Chapitre 4

Quelques exemples de graphe

section 1 : les arbres

Il existe plusieurs notions différentes d'arbres. Pour éviter la confusion, des terminologies différentes sont parfois employées : arborescences, arbres binaires, arbres enracinés, etc … Mais ce n'est pas toujours le cas.

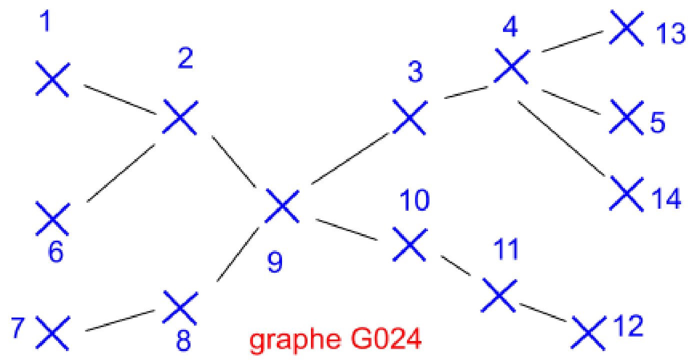
1.1 cas non orienté

Voici une définition simple d'un arbre dans le cas des graphes non orientés ; elle comporte cependant une petite difficulté qui est la notion d'acyclicité. Cette notion d'acyclicité considère comme non intéressants les cycles de longueur nulle ou les cycles non simples comme par exemple le cycle (1,e,2,e,1) qui utilise 2 fois une arête d'extrémités les sommets 1 et 2.

Définition
Un graphe non orienté G est *acyclique* si il ne contient aucun cycle simple de longueur non nulle.

Définition
Un *arbre* est un graphe non orienté connexe et acyclique.

Exemple :
Voici un exemple d'arbres à 14 sommets et 13 arêtes.



Il existe un grand nombre de caractérisations d'un arbre. En voici 5 autres :

Propriété (5 caractérisation d'un arbre)
Pour tout graphe non orienté non vide G=(V,E,f), les assertions suivantes sont équivalentes :

1. G est un arbre (c.a.d connexe et acyclique et non vide).
2. G est connexe et est minimal à vérifier cette propriété (c.a.d toute suppression d'arête sans suppression de sommet déconnecte G).
3. G est connexe et vérifie : $|V| \geq |E|+1$.
4. G est acyclique et est maximal à vérifier cette propriété (c.a.d tout ajout de nouvelle arête sans ajout de sommet rend G non acyclique).
5. G est acyclique et vérifie : $|V| \leq |E|+1$.
6. tout couple de sommets (s,t) admet un unique chemin simple allant de s à t.

Preuve : établie en exercice

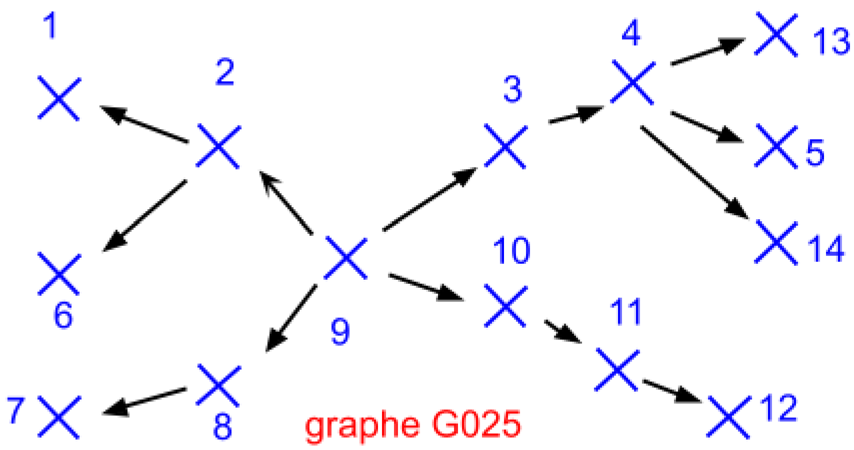
Une 7ème caractérisation de l'arbre est celle récursive suivante :
7. G possède un un unique somme et aucune arête ou sinon G possède un sommet de degré 1 tel que G\s est un arbre.

4.2 cas orienté

Cette notion d'arbres orientés est très souvent désignée par le terme *arborescence.*

Définition
Un graphe orienté G est un *arbre* (une *arborescence*) si il existe un sommet s tel que pour tout sommet t de G il existe un unique chemin de s à t. Le sommet s, nécessairement unique, est appelé la *racine* de G.

Exemple :
Voici un exemple d'arborescences à 14 sommets et 13 arcs. La racine est le seul sommet qui permet d'accéder à tout autre sommet, ici le sommet 9.



section 2 quelques autres familles de graphes célèbres

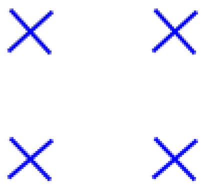
Dans les exemples ci-après, nous avons omis de dessiner les noms des sommets.

Voici un ensemble de graphes assez intéressants : les graphes discrets :

2.1) discret

Un graphe est *discret* si il ne possède aucune arête (ou aucun arc) :

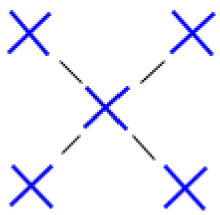
Voici un graphe discret à 4 sommets :



2.2) étoile

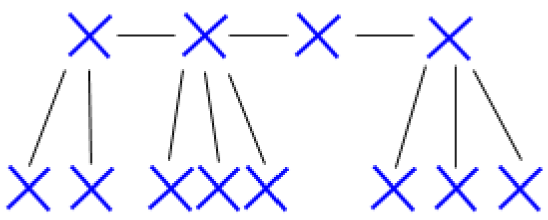
Une *étoile* est un arbre tel qu'un des sommets est voisin de tout autre sommet.

