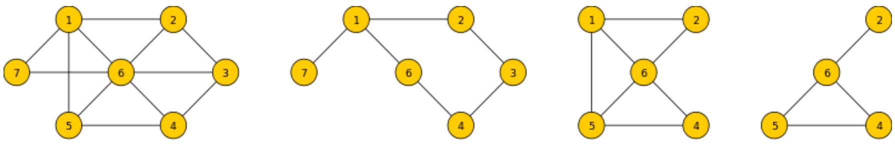
## Chapitre 3
## Quelques opérations sur les graphes

A l'ensemble est associée l'opération union. A la séquence est associée l'opération concaténation. En ce qui concerne les graphes, il n'existe pas une opération "caractéristique". La grande diversité des graphes introduit naturellement un nombre infini d'opérations. Nous en présentons ici quelques unes.

### section 1 : sous-graphe

Obtenir à partir d'un graphe un de ses sous-graphes est simple : il suffit d'effacer des arêtes (ou des arcs) et des sommets et dans ce cas toutes les arêtes (ou les arcs) incidents à ces sommets. Sur le dessin ci-dessous (tiré de Wikipédia), figurent trois sous graphes G1, G2 et G2 d'un graphe G (simple non orienté) :




$G$ $\quad$ $G_1$ $\quad$ $G_2$ $\quad$ $G_3$

Plus formellement, chaque type de graphe possède sa définition de sous-graphe. Voici celle des graphes orientés à arcs multiples :

Définition : Sous-graphe
Soient G et H deux graphes orientés à arcs multiples,
G est un sous-graphe de H, noté $G \subseteq H$, si :

- $V_G \subseteq V_H$
- $E_G \subseteq E_H$
- $f_G \subseteq f_H$ ce qui signifie et impose ici que $f_G$ est égale à la restriction de $f_H$ sur $E_G$ .

fin_définition

Propriété : Sous-graphe est un ordre partiel
La relation sous-graphe est une relation d'équivalence, transitive et antisymétrique ($G \subseteq H$ et $H \subseteq G$ entraîne $G=H$).
fin_propriété

## section 2 : sous-graphe induit

La définition précédente “induit” l’opération suivante : le sous-graphe d’un graphe G induit par un ensemble de sommets D est le graphe obtenu conservant uniquement les sommets de D et uniquement les arêtes (ou les arcs) dont toutes les extrémités sont dans D.

Exemple :
G2 est le sous-graphe de G induit par {1,2,4,5,6}.
G3 est le sous-graphe de G induit par {2,4,5,6}.
G1 n’est pas le sous-graphe de G induit par {1,2,3,4,5,6} (qui est G lui-même!).
fin_exemple

Nous fournirons ici la définition du sous graphe induit induit par un ensemble de sommets dans le cas d’un graphe orienté simple. Et laissons à titre d’exercice les définitions pour les autres types de graphes.

Définition :
Soit G=(V,E) un graphe simple orienté et U une partie de V.
Le *sous-graphe de G induit par U* est le graphe noté $G|U$ égal à $(U, E\cap U^2)$.
Si s est un sommet de G, D\s désigne $D|(V_G\backslash s)$.
fin_défiinition

