{A}_{|(j_s+1:m)} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline {}_{(i_k+1:n)|}\mathbf{A}_{|(1:j_1)} & {}_{(i_k+1:n)|}\mathbf{A}_{|(j_1+1:j_2)} & \cdots & {}_{(i_k+1:n)|}\mathbf{A}_{|(j_s+1:m)} \end{array}\right] $$

es decir, queremos poder particionar una `BlockMatrix`. Los casos que nos interesan son hacerlo por el lado contrario por el que se particionó la matriz de partida , es decir,

$$ {}_{\{i_1,\ldots,i_r\}|}\left(\mathbf{A}_{|\{j_1,\ldots,j_s\}}\right) \qquad \text{y} \qquad \left({}_{\{i_1,\ldots,i_r\}|}\mathbf{A}\right)_{|\{j_1,\ldots,j_s\}} $$

que, por supuesto, da el mismo resultado. Para dichos casos, programamos el siguiente código que particiona una `BlockMatrix`. Primero el procedimiento para particionar por columnas (inicialmente si sólo hay una fila de matrices, ya que el caso general se vera un poco más abajo):

Es sencillo, si `self.n == 1` la matriz por bloques tiene una única columna.

31b ⟨*Repartición de las columnas de una* `BlockMatrix` 31b⟩≡
```
  def __or__(self,j):
      """ Reparticiona por columna una matriz por cajas """
      if isinstance(j,set):
          if self.n == 1:
              return BlockMatrix([ [ self.lista[i][0]|a  \
                                      for a in particion(j,self.lista[0][0].n)] \
                                      for i in range(self.m) ])

          ⟨Caso general de reparticion por columnas 32c⟩
```
This code is used in chunk 29.
Uses `BlockMatrix` 29.

y hacemos lo mismo para particionar por filas cuando `self.m == 1` (la matriz por bloques tiene una única fila):

32a ⟨*Repartición de las filas de una* `BlockMatrix` 32a⟩≡
```
def __ror__(self,i):
    """ Reparticiona por filas una matriz por cajas """
    if isinstance(i,set):
        if self.m == 1:
            return BlockMatrix([[ a|self.lista[0][j]  \
                                  for j in range(self.n) ] \
                                  for a in particion(i,self.lista[0][0].m)])

        ⟨Caso general de reparticion por filas 33a⟩
```

This code is used in chunk 29.
Uses `BlockMatrix` 29.

Pero aún nos falta el código del caso general. Debemos decidir el significado de reparticionar una matriz por el mismo lado por el que ya ha sido particionada. Seguiremos un criterio práctico. . . eliminar el anterior particionado y aplicar el nuevo. Así:

$$\begin{aligned} {}_{\langle i'_1,\dots,i'_r\rangle|}\Big({}_{\langle i_1,\dots,i_k\rangle|}\mathbf{A}_{|\langle j_1,\dots,j_s\rangle}\Big) &= {}_{\langle i'_1,\dots,i'_r\rangle|}\mathbf{A}_{|\langle j_1,\dots,j_s\rangle} \\ \Big({}_{\langle i_1,\dots,i_k\rangle|}\mathbf{A}_{|\langle j_1,\dots,j_s\rangle}\Big)_{|\langle j'_1,\dots,j'_r\rangle} &= {}_{\langle i_1,\dots,i_k\rangle|}\mathbf{A}_{|\langle j'_1,\dots,j'_r\rangle} \end{aligned}$$

Para ello nos viene bien extraer el conjunto selector a partir del resultado:

32b ⟨*Definición del procedimiento de generación del conjunto clave para particionar* 32b⟩≡
```
def key(L):
    """ genera el conjunto clave a partir de una secuencia de tamaños
    número
    >>> key([1,2,1])

    {1, 3, 4}
    """
    return set([ sum(L[0:i]) for i in range(1,len(L)+1) ])
```

This code is used in chunk 27.

Así, los casos generales consisten en reparticionar de nuevo:

32c ⟨*Caso general de reparticion por columnas* 32c⟩≡
```
elif self.n > 1:
     return (key(self.lm) | Matrix(self)) | j
```

This code is used in chunk 31b.
Uses `Matrix` 7.

