Chapitre 2
Topologie

Ce chapitre présente la notion de *chemin* : il en découle un ensemble de notions parmi les plus importantes en ce qui concerne les graphes. Pour information, le terme “topos” est d’origine grec et signifie *lieu*.

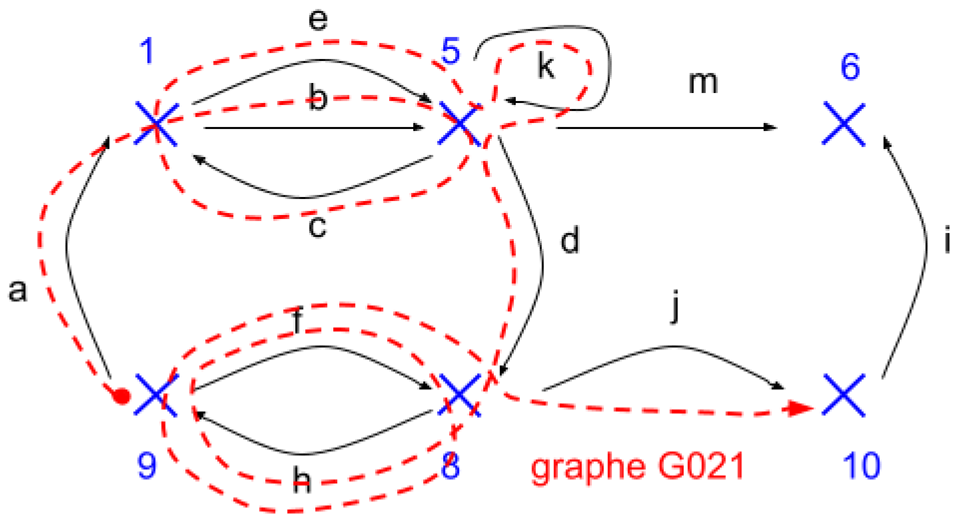
section 1 : chemin

Un chemin permet de décrire précisément et sans ambiguïté comment aller d’un sommet s à un sommet t en utilisant les arcs ou les arêtes.

Exemple :

Le dessin ci-dessous présente sous la forme d’une ligne rouge en trait pointillé un chemin allant du sommet 9 au sommet 10. La définition formelle du chemin se fait au moyen de la séquence alternant sommets et arcs :

(9,a,1,b,5, c,1, e,5,k,5,d,8,h,9,f,8,h,9,f,8,j,10).



Une définition universelle, valable pour tous les types de graphes, consiste à utiliser une séquence alternant sommets et arcs (ou arêtes) :

Définition Chemin

Soit G un graphe orienté ou non. Un chemin dans G est une séquence (finie) w de la forme $(s_1, e_1, \ldots, e_m, s_{m+1})$ où pour tout $i \in [1, m]$:

- si G est orienté, e_i est un arc allant du sommet s_i au sommet s_{i+1} .
- si G est non orienté, ei est une arête d’extrémités les sommets s_i et s_{i+1} .

Le chemin est dit *aller* de s_1 à s_{m+1} ; s_1 (resp. s_{m+1}) est l’*extrémité initiale* (resp. *terminale*) de w. Un *cycle* est un chemin dont les 2 extrémités sont égales.

Un chemin est *simple* si il contient au plus 1 fois chaque arc ou chaque arête. Il est *élémentaire* si il contient au plus 1 fois chaque sommet ; exception faite des deux extrémités qui peuvent être égales : cas d’un cycle.

Définitions alternatives équivalentes

La littérature fournit d'autres définitions équivalentes (ou presque) des chemins en considérant un chemin soit comme une séquence de sommets soit comme une séquence d'arcs (ou d'arêtes). Ces définitions ont de petits défauts : par exemple, de ne pas pouvoir définir des chemins de longueur nulle, de ne pas mentionner les extrémités sommets, etc ...

section 2 : longueur, concaténation et distance

Définition Longueur, longueur pondérée

Soit G un graphe muni d'une fonction poids sur les arcs (ou les arêtes) $p_G : E_G \rightarrow \mathbb{R}$.
La *longueur* du chemin $w=(s_1, e_1, \ldots, e_l, s_{m+1})$ est le réel $p_G(e_1)+\ldots+p_G(e_m)$, noté $|w|$.

Si G ne dispose pas d'un poids sur E_G, on associe à chaque arc (ou arête) le poids 1.

Attention : parfois, pour un chemin w, on souhaite considérer simultanément la somme des poids des arcs (ou arêtes) ainsi que leur nombre. Auquel cas, on peut employer les termes “longueur pondérée” et “longueur non pondérée”.

Définition Concaténation

Soient deux chemins p et q d'un graphe G telles que :

l'extrémité terminale de p est l'extrémité initiale de q .

