

Tugas Latex Aplikasi Komputer



Mukti Wibowo
22305144036
Matematika E 2022

PRODI MATEMATIKA
DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2022

DAFTAR ISI

1	KB Pekan 2-3 (Belajar Menggunakan Software EMT)	2
2	KB Pekan 4-5: Menggunakan EMT untuk menyelesaikan masalah-masalah Aljabar	18
3	KB Pekan 6-7: Menggunakan EMT untuk mengambar grafik 2 dimensi (2D)	82
4	KB Pekan 8-9: Menggunakan EMT untuk mengambar grafik 3 dimensi (3D)	102
5	KB Pekan 10-11: Menggunakan EMT untuk kalkulus	143
6	KB Pekan 12-13: Menggunakan EMT untuk Geometri	189
7	KB Pekan 14-15; Menggunakan EMT untuk Statistika	262

BAB 1

KB PEKAN 2-3 (BELAJAR MENGGUNAKAN SOFTWARE EMT)

[a4paper,10pt]article eumat

Pendahuluan dan Pengenalan Cara Kerja EMT

Selamat datang! Ini adalah pengantar pertama ke Euler Math Toolbox (disingkat EMT atau Euler). EMT adalah sistem terintegrasi yang merupakan perpaduan kernel numerik Euler dan program komputer aljabar Maxima.

- Bagian numerik, GUI, dan komunikasi dengan Maxima telah dikembangkan oleh R. Grothmann, seorang profesor matematika di Universitas Eichstätt, Jerman. Banyak algoritma numerik dan pustaka software open source yang digunakan di dalamnya.

- Maxima adalah program open source yang matang dan sangat kaya untuk perhitungan simbolik dan aritmatika tak terbatas. Software ini dikelola oleh sekelompok pengembang di internet.

- Beberapa program lain (LaTeX, Povray, Tiny C Compiler, Python) dapat digunakan di Euler untuk memungkinkan perhitungan yang lebih cepat maupun tampilan atau grafik yang lebih baik.

Yang sedang Anda baca (jika dibaca di EMT) ini adalah berkas notebook di EMT. Notebook aslinya bawaan EMT (dalam bahasa Inggris) dapat dibuka melalui menu File, kemudian pilih "Open Tutorials and Examples", lalu pilih file "00 First Steps.en". Perhatikan, file notebook EMT memiliki ekstensi ".en". Melalui notebook ini Anda akan belajar menggunakan software Euler untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.

Panduan ini ditulis dengan Euler dalam bentuk notebook Euler, yang berisi teks (deskriptif), baris-baris perintah, tampilan hasil perintah (numerik, ekspresi matematika, atau gambar/plot), dan gambar yang disisipkan dari file gambar.

Untuk menambah jendela EMT, Anda dapat menekan [F11]. EMT akan menampilkan jendela grafik di layar desktop Anda. Tekan [F11] lagi untuk kembali ke tata letak favorit Anda. Tata letak disimpan untuk sesi berikutnya.

Anda juga dapat menggunakan [Ctrl]+[G] untuk menyembunyikan jendela grafik. Selanjutnya Anda dapat beralih antara grafik dan teks dengan tombol [TAB].

Seperti yang Anda baca, notebook ini berisi tulisan (teks) berwarna hijau, yang dapat Anda edit dengan meng-klik kanan teks atau tekan menu Edit -> Edit Comment atau tekan [F5], dan juga baris perintah EMT yang ditandai dengan ">" dan berwarna merah. Anda dapat menyisipkan baris perintah baru dengan cara menekan tiga tombol bersamaan: [Shift]+[Ctrl]+[Enter].

Komentar (Teks Uraian)

Komentar atau teks penjelasan dapat berisi beberapa "markup" dengan sintaks sebagai berikut.

- * Judul
- ** Sub-Judul
- latex: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$
- mathjax: $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$
- maxima: $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$
- http://www.euler-math-toolbox.de
- See: http://www.google.de | Google
- image: gerhana bulan.png
- ---

Hasil sintaks-sintaks di atas (tanpa diawali tanda strip) adalah sebagai berikut.

Judul

Sub-Judul

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

<http://www.euler-math-toolbox.de>

See: <http://www.google.de> | Google



Gambar diambil dari folder images di tempat file notebook berada dan tidak dapat dibaca dari Web. Untuk "See:", tautan (URL)web lokal dapat digunakan.

Paragraf terdiri atas satu baris panjang di editor. Pergantian baris akan memulai baris baru. Paragraf harus dipisahkan dengan baris kosong.

```
>// baris perintah diawali dengan >, komentar (keterangan) diawali dengan //
```

Baris Perintah

Mari kita tunjukkan cara menggunakan EMT sebagai kalkulator yang sangat canggih.

EMT berorientasi pada baris perintah. Anda dapat menuliskan satu atau lebih perintah dalam satu baris perintah. Setiap perintah harus diakhiri dengan koma atau titik koma.

- Titik koma menyembunyikan output (hasil) dari perintah.
- Sebuah koma mencetak hasilnya.
- Setelah perintah terakhir, koma diasumsikan secara otomatis (boleh tidak ditulis).

Dalam contoh berikut, kita mendefinisikan variabel r yang diberi nilai 1,25. Output dari definisi ini adalah nilai variabel. Tetapi karena tanda titik koma, nilai ini tidak ditampilkan. Pada kedua perintah di belakangnya, hasil kedua perhitungan tersebut ditampilkan.

```
>r=1.25; pi*r^2, 2*pi*r
```

4.90873852123

7.85398163397

Latihan untuk Anda

- Sisipkan beberapa baris perintah baru

- Tulis perintah-perintah baru untuk melakukan suatu perhitungan yang Anda inginkan, boleh menggunakan variabel, boleh tanpa variabel.

Jawab :

```
>a=5; b=12; c=4; (a/b)^c
```

0.0301408179012

```
>k=11; l=22; m=33; k*(l+m)
```

605

```
>x=13; y=16; (x*y/4)^3
```

140608

```
>p=17; l=8; t=45; p*l*t
```

6120

```
>p=10; q=3; (p*q^2)^q
```

729000

Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.

- Pastikan untuk menggunakan titik desimal, bukan koma desimal untuk bilangan!

- Gunakan * untuk perkalian dan ^ untuk eksponen (pangkat).

- Seperti biasa, * dan / bersifat lebih kuat daripada + atau -.

- ^ mengikat lebih kuat dari *, sehingga pi * r ^ 2 merupakan rumus luas lingkaran.

- Jika perlu, Anda harus menambahkan tanda kurung, seperti pada 2 ^ (2 ^ 3).

Perintah $r = 1.25$ adalah menyimpan nilai ke variabel di EMT. Anda juga dapat menulis $r := 1.25$ jika mau. Anda dapat menggunakan spasi sesuka Anda.

Anda juga dapat mengakhiri baris perintah dengan komentar yang diawali dengan dua garis miring (//).

```
>r := 1.25 // Komentar: Menggunakan := sebagai ganti =
```

1.25

Argumen atau input untuk fungsi ditulis di dalam tanda kurung.

```
>sin(45°), cos(pi), log(sqrt(E))
```

0.707106781187

-1

0.5

Seperti yang Anda lihat, fungsi trigonometri bekerja dengan radian, dan derajat dapat diubah dengan °. Jika keyboard Anda tidak memiliki karakter derajat tekan [F7], atau gunakan fungsi deg() untuk mengonversi.

EMT menyediakan banyak sekali fungsi dan operator matematika. Hampir semua fungsi matematika sudah tersedia di EMT. Anda dapat melihat daftar lengkap fungsi-fungsi matematika di EMT pada berkas Referensi (klik menu Help -> Reference)

Untuk membuat rangkaian komputasi lebih mudah, Anda dapat merujuk ke hasil sebelumnya dengan "%". Cara ini sebaiknya hanya digunakan untuk merujuk hasil perhitungan dalam baris perintah yang sama.

```
>(sqrt(5)+1)/2, %^2-%+1 // Memeriksa solusi x^2-x+1=0
```

1.61803398875

2

Latihan untuk Anda

- Buka berkas Reference dan baca fungsi-fungsi matematika yang tersedia di EMT.
 - Sisipkan beberapa baris perintah baru.
 - Lakukan contoh-contoh perhitungan menggunakan fungsi-fungsi matematika di EMT.
-

Jawab :

```
>sqrt(225)*sqrt(81)*8
```

1080

```
>(sin(45°)-tan(90°))/cos(30°)
```

-1.88576908735e+016

```
>sqrt(4)*cos(45°)
```

1.41421356237

```
> sqrt(125)/3, %^2+10%-5 // Memeriksa solusi x^2+10x-5=0
```

3.7267799625
8.98888888889

Satuan

EMT dapat mengubah unit satuan menjadi sistem standar internasional (SI). Tambahkan satuan di belakang angka untuk konversi sederhana.

```
>1miles // 1 mil = 1609,344 m
```

1609.344

Beberapa satuan yang sudah dikenal di dalam EMT adalah sebagai berikut. Semua unit diakhiri dengan tanda dolar (\$), namun boleh tidak perlu ditulis dengan mengaktifkan easyunits.

```
kilometer$:=1000;  
km$:=kilometer$;  
cm$:=0.01;  
mm$:=0.001;  
minute$:=60;  
min$:=minute$;  
minutes$:=minute$;  
hour$:=60*minute$;  
h$:=hour$;  
hours$:=hour$;
```

```
day$:=24*hour$;
days$:=day$;
d$:=day$;
year$:=365.2425*day$;
years$:=year$;
y$:=year$;
inch$:=0.0254;
in$:=inch$;
feet$:=12*inch$;
foot$:=feet$;
ft$:=feet$;
yard$:=3*feet$;
yards$:=yard$;
yd$:=yard$;
mile$:=1760*yard$;
miles$:=mile$;
kg$:=1;
sec$:=1;
ha$:=10000;
Ar$:=100;
Tagwerk$:=3408;
Acre$:=4046.8564224;
pt$:=0.376mm;
```

Untuk konversi ke dan antar unit, EMT menggunakan operator khusus, yakni ->.

```
>4km -> miles, 4inch -> " mm"
```

```
2.48548476895
101.6 mm
```

Format Tampilan Nilai

Akurasi internal untuk nilai bilangan di EMT adalah standar IEEE, sekitar 16 digit desimal. Aslinya, EMT tidak mencetak semua digit suatu bilangan. Ini untuk menghemat tempat dan agar terlihat lebih baik. Untuk mengatramilan satu bilangan, operator berikut dapat digunakan.

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>longest pi
```

```
3.141592653589793
```

```
>long pi
```

```
3.14159265359
```

```
>short pi
```

```
3.1416
```

```
>shortest pi
```

```
3.1
```

```
>fraction pi
```

```
312689/99532
```

```
>short 1200*1.03^10, long E, longest pi
```

```
1612.7
```

```
2.71828182846
```

```
3.141592653589793
```

Format aslinya untuk menampilkan nilai menggunakan sekitar 10 digit. Format tampilan nilai dapat diatur secara global atau hanya untuk satu nilai.

Anda dapat mengganti format tampilan bilangan untuk semua perintah selanjutnya. Untuk mengembalikan ke format aslinya dapat digunakan perintah "deformat" atau "reset".

```
>longestformat; pi, deformat; pi
```

```
3.141592653589793
```

```
3.14159265359
```

Kernel numerik EMT bekerja dengan bilangan titik mengambang (floating point) dalam presisi ganda IEEE (berbeda dengan bagian simbolik EMT). Hasil numerik dapat ditampilkan dalam bentuk pecahan.

```
>1/7+1/4, fraction %
```

```
0.392857142857
```

```
11/28
```

Perintah Multibaris

Perintah multi-baris membentang di beberapa baris yang terhubung dengan "..." di setiap akhir baris, kecuali baris terakhir. Untuk menghasilkan tanda pindah baris tersebut, gunakan tombol [Ctrl]+[Enter]. Ini akan menyambung perintah ke baris berikutnya dan menambahkan "..." di akhir baris sebelumnya. Untuk menggabungkan suatu baris ke baris sebelumnya, gunakan [Ctrl]+[Backspace].

Contoh perintah multi-baris berikut dapat dijalankan setiap kali kursor berada di salah satu barisnya. Ini juga menunjukkan bahwa ... harus berada di akhir suatu baris meskipun baris tersebut memuat komentar.

```
>a=4; b=15; c=2; // menyelesaikan a*x^2+b*x+c=0 secara manual ...
>D=sqrt(b^2/(a^2*4)-c/a); ...
>-b/(2*a) + D, ...
>-b/(2*a) - D
```

```
-0.138444501319  
-3.61155549868
```

Menampilkan Daftar Variabel

Untuk menampilkan semua variabel yang sudah pernah Anda definisikan sebelumnya (dan dapat dilihat kembali nilainya), gunakan perintah "listvar".

```
>listvar
```

r	1.25
a	4
b	15
c	2
D	1.73655549868123

Perintah listvar hanya menampilkan variabel buatan pengguna. Dimungkinkan untuk menampilkan variabel lain, dengan menambahkan string termuat di dalam nama variabel yang diinginkan.

Perlu Anda perhatikan, bahwa EMT membedakan huruf besar dan huruf kecil. Jadi variabel "d" berbeda dengan variabel "D".

Contoh berikut ini menampilkan semua unit yang diakhiri dengan "m" dengan mencari semua variabel yang berisi "m\$".

```
>listvar m$
```

km\$	1000
cm\$	0.01
mm\$	0.001
nm\$	1853.24496
gram\$	0.001
m\$	1
hquantum\$	6.62606957e-34
atm\$	101325

Untuk menghapus variabel tanpa harus memulai ulang EMT gunakan perintah "remvalue".

```
>remvalue a,b,c,D  
>D
```

```
Variable D not found!  
Error in:  
D ...  
^
```

Menampilkan Panduan

Untuk mendapatkan panduan tentang penggunaan perintah atau fungsi di EMT, buka jendela panduan dengan menekan [F1] dan cari fungsinya. Anda juga dapat mengklik dua kali pada fungsi yang tertulis di baris perintah atau di teks untuk membuka jendela panduan.

Coba klik dua kali pada perintah "intrandom" berikut ini!

```
>intrandom(10,6)
```

```
[4, 2, 6, 2, 4, 2, 3, 2, 2, 6]
```

Di jendela panduan, Anda dapat mengklik kata apa saja untuk menemukan referensi atau fungsi. Misalnya, coba klik kata "random" di jendela panduan. Kata tersebut boleh ada dalam teks atau di bagian "See:" pada panduan. Anda akan menemukan penjelasan fungsi "random", untuk menghasilkan bilangan acak berdistribusi uniform antara 0,0 dan 1,0. Dari panduan untuk "random" Anda dapat menampilkan panduan untuk fungsi "normal", dll.

```
>random(10)
```

```
[0.270906, 0.704419, 0.217693, 0.445363, 0.308411, 0.914541, 0.193585,  
0.463387, 0.095153, 0.595017]
```

```
>normal(10)
```

```
[-0.495418, 1.6463, -0.390056, -1.98151, 3.44132, 0.308178, -0.733427,  
-0.526167, 1.10018, 0.108453]
```

Matriks dan Vektor

EMT merupakan suatu aplikasi matematika yang mengerti "bahasa matriks". Artinya, EMT menggunakan vektor dan matriks untuk perhitungan-perhitungan tingkat lanjut. Suatu vektor atau matriks dapat didefinisikan dengan tanda kurung siku. Elemen-elemennya dituliskan di dalam tanda kurung siku, antar elemen dalam satu baris dipisahkan oleh koma(), antar baris dipisahkan oleh titik koma();.

Vektor dan matriks dapat diberi nama seperti variabel biasa.

```
>v=[4, 5, 6, 3, 2, 1]
```

```
[4, 5, 6, 3, 2, 1]
```

```
>A=[1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9]
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Karena EMT mengerti bahasa matriks, EMT memiliki kemampuan yang sangat canggih untuk melakukan perhitungan matematis untuk masalah-masalah aljabar linier, statistika, dan optimisasi.

Vektor juga dapat didefinisikan dengan menggunakan rentang nilai dengan interval tertentu menggunakan tanda titik dua (:),seperti contoh berikut ini.

```
>c=1:5
```

```
[1, 2, 3, 4, 5]
```

```
>w=0:0.1:1
```

```
[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1]
```

```
>mean(w^2)
```

0.35

Bilangan Kompleks

EMT juga dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT. Bilangan imaginer

$$i = \sqrt{-1}$$

dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

```
re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.  
im(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.  
complex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.  
conj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan komplkes x.  
arg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.  
real(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.
```

Apabila bagian imaginer x terlalu besar, hasilnya akan menampilkan pesan kesalahan.

```
>sqrt(-1) // Error!  
>sqrt(complex(-1))
```

```
>z=2+3*I, re(z), im(z), conj(z), arg(z), deg(arg(z)), deg(arctan(3/2))
```

```
2+3i  
2  
3  
2-3i  
0.982793723247  
56.309932474  
56.309932474
```

```
>deg(arg(I)) // 90°
```

90

```
>sqrt(-1)
```

```
Floating point error!  
Error in sqrt  
Error in:  
sqrt(-1) ...  
^
```

```
>sqrt(complex(-1))
```

0+1i

EMT selalu menganggap semua hasil perhitungan berupa bilangan riil dan tidak akan secara otomatis mengubah ke bilangan kompleks.

Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan, tetapi akar kuadrat kompleks didefinisikan untuk bidang koordinat dengan cara seperti biasa. Untuk mengubah bilangan riil menjadi kompleks, Anda dapat menambahkan 0i atau menggunakan fungsi "complex".

```
>complex(-1), sqrt(%)
```

```
-1+0i  
0+1i
```

Matematika Simbolik

EMT dapat melakukan perhitungan matematika simbolis (eksak) dengan bantuan software Maxima. Software Maxima otomatis sudah terpasang di komputer Anda ketika Anda memasang EMT. Meskipun demikian, Anda dapat juga memasang software Maxima tersendiri (yang terpisah dengan instalasi Maxima di EMT).

Pengguna Maxima yang sudah mahir harus memperhatikan bahwa terdapat sedikit perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks ekspresi simbolik di EMT.

Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah Maxima dengan tanda "&". Setiap ekspresi yang dimulai dengan "&" adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

```
>& (a+b)^2
```

$$(b + a)^2$$

```
>&expand((a+b)^2), &factor(x^2+5*x+6)
```

$$\begin{aligned} &b^2 + 2ab + a^2 \\ &(x + 2)(x + 3) \end{aligned}$$

```
>&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

$$[x = \frac{(-\sqrt{b^2 - 4ac}) - b}{2a}, x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}]$$

```
>&(a^2-b^2)/(a+b), &ratsimp(%) // ratsimp menyederhanakan bentuk pecahan
```

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 2 \\
 a - b \\
 \hline
 b + a
 \end{array}$$

$$a - b$$

```
>10! // nilai faktorial (modus EMT)
```

3628800

```
>&10! //nilai faktorial (simbolik dengan Maxima)
```

3628800

Untuk menggunakan perintah Maxima secara langsung (seperti perintah pada layar Maxima) awali perintahnya dengan tanda ":" pada baris perintah EMT. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "modus kompatibilitas").

```
>factor(1000) // mencari semua faktor 1000 (EMT)
```

[2, 2, 2, 5, 5]

```
>::: factor(1000) // faktorisasi prima 1000 (dengan Maxima)
```

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 3 \\
 2 \quad 5
 \end{array}$$

```
>::: factor(20!)
```

$$\begin{array}{ccccccc}
 18 & 8 & 4 & 2 \\
 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19
 \end{array}$$

Jika Anda sudah mahir menggunakan Maxima, Anda dapat menggunakan sintaks asli perintah Maxima dengan menggunakan tanda ":::" untuk mengawali setiap perintah Maxima di EMT. Perhatikan, harus ada spasi antara ":::" dan perintahnya.

```
>::: binomial(5,2); // nilai C(5,2)
```

```
>::: binomial(m, 4); // C(m, 4)=m! / (4! (m-4) !)
```

$$\frac{(m - 3)(m - 2)(m - 1)m}{24}$$

```
>::: trigexpand(cos(x+y)); // rumus cos(x+y)=cos(x) cos(y)-sin(x) sin(y)
```

$$\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

```
>::: trigexpand(sin(x+y));
```

$$\cos(x) \sin(y) + \sin(x) \cos(y)$$

```
>::: trigsimp(((1-sin(x)^2)*cos(x))/cos(x)^2+tan(x)*sec(x)^2) //menyederhanakan fungsi tri
```

$$\frac{\sin(x)^4 + \cos(x)^4}{\cos(x)^3}$$

Untuk menyimpan ekspresi simbolik ke dalam suatu variabel digunakan tanda "&=".

```
>p1 &= (x^3+1) / (x+1)
```

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

```
>&ratsimp(p1)
```

$$\frac{x^2 - x + 1}{2}$$

Untuk mensubstitusikan suatu nilai ke dalam variabel dapat digunakan perintah "with".

```
>&p1 with x=3 // (3^3+1) / (3+1)
```

7

```
>&p1 with x=a+b, &ratsimp(%) //substitusi dengan variabel baru
```

$$\frac{(b + a)^3 + 1}{b + a + 1}$$

$$b^2 + (2a - 1)b + a^2 - a + 1$$

```
>&diff(p1,x) //turunan p1 terhadap x
```

$$\frac{3x^2(x^3 + 1)}{x^2 + 1}$$

```
>&integrate(p1,x) // integral p1 terhadap x
```

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6}$$

Tampilan Matematika Simbolik dengan LaTeX

Anda dapat menampilkan hasil perhitungan simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Untuk melakukan hal ini, tambahkan tanda dolar (\$) di depan tanda & pada setiap perintah Maxima. Perhatikan, hal ini hanya dapat menghasilkan tampilan yang diinginkan apabila komputer Anda sudah terpasang software LaTeX.

```
>$&(a+b)^2  
>$&expand((a+b)^2), $&factor(x^2+5*x+6)  
>$&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc  
>$&(a^2-b^2)/(a+b), $&ratsimp(%)
```

Selamat Belajar dan Berlatih!

Baik, itulah sekilas pengantar penggunaan software EMT. Masih banyak kemampuan EMT yang akan Anda pelajari dan praktikkan.

Sebagai latihan untuk memperlancar penggunaan perintah-perintah EMT yang sudah dijelaskan di atas, silakan Anda lakukan hal-hal sebagai berikut.

- Carilah soal-soal matematika dari buku-buku Matematika.
- Tambahkan beberapa baris perintah EMT pada notebook ini.
- Selesaikan soal-soal matematika tersebut dengan menggunakan EMT.

Pilih soal-soal yang sesuai dengan perintah-perintah yang sudah dijelaskan dan dicontohkan di atas.

Soal no 1

$$30 \times 3 + 120 : 40 \times 20 - (15 \times 10) + 20 = \dots$$

```
>30*3+120/40*20-(15*10)+20
```

20

Soal no 2

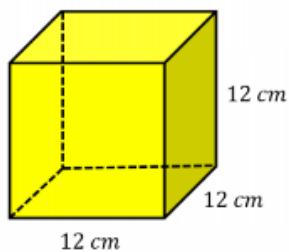
$$\sin 45^\circ \tan 60^\circ + \cos 45^\circ \cot 60^\circ =$$

```
>sin(45°)*tan(60°)+cos(45°)*cot(60°)
```

1.63299316186

Soal no 3

Tentukan luas permukaan kubus di bawah ini!

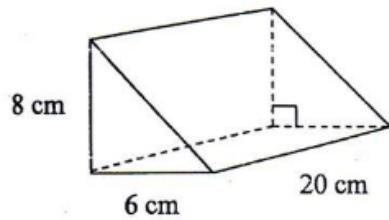


```
>6*12^2
```

864

Soal no 4

Tentukan volume prisma di bawah ini!



$$> 8 \times 6 / 2 \times 20$$

480

BAB 2

KB PEKAN 4-5: MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH-MASALAH ALJABAR

article

eumat

Nama : Mukti Wibowo

NIM : 22305144036

Kelas : Matematika E 2022

EMT untuk Perhitungan Aljabar

Pada notebook ini Anda belajar menggunakan EMT untuk melakukan berbagai perhitungan terkait dengan materi atau topik dalam Aljabar. Kegiatan yang harus Anda lakukan adalah sebagai berikut:

- Membaca secara cermat dan teliti notebook ini;
- Menerjemahkan teks bahasa Inggris ke bahasa Indonesia;
- Mencoba contoh-contoh perhitungan (perintah EMT) dengan cara meng-ENTER setiap perintah EMT yang ada (pindahkan kursor ke baris perintah)
- Jika perlu Anda dapat memodifikasi perintah yang ada dan memberikan keterangan/penjelasan tambahan terkait hasilnya.
- Menyisipkan baris-baris perintah baru untuk mengerjakan soal-soal Aljabar dari file PDF yang saya berikan;
- Memberi catatan hasilnya.
- Jika perlu tuliskan soalnya pada teks notebook (menggunakan format LaTeX).
- Gunakan tampilan hasil semua perhitungan yang eksak atau simbolik dengan format LaTeX. (Seperti contoh-contoh pada notebook ini.)

Contoh pertama

Menyederhanakan bentuk aljabar:

$$6x^{-3}y^5 \times -7x^2y^{-9}$$

```
> $& 6*x^(-3)*y^5*-7*x^2*y^(-9) //biar hasilnya pakai format latex
```

$$-\frac{42}{x y^4}$$

Menjabarkan:

$$(6x^{-3} + y^5)(-7x^2 - y^{-9})$$

```
> $&showev('expand((6*x^(-3)+y^5)*(-7*x^2-y^(-9)))) //showev itu diuraikan
```

$$\text{expand}\left(\left(-\frac{1}{y^9} - 7x^2\right) \left(y^5 + \frac{6}{x^3}\right)\right) = -7x^2y^5 - \frac{1}{y^4} - \frac{6}{x^3y^9} - \frac{42}{x}$$

Baris Perintah

Baris perintah Euler terdiri dari satu atau beberapa perintah Euler yang diikuti dengan titik koma ";" atau koma ",". Titik koma mencegah pencetakan hasil. Koma setelah perintah terakhir dapat dihilangkan. Baris perintah berikut ini hanya akan mencetak hasil dari ekspresi, bukan penugasan atau perintah format.

```
>r:=2; h:=4; pi*r^2*h/3
```

16.7551608191

Perintah harus dipisahkan dengan tanda kosong. Baris perintah berikut ini mencetak dua hasilnya.

```
>pi*2*r*h, %+2*pi*r*h // Ingat tanda % menyatakan hasil perhitungan terakhir sebelumnya
```

50.2654824574

100.530964915

Baris perintah dieksekusi sesuai urutan pengguna menekan tombol return. Jadi, Anda mendapatkan nilai baru setiap kali Anda mengeksekusi baris kedua.

```
>x := 1;
>x := cos(x) // nilai cosinus (x dalam radian)
```

0.540302305868

```
>x := cos(x)
```

0.857553215846

Jika dua baris dihubungkan dengan "...", kedua baris tersebut akan selalu dieksekusi secara bersamaan.

```
>x := 1.5; ...
>x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2,
```

1.41666666667

1.41421568627

1.41421356237

Ini juga merupakan cara yang baik untuk membagi perintah yang panjang menjadi dua baris atau lebih. Anda dapat menekan Ctrl+Return untuk membagi baris menjadi dua pada posisi kursor saat ini, atau Ctrl+Back untuk menggabungkan kedua baris.

Untuk melipat semua multi-baris, tekan Ctrl+L. Kemudian garis-garis berikutnya hanya akan terlihat, jika salah satu dari mereka memiliki fokus. Untuk melipat satu baris multi-baris, mulai baris pertama dengan "%+".

```
>%+ x=4+5; ...
```

Garis yang dimulai dengan %% tidak akan terlihat sama sekali.

81

Euler mendukung perulangan dalam baris perintah, selama perulangan tersebut masuk ke dalam satu baris tunggal atau beberapa baris. Dalam program, tentu saja pembatasan ini tidak berlaku. Untuk informasi lebih lanjut, baca pengantar berikut ini.

```
>x=1; for i=1 to 5; x := (x+2/x)/2, end; // menghitung akar 2
```

```
1.5  
1.4166666667  
1.41421568627  
1.41421356237  
1.41421356237
```

Tidak masalah untuk menggunakan multi-baris. Pastikan baris diakhiri dengan "...".

```
>x := 1.5; // comments go here before the ...  
>repeat xnew:=(x+2/x)/2; until xnew~≈x; ...  
> x := xnew; ...  
>end; ...  
>x,
```

```
1.41421356237
```

Struktur bersyarat juga bisa digunakan.

```
>if E^pi>pi^E; then "Thought so!", endif;
```

```
Thought so!
```

Ketika Anda menjalankan perintah, kursor dapat berada di posisi mana pun dalam baris perintah. Anda dapat kembali ke perintah sebelumnya atau melompat ke perintah berikutnya dengan tombol panah. Atau Anda dapat mengklik bagian komentar di atas perintah untuk membuka perintah tersebut.

Ketika Anda menggerakkan kursor di sepanjang baris, pasangan tanda kurung atau tanda kurung pembuka dan penutup akan disorot. Juga, perhatikan baris status. Setelah tanda kurung pembuka dari fungsi sqrt(), baris status akan menampilkan teks bantuan untuk fungsi tersebut. Jalankan perintah dengan tombol return.

```
>sqrt(sin(10°)/cos(20°)) // sqrt = akar
```

```
0.429875017772
```

Untuk melihat bantuan untuk perintah terbaru, buka jendela bantuan dengan F1. Di sana, Anda dapat memasukkan teks yang akan dicari. Pada baris kosong, bantuan untuk jendela bantuan akan ditampilkan. Anda dapat menekan escape untuk mengosongkan baris, atau menutup jendela bantuan.

Anda dapat mengklik dua kali pada perintah apa pun untuk membuka bantuan untuk perintah ini. Coba klik dua kali perintah exp di bawah ini pada baris perintah.

```
>exp(log(2.5))
```

2.5

Anda juga dapat menyalin dan menempel di Euler. Gunakan Ctrl-C dan Ctrl-V untuk ini. Untuk menandai teks, seret mouse atau gunakan shift bersamaan dengan tombol kursor. Selain itu, Anda dapat menyalin tanda kurung yang disorot.

```
>$powerdisp:true;
```

Sintaksis Dasar

Euler mengetahui fungsi matematika yang biasa. Seperti yang telah Anda lihat di atas, fungsi trigonometri bekerja dalam radian atau derajat. Untuk mengonversi ke derajat, tambahkan simbol derajat (dengan tombol F7) ke nilai, atau gunakan fungsi rad(x). Fungsi akar kuadrat disebut sqrt dalam Euler. Tentu saja, $x^{(1/2)}$ juga dapat digunakan.

Untuk mengatur variabel, gunakan "=" atau ":=". Demi kejelasan, pengantar ini menggunakan bentuk yang terakhir. Spasi tidak menjadi masalah. Tetapi spasi antar perintah diharapkan.

Beberapa perintah dalam satu baris dipisahkan dengan "," atau ";". Titik koma menekan output dari perintah. Pada akhir baris perintah, "," diasumsikan, jika ";" tidak ada.

```
>g:=9.81; t:=2.5; 1/2*g*t^2
```

30.65625

EMT menggunakan sintaks pemrograman untuk ekspresi. Untuk memasukkan

$$e^2 \cdot \left(\frac{1}{3 + 4 \log(0.6)} + \frac{1}{7} \right)$$

Anda harus mengatur tanda kurung yang benar dan menggunakan / untuk pecahan. Perhatikan tanda kurung yang disorot untuk mendapatkan bantuan. Perhatikan bahwa konstanta Euler e diberi nama E dalam EMT.

```
>E^2*(1/(3+4*log(0.6))+1/7)
```

8.77908249441

Untuk menghitung ekspresi yang rumit seperti

$$\left(\frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + 2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \right)^2 \pi$$

Anda harus memasukkannya dalam bentuk baris.

```
>((1/7 + 1/8 + 2) / (1/3 + 1/2))^2 * pi
```

23.2671801626

Letakkan tanda kurung di sekitar sub-ekspresi yang perlu dihitung terlebih dahulu. EMT membantu Anda dengan menyorot ekspresi yang diselesaikan oleh tanda kurung penutup. Anda juga harus memasukkan nama "pi" untuk huruf Yunani pi.

Hasil dari perhitungan ini adalah angka floating point. Secara default dicetak dengan akurasi sekitar 12 digit. Pada baris perintah berikut, kita juga belajar bagaimana kita dapat merujuk ke hasil sebelumnya dalam baris yang sama.

```
>1/3+1/7, fraction %
```

0.47619047619

10/21

Perintah Euler dapat berupa ekspresi atau perintah primitif. Ekspresi terbuat dari operator dan fungsi. Jika perlu, ekspresi tersebut harus mengandung tanda kurung untuk memaksa urutan eksekusi yang benar. Jika ragu, mengatur tanda kurung adalah ide yang bagus. Perhatikan bahwa EMT menampilkan tanda kurung pembuka dan penutup saat mengedit baris perintah.

```
>(cos(pi/4)+1)^3*(sin(pi/4)+1)^2
```

14.4978445072

Operator numerik Euler meliputi

- + unary atau operator plus
- unary atau operator minus
- *, /
- . produk matriks
- pangkat a^b untuk a positif atau bilangan bulat b ($a**b$ juga bisa

digunakan)

$n!$ operator faktorial

dan masih banyak lagi.

Berikut adalah beberapa fungsi yang mungkin Anda perlukan. Masih banyak lagi.

- sin, cos, tan, atan, asin, acos, rad, deg
- log, exp, log10, sqrt, logbase
- bin, logbin, logfac, mod, floor, ceil, round, abs, sign
- conj, re, im, arg, conj, real, complex
- beta, betai, gamma, complexgamma, ellrf, ellf, ellrd, elle
- bitand, bitor, bitxor, bitnot

Beberapa perintah memiliki alias, misalnya ln untuk log.

```
>ln(E^2), arctan(tan(0.5))
```

```
2  
0.5
```

```
>sin(30°)
```

```
0.5
```

Pastikan untuk menggunakan tanda kurung (tanda kurung bulat), kapan pun ada keraguan tentang urutan eksekusi! Berikut ini tidak sama dengan $(2^3)^4$, yang merupakan default untuk 2^3^4 di EMT (beberapa sistem numerik melakukannya dengan cara lain).

```
>2^3^4, (2^3)^4, 2^(3^4)
```

```
2.41785163923e+024  
4096  
2.41785163923e+024
```

Bilangan Real

Tipe data utama dalam Euler adalah bilangan real. Bilangan real direpresentasikan dalam format IEEE dengan akurasi sekitar 16 digit desimal.

```
>longest 1/3
```

```
0.3333333333333333
```

Representasi ganda internal membutuhkan 8 byte.

```
>printdual(1/3)
```

```
1.01010101010101010101010101010101010101010101010101010101010101*2^-2
```

```
>printhex(1/3)
```

```
5.555555555554*16^-1
```

String

String dalam Euler didefinisikan dengan "...".

```
>"A string can contain anything."
```

```
A string can contain anything.
```

String dapat digabungkan dengan `|` atau dengan `+`. Ini juga berfungsi dengan angka, yang dikonversi menjadi string dalam kasus tersebut.

```
>"The area of the circle with radius " + 2 + " cm is " + pi*4 + " cm^2."
```

The area of the circle with radius 2 cm is 12.5663706144 cm².

Fungsi cetak juga mengonversi angka ke string. Fungsi ini dapat mengambil sejumlah digit dan sejumlah tempat (0 untuk output padat), dan secara optimal satu unit.

```
>"Golden Ratio : " + print((1+sqrt(5))/2,5,0)
```

Golden Ratio : 1.61803

Ada string khusus tidak ada, yang tidak mencetak. Dikembalikan oleh beberapa fungsi, ketika hasilnya tidak penting. (Dikembalikan secara otomatis, jika fungsi tidak memiliki pernyataan pengembalian).

```
>none
```

Untuk mengonversi string menjadi angka, cukup evaluasi string tersebut. Ini juga berlaku untuk ekspresi (lihat di bawah).

```
>"1234.5"()
```

1234.5

Untuk mendefinisikan vektor string, gunakan notasi vektor [...].

```
>v := ["affe", "charlie", "bravo"]
```

```
affe  
charlie  
bravo
```

Vektor string kosong dilambangkan dengan [none]. Vektor string dapat digabungkan.

```
>w := [none]; w | v | v
```

```
affe  
charlie  
bravo  
affe  
charlie  
bravo
```

String dapat berisi karakter Unicode. Secara internal, string ini berisi kode UTF-8. Untuk membuat string seperti itu, gunakan `u"..."` dan salah satu entitas HTML.

String Unicode dapat digabungkan seperti string lainnya.

```
>u"&alpha; = " + 45 + u"&deg;" // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

$\hat{\imath}\pm = 45^\circ$

I

Dalam komentar, entitas yang sama seperti $\hat{\imath}\pm$, $\hat{\imath}^2$ dll. dapat digunakan. Ini bisa menjadi alternatif yang cepat untuk Latex. (Detail lebih lanjut tentang komentar di bawah).

Ada beberapa fungsi untuk membuat atau menganalisis string unicode. Fungsi strtochar() akan mengenali string Unicode, dan menerjemahkannya dengan benar.

```
>v=strtochar(u"&Auml; is a German letter")
```

```
[196, 32, 105, 115, 32, 97, 32, 71, 101, 114, 109, 97, 110,  
32, 108, 101, 116, 116, 101, 114]
```

Hasilnya adalah sebuah vektor angka Unicode. Fungsi kebalikannya adalah chartoutf().

```
>v[1]=strtochar(u"&Uuml;")[1]; chartoutf(v)
```

$\hat{\imath}$ is a German letter

Fungsi utf() dapat menerjemahkan sebuah string dengan entitas dalam sebuah variabel menjadi sebuah string Unicode.

```
>s="We have &alpha;=&beta; ."; utf(s) // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

We have $\hat{\imath}\pm=\hat{\imath}^2$.

Dimungkinkan juga untuk menggunakan entitas numerik.

```
>u"\#196;hnliches"
```

\tilde{A} hnliches

Nilai Boolean

Nilai Boolean direpresentasikan dengan 1 = benar atau 0 = salah dalam Euler. String dapat dibandingkan, seperti halnya angka.

```
>2<1, "apel"<"banana"
```

```
0  
1
```

"dan" adalah operator "`&&`" dan "atau" adalah operator "`||`", seperti dalam bahasa C. (Kata "dan" dan "atau" hanya dapat digunakan dalam kondisi "jika").

```
>2<E && E<3
```

```
1
```

Operator Boolean mematuhi aturan bahasa matriks.

```
>(1:10)>5, nonzeros(%)
```

```
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]  
[6, 7, 8, 9, 10]
```

Anda dapat menggunakan fungsi nonzeros() untuk mengekstrak elemen tertentu dari sebuah vektor. Pada contoh, kita menggunakan kondisional isprime(n).

```
>N=2|3:2:99 // N berisi elemen 2 dan bilangan2 ganjil dari 3 s.d. 99
```

```
[2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29,  
31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57,  
59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85,  
87, 89, 91, 93, 95, 97, 99]
```

```
>N[nonzeros(isprime(N))] //pilih anggota2 N yang prima
```

```
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,  
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97]
```

Format Keluaran

Format output default EMT mencetak 12 digit. Untuk memastikan bahwa kita melihat format default, kita atur ulang formatnya.

```
>defformat; pi
```

```
3.14159265359
```

Secara internal, EMT menggunakan standar IEEE untuk angka ganda dengan sekitar 16 digit desimal. Untuk melihat jumlah digit penuh, gunakan perintah "longestformat", atau kami menggunakan operator "longest" untuk menampilkan hasil dalam format terpanjang.

```
>longest pi
```

```
3.141592653589793
```

Berikut ini adalah representasi heksadesimal internal dari angka ganda.

```
>printhex(pi)
```

```
3.243F6A8885A30*16^0
```

Format output dapat diubah secara permanen dengan perintah format.

```
>format(12,5); 1/3, pi, sin(1)
```

```
0.33333  
3.14159  
0.84147
```

Standarnya adalah format(12).

```
>format(12); 1/3
```

```
0.333333333333
```

Fungsi seperti "shortestformat", "shortformat", "longformat" bekerja untuk vektor dengan cara berikut.

```
>shortestformat; random(3,8)
```

```
0.6554 0.201 0.8936 0.2819 0.525 0.3141 0.4446 0.2995  
0.2827 0.8832 0.2709 0.7044 0.2177 0.4454 0.3084 0.9145  
0.1936 0.4634 0.09515 0.595 0.4312 0.7287 0.4652 0.323
```

Format default untuk skalar adalah format(12). Tetapi ini dapat diubah.

```
>setscalarformat(5); pi
```

```
3.1416
```

Fungsi "longestformat" juga menetapkan format skalar.

```
>longestformat; pi
```

```
3.141592653589793
```

Sebagai referensi, berikut ini adalah daftar format output yang paling penting.

shortestformat shortformat longformat, longestformat

format(length,digits) goodformat(length)

fracformat(length)

deformat

Akurasi internal EMT adalah sekitar 16 tempat desimal, yang merupakan standar IEEE. Angka disimpan dalam format internal ini.

Tetapi format keluaran EMT dapat diatur dengan cara yang fleksibel.

```
>longestformat; pi,
```

```
3.141592653589793
```

```
>format(10,5); pi
```

```
3.14159
```

Standarnya adalah deformat().

```
>defformat; // default
```

Ada operator pendek yang hanya mencetak satu nilai. Operator " longest " akan mencetak semua digit angka yang valid.

```
>longest pi^2/2
```

```
4.934802200544679
```

Terdapat juga operator singkat untuk mencetak hasil dalam format pecahan. Kami sudah menggunakannya di atas.

```
>fraction 1+1/2+1/3+1/4
```

```
25/12
```

Karena format internal menggunakan cara biner untuk menyimpan angka, maka nilai 0,1 tidak akan terwakili dengan tepat. Kesalahan bertambah sedikit, seperti yang Anda lihat dalam perhitungan berikut ini.

```
>longest 0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
-1.110223024625157e-016
```

Tetapi, dengan "longformat" default, Anda tidak akan melihat hal ini. Untuk kenyamanan, output angka yang sangat kecil adalah 0.

```
>0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
0
```

Ekspresi

String atau nama dapat digunakan untuk menyimpan ekspresi matematika, yang dapat dievaluasi oleh EMT. Untuk ini, gunakan tanda kurung setelah ekspresi. Jika Anda bermaksud menggunakan string sebagai ekspresi, gunakan konvensi untuk menamainya "fx" atau "fxy", dll. Ekspresi lebih diutamakan daripada fungsi. Variabel global dapat digunakan dalam evaluasi.

```
> r:=2; fx:="pi*r^2"; longest fx()
```

```
12.56637061435917
```

```
>r:=2; fx:="pi*r^2"; shortest fx()
```

```
12.6
```

Parameter ditetapkan ke x, y, dan z dalam urutan tersebut. Parameter tambahan dapat ditambahkan dengan menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx := "a*sin(x)^2"; fx(5,a=-1)
```

-0.919535764538

Perhatikan bahwa ekspresi akan selalu menggunakan variabel global, meskipun ada variabel dalam fungsi dengan nama yang sama. (Jika tidak, evaluasi ekspresi dalam fungsi dapat memberikan hasil yang sangat membingungkan bagi pengguna yang memanggil fungsi tersebut).

```
>at:=4; function f(expr,x,at) := expr(x); ...
>f("at*x^2",3,5) // computes 4*3^2 not 5*3^2
```

36

Jika Anda ingin menggunakan nilai lain untuk "at" selain nilai global, Anda perlu menambahkan "at=value".

```
>at:=4; function f(expr,x,a) := expr(x,at=a); ...
>f("at*x^2",3,5)
```

45

Sebagai referensi, kami menyatakan bahwa koleksi panggilan (dibahas di tempat lain) dapat berisi ekspresi. Jadi kita dapat membuat contoh di atas sebagai berikut.

```
>at:=4; function f(expr,x) := expr(x); ...
>f({{"at*x^2",at=5}},3)
```

45

Ekspresi dalam x sering digunakan seperti halnya fungsi.

Perhatikan bahwa mendefinisikan fungsi dengan nama yang sama seperti ekspresi simbolik global akan menghapus variabel ini untuk menghindari kebingungan antara ekspresi simbolik dan fungsi.

```
>f &= 5*x;
>function f(x) := 6*x;
>f(2)
```

12

Sesuai dengan konvensi, ekspresi simbolik atau numerik harus diberi nama fx, fxy, dll. Skema penamaan ini tidak boleh digunakan untuk fungsi.

```
>fx &= diff(x^x,x); $&fx
```

$$x^x (1 + \log x)$$

Bentuk khusus dari sebuah ekspresi memungkinkan variabel apa pun sebagai parameter tanpa nama untuk evaluasi ekspresi, bukan hanya "x", "y", dll. Untuk ini, mulailah ekspresi dengan "@(variabel)...".

```
>"@(a,b) a^2+b^2", %(4,5)
```

@(a,b) a^2+b^2

41

Hal ini memungkinkan untuk memanipulasi ekspresi dalam variabel lain untuk fungsi EMT yang membutuhkan ekspresi dalam "x".

Cara paling dasar untuk mendefinisikan fungsi sederhana adalah dengan menyimpan rumusnya dalam ekspresi simbolik atau numerik. Jika variabel utamanya adalah x, ekspresi tersebut dapat dievaluasi seperti halnya sebuah fungsi.

Seperi yang Anda lihat pada contoh berikut, variabel global terlihat selama evaluasi.

```
>fx &= x^3-a*x; ...  
>a=1.2; fx(0.5)
```

-0.475

Semua variabel lain dalam ekspresi dapat ditentukan dalam evaluasi menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>$&fx(0.5,a=1.1)
```

$$(-a x + x^3) (0.5, a = 1.1)$$

Latihan Soal R.2

Sederhanakan soal di bawah ini

Nomor 47

$$\left(\frac{2x^{-3}y^7}{z^{-1}}\right)^3$$

Penyelesaian:

```
>$((2*x^(-3)*y^7)/(z^(-1)))^(3)
```

$$\frac{8 y^{21} z^3}{x^9}$$

Nomor 12

$$b^{-4}b^{12}$$

penyelesaian:

```
>$ (b^(-4))* (b^12)
```

$$b^8$$

Matematika Simbolik

EMT melakukan matematika simbolik dengan bantuan Maxima. Untuk detailnya, mulailah dengan tutorial berikut ini, atau telusuri referensi untuk Maxima. Para ahli dalam Maxima harus memperhatikan bahwa ada perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks default dari ekspresi simbolik dalam EMT. Matematika simbolik diintegrasikan secara mulus ke dalam Euler dengan &. Ekspresi apapun yang dimulai dengan & adalah sebuah ekspresi simbolik. Ekspresi ini dievaluasi dan dicetak oleh Maxima.

Pertama-tama, Maxima memiliki aritmatika "infinite" yang dapat menangani angka yang sangat besar.