## section 3 : graphe quotient

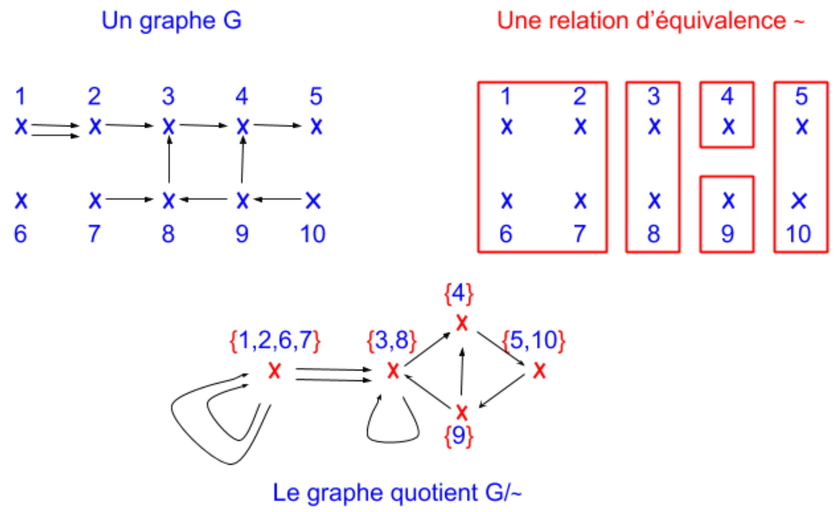
Une opération importante sur les graphes est le graphe quotient. Elle permet de fusionner en de simples sommets des parties de sommets 2 à 2 disjointes. Différentes variantes peuvent exister selon que l’on décide de conserver ou non des arcs multiples, ou les boucles, etc …

Rappel : relation d’équivalence, ensemble quotient
Soient V un ensemble et ~ une relation d’équivalence sur V. Pour tout élément $x\in V$, $[x]_\sim$ désigne la classe d’équivalence contenant x c’est à dire l’ensemble $\{y\in V | y \sim x\}$. Le terme V/~ désigne la partition $\{[x]_\sim | x\in V\}$.
fin_rappel

La définition choisie ici concerne les graphes orientés à arcs multiples et conserve boucles et multiplicité des arcs :

Définition : Graphe quotient
Soit G=(V,E,f) un graphe orienté à arcs multiples. Soit ~ une relation d’équivalence sur V. Le graphe quotient de G selon ~ est le graphe noté G/~ égal à (V/~,E,g) où g associe à tout arc $e\in E$ le couple $([x]_\sim,[y]_\sim)$ avec f(e)=(x,y).

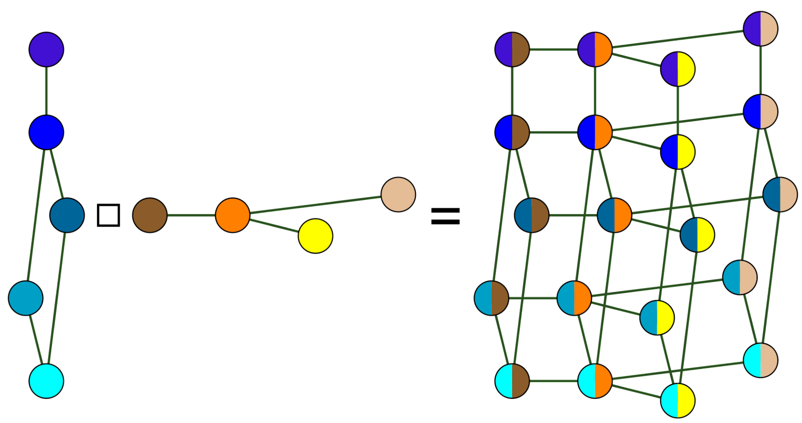
Exemple :




## section 4 : graphe produit et puissance

Il est possible de générer un graphe à partir d'opérations inspirées des opérations sur les ensembles. Ici nous présentons le graphe produit sur des graphes simples non orientés.

Voici un exemple de produit de 2 graphes (source wikipedia)



Rappel Produit

Le produit de deux ensembles U et V est l'ensemble des couples (u,v) avec u ∈ U et v ∈ V.

Nous étendons cette notation au produit noté U⊗D d'un ensemble U et d'un ensemble D de singletons et de paires dans un ensemble V en définissant U⊗D égal à l'ensemble contenant :

- tout singleton de la forme {(u,a)} avec u ∈ U et {a} ∈ D
- toute paire de la forme {(u,a),(u,b)} avec u ∈ U et {a,b} ∈ D

Définition similaire en ce qui concerne D⊗U.

Définition : Graphe produit

Soient deux graphes simples non orientés G et H.

Le graphe produit est le graphe noté G×H égal à $(V_G \times V_H, E_G \otimes V_H \cup V_G \otimes E_H)$.