33a ⟨*Caso general de reparticion por filas* 33a⟩≡
```
elif self.m > 1:
    return i | (Matrix(self) | key(self.ln))
```
This code is used in chunk 32a.
Uses `Matrix` 7.

Observación 3. El método `__or__` está definido para conjuntos . . . realiza la unión. Por tanto si `A` es una matriz, la orden `{1,2}|({3}|A)` no da igual que `({1,2}|{3})|A`. La primera es igual da `{1,2}|A`, mientras que la segunda da `{1,2,3}|A`.

B Métodos de representación para el entorno Jupyter

El método `html`, escribe el inicio y el final de un párrafo en html y en medio del párrafo escribirá la cadena TeX (que contendrá el código LaTeXde las expresiones matemáticas que queremos que se muestren en pantalla cuando usamos Jupyter Notebook que a su vez usa la librería de Java MathJax que interpreta código LaTeX).

El método `latex`, convertirá en cadena de caracteres el input si éste es un número, y en caso contrario llamara al método latex de la clase desde la que se invocó a este método (es un truqui recursivo para que trate de manera parecida la expresiones en LaTeXy los tipos de datos que corresponden a números cuando se trata de escribir algo en LaTeX, así, si el componente de un vector es una fracción, el método `latex` general llamará el método `latex` de la clase fracción para representar la fracción —ello nos permitirá más adelante representar vectores o matrices con, por ejemplo, polinomios u otros objetos).

33b ⟨*Métodos html y latex generales* 33b⟩≡
```
def html(TeX):
    """ Plantilla HTML para insertar comandos LaTeX """
    return "<p style=\"text-align:center;\">$" + TeX + "$</p>"

def latex(a):
     if isinstance(a,float) | isinstance(a,int):
         return str(a)
     else:
         return a.latex()
```
This code is used in chunk 27.

33c ⟨*Métodos html y latex para fraciones* 33c⟩≡
```
def _repr_html_(self):
    return html(self.latex())

def latex_fraction(self):
    if self.denominator == 1:
         return repr(self.numerator)
    else:
         return "\\frac{"+repr(self.numerator)+"}{"+repr(self.denominator)+"}"
```

```
setattr(Fraction, '_repr_html_', _repr_html_)
setattr(Fraction, 'latex',       latex_fraction)
```
This code is used in chunk 27.

34a ⟨*Definición de* inverso 34a⟩≡
```
def inverso(x):
    if x==1 or x == -1:
        return x
    else:
        y = 1/Fraction(x)
        if y.denominator == 1:
             return y.numerator
        else:
             return y
```
This code is used in chunk 27.

C Completando la clase `Vector`

C.1 Otras formas de instanciar un `Vector`

Si `sis` es un `Vector` entonces se copia en `self.lista` la `lista` de dicho `Vector` (es decir, `sis.lista`). Dicho de otra forma, creamos una copia del vector. Si el argumento no es correcto se informa con un error.

34b ⟨*Creación del atributo* lista *cuando* sis *es un* Vector 34b⟩≡
```
elif isinstance(sis, Vector):
    self.lista = sis.lista
else:
    raise ValueError('¡el argumento: debe ser una lista, tupla o Vector')
```
Root chunk (not used in this document).
Uses `Vector` 4b.

C.2 Representación de la clase `Vector`

Ahora necesitamos indicar a Python cómo representar los objetos de tipo `Vector`.

Los vectores, son secuencias finitas de números que representaremos con paréntesis, bien en forma de fila

$$\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

o bien en forma de columna

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Definimos tres representaciones distintas. Una para la línea de comandos de Python de manera que escriba `Vector` y a continuación encierre la representación de `self.lista` (el sistema de números), entre paréntesis. Por ejemplo, si la lista es `[a,b,c]`, Python nos mostrará en la linea de comandos: `Vector([a,b,c])`.

La representación en LaTeX encierra un vector (en forma de fila o de columna) entre paréntesis; y es usada a su vez por la representación html usada por el entorno Jupyter.