```
>$& 44 !
```

2658271574788448768043625811014615890319638528000000000

Dengan cara ini, Anda dapat menghitung hasil yang besar secara tepat. Mari kita hitung

$$C(44, 10) = \frac{44!}{34! \cdot 10!}$$

```
>$& 44!/(34!*10!) // nilai C(44,10)
```

2481256778

Tentu saja, Maxima memiliki fungsi yang lebih efisien untuk hal ini (seperti halnya bagian numerik EMT).

```
>$binomial(44,10) //menghitung C(44,10) menggunakan fungsi binomial()
```

2481256778

Untuk mempelajari lebih lanjut tentang fungsi tertentu, klik dua kali pada fungsi tersebut. Sebagai contoh, coba klik dua kali pada "&binomial" di baris perintah sebelumnya. Ini akan membuka dokumentasi Maxima yang disediakan oleh pembuat program tersebut.

Anda akan mengetahui bahwa perintah-perintah berikut ini juga dapat digunakan.

$$C(x, 3) = \frac{x!}{(x-3)!3!} = \frac{(x-2)(x-1)x}{6}$$

```
>$binomial(x,3) // C(x,3)
```

$$\frac{(-2+x)(-1+x)x}{6}$$

Jika Anda ingin mengganti x dengan nilai tertentu, gunakan "with".

```
>$&binomial(x,3) with x=10 // substitusi x=10 ke C(x,3)
```

Dengan begitu, Anda dapat menggunakan solusi dari sebuah persamaan dalam persamaan lain. Ekspresi simbolik dicetak oleh Maxima dalam bentuk 2D. Alasannya adalah sebuah bendera simbolik khusus dalam string.

Seperi yang telah Anda lihat pada contoh sebelumnya dan contoh berikut, jika Anda telah menginstal LaTeX, Anda dapat mencetak ekspresi simbolik dengan Latex. Jika tidak, perintah berikut ini akan mengeluarkan pesan kesalahan.

Untuk mencetak ekspresi simbolik dengan LaTeX, gunakan \$ di depan & (atau Anda dapat menghilangkan &) sebelum perintah. Jangan jalankan perintah Maxima dengan \$, jika Anda tidak memiliki LaTeX.

```
>$ (3+x) / (x^2+1)
```

$$\frac{3 + x}{1 + x^2}$$

Ekspresi simbolik diuraikan oleh Euler. Jika Anda membutuhkan sintaks yang kompleks dalam satu ekspresi, Anda dapat mengapit ekspresi dalam "...". Menggunakan lebih dari satu ekspresi sederhana dimungkinkan, tetapi sangat tidak disarankan.

```
>&"v := 5; v^2"
```

25

Untuk kelengkapan, kami menyatakan bahwa ekspresi simbolik dapat digunakan dalam program, tetapi harus diapit dengan tanda kutip. Selain itu, akan jauh lebih efektif untuk memanggil Maxima pada saat kompilasi jika memungkinkan.

```
>$&expand((1+x)^4), $&factor(diff(%,x)) // diff: turunan, factor: faktor
```

$$4 (1 + x)^3$$

Sekali lagi, % mengacu pada hasil sebelumnya.

Untuk mempermudah, kita menyimpan solusi ke dalam sebuah variabel simbolik. Variabel simbolik didefinisikan dengan "&=".

```
>fx &= (x+1) / (x^4+1); $&fx
```

$$\frac{1 + x}{1 + x^4}$$

Ekspresi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&factor(diff(fx,x))
```

$$\frac{1 - 4 x^3 - 3 x^4}{(1 + x^4)^2}$$

Masukan langsung dari perintah Maxima juga tersedia. Mulai baris perintah dengan "::". Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "compatibility mode").

```
>&factor(20!)
```

```
2432902008176640000
```

```
>::: factor(10!)
```

```
8   4   2  
2   3   5   7
```

```
>::: factor(20!)
```

```
18   8   4   2  
2     3   5   7   11  13  17  19
```

Jika Anda adalah seorang ahli dalam Maxima, Anda mungkin ingin menggunakan sintaks asli Maxima. Anda dapat melakukan ini dengan ":::".

```
>::: av:g$ av^2;
```

```
2  
g
```

```
>fx &= x^3*exp(x), $fx
```

```
3   x  
x   E
```

```
 $x^3 e^x$ 
```

Variabel tersebut dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya. Perhatikan, bahwa pada perintah berikut ini, sisi kanan dari &= dievaluasi sebelum penugasan ke Fx.

```
>&(fx with x=5), $%, &float(%)
```

```
5  
125 E
```

$$125 e^5$$

```
18551.64488782208
```

```
>fx(5)
```

```
18551.6448878
```

Untuk mengevaluasi ekspresi dengan nilai variabel tertentu, Anda dapat menggunakan operator "with". Baris perintah berikut ini juga mendemonstrasikan bahwa Maxima dapat mengevaluasi sebuah ekspresi secara numerik dengan float().

```
>&(fx with x=10)-(fx with x=5), &float(%)
```

```
5          10  
- 125 E + 1000 E
```

```
2.20079141499189e+7
```

```
>$factor(diff(fx,x,2))
```

$$x (6 + 6x + x^2) e^x$$

Untuk mendapatkan kode Latex untuk sebuah ekspresi, Anda dapat menggunakan perintah tex.

```
>tex(fx)
```

$$x^3 \backslash, e^{\{x\}}$$

Ekspresi simbolik dapat dievaluasi seperti halnya ekspresi numerik.

```
>fx(0.5)
```

```
0.206090158838
```

Dalam ekspresi simbolik, hal ini tidak dapat dilakukan, karena Maxima tidak mendukungnya. Sebagai gantinya, gunakan sintaks "with" (bentuk yang lebih baik dari perintah at(...) pada Maxima).

```
>$&fx with x=1/2
```

$$\frac{\sqrt{e}}{8}$$

Penugasan ini juga bisa bersifat simbolis.

```
> $&fx with x=1+t
```

$$(1 + t)^3 e^{1+t}$$

Perintah solve menyelesaikan ekspresi simbolik untuk sebuah variabel di Maxima. Hasilnya adalah sebuah vektor solusi.

```
> $&solve(x^2+x=4, x)
```

$$\left[x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right]$$

Bandingkan dengan perintah "solve" numerik di Euler, yang membutuhkan nilai awal, dan secara opsional nilai target.

```
> solve("x^2+x", 1, y=4)
```

1.56155281281

Nilai numerik dari solusi simbolik dapat dihitung dengan evaluasi hasil simbolik. Euler akan membaca penugasan x= etc. Jika Anda tidak membutuhkan hasil numerik untuk perhitungan lebih lanjut, Anda juga bisa membiarkan Maxima menemukan nilai numeriknya.

```
> sol &= solve(x^2+2*x=4, x); $&sol, sol(), $&float(sol)
```

$$\left[x = -1 - \sqrt{5}, x = -1 + \sqrt{5} \right]$$

[-3.23607, 1.23607]

$[x = -3.23606797749979, x = 1.23606797749979]$

Untuk mendapatkan solusi simbolik yang spesifik, seseorang dapat menggunakan "with" dan indeks.

```
> $&solve(x^2+x=1, x), x2 &= x with %[2]; $&x2
```

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan, gunakan vektor persamaan. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
> sol &= solve([x+y=3, x^2+y^2=5], [x, y]); $&sol, $&x*y with sol[1]
```

Ekspresi simbolik dapat memiliki bendera, yang menunjukkan perlakuan khusus di Maxima. Beberapa flag dapat digunakan sebagai perintah juga, namun ada juga yang tidak. Bendera ditambahkan dengan "|" (bentuk yang lebih baik dari "ev(...,flags)")

```
> $& diff((x^3-1)/(x+1),x) //turunan bentuk pecahan
```

$$\frac{1 - x^3}{(1 + x)^2} + \frac{3 x^2}{1 + x}$$

```
> $& diff((x^3-1)/(x+1),x) | ratsimp //menyederhanakan pecahan
```

$$\frac{1 + 3 x^2 + 2 x^3}{1 + 2 x + x^2}$$

```
> $& factor(%)
```

$$\frac{1 + 3 x^2 + 2 x^3}{(1 + x)^2}$$

Fungsi

Dalam EMT, fungsi adalah program yang ditentukan dengan perintah "function". Fungsi dapat berupa fungsi satu baris atau fungsi multibaris.

Fungsi satu baris dapat berupa numerik atau simbolik. Fungsi satu baris numerik didefinisikan dengan ":".

```
> function f(x) := x*sqrt(x^2+1)
```

Sebagai gambaran umum, kami menunjukkan semua definisi yang mungkin untuk fungsi satu baris. Sebuah fungsi dapat dievaluasi seperti halnya fungsi Euler bawaan.

```
> f(2)
```

4.472135955

Fungsi ini juga dapat digunakan untuk vektor, mengikuti bahasa matriks Euler, karena ekspresi yang digunakan dalam fungsi ini adalah vektor.

```
> f(0:0.1:1)
```

[0, 0.100499, 0.203961, 0.313209, 0.430813, 0.559017, 0.699714,
0.854459, 1.0245, 1.21083, 1.41421]

Fungsi dapat diplot. Alih-alih ekspresi, kita hanya perlu memberikan nama fungsi.

Berbeda dengan ekspresi simbolik atau numerik, nama fungsi harus disediakan dalam bentuk string.

```
> solve("f", 1, y=1)
```

0.786151377757

Secara default, jika Anda perlu menimpa fungsi built-in, Anda harus menambahkan kata kunci "overwrite". Menimpa fungsi bawaan berbahaya dan dapat menyebabkan masalah bagi fungsi lain yang bergantung pada fungsi tersebut.

Anda masih dapat memanggil fungsi bawaan sebagai "...", jika fungsi tersebut merupakan fungsi dalam inti Euler.

```
>function overwrite sin (x) := _sin(x°) // redefine sine in degrees  
>sin(45)
```

0.707106781187

Sebaiknya kita hilangkan definisi ulang tentang sin ini.

```
>forget sin; sin(pi/4)
```

0.707106781187

Parameter Default

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default.

```
>function f(x,a=1) := a*x^2
```

Menghilangkan parameter ini menggunakan nilai default.

```
>f(4)
```

16

Menetapkannya akan menimpa nilai default.

```
>f(4,5)
```

80

Parameter yang ditetapkan juga menimpanya. Ini digunakan oleh banyak fungsi Euler seperti plot2d, plot3d.

```
>f(4,a=1)
```

16

Jika sebuah variabel bukan parameter, maka variabel tersebut harus bersifat global. Fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

```
>function f(x) := a*x^2  
>a=6; f(2)
```

24

Tetapi parameter yang ditetapkan akan menggantikan nilai global.

Jika argumen tidak ada dalam daftar parameter yang telah ditetapkan sebelumnya, argumen tersebut harus dideklarasikan dengan "`:=`"!

```
>f(2,a:=5)
```

20

Fungsi simbolik didefinisikan dengan "`&=`". Fungsi-fungsi ini didefinisikan dalam Euler dan Maxima, dan dapat digunakan di kedua bahasa tersebut. Ekspresi pendefinisian dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

```
>function g(x) &= x^3-x*exp(-x); $&g(x)
```

$$x^3 - x e^{-x}$$

Fungsi simbolis dapat digunakan dalam ekspresi simbolis.

```
>$&diff(g(x),x), $&% with x=4/3
```

$$\frac{16}{3} + \frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3}$$

$$\frac{16}{3} + \frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3}$$

Fungsi ini juga dapat digunakan dalam ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan berfungsi jika EMT dapat menginterpretasikan semua yang ada di dalam fungsi.

```
>g(5+g(1))
```

178.635099908

Mereka dapat digunakan untuk mendefinisikan fungsi atau ekspresi simbolis lainnya.

```
>function G(x) &= factor(integrate(g(x),x)); $&G(c) // integrate: mengintegralkan
```

$$\frac{e^{-c} (4 + 4c + c^4 e^c)}{4}$$

```
>solve(&g(x), 0.5)
```

0.703467422498

Hal berikut ini juga dapat digunakan, karena Euler menggunakan ekspresi simbolik dalam fungsi g, jika tidak menemukan variabel simbolik g, dan jika ada fungsi simbolik g.

```
>solve (&g, 0.5)
```

0.703467422498

```
>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; $&P(x,n)
```

$$(-1 + 2x)^n$$

```
>function Q(x,n) &= (x+2)^n; $&Q(x,n)
```

$$(2 + x)^n$$

```
>$&P(x,4), $&expand(%)
```

$$1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4$$

```
>P(3,4)
```

625

```
>$&P(x,4)+ Q(x,3), $&expand(%)
```

$$9 + 4x + 30x^2 - 31x^3 + 16x^4$$

```
>$&P(x,4)-Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$-7 - 20x + 18x^2 - 33x^3 + 16x^4$$

```
> $&P(x, 4) * Q(x, 3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$(2+x)^3 (-1+2x)^4$$

```
> $&P(x, 4) / Q(x, 1), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$\frac{(-1+2x)^4}{2+x}$$

$$\frac{1}{2+x} - \frac{8x}{2+x} + \frac{24x^2}{2+x} - \frac{32x^3}{2+x} + \frac{16x^4}{2+x}$$
$$\frac{(-1+2x)^4}{2+x}$$

```
> function f(x) &= x^3-x; $&f(x)
```

$$-x + x^3$$

Dengan `&=`, fungsi ini bersifat simbolis, dan dapat digunakan dalam ekspresi simbolis lainnya.

```
> $&integrate(f(x), x)
```

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

With `:=` fungsi tersebut berupa angka. Contoh yang baik adalah integral pasti seperti

$$f(x) = \int_1^x t^t dt,$$

yang tidak dapat dievaluasi secara simbolik.

Jika kita mendefinisikan ulang fungsi tersebut dengan kata kunci "map", maka fungsi tersebut dapat digunakan untuk vektor `x`. Secara internal, fungsi tersebut dipanggil untuk semua nilai `x` satu kali, dan hasilnya disimpan dalam sebuah vektor.

```
> function map f(x) := integrate("x^x", 1, x)
> f(0:0.5:2)
```

```
[ -0.783431, -0.410816, 0, 0.676863, 2.05045 ]
```

Fungsi dapat memiliki nilai default untuk parameter.

```
> function mylog (x, base=10) := ln(x)/ln(base);
```

Sekarang, fungsi ini dapat dipanggil dengan atau tanpa parameter "base".

```
>mylog(100), mylog(2^6.7,2)
```

```
2  
6.7
```

Selain itu, dimungkinkan untuk menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>mylog(E^2,base=E)
```

```
2
```

Sering kali, kita ingin menggunakan fungsi untuk vektor di satu tempat, dan untuk masing-masing elemen di tempat lain. Hal ini dimungkinkan dengan parameter vektor.

```
>function f([a,b]) &= a^2+b^2-a*b+b; $&f(a,b), $&f(x,y)
```

$$x^2 + y - xy + y^2$$

Fungsi simbolik seperti itu dapat digunakan untuk variabel simbolik.
Tetapi fungsi ini juga dapat digunakan untuk vektor numerik.

```
>v=[3,4]; f(v)
```

```
17
```

Ada juga fungsi yang murni simbolis, yang tidak dapat digunakan secara numerik.

```
>function lapl(expr,x,y) &&= diff(expr,x,2)+diff(expr,y,2)//turunan parsial kedua
```

$$\text{diff(expr, } x, 2) + \text{diff(expr, } y, 2)$$

```
>$&realpart((x+I*y)^4), $&lapl(% ,x,y)
```

```
0
```

Tetapi tentu saja, semua itu bisa digunakan dalam ekspresi simbolis atau dalam definisi fungsi simbolis.

```
>function f(x,y) &= factor(lapl((x+y^2)^5,x,y)); $&f(x,y)
```

$$10 (x + y^2)^3 (2 + x + 9 y^2)$$

Untuk meringkas

- &= mendefinisikan fungsi simbolik,
- := mendefinisikan fungsi numerik,
- &&= mendefinisikan fungsi simbolik murni.

Memecahkan Ekspresi

Ekspresi dapat diselesaikan secara numerik dan simbolik.

Untuk menyelesaikan ekspresi sederhana dari satu variabel, kita dapat menggunakan fungsi solve(). Fungsi ini membutuhkan nilai awal untuk memulai pencarian. Secara internal, solve() menggunakan metode secant.

```
>solve ("x^2-2", 1)
```

1.41421356237

Hal ini juga bisa digunakan untuk ekspresi simbolis. Perhatikan fungsi berikut ini.

```
>$&solve (x^2=2, x)
```

$$[x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}]$$

```
>$&solve (x^2-2, x)
```

$$[x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}]$$

```
>$&solve (a*x^2+b*x+c=0, x)
```

$$\left[x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

```
>$&solve ([a*x+b*y=c, d*x+e*y=f], [x, y])
```

$$\left[\left[x = -\frac{ce}{b(-5+d) - ae}, y = \frac{c(-5+d)}{b(-5+d) - ae}\right]\right]$$

```
>px &= 4*x^8+x^7-x^4-x; $&px
```

$$-x - x^4 + x^7 + 4x^8$$

Sekarang kita mencari titik, di mana polinomialnya adalah 2. Dalam solve(), nilai target default y=0 dapat diubah dengan variabel yang ditetapkan.

Kami menggunakan y=2 dan mengeceknya dengan mengevaluasi polinomial pada hasil sebelumnya.

```
>solve(px,1,y=2), px(%)
```

```
0.966715594851  
2
```

Memecahkan sebuah ekspresi simbolik dalam bentuk simbolik mengembalikan sebuah daftar solusi. Kami menggunakan pemecah simbolik solve() yang disediakan oleh Maxima.

```
>sol &= solve(x^2-x-1,x); $&sol
```

$$\left[x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$$

Cara termudah untuk mendapatkan nilai numerik adalah dengan mengevaluasi solusi secara numerik seperti sebuah ekspresi.

```
>longest sol()
```

```
-0.6180339887498949 1.618033988749895
```

Untuk menggunakan solusi secara simbolis dalam ekspresi lain, cara termudah adalah "with".

```
>$&x^2 with sol[1], $&expand(x^2-x-1 with sol[2])
```

```
0
```

Menyelesaikan sistem persamaan secara simbolik dapat dilakukan dengan vektor persamaan dan pemecah simbolik solve(). Jawabannya adalah sebuah daftar daftar persamaan.

```
>$&solve([x+y=2,x^3+2*y+x=4],[x,y])
```

```
[[x = -1, y = 3], [x = 1, y = 1], [x = 0, y = 2]]
```

Fungsi f() dapat melihat variabel global. Tetapi seringkali kita ingin menggunakan parameter lokal.

$$a^x - x^a = 0.1$$

with a = 3.

```
>function f(x,a) := x^a-a^x;
```

Salah satu cara untuk mengoper parameter tambahan ke f() adalah dengan menggunakan sebuah daftar yang berisi nama fungsi dan parameternya (cara lainnya adalah dengan menggunakan parameter titik koma).

```
>solve({{"f", 3}}, 2, y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Hal ini juga dapat dilakukan dengan ekspresi. Namun, elemen daftar bernama harus digunakan. (Lebih lanjut tentang daftar dalam tutorial tentang sintaks EMT).

```
>solve ( { { "x^a-a^x", a=3 } }, 2, y=0.1 )
```

2.54116291558

Menyelesaikan Pertidaksamaan

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukannya, melainkan dengan bantuan Maxima, artinya secara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah `fourier_elim()`, yang harus dipanggil dengan perintah "`load(fourier_elim)`" terlebih dahulu.

```
>&load(fourier_elim)
```

```
C:/Program Files/Euler/maxima/share/maxima/5.35.1/share/fouri\er_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1>0], [x]) // x^2-1 > 0
```

$$[1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1<0], [x]) // x^2-1 < 0
```

$$[-1 < x, x < 1]$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1 # 0], [x]) // x^-1 <> 0
```

$$[-1 < x, x < 1] \vee [1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier_elim([x # 6], [x])
```

$$[x < 6] \vee [6 < x]$$

```
>$&fourier_elim([x < 1, x > 1], [x]) // tidak memiliki penyelesaian
```

emptyset

```
>$&fourier_elim([minf < x, x < inf],[x]) // solusinya R
```

universalset

```
>$&fourier_elim([x^3 - 1 > 0],[x])
```

$$[1 < x, 1 + x + x^2 > 0] \vee [x < 1, -1 - x - x^2 > 0]$$

```
>$&fourier_elim([cos(x) < 1/2],[x]) // ??? gagal
```

$$[1 - 2 \cos x > 0]$$

```
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[x,y]) // sistem pertidaksamaan
```

$$[-5 + y < x, x < 7 + y, 10 < y]$$

```
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[y,x])
```

$$[\max(10, -7 + x) < y, y < 5 + x, 5 < x]$$

```
>$&fourier_elim((x + y < 5) and (x - y > 8), [x,y])
```

$$\left[8 + y < x, x < 5 - y, y < -\frac{3}{2}\right]$$

```
>$&fourier_elim(((x + y < 5) and x < 1) or (x - y > 8), [x,y])
```

$$[8 + y < x] \vee [x < \min(1, 5 - y)]$$

```
>&fourier_elim([max(x,y) > 6, x # 8, abs(y-1) > 12], [x,y])
```

$$\begin{aligned} & [6 < x, x < 8, y < -11] \text{ or } [8 < x, y < -11] \\ \text{or } & [x < 8, 13 < y] \text{ or } [x = y, 13 < y] \text{ or } [8 < x, x < y, 13 < y] \\ \text{or } & [y < x, 13 < y] \end{aligned}$$

```
> $&fourier_elim([ (x+6) / (x-9) <= 6], [x])
```

$$[x = 12] \vee [12 < x] \vee [x < 9]$$

Bahasa Matriks

Dokumentasi inti EMT berisi diskusi rinci tentang bahasa matriks Euler.

Vektor dan matriks dimasukkan dengan tanda kurung siku, elemen dipisahkan dengan koma, baris dipisahkan dengan titik koma.

```
>A=[ 1, 2; 3, 4 ]
```

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

Hasil kali matriks dilambangkan dengan sebuah titik.

```
>b=[ 3; 4 ]
```

$$\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

```
>b' // transpose b
```

$$[3, 4]$$

```
>inv(A) //inverse A
```

$$\begin{matrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{matrix}$$

```
>A.b //perkalian matriks
```

$$\begin{matrix} 11 \\ 25 \end{matrix}$$

```
>A.inv(A)
```

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Poin utama dari bahasa matriks adalah bahwa semua fungsi dan operator bekerja elemen demi elemen.

```
>A.A
```

$$\begin{matrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{matrix}$$

```
>A^2 //perpangkatan elemen2 A
```

```
1 4  
9 16
```

```
>A.A.A
```

```
37 54  
81 118
```

```
>power(A, 3) //perpangkatan matriks
```

```
37 54  
81 118
```

```
>A/A //pembagian elemen-elemen matriks yang seletak
```

```
1 1  
1 1
```

```
>A/b //pembagian elemen2 A oleh elemen2 b kolom demi kolom (karena b vektor kolom)
```

```
0.333333 0.666667  
0.75 1
```

```
>A\b // hasil kali invers A dan b, A^(-1)b
```

```
-2  
2.5
```

```
>inv(A).b
```

```
-2  
2.5
```

```
>A\A //A^(-1)A
```

```
1 0  
0 1
```

```
>inv(A).A
```

```
1 0  
0 1
```

```
>A*A // perkalian elemen-elemen matriks seletak
```

$$\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{array}$$

Ini bukan hasil kali matriks, tetapi perkalian elemen demi elemen. Hal yang sama berlaku untuk vektor.

```
>b^2 // perpangkatan elemen-elemen matriks/vektor
```

$$\begin{array}{c} 9 \\ 16 \end{array}$$

Jika salah satu operan adalah vektor atau skalar, maka operan tersebut akan diperluas dengan cara alami.

```
>2*A
```

$$\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{array}$$

Misalnya, jika operan adalah vektor kolom, elemen-elemennya diterapkan ke semua baris A.

```
>[1,2]*A
```

$$\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{array}$$

Jika ini adalah vektor baris, vektor ini diterapkan ke semua kolom A.

```
>A*[2,3]
```

$$\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 6 & 12 \end{array}$$

Kita dapat membayangkan perkalian ini seolah-olah vektor baris v telah diduplikasi untuk membentuk matriks dengan ukuran yang sama dengan A.

```
>dup([1,2],2) // dup: menduplikasi/menggandakan vektor [1,2] sebanyak 2 kali (baris)
```

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}$$

```
>A*dup([1,2],2)
```

$$\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{array}$$

Hal ini juga berlaku untuk dua vektor di mana satu vektor adalah vektor baris dan yang lainnya adalah vektor kolom. Kami menghitung i^*j untuk i, j dari 1 sampai 5. Caranya adalah dengan mengalikan 1:5 dengan transposenya. Bahasa matriks Euler secara otomatis menghasilkan sebuah tabel nilai.

```
>(1:5)*(1:5)' // hasil kali elemen-elemen vektor baris dan vektor kolom
```

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Sekali lagi, ingatlah bahwa ini bukan produk matriks!

```
>(1:5).(1:5)' // hasil kali vektor baris dan vektor kolom
```

55

```
>sum((1:5)*(1:5)) // sama hasilnya
```

55

Bahkan operator seperti < atau == bekerja dengan cara yang sama.

```
>(1:10)<6 // menguji elemen-elemen yang kurang dari 6
```

[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]

Sebagai contoh, kita dapat menghitung jumlah elemen yang memenuhi kondisi tertentu dengan fungsi sum().

```
>sum((1:10)<6) // banyak elemen yang kurang dari 6
```

5

Euler memiliki operator perbandingan, seperti "==" yang memeriksa kesetaraan.

Kita mendapatkan vektor 0 dan 1, di mana 1 berarti benar.

```
>t=(1:10)^2; t==25 //menguji elemen2 t yang sama dengan 25 (hanya ada 1)
```

[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]

Dari vektor seperti itu, "nonzeros" memilih elemen yang bukan nol.

Dalam hal ini, kita mendapatkan indeks semua elemen yang lebih besar dari 50.

```
>nonzeros(t>50) //indeks elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

[8, 9, 10]

Tentu saja, kita dapat menggunakan vektor indeks ini untuk mendapatkan nilai yang sesuai dalam t.

```
>t[nonzeros(t>50)] //elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

[64, 81, 100]

Sebagai contoh, mari kita cari semua kuadrat dari angka 1 sampai 1000, yaitu 5 modulo 11 dan 3 modulo 13.

```
>t=1:1000; nonzeros(mod(t^2,11)==5 && mod(t^2,13)==3)
```

```
[4, 48, 95, 139, 147, 191, 238, 282, 290, 334, 381, 425,  
433, 477, 524, 568, 576, 620, 667, 711, 719, 763, 810, 854,  
862, 906, 953, 997]
```

EMT tidak sepenuhnya efektif untuk komputasi bilangan bulat. EMT menggunakan floating point presisi ganda secara internal. Akan tetapi, hal ini sering kali sangat berguna.

Kita dapat memeriksa bilangan prima. Mari kita cari tahu, berapa banyak kuadrat ditambah 1 yang merupakan bilangan prima.

```
>t=1:1000; length(nonzeros(isprime(t^2+1)))
```

```
112
```

Fungsi nonzeros() hanya bekerja untuk vektor. Untuk matriks, ada mnonzeros().

```
>seed(2); A=random(3,4)
```

```
0.765761 0.401188 0.406347 0.267829  
0.13673 0.390567 0.495975 0.952814  
0.548138 0.006085 0.444255 0.539246
```

Ini mengembalikan indeks elemen, yang bukan nol.

```
>k=mnonzeros(A<0.4) //indeks elemen2 A yang kurang dari 0,4
```

```
1 4  
2 1  
2 2  
3 2
```

Indeks ini dapat digunakan untuk menetapkan elemen ke suatu nilai.

```
>mset(A,k,0) //mengganti elemen2 suatu matriks pada indeks tertentu
```

```
0.765761 0.401188 0.406347 0  
0 0 0.495975 0.952814  
0.548138 0 0.444255 0.539246
```

Fungsi mset() juga dapat mengatur elemen-elemen pada indeks ke entri-entri matriks lain.

```
>mset(A,k,-random(size(A)))
```

```
0.765761 0.401188 0.406347 -0.126917  
-0.122404 -0.691673 0.495975 0.952814  
0.548138 -0.483902 0.444255 0.539246
```

Dan dimungkinkan untuk mendapatkan elemen-elemen dalam vektor.

```
>mget(A, k)
```

```
[0.267829, 0.13673, 0.390567, 0.006085]
```

Fungsi lain yang berguna adalah extrema, yang mengembalikan nilai minimal dan maksimal di setiap baris matriks dan posisinya.

```
>ex=extrema(A)
```

0.267829	4	0.765761	1
0.13673	1	0.952814	4
0.006085	2	0.548138	1

Kita bisa menggunakan ini untuk mengekstrak nilai maksimal dalam setiap baris.

```
>ex[, 3]'
```

```
[0.765761, 0.952814, 0.548138]
```

Ini, tentu saja, sama dengan fungsi max().

```
>max(A)'
```

```
[0.765761, 0.952814, 0.548138]
```

Tetapi dengan mget(), kita dapat mengekstrak indeks dan menggunakan informasi ini untuk mengekstrak elemen-elemen pada posisi yang sama dari matriks yang lain.

```
>j=(1:rows(A))' | ex[, 4], mget(-A, j)
```

1	1
2	4
3	1

```
[-0.765761, -0.952814, -0.548138]
```

Fungsi Matriks Lainnya (Membangun Matriks)

Untuk membangun sebuah matriks, kita dapat menumpuk satu matriks di atas matriks lainnya. Jika keduanya tidak memiliki jumlah kolom yang sama, kolom yang lebih pendek akan diisi dengan 0.

```
>v=1:3; v_v
```

1	2	3
1	2	3

Demikian juga, kita dapat melampirkan matriks ke matriks lain secara berdampingan, jika keduanya memiliki jumlah baris yang sama.

```
>A=random(3,4); A|v'
```

0.032444	0.0534171	0.595713	0.564454	1
0.83916	0.175552	0.396988	0.83514	2
0.0257573	0.658585	0.629832	0.770895	3

Jika keduanya tidak memiliki jumlah baris yang sama, matriks yang lebih pendek diisi dengan 0. Ada pengecualian untuk aturan ini. Bilangan real yang dilampirkan pada sebuah matriks akan digunakan sebagai kolom yang diisi dengan bilangan real tersebut.

```
>A | 1
```

0.032444	0.0534171	0.595713	0.564454	1
0.83916	0.175552	0.396988	0.83514	1
0.0257573	0.658585	0.629832	0.770895	1

Dimungkinkan untuk membuat matriks vektor baris dan kolom.

```
> [v;v]
```

1	2	3
1	2	3

```
> [v',v']
```

1	1
2	2
3	3

Tujuan utama dari hal ini adalah untuk menginterpretasikan vektor ekspresi untuk vektor kolom.

```
>"[x,x^2]"(v')
```

1	1
2	4
3	9

Untuk mendapatkan ukuran A, kita dapat menggunakan fungsi berikut ini.

```
>C=zeros(2,4); rows(C), cols(C), size(C), length(C)
```

2	
4	
[2,	4]
4	

Untuk vektor, ada length().

```
>length(2:10)
```

9

Ada banyak fungsi lain yang menghasilkan matriks.

```
>ones(2,2)
```

1	1
1	1

Ini juga dapat digunakan dengan satu parameter. Untuk mendapatkan vektor dengan angka selain 1, gunakan yang berikut ini.

```
>ones(5)*6
```

```
[6, 6, 6, 6, 6]
```

Matriks angka acak juga dapat dibuat dengan acak (uniform distribution) atau normal (Gaussian distribution).

```
>random(2,2)
```

```
0.66566 0.831835  
0.977 0.544258
```

Berikut ini adalah fungsi lain yang berguna, yang merestrukturisasi elemen-elemen matriks menjadi matriks lain.

```
>redim(1:9,3,3) // menyusun elemen2 1, 2, 3, ..., 9 ke bentuk matriks 3x3
```

```
1 2 3  
4 5 6  
7 8 9
```

Dengan fungsi berikut, kita dapat menggunakan fungsi ini dan fungsi dup untuk menulis fungsi rep(), yang mengulang sebuah vektor sebanyak n kali.

```
>function rep(v,n) := redim(dup(v,n),1,n*cols(v))
```

Mari kita uji.

```
>rep(1:3,5)
```

```
[1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]
```

Fungsi multdup() menduplikasi elemen-elemen sebuah vektor.

```
>multdup(1:3,5), multdup(1:3,[2,3,2])
```

```
[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3]  
[1, 1, 2, 2, 2, 3, 3]
```

Fungsi flipx() dan flipy() membalik urutan baris atau kolom dari sebuah matriks. Misalnya, fungsi flipx() membalik secara horizontal.

```
>flipx(1:5) //membalik elemen2 vektor baris
```

```
[5, 4, 3, 2, 1]
```

Untuk rotasi, Euler memiliki rotleft() dan rotright().

```
>rotleft(1:5) // memutar elemen2 vektor baris
```

```
[2, 3, 4, 5, 1]
```

Fungsi khusus adalah `drop(v,i)`, yang menghapus elemen dengan indeks di `i` dari vektor `v`.

```
>drop(10:20,3)
```

```
[10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]
```

Perhatikan bahwa vektor `i` dalam `drop(v,i)` merujuk pada indeks elemen dalam `v`, bukan nilai elemen. Jika Anda ingin menghapus elemen, Anda harus menemukan elemen-elemen tersebut terlebih dahulu. Fungsi `indexof(v,x)` dapat digunakan untuk menemukan elemen `x` dalam vektor terurut `v`.

```
>v=primes(50), i=indexof(v,10:20), drop(v,i)
```

```
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47]
[0, 5, 0, 6, 0, 0, 0, 7, 0, 8, 0]
[2, 3, 5, 7, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47]
```

Seperti yang Anda lihat, tidak ada salahnya menyertakan indeks di luar jangkauan (seperti 0), indeks ganda, atau indeks yang tidak diurutkan.

```
>drop(1:10,shuffle([0,0,5,5,7,12,12]))
```

```
[1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10]
```

Ada beberapa fungsi khusus untuk mengatur diagonal atau menghasilkan matriks diagonal. Kita mulai dengan matriks identitas.

```
>A=id(5) // matriks identitas 5x5
```

1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

Kemudian, kami menetapkan diagonal bawah (-1) ke 1:4.

```
>setdiag(A,-1,1:4) //mengganti diagonal di bawah diagonal utama
```

1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	2	1	0	0
0	0	3	1	0
0	0	0	4	1

Perhatikan bahwa kita tidak mengubah matriks `A`. Kita mendapatkan sebuah matriks baru sebagai hasil dari `setdiag()`.

Berikut adalah sebuah fungsi yang mengembalikan sebuah matriks tri-diagonal.

```
>function tridiag (n,a,b,c) := setdiag(setdiag(b*id(n),1,c),-1,a); ...
>tridiag(5,1,2,3)
```

2	3	0	0	0
1	2	3	0	0
0	1	2	3	0
0	0	1	2	3
0	0	0	1	2

Diagonal sebuah matriks juga dapat diekstrak dari matriks. Untuk mendemonstrasikan hal ini, kami meres-trukturisasi vektor 1:9 menjadi matriks 3x3.

```
>A=redim(1:9, 3, 3)
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Sekarang kita bisa mengekstrak diagonal.

```
>d=getdiag(A, 0)
```

[1, 5, 9]

Contoh: Kita dapat membagi matriks dengan diagonalnya. Bahasa matriks memperhatikan bahwa vektor kolom diterapkan ke matriks baris demi baris.

```
>fraction A/d'
```

1	2	3
4/5	1	6/5
7/9	8/9	1

Vektorisasi

Hampir semua fungsi di Euler juga dapat digunakan untuk input matriks dan vektor, jika hal ini masuk akal. Sebagai contoh, fungsi sqrt() menghitung akar kuadrat dari semua elemen vektor atau matriks.

```
>sqrt(1:3)
```

[1, 1.41421, 1.73205]

Jadi, Anda dapat dengan mudah membuat tabel nilai. Ini adalah salah satu cara untuk memplot sebuah fungsi (alternatif lainnya menggunakan ekspresi).

```
>x=1:0.01:5; y=log(x)/x^2; // terlalu panjang untuk ditampilkan
```

Dengan ini dan operator titik dua a:delta:b, vektor nilai fungsi dapat dihasilkan dengan mudah. Pada contoh berikut, kita membuat vektor nilai t[i] dengan jarak 0.1 dari -1 hingga 1. Kemudian kita membuat vektor nilai dari fungsi

$$s = t^3 - t$$

```
>t=-1:0.1:1; s=t^3-t
```

```
[0, 0.171, 0.288, 0.357, 0.384, 0.375, 0.336, 0.273, 0.192,  
0.099, 0, -0.099, -0.192, -0.273, -0.336, -0.375, -0.384,  
-0.357, -0.288, -0.171, 0]
```

EMT memperluas operator untuk skalar, vektor, dan matriks dengan cara yang jelas.

Misalnya, vektor kolom dikalikan vektor baris diperluas menjadi matriks, jika operator diterapkan. Berikut ini, v' adalah vektor yang ditransposisikan (vektor kolom).

```
>shortest (1:5)*(1:5)'
```

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Perhatikan, bahwa ini sangat berbeda dengan hasil kali matriks. Hasil kali matriks dilambangkan dengan sebuah titik "." dalam EMT.

```
>(1:5).(1:5)'
```

55

Secara default, vektor baris dicetak dalam format ringkas.

```
>[1,2,3,4]
```

[1, 2, 3, 4]

Untuk matriks, operator khusus . menyatakan perkalian matriks, dan A' menyatakan transposisi. Matriks 1x1 dapat digunakan seperti halnya bilangan real.

```
>v:=[1,2]; v.v', %^2
```

5

25

Untuk mentransposisikan matriks, kita menggunakan apostrof.

```
>v=1:4; v'
```

1	2	3	4
---	---	---	---

Jadi kita dapat menghitung matriks A dikali vektor b.

```
>A=[1,2,3,4;5,6,7,8]; A.v'
```

```
30  
70
```

Perhatikan bahwa v masih merupakan vektor baris. Jadi $v' \cdot v$ berbeda dengan $v \cdot v'$.

```
>v' . v
```

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

$v \cdot v'$ menghitung norma v kuadrat untuk vektor baris v. Hasilnya adalah vektor 1×1 , yang berfungsi seperti bilangan real.

```
>v.v'
```

```
30
```

Ada juga norma fungsi (bersama dengan banyak fungsi Aljabar Linier lainnya).

```
>norm(v)^2
```

```
30
```

Operator dan fungsi mematuhi bahasa matriks Euler.

Berikut ini adalah ringkasan aturannya.

- Sebuah fungsi yang diterapkan pada vektor atau matriks diterapkan pada setiap elemen.
- Operator yang beroperasi pada dua matriks dengan ukuran yang sama diterapkan secara berpasangan pada elemen-elemen matriks.
- Jika dua matriks memiliki dimensi yang berbeda, keduanya diperluas dengan cara yang masuk akal, sehingga memiliki ukuran yang sama.

Misalnya, nilai skalar dikalikan vektor mengalikan nilai dengan setiap elemen vektor. Atau matriks dikali vektor (with *, not .) memperluas vektor ke ukuran matriks dengan menduplikasinya.

Berikut ini adalah kasus sederhana dengan operator ^.

```
>[1,2,3]^2
```

```
[1, 4, 9]
```

Ini adalah kasus yang lebih rumit. Vektor baris dikalikan vektor kolom memperluas keduanya dengan men-duplikasi.

```
>v:=[1,2,3]; v*v'
```

1	2	3
2	4	6
3	6	9

Perhatikan bahwa hasil kali skalar menggunakan hasil kali matriks, bukan tanda *!

```
>v.v'
```

14

Ada banyak fungsi untuk matriks. Kami memberikan daftar singkat. Anda harus membaca dokumentasi untuk informasi lebih lanjut mengenai perintah-perintah ini.

```
sum,prod menghitung jumlah dan hasil kali dari baris-baris  
cumsum,cumprod melakukan hal yang sama secara kumulatif  
menghitung nilai ekstrem dari setiap baris  
extrema mengembalikan vektor dengan informasi ekstrem  
diag(A,i) mengembalikan diagonal ke-i  
setdiag(A,i,v) menetapkan diagonal ke-i  
id(n) matriks identitas  
det(A) determinan  
charpoly(A) polinomial karakteristik  
eigenvalues(A) nilai eigen
```

```
>v*v, sum(v*v), cumsum(v*v)
```

```
[1, 4, 9]  
14  
[1, 5, 14]
```

Operator : menghasilkan vektor baris dengan spasi yang sama, opsional dengan ukuran langkah.

```
>1:4, 1:2:10
```

```
[1, 2, 3, 4]  
[1, 3, 5, 7, 9]
```

Untuk menggabungkan matriks dan vektor, terdapat operator "|" dan "_".

```
>[1,2,3] | [4,5], [1,2,3]_1
```

```
[1, 2, 3, 4, 5]  
1 2 3  
1 1 1
```

Elemen-elemen dari sebuah matriks disebut dengan "A[i,j]".

```
>A:=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; A[2,3]
```

6

Untuk vektor baris atau kolom, v[i] adalah elemen ke-i dari vektor tersebut. Untuk matriks, ini mengembalikan baris ke-i dari matriks.

```
>v:=[2,4,6,8]; v[3], A[3]
```

```
6  
[7, 8, 9]
```

Indeks juga dapat berupa vektor baris dari indeks. : menunjukkan semua indeks.

```
>v[1:2], A[:,2]
```

```
[2, 4]  
2  
5  
8
```

Bentuk singkat untuk : adalah menghilangkan indeks sepenuhnya.

```
>A[,2:3]
```

```
2          3  
5          6  
8          9
```

Untuk tujuan vektorisasi, elemen-elemen matriks dapat diakses seolah-olah mereka adalah vektor.

```
>A{4}
```

```
4
```

Sebuah matriks juga dapat diratakan, dengan menggunakan fungsi redim(). Hal ini diimplementasikan dalam fungsi flatten().

```
>redim(A,1,prod(size(A))), flatten(A)
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]  
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

Untuk menggunakan matriks untuk tabel, mari kita atur ulang ke format default, dan menghitung tabel nilai sinus dan kosinus. Perhatikan bahwa sudut dalam radian secara default.

```
>defformat; w=0°:45°:360°; w=w'; deg(w)
```

```
0  
45  
90  
135  
180  
225  
270  
315  
360
```

Sekarang kita menambahkan kolom ke matriks.

```
>M = deg(w) |w| cos(w) |sin(w)
```

0	0	1	0
45	0.785398	0.707107	0.707107
90	1.5708	0	1
135	2.35619	-0.707107	0.707107
180	3.14159	-1	0
225	3.92699	-0.707107	-0.707107
270	4.71239	0	-1
315	5.49779	0.707107	-0.707107
360	6.28319	1	0

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat membuat beberapa tabel dari beberapa fungsi sekaligus. Pada contoh berikut, kita menghitung $t[j]^i$ untuk i dari 1 hingga n . Kita mendapatkan sebuah matriks, di mana setiap baris adalah tabel t^i untuk satu i . Dengan kata lain, matriks tersebut memiliki elemen-elemen latex: $a_{i,j} = t_j^i$, $\forall j \leq j \leq 101$, $\forall i \leq i \leq n$

Sebuah fungsi yang tidak berfungsi untuk input vektor harus "vectorized". Hal ini dapat dicapai dengan kata kunci "map" dalam definisi fungsi. Kemudian fungsi akan dievaluasi untuk setiap elemen parameter vektor. Integrasi numerik integrate() hanya bekerja untuk batas interval skalar. Jadi kita perlu membuat vektornya.

```
>function map f(x) := integrate("x^x", 1, x)
```

Kata kunci "map" membuat vektor fungsi. Fungsi ini sekarang akan bekerja untuk vektor angka.

```
>f([1:5])
```

```
[0, 2.05045, 13.7251, 113.336, 1241.03]
```

Sub-Matriks dan Elemen Matriks

Untuk mengakses elemen matriks, gunakan notasi kurung.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9], A[2,2]
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9
5		

Kita dapat mengakses baris matriks secara lengkap.

```
>A[2]
```

```
[4, 5, 6]
```

Dalam kasus vektor baris atau kolom, ini mengembalikan elemen vektor.

```
>v=1:3; v[2]
```

2

Untuk memastikan, Anda mendapatkan baris pertama untuk matriks $1 \times n$ dan $m \times n$, tentukan semua kolom menggunakan indeks kedua yang kosong.

```
>A[2, ]
```

[4, 5, 6]

Jika indeks adalah vektor dari indeks, Euler akan mengembalikan baris matriks yang sesuai. Di sini kita menginginkan baris pertama dan kedua A.

```
>A[[1, 2]]
```

1	2	3
4	5	6

Kita bahkan dapat menyusun ulang A menggunakan vektor indeks. Tepatnya, kita tidak mengubah A di sini, namun menghitung versi A yang disusun ulang.

```
>A[[3, 2, 1]]
```

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Trik indeks juga berfungsi dengan kolom.

Contoh ini memilih semua baris A dan kolom kedua dan ketiga.

```
>A[1:3, 2:3]
```

2	3
5	6
8	9

Untuk singkatan ":" menunjukkan semua indeks baris atau kolom.

```
>A[:, 3]
```

3
6
9

Alternatifnya, biarkan indeks pertama kosong.

```
>A[, 2:3]
```

2	3
5	6
8	9

Kita juga bisa mendapatkan baris terakhir A.

```
>A[-1]
```

[7, 8, 9]

Sekarang mari kita ubah elemen A dengan menetapkan submatriks A ke suatu nilai. Ini sebenarnya mengubah matriks A yang disimpan.