La *concaténation* de p et q est le chemin noté p•q égale à la séquence obtenue en concaténant la séquence p et la séquence q débarrassée de son extrémité initiale.

Propriété : longueur est un morphisme additif

La concaténation de deux chemins p et q vérifient :

$$|p \bullet q| = |p| + |q|$$

Définition Distance

Soient deux sommets s et t d'un graphe G. La *distance* de s à t est la quantité notée $\delta_G(s,t)$:

- $+\infty$ si il n'existe pas de chemin de s à t.
- ou sinon, la plus petite longueur des chemins de s à t, si elle existe.
- ou sinon, $-\infty$.

L'utilisation du terme distance ci-avant est légitime. La propriété suivante affirme que la fonction distance est bien une “distance” :

Propriété :

Tous sommets s,t,u d'un graphe G vérifient : $\delta_G(s,u) \leq \delta_G(s,t) + \delta_G(t,u)$

Preuve :

cette propriété sera établie en TD. Nous supposerons ici l'égalité $(-\infty)+(+\infty)=+\infty$

Définitions :

Conséquence de cette notion de distance, on peut définir les notions induites de diamètre, d'excentricité, de barycentre, etc ….

section 3 : parties connexes, composantes connexes

Définition connexité

Soit G un graphe. Un ensemble de sommets U de G est *connexe* si pour tous sommets s et t de U il existe un chemin à sommets tous dans U allant de s à t.
Une *composante connexe* est un ensemble connexe maximal selon l'inclusion à être connexe (tout ensemble le contenant strictement n'est pas connexe).
Un graphe est *connexe* si son ensemble de sommets est connexe.

Propriété

L'union de deux parties connexes d'intersection non vide est connexe.

Preuve :

Soient un graphe G, A et B deux ensembles connexes et dont l'intersection contient un sommet x. Démontrons que pour tous sommets a et b de $A \cup B$, il existe un chemin de a à b à sommets tous dans $A \cup B$.
Si a et b appartiennent tous deux à A ou tous deux à B, la conclusion est immédiate. Sinon, supposons $a \in A$ et $b \in B$. Puisque A est connexe, il existe un chemin p de a à x à sommets tous dans A. Puisque B est connexe, il existe un chemin q de x à b à sommets tous dans B. La concaténation p•q est un chemin de a à b à sommets tous dans $A \cup B$. CQFD.

Propriété

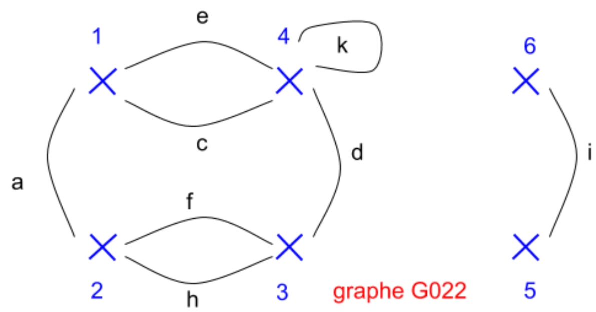
L'ensemble des composantes connexes d'un graphe G est une partition de V_G.

Preuve :

A réaliser en exercice.

Exemple :

Considérons le graphe G022 non orienté.
Les ensembles {1,3} et {2,4} ne sont pas connexes.
Les ensembles connexes sont les 6 singletons, les 5 paires d'extrémités d'arêtes ainsi que les ensembles {1,2,3}, {2,3,4}, {3,4,1}, {4,1,2} et {1,2,3,4}.
Les composantes connexes sont {1,2,3,4} et {5,6}.
G022 n'est pas connexe.

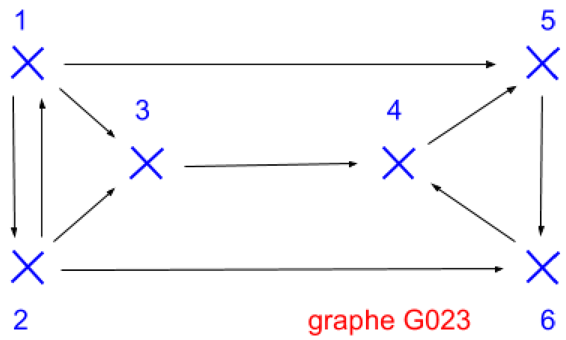


graphe G022

Les composantes connexes d'un graphe non orienté son immédiatement visibles dans un graphe "normalement" dessiné. Pour un graphe orienté, ceci est un peu plus subtil.

Exemple :

Considérons le graphe orienté G023.
Les ensembles {1,3} et {4,5} ne sont pas connexes.
Les ensembles connexes sont les 6 singletons ainsi que {1,2} et {4,5,6}.
Les composantes connexes sont {1,2}, {3} et {4,5,6}.
G023 n'est pas connexe.



graphe G023