35a ⟨*Representación de la clase* `Vector` 35a⟩≡

```
def __repr__(self):
    """ Muestra el vector en su representación python """
    return 'Vector(' + repr(self.lista) + ')'

def _repr_html_(self):
    """ Construye la representación para el entorno jupyter notebook """
    return html(self.latex())

def latex(self):
    """ Construye el comando LaTeX """
    if self.rpr == 'fila':
        return '\\begin{pmatrix}' + \
               ',&'.join([latex(self|i)   for i in range(1,self.n+1)]) + \
               '\\end{pmatrix}'
    else:
        return '\\begin{pmatrix}' + \
               '\\\\'.join([latex(self|i) for i in range(1,self.n+1)]) + \
               '\\end{pmatrix}'
```

This code is used in chunk 4b.

D Completando la clase Matrix

D.1 Otras formas de instanciar una Matrix

Si se introduce una lista (tupla) de listas o tuplas, creamos una matriz fila a fila. Si se introduce una `Matrix` creamos una copia de la matriz. Si se introduce una `BlockMatrix` se elimina el particionado y que crea una única matriz. Si el argumento no es correcto se informa con un error.

35b ⟨*Creación del atributo* `lista` *cuando* `sis` *no es una lista o tupla de* `Vector`*es* 35b⟩≡

```
if isinstance(sis, Matrix):
    self.lista  =  sis.lista

elif isinstance(sis, BlockMatrix):
    self.lista  =  [Vector([ sis.lista[i][j]|k|s  \
                        for i in range(sis.m) for s in range(1,(sis.lm[i])+1) ])  \
                        for j in range(sis.n) for k in range(1,(sis.ln[j])+1) ]

⟨Verificación de que al instanciar Matrix el argumento sis es indexable 36a⟩

elif isinstance(sis[0], (list, tuple)):
    ⟨Verificación de que todas las filas de la matriz tendrán la misma longitud 36b⟩
    self.lista  =  [ Vector([ sis[i][j] for i in range(len(sis   )) ]) \
                              for j in range(len(sis[0])) ]
```

This code is used in chunk 6.
Uses `BlockMatrix` 29, `Matrix` 7, and `Vector` 4b.

D.2 Códigos que verifican que los argumentos son correctos

36a ⟨*Verificación de que al instanciar* `Matrix` *el argumento* `sis` *es indexable* 36a⟩≡

```
elif not isinstance(sis, (str, list, tuple)):
    raise ValueError('¡el argumento debe ser una lista o tupla de vectores una lista (o tupla) de listas
```

This code is used in chunk 35b.
Uses `BlockMatrix` 29 and `Matrix` 7.

36b ⟨*Verificación de que todas las filas de la matriz tendrán la misma longitud* 36b⟩≡

```
if not all ( (type(sis[0]) == type(v)) and (len(sis[0]) == len(v)) for v in iter(sis)):
    raise ValueError('no todas son listas o no tienen la misma longitud!')
```

This code is used in chunk 35b.

36c ⟨*Verificación de que todas las columnas de la matriz tendrán la misma longitud* 36c⟩≡

```
if not all ( (Vector == type(v)) and (sis[0].n == v.n) for v in iter(sis)):
    raise ValueError('no todos son vectores, o no tienen la misma longitud!')
```

This code is used in chunk 6.
Uses `Vector` 4b.

D.3 Operador selector y transposición para la clase `Matrix`

D.4 Representación de la clase `Matrix`

Y como en el caso de los vectores, construimos los dos métodos de presentación. Una para la consola de comandos que escribe `Matrix` y entre paréntesis la lista de listas (es decir la lista de filas); y otra para el entorno Jupyter (que a su vez usa la representación LaTeX que representa las matrices entre corchetes como en las notas de la asignatura)

37a ⟨*Representación de la clase* `Matrix` 37a⟩≡

```
def __repr__(self):
    """ Muestra una matriz en su representación python """
    return 'Matrix(' + repr(self.lista) + ')'

def _repr_html_(self):
    """ Construye la representación para el  entorno jupyter notebook """
    return html(self.latex())

def latex(self):
    """ Construye el comando LaTeX """
    return '\\begin{bmatrix}' + \
            '\\\\'.join(['&'.join([latex(i|self|j) for j in range(1,self.n+1) ]) \
                                                  for i in range(1,self.m+1) ]) + \
           '\\end{bmatrix}'
```

This code is used in chunk 7.