```
>A[1,1]=4
```

4	2	3
4	5	6
7	8	9

Kita juga dapat memberikan nilai pada baris A.

```
>A[1]=[-1,-1,-1]
```

-1	-1	-1
4	5	6
7	8	9

Kita bahkan dapat menetapkan sub-matriks jika ukurannya sesuai.

```
>A[1:2,1:2]=[5,6;7,8]
```

5	6	-1
7	8	6
7	8	9

Selain itu, beberapa jalan pintas diperbolehkan.

```
>A[1:2,1:2]=0
```

0	0	-1
0	0	6
7	8	9

Peringatan: Indeks di luar batas mengembalikan matriks kosong, atau pesan kesalahan, bergantung pada pengaturan sistem. Standarnya adalah pesan kesalahan. Namun perlu diingat bahwa indeks negatif dapat digunakan untuk mengakses elemen matriks yang dihitung dari akhir.

```
>A[4]
```

Row index 4 out of bounds!

Error in:

A[4] ...

^

Menyortir dan Mengacak

Fungsi sort() mengurutkan vektor baris.

```
>sort([5, 6, 4, 8, 1, 9])
```

```
[1, 4, 5, 6, 8, 9]
```

Seringkali perlu mengetahui indeks vektor yang diurutkan dalam vektor aslinya. Ini dapat digunakan untuk menyusun ulang vektor lain dengan cara yang sama.

Mari kita mengacak sebuah vektor.

```
>v=shuffle(1:10)
```

```
[4, 5, 10, 6, 8, 9, 1, 7, 2, 3]
```

Indeks berisi urutan v.

```
>{vs,ind}=sort(v); v[ind]
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

Ini juga berfungsi untuk vektor string.

```
>s=["a","d","e","a","aa","e"]
```

```
a  
d  
e  
a  
aa  
e
```

```
>{ss,ind}=sort(s); ss
```

```
a  
a  
aa  
d  
e  
e
```

Seperti yang Anda lihat, posisi entri ganda agak acak.

```
>ind
```

```
[4, 1, 5, 2, 6, 3]
```

Fungsi unik mengembalikan daftar elemen unik vektor yang diurutkan.

```
>intrandom(1,10,10), unique(%)
```

```
[4, 4, 9, 2, 6, 5, 10, 6, 5, 1]  
[1, 2, 4, 5, 6, 9, 10]
```

Ini juga berfungsi untuk vektor string.

```
>unique(s)
```

```
a  
aa  
d  
e
```

Aljabar linier

EMT memiliki banyak sekali fungsi untuk menyelesaikan masalah sistem linier, sistem sparse, atau regresi. Untuk sistem linier $Ax=b$, Anda dapat menggunakan algoritma Gauss, matriks invers, atau linear fit. Operator $A\b$ menggunakan versi algoritma Gauss.

```
>A=[1,2;3,4]; b=[5;6]; A\b
```

```
-4  
4.5
```

Contoh lain, kita membuat matriks berukuran 200x200 dan jumlah baris-barisnya. Kemudian kita selesaikan $Ax=b$ menggunakan matriks invers. Kami mengukur kesalahan sebagai deviasi maksimal semua elemen dari 1, yang tentu saja merupakan solusi yang tepat.

```
>A=normal(200,200); b=sum(A); longest totalmax(abs(inv(A).b-1))
```

```
6.59472476627343e-013
```

Jika sistem tidak mempunyai solusi, kecocokan linier meminimalkan norma kesalahan $Ax-b$.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Penentu matriks ini adalah 0.

```
>det(A)
```

```
0
```

Matriks Simbolik

Maxima memiliki matriks simbolik. Tentu saja Maxima dapat digunakan untuk permasalahan aljabar linier sederhana seperti itu. Kita dapat mendefinisikan matriks untuk Euler dan Maxima dengan &:=, lalu menggunakan dalam ekspresi simbolik. Bentuk [...] yang biasa untuk mendefinisikan matriks dapat digunakan di Euler untuk mendefinisikan matriks simbolik.

```
>A &= [a,1,1;1,a,1;1,1,a]; $A
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

```
>$&det(A), $&factor(%)
```

$$(-1 + a)^2 (2 + a)$$

```
>$&invert(A) with a=0
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
>A &= [1,a;b,2]; $A
```

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Seperi semua variabel simbolik, matriks ini dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&det(A-x*ident(2)), $&solve(% ,x)
```

$$\left[x = \frac{3 - \sqrt{1 + 4ab}}{2}, x = \frac{3 + \sqrt{1 + 4ab}}{2} \right]$$

$$\left[x = \frac{3 - \sqrt{1 + 4ab}}{2}, x = \frac{3 + \sqrt{1 + 4ab}}{2} \right]$$

Nilai eigen juga dapat dihitung secara otomatis. Hasilnya adalah sebuah vektor dengan dua vektor nilai eigen dan multiplisitas.

```
>$&eigenvalues([a,1;1,a])
```

$$[[-1 + a, 1 + a], [1, 1]]$$

Untuk mengekstrak vektor eigen tertentu memerlukan pengindeksan yang cermat.

```
>$&eigenvectors([a,1;1,a]), &%[2][1][1]
```

$$[[[-1 + a, 1 + a], [1, 1]], [[[1, -1]], [[1, 1]]]]$$

$$[1, -1]$$

Matriks simbolik dapat dievaluasi dalam Euler secara numerik sama seperti ekspresi simbolik lainnya.

```
>A (a=4, b=5)
```

$$\begin{matrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{matrix}$$

Dalam ekspresi simbolik, gunakan dengan.

```
>$&A with [a=4, b=5]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Akses ke deretan matriks simbolik berfungsi sama seperti matriks numerik.

```
>$&A[1]
```

$$[1, a]$$

Ekspresi simbolis dapat berisi tugas. Dan itu mengubah matriks A.

```
>&A[1,1]:=t+1; $&A
```

$$\begin{pmatrix} 1+t & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Ada fungsi simbolik di Maxima untuk membuat vektor dan matriks. Untuk ini, lihat dokumentasi Maxima atau tutorial tentang Maxima di EMT.

```
>v &= makelist(1/(i+j), i, 1, 3); $v
```

$$\left[\frac{1}{1+j}, \frac{1}{2+j}, \frac{1}{3+j} \right]$$

```
>B &:= [1, 2; 3, 4]; $B, $&invert(B)
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Hasilnya dapat dievaluasi secara numerik dalam Euler. Untuk informasi lebih lanjut tentang Maxima, lihat pengenalan Maxima.

```
> $&invert(B)()
```

$$\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{array}$$

Euler juga memiliki fungsi kuat `xinv()`, yang melakukan upaya lebih besar dan mendapatkan hasil yang lebih tepat.

Perhatikan, bahwa dengan `&:=` matriks `B` telah didefinisikan sebagai simbolik dalam ekspresi simbolik dan numerik dalam ekspresi numerik. Jadi kita bisa menggunakanya di sini.

```
> longest B.xinv(B)
```

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

Misalnya. nilai eigen dari `A` dapat dihitung secara numerik.

```
> A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; real(eigenvalues(A))
```

$$[16.1168, -1.11684, 0]$$

Atau secara simbolis. Lihat tutorial tentang Maxima untuk detailnya.

```
> $&eigenvalues(@A)
```

$$\left[\left[\frac{15 - 3\sqrt{33}}{2}, \frac{15 + 3\sqrt{33}}{2}, 0 \right], [1, 1, 1] \right]$$

Nilai Numerik dalam Ekspresi simbolik

Ekspresi simbolis hanyalah string yang berisi ekspresi. Jika kita ingin mendefinisikan nilai untuk ekspresi simbolik dan ekspresi numerik, kita harus menggunakan "`&:=`".

```
> A &:= [1,pi;4,5]
```

$$\begin{array}{cc} 1 & 3.14159 \\ 4 & 5 \end{array}$$

Masih terdapat perbedaan antara bentuk numerik dan simbolik. Saat mentransfer matriks ke bentuk simbolik, pendekatan pecahan untuk real akan digunakan.

```
> $&A
```

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1146408}{364913} \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Untuk menghindari hal ini, ada fungsi "mxmset(variabel)".

```
>mxmset (A); $&A
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3.141592653589793 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Maxima juga dapat menghitung dengan bilangan floating point, bahkan dengan bilangan mengambang besar dengan 32 digit. Namun evaluasinya jauh lebih lambat.

```
>$&bfloat(sqrt(2)), $&float(sqrt(2))
```

1.414213562373095

Ketepatan angka floating point besar dapat diubah.

```
>&fpprec:=100; &bfloat(pi)
```

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\
4592307816406286208998628034825342117068b0

Variabel numerik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik apa pun menggunakan "@var".

Perhatikan bahwa ini hanya diperlukan, jika variabel telah didefinisikan dengan ":" atau "=" sebagai variabel numerik.

```
>B:=[1,pi;3,4]; $&det (@B)
```

-5.424777960769379

Demo - Suku Bunga

Di bawah ini, kami menggunakan Euler Math Toolbox (EMT) untuk menghitung suku bunga. Kami melakukannya secara numerik dan simbolis untuk menunjukkan kepada Anda bagaimana Euler dapat digunakan untuk memecahkan masalah kehidupan nyata.

Asumsikan Anda memiliki modal awal sebesar 5.000 (katakanlah dalam dolar).

```
>K=5000
```

5000

Sekarang kami mengasumsikan tingkat bunga 3% per tahun. Mari kita tambahkan satu tarif sederhana dan hitung hasilnya.

```
>K*1.03
```

5150

Euler juga akan memahami sintaks berikut.

```
>K+K*3%
```

5150

Namun lebih mudah menggunakan faktor tersebut

```
>q=1+3%, K*q
```

1.03

5150

Selama 10 tahun, kita cukup mengalikan faktor-faktornya dan mendapatkan nilai akhir dengan tingkat bunga majemuk.

```
>K*q^10
```

6719.58189672

Untuk keperluan kita, kita dapat mengatur formatnya menjadi 2 digit setelah titik desimal.

```
>format(12,2); K*q^10
```

6719.58

Mari kita cetak yang dibulatkan menjadi 2 digit dalam satu kalimat lengkap.

```
>"Starting from " + K + "$ you get " + round(K*q^10,2) + "$."
```

Starting from 5000\$ you get 6719.58\$.

Bagaimana jika kita ingin mengetahui hasil antara dari tahun 1 sampai tahun ke 9? Untuk ini, bahasa matriks Euler sangat membantu. Anda tidak perlu menulis satu perulangan, tetapi cukup masuk

```
>K*q^(0:10)
```

Real 1 x 11 matrix

5000.00 5150.00 5304.50 5463.64 ...

Bagaimana keajaiban ini terjadi? Pertama, ekspresi 0:10 mengembalikan vektor bilangan bulat.

```
>short 0:10
```

[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

Kemudian semua operator dan fungsi di Euler dapat diterapkan pada vektor elemen demi elemen. Jadi

```
>short q^(0:10)
```

```
[1, 1.03, 1.0609, 1.0927, 1.1255, 1.1593, 1.1941, 1.2299,  
1.2668, 1.3048, 1.3439]
```

adalah vektor faktor q^0 sampai q^{10} . Ini dikalikan dengan K , dan kita mendapatkan vektor nilainya.

```
>VK=K*q^(0:10);
```

Tentu saja, cara realistik untuk menghitung suku bunga ini adalah dengan membulatkan ke sen terdekat setiap tahunnya. Mari kita tambahkan fungsi untuk ini.

```
>function oneyear (K) := round(K*q, 2)
```

Mari kita bandingkan kedua hasil tersebut, dengan dan tanpa pembulatan.

```
>longest oneyear(1234.57), longest 1234.57*q
```

```
1271.61  
1271.6071
```

Sekarang tidak ada rumus sederhana untuk tahun ke- n , dan kita harus mengulanginya selama bertahun-tahun. Euler memberikan banyak solusi untuk ini.

Cara termudah adalah fungsi iterate, yang mengulangi fungsi tertentu beberapa kali.

```
>VKr=iterate("oneyear",5000,10)
```

Real 1 x 11 matrix

```
5000.00      5150.00      5304.50      5463.64      ...
```

Kami dapat mencetaknya dengan cara yang ramah, menggunakan format kami dengan tempat desimal tetap.

```
>VKr'
```

```
5000.00  
5150.00  
5304.50  
5463.64  
5627.55  
5796.38  
5970.27  
6149.38  
6333.86  
6523.88  
6719.60
```

Untuk mendapatkan elemen vektor tertentu, kami menggunakan indeks dalam tanda kurung siku.

```
>VKr[2], VKr[1:3]
```

```
5150.00  
5000.00 5150.00 5304.50
```

Anehnya, kita juga bisa menggunakan vektor indeks. Ingatlah bahwa 1:3 menghasilkan vektor [1,2,3]. Mari kita bandingkan elemen terakhir dari nilai yang dibulatkan dengan nilai penuh.

```
>VKr[-1], VK[-1]
```

```
6719.60  
6719.58
```

Perbedaannya sangat kecil.

Memecahkan Persamaan

Sekarang kita mengambil fungsi yang lebih maju, yang menambahkan tingkat uang tertentu setiap tahunnya.

```
>function onepay (K) := K*q+R
```

Kita tidak perlu menentukan q atau R untuk definisi fungsi. Hanya jika kita menjalankan perintah, kita harus mendefinisikan nilai-nilai ini. Kami memilih R=200.

```
>R=200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
Real 1 x 11 matrix  
5000.00 5350.00 5710.50 6081.82 ...
```

Bagaimana jika kita menghapus jumlah yang sama setiap tahun?

```
>R=-200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
Real 1 x 11 matrix  
5000.00 4950.00 4898.50 4845.45 ...
```

Kami melihat uangnya berkurang. Jelasnya, jika kita hanya mendapat bunga sebesar 150 pada tahun pertama, namun menghapus 200, kita kehilangan uang setiap tahunnya.

Bagaimana kita dapat menentukan berapa tahun uang tersebut akan bertahan? Kita harus menulis satu lingkaran untuk ini. Cara termudah adalah dengan melakukan iterasi cukup lama.

```
>VKR=iterate("onepay",5000,50)
```

```
Real 1 x 51 matrix  
5000.00 4950.00 4898.50 4845.45 ...
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menentukan nilai negatif pertama dengan cara berikut.

```
>min (nonzeros (VKR<0) )
```

48.00

Alasannya adalah bukan nol (VKR<0) mengembalikan vektor indeks i, dengan VKR[i]<0, dan min menghitung indeks minimal.

Karena vektor selalu dimulai dengan indeks 1, maka jawabannya adalah 47 tahun.

Fungsi iterate() memiliki satu trik lagi. Ini dapat mengambil kondisi akhir sebagai argumen. Kemudian akan mengembalikan nilai dan jumlah iterasi.

```
>{x, n}=iterate ("onepay", 5000, till="x<0"); x, n,
```

-19.83
47.00

Mari kita coba menjawab pertanyaan yang lebih ambigu. Asumsikan kita mengetahui bahwa nilainya adalah 0 setelah 50 tahun. Berapa tingkat bunganya?

Ini adalah pertanyaan yang hanya bisa dijawab secara numerik. Di bawah ini, kita akan mendapatkan rumus yang diperlukan. Kemudian Anda akan melihat bahwa tidak ada rumus yang mudah untuk menentukan tingkat suku bunga. Namun untuk saat ini, kami menargetkan solusi numerik.

Langkah pertama adalah mendefinisikan fungsi yang melakukan iterasi sebanyak n kali. Kami menambahkan semua parameter ke fungsi ini.

```
>function f(K, R, P, n) := iterate ("x*(1+P/100)+R", K, n; P, R) [-1]
```

Iterasinya sama seperti di atas

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) + R$$

Namun kami tidak lagi menggunakan nilai global R dalam ekspresi kami. Fungsi seperti iterate() memiliki trik khusus di Euler. Anda dapat meneruskan nilai variabel dalam ekspresi sebagai parameter titik koma. Dalam hal ini P dan R.

Apalagi kami hanya tertarik pada nilai terakhir. Jadi kita ambil indeks [-1].

Mari kita coba tes.

```
>f(5000, -200, 3, 47)
```

-19.83

Sekarang kita bisa menyelesaikan masalah kita.

```
>solve ("f(5000, -200, x, 50)", 3)
```

3.15

Rutinitas penyelesaian menyelesaikan ekspresi=0 untuk variabel x. Jawabannya adalah 3,15% per tahun. Kami mengambil nilai awal 3% untuk algoritma. Fungsi solve() selalu membutuhkan nilai awal.

Kita dapat menggunakan fungsi yang sama untuk menyelesaikan pertanyaan berikut: Berapa banyak yang dapat kita keluarkan per tahun sehingga modal awal habis setelah 20 tahun dengan asumsi tingkat bunga 3% per tahun.

```
>solve("f(5000,x,3,20)",-200)
```

-336.08

Perhatikan bahwa Anda tidak dapat menyelesaikan jumlah tahun, karena fungsi kami mengasumsikan n sebagai nilai bilangan bulat.

Solusi Simbolis Masalah Suku Bunga

Kita dapat menggunakan bagian simbolis dari Euler untuk mempelajari masalahnya. Pertama kita mendefinisikan fungsi onepay() kita secara simbolis.

```
>function op(K) &= K*q+R; \$&op(K)
```

$$qK + R$$

Sekarang kita dapat mengulanginya.

```
>\$&op(op(op(op(K)))) , \$&expand(%)
```

$$q^4K + R + qR + q^2R + q^3R$$

Kami melihat sebuah pola. Setelah n periode yang kita miliki

$$K_n = q^nK + R(1 + q + \dots + q^{n-1}) = q^nK + \frac{q^n - 1}{q - 1}R$$

Rumusnya adalah rumus jumlah geometri yang diketahui Maxima.

```
>\sum(q^k, k, 0, n-1); \$& % = ev(% , simpsum)
```

$$\sum_{k=0}^{-1+n} q^k = \frac{-1 + q^n}{-1 + q}$$

Ini agak rumit. Jumlahnya dievaluasi dengan tanda "simpsum" untuk menguranginya menjadi hasil bagi. Mari kita membuat fungsi untuk ini.

```
>function fs(K,R,P,n) &= (1+P/100)^n*K + ((1+P/100)^n-1)/(P/100)*R; \$&fs(K,R,P,n)
```

$$K \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n + \frac{100 \left(-1 + \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n\right) R}{P}$$

Fungsinya sama dengan fungsi f kita sebelumnya. Tapi ini lebih efektif.

```
>longest f(5000,-200,3,47), longest fs(5000,-200,3,47)
```

```
-19.82504734650985  
-19.82504734652684
```

Sekarang kita dapat menggunakananya untuk menanyakan waktu n. Kapan modal kita habis? Perkiraan awal kami adalah 30 tahun.

```
>solve("fs(5000,-330,3,x)",30)
```

```
20.51
```

Jawaban ini mengatakan akan menjadi negatif setelah 21 tahun.

Kita juga dapat menggunakan sisi simbolis Euler untuk menghitung rumus pembayaran.

Asumsikan kita mendapatkan pinjaman sebesar K, dan membayar n pembayaran sebesar R (dimulai setelah tahun pertama) meninggalkan sisa hutang sebesar Kn (pada saat pembayaran terakhir). Rumusnya jelas

```
>equ &= fs(K,R,P,n)=Kn; $&equ
```

$$K \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n + \frac{100 \left(-1 + \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n\right) R}{P} = Kn$$

Biasanya rumus ini diberikan dalam bentuk

$$i = \frac{P}{100}$$

```
>equ &= (equ with P=100*i); $&equ
```

$$(1 + i)^n K + \frac{(-1 + (1 + i)^n) R}{i} = Kn$$

Kita dapat menyelesaikan nilai R secara simbolis.

```
>$&solve(equ,R)
```

$$\left[R = \frac{i Kn - i (1 + i)^n K}{-1 + (1 + i)^n} \right]$$

Seperti yang Anda lihat dari rumusnya, fungsi ini mengembalikan kesalahan floating point untuk i=0. Euler tetap merencanakannya.

Tentu saja, kami memiliki batasan berikut.

```
>$&limit(R(5000,0,x,10),x,0)
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} R(5000, 0, x, 10)$$

Yang jelas tanpa bunga kita harus membayar kembali 10 tarif 500.

Persamaan tersebut juga dapat diselesaikan untuk n. Akan terlihat lebih bagus jika kita menerapkan beberapa penyederhanaan padanya.

```
>fn &= solve(equ,n) | ratsimp; $&fn
```

$$n = \left\lceil \frac{\log \left(\frac{iKn+R}{iK+R} \right)}{\log(1+i)} \right\rceil$$

```
>
```

LATIHAN SOAL ** SOAL R.2 Soal 1

$$3^{-7}$$

```
>$& 3^-7
```

$$\frac{1}{2187}$$

Soal 2

$$y^3y^{-7}$$

```
>$& y^3*y^-7
```

$$\frac{1}{y^4}$$

Soal 3

$$\frac{x^{26}}{x^{13}}$$

```
>$& x^26/x^13
```

$$x^{13}$$

Soal 4

$$\frac{20a^5b^{-2}}{5a^7b^{-3}}$$

```
>$& (20*a^5*b^-2) / (5*a^7*b^-3)
```

$$\frac{4b}{a^2}$$

Soal 5

$$\frac{6.4 \times 10^{-7}}{8.0 \times 10^6}$$

```
>$& (6.4*10^-7) / (8.0*10^6)
```

$$8.0 \times 10^{-14}$$

R.3

Soal 1

$$7x^3 - 4x^2 + 8x = 5$$

```
>$& factor(7*x^3-4*x^2+8*x=5)
```

$$x (8 - 4x + 7x^2) = 5$$

Soal 2

$$(y - 3)(y + 5)$$

```
>$& expand( (y-3)*(y+5) )
```

$$-15 + 2y + y^2$$

```
>$ powerdisp:false;
```

Soal 3

$$(3a^2)(-7a^4)$$

```
>$& multirow( (3*a^2)*(-7*a^4) )
```

$$multirow (-21 a^6)$$

Soal 4

$$(-5m^4n^2)(6m^2n^3)$$

```
>$& multirow( (-5*m^4*n^2)*(6*m^2*n^3) )
```

$$\text{multirow} \left(-30 m^6 n^5 \right)$$

Soal 5

$$(2x + 3y + z - 7) + (4x - 2y - z + 8) + (-3x + y - 2z - 4)$$

```
>$ (2*x+3*y+z-7)+(4*x-2*y-z+8)+(-3*x+y-2*z-4)
```

$$-2z + 2y + 3x - 3$$

R.4

Soal 1

$$3a^5 - 24a^2$$

```
>$& factor(3*a^5-24*a^2)
```

$$3(a - 2) a^2 (a^2 + 2a + 4)$$

Soal 2

$$4p^2 - 8pq + 4q^2$$

```
>$& factor(4*p^2-8*p*q+4*q^2)
```

$$4(q - p)^2$$

Soal 3

$$5x^2y - 5yz^4$$

```
>$& factor(5*x^2*y-5*y*z^4)
```

$$-5y(z^2 - x)(z^2 + x)$$

Soal 4

$$t^2 + 8t + 15$$

```
> $& factor(t^2+8*t+15)
```

$$(t + 3) (t + 5)$$

Soal 5

$$m^2 - m - 90$$

```
> $& factor(m^2-m-90)
```

$$(m - 10) (m + 9)$$

R.5

Soal 1

$$3x + 4 = -8$$

```
> $& solve(3*x+4=-8)
```

$$[x = -4]$$

Soal 2

$$9t + 4 = -5$$

```
> $& solve (9*t+4=-5)
```

$$[t = -1]$$

Soal 3

$$15x + 40 = 8x - 9$$

```
> $& solve(15*x+40=8*x-9)
```

$$[x = -7]$$

Soal 4

$$24 = 5(2t + 5)$$

```
> $& solve(24=5*(2*t+5))
```

$$\left[t = -\frac{1}{10} \right]$$

Soal 5

$$8x - (3x - 5) = 40$$

```
> $& solve(8*x-(3*x-5)=40)
```

$$[x = 7]$$

R.6

Soal 1

$$\frac{x+5}{x^2+4x-5}$$

```
> $& factor((x+5)/(x^2+4*x-5))
```

$$\frac{1}{x-1}$$

Soal 2

$$\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$$

```
> $& factor((x^2-4)/(x^2-4*x+4))
```

$$\frac{x+2}{x-2}$$

Soal 3

$$\frac{x^3-6x^2+9x}{x^3-3x^2}$$

```
> $& factor((x^3-6*x^2+9*x)/(x^3-3*x^2))
```

$$\frac{x-3}{x}$$

Soal 4

$$\frac{6y^2 + 12y - 48}{3y^2 - 9y + 6}$$

```
>$& factor((6*y^2+12*y-48)/(3*y^2-9*y+6))
```

$$\frac{2(y+4)}{y-1}$$

Soal 5

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9}$$

```
>$& factor((x^2+2*x-3)/(x^2-9))
```

$$\frac{x-1}{x-3}$$

R.7

Soal 1

$$\sqrt{3x-4} = 1$$

```
>$& solve(sqrt(3*x-4)=1)
```

$$\left[x = \frac{5}{3} \right]$$

Soal 2

$$\sqrt{4x+1} = 3$$

```
>$& solve(sqrt(4*x+1)=3)
```

$$[x = 2]$$

Soal 3

$$x + \frac{6}{x} = 5$$

```
>$& solve((x+6/x)=5)
```

$$[x = 3, x = 2]$$

Soal 4

$$x - \frac{12}{x} = 1$$

```
>$& solve((x-12/x)=1)
```

$$[x = -3, x = 4]$$

Soal 5

$$\frac{5}{3x+2} = \frac{3}{2x}$$

```
>$& solve((5/3*x+2)=(3/2*x))
```

$$[x = -12]$$

>

BAB 3

KB PEKAN 6-7: MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENGAMBAR GRAFIK 2 DIMENSI (2D)

article

eumat

NAMA : Mukti Wibowo

NIM : 22305144036

KELAS : Matematika E 2022

PLOT 2D

Mengga

Grafik Fungsi Simbolik

Fungsi Plot yang paling penting untuk plot planar adalah `plot2d()`. Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler dalam file "plot.e", yang dimuat diawal program.

`plot2d()` menerima ekspresi, fungsi, dan data.

Rentang plot diatur dengan parameter yang ditetapkan sebagai berikut

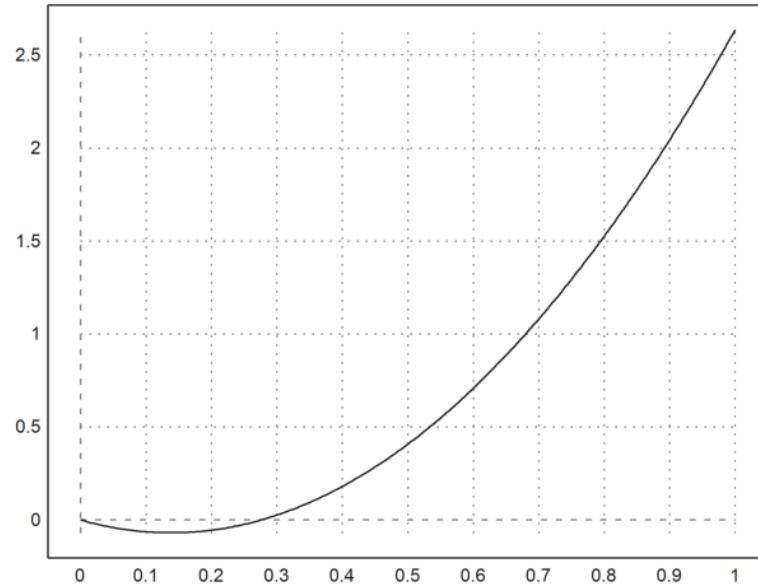
- `a,b`: rentang x (default -2,2)
- `c,d`: rentang y (default: skala dengan nilai)
- `r`: alternatifnya radius di sekitar pusat plot
- `cx,cy`: koordinat pusat plot (default 0,0)

Keterangan:(menggambar grafik fungsi satu variabel yang fungsinya didefinisikan sebagai fungsi simbolik)

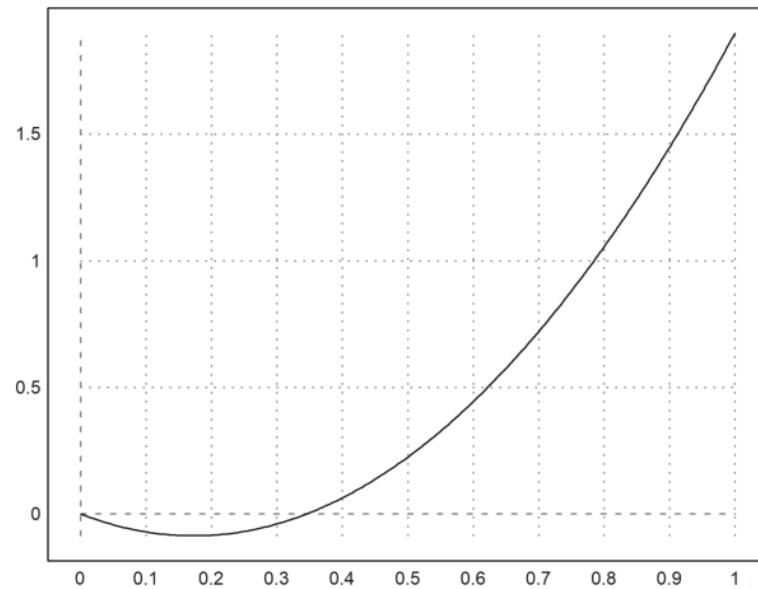
- &: untuk menampilkan variabel pada teks

Berikut adalah beberapa contoh menggunakan fungsi. Seperti biasa di EMT, fungsi yang berfungsi untuk fungsi atau ekspresi lain, jadi kita dapat meneruskan parameter tambahan (selain x) yang bukan variabel global ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan koleksi panggilan.

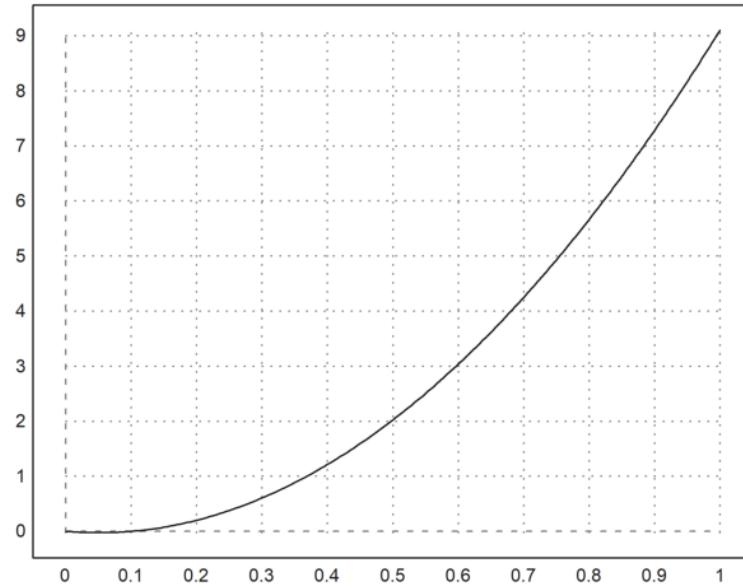
```
>function f(x,a) := x^2/a+a*x^2-x; // define a function
>a=0.3; plot2d("f",0,1;a); // plot with a=0.3
```



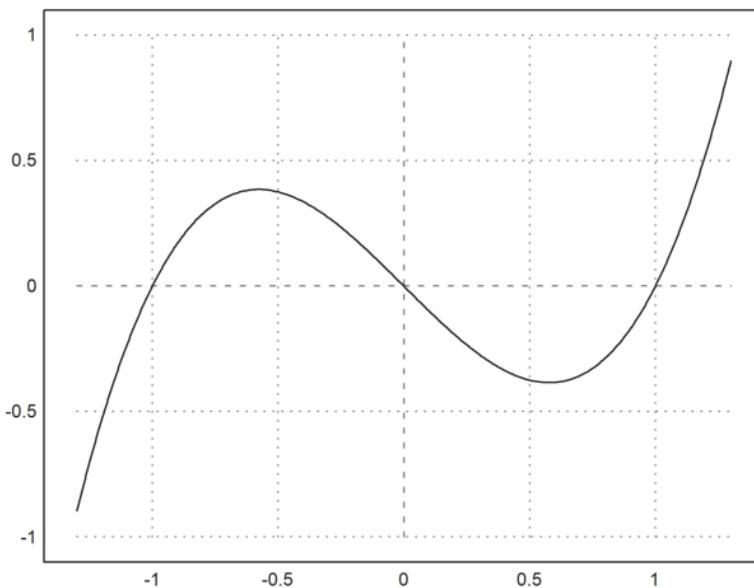
```
>plot2d("f",0,1;0.4); // plot with a=0.4
```



```
>plot2d({{"f",0.2}},0,1); // plot with a=0.2  
>plot2d({{"f(x,b)"},b=0.1}},0,1); // plot with 0.1
```



```
>function f(x) := x^3-x;...
>plot2d("f",r=1):
```



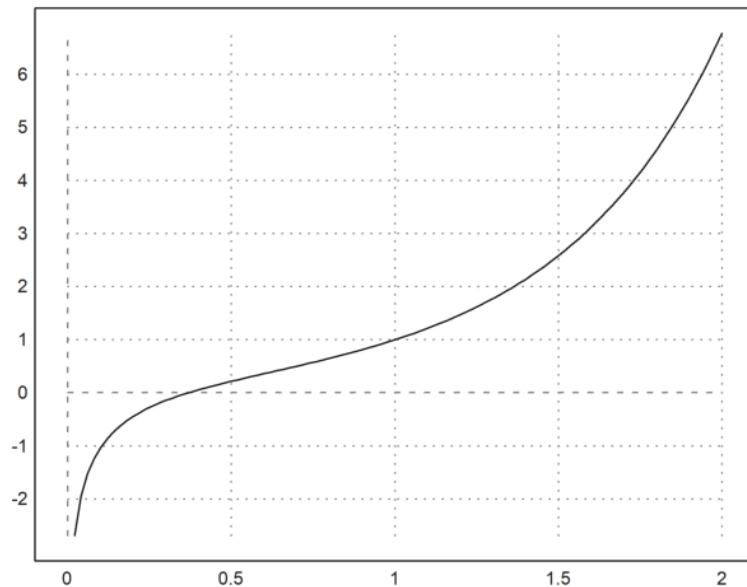
Berikut merupakan ringkasan dari fungsi yang diterima
 - ekspresi atau ekspresi simbolik dalam x
 - fungsi atau fungsi simbolis dengan nama sebagai "f"
 - fungsi simbolis hanya dengan nama f

Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolis. Untuk fungsi simbolis, hanya nama saja yang berfungsi.

```
>function f(x) &= diff(x^x,x)
```

$$x \cdot (x^x \ln(x) + 1)$$

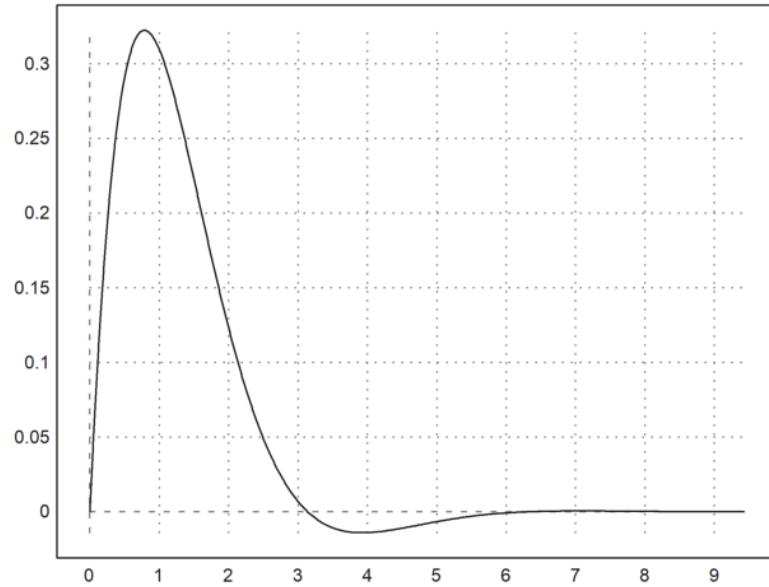
```
>plot2d(f,0,2):
```



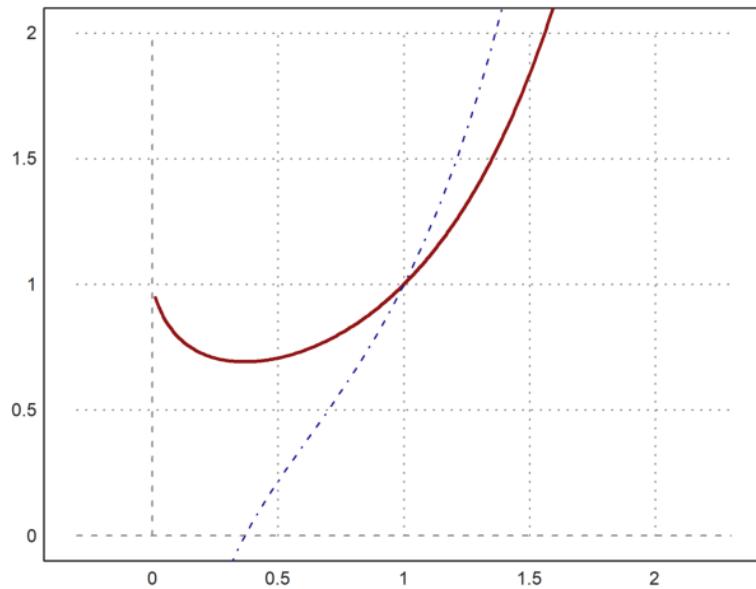
```
>expr &= sin(x)*exp(-x)
```

$$e^{-x} \sin(x)$$

```
>plot2d(expr,0,3pi):
```



```
>function f(x) &=x^x;
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=red,thickness=2)
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="-.-"):
```



Untuk gaya garis ada berbagai pilihan.

- gaya="...". Pilih dari "-", "-.", ".-", ".","-.-".
- warna: Lihat di bawah untuk warna.
- ketebalan: Default adalah 1.

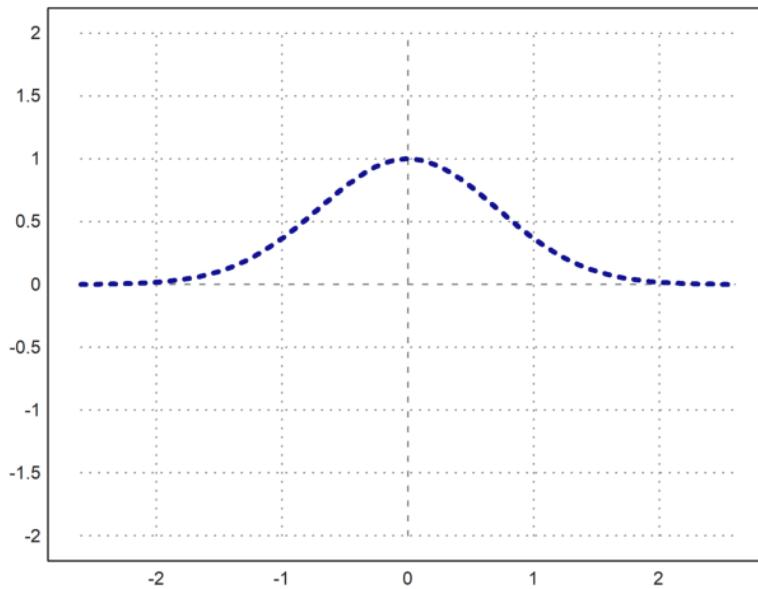
Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB.

- 0.15: indeks warna default.

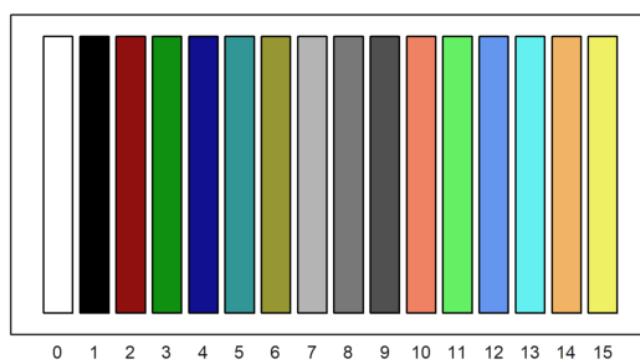
- konstanta warna: putih, hitam, merah, hijau, biru, cyan, zaitun, abu-abu muda, abu-abu, abu-abu tua, oranye, hijau muda, pirus, biru muda, oranye terang, kuning

- `rgb(merah, hijau, biru)`: parameter adalah real dalam [0,1].

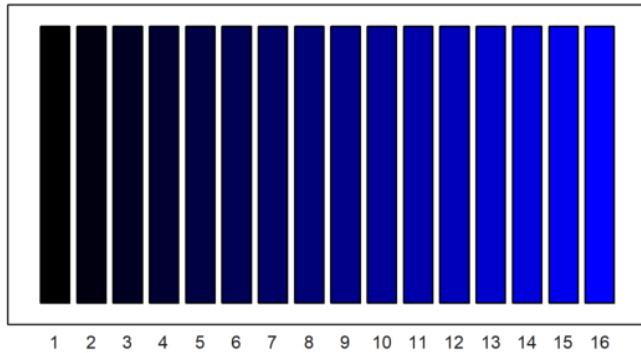
```
>plot2d("exp(-x^2)", r=2, color=blue, thickness=3, style="--") :
```



```
>aspect(2); columnsplot(ones(1,16), lab=0:15, grid=0, color=0:15) :
```



```
>columnsplot(ones(1,16), grid=0, color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))) :
```



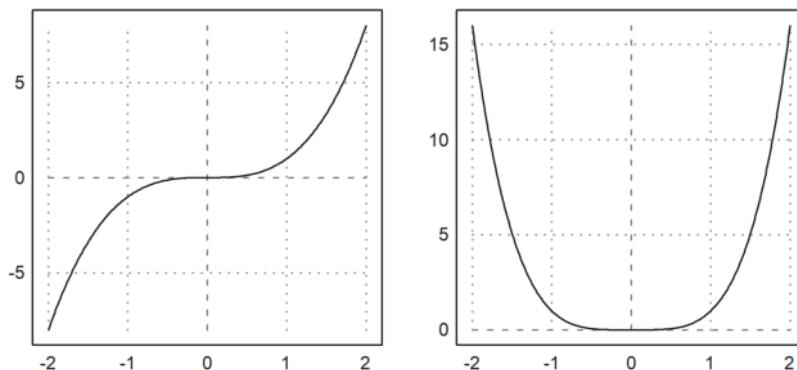
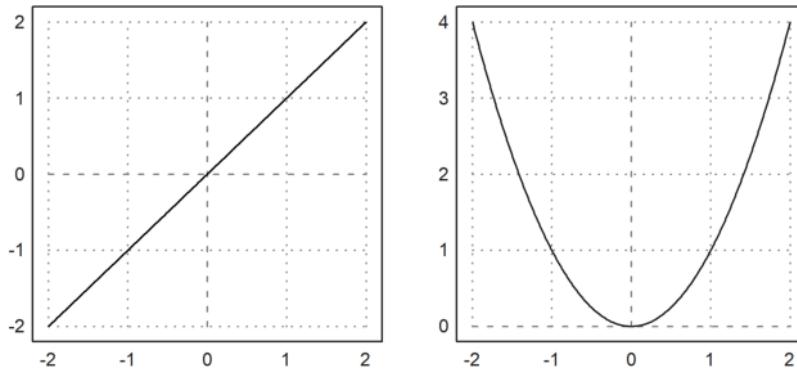
Menggambar Beberapa Kurva Sekaligus

Dalam subtopik ini, kita akan membahas mengenai cara menggambar beberapa kurva sekaligus. Dalam hal ini kita dapat menggambar beberapa kurva dalam jendela grafik yang berbeda secara bersama-sama. Untuk membuat ini kita dapat menggunakan perintah figure(). Berikut contoh dari menggambar beberapa kurva sekaligus

Menggambar plot fungsi

$$x^n, 1 \leq n \leq 4$$

```
>reset;
>figure(2,2);...
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^"+n); end;...
>figure(0):
```



Penjelasan sintaks dari plot fungsi

$$x^n, 1 \leq n \leq 4$$

- reset;

Perintah ini berguna untuk menghapus grafik yang telah ada sebelumnya, sehingga kita dapat memulai dari awal untuk menggambar grafik

- figure(2x2);

Perintah figure() digunakan untuk membuat jendela grafik dengan ukuran axb. Dalam kasus ini perintah figure(2,2) memiliki makna bahwa jendela grafik yang dibuat berukuran 2x2. Artinya, akan ada empat jendela grafik yang akan ditampilkan dengan tata letak 2 baris dan 2 kolom.

- for n=1 to 4;

Perintah ini digunakan untuk melakukan pengulangan (looping) perintah sebanyak empat kali, yaitu dari 1 hingga 4.

- figure(n);

Perintah ini digunakan untuk beralih dari jendela grafik satu ke jendela grafik lainnya (jendela grafik ke-n).

- plot2d("x^n");

Perintah plot2d() digunakan untuk membuat plot fungsi matematika.

Dalam hal ini fungsi yang diplot adalah x^n , di mana n adalah nilai dari variabel yang sedang diulang. Dengan kata lain, ini akan membuat

plot dari x^1, x^2, x^3 , dan x^4 dalam jendela grafik yang sesuai

- end;

Perintah ini menandakan akhir dari looping.

- figure(0);

Perintah ini digunakan untuk beralih kembali ke jendela grafik utama.