Voici une étoile à 5 sommets.



2.3) chenille

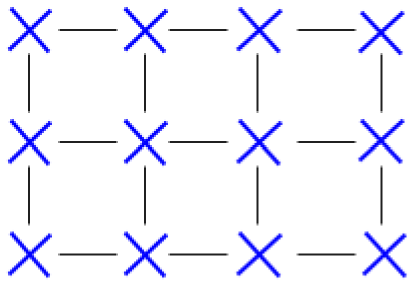
Une *chenille* est un arbre tel que tout sommet de degré ≥ 2 est adjacent à au plus deux sommets de degré ≥ 2.



2.4) grille

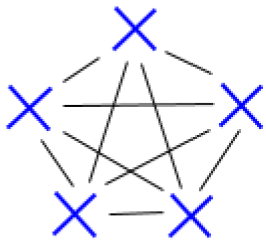
La *grille* n*m est le graphe, noté $G_{n,m}$, ([1,n]*[1,m],E) où E contient tout couple {(i,j),(k,l)} vérifiant $(i = k \wedge |j - l| = 1) \vee (|i - k| = 1 \wedge j = l)$.

Voici la grille 3*4 :



2.5) graphe complet

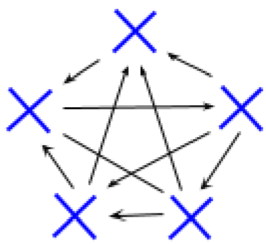
Le graphe *complet* à n sommets, noté K_n, est le graphe simple non orienté sans boucle où tous les sommets sont deux à deux adjacents égal à $([1,n],\{\{i,j\}\subseteq[1,n] | i\neq j\})$.
Ci-dessous K_5.



Propriété : le graphe K_5 est le plus petit graphe en nombre de sommets à ne pas être planaire.

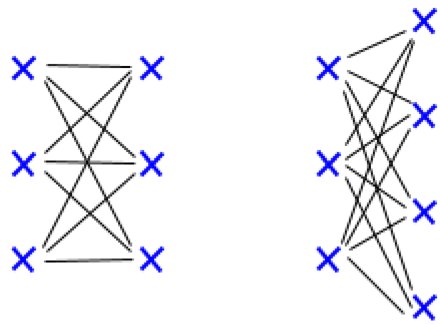
2.6) tournoi

Un *tournoi* est un graphe orienté obtenu à partir d'un graphe complet en orientant chaque arête {x,y} en choisissant ou bien l'arc (x,y) ou bien l'arc (y, x).
Ci-dessous un tournoi à 5 sommets.



2.7) biparti complet

Un *biparti complet* est un graphe simple non orienté G tel que V_G admet une partition vérifiant $E_G = \{\{a,b\} \mid a\in A \text{ et } b\in B\}$.
Ici les bipartis complets $K_{3,3}$ et $K_{3,4}$

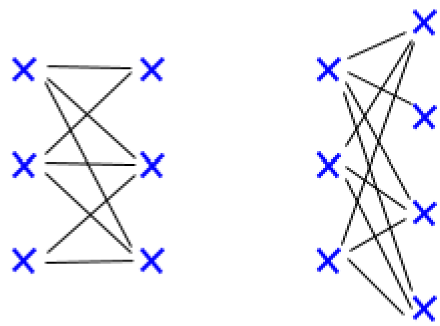


Propriété : K3,3 est le plus petit graphe en nombre d'arêtes à ne pas être planaire.

2.8) biparti

Un graphe *biparti* est un graphe obtenu à partir d'un biparti complet en supprimant des arêtes.

Voici deux bipartis (incomplets) :

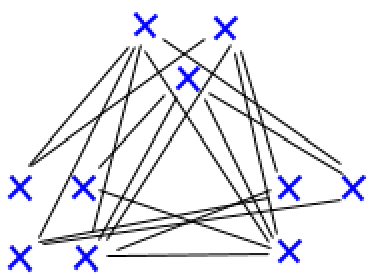


2.9) k-colorable

Graphes k-colorables

Soit un entier k. Une *k-coloration* d'un graphe est une fonction $\phi : V_G \rightarrow [1,k]$ qui associe à toute paire de sommets adjacents des entiers différents. Un graphe est *k-colorable* si il admet une k-coloration.

Voici un graphe 3-colorable ; le dessin exhibe une 3-coloration possible ϕ : l'ensemble de sommets $\phi^{-1}(1)$ est dessiné en haut, $\phi^{-1}(2)$ en bas à gauche, $\phi^{-1}(3)$ en bas à droite.



Propriété : Un graphe est biparti si et seulement si il est 2-colorable.

Ce qui permet de présenter l'une des difficultés algorithmiques les plus célèbres :

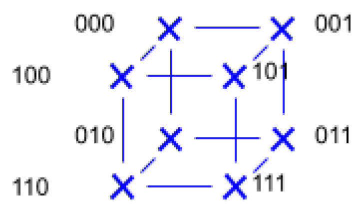
Le problème `3-colorabilité` (ou `est3-colorable`)
`Entrée : un graphe G`
`Sortie : le booléen (G est 3-colorable)`
n'admet pas de solution algorithmique connue de complexité en temps polynomiale. Autrement dit, l'humanité ne sait pas en 2021 si `3-colorabilité` peut être résolu en temps polynomial.

2.10) hypercube

Pour tout entier n, l'*hypercube de dimension n* est le graphe non orienté, noté H_n, ainsi défini :

- ses sommets sont les mots binaires de longueur n
- deux sommets sont adjacents s'ils diffèrent par exactement un bit.

Voici l' hypercube H_3



Propriété : pour tout entier n, on a : $H_n=(H_1)^n$