E Vectores y Matrices especiales

Notación en Mates 2

Los vectores cero **0** y las matrices cero **0** se pueden implementar como subclases de la clase `Vector` y `Matrix` (pero tenga en cuenta que Python necesita conocer el número de componentes del vector y el orden de la matriz):

37b ⟨*Definición de vector nulo:* `V0` 37b⟩≡

```
class V0(Vector):
    def __init__(self, n ,rpr = 'columna'):
        """ Inicializa el vector nulo de n componentes"""

        super(self.__class__ ,self).__init__([0 for i in range(n)],rpr)
```

This code is used in chunk 27.
Uses `Vector` 4b.

Y lo mismo hacemos para matrices

38a ⟨*Definición de matriz nula:* `M0` 38a⟩≡
```
class M0(Matrix):

    def __init__(self, m, n=None):
        """ Inicializa una matriz nula de orden n """
        if n is None:
            n = m

        super(self.__class__ ,self).__init__( \
                      [[0 for i in range(n)] for j in range(m)])
```
This code is used in chunk 27.
Uses `Matrix` 7.

También debemos definir la matriz identidad de orden n (y sus filas y columnas). En los apuntes de clase no solemos indicar expresamente el orden de la matriz identidad (pues normalmente se sobrentiende por el contexto). Pero esta habitual imprecisión no nos la podemos permitir con el ordenador.

Notación en Mates 2

- $\mathbf{I}$ (de orden n) es la matriz tal que ${}_{i|}\mathbf{I}_{|j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$.

La definición de la fila o columna i-ésima de la identidad ($\mathbf{I}_{|i} = {}_{i|}\mathbf{I}$) creo que me la puedo ahorrar.

38b ⟨*Definición de vector fila o columna de la matriz identidad* `e` 38b⟩≡
```
class e(Vector):

    def __init__(self, i,n ,rpr = 'columna'):
        """ Inicializa el vector e_i  de tamaño n """

        super(self.__class__ ,self).__init__([((i-1)==k)*1 for k in range(n)],rpr)
```
This code is used in chunk 27.
Uses `Vector` 4b.

Lo importante es la matriz identidad.

38c ⟨*Definición de la matriz identidad:* `I` 38c⟩≡
```
class I(Matrix):

    def __init__(self, n):
        """ Inicializa la matriz identidad de tamaño n """
```

```
            super(self.__class__ ,self).__init__(\
                           [[(i==j)*1 for i in range(n)] for j in range(n)])
```

This code is used in chunk 27.
Uses `Matrix` 7.

E.1 Representación de la clase BlockMatrix

A continuación definimos las reglas de representación para las matrices por bloques. `Matrix` y `BlockMatrix` son objetos distintos. Los bloques se separan con lineas verticales y horizontales; pero si hay un único bloque, no habrá ninguna línea vertical u horizontal por medio de la representación de la `BlockMatrix`. Así, si una matriz por bloques tienen un único bloque, pintaremos una caja alrededor para distinguirla de una matriz ordinaria.

39 ⟨*Representación de la clase* `BlockMatrix` 39⟩≡

```
  def __repr__(self):
      """ Muestra una matriz en su representación python """
      return 'BlockMatrix(' + repr(self.lista) + ')'

  def _repr_html_(self):
      """ Construye la representación para el  entorno jupyter notebook """
      return html(self.latex())

  def latex(self):
      """ Escribe el código de LaTeX """
      if self.m == self.n == 1:
          return \
            '\\begin{array}{|c|}' + \
            '\\hline ' + \
            '\\\\ \\hline '.join( \
                  ['\\\\'.join( \
                  ['&'.join( \
                  [latex(self.lista[0][0]) ]) ]) ])  + \
            '\\\\ \\hline ' + \
            '\\end{array}'
      else:
          return \
            '\\left[' + \
            '\\begin{array}{' + '|'.join([n*'c' for n in self.ln])  + '}' + \
            '\\\\ \\hline '.join( \
                  ['\\\\'.join( \
                  ['&'.join( \
                  [latex(self.lista[i][j]|k|s) \
                  for j in range(self.n) for k in range(1,self.ln[j]+1) ]) \
                  for s in range(1,self.lm[i]+1) ]) for i in range(self.m) ])  + \
            '\\\\' + \
            '\\end{array}' + \
            '\\right]'
```

This code is used in chunk 29.