```
>figure(2,2);...
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^n"); end;...
```

Dari sini dapat kita perhatikan untuk membuat kurva fungsi x^n (x pangkat n) perintahnya tidak ditulis dengan (x^n) melainkan ditulis dengan (" x^n "). Tanda petik dua ("...") digunakan untuk mengidentifikasi bahwa teks tersebut merupakan ekspresi matematika.

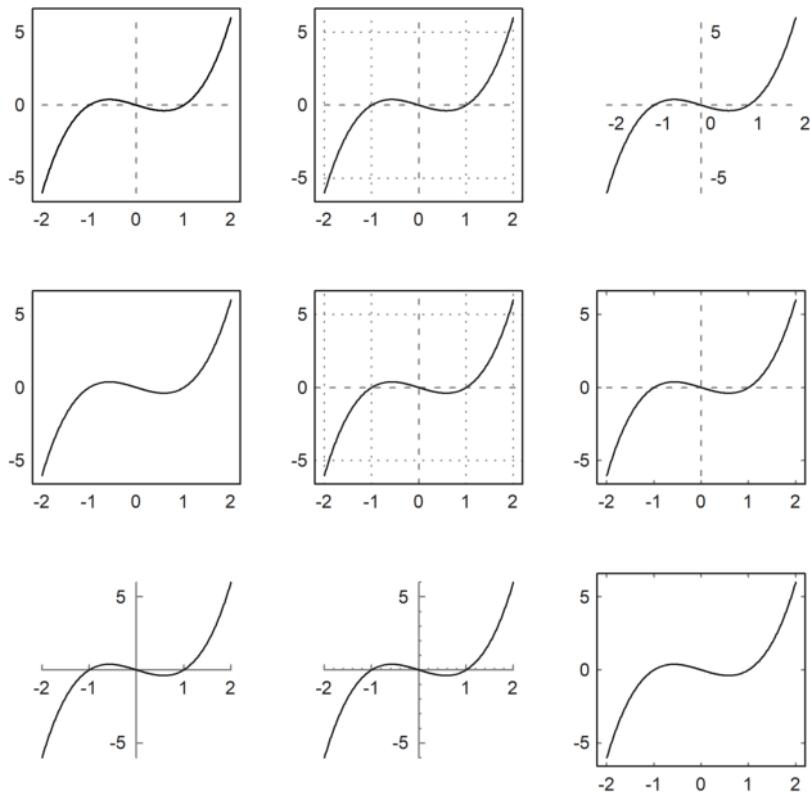
Sedangkan tanda (+) digunakan untuk menggabungkan string dengan nilai yang berubah-ubah atau variabel.

Contoh lain:

Menggambar plot fungsi

$$f(x) = x^3 - x, -2 < x < 2$$

```
>reset;
>figure(3,3);...
>for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x", -2, 2, grid=k); end;...
>figure(0);
```



Penjelasan sintaks dari plot fungsi

$$f(x) = x^3 - x, -2 < x < 2$$

- reset;

Perintah ini berguna untuk menghapus grafik yang telah ada sebelumnya, sehingga kita dapat memulai dari awal untuk menggambar grafik

- figure (3,3);

Perintah ini digunakan untuk membuat jendela grafik dengan ukuran 3x3. Artinya, akan ada empat jendela grafik yang akan ditampilkan dengan tata letak 3 baris dan 3 kolom.

- for k=1:9;

Perintah ini digunakan untuk melakukan pengulangan (looping) perintah sebanyak sembilan kali.

- figure(n);

Perintah ini digunakan untuk beralih dari jendela grafik satu ke

jendela grafik lainnya (jendela grafik ke-n).

- plot2d("x^3-x",-2,2,grid=k);

Perintah plot2d() digunakan untuk membuat plot fungsi matematika.

Dalam hal ini fungsi yang diplot adalah x^3-x , dengan batas sumbu x dari -2 hingga 2. Argumen grid=k digunakan untuk mengaktifkan grid pada jendela grafik ke-k.

- end;

Perintah ini menandakan akhir dari looping.

- figure(0);

Perintah ini digunakan untuk beralih kembali ke jendela grafik utama.

Dari contoh diatas dapat kita perhatikan bahwa tampilan plot dari yang ke-1 hingga ke-9 memiliki tampilan yang berbeda-beda. Dalam EMT memiliki berbagai gaya plot 2D yang dapat dijalankan menggunakan perintah grid=n dimana n adalah jumlah langkah minimal. Setiap nilai n memiliki tampilan plot adaptif yang

berbeda dalam plot 2D, diantaranya yaitu:

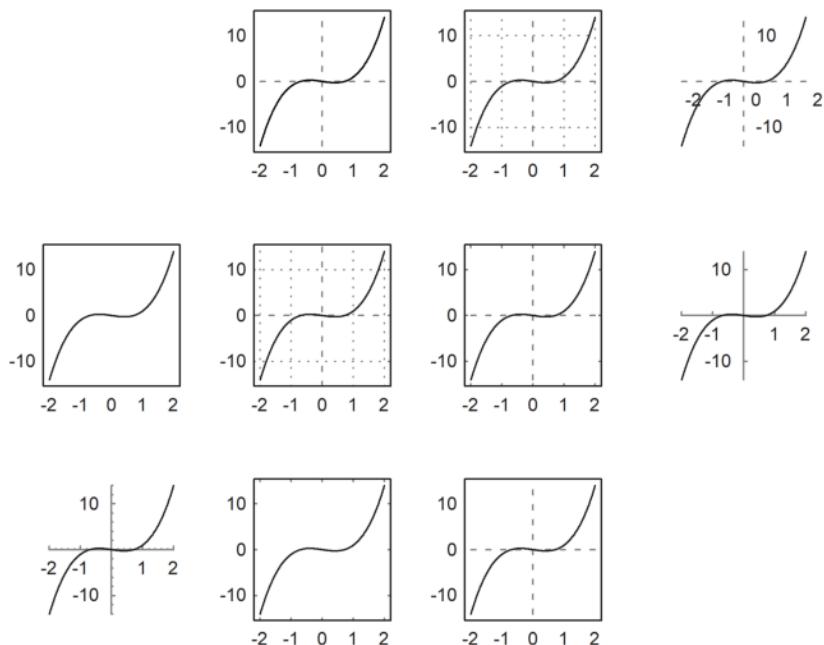
- 0 : tidak ada grid (kisi), frame, sumbu, dan label, hanya kurva saja
- 1 : dengan sumbu, label-label sumbu di luar frame jendela grafik
- 2 : tampilan default
- 3 : dengan grid pada sumbu x dan y, label-label sumbu berada di dalam jendela grafik
- 4 : tidak ada grid (kisi), sumbu x dan y, dan label berada di luar frame jendela grafik
- 5 : tampilan default tanpa margin di sekitar plot
- 6 : hanya dengan sumbu x y dan label, tanpa grid
- 7 : hanya dengan sumbu x y dan tanda-tanda pada sumbu.
- 8 : hanya dengan sumbu dan tanda-tanda pada sumbu, dengan tanda-tanda yang lebih halus pada sumbu.
- 9 : tampilan default dengan tanda-tanda kecil di dalam jendela
- 10: hanya dengan sumbu-sumbu, tanpa tanda

Contoh lain:

Menggambar plot fungsi

$$g(x) = 2x^3 - x$$

```
>reset;
>aspect(1.2);
>figure(3,4); ...
> figure(2); plot2d("2x^3-x",grid=1); ... // x-y-axis
> figure(3); plot2d("2x^3-x",grid=2); ... // default ticks
>figure(4); plot2d("2x^3-x",grid=3); ... // x-y- axis with labels inside
>figure(5); plot2d("2x^3-x",grid=4); ... // no ticks, only labels
>figure(6); plot2d("2x^3-x",grid=5); ... // default, but no margin
>figure(7); plot2d("2x^3-x",grid=6); ... // axes only
>figure(8); plot2d("2x^3-x",grid=7); ... // axes only, ticks at axis
>figure(9); plot2d("2x^3-x",grid=8); ... // axes only, finer ticks at axis
>figure(10); plot2d("2x^3-x",grid=9); ... // default, small ticks inside
>figure(11); plot2d("2x^3-x",grid=10); ...// no ticks, axes only
>figure(0):
```



Penjelasan sintaks dari plot fungsi

$$g(x) = 2x^3 - x$$

- aspect(1.2);

Perintah aspect() digunakan untuk mengatur rasio aspek dari jendela grafik. Hal ini berarti perintah aspect(1.2); akan menghasilkan plot dengan perbandingan rasio panjang dan lebar 2:1.

- figure(3,4);

Perintah ini digunakan untuk membuat jendela grafik dengan ukuran 3x4.

Jadi, akan ada total 12 jendela grafik yang akan ditampilkan dalam tata letak 3 baris dan 4 kolom.

- figure(1); plot2d("x^3-x",grid=0); ...

Adalah perintah untuk beralih ke jendela grafik pertama dan menggambar plot dari fungsi $x^3 - x$ tanpa grid, frame, atau sumbu.

- figure(2); plot2d("x^3-x",grid=1); ...

Adalah perintah untuk beralih ke jendela grafik kedua dan menggambar plot dari fungsi $x^3 - x$ dengan grid hanya pada sumbu x dan y.

- figure(3); plot2d("x^3-x",grid=2); ...

Adalah perintah untuk beralih ke jendela grafik ketiga dan menggambar plot dari fungsi $x^3 - x$ dengan tampilan default, termasuk tanda-tanda default pada sumbu.

- figure(4); plot2d("x^3-x",grid=3); ...

Adalah perintah untuk beralih ke jendela grafik keempat dan menggambar plot dari fungsi $x^3 - x$ dengan grid pada sumbu x dan y, serta label-label sumbu yang ada di dalam jendela.

- figure(5); plot2d("x^3-x",grid=4); ...

Adalah perintah untuk beralih ke jendela grafik kelima dan menggambar plot dari fungsi $x^3 - x$ tanpa tanda-tanda sumbu, hanya label-label yang ada.

- figure(6); plot2d("x^3-x",grid=5); ...

Adalah perintah untuk beralih ke jendela grafik keenam dan menggambar plot dari fungsi $x^3 - x$ dengan tampilan default, tetapi tanpa margin di sekitar plot.

- figure(7); plot2d("x^3-x",grid=6); ...

Adalah perintah untuk beralih ke jendela grafik ketujuh dan menggambar plot dari fungsi $x^3 - x$ hanya dengan sumbu-sumbu (tanpa grid atau label).

- figure(8); plot2d("x^3-x",grid=7); ...

Adalah perintah untuk beralih ke jendela grafik kedelapan dan menggambar plot dari fungsi $x^3 - x$ hanya dengan sumbu-sumbu dan tanda-tanda pada sumbu.

- figure(9); plot2d("x^3-x",grid=8); ...

Adalah perintah untuk beralih ke jendela grafik kesembilan dan menggambar plot dari fungsi $x^3 - x$ hanya dengan sumbu-sumbu dan tanda-tanda pada sumbu, dengan tanda-tanda yang lebih halus pada sumbu.

- figure(10); plot2d("x^3-x",grid=9); ...

Adalah perintah untuk beralih ke jendela grafik kesepuluh dan menggambar plot dari fungsi $x^3 - x$ dengan tanda-tanda default kecil di dalam jendela.

- figure(11); plot2d("x^3-x",grid=10); ...

Adalah perintah untuk beralih ke jendela grafik kesebelas dan menggambar plot dari fungsi $x^3 - x$ hanya dengan sumbu-sumbu, tanpa tanda-tanda.

- figure(0);

Adalah perintah untuk beralih kembali ke jendela grafik utama atau jendela grafik dengan nomor 0 setelah semua perintah dalam urutan selesai dieksekusi.

Dari ketiga contoh di atas, dapat kita katakan bahwa untuk menggambar beberapa kurva sekaligus itu dapat dilakukan dengan satu baris perintah ataupun dengan cara mendefinisikannya 1 per 1.

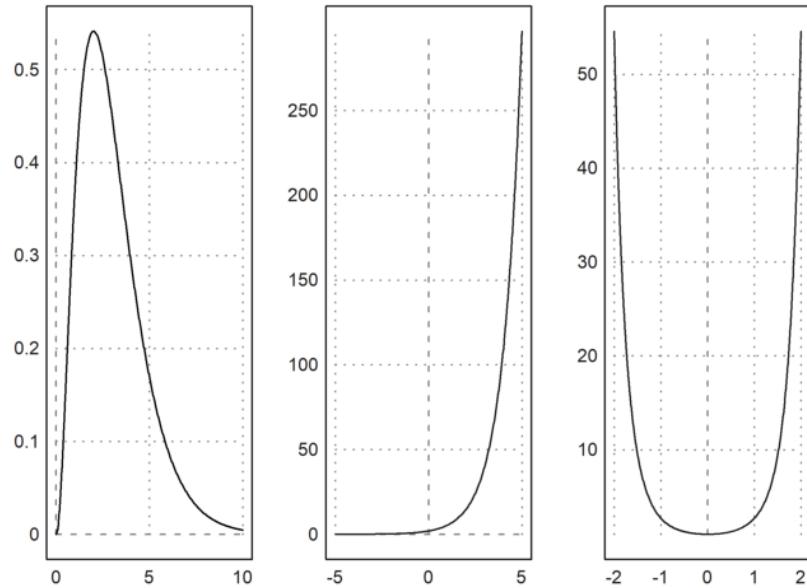
Terlihat beberapa jenis grid memiliki tampilan yang mirip atau sama, seperti 1 dan 2, 2 dan 5, 4 dan 9, 7 dan 8, untuk dapat membedakannya secara lebih jelas, ubah grid dari contoh di bawah ini.

```
>reset;  
>aspect (1.3);
```

```

>figure(1,3);...
>figure(1); plot2d("x^2*exp(-x)",0,10);...
>figure(2); plot2d("2*exp(x)",-5,5);...
>figure(3); plot2d("exp(x^2)",-2,2);...
>figure(0):

```

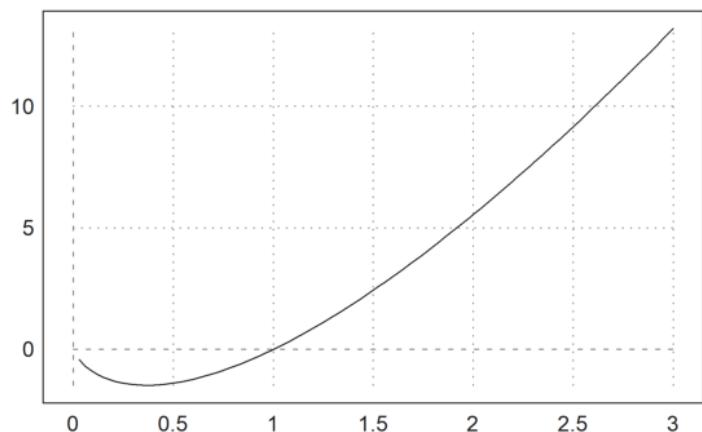
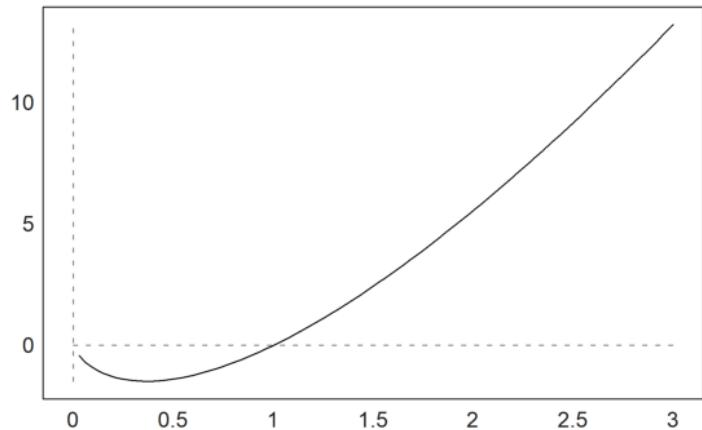


Contoh lain:

```

>reset;
>aspect(3/4);
>figure(2,1);...
>for a=1:2; figure(a); plot2d("2*x*log(x^2)",0,3,grid=a); end;...
>figure(0):

```



Menggambar Beberapa Kurva

* pada bidang koordinat yang sama

Plot lebih dari satu fungsi (multiple function) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu caranya adalah menggunakan `>add` untuk beberapa panggilan ke `plot2d` secara keseluruhan, kecuali panggilan pertama.

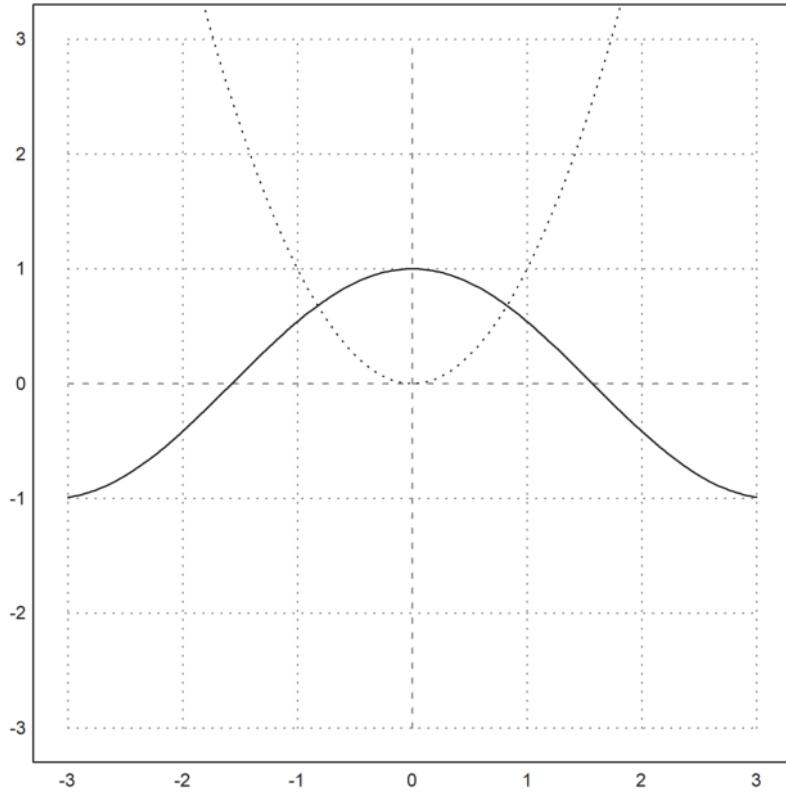
Berikut contohnya:

menggambar kurva

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = x^2$$

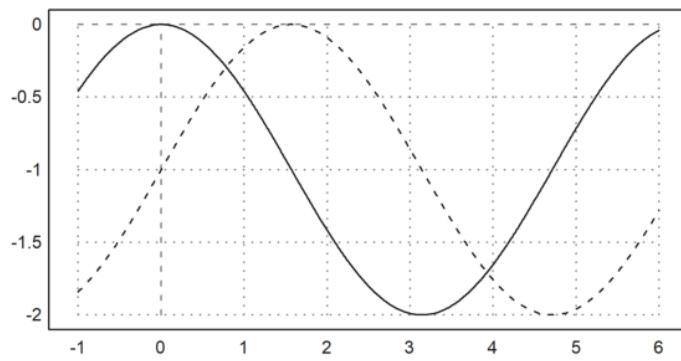
```
>aspect(); plot2d("cos(x)", r=3); plot2d("x^2", style=". .", >add):
```



$$f(x) = \cos(x) - 1$$

$$f(x) = \sin(x) - 1$$

```
>aspect(2); plot2d("cos(x)-1",-1,6); plot2d("sin(x)-1",style="--",>add):
```



Selain menggunakan >add kita juga bisa menambahkannya secara langsung

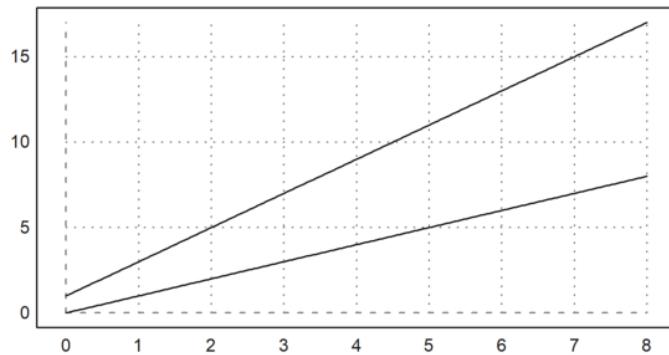
Berikut contohnya:

Menggambar kurva

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = -2x + 1$$

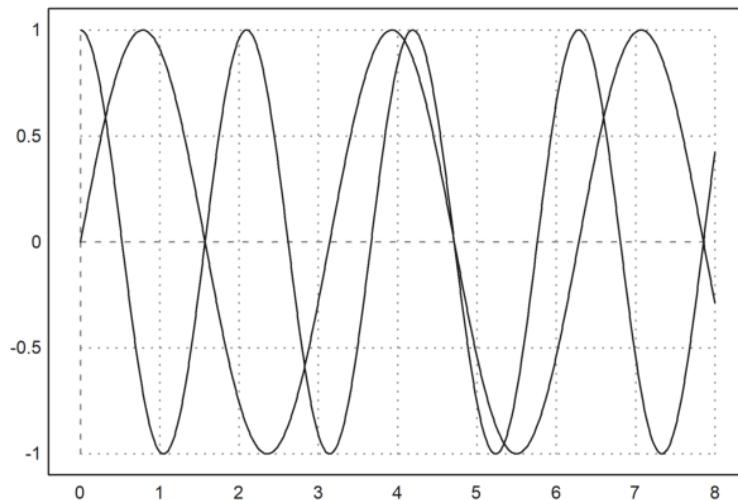
```
>plot2d(["2x+1", "x"], 0, 8) :
```



$$f(x) = \sin(2x)$$

$$f(x) = \cos(3x)$$

```
>aspect(1.5); plot2d(["sin(2x)", "cos(3x)"], 0, 8) :
```



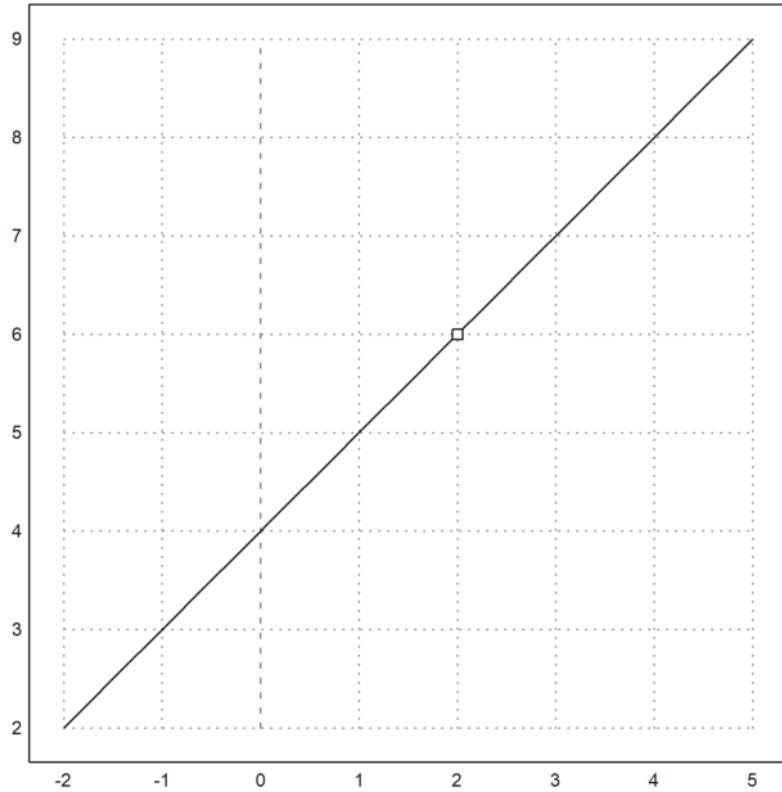
Kegunaan >add yang lain juga bisa untuk menambahkan titik pada kurva.

Berikut contohnya:

Menambahkan sebuah titik di

$$f(x) = x + 4$$

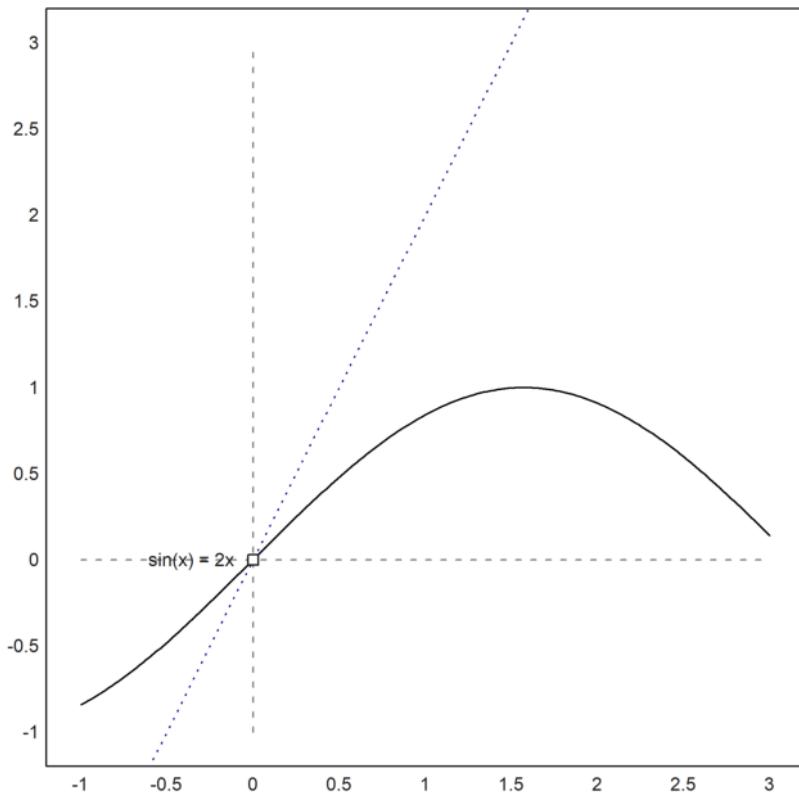
```
>aspect(); plot2d("x+4", -2, 5,); plot2d(2, 6, >points, >add) :
```



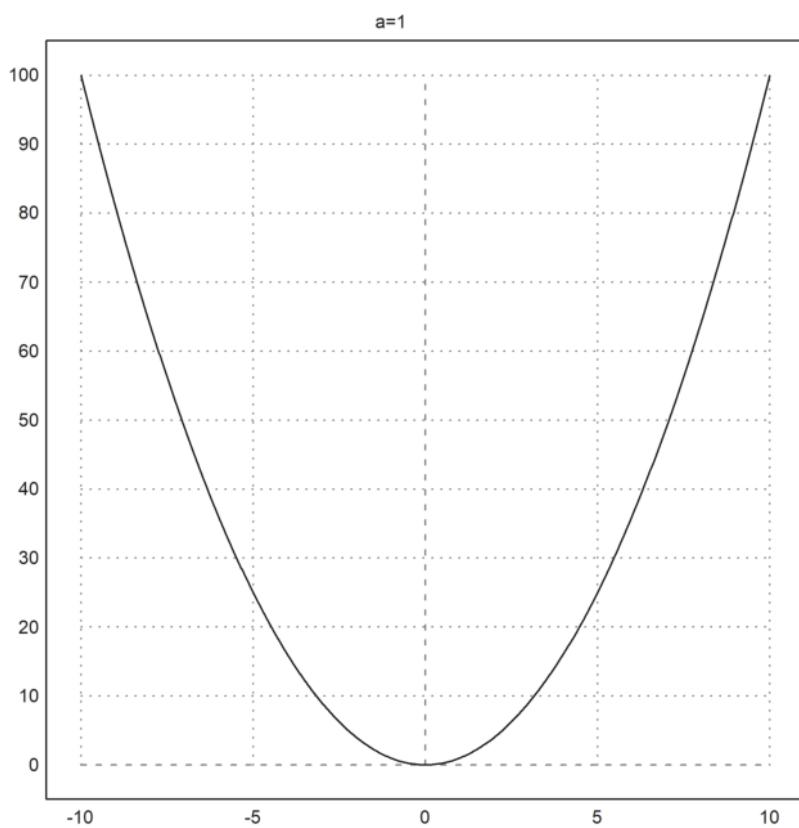
Kita juga bisa mencari titik perpotongan dengan cara berikut:

$$\sin(x) = 2x$$

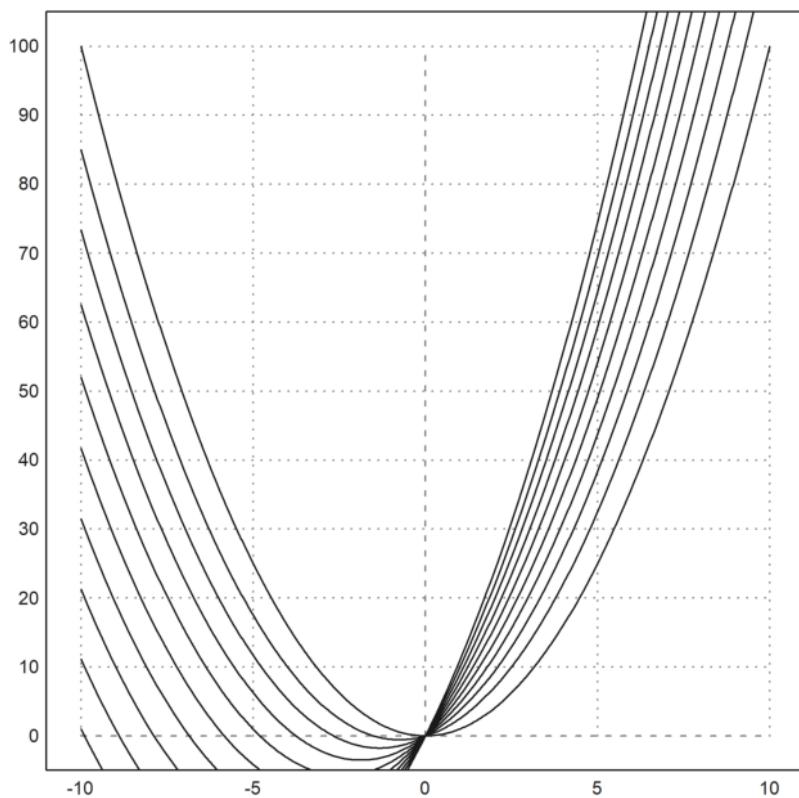
```
>plot2d(["sin(x)", "2x"], r=2, cx=1, cy=1, ...
> color=[black,blue], style=["-", "."], ...
> grid=1);
>x0=solve("sin(x)-2x",1); ...
> plot2d(x0,x0,>points,>add); ...
> label("sin(x) = 2x",x0,x0,pos="cl",offset=20):
```



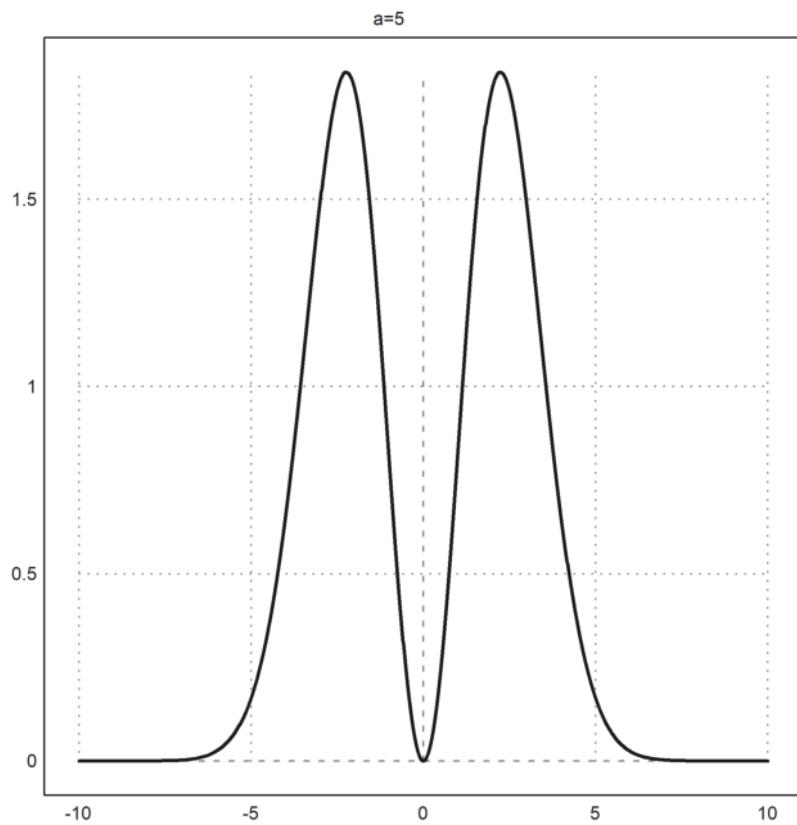
```
>function f(x,a) := x^2+a*x-x/a; ...
>plot2d("f",-10,10;1,title="a=1"):
```



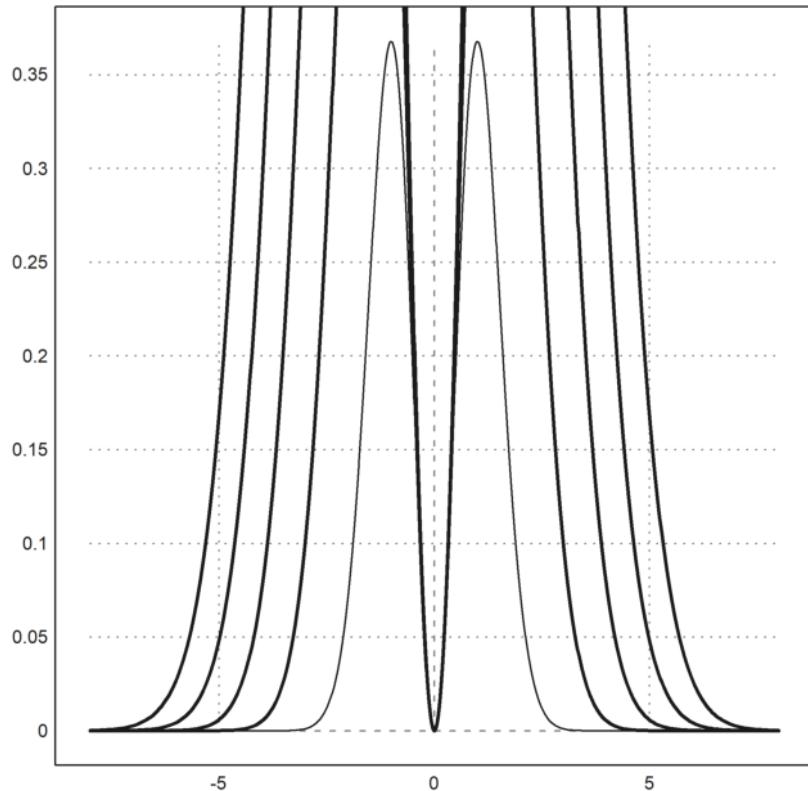
```
> plot2d({{"f",1}},-10,10); ...
>for a=1:10; plot2d({{"f",a}},>add); end;
```



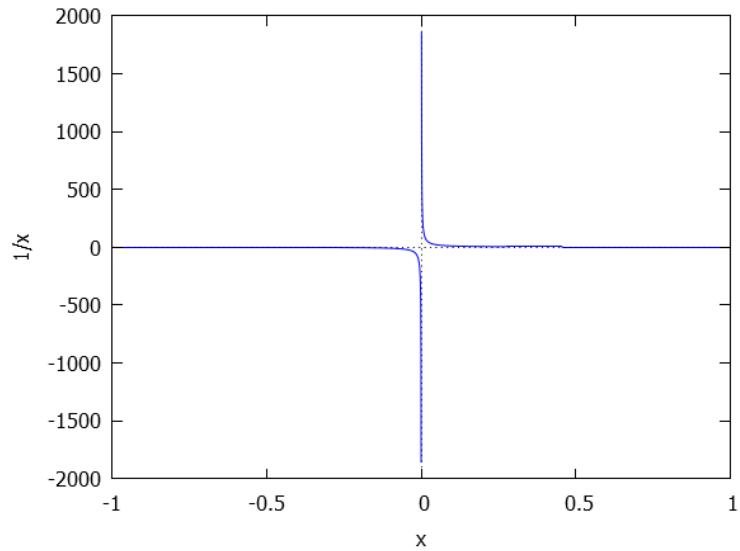
```
>function f(x,a) := x^2*exp(-x^2/a); ...
>plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5");
```



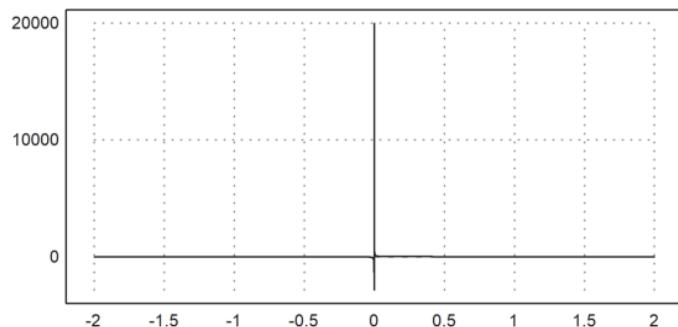
```
>plot2d({{"f",1}},-8,8); ...
>for a=2:5; plot2d({{"f",a}}),>add,thickness=2); end;
```



```
>aspect(2.1); &plot2d(1/x, [x,-1,1]):
```



```
>x=linspace(-1,1,50);...  
>plot2d("1/x"):
```



BAB 4

KB PEKAN 8-9: MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENGAMBAR GRAFIK 3 DIMENSI (3D)

article

eumat

Nama : Mukti Wibowo

NIM : 22305144036

Kelas : Matematika E 2022

Menggambar Plot 3D dengan EMT Ini adalah pengenalan plot 3D di

Euler. Kami membutuhkan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dari dua variabel.

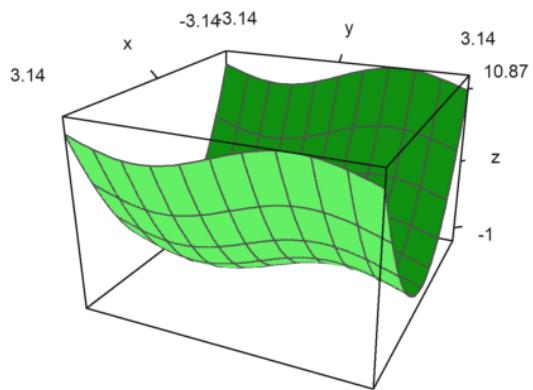
Euler menggambar fungsi seperti itu menggunakan algoritma pengurutan untuk menyembunyikan bagian di latar belakang. Secara umum, Euler menggunakan proyeksi pusat. Defaultnya adalah dari kuadran x-y positif ke arah asal $x = y = z = 0$, tetapi sudut $= 0^\circ$ melihat dari arah sumbu y. Sudut pandang dan ketinggian dapat diubah.

Euler bisa merencanakan

- permukaan dengan bayangan dan garis level atau rentang level,
- awan poin,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D dari suatu fungsi menggunakan plot3d. Cara termudah adalah dengan memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur kisaran plot sekitar (0,0).

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",r=pi):
```



Fungsi Dua Variabel

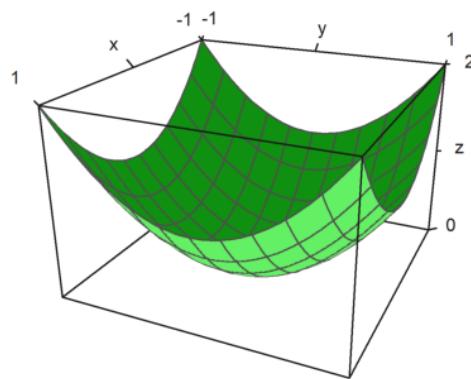
Untuk grafik suatu fungsi, gunakan
 - ekspresi sederhana dalam x dan y ,
 - nama fungsi dari dua variabel 1
 - atau matriks data.

Defaultnya adalah kisi kawat yang diisi dengan warna berbeda di kedua sisi. Perhatikan bahwa jumlah default interval kisi adalah 10, tetapi plot menggunakan jumlah default persegi panjang 40×40 untuk membuat permukaan. Ini bisa diubah.

- $n = 40, n = [40,40]$: jumlah garis grid di setiap arah
- $\text{grid}=10, \text{grid}=[10,10]$: jumlah garis kisi di setiap arah.

Kami menggunakan default $n = 40$ dan $\text{grid} = 10$.

```
>plot3d("x^2+y^2"):
```

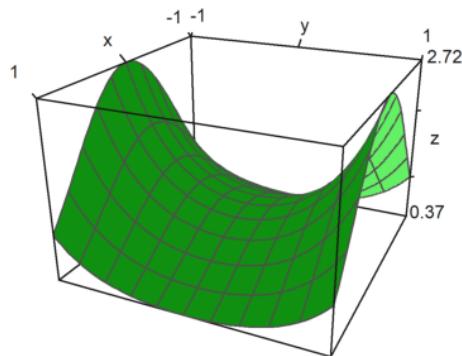


Interaksi pengguna dimungkinkan dengan > user parameter. Pengguna dapat menekan tombol berikut.

- left,right,up,down: putar sudut pandang
- +, -: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglyph (lihat di bawah)
- l: beralih memutar sumber cahaya (lihat di bawah)
- space: reset ke default
- return: interaksi akhir

```
>plot3d("exp(-x^2+y^2)",>user, ...
> title="Turn with the vector keys (press return to finish)":
```

Turn with the vector keys (press return to finish)



Rentang plot untuk fungsi dapat ditentukan dengan

- a, b: rentang-x
- c, d: rentang y
- r: persegi simetris di sekitar (0,0).
- n: jumlah subinterval untuk plot.

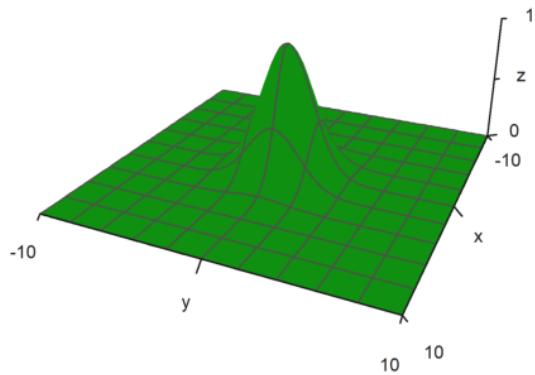
Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.

fscale: menskalakan ke nilai fungsi (defaultnya adalah <fscale>).

scale: angka atau vektor 1x2 untuk skala ke arah x dan y.

frame: jenis bingkai (default 1)

```
>plot3d("exp(-(x^2+y^2)/5)",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3):
```



Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.

- distance: jarak pandang ke plot.
- zoom: nilai zoom.
- angle: sudut ke sumbu y negatif dalam radian.
- height: ketinggian tampilan dalam radian.

Nilai default bisa diperiksa atau diubah dengan fungsi view (). Ini mengembalikan parameter dalam urutan di atas.

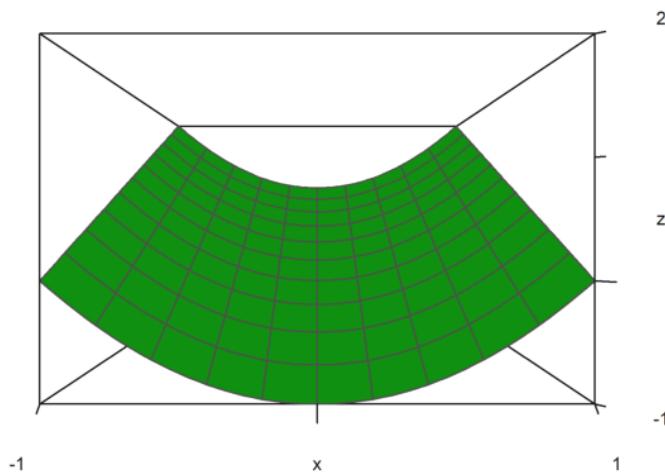
```
>view
```

```
[5, 2.6, 2, 0.4]
```

Jarak yang lebih dekat membutuhkan lebih sedikit zoom. Efeknya lebih seperti lensa sudut lebar.

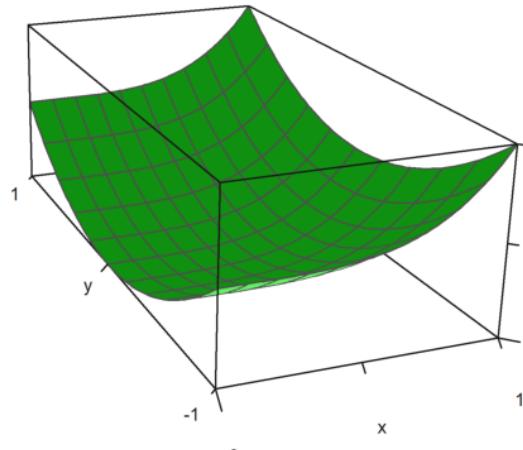
Dalam contoh berikut, sudut = 0 dan tinggi = 0 dilihat dari sumbu y negatif. Label sumbu untuk y disembunyikan dalam kasus ini.

```
>plot3d("x^2+y",distance=3,zoom=2,angle=0,height=0):
```



Plot selalu terlihat ke tengah plot kubus. Anda dapat memindahkan pusat dengan parameter tengah.

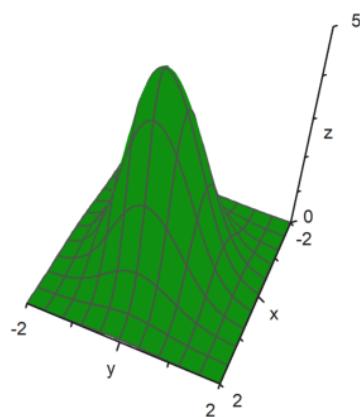
```
>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
> center=[0.4,0,0],zoom=5):
```



Plot diskalakan agar sesuai dengan kubus satuan untuk dilihat. Jadi tidak perlu mengubah jarak atau zoom tergantung ukuran plot. Namun, label mengacu pada ukuran sebenarnya.