Propriétés :

Pour tous entiers n,m ≥ 1, la grille Gn,m est égal au produit Cn×Cm où pour tout entier k≥1, Ck désigne le graphe chemin ({1,..,i},{{1,2},..,{k-1,k}}).

fin_propriété

La propriété suivante prouve que l'utilisation du terme "produit" est légitime en établissant que le produit de graphes est associative :

Propriété Associativité du produit

Soient trois graphes simples non orientés G,H et K.

Nous avons : (G×H)×K = G×(H×K)

preuve :

Formellement, il ne s'agit pas d'égalité mais d'isomorphisme. Pour simplifier le propos, nous considérons égaux les couples ((s,t),u) et (s,(t,u)) et en les identifiant au triplet (s,t,u).

Sous cette hypothèse, il vient l'égalité $V_G \times (V_H \times V_K) = (V_G \times V_H) \times V_K$.

Pour conclure, il suffit d'observer que le produit ⊗ est "associatif" au sens où pour tous ensembles U et V et tout ensemble d'ensembles D, on a les égalités :

- $(U \times V) \otimes D = U \otimes (D \otimes R)$
- $(U \otimes D) \otimes V = U \otimes (D \otimes V)$
- $(D \otimes U) \otimes V = D \otimes (U \times V)$.

Et d'en déduire :

$$
\begin{aligned}
E_{(G\times H)\times K} &= E_{G\times H} \otimes V_K \cup V_{G\times H} \otimes E_K \\
&= (E_G \otimes V_H \cup V_G \otimes E_H) \otimes V_K \cup V_{G\times H} \otimes E_K \\
&= (E_G \otimes V_H) \otimes V_K \cup (V_G \otimes E_H) \otimes V_K \cup V_G \times (V_H \otimes E_K) \\
&= E_G \otimes (V_H \times V_K) \cup V_G \otimes (E_H \otimes V_K \cup V_H \otimes E_K) \\
&= E_G \otimes V_{H\times K} \cup V_G \otimes (E_H \otimes V_K \cup V_H \otimes E_K) \\
&= E_G \otimes E_{H\times K} \\
&= E_{G\times(H\times K)}
\end{aligned}
$$

fin_preuve

Définition Puissance

Pour tout entier n≥1 et tout graphe G, $G^n$ désigne G si n=1 ou $G \times G^{n-1}$ sinon.

fin_définition

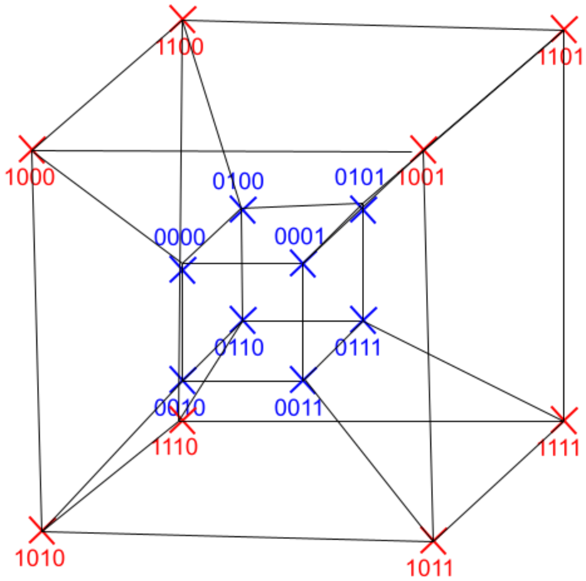
Propriété

Pour tout entier n≥1, l'hypercube $H_n$ est égal au graphe puissance $(H_1)^n$

fin_définition

Note: Notez l'égalité H1=C2=K2

Voici un dessin de H4 où le cube extérieur est copie du cube intérieur ; le bit distinguant ces deux cubes H3 est le bit de poids fort.


1100
1101
1000
1001
0100
0101
0000
0001
0110
0111
0010
0011
1110
1111
1010
1011