F Code chunks

⟨Caso general de reparticion por columnas 32c⟩ 31b, 32c
⟨Caso general de reparticion por filas 33a⟩ 32a, 33a
⟨Chunk de ejemplo que define la lista a 42a⟩ 42a, 43
⟨Chunk final que indica qué tipo de objeto es a y hace unas sumas 44⟩ 43, 44
⟨Composición de Trasformaciones Elementales o aplicación sobre las filas de una Matrix 24⟩ 24, 25a
⟨Copyright y licencia GPL 41⟩ 27, 41
⟨Creación del atributo lista cuando sis es un Vector 34b⟩ 34b
⟨Creación del atributo lista cuando sis no es una lista o tupla de Vectores 35b⟩ 6, 35b
⟨Definición de inverso 34a⟩ 27, 34a
⟨Definición de la clase BlockMatrix 29⟩ 27, 29
⟨Definición de la clase Matrix 7⟩ 7, 27
⟨Definición de la clase T (Transformación Elemental) 25a⟩ 25a, 27
⟨Definición de la clase Vector 4b⟩ 4b, 27
⟨Definición de la igualdad entre Vectores 17b⟩ 4b, 17b
⟨Definición de la igualdad entre dos Matrix 21b⟩ 7, 21b
⟨Definición de la matriz identidad: I 38c⟩ 27, 38c
⟨Definición de matriz nula: M0 38a⟩ 27, 38a
⟨Definición de vector fila o columna de la matriz identidad e 38b⟩ 27, 38b
⟨Definición de vector nulo: V0 37b⟩ 27, 37b
⟨Definición del método particion 30a⟩ 27, 30a
⟨Definición del procedimiento de generación del conjunto clave para particionar 32b⟩ 27, 32b
⟨EjemploLiterateProgramming.py 43⟩ 43
⟨Inicialización de la clase Matrix 6⟩ 6, 7
⟨Inicialización de la clase T (Transformación Elemental) 23b⟩ 23b, 25a
⟨Inicialización de la clase Vector 4a⟩ 4a, 4b
⟨Métodos html y latex generales 33b⟩ 27, 33b
⟨Métodos html y latex para fraciones 33c⟩ 27, 33c
⟨normal 28a⟩ 27, 28a
⟨notacion.py 27⟩ 27
⟨Operador selector por la derecha para la clase Matrix 11a⟩ 7, 11a
⟨Operador selector por la derecha para la clase Vector 9a⟩ 4b, 9a
⟨Operador selector por la izquierda para la clase Matrix 13⟩ 7, 13
⟨Operador selector por la izquierda para la clase Vector 10a⟩ 4b, 10a
⟨Operador transposición para la clase Matrix 12a⟩ 7, 12a
⟨Partición de una matriz por columnas de bloques 31a⟩ 11a, 31a
⟨Partición de una matriz por filas de bloques 30b⟩ 13, 30b
⟨Producto de un Vector por un escalar a su derecha, o por una Matrix a su derecha 17a⟩ 4b, 17a
⟨Producto de un Vector por un escalar a su izquierda, o por otro Vector a su izquierda 16a⟩ 4b, 16a
⟨Producto de una Matrix por un escalar a su izquierda 19b⟩ 7, 19b
⟨Producto de una Matrix por un escalar, un vector o una matriz a su derecha 21a⟩ 7, 21a
⟨Repartición de las columnas de una BlockMatrix 31b⟩ 29, 31b
⟨Repartición de las filas de una BlockMatrix 32a⟩ 29, 32a
⟨Representación de la clase BlockMatrix 39⟩ 29, 39
⟨Representación de la clase Matrix 37a⟩ 7, 37a
⟨Representación de la clase Vector 35a⟩ 4b, 35a
⟨Segundo chunk de ejemplo que cambia el último elemento de la lista a 42b⟩ 42b, 43
⟨sistema 28b⟩ 27, 28b
⟨Suma de Matrix 18b⟩ 7, 18b
⟨Suma de Vectores 14b⟩ 4b, 14b
⟨Texto de ayuda de la clase Matrix 5⟩ 5, 7
⟨Texto de ayuda de la clase T (Transformación Elemental) 23a⟩ 23a, 25a
⟨Texto de ayuda de la clase Vector 2⟩ 2, 4b
⟨Texto de ayuda para el operador producto por la derecha en la clase Matrix 20⟩ 20, 21a
⟨Texto de ayuda para el operador producto por la derecha en la clase Vector 16b⟩ 16b, 17a
⟨Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda en la clase Matrix 19a⟩ 19a, 19b