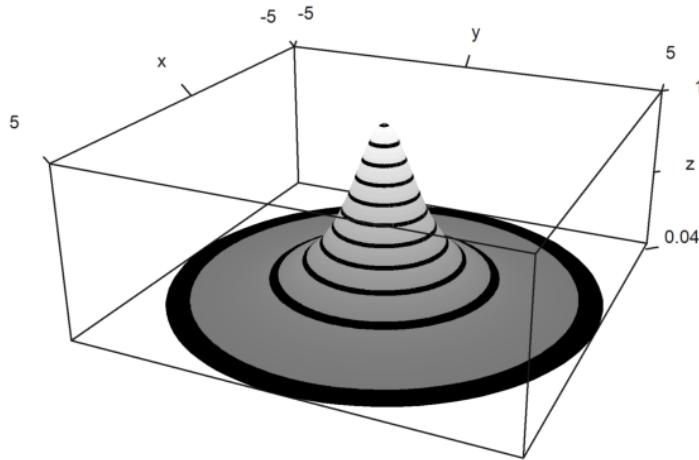
Jika Anda mematikannya dengan scale = false, Anda harus berhati-hati, bahwa plot masih pas dengan jendela plotting, dengan mengubah jarak pandang atau zoom, dan memindahkan pusat.

```
>plot3d("5*exp(-x^2-y^2)",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
> center=[0,0,-2],frame=3):
```

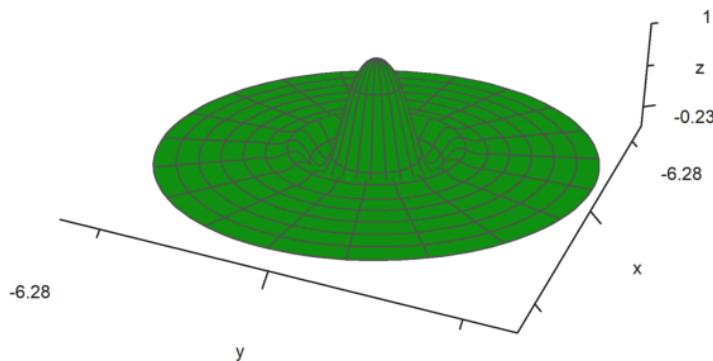


Plot kutub juga tersedia. The parameter polar= true menggambarkan plot kutub. Fungsi tersebut harus tetap merupakan fungsi dari x dan y. Parameter "fscale" menskalakan fungsi dengan skala sendiri. Jika tidak, fungsi diskalakan agar sesuai dengan kubus.

```
>plot3d("1/(x^2+y^2+1)",r=5,>polar, ...
>fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=gray) :
```



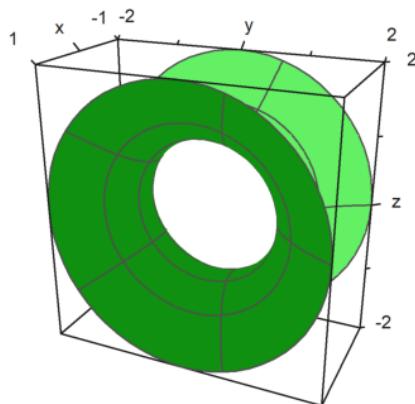
```
>function f(r) := exp(-r/2)*cos(r); ...
>plot3d("f(x^2+y^2)",>polar,scale=[1,1,0.4],r=2pi,frame=3,zoom=4) :
```



Parameter memutar memutar fungsi dalam x di sekitar sumbu x.

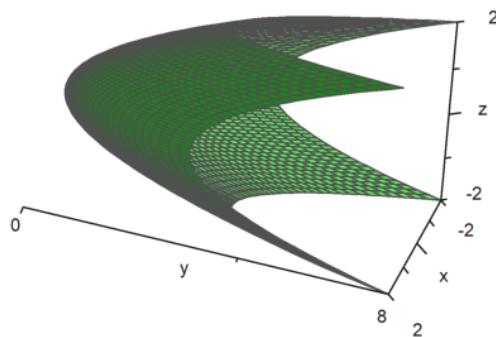
- rotate = 1: Menggunakan sumbu x
- rotate = 2: Menggunakan sumbu z

```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=true,grid=5) :
```



Berikut adalah plot dengan tiga fungsi.

```
>plot3d("x", "x^2+y^2", "y", r=2, zoom=3.5, frame=3):
```



Plot Kontur

Untuk plot, Euler menambahkan garis kisi. Alih-alih, dimungkinkan untuk menggunakan garis level dan corak satu warna atau corak warna spektral. Euler dapat menggambar ketinggian fungsi pada plot dengan shading. Di semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglyph merah / cyan.

-> hue: Mengaktifkan bayangan terang, bukan kabel.

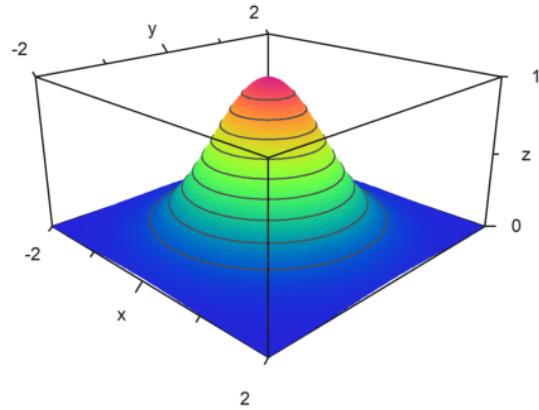
-> contour: Membuat plot garis kontur otomatis pada plot.

- level = ... (atau level): Vektor nilai untuk garis kontur.

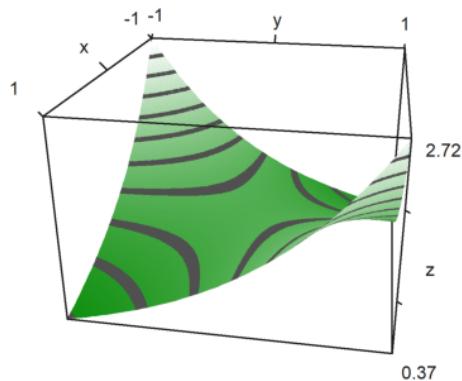
Standarnya adalah level = "auto", yang menghitung beberapa baris level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, level sebenarnya adalah rentang level.

Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kami menggunakan kisi yang lebih halus untuk 100x100 titik, menskalakan fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

```
>plot3d("exp(-x^2-y^2)",r=2,n=100,level="thin", ...
>>contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°):
```



```
>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green):
```



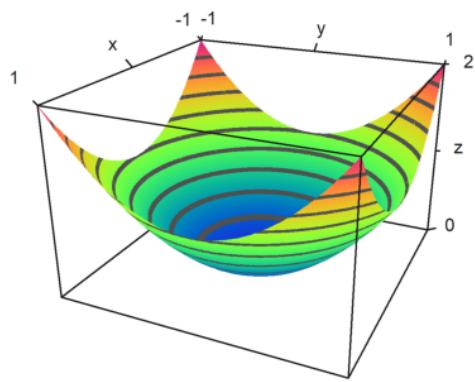
Bayangan default menggunakan warna abu-abu. Tetapi berbagai spektrum warna juga tersedia.

-> spectral: Menggunakan skema spektral default

- color = ...: Menggunakan warna khusus atau skema spektral

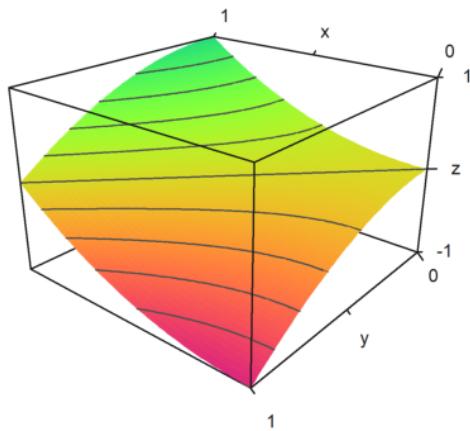
Untuk plot berikut, kami menggunakan skema spektral default dan menambah jumlah poin untuk mendapatkan tampilan yang sangat mulus.

```
>plot3d("x^2+y^2",>spectral,>contour,n=100):
```



Alih-alih garis level otomatis, kami juga dapat mengatur nilai garis level. Ini akan menghasilkan garis level tipis, bukan rentang level.

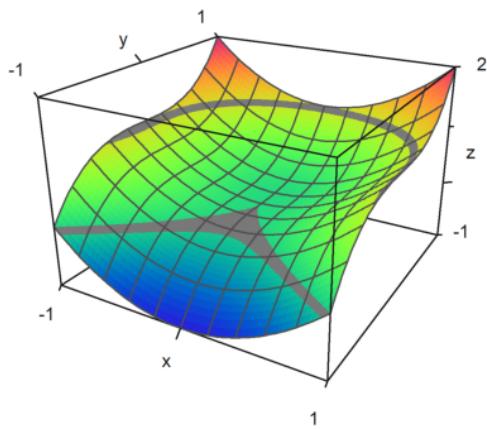
```
>plot3d("x^2-y^2", 0, 1, 0, 1, angle=220°, level=-1:0.2:1, color=redgreen) :
```



Dalam plot berikut, kami menggunakan dua pita level yang sangat luas dari -0,1 hingga 1, dan dari 0,9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai matriks dengan batas level sebagai kolom.

Selain itu, kami melapisi kisi dengan 10 interval di setiap arah.

```
>plot3d("x^2+y^3", level=[-0.1,0.9;0,1], ...
> >spectral, angle=30°, grid=10, contourcolor=gray) :
```

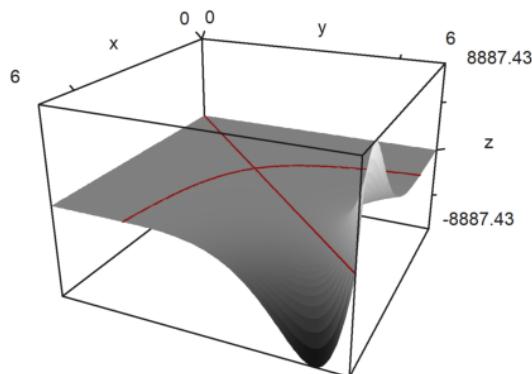


Dalam contoh berikut, kami memplot set, di mana

$$f(x, y) = x^y - y^x = 0$$

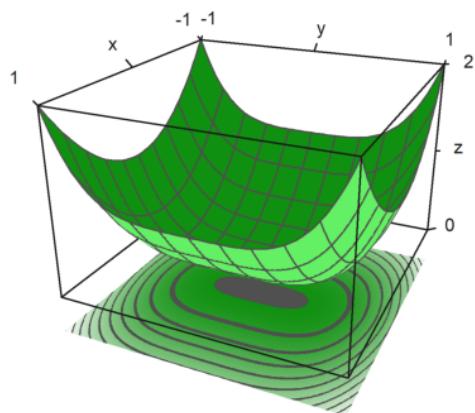
Kami menggunakan satu garis tipis untuk garis level.

```
>plot3d("x^y-y^x", level=0, a=0, b=6, c=0, d=6, contourcolor=red, n=100) :
```



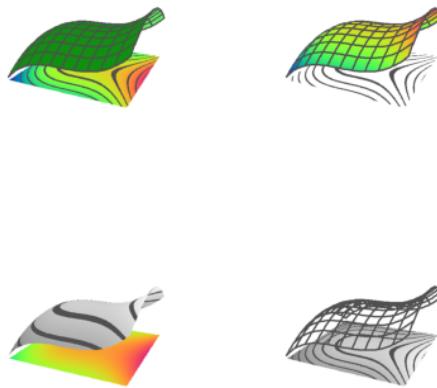
Dimungkinkan untuk menunjukkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

```
>plot3d("x^2+y^4", >cp, cpcolor=green, cpdelta=0.2) :
```



Berikut beberapa gaya lainnya. Kami selalu mematikan bingkai, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan kisi.

```
>figure(2,2); ...
>expr="y^3-x^2"; ...
>figure(1); ...
> plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
>figure(2); ...
> plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
>figure(3); ...
> plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
>figure(4); ...
> plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
>figure(0):
```

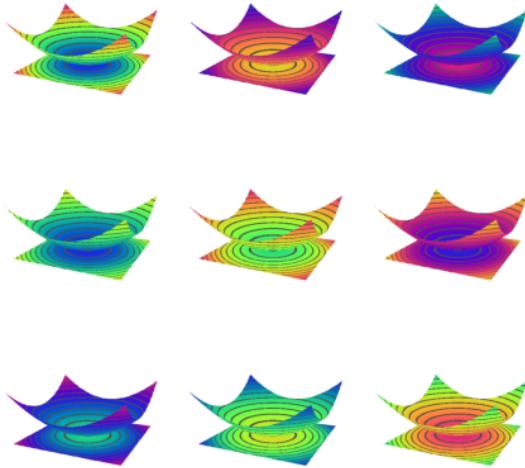


Ada beberapa skema spektral lain, diberi nomor dari 1 hingga 9. Tetapi Anda juga dapat menggunakan color=value, di mana nilai

- spectral: untuk rentang dari biru hingga merah
- white: untuk rentang yang lebih redup

- yellowblue,purplegreen,blueyellow,greenred
- blueyellow, greenpurple,yellowblue,redgreen

```
>figure(3,3); ...
>for i=1:9; ...
> figure(i); plot3d("x^2+y^2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4); ...
>end; ...
>figure(0):
```



Sumber cahaya dapat diubah dengan l dan tombol cursor selama interaksi pengguna. Itu juga dapat diatur dengan parameter.

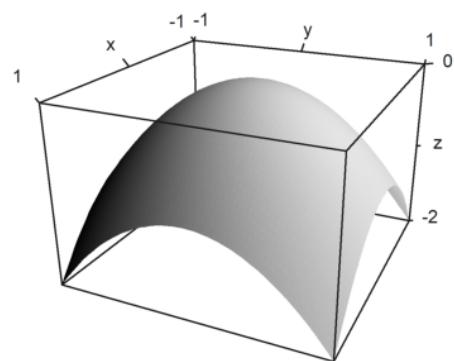
-light : arah cahaya

- amb: cahaya ambient antara 0 dan 1

Perhatikan bahwa program tidak membuat perbedaan antara sisi-sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini, Anda membutuhkan Povray.

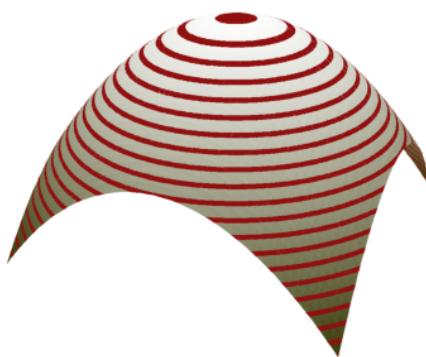
```
>plot3d("-x^2-y^2", ...
> hue=true,light=[0,1,1],amb=0,user=true, ...
> title="Press l and cursor keys (return to exit)":
```

Press l and cursor keys (return to exit)



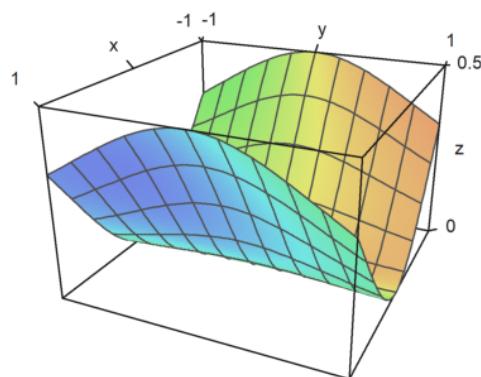
Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga dapat diubah.

```
>plot3d("-x^2-y^2",color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, ...
> zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):
```



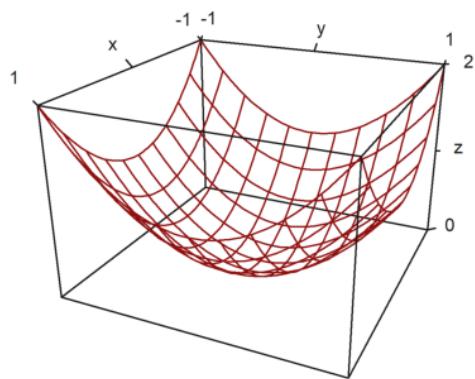
Warna 0 memberikan efek pelangi khusus.

```
>plot3d("x^2/(x^2+y^2+1)",color=0,hue=true,grid=10):
```



Permukaannya juga bisa transparan.

```
>plot3d("x^2+y^2",>transparent,grid=10,wirecolor=red):
```



Plot Implisit

Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan pemotongan melalui objek. Fitur plot3d termasuk plot implisit. Plot ini menunjukkan himpunan nol fungsi dalam tiga variabel.

Solusi dari

$$f(x, y, z) = 0$$

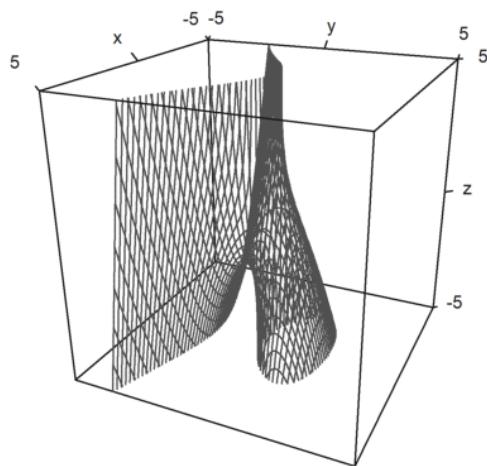
dapat divisualisasikan dalam potongan sejajar dengan bidang x-y-, x-z-, dan y-z.

- implisit = 1: potong sejajar bidang y-z
- implisit = 2: potong sejajar dengan bidang x-z
- implisit = 4: potong sejajar bidang x-y

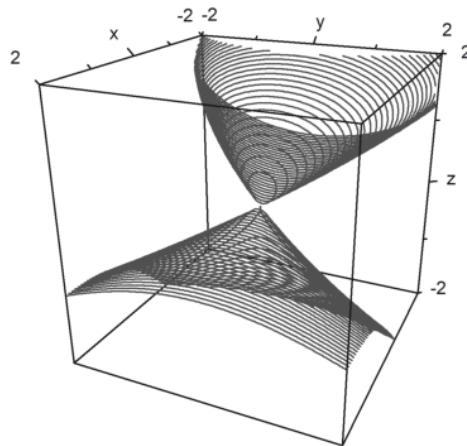
Tambahkan nilai-nilai ini, jika Anda suka. Dalam contoh yang kami plot

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^3 + zy = 1\}$$

```
>plot3d("x^2+y^3+z*y-1", r=5, implicit=3) :
```



```
>plot3d("x^2+y^2+4*x*z+z^3",>implicit,r=2,zoom=2.5):
```



Plotting 3D Data

Sama seperti plot2d, plot3d menerima data. Untuk objek 3D, Anda perlu memberikan matriks nilai x, y dan z, atau tiga fungsi atau ekspresi $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_z(x, y)$.

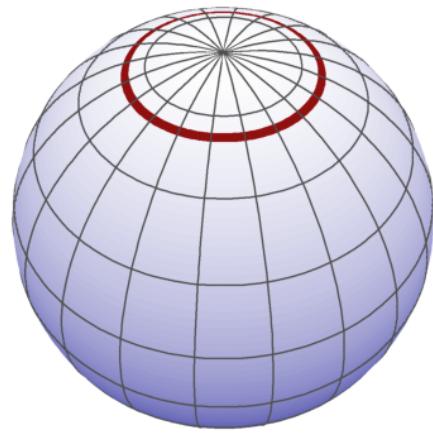
$$\gamma(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$$

Karena x, y, z adalah matriks, kita asumsikan bahwa (t, s) berjalan melalui kotak persegi. Hasilnya, Anda dapat memplot gambar persegi panjang di luar angkasa.

Anda dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.

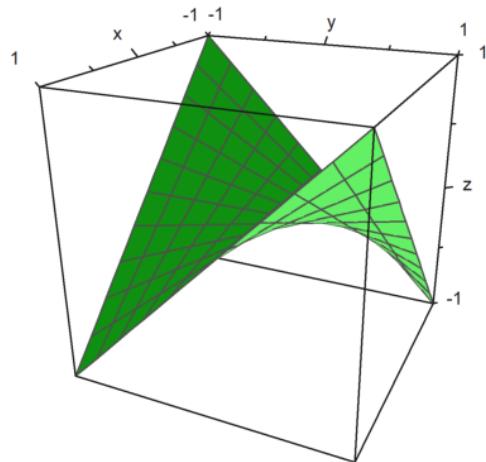
Dalam contoh berikut, kami menggunakan vektor nilai t dan vektor kolom nilai s untuk membuat parameter permukaan bola. Dalam gambar kita bisa menandai daerah, dalam kasus kita daerah kutub.

```
>t=linspace(0,2pi,180); s=linspace(-pi/2,pi/2,90)'; ...
>x=cos(s)*cos(t); y=cos(s)*sin(t); z=sin(s); ...
>plot3d(x,y,z,>hue, ...
>color=blue,<frame,grid=[10,20], ...
>values=s,contourcolor=red,level=[90°-24°;90°-22°], ...
>scale=1.4,height=50):
```



Berikut adalah contoh grafik dari suatu fungsi.

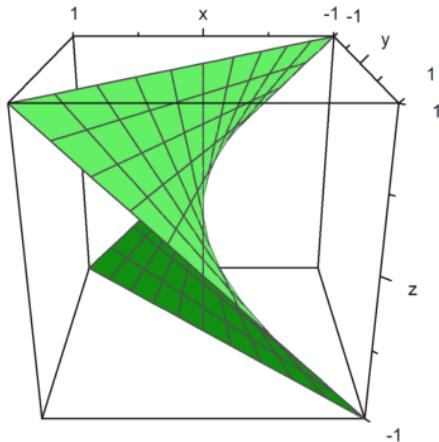
```
>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s,grid=10):
```



Namun, kita bisa membuat semua jenis permukaan. Ini adalah permukaan yang sama sebagai suatu fungsi

$$x = yz$$

```
>plot3d(t*s,t,s,angle=180°,grid=10):
```



Dengan lebih banyak usaha, kami dapat menghasilkan banyak permukaan.

Dalam contoh berikut, kami membuat tampilan berbayang dari bola yang terdistorsi. Koordinat biasa untuk bola adalah

$$\gamma(t, s) = (\cos(t) \cos(s), \sin(t) \sin(s), \cos(s))$$

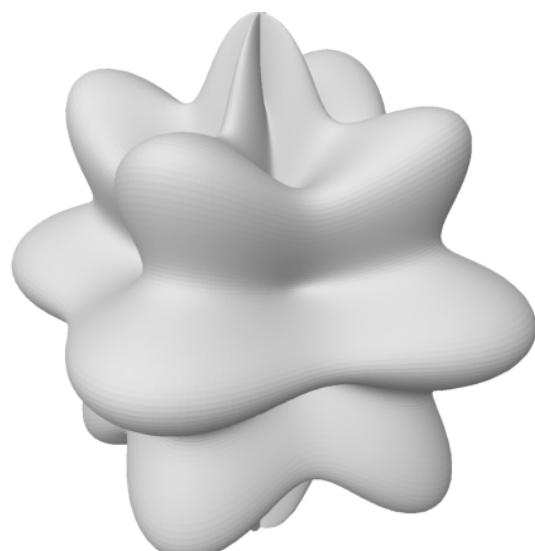
dengan

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kami menyimpangkan ini dengan sebuah faktor

$$d(t, s) = \frac{\cos(4t) + \cos(8s)}{4}.$$

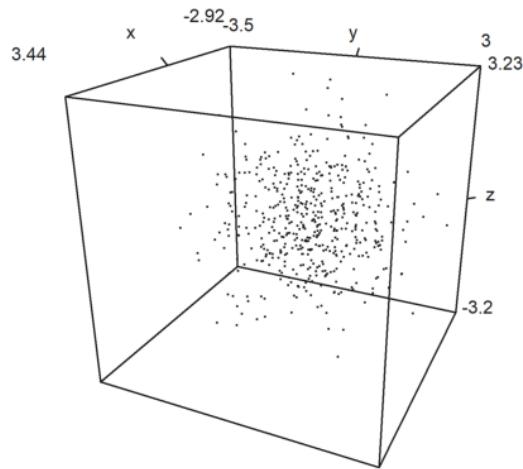
```
>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)'; ...
>d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s)); ...
>plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1, ...
> light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):
```



Tentu saja, point cloud juga dimungkinkan. Untuk memplot data titik dalam ruang, kita membutuhkan tiga vektor sebagai koordinat titik.

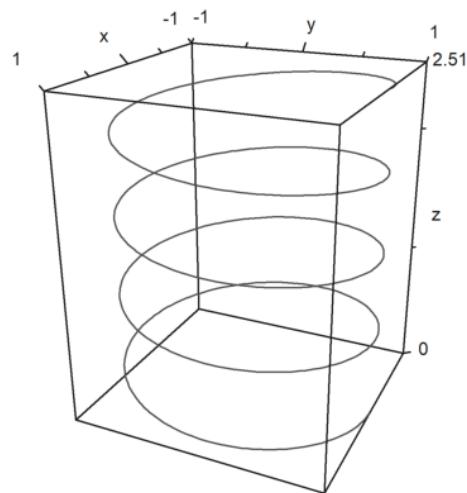
Gayanya sama seperti di plot2d dengan points = true;

```
>n=500; ...
> plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style=".") :
```

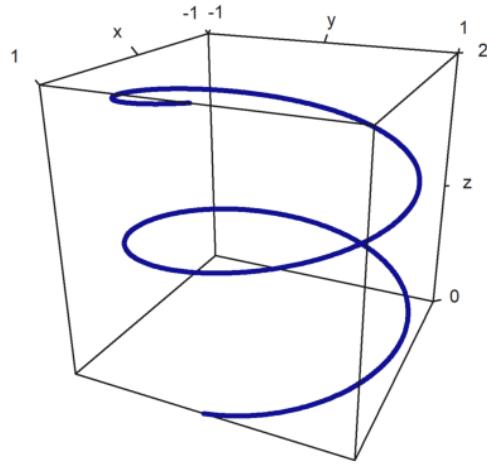


Juga dimungkinkan untuk memplot kurva dalam 3D. Dalam kasus ini, lebih mudah untuk menghitung sebelumnya titik-titik kurva. Untuk kurva di bidang kita menggunakan urutan koordinat dan parameter wire = true.

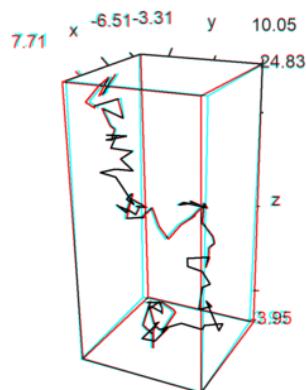
```
>t=linspace(0,8pi,500); ...
>plot3d(sin(t),cos(t),t/10,>wire,zoom=3) :
```



```
>t=linspace(0,4pi,1000); plot3d(cos(t),sin(t),t/2pi,>wire, ...
>lineWidth=3, wirecolor=blue):
```

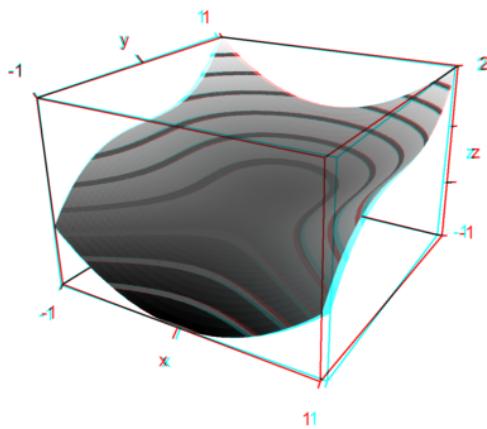


```
>X=cumsum(normal(3,100)); ...
> plot3d(X[1],X[2],X[3],>anaglyph,>wire):
```



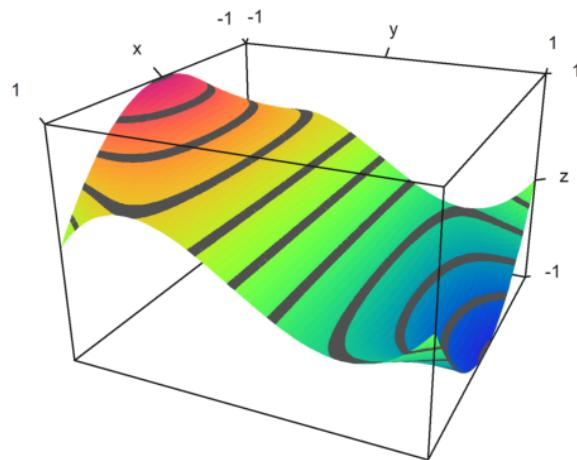
EMT juga dapat memplot dalam mode anaglyph. Untuk melihat plot seperti itu, Anda membutuhkan red/cyan glasses.

```
> plot3d("x^2+y^3",>anaglyph,>contour,angle=30°):
```



Seringkali, skema warna spektral digunakan untuk plot. Ini menekankan ketinggian fungsinya.

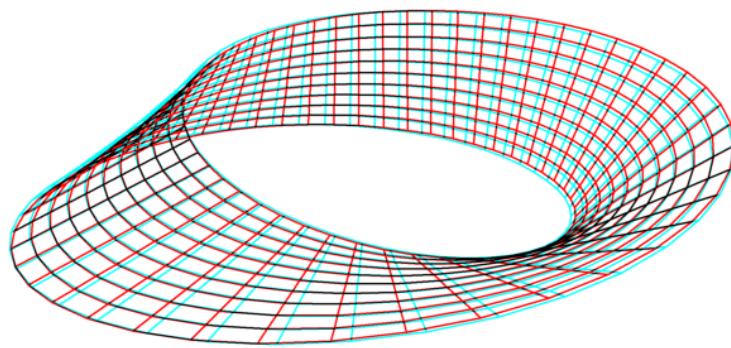
```
>plot3d("x^2*y^3-y",>spectral,>contour,zoom=3.2):
```



Euler juga dapat memplot permukaan berparameter, jika parameternya adalah nilai x, y, dan z dari gambar kisi persegi panjang di dalam ruang.

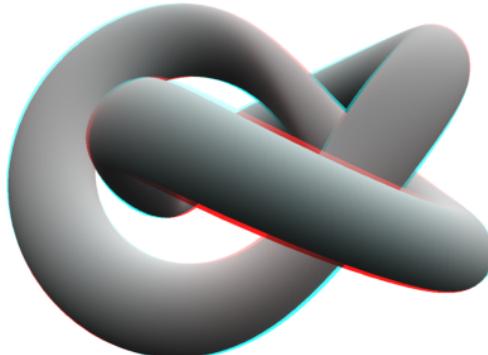
Untuk demo berikut, kami menyiapkan parameter u- dan v-, dan menghasilkan koordinat ruang dari ini.

```
>u=linspace(-1,1,10); v=linspace(0,2*pi,50)'; ...
>X=(3+u*cos(v/2))*cos(v); Y=(3+u*cos(v/2))*sin(v); Z=u*sin(v/2); ...
>plot3d(X,Y,Z,>anaglyph,<frame,>wire,scale=2.3):
```



Berikut adalah contoh yang lebih rumit, yang megah dengan red/cyan glasses.

```
>u:=linspace(-pi,pi,160); v:=linspace(-pi,pi,400)'; ...
>x:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*sin(2*v); ...
>z=sin(u)+2*cos(3*v); ...
>plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],zoom=2.8,>anaglyph):
```



*Plot Statistik

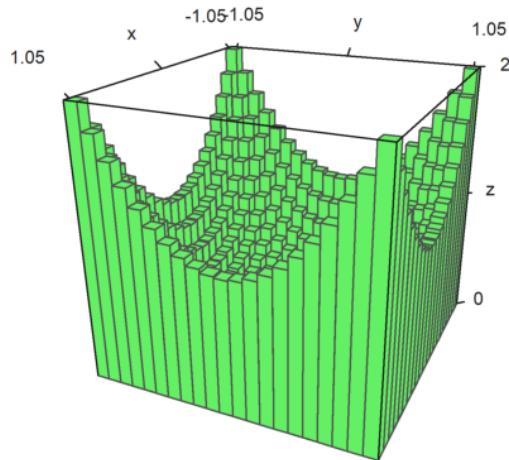
Plot batang juga dimungkinkan. Untuk ini, kami harus menyediakan

- x: vektor baris dengan n + 1 elemen
- y: vektor kolom dengan n + 1 elemen
- z: nxn matriks nilai.

z bisa lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.

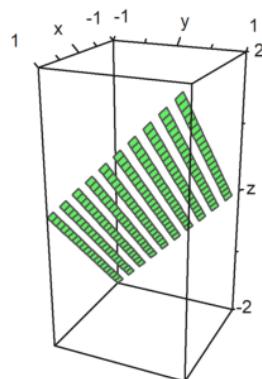
Dalam contoh, pertama-tama kita menghitung nilainya. Kemudian kita menyesuaikan x dan y, sehingga vektor berpusat pada nilai yang digunakan.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^2+y^2; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```



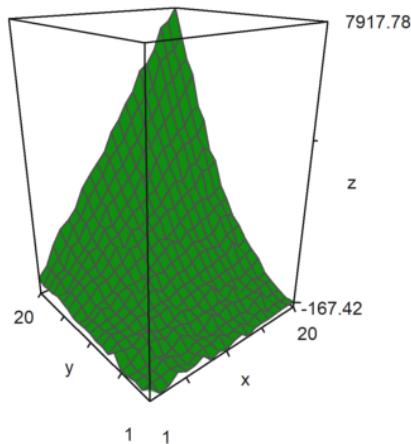
Dimungkinkan untuk membagi plot permukaan menjadi dua bagian atau lebih.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...
>plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20):
```

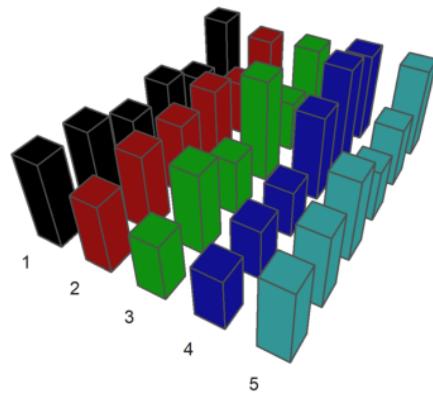


Jika memuat atau membuat matriks data M dari file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan skala (M), atau menskalakan matriks dengan >zscale. Ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individu yang diterapkan sebagai tambahan.

```
>i=1:20; j=i'; ...
>plot3d(i*j^2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8):
```

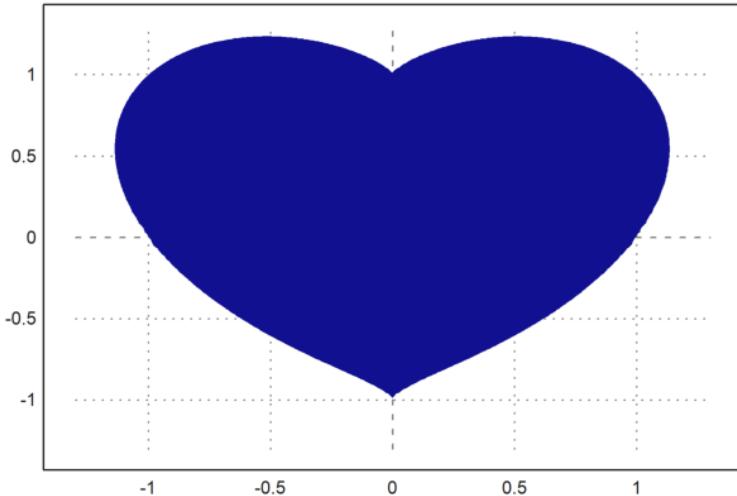


```
>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...
>loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...
>columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):
```



Permukaan Benda Putar

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>style="#",color=blue,<outline, ...
>level=[-2;0],n=100):
```



```
>ekspresi &= (x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3; $ekspresi
```

$$(y^2 + x^2 - 1)^3 - x^2 y^3$$

Kami ingin memutar kurva jantung di sekitar sumbu y. Inilah ungkapan yang mendefinisikan hati:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 \cdot y^3.$$

Selanjutnya kita atur

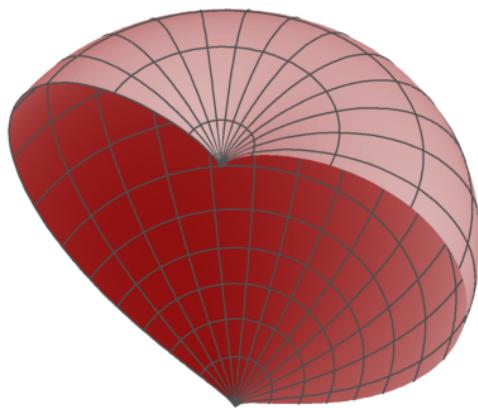
$$x = r \cos(a), \quad y = r \sin(a).$$

```
>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $fr(r,a)
```

$$(r^2 - 1)^3 + \frac{(\sin(5a) - \sin(3a) - 2\sin a) r^5}{16}$$

Hal ini memungkinkan untuk menentukan fungsi numerik, yang menyelesaikan r, jika a diberikan. Dengan fungsi itu kita dapat memplot jantung yang berubah sebagai permukaan parametrik.

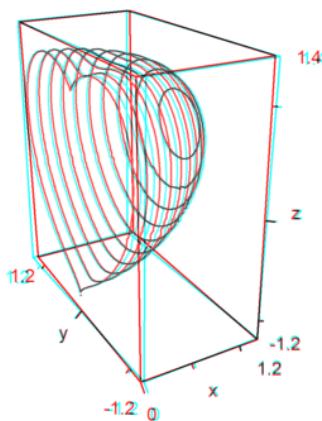
```
>function map f(a) := bisect("fr", 0, 2; a); ...
>t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t); ...
>s=linspace(pi,2pi,100)'; ...
>plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
>>hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0, max=0.7, grid=12, height=50°):
```



Berikut ini adalah plot 3D dari gambar di atas yang diputar di sekitar sumbu z. Kami mendefinisikan fungsi, yang mendeskripsikan objek.

```
>function f(x,y,z) ...
r=x^2+y^2;
return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
endfunction
```

```
>plot3d("f(x,y,z)", ...
>xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4, ...
>implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,60,60],>anaglyph):
```



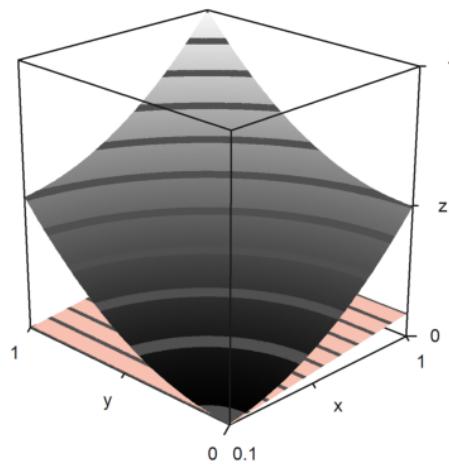
Special 3D Plots

Fungsi plot3d bagus untuk dimiliki, tetapi tidak memenuhi semua kebutuhan. Selain rutinitas yang lebih mendasar, Anda bisa mendapatkan plot berbingkai dari objek apa pun yang Anda suka. Meskipun Euler bukan program 3D, Euler dapat menggabungkan beberapa objek dasar. Kami mencoba untuk memvisualisasikan paraboloid dan garis singgung-nya.

```
>function myplot ...
y=0:0.01:1; x=(0.1:0.01:1)';
plot3d(x,y,0.2*(x-0.1)/2,<scale,<frame,>hue, ...
    hues=0.5,>contour,color=orange);
h=holding(1);
plot3d(x,y,(x^2+y^2)/2,<scale,<frame,>contour,>hue);
holding(h);
endfunction
```

Sekarang framedplot () menyediakan bingkai, dan menyetel tampilan.

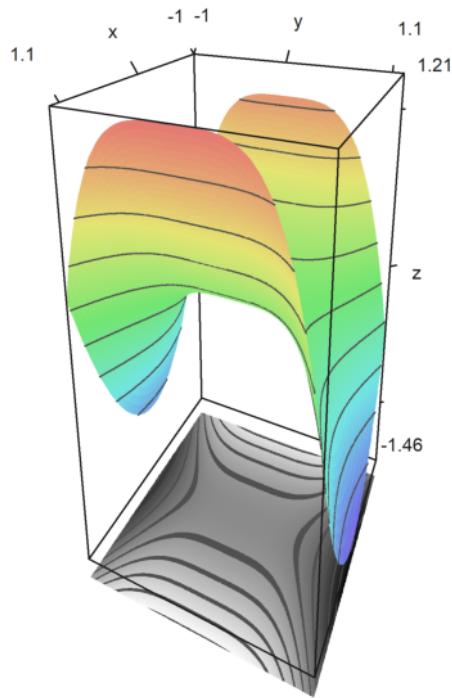
```
>framedplot("myplot", [0.1,1,0,1,0,1],angle=-45°, ...
> center=[0,0,-0.7],zoom=6):
```



Dengan cara yang sama, Anda dapat memplot bidang kontur secara manual. Perhatikan bahwa plot3d () menyetel jendela ke fullwindow () secara default, tetapi plotcontourplane () mengasumsikannya.

```
>x=-1:0.02:1.1; y=x'; z=x^2-y^4;
>function myplot (x,y,z) ...
zoom(2);
wi=fullwindow();
plotcontourplane(x,y,z,level="auto",<scale>;
plot3d(x,y,z,>hue,<scale>,>add,color=white,level="thin");
window(wi);
reset();
endfunction
```

```
>myplot(x,y,z):
```



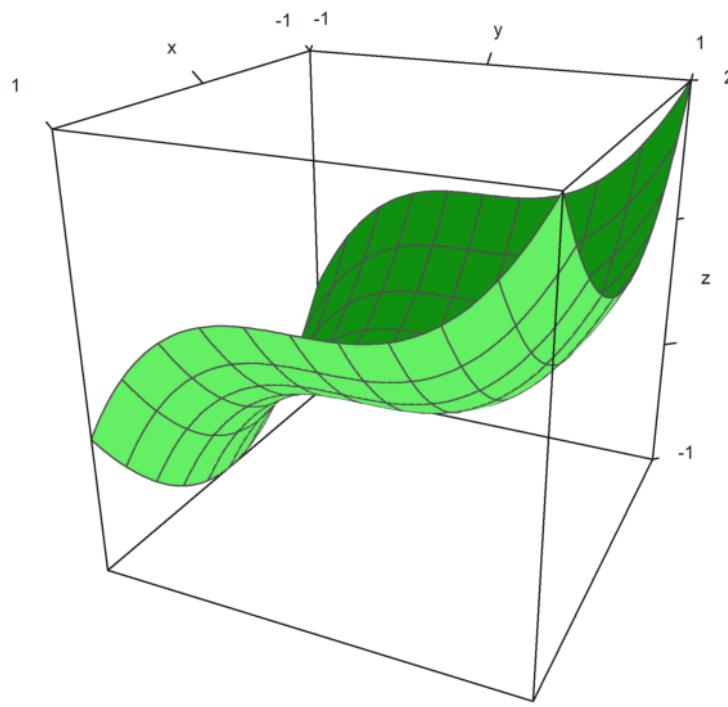
Animasi

Salah satu fungsi yang memanfaatkan teknik ini adalah memutar. Itu dapat mengubah sudut pandang dan menggambar ulang plot 3D. Fungsi tersebut memanggil addpage () untuk setiap plot baru. Akhirnya itu menjawai plot.

Harap pelajari sumber rotasi untuk melihat lebih detail.

```
>function testplot () := plot3d("x^2+y^3"); ...
>rotate("testplot"); testplot():
```

Press space to stop, return to end



Menggambar Povray

Dengan bantuan file Euler povray.e, Euler dapat menghasilkan file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.

Anda perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari <http://www.povray.org/>,

dan meletakkan sub-direktori "bin" Povray ke dalam jalur lingkungan, atau menyetel variabel "defaultpovray" dengan jalur lengkap yang mengarah ke "pvengine.exe".

Antarmuka Povray dari Euler menghasilkan file Povray di direktori home pengguna, dan memanggil Povray untuk mengurai file-file ini. Nama file default adalah current.pov, dan direktori default adalah eulerhome (), biasanya c:\Users\Username\Euler. Povray menghasilkan file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam notebook. Untuk membersihkan file-file ini, gunakan povclear () .

Fungsi pov3d memiliki semangat yang sama dengan plot3d. Ini dapat menghasilkan grafik fungsi $f(x, y)$, atau permukaan dengan koordinat X, Y, Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat pemandangan ke dalam notebook Euler.

Selain pov3d (), ada banyak fungsi yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi ini, mulai file Povray dengan povstart (). Kemudian gunakan writeln (...) untuk menulis objek ke file adegan. Terakhir, akhiri file dengan povend (). Secara default, raytracer akan mulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam notebook Euler.

Fungsi objek memiliki parameter yang disebut "look", yang membutuhkan string dengan kode Povray untuk tekstur dan penyelesaian objek. Fungsi povlook () dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Phong Shading dll.

Perhatikan bahwa alam semesta Povray memiliki sistem koordinat lain. Antarmuka ini menerjemahkan semua koordinat ke sistem Povray. Jadi Anda dapat terus berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z menunjuk ke atas secara vertikal, sumbu x dan y di tangan kanan.

Anda perlu memuat file povray.

```
> load povray;
```

Pastikan, direktori bin Povray ada di jalurnya. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi path ke povray yang dapat dieksekusi.

```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Untuk pertamakali, kami memplot fungsi sederhana. Perintah berikut menghasilkan file povray di direktori pengguna Anda, dan menjalankan Povray untuk menelusuri file ini.

Jika Anda memulai perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan menutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, Anda akan ditanya, apakah Anda ingin mengizinkan file exe dijalankan. Anda dapat menekan batal untuk menghentikan pertanyaan lebih lanjut. Anda mungkin harus menekan OK di jendela Povray untuk mengetahui dialog start-up Povray.

```
>pov3d("x^2+y^2",zoom=3);
```

```
User interrupted!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Kita bisa membuat fungsinya transparan dan menambahkan hasil akhir lainnya. Kita juga bisa menambahkan garis level ke plot fungsi.

```
>pov3d("x^2+y^3",axiscolor=red,angle=20°, ...
>   look=povlook(blue,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3.8);
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Terkadang perlu untuk mencegah penskalaan fungsi, dan menskalakan fungsi dengan tangan. Kami memplot himpunan titik di bidang kompleks, di mana hasil kali jarak ke 1 dan -1 sama dengan 1.

```
>pov3d("((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2)/40",r=1.5, ...
>   angle=-120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=45°,n=50, ...
>   <fscale,zoom=3.8);
```

```

Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;

```

Merencanakan dengan Koordinat

Alih-alih fungsi, kita bisa memplot dengan koordinat. Seperti pada plot3d, kita membutuhkan tiga matriks untuk mendefinisikan objeknya.

Dalam contoh ini, kita memutar fungsi di sekitar sumbu z.

```

>function f(x) := x^3-x+1; ...
>x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,8)'; ...
>Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x); ...
>pov3d(X,Y,Z,angle=40°,height=20°,axis=0,zoom=4,light=[10,-5,5]);

```

```

Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;

```

Dalam contoh berikut, kami memplot gelombang teredam. Kami menghasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler.

Kami juga menunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d menskalakan plot, sehingga sesuai dengan kubus satuan

```

>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)'; ...
>x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3; ...
>pov3d(x,y,z,zoom=5,axis=0,add=povsphere([0,0,0.5],0.1,povlook(green)), ...
> w=500,h=300);

```

```

Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;

```

Dengan metode naungan lanjutan Povray, sangat sedikit titik yang dapat menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya di perbatasan dan dalam bayangan, triknya mungkin menjadi jelas.

Untuk ini, kita perlu menambahkan vektor normal di setiap titik matriks.

```
>Z &= x^2*y^3
```

$$\begin{matrix} 2 & 3 \\ x & y \end{matrix}$$

Persamaan permukaannya adalah $[x, y, Z]$. Kami menghitung dua turunan menjadi x dan y dari ini dan mengambil produk silang sebagai normal.

```
>dx &= diff([x,y,Z],x); dy &= diff([x,y,Z],y);
```

Kami mendefinisikan normal sebagai produk silang dari turunan ini, dan mendefinisikan fungsi koordinat.

```
>N &= crossproduct(dx,dy); NX &= N[1]; NY &= N[2]; NZ &= N[3]; N,
```

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 2 \\ [-2x^3y, -3x^2y, 1] \end{matrix}$$

We use only 25 points.

```
>x=-1:0.5:1; y=x';
>pov3d(x,y,Z(x,y),angle=10°, ...
> xv=NX(x,y),yv=NY(x,y),zv=NZ(x,y),<shadow>;
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dilakukan oleh A. Busser di Povray. Ada versi perbaikannya dalam contoh.

See: Examples\Trefoil Knot | Trefoil Knot

Untuk tampilan yang bagus dengan tidak terlalu banyak titik, kami menambahkan vektor normal di sini. Kami menggunakan Maxima untuk menghitung normal bagi kami. Pertama, tiga fungsi koordinat sebagai ekspresi simbolik.

```
>X &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*cos(2*y); ...
>Y &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*sin(2*y); ...
>Z &= sin(x)+2*cos(3*y);
```

Kemudian dua vektor turunannya menjadi x dan y .

```
>dx &= diff([X,Y,Z],x); dy &= diff([X,Y,Z],y);
```

Sekarang normal, yang merupakan produk persilangan dari dua turunannya.

```
>dn &= crossproduct(dx,dy);
```

Kami sekarang mengevaluasi semua ini secara numerik.

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

Vektor normal adalah evaluasi dari ekspresi simbolik dn [i] untuk i = 1,2,3. Sintaks untuk ini adalah &"expresi" (parameter). Ini adalah alternatif metode pada contoh sebelumnya, di mana kita mendefinisikan ekspresi simbolik NX, NY, NZ terlebih dahulu.

```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...
> <shadow,look=povlook(gray), ...
> xv=&"dn[1]"(x,y), yv=&"dn[2]"(x,y), zv=&"dn[3]"(x,y));
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Kami juga dapat membuat grid dalam 3D.

```
>povstart(zoom=4); ...
>x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...
>t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
>writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
>povend();
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Dengan povgrid (), kurva dimungkinkan.

```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...
>t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...
>x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...
```

```
>writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...
>writeAxis(0,2,axis=3); ...
>povend();
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Objek Povray

Di atas, kami menggunakan pov3d untuk memplot permukaan. Antarmuka povray di Euler juga dapat menghasilkan objek Povray. Objek-objek ini disimpan sebagai string di Euler, dan perlu ditulis ke file Povray. Kami memulai output dengan povstart () .

```
>povstart(zoom=4);
```

Pertama kita tentukan tiga silinder, dan simpan dalam string di Euler.

Fungsi povx () dll. Hanya mengembalikan vektor [1,0,0], yang bisa digunakan sebagai gantinya.

```
>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(red)); ...
>c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(green)); ...
>c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(blue)); ...
```

String berisi kode Povray, yang tidak perlu kita pahami pada saat itu.

```
>c1
```

```
cylinder { <-1,0,0>, <1,0,0>, 1
  texture { pigment { color rgb <0.564706,0.0627451,0.0627451> } }
  finish { ambient 0.2 }
```

Seperti yang Anda lihat, kami menambahkan tekstur ke objek dalam tiga warna berbeda.

Itu dilakukan oleh povlook (), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Kita dapat menggunakan warna Euler default, atau menentukan warna kita sendiri. Kami juga dapat menambahkan transparansi, atau mengubah cahaya sekitar.

```
>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)
```

```
texture { pigment { color rgbf <0.101961,0.2,0.301961,0.1> } }
finish { ambient 0.5 }
```

Sekarang kita mendefinisikan objek interseksi, dan menulis hasilnya ke file.

```
>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));
```

Perpotongan tiga silinder sulit untuk divisualisasikan, jika Anda belum pernah melihatnya sebelumnya.

```
>povend;
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Fungsi berikut menghasilkan fraktal secara rekursif.

Fungsi pertama menunjukkan, bagaimana Euler menangani objek Povray sederhana. Fungsi povbox () mengembalikan string, berisi koordinat kotak, tekstur, dan hasil akhir.

```
>function onebox(x,y,z,d) := povbox([x,y,z],[x+d,y+d,z+d],povlook());
>function fractal (x,y,z,h,n) ...
```

```
if n==1 then writeln(onebox(x,y,z,h));
else
    h=h/3;
    fractal(x,y,z,h,n-1);
    fractal(x+2*h,y,z,h,n-1);
    fractal(x,y+2*h,z,h,n-1);
    fractal(x,y,z+2*h,h,n-1);
    fractal(x+2*h,y+2*h,z,h,n-1);
    fractal(x+2*h,y,z+2*h,h,n-1);
    fractal(x,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
    fractal(x+2*h,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
    fractal(x+h,y+h,z+h,h,n-1);
endif;
endfunction
```

```
>povstart(fade=10,<shadow);
>fractal(-1,-1,-1,2,4);
>povend();
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Perbedaan memungkinkan pemotongan satu objek dari yang lain. Seperti persimpangan, ada bagian dari objek CSG Povray.

```
>povstart(light=[5,-5,5],fade=10);
```

Untuk demonstrasi ini, kami mendefinisikan sebuah objek di Povray, daripada menggunakan string di Euler. Definisi segera ditulis ke file.

Koordinat kotak -1 berarti [-1, -1, -1].

```
>povdefine("mycube",povbox(-1,1));
```

Kita bisa menggunakan objek ini di povobject (), yang mengembalikan string seperti biasa.

```
>c1=povobject ("mycube",povlook(red));
```

Kami menghasilkan kubus kedua, dan memutar serta menskalakannya sedikit.

```
>c2=povobject ("mycube",povlook(yellow),translate=[1,1,1], ...
>    rotate=xrotate(10°)+yrotate(10°), scale=1.2);
```

Kemudian kita ambil perbedaan kedua objek tersebut.

```
>writeln(povdifference(c1,c2));
```

Sekarang tambahkan tiga sumbu.

```
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=1); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=2); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=4); ...
>povend();
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Fungsi Implisit

Povray dapat memplot himpunan di mana $f(x, y, z) = 0$, seperti parameter implisit di plot3d. Namun, hasilnya terlihat jauh lebih baik.

Sintaks untuk fungsinya sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan keluaran ekspresi Maxima atau Euler.

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
```

Buat permukaan implisit. Perhatikan sintaks yang berbeda dalam ekspresi tersebut.

```
>writeln(povsurface("pow(x,2)*y-pow(y,3)-pow(z,2)",povlook(green))); ...
>writeAxes(); ...
>povend();
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Objek Jaring

Dalam contoh ini, kami menunjukkan cara membuat objek mesh, dan menggambarnya dengan informasi tambahan.

Kami ingin memaksimalkan xy di bawah kondisi $x + y = 1$ dan mendemonstrasikan sentuhan tangensial dari garis level.

```
>povstart(angle=-10°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=7);
```

Kami tidak dapat menyimpan objek dalam string seperti sebelumnya, karena terlalu besar. Jadi kami mendefinisikan objek dalam file Povray menggunakan declare. Fungsi povtriangle () melakukan ini secara otomatis. Ia dapat menerima vektor normal seperti pov3d () .

Yang berikut ini mendefinisikan objek mesh, dan langsung menulisnya ke dalam file.

```
>x=0:0.02:1; y=x'; z=x*y; vx=-y; vy=-x; vz=1;
>mesh=povtriangles(x,y,z,"",vx,vy,vz);
```

Sekarang kami mendefinisikan dua disk, yang akan berpotongan dengan permukaan.

```
>cl=povdisc([0.5,0.5,0],[1,1,0],2); ...
>ll=povdisc([0,0,1/4],[0,0,1],2);
```

Tulis permukaan dikurangi dua cakram.

```
>writeln(povdifference(mesh,povunion([cl,ll]),povlook(green)));
```

Tuliskan dua persimpangan tersebut.

```
>writeln(povintersection([mesh,cl],povlook(red))); ...
>writeln(povintersection([mesh,ll],povlook(gray)));
```

Tulis titik maksimal.

```
>writeln(povpoint([1/2,1/2,1/4],povlook(gray),size=2*defaultpointsiz));
```

Tambahkan sumbu dan selesai.

```
>writeAxes(0,1,0,1,0,1,d=0.015); ...
>povend();
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Anaglyph di Povray

Untuk menghasilkan anaglyph untuk kacamata merah / cyan, Povray harus dijalankan dua kali dari posisi kamera yang berbeda. Ini menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyph () .

Tentu saja, Anda memerlukan kaca mata merah / cyan untuk melihat contoh berikut dengan benar. Fungsi pov3d () memiliki tombol sederhana untuk menghasilkan anaglyph.

```
>pov3d("-exp(-x^2-y^2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, ...
> center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Jika Anda membuat adegan dengan objek, Anda perlu memasukkan pembuatan adegan ke dalam fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai yang berbeda untuk parameter anaglyph.

```
>function myscene ...
s=povsphere(povc,1);
cl=povcylinder(-povz,povz,0.5);
clk=povobject(cl,rotate=xrotate(90°));
```

```

cly=povobject (cl,rotate=yrotate(90°));
c=povbox([-1,-1,0],1);
un=povunion([cl,clx,cly,c]);
obj=povdifference(s,un,povlook(red));
writeln(obj);
writeAxes();
endfunction

```

Fungsi povanaglyph () melakukan semua ini. Parameternya seperti di povstart () dan povend () digabungkan.

```
>povanaglyph ("myscene", zoom=4.5);
```

```

Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povanaglyph:
    povray(currentfile,w,h,aspect,exit);

```

Mendefinisikan Objek Sendiri

Antarmuka povray Euler berisi banyak objek. Tetapi Anda tidak dibatasi untuk ini. Anda dapat membuat objek sendiri, yang menggabungkan objek lain, atau merupakan objek yang sama sekali baru.

Kami mendemonstrasikan torus. Perintah Povray untuk ini adalah "torus". Jadi kami mengembalikan string dengan perintah ini dan parameternya. Perhatikan bahwa torus selalu berpusat pada asalnya.

```

>function povdonat (r1,r2,look "") ...

```

```

    return "torus {" + r1 + "," + r2 + look + "}";
endfunction

```

Here is our first torus.

```
>t1=povdonat (0.8,0.2)
```

```
torus {0.8,0.2}
```

Mari kita gunakan objek ini untuk membuat torus kedua, diterjemahkan dan diputar.

```
>t2=povobject (t1,rotate=xrotate(90°),translate=[0.8,0,0])
```

```

object { torus {0.8,0.2}
    rotate 90 *x
    translate <0.8,0,0>
}

```

Sekarang kami menempatkan objek ini ke dalam sebuah adegan. Untuk tampilan, kami menggunakan Phong Shading.

```
>povstart(center=[0.4,0,0],angle=0°,zoom=3.8,aspect=1.5); ...
>writeln(povobject(t1,povlook(green,phong=1))); ...
>writeln(povobject(t2,povlook(green,phong=1))); ...
```

> povend();

memanggil program Povray. Namun, jika terjadi kesalahan, itu tidak menampilkan kesalahan. Karena itu Anda harus menggunakan

```
> povend (<exit);
```

jika ada yang tidak berhasil. Ini akan membuat jendela Povray terbuka.

```
>povend (h=320,w=480);
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Berikut adalah contoh yang lebih lengkap. Kami menyelesaikannya

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad c \cdot x \rightarrow \text{Max.}$$

dan menunjukkan poin yang layak dan optimal dalam plot 3D.

```
>A=[10,8,4;5,6,8;6,3,2;9,5,6];
>b=[10,10,10]';
>c=[1,1,1];
```

Pertama, mari kita periksa, apakah contoh ini memiliki solusi.

```
>x=simplex(A,b,c,>max,>check)'
```

```
[0, 1, 0.5]
```

Yes, it has.

Next we define two objects. The first is the plane

$$a \cdot x \leq b$$

```
>function oneplane (a,b,look="") ...
```

```
    return povplane(a,b,look)
endfunction
```

Kemudian kami mendefinisikan perpotongan dari semua setengah spasi dan sebuah kubus.

```

>function adm (A, b, r, look "") ...
ol=[];
loop 1 to rows(A); ol=ol|oneplane(A[#,b[#]]; end;
ol=ol|povbox([0,0,0],[r,r,r]);
return povintersection(ol,look);
endfunction

```

We can now plot the scene.

```

>povstart(angle=120°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=3.5); ...
>writeln(adm(A,b,2,povlook(green,0.4))); ...
>writeAxes(0,1.3,0,1.6,0,1.5); ...

```

The following is a circle around the optimum.

-Terjemahan

Berikut ini adalah lingkaran di sekitar optimal.

```

>writeln(povintersection([povsphere(x,0.5),povplane(c,c.x')], ...
>    povlook(red,0.9)));

```

Dan ada kesalahan di arah optimal.

```

>writeln(povarrow(x,c*0.5,povlook(red)));

```

Kami menambahkan teks ke layar. Teks hanyalah objek 3D. Kita perlu menempatkan dan memutarnya sesuai dengan pandangan kita.

```

>writeln(povtext("Linear Problem", [0,0.2,1.3],size=0.05,rotate=125°)); ...
>povend();

```

```

Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);

```

Latihan Soal

1. Buatkan grafik

$$f(x) = x^3 - 4y^2$$

```
>plot3d("x^3-4*y^2"):
```

2. Buatkan grafik

$$f(x) = x^3 - 9x + 14$$

dengan a=-2, b=2, dan grid=10

```
>plot3d("x^3-9*x+14", a=-2, b=2, rotate=true, grid=10):
```

3. Buatlah grafik plot kontur

$$f(x) = e^{9xy}$$

```
>plot3d("exp(9*x*y)", angle=150°, >contour, color=red):
```

4. Buat grafik plot implisit

$$x^2 + y^2 + 7xz + 3z^3$$

```
>plot3d("x^2+y^2+7*x*z+3*z^3", >implicit, r=5, zoom=2.2):
```

BAB 5

KB PEKAN 10-11: MENGGUNAKAN EMT UNTUK KALKULUS

article
eumat
Mukti Wibowo
22305144036
Matematika E 2022

Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format `nama_fungsi := rumus fungsi` (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format `nama_fungsi &= rumus fungsi` (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format `nama_fungsi &&= rumus fungsi` (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah `function` (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi.

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
1  
4.31977682472  
20.7392088022
```

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x) / (x+1)  
>g(3)
```

```
0
```

```
>g(0)
```

```
0
```

```
>g(1)
```

```
Floating point error!  
Error in sqrt  
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.  
g:  
    useglobal; return sqrt(x^2-3*x) / (x+1)  
Error in:  
g(1) ...  
^
```

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
0.950898070639
```

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1, 4.31978, 10.4826, 19.1516, 32.4692, 50.3833, 72.7562,  
99.929, 130.69, 163.51, 200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1, 4.31978, 10.4826, 19.1516, 32.4692, 50.3833, 72.7562,  
99.929, 130.69, 163.51, 200.58]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format `:=`, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
    if x>0 then return x^3  
    else return x^2  
    endif;  
endfunction
```

```
>f(1)
```

```
1
```

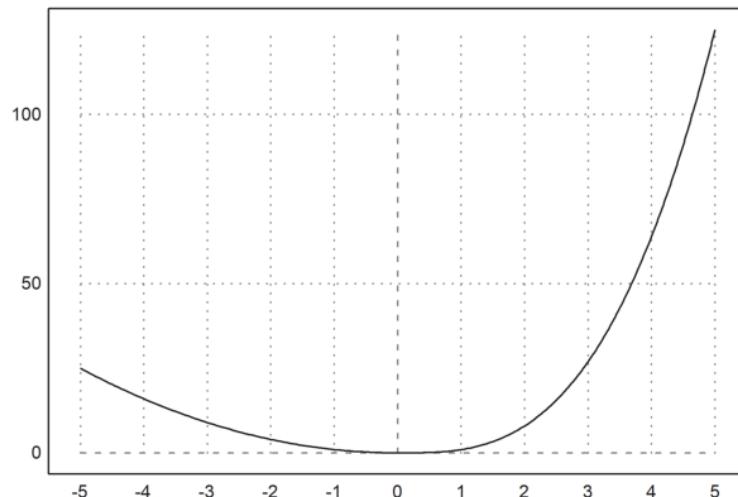
```
>f(-2)
```

```
4
```

```
>f(-5:5)
```

```
[25, 16, 9, 4, 1, 0, 1, 8, 27, 64, 125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)", -5, 5):
```



```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

x
2 E

```
>function g(x) &= 3*x+1
```

3 x + 1

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

3 x + 1
2 E

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik tersebut.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

Jawab:

A). FUNGSI 1 VARIABEL

1. Fungsi 1

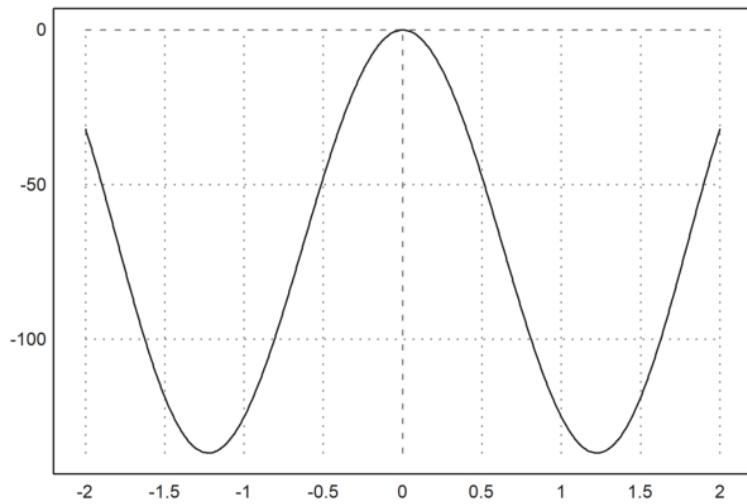
```
>function k(x) := x^2*(x^2-6)^3  
>k(3), k(5), k(7)
```

243
171475
3895843

```
>kmap(-3:3)
```

[243, -32, -125, 0, -125, -32, 243]

```
>plot2d("k(x)":
```



2. Fungsi 2

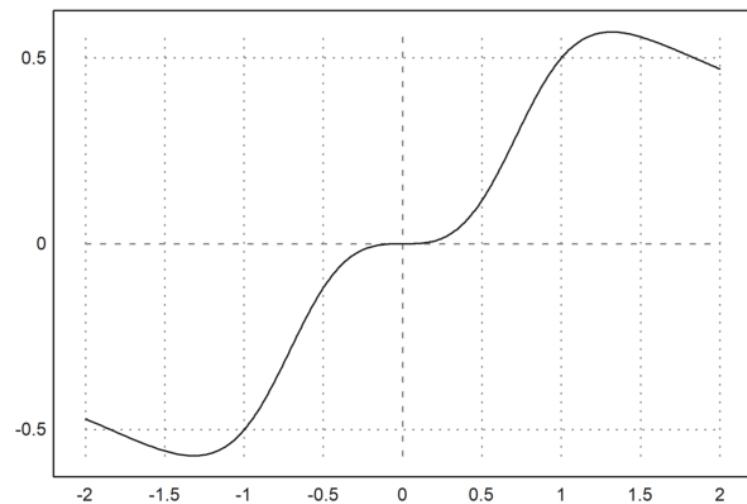
```
>function y(x) := (x)^3/(1+x^4)
>y(2), y(-2), y(3)
```

```
0.470588235294
-0.470588235294
0.329268292683
```

```
>ymap(-5:-5)
```

```
-0.199680511182
```

```
>plot2d("y(x)":
```



3. Fungsi 3

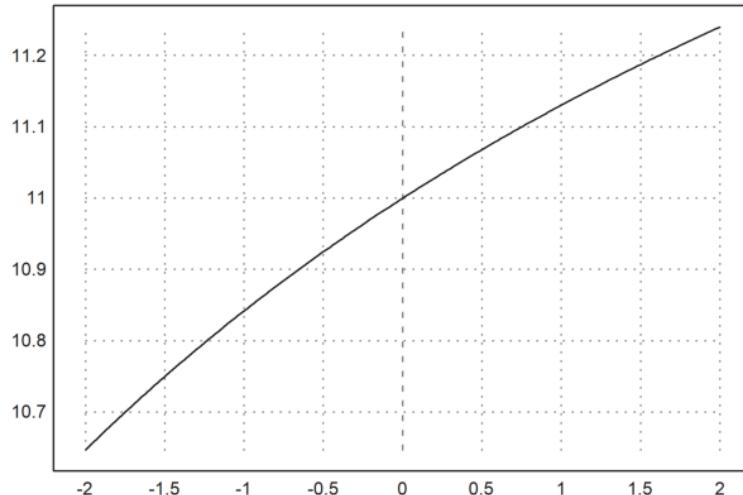
```
>function k(x) := 3*x/(2*x+21)+11  
>k(2), k(-1), k(-3), k(4)
```

```
11.24  
10.8421052632  
10.4  
11.4137931034
```

```
>kmap(2:5)
```

```
[11.24, 11.3333, 11.4138, 11.4839]
```

```
>plot2d("k(x)":
```



4. Fungsi 4

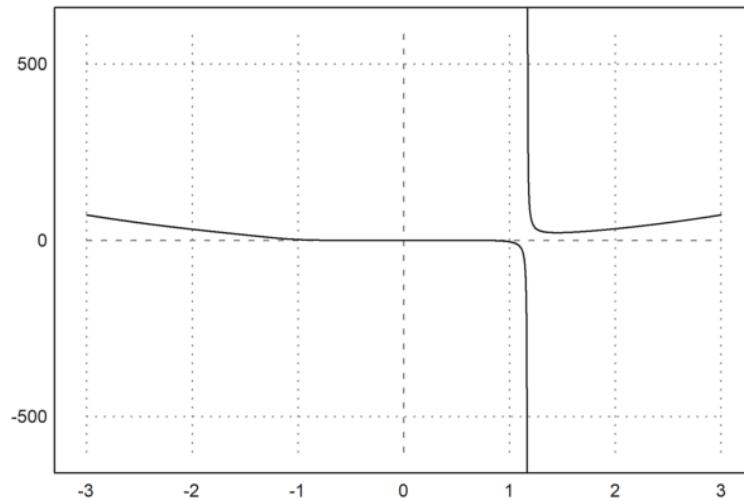
```
>function j(x) := 8*x^9/(x^7-3)  
>j(2), j(1), j(3)
```

```
32.768  
-4  
72.0989010989
```

```
>jmap(5:8)
```

```
[200.008, 288.003, 392.001, 512.001]
```

```
>plot2d("j(x)", -3, 3, -600, 600):
```



5. Fungsi 5

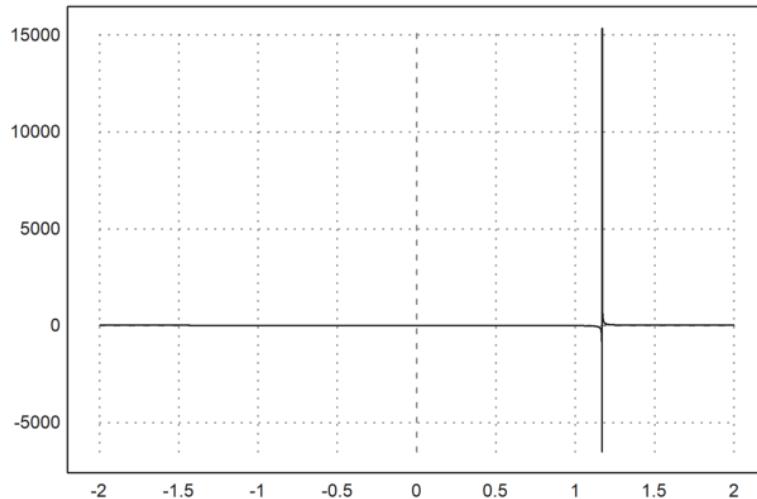
```
>function l(x) := (-cos(x))*sin(3*x)
>l(pi), l(0), l(pi/3)
```

```
0
0
0
```

```
>lmap(0:3pi)
```

```
[0, -0.0762475, -0.116278, 0.407994, -0.350727, -0.184462,
0.721076, -0.630757, -0.131762, 0.871383]
```

```
>plot2d("j(x)":
```



6. Fungsi 6

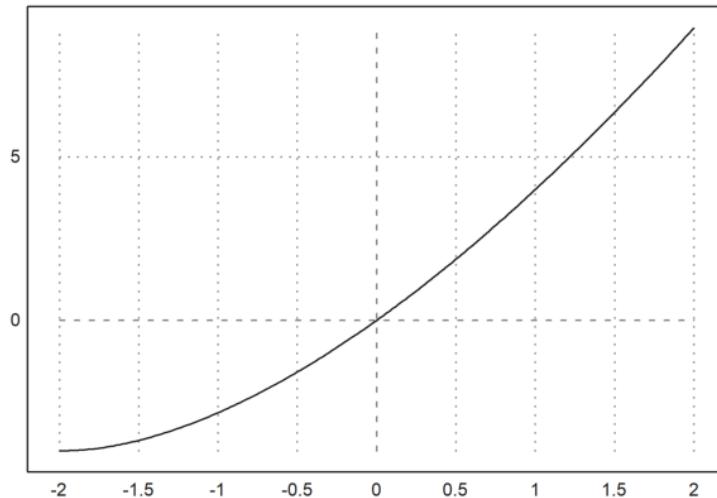
```
>function z(x) := x*sqrt(4*x+12)
>z(11), z(9), z(8)
```

```
82.316462509
62.3538290725
53.0659966457
```

```
>zmap(3:12)
```

```
[14.6969, 21.166, 28.2843, 36, 44.2719, 53.066, 62.3538, 72.111,
82.3165, 92.9516]
```

```
>plot2d("z(x)":
```



B). FUNGSI 2 VARIABEL

1. Fungsi 1

```
>function a(x,y) ...
```

```
return x^2+y^2-24
endfunction
```

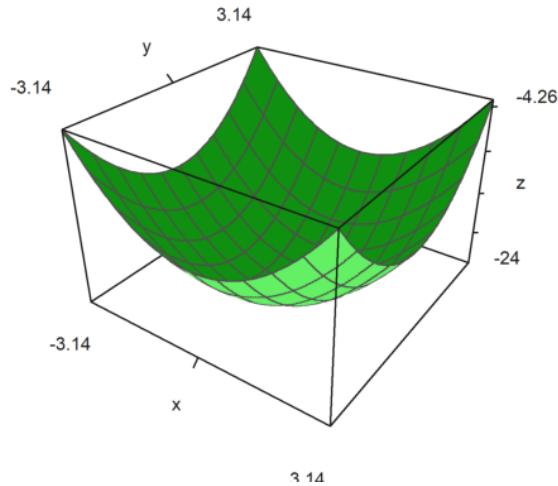
```
>a(5,1), a(9,4), a(2,2)
```

```
2
73
-16
```

```
>amap (-2:2,3:3)
```

```
[-11, -14, -15, -14, -11]
```

```
>aspect=1.5; plot3d("a(x,y)",a=-100,b=100,c=-80,d=80,angle=35°,height=30°,r=pi,n=100):
```



2. Fungsi 2

```
>function q(x,y) ...
```

```
return y^2/(x^2/3)
endfunction
```

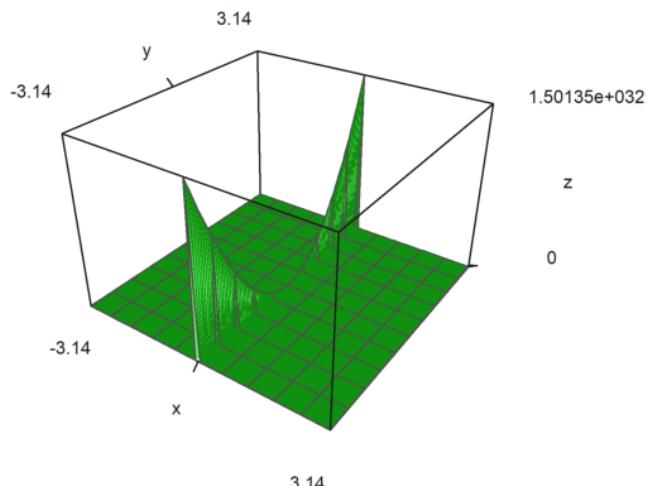
```
>q(4,2), q(2,3), q(1,3)
```

```
0.75
6.75
27
```

```
>qmap(2:2,-2:2)
```

```
[3, 0.75, 0, 0.75, 3]
```

```
>aspect=1.5; plot3d("q(x,y)",a=-100,b=100,c=-80,d=80,angle=35°,height=30°,r=pi,n=100):
```



Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und" (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga). Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x-1} = -1$$

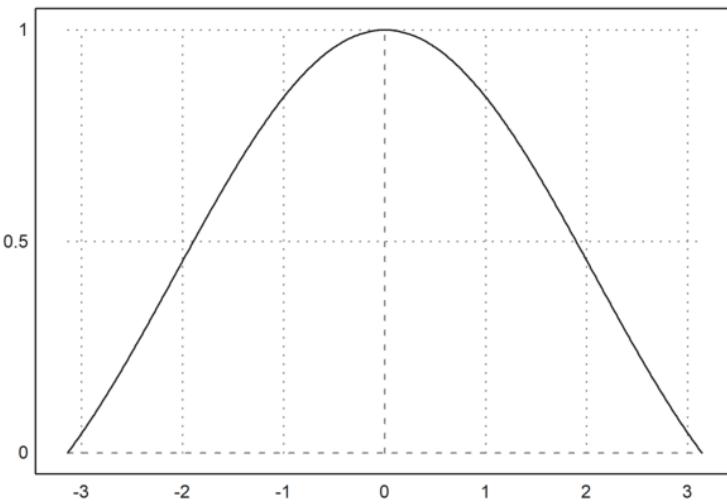
```
>showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} = 7$$

```
>showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi):
```



```
>showev('limit(sin(x^3)/x, x, 0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x} = 0$$

```
>showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log x = \text{infinity}$$

```
>showev('limit((-2)^x, x, inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-2)^x = \text{infinity}$$

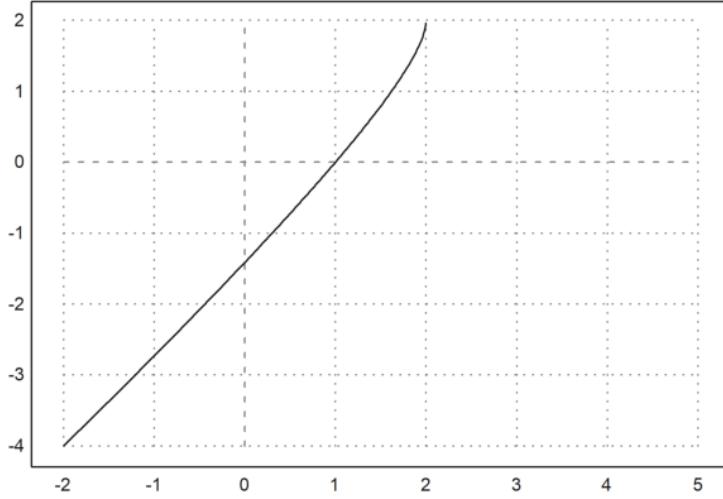
```
>showev('limit(t-sqrt(2-t), t, 2, minus))
```

$$\lim_{t \uparrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

```
>showev('limit(t-sqrt(2-t), t, 5, plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t \downarrow 5} t - \sqrt{2-t} = 5 - \sqrt{3}i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)", -2, 5):
```



```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{6}{7}$$

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + x^2}{x^2 - |x|} = -1$$

```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x = e$$

```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{x} + 1 \right)^x = e^k$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\frac{1}{x}} = e$$

```
>showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+k} \right)^x = e^{-k}$$

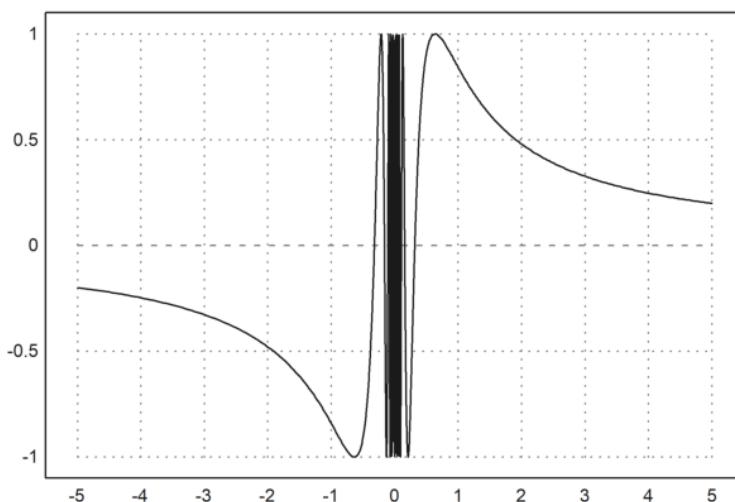
```
>showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{x} \right) = \text{ind}$$

```
>showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-5,5):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

Jawab:

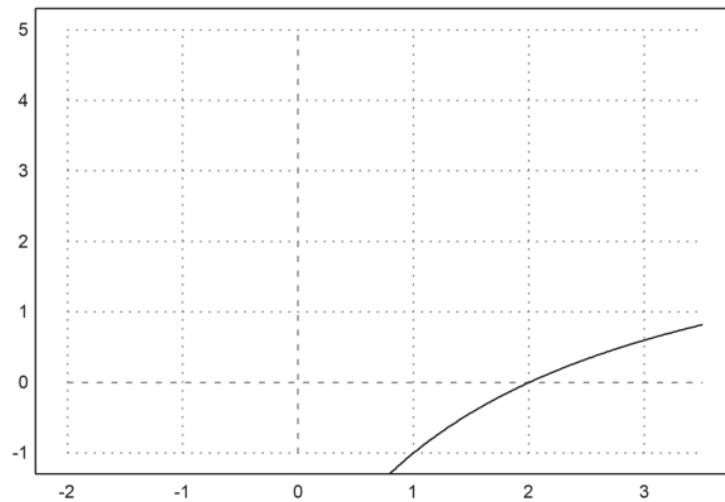
1. Fungsi 1

$$f(x) = \frac{3x-6}{x+2}$$

```
>showev('limit((3*x-6)/(x+2),x,2))
```

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{x + 2} = 0$$

```
>plot2d("(3*x-6)/(x+2)",-2,3.5,-1,5):
```



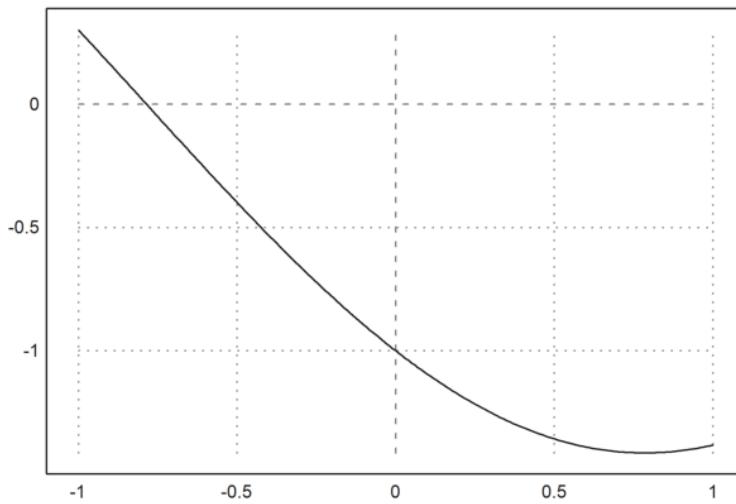
2. Fungsi 2

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$$

```
>showev('limit(cos(2*x)/(sin(x) - cos(x)),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x)}{\sin x - \cos x} = -1$$

```
>plot2d("cos(2*x)/(sin(x) - cos(x))",-1,1):
```



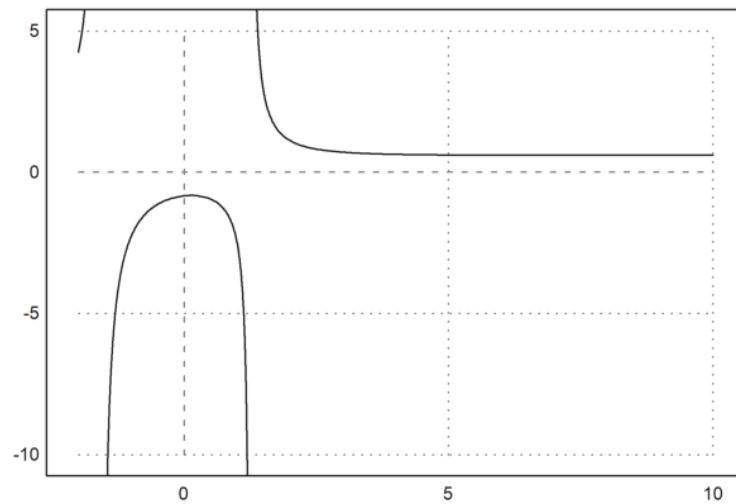
3. Fungsi 3

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{3x^2 + x - 6}$$

```
>showev('limit(((2*x^2-2*x+5)/(3*x^2+x-6)),x,3))
```

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 2x + 5}{3x^2 + x - 6} = \frac{17}{24}$$

```
>plot2d("(2*x^2-2*x+5)/(3*x^2+x-6)", -2, 10, -10, 5):
```



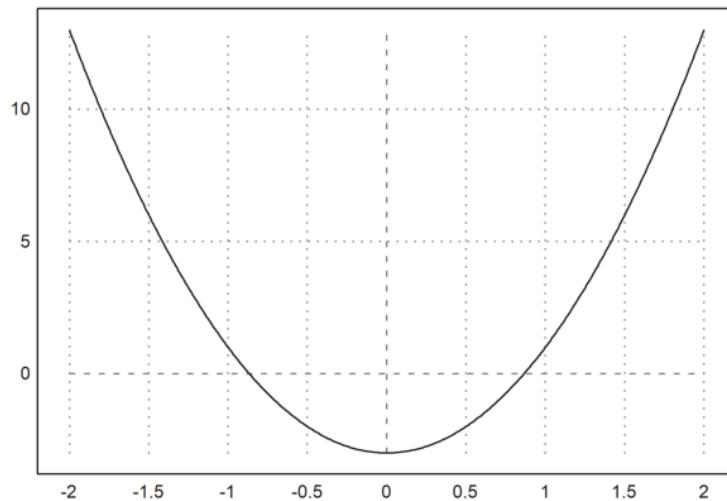
4. Fungsi 4

$$f(x) = 4x^2 - 3$$

```
>$showev('limit((4*x^2-3),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4x^2 - 3 = -3$$

```
>plot2d("(4*x^2-3)":
```



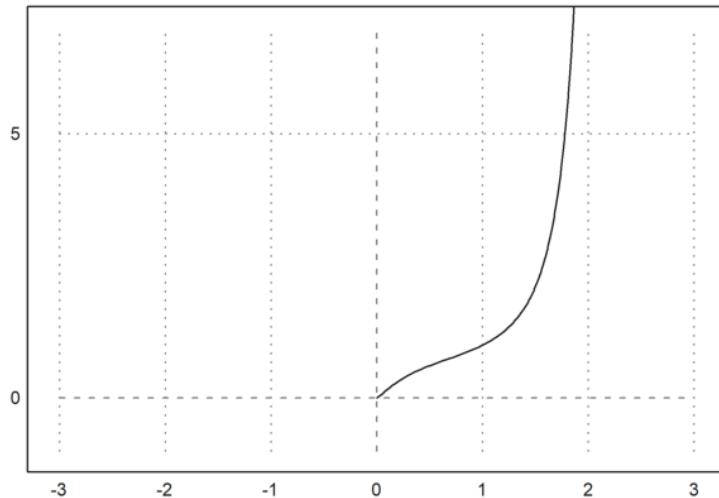
5. Fungsi 5

$$f(x) = x^{x^x}$$

```
>$showev('limit((x^(x^(x))),x,0,plus))
```

$$\lim_{x \downarrow 0} x^{x^x} = 0$$

```
>plot2d("(x^(x^(x)))", -3, 3, -1, 7):
```



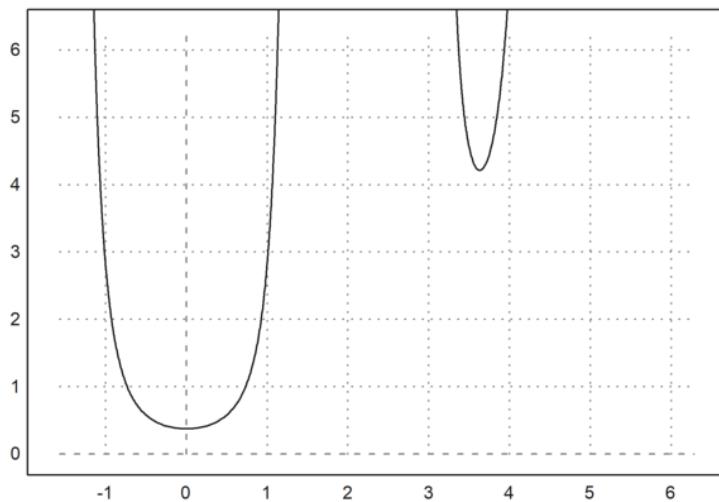
6. Fungsi 6

$$f(x) = \frac{3xtanx}{1 - \cos 4x}$$

```
>$showev('limit((3*x*tan(x))/(1-cos(4*x)),x,0))
```

$$3 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos(4x)} \right) = \frac{3}{8}$$

```
>plot2d("(3*x*tan(x))/(1-cos(4*x))", -pi/2, 2pi, 0, 2pi):
```



Turunan Fungsi

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan $(x+h)^n$ dengan menggunakan teorema binomial.

Jawab:

Akan ditunjukkan bahwa $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$

Pertama, ekspansikan $(x + h)^n$, yakni:

$$\begin{aligned} (x + h)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \\ \Leftrightarrow (x + h)^n &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n \\ \Leftrightarrow (x + h)^n &= x^n + nx^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} h^3 + \dots + h^n \\ \text{Sehingga, } f'(x) \text{ menjadi: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} h^3 + \dots + h^n - x^n}{h} \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \binom{n}{3} x^{n-3} h^2 + \dots + h^{n-1} \\ \Leftrightarrow f'(x) &= nx^{n-1}. \text{ Terbukti.} \end{aligned}$$

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan $\sin(x+h)$ dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

Jawab:

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$

Diketahui bahwa:

$$1). \sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

$$2). \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$$

$$3). \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin x \cdot \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right]$$

$$= (-\sin x) \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} + (\cos x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right]$$

$$= (-\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x. \text{Terbukti.}$$

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

Jawab:

Bukti:

Ambil $f(x) =^a \log x$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{^a \log(x+h) - ^a \log x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{^a \log \frac{(x+h)}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{^a \log(1 + \frac{h}{x})}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{^a \log(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{h} \cdot ^a \log(1 + \frac{h}{x})}{x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{^a \log(1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}}{x}$$

$$= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} ^a \log(1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x}$$

$$= \frac{1}{x \cdot e \log a}$$

$$= \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Menggunakan hasil di atas, maka:

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{d^e \log x}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln e} = \frac{1}{x}. \text{Terbukti.}$$

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

Answering "Is x an integer?" with "integer"
 Maxima is asking
 Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
 Is x an integer?

Use assume!