⟨*Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda en la clase* `Vector` 15⟩ 15, 16a
⟨*Texto de ayuda para el operador selector por la derecha para la clase* `Matrix` 10b⟩ 10b, 11a
⟨*Texto de ayuda para el operador selector por la derecha para la clase* `Vector` 8⟩ 8, 9a
⟨*Texto de ayuda para el operador selector por la izquierda para la clase* `Matrix` 12b⟩ 12b, 13
⟨*Texto de ayuda para el operador selector por la izquierda para la clase* `Vector` 9b⟩ 9b, 10a
⟨*Texto de ayuda para el operador suma en la clase* `Matrix` 18a⟩ 18a, 18b
⟨*Texto de ayuda para el operador suma en la clase* `Vector` 14a⟩ 14a, 14b
⟨*Texto de ayuda para el operador transposición de la clase* `Matrix` 11b⟩ 11b, 12a
⟨*Transformaciones elementales de las columnas de una* `Matrix` 25b⟩ 7, 25b
⟨*Transformaciones elementales de las filas de una* `Matrix` 26⟩ 7, 26
⟨*Verificación de que al instanciar* `Matrix` *el argumento* `sis` *es indexable* 36a⟩ 35b, 36a
⟨*Verificación de que todas las columnas de la matriz tendrán la misma longitud* 36c⟩ 6, 36c
⟨*Verificación de que todas las filas de la matriz tendrán la misma longitud* 36b⟩ 35b, 36b

Chunk de Licencia

41 ⟨*Copyright y licencia GPL* 41⟩≡

```
# Copyright (C) 2019  Marcor Bujosa

# This program is free software: you can redistribute it and/or modify
# it under the terms of the GNU General Public License as published by
# the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
# (at your option) any later version.

# This program is distributed in the hope that it will be useful,
# but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
# MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  See the
# GNU General Public License for more details.

# You should have received a copy of the GNU General Public License
# along with this program.  If not, see <https://www.gnu.org/licenses/
```

This code is used in chunk 27.

Part III
Sobre este documento

Con ánimo de que la documentación sea más didáctica, al principio muestro las partes más didácticas del código al principio, y relego las otras. Así puedo destacar cómo esta librería de Python es una implementación literal de las definiciones dadas en mis notas de la asignatura de Mates II. Para ello uso noweb.

Literate progamming con noweb

Este documento está escrito usando noweb. Es un entorno que permite escribir a la vez tanto código como la documentación del mismo.

El código se escribe a trozos o "chunks" como por ejemplo este:

42a ⟨*Chunk de ejemplo que define la lista* `a` 42a⟩≡
```
a = ["Matemáticas II es mi asignatura preferida", "Cómo mola el Python", 1492, "Noweb"]
```
This code is used in chunk 43.

y este otro chunk:

42b ⟨*Segundo chunk de ejemplo que cambia el último elemento de la lista* `a` 42b⟩≡
```
a[-1] = 10
```
This code is used in chunk 43.

Cada chunk recibe un nombre (que yo uso para describir lo que hace el código dentro del chunk). Lo maravilloso es que dentro de un chunk se pueden insertar otros chunks. Así, podemos programar el siguiente guión de Python (`EjemploLiterateProgramming.py`) que enumera los elementos de una tupla y después hace unas sumas:

```
43  ⟨EjemploLiterateProgramming.py 43⟩≡

      ⟨Chunk de ejemplo que define la lista a 42a⟩
      ⟨Segundo chunk de ejemplo que cambia el último elemento de la lista a 42b⟩

      for indice, item in enumerate(a, 1):
          print (indice, item)

      ⟨Chunk final que indica qué tipo de objeto es a y hace unas sumas 44⟩
    Root chunk (not used in this document).
```

Este modo de escribir el código permite destacar unas partes y pasar por alto otras. Por ejemplo, *del chunk del recuadro de arriba me interesa que se vea el código del bucle que permite enumerar los elementos de una lista*. Lo demás es accesorio y se puede consultar en los correspondientes chunks. Como el nombre de dichos chunks es autoexplicativo, mirando el recuadro anterior es fácil hacerse una idea de que hace el programa "`EjemploLiterateProgramming.py`" en su conjunto.

Fíjese que el número al final del nombre de cada chunk corresponde a la página donde se puede consultar su codigo. Por ejemplo, el último chunk de este ejemplo se encuentra en la Página 44 de este documento (y justo detrás podrá ver cómo queda el código completo).

Advertencia

El conjunto de símbolos disponibles para definir operadores en Python es muy limitado. Esto nos obliga a usar algunos símbolos que difieren de los usados en las notas de la asignatura (por ejemplo, Python no dispone del símbolo "$^{\intercal}$", por ello, para denotar la transposición nos veremos forzados a usar el operador `__invert__`, es decir, la tilde "`~`" de Python, que además deberemos colocar a la izquierda de la matriz que transponemos).

Mates II	Python
$\mathbf{A}^{\intercal}$	`~A`

Afortunadamente otros símbolos si coincidirán con los usados en las notas. Por ejemplo, en Python disponemos de la barra "|" (operador `__or__`), que usaremos para la selección de componentes tanto por la derecha como por la izquierda.

Mates II	Python
$\boldsymbol{v}_{\vert i}$	`v|i`
${}_{i\vert}\boldsymbol{v}$	`i|v`
$\mathbf{A}_{\vert j}$	`A|j`
${}_{i\vert}\mathbf{A}$	`i|A`

Por otra parte, algunos símbolos son necesarios en Python, aunque no se escriban explícitamente en las notas de la asignatura. Por ejemplo, en las notas expresamos la aplicación de una operación elemental sobre las filas (columnas) de una matriz con subíndices a izquierda (derecha). Python no sabe interpretar este modo de escribir, necesita un símbolo (`&`) para indicar que la transformación elemental actua sobre la matriz.

Mates II	Python	Mates II	Python
$\mathsf{A}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$	`A & T({i,j})`	${}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{A}$	`T({i,j}) & A`
$\mathsf{A}_{\underset{[a\cdot\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}$	`A & T((i,a))`	${}_{\underset{[a\cdot\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{A}$	`T((i,a)) & A`
$\mathsf{A}_{\underset{[\boldsymbol{i}+a\cdot\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$	`A & T((i,j,a))`	${}_{\underset{[\boldsymbol{i}+a\cdot\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{A}$	`T((i,j,a)) & A`

Último chunk del ejemplo de literate programming de la introducción

Este es uno de los trozos de código del ejemplo de la introducción.

44 ⟨*Chunk final que indica qué tipo de objeto es* `a` *y hace unas sumas* 44⟩≡

```
type(a)
2+2
10*3+20
```

This code is used in chunk 43.

El código completo del ejemplo usado para explicar cómo funciona el "Literate Programming" queda así:

```
a = ["Matemáticas II es mi asignatura preferida", "Cómo mola el Python", 1492, "Noweb"]
a[-1] = 10

for indice, item in enumerate(a, 1):
    print (indice, item)

type(a)
2+2
10*3+20
```