Error in:

```
$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...  
^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

```
>$factor(E^(x+h)-E^x)
```

$$(e^h - 1) e^x$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) e^x = e^x$$

```
>function f(x) &= x^x
```

x
x

```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h} = \text{infinity}$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h} = x^x (\log x + 1)$$

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

[x > 0]

```
>&forget(x<0)
```

[x < 0]

```
>&facts()
```

[]

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x+h) - \arcsin x}{h} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

sinh(x)

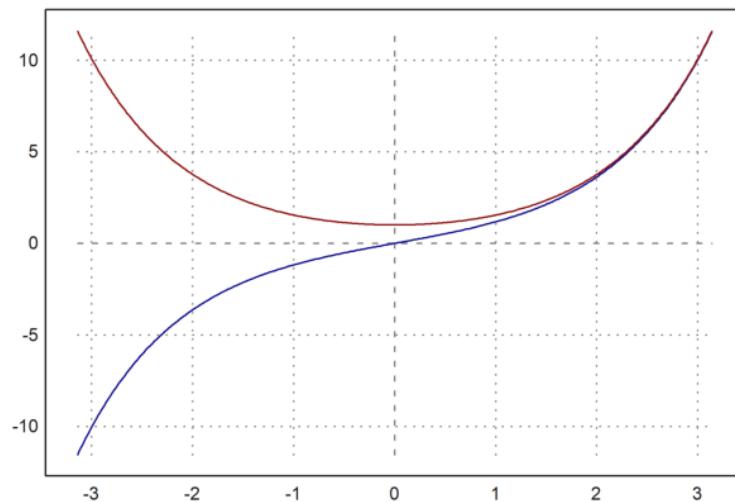
```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x} (e^{2x} + 1)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[blue, red]):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), seperti contoh-contoh tersebut. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

Jawab:

1. Fungsi 1

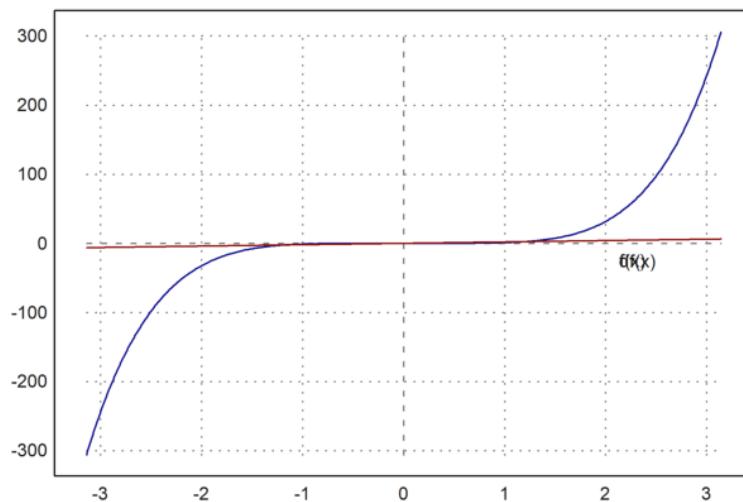
```
>function f(x) := x^5
>$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^5
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

```
>function df(x) &= limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0); $df(x)// df(x) = f'(x)
```

$$2x$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]), label("f(x)",2,0.6), label("df(x)",2,0.6)
```



2. Fungsi 2

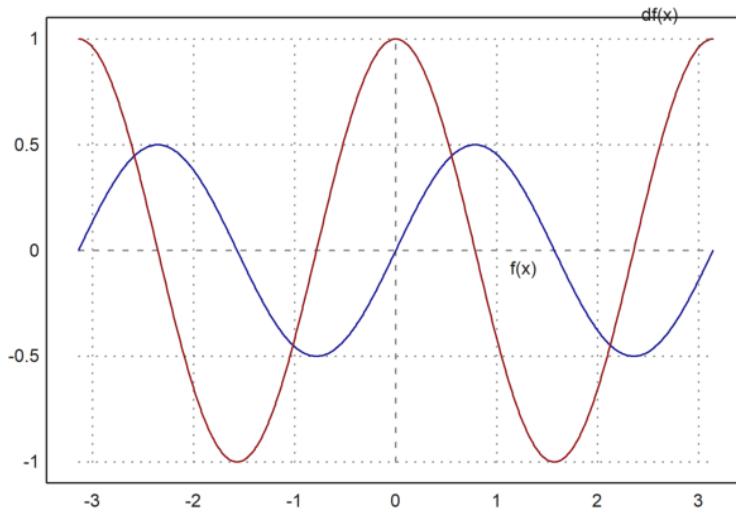
```
>function f(x) := sin(x)*cos(x)
>$showev('limit(((sin(x+h)*cos(x+h))-sin(x)*cos(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)*cos(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) \sin(x+h) - \cos x \sin x}{h} = \cos^2 x - \sin^2 x$$

```
>function df(x) &= limit(((sin(x+h))*cos(x+h))-sin(x)*cos(x))/h,h,0); $df(x)// df(x) = f'(x)
```

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]), label("f(x)",1,0), label("df(x)",2.3,1.0)
```



3. Fungsi 3

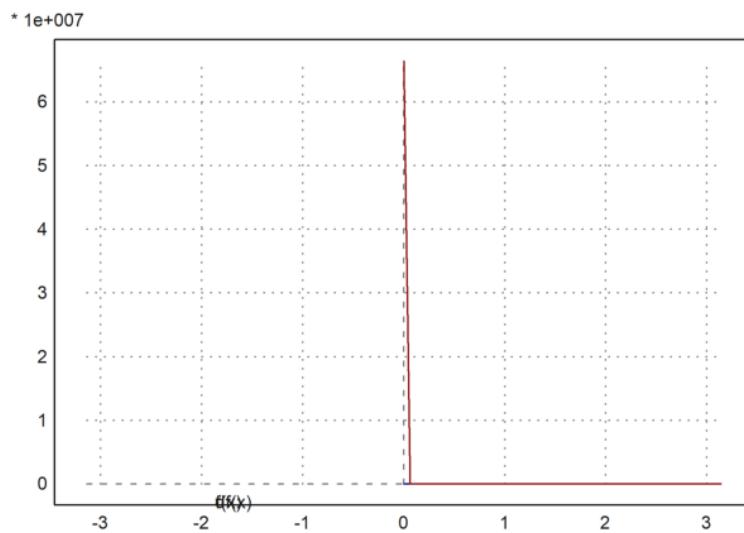
```
>function f(x) := sqrt(x)*7
>$showev('limit((sqrt(x+h)*7-sqrt(x)*7)/h,h,0)) // turunan sqrt(x)*7
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{7\sqrt{x+h} - 7\sqrt{x}}{h} = \frac{7}{2\sqrt{x}}$$

```
>function df(x) &= limit((sqrt(x+h)*7-sqrt(x)*7)/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{7}{2\sqrt{x}}$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[blue, red]), label("f(x)", -2, 11), label("df(x)", -2, -
```



4. Fungsi 4

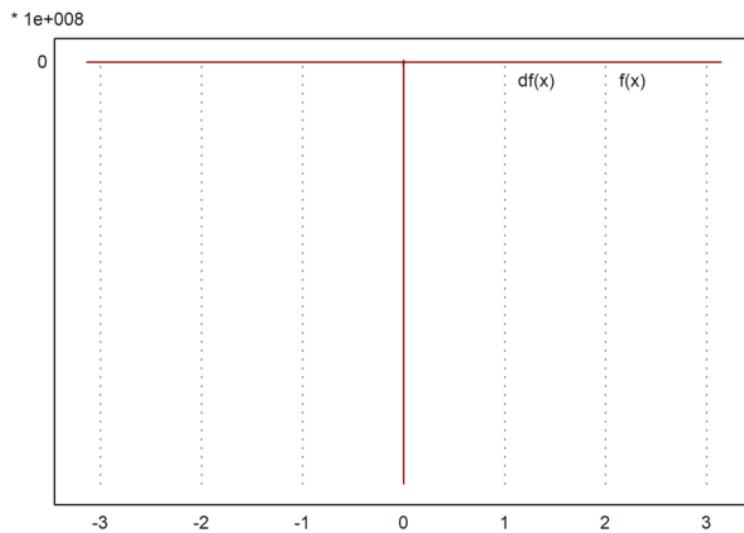
```
>function f(x) := cos(1/x)
>$showev('limit((cos(1/(x+h))-cos(1/x))/h,h,0)) // turunan cos(1/x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{1}{x+h}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{h} = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

```
>function df(x) &= limit((cos(1/(x+h))-cos(1/x))/h,h,0); $df(x)// df(x) = f'(x)
```

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[blue, red]), label("f(x)", 2, 0.4), label("df(x)", 1, -0.4)
```



5. Fungsi 5

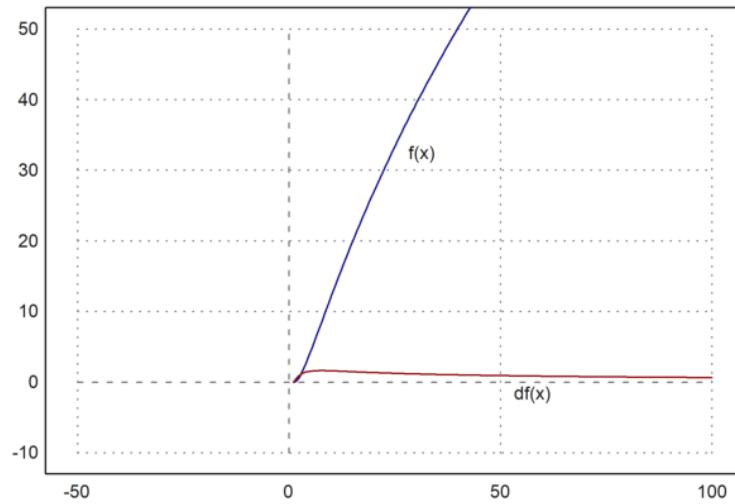
```
>function f(x) := (log(x))^3
>$showev('limit(((log(x+h))^3-(log(x))^3)/h,h,0)) // turunan (log(x))^3
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log^3(x+h) - \log^3 x}{h} = \frac{3 \log^2 x}{x}$$

```
>function df(x) &= limit(((log(x+h))^3-(log(x))^3)/h,h,0); $df(x)// df(x) = f'(x)
```

$$\frac{3 \log^2 x}{x}$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -50, 100, -10, 50, color=[blue, red]), label("f(x)", 25, 35), label("df(x)", 65, 0)
```



6. Fungsi 6

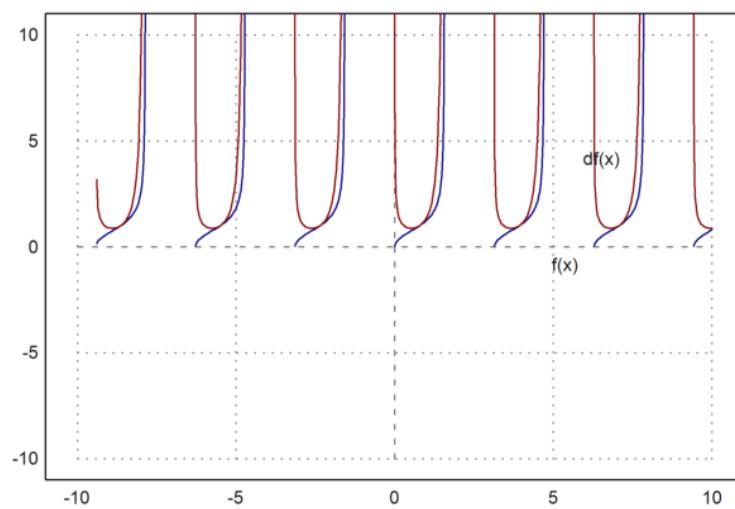
```
>function f(x) := sqrt(tan(x))
>$showev('limit((sqrt(tan(x+h))-sqrt(tan(x)))/h,h,0)) // turunan exp(x)*cos(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\tan(x+h)} - \sqrt{\tan x}}{h} = \frac{1}{2 \cos^2 x \sqrt{\tan x}}$$

```
>function df(x) &= limit((sqrt(tan(x+h))-sqrt(tan(x)))/h,h,0); $df(x)// df(x) = f'(x)
```

$$\frac{1}{2 \cos^2 x \sqrt{\tan x}}$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -10, 10, -10, 10, color=[blue, red]), label("f(x)", 4.5, 0), label("df(x)", 6.5, 0)
```



Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah `integrate`. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi `integrate` menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

Answering "Is n equal to -1?" with "no"

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \log(x+1)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x$$

```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^\pi \sin x dx = 2$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{(2x+1)^{\frac{7}{2}}}{28} - \frac{(2x+1)^{\frac{5}{2}}}{10} + \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{25^{\frac{5}{2}}}{21} - \frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{25^{\frac{7}{2}} - 2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x} + a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = (-e^\pi - 1) \sin a + (e^\pi + 1) \cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x} + a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = (-e^\pi - 1) (\sin a - \cos a)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2); $f(x)
```

$$e^{-x^2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

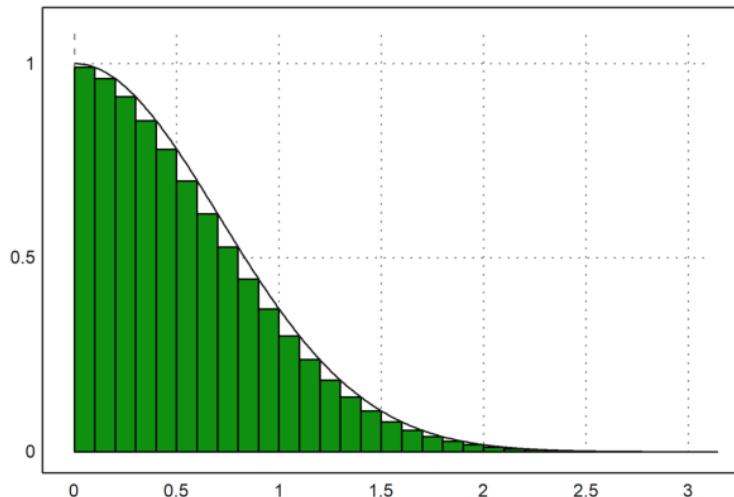
$$\operatorname{erf}(x) = \int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

$$\int_0^\pi x^x dx$$

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Integral tentu

$$\int_0^\pi x^x dx$$

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva $y=f(x)$ tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x  
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)  
>/> jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

$$\int_0^\pi x^x dx = 19.19514483551471$$

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai $f(x)$ untuk $x = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 3.2$.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

0.787732687832

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_0^\infty x^x dx = \int_0^\infty x^x dx$$

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

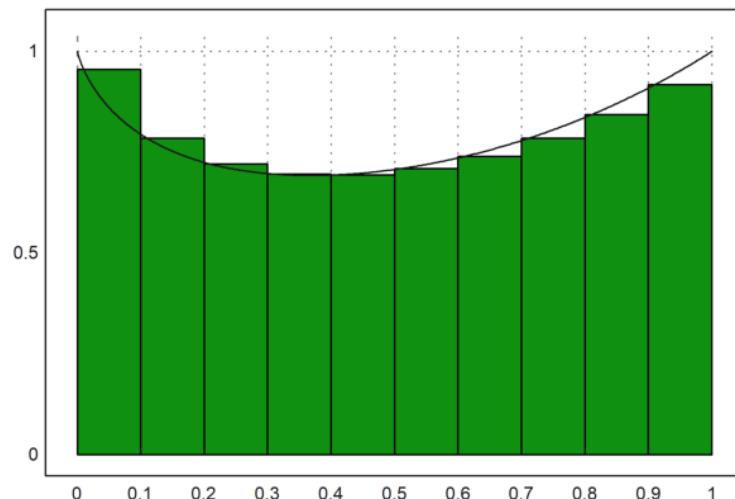
```
>function f(x) &= x^x; $f(x)
```

$$x^x$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 x^x dx$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva $y = f(x)$ yang diputar mengelilingi sumbu x dari $x=a$ sampai $x=b$, yakni

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)

- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva $y=f(x)$ dari $x=a$ sampai $x=b$ dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)

Jawab:

1. Fungsi 1

```
>function f(x) &= 9*x^2; $f(x)
```

$$9x^2$$

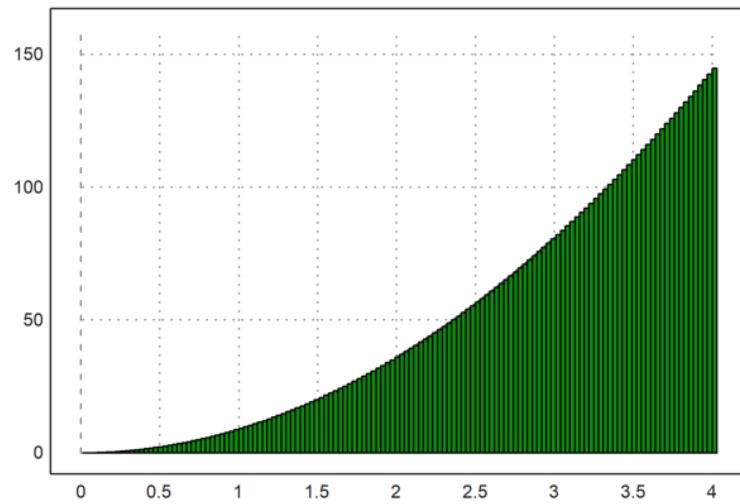
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$9 \int x^2 dx = 3x^3$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,2,3))
```

$$9 \int_2^3 x^2 dx = 57$$

```
>x=0.01:0.03:4; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",2,3,>add):
```



2. Fungsi 2

```
>function f(x) &= cos(6*x+2); $f(x)
```

$$\cos(6x + 2)$$

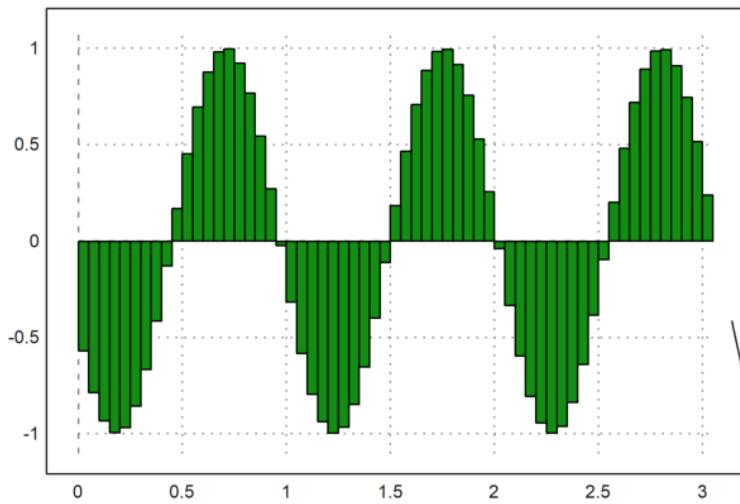
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int \cos(6x + 2) dx = \frac{\sin(6x + 2)}{6}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,pi,2*pi))
```

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos(6x + 2) dx = 0$$

```
>x=0:0.05:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.03),>bar); plot2d("f(x)",pi,2*pi,>add):
```



3. Fungsi 3

```
>function f(x) &= (sin(x)) * (cos((x)))^6; $f(x)
```

$$\cos^6 x \sin x$$

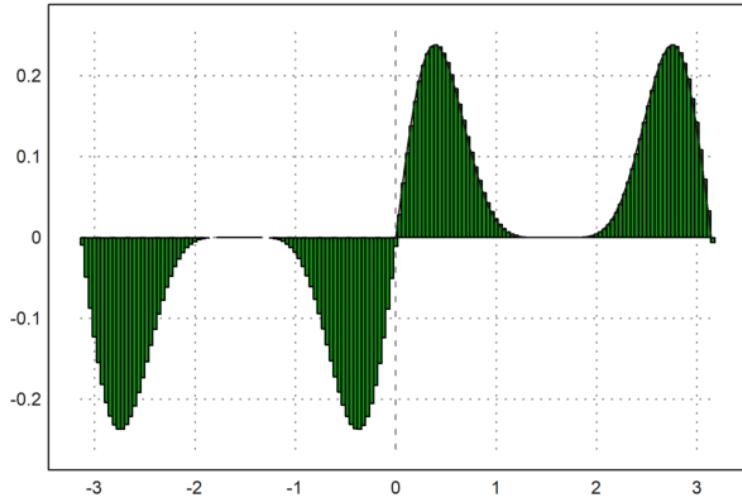
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int \cos^6 x \sin x \, dx = -\frac{\cos^7 x}{7}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^\pi \cos^6 x \sin x \, dx = \frac{2}{7}$$

```
>x=-pi:0.04:pi; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



4. Fungsi 4

```
>function f(x) &= (x^4*(2-x^2)^(1/4)); $f(x)
```

$$x^4 (2 - x^2)^{\frac{1}{4}}$$

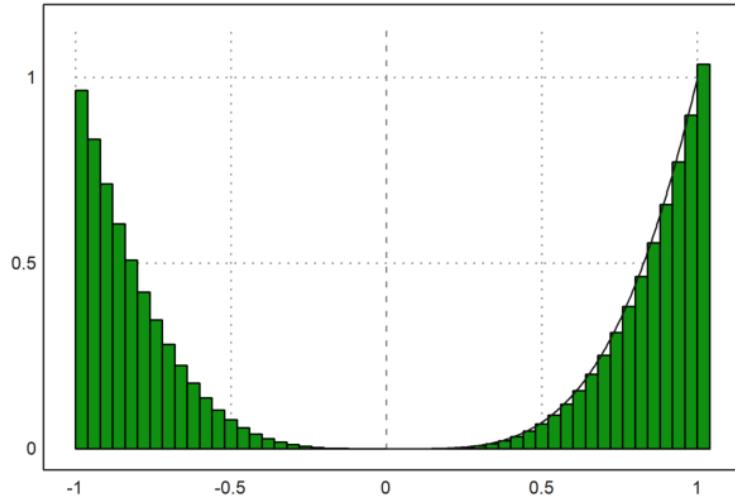
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int x^4 (2 - x^2)^{\frac{1}{4}} dx = \int x^4 (2 - x^2)^{\frac{1}{4}} dx$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 x^4 (2 - x^2)^{\frac{1}{4}} dx = \int_0^1 x^4 (2 - x^2)^{\frac{1}{4}} dx$$

```
>x=-1:0.04:1; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



5. Fungsi 5

```
>function f(x) &= sqrt(12-x^2); $f(x)
```

$$\sqrt{12 - x^2}$$

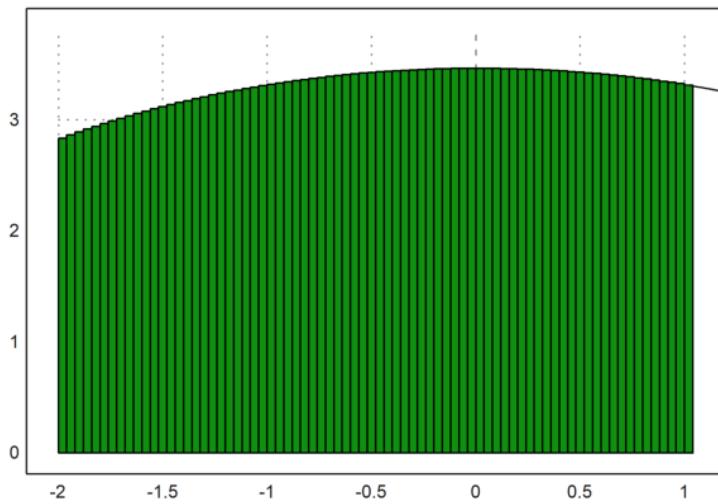
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int \sqrt{12 - x^2} dx = 6 \arcsin\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{x\sqrt{12 - x^2}}{2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,1,2))
```

$$\int_1^2 \sqrt{12 - x^2} dx = 6 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{12 \arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + \sqrt{11}}{2} + 2^{\frac{3}{2}}$$

```
>x=-2:0.04:1; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",1,2,>add):
```

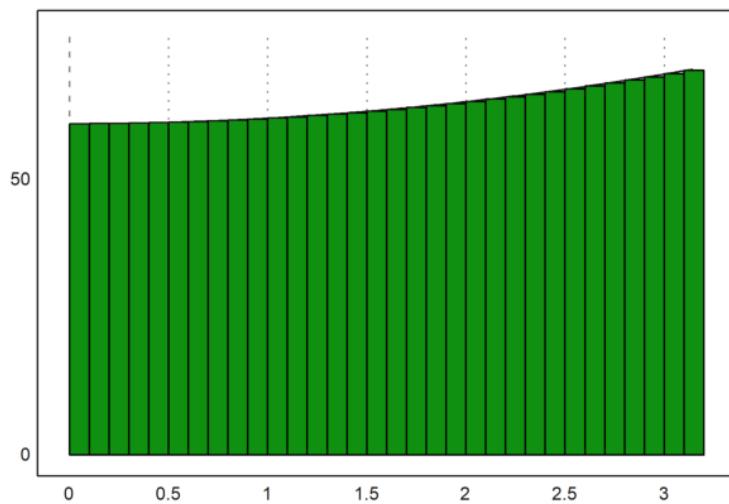


6. Fungsi 6

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
>function f(x) &= x^2+60; $f(x)
```

$$x^2 + 60$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



```
>0.01*sum(f(x+0.01))
```

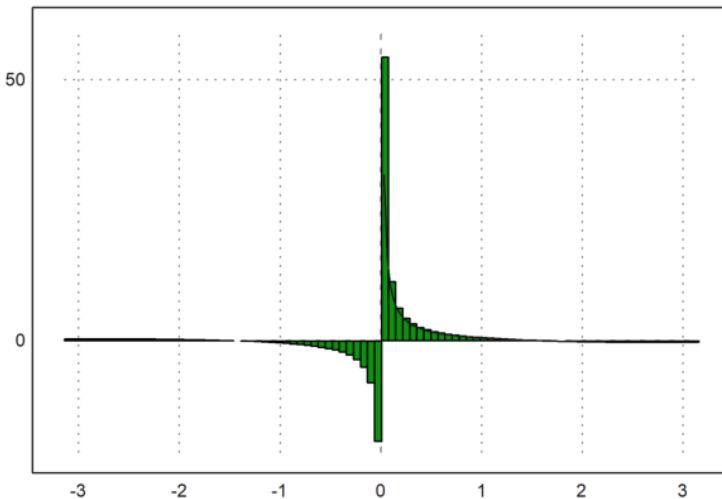
20.251552

7. Fungsi 7

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
>function f(x) &= cos(x)/x; $f(x)
```

$$\frac{\cos x}{x}$$

```
>x=-pi:0.07:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



```
>0.01*sum(f(x+0.01))
```

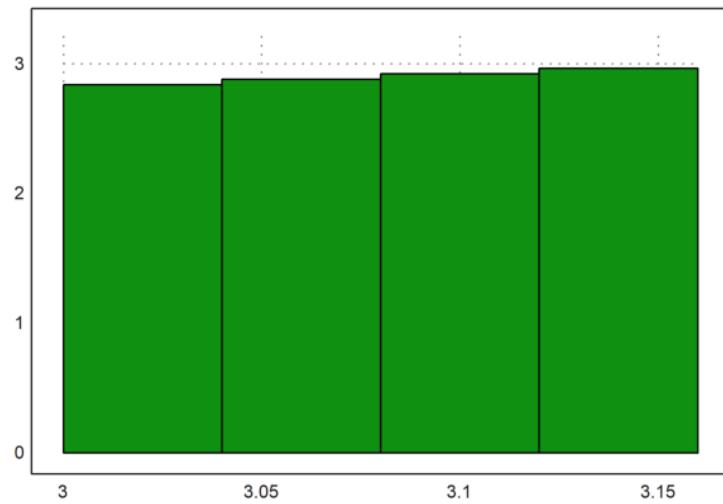
0.415163991256

8. Fungsi 8

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
>function f(x) &= sqrt(x^2-1); $f(x)
```

$$\sqrt{x^2 - 1}$$

```
>x=3:0.04:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,2,>add):
```



```
>0.01*sum(f(x+0.01))
```

0.11610107668

Luas daerah dibatasi 2 kurva

1). Fungsi 1

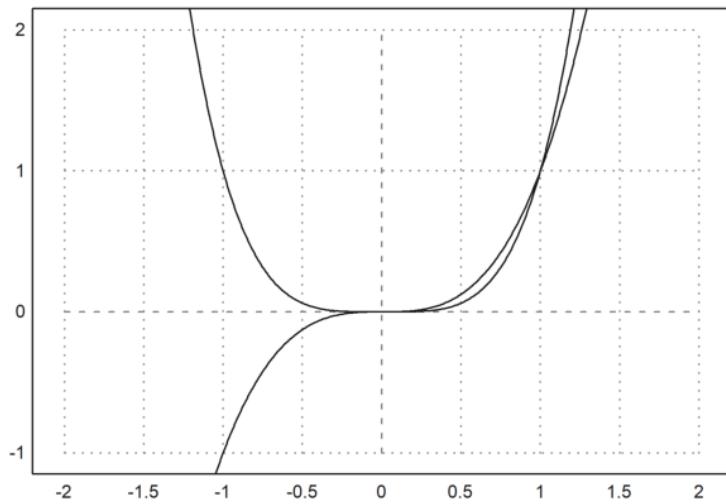
```
>function f(x) &= x^3; $f(x)
```

$$x^3$$

```
>function g(x) &= x; $g(x)
```

$$x$$

```
>plot2d(["x^4", "x^3"], -2, 2, -1, 2):
```



```
>function h(x) &= f(x)-g(x); $h(x)
```

$$x^3 - x$$

```
>$showev('integrate(h(x),x))
```

$$\int x^3 - x \, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

```
>$&solve(f(x)=g(x))
```

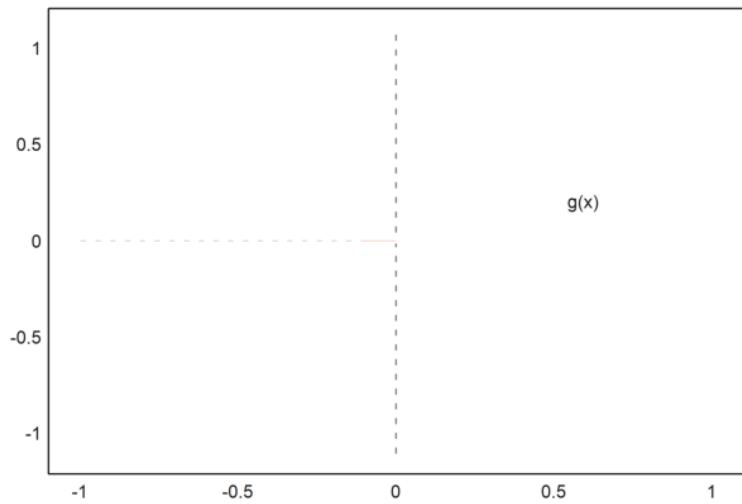
$$[x = -1, x = 1, x = 0]$$

```
>$showev('integrate(h(x),x,0,1)) // menghitung luas daerah yang dibatasi 2 kurva
```

$$\int_0^1 x^3 - x \, dx = -\frac{1}{4}$$

Arsiran daerah yang dibatasi kurva $f(x)$ dan $g(x)$ sebagai berikut:

```
>x=-1:0.01:1; plot2d(x,f(x),>bar,>filled,style="-",fillcolor=orange,>grid); plot2d(x,g(x),
```



2). Fungsi 2

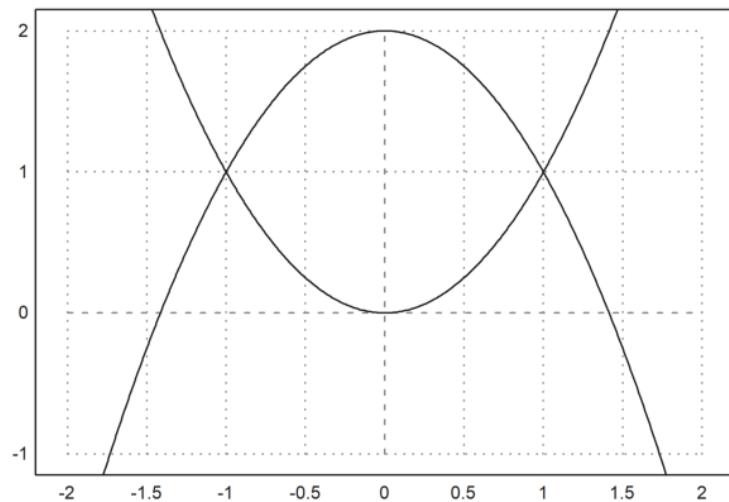
```
>function f(x) &= x^3+1; $f(x)
```

$$x^3 + 1$$

```
>function g(x) &= x^2; $g(x)
```

$$x^2$$

```
>plot2d(["-x^2+2", "x^2"], -2, 2, -1, 2):
```



```
>function h(x) &= f(x)-g(x); $h(x)
```

$$x^3 - x^2 + 1$$

```
>$&solve(f(x)=g(x))
```

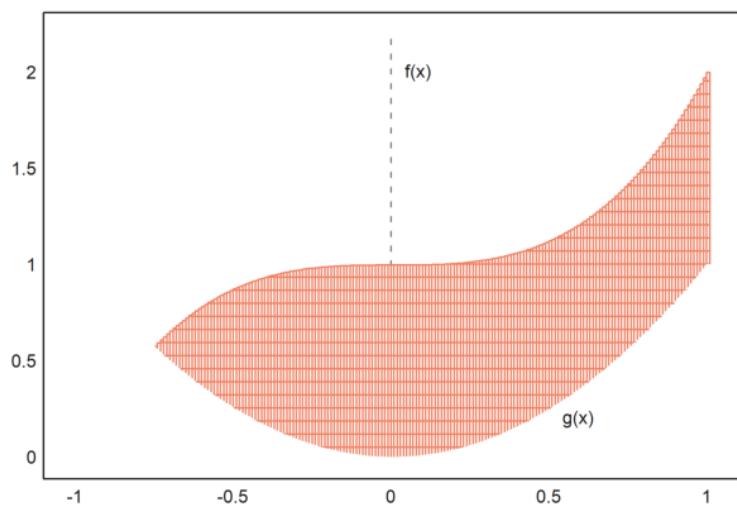
$$\left[x = \frac{\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}}{9\left(\frac{\sqrt{23}}{23^{\frac{3}{2}}} - \frac{25}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} + \left(\frac{\sqrt{23}}{23^{\frac{3}{2}}} - \frac{25}{54}\right)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}, x = \left(\frac{\sqrt{23}}{23^{\frac{3}{2}}} - \frac{25}{54}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{-\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}}{9\left(\frac{\sqrt{23}}{23^{\frac{3}{2}}} - \frac{25}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{3}, x = \right]$$

```
>$showev('integrate(h(x),x,-1,1)) // menghitung luas daerah yang dibatasi 2 kurva
```

$$\int_{-1}^1 x^3 - x^2 + 1 \, dx = \frac{4}{3}$$

Arsiran daerah yang dibatasi kurva $f(x)$ dan $g(x)$ sebagai berikut:

```
>x=-1:0.01:1; plot2d(x,f(x),>bar,>filled,style="--",fillcolor=orange,>grid); plot2d(x,g(x),
```



Volume benda putar

Menghitung volume hasil perputaran kurva

$$m(x) = x^3 + 1$$

dari $x=-1$ sampai $x=0$. Diputar terhadap sumbu-x.

Jawab:

```
>function m(x) &= x^4+3; $m(x)
```

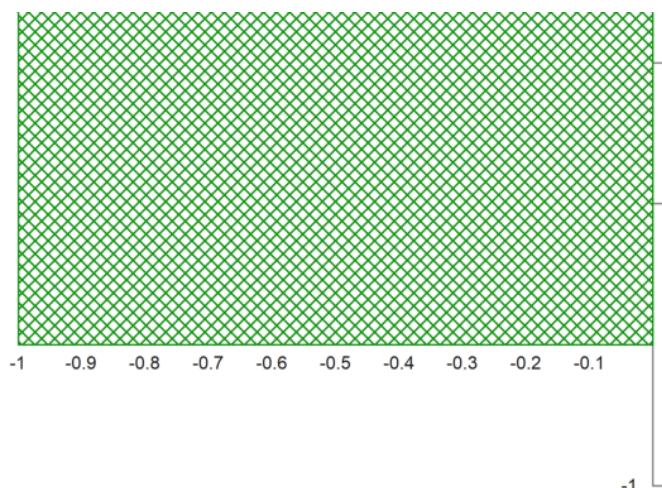
$$x^4 + 3$$

```
>$showev('integrate(pi*(m(x))^2,x,-1,0)) // Menghitung volume hasil perputaran m(x)
```

$$\pi \int_{-1}^0 (x^4 + 3)^2 dx = \frac{464\pi}{45}$$

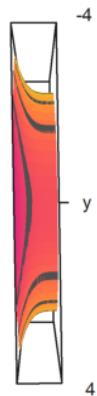
Daerah di bawah kurva yang akan dirotasi terhadap sumbu x sebagai berikut:

```
>plot2d("m(x)",-1,0,-1,2,grid=7,>filled, style="/\"):
```



Hasil perputaran m(x) terhadap sumbu x sebagai berikut:

```
>plot3d("m(x)",-1,0,-1,1,>rotate,angle=6.3,>hue,>contour,color=redgreen,height=11):
```



Menghitung panjang kurva

Menghitung panjang kurva

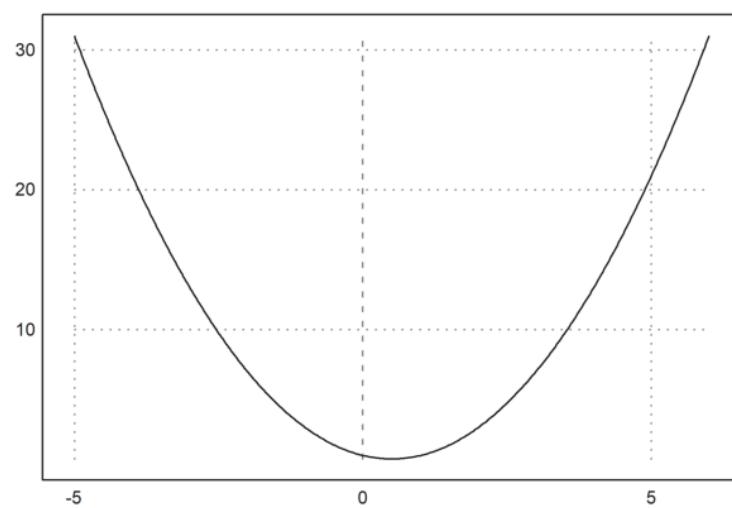
$$y = x^2 - x + 1$$

dari $x=1$ sampai $x=3$.

```
>function d(x) &= x^2-x+1; $d(x)
```

$$x^2 - x + 1$$

```
>plot2d("d(x)", -5, 6); // gambar kurva d(x)
```



```
>$showev('limit((d(x+h)-d(x))/h,h,0))
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2 - h}{h} = 2x - 1$$

```
>function dd(x) &= limit((d(x+h)-d(x))/h,h,0); $dd(x)
```

$$2x - 1$$

```
>function q(x) &= ((dd(x))^2); $q(x)
```

$$(2x - 1)^2$$

```
>$showev('integrate(sqrt(1+q(x)),x,1,3)) // menghitung panjang kurva
```

$$\int_1^3 \sqrt{(2x-1)^2 + 1} dx = \frac{\operatorname{asinh} 5 + 5\sqrt{26}}{4} - \frac{\operatorname{asinh} 1 + \sqrt{2}}{4}$$

Jadi, panjang kurva

$$y = x^2 - x + 1$$

dari $x=0$ sampai $x=4$ adalah

$$S = \frac{\operatorname{asinh} 5 + 5\sqrt{26}}{4} - \frac{\operatorname{asinh} 1 + \sqrt{2}}{4}.$$

Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh penggunaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke $-n$);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

```
>1:2:30
```

```
[1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29]
```

```
>sum(1:2:30), sum(1/(1:2:30))
```

```
225  
2.33587263431
```

```
>$' sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n), simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret
```

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

```
>$' sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf), simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k + k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k + k}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$' sum(1/x^2, x, 1, inf) = ev(sum(1/x^2, x, 1, inf), simpsum=true) // ev: menghitung nilai e
```

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

```
>$' sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf), simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = - \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^x}{x}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$' sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf), simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$$

```
>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forget
```

$$a \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{a}{1-x}$$

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1. **Deret Taylor**

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar $x=a$ adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>$'e^x=taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai suku ke-11
```

$$e^x = \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

```
>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1
```

$$\log x = x - \frac{(x-1)^{10}}{10} + \frac{(x-1)^9}{9} - \frac{(x-1)^8}{8} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^2}{2} - 1$$

BAB 6

KB PEKAN 12-13: MENGGUNAKAN EMT UNTUK GEOMETRI

article
eumat

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Nama : Mukti Wibowo
NIM : 223051440366
Kelas: Matematika E 2022

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d  
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang  
koordinat
```

```
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas  
sumbu-x dan y adalah -r sd r
```

```

plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label
"AB" sejauh d

```

```

plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P

```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```

turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v): memutar vektor v ke kiri
turnRight(v): memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektor v dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.

```

$ax+by=c$.

```

lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g): titik pada garis g
perpendicular(A, g): garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g): garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h): titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g): proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B): jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B): kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C): luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C): besar sudut <ABC
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c): pusat lingkaran c
getCircleRadius(c): jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C): lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkaran c
circleCircleIntersections (c1, c2): titik potong lingkaran c1 dan

```

c2

```
planeThrough(A, B, C): bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```

getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan
y dengan titik A pada sisi positif (kanan/atasi) garis

```

```
quad(A,B) : kuadrat jarak AB  
spread(a,b,c) : Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni  
sin(alpha)^2 dengan alpha sudut yang menghadap sisi a.
```

```
crosslaw(a,b,c,sa) : persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga  
dengan panjang sisi a, b, c.
```

```
triplespread(sa,sb,sc) : persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk  
suatu segitiga
```

```
doublespread(sa) : Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan  
sa=sin(phi)^2 spread a.
```

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang atur tiga poin dan plot.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A, "A"); // definisi dan gambar tiga titik  
>B=[0,1]; plotPoint(B, "B");  
>C=[2,2]; plotPoint(C, "C");
```

Lalu tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B, "c"); // c=AB  
>plotSegment(B,C, "a"); // a=BC  
>plotSegment(A,C, "b"); // b=AC
```

Fungsi geometri meliputi fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format untuk garis adalah [a, b, c], yang merepresentasikan garis dengan persamaan $ax + by = c$.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

[-1, 2, 2]

Hitung garis tegak lurus melalui A pada BC.

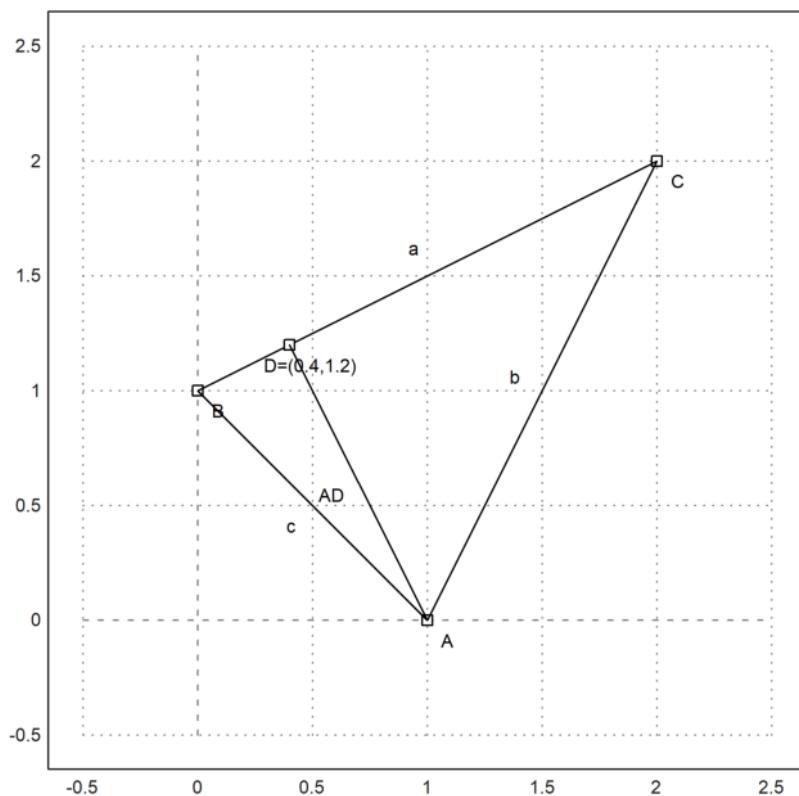
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan perpotongannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plot itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan  
>aspect(1); plotSegment(A,D); // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

1.5

Cara lain menghitung rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langsung dengan fungsi
```

1.5

Cara lain menghitung luas segitiga ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

1.5

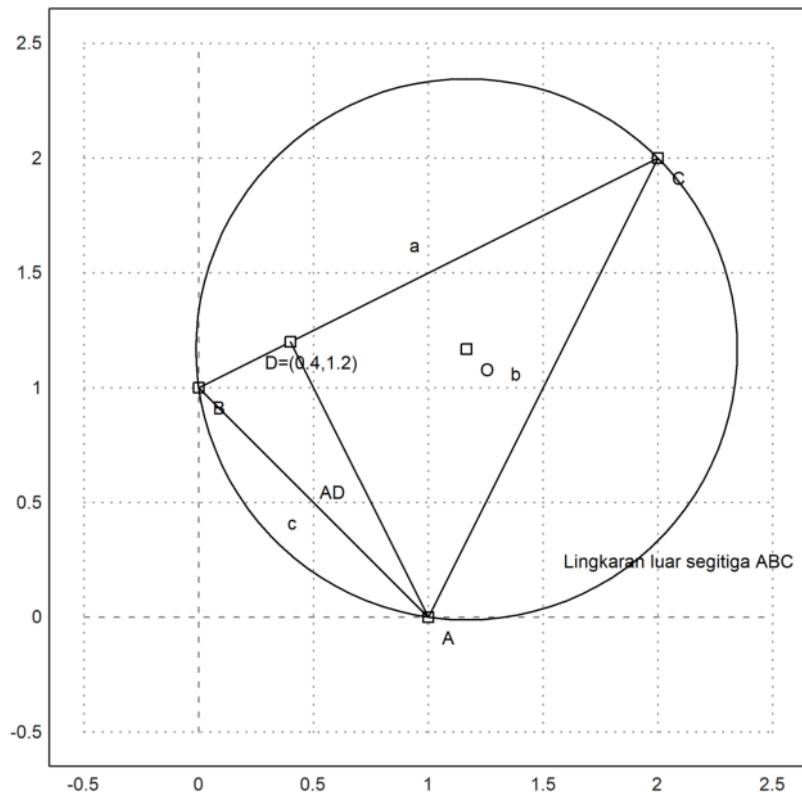
Sudut di C

```
>degsprint(computeAngle(B,C,A))
```

$36^\circ 52' 11.63''$

Sekarang lingkaran sirkit segitiga.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC");
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
[1.16667, 1.16667]
```

```
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB  
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB  
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

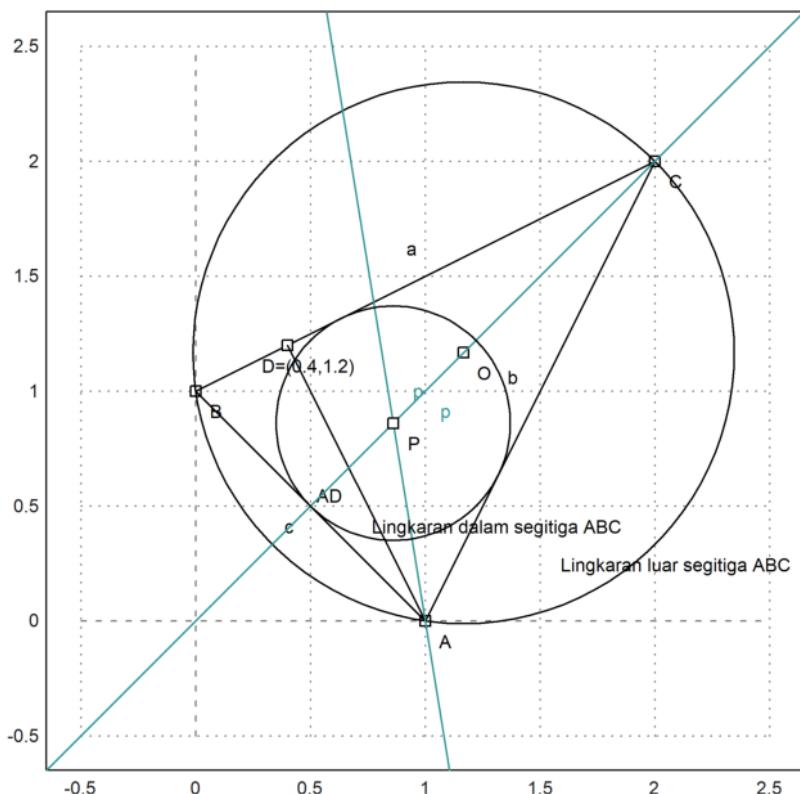
```
[0.86038, 0.86038]
```

Tambahkan semua ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut  
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya  
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"); // gambar lingkaran dal
```



Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut.
3. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
4. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

Jawab:

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

Titik singgung garis BC dengan lingkaran dalam.

```
>s=lineThrough (B, C)
```

```
[-1, 2, 2]
```

```
>m=circleWithCenter (P, r)
```

```
[0.86038, 0.86038, 0.509654]
```

```
>S=lineCircleIntersections (s, m)
```

```
[0.632456, 1.31623]
```

Titik singgung garis AC dengan lingkaran dalam.

```
>p=lineThrough (A, C)
```

```
[-2, 1, -2]
```

```
>Q=lineCircleIntersections (p, m)
```

```
[1.31623, 0.632456]
```

Titik singgung garis AB dengan lingkaran dalam.

```
> q=lineThrough (A, B)
```

```
[-1, -1, -1]
```

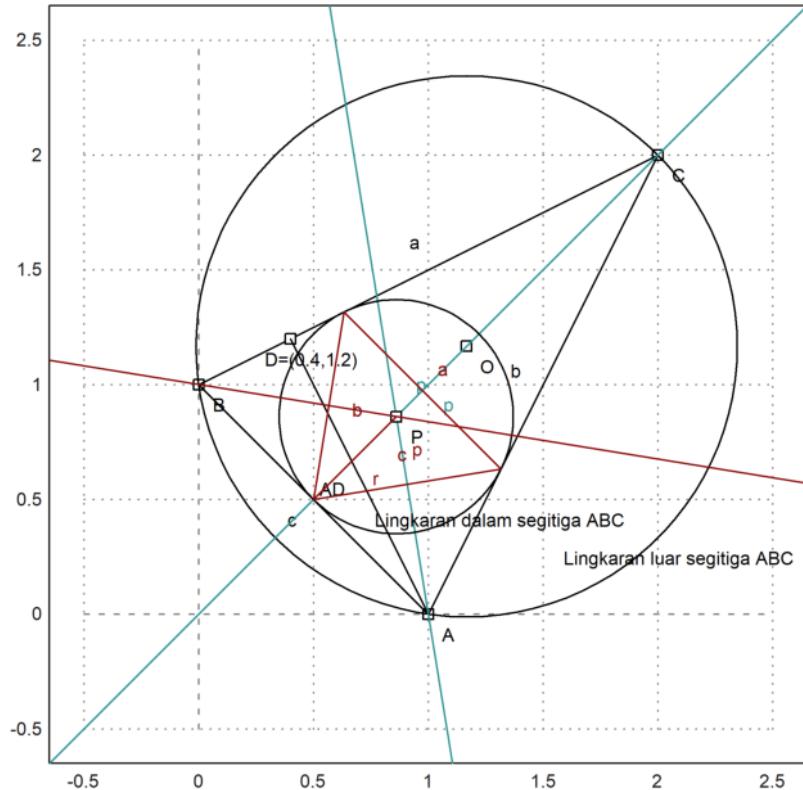
```
>L=lineCircleIntersections (q, m)
```

```
[0.5, 0.5]
```

Jadi titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga adalah $(0.632456, 1.31623)$, $(1.31632, 0.632456)$, $(0.5, 0.5)$.

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut.

```
>plotSegment(S,Q,"a");
>plotSegment(S,L,"b");
>plotSegment(L,Q,"c");
```



3. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

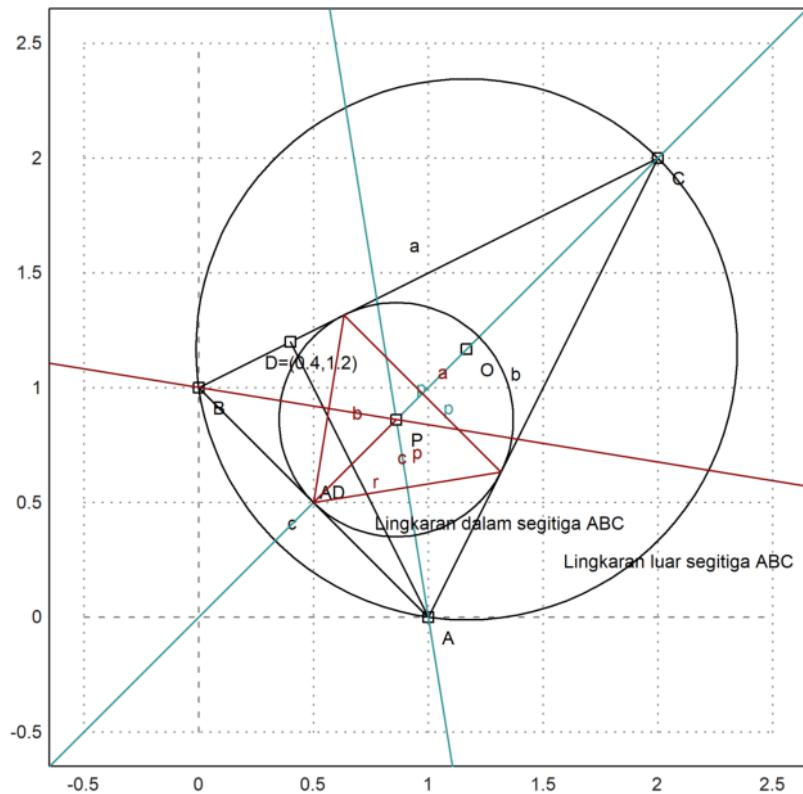
```
> P, r
```

```
[0.86038, 0.86038]
0.509653732104
```

```
>k=angleBisector(A,B,C)
```

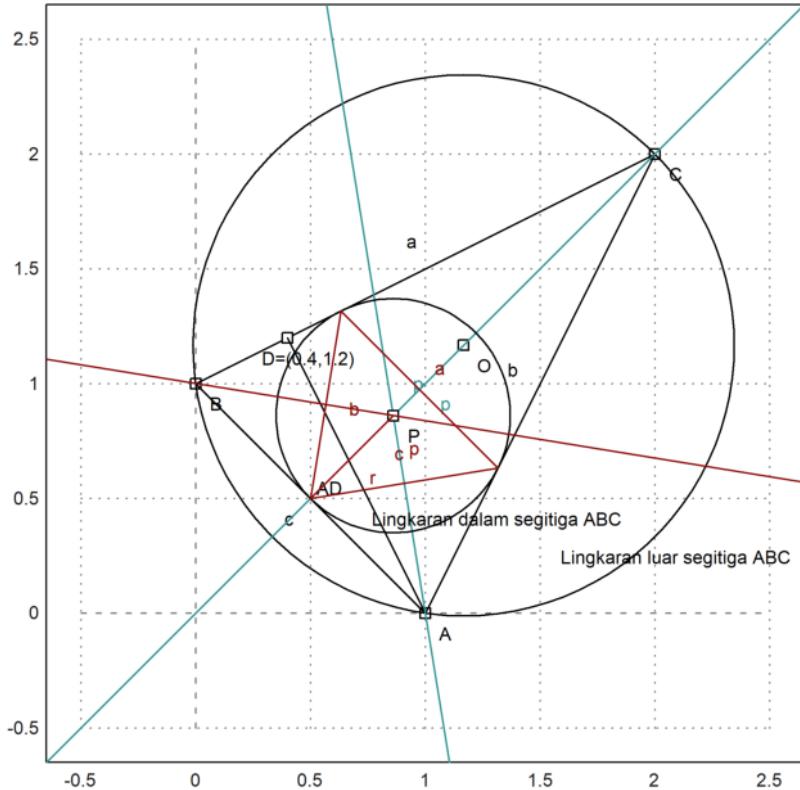
```
[-0.264911, -1.63246, -1.63246]
```

```
>color(2); plotLine(k):
```



4. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>plotSegment(P, L, "r") :
```



Contoh 2: Geometri Smbolik

Kita dapat menghitung geometri tepat dan simbolis menggunakan Maxima.

Geometri file.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, sekarang kita dapat menggunakan perhitungan simbolik.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan penghitungan simbolik.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

$[-1, 2, 2]$

Kita bisa mendapatkan persamaan untuk sebuah garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$2y - x = 2$$

$$\left[y = \frac{x}{2} + 1 \right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A, [x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$(x_1 - 1) y - x y_1 = -y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

$$[2, 1, 2]$$

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ - & - \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5} \right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}} \right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

$$1.178511301977579$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y) [1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 ga
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{5} + 2}{6}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{5} + 2}{6} \right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

$$[0.86038, 0.86038]$$

Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

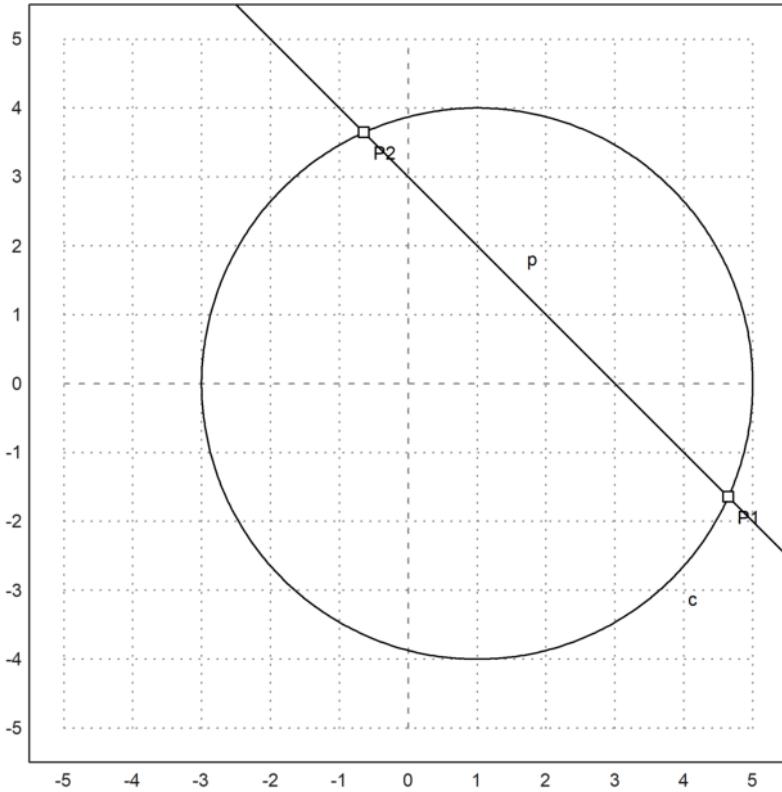
```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran mengembalikan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2,
```

$$[4.64575, -1.64575]
[-0.645751, 3.64575]$$

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Hal yang sama di Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A, 4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\sqrt{7} + 2, 1 - \sqrt{7} \right], \left[2 - \sqrt{7}, \sqrt{7} + 1 \right] \right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsumur yang sama adalah sama besar.

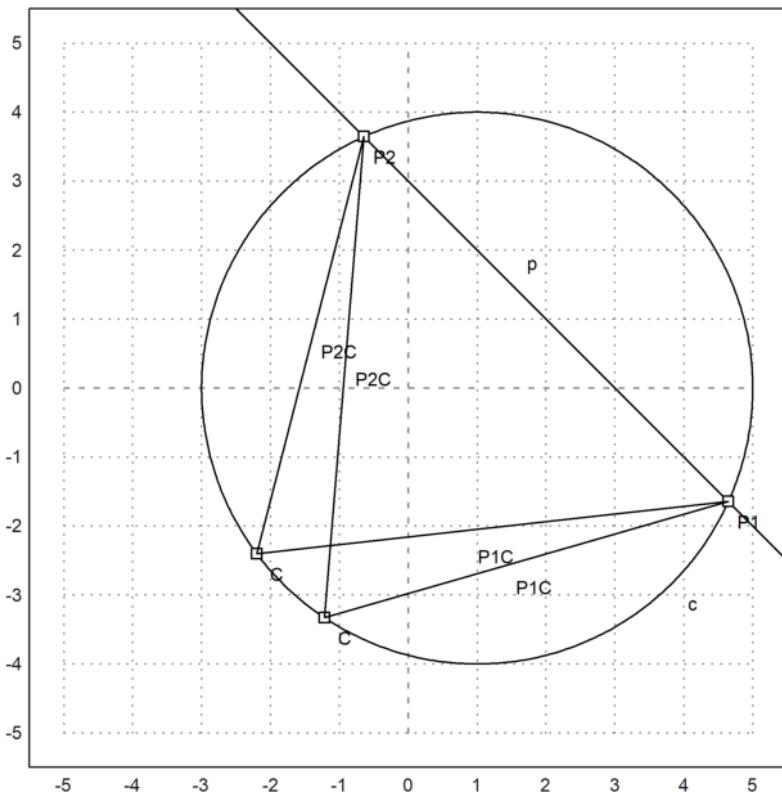
```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degrprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

$69^\circ 17' 42.68''$

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>deprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

$69^\circ 17' 42.68''$

```
>insimg;
```

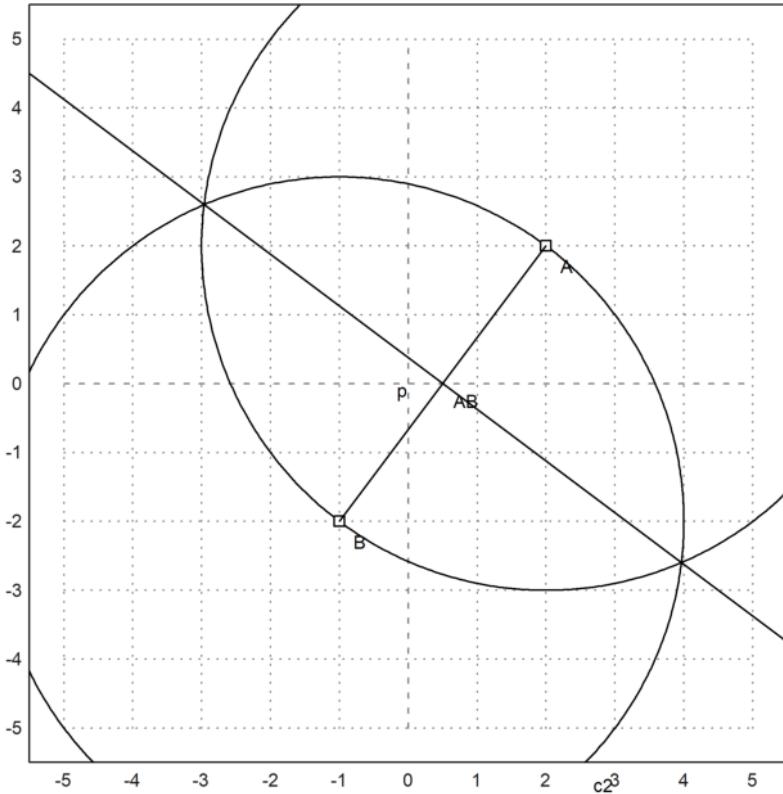


Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melalui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l);
```



Selanjutnya, kita melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup terlibat. Tapi kita bisa menyederhanakan, jika kita menyelesaikan y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y = \frac{-(2b_1 - 2a_1)x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2b_2 - 2a_2} \right]$$

Ini memang sama dengan tengah tegak lurus, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y = \frac{-(2b_1 - 2a_1)x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2b_2 - 2a_2} \right]$$

```
>h &= getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y = \frac{(b_2 - a_2)x - a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 - a_1} \right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1 - a_1)}{(b_2 - a_2)} \times \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = -1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus. **Contoh 3: Rumus Heron**

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = (a+b+c)/2.$$

Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>sol &= solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x, y])
```

[]

Ekstrak solusi y

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $ysol
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
ysol &= y with sol[2][2]; $ysol ...
^
```

Kita mendapatkan formula Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H(a, b, [1, 0, 4]) = \frac{|a| |ysol|}{2}$$

Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```

Variable or function ysol not found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
H:
    useglobal; return abs(a)*abs(ysol)/2
Error in:
H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5 ...
^

```

Dan jelas juga, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisinya 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (
```

```

Variable or function ysol not found.
Error in expression: 3*abs(ysol)/2
%ploteval:
y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
s=%ploteval(g$,t,args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
dw/n,dw/n^2,dw/n,auto,args());

```

Kasus umum juga berfungsi.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

```

Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c) ...
^

```

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana $b + c = d$ untuk beberapa konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

```

Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1 ...
^

```

Dan membuat persamaan seperti ini

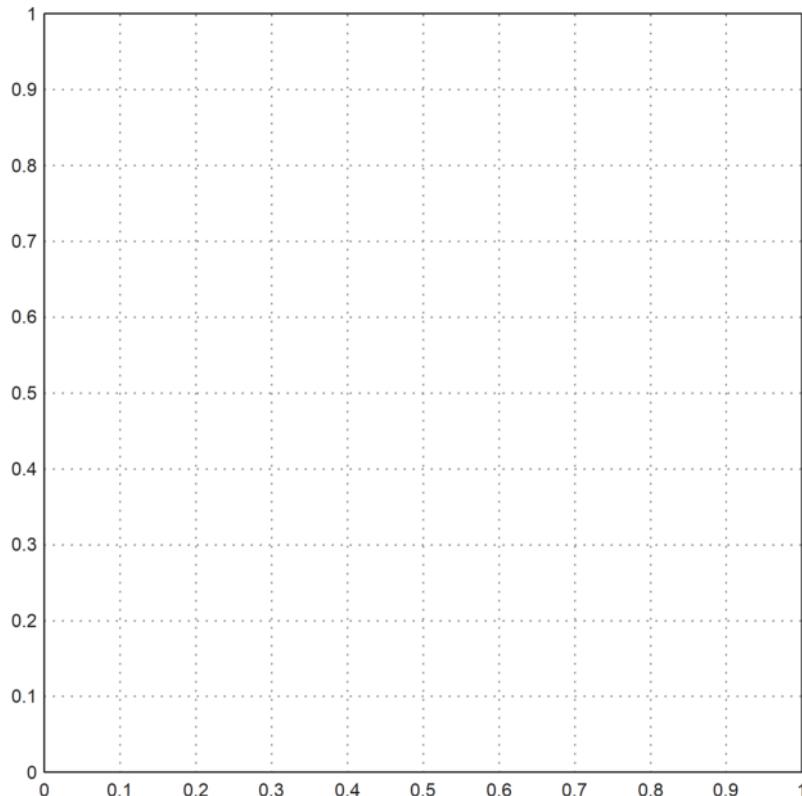
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

0

0

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Diketahui bahwa kita mendapatkan ellips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum ellips ini, yaitu.

$$\frac{(x - x_m)^2}{u^2} + \frac{(y - y_m)^2}{v^2} = 1,$$

di mana (x_m, y_m) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{a^2}{d^2}$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk $x = 0$. Jadi luas segitiga dengan $a + b + c = d$ adalah maksimal, jika sama sisi. Kami ingin mendapatkan ini secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{a y_{sol}^2}{2} = 0, 0 = 0 \right]$$

Kami mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusi $a=b=c=d/3$.

```
> $solve(eqns, [a,b])
```

$$[[a = 0, b = \%r_1]]$$

Ada juga metode Lagrange, memaksimalkan $H(a,b,c)^2$ terhadap $a+b+c=d$.

```
>& solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...  
> diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]  
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
... la,      diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la]) ...  
^
```

Kita bisa membuat plot situasinya.

Pertama, atur poin di Maxima

```
> A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

Maxima said:

```
part: invalid index of list or matrix.  
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
A &= at([x,y],sol[2]); $A ...  
^
```

```
> B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[0,0]$$

$$[a,0]$$

Kemudian atur rentang plot, dan plot poinnya.

```
> setPlotRange(0,5,-2,3); ...  
> a=4; b=3; c=2; ...  
> plotPoint(mxmeval("B"), "B"); plotPoint(mxmeval("C"), "C"); ...  
> plotPoint(mxmeval("A"), "A");
```

Variable a1 not found!

Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in Evaluate, superfluous characters found.

```

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Error in:
... otPoint(mxmeval("C"), "C"); plotPoint(mxmeval("A"), "A"): ...
^

```

Plot segmennya.

```

>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):

```

```

Variable a1 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in Evaluate, superfluous characters found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Error in:
plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); plotSegment(mxmeval("B ...
^

```

Hitung tengah tegak lurus di Maxima.

```

>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);

```

Dan bagian tengah dari keliling.

```

>U &= lineIntersection(h,g);

```

Kita mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```

>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan

```

$$\frac{\sqrt{a_2^2 + a_1^2} \sqrt{a_2^2 + a_1^2 - 2 a a_1 + a^2}}{2 |a_2|}$$

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```

>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U")),mxmeval("distance(U,C)")):

```

```

Variable a2 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in ^
Error in expression: [a/2, (a2^2+a1^2-a*a1)/(2*a2)]
Error in:
plotPoint(U()); plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U")),mxmev ...
^

```

Menggunakan geometri, kita mendapatkan rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radius. Kita dapat memeriksa, apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan men faktorkannya hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
> $c^2 / sin(computeAngle(A, B, C))^2 | factor
```

$$\left[\frac{a_2^2 + a_1^2}{a_2^2}, 0, \frac{16 (a_2^2 + a_1^2)}{a_2^2} \right]$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis euler adalah garis yang ditentukan dari segitiga yang tidak sama sisi. Ini adalah garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk pusat ortosentrum, sirkumenter, pusat massa, titik Exeter, dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Untuk demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam segitiga.

Pertama, kami menentukan sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolik.

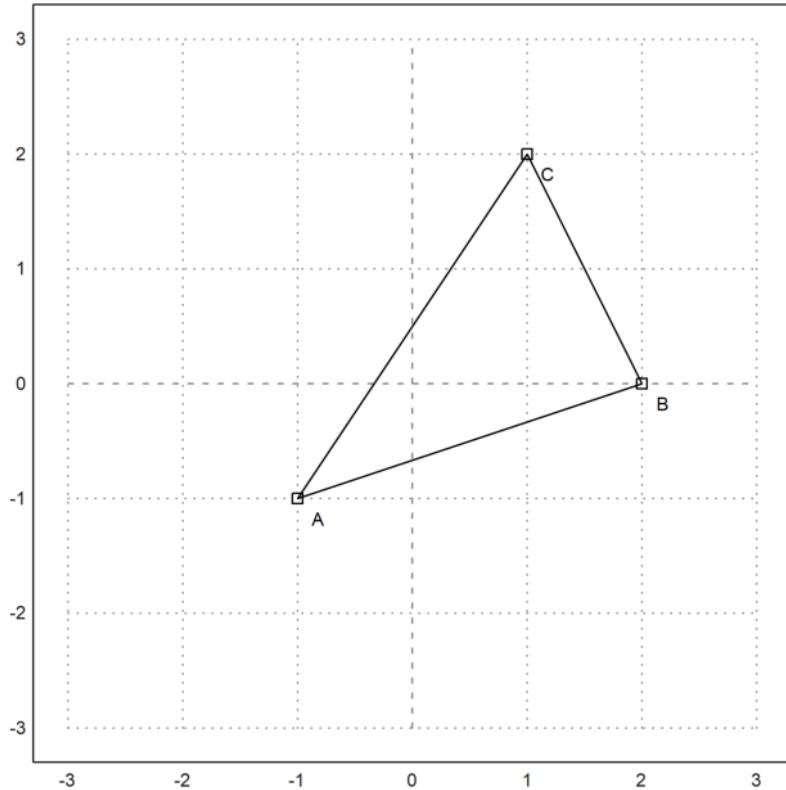
```
> A ::= [-1, -1]; B ::= [2, 0]; C ::= [1, 2];
```

Untuk memplot objek geometris, kami menyiapkan area plot, dan menambahkan poin ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
> setPlotRange(3); plotPoint(A, "A"); plotPoint(B, "B"); plotPoint(C, "C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi segitiga.

```
> plotSegment(A, B, ""); plotSegment(B, C, ""); plotSegment(C, A, "");
```



Berikut adalah luas segitiga menggunakan rumus determinan. Tentu saja kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien dari sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

$$[-1, 3, -2]$$

Dan juga dapatkan rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3y - x = -2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}}$$
$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung sirkit ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

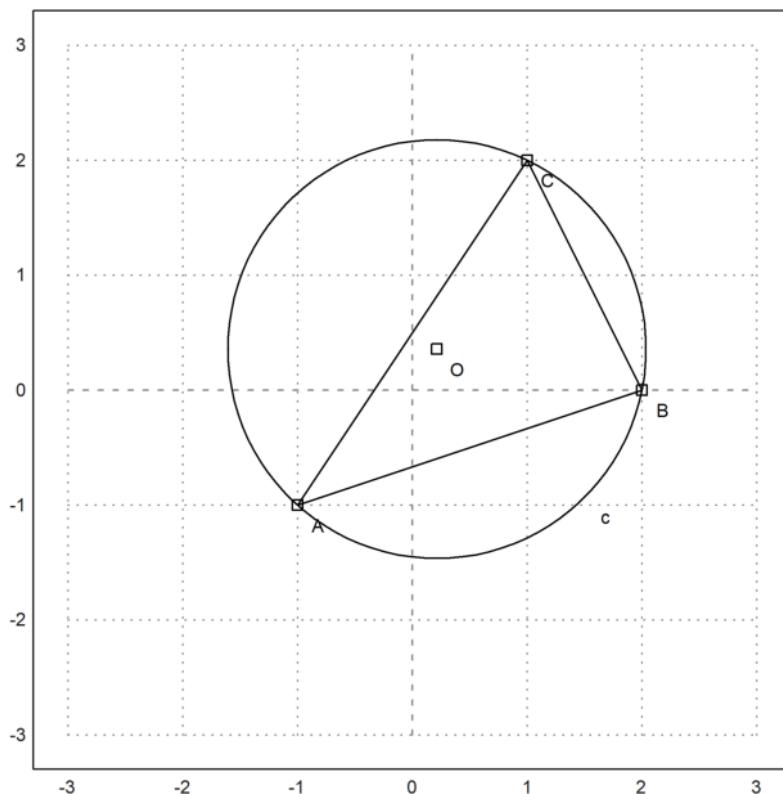
$$\left(y - \frac{5}{14}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{14}\right)^2 = \frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolik. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (orthocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...  
> perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7}, \frac{2}{7} \right]$$

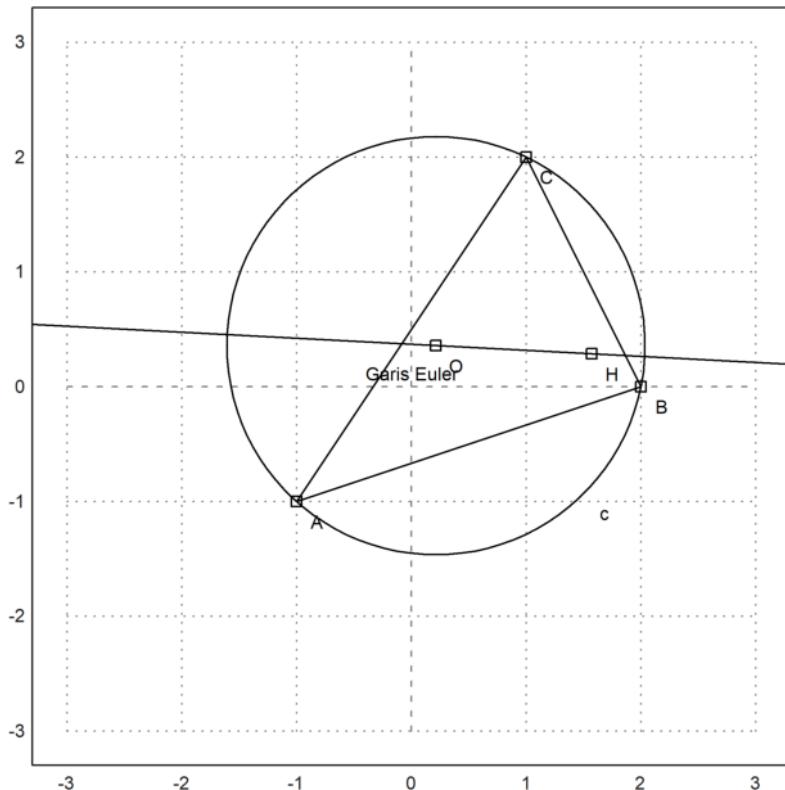
Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19y}{14} - \frac{x}{14} = -\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kita.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler");
```

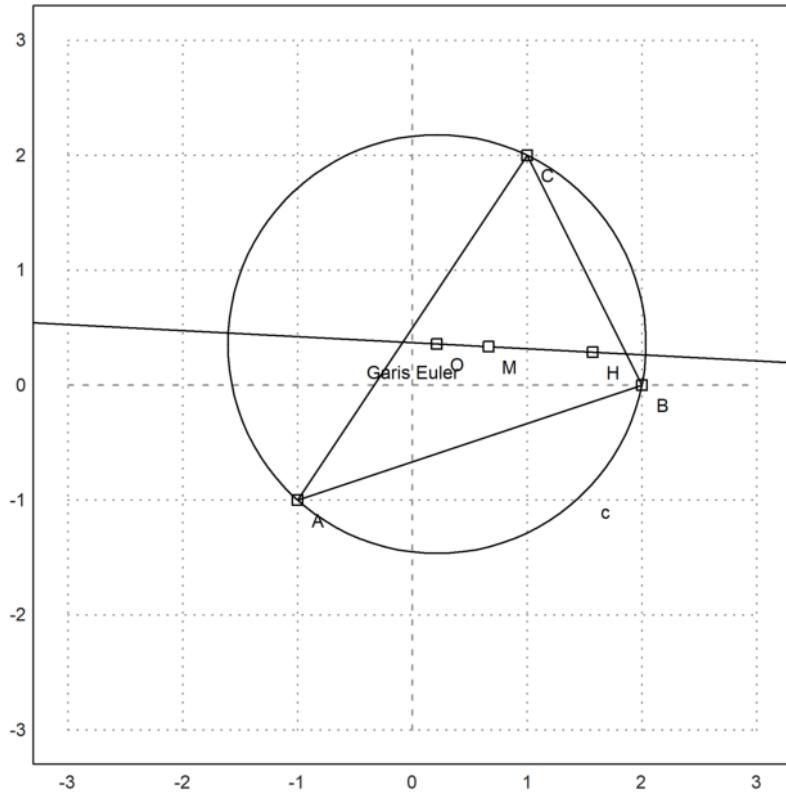


Pusat gravitasi harus berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(), "M") // titik berat
```



Teorinya mengatakan bahwa $MH=2*MO$. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai ini.

```
>$distance(M, H) / distance(M, O) | radcan
```

$$2$$

Fungsinya termasuk fungsi untuk sudut juga.

```
>$computeAngle(A, C, B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right)$$

$60^\circ 15' 18.43''$

Persamaan untuk pusat lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A, C, B), angleBisector(C, B, A)) | radcan; $Q
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}} + 1\right) \sqrt{5} \sqrt{13} - 15 \sqrt{2} + 3}{14}, \frac{(\sqrt{2} - 3) \sqrt{5} \sqrt{13} + 5 2^{\frac{3}{2}} + 5}{14} \right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi jari-jari lingkaran yang tertulis.

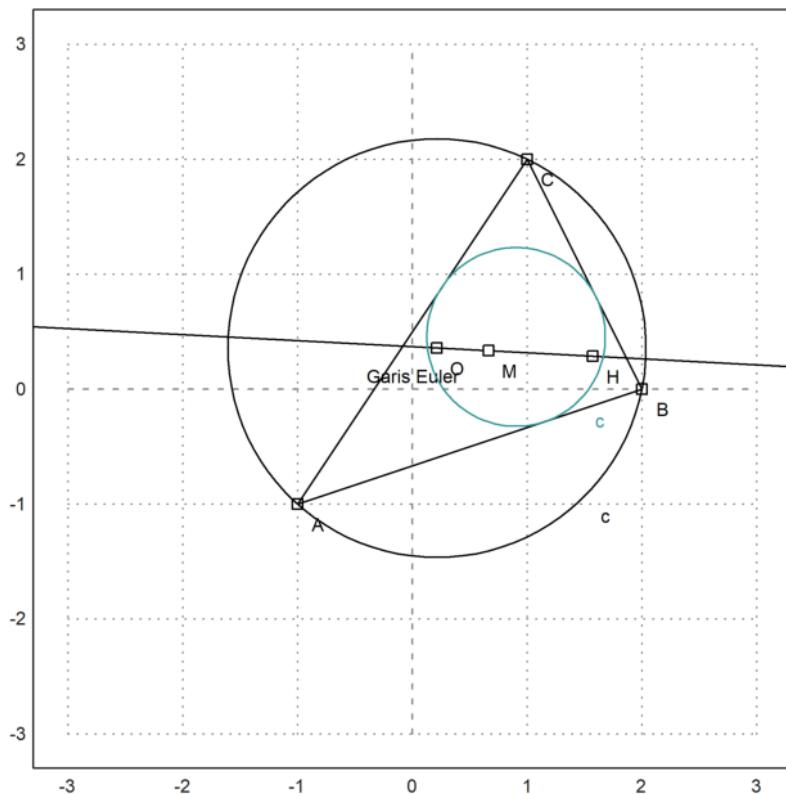
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{(-41\sqrt{2} - 31)\sqrt{5}\sqrt{13} + 115\sqrt{2} + 614}}{7\sqrt{2}}$$

```
>LD &= circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>color(5); plotCircle(LD());
```



Parabola

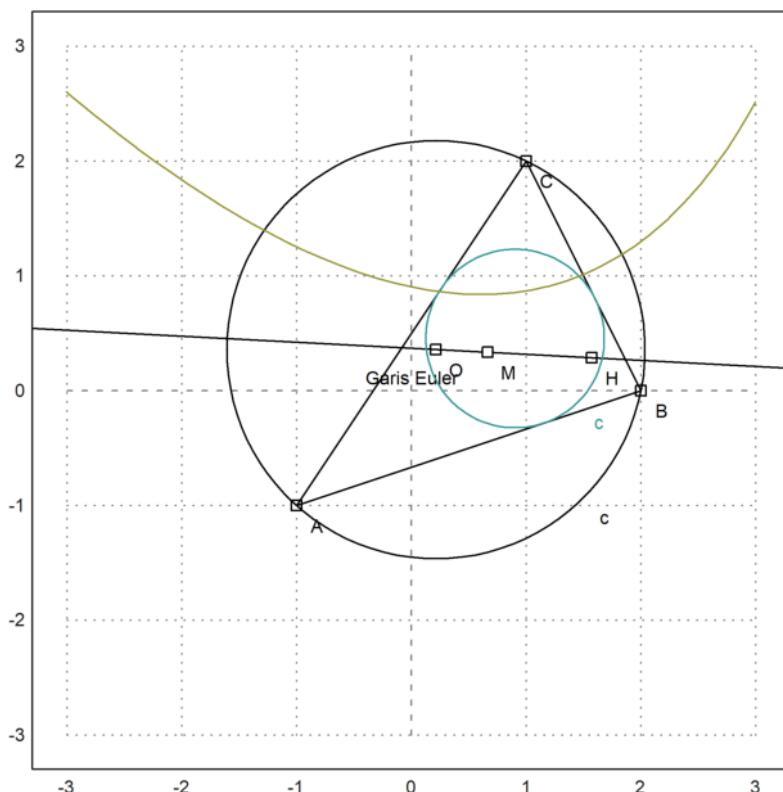
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}} - \sqrt{(2-y)^2 + (1-x)^2} = 0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



Ini seharusnya menjadi beberapa fungsi, tetapi pemecah default Maxima dapat menemukan solusi hanya, jika persamaan kita kuadratkan. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

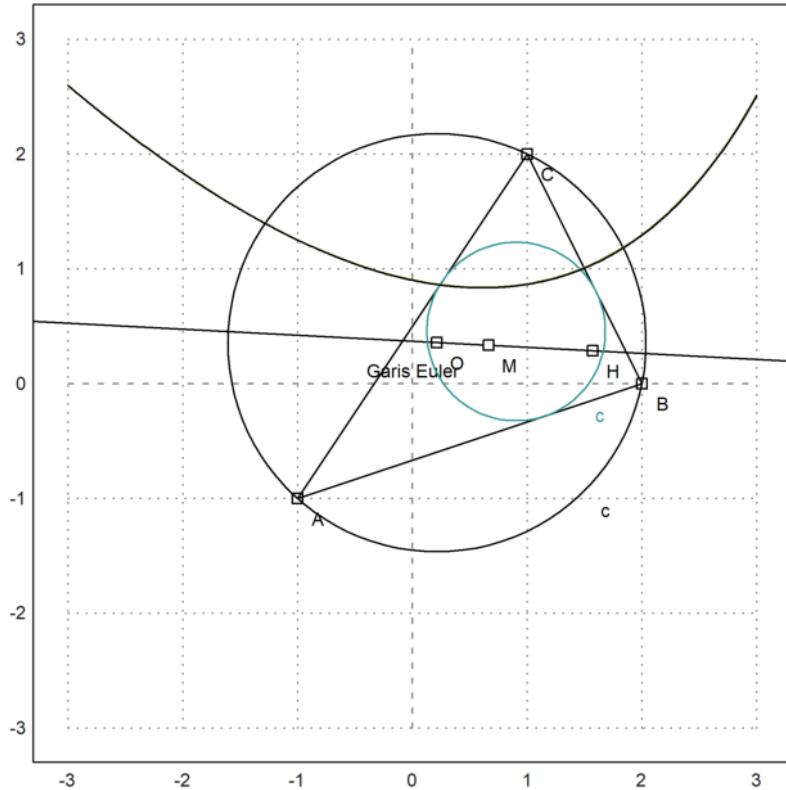
$$\begin{aligned}y &= -3x - \sqrt{70}\sqrt{9-2x} + 26, \\y &= -3x + \sqrt{70}\sqrt{9-2x} + 26\end{aligned}$$

Solusi pertama adalah

$$y = -3x - \sqrt{70}\sqrt{9-2x} + 26$$

Menambahkan solusi pertama ke pertunjukkan plot, bahwa itu memang jalan yang kita cari. Teori mengatakan kepada kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```



```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g(x) = -3x - \sqrt{70}\sqrt{9-2x} + 26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$\sqrt{1503 - 54\sqrt{11}\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T, lineThrough(A, B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80 - 3\sqrt{11}\sqrt{70}}{10}, \frac{20 - \sqrt{11}\sqrt{70}}{10} \right]$$

```
>dU2AB &= distance(T, U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jarak T ke AB
```

$$\sqrt{1503 - 54\sqrt{11}\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Ini terinspirasi oleh ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya "Proporsi Agung", Wildberger mengusulkan untuk menggantikan pengertian klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadransi dan penyebaran. Dengan menggunakan ini, memang mungkin untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

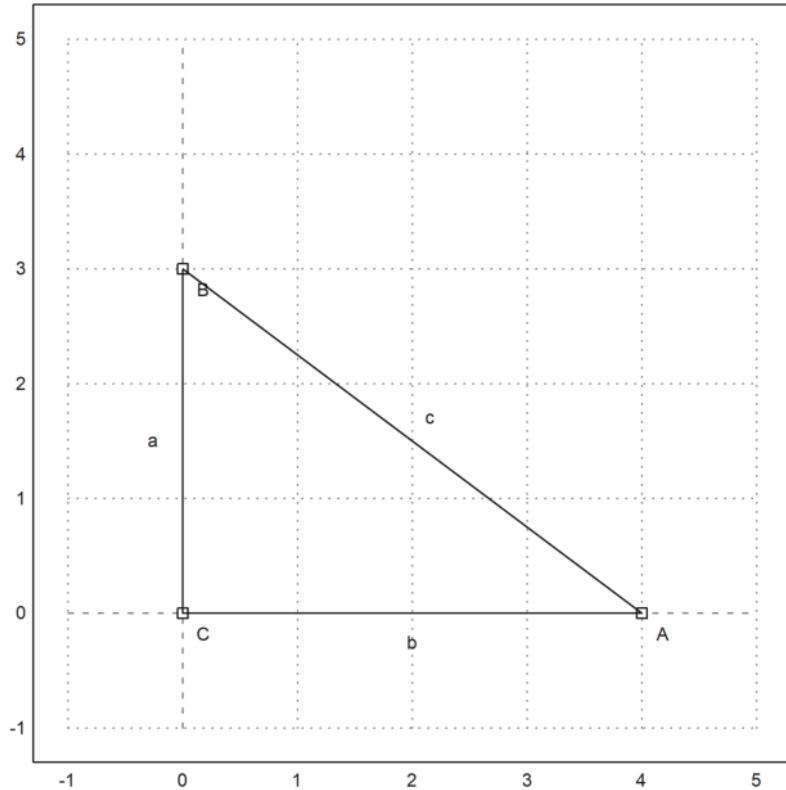
Berikut ini, saya memperkenalkan konsep, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional bahwa perhitungan dapat dilakukan dengan kertas dan pensil saja. Anda diundang untuk memeriksa hasil tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa perhitungan rasional simbolis sering kali menghasilkan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang mengevaluasi ke pendekatan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pendahuluan pertama, kami menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg(30);
```



Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana w_a adalah sudut di A. Cara biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan melakukan invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak secara perkiraan.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

$36^\circ 52' 11.63''$

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Pengertian pertama dari trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Faktanya, itu hanyalah kuadrat jarak. Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadran sisi-sisinya.

Teorema Pythagoras menjadi $a+b=c$ lalu.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

$$25 = 25$$

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebarannya. Spread mengukur bukaan antar baris. Ini adalah 0, jika garis sejajar, dan 1, jika garis persegi panjang. Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara dua garis.

Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadran dari segitiga persegi panjang mana pun dengan satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Ini lebih mudah dihitung daripada sudut, tentu saja. Tetapi Anda kehilangan properti yang sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita dapat mengubah nilai perkiraan sudut wa menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

$$9/25$$

Hukum cosinus dari trigonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

$$(c + b - a)^2 = 4bc(1 - s_a)$$

Di sini a , b , dan c adalah kuadran dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah sebaran di sudut A. Sisi a , seperti biasa, berlawanan dengan sudut A.

Hukum ini diimplementasikan dalam file geometry.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left[\left(bb - aa + \frac{7}{6} \right)^2, \left(bb - aa + \frac{7}{6} \right)^2, \left(bb - aa + \frac{5}{3\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \left[\frac{14bb(1 - saa)}{3}, \frac{14bb(1 - saa)}{3}, \frac{52^{\frac{3}{2}}bb(1 - saa)}{3} \right]$$

Dalam kasus kami, kita mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di A. Untuk melakukan ini, kita menghasilkan crosslaw untuk kuadran a , b , dan c , dan menyelesaiannya untuk sebaran yang tidak diketahui sa .

Anda dapat melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasilnya, kami sudah mendapatkannya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$1024 = 1600(1 - x)$$

$$\left[x = \frac{9}{25} \right]$$

Kami sudah tahu ini. Definisi penyebaran adalah kasus khusus dari hukum lintas hukum. Kita juga bisa menyelesaikan ini untuk umum a, b, c . Hasilnya adalah rumus yang menghitung sebaran sudut segitiga berdasarkan kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[\frac{168 bb x + 36 bb^2 + (-72 aa - 84) bb + 36 aa^2 - 84 aa + 49}{36}, \frac{168 bb x + 36 bb^2 + (-72 aa - 84) bb + 36 aa^2 - 84 aa + 49}{36}, \dots \right]$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah ditentukan dalam file geometry.e Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita bisa menggunakan untuk menghitung sudut segitiga bersisi

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

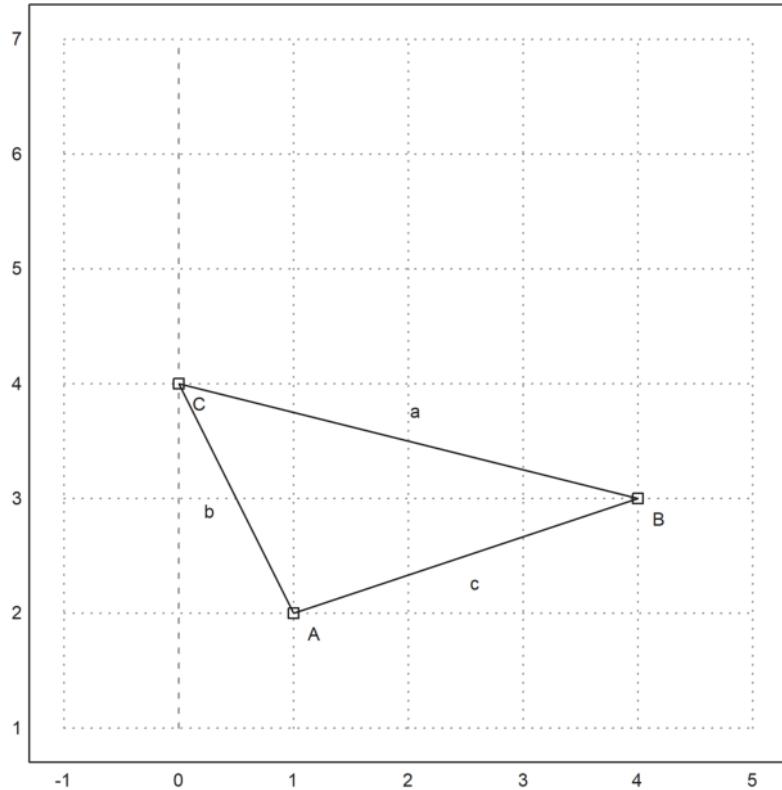
```
>degsprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

$$67^\circ 47' 32.44''$$

Contoh lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih canggih. Kami mengatur tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Menggunakan Pythagoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan jarak fungsi file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A, B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memiliki fungsi kuadrans antara dua titik.

Dalam contoh berikut, karena $c + b \neq a$, segitiga tidak persegi panjang.

```
>c &= quad(A, B); $c, b &= quad(A, C); $b, a &= quad(B, C); $a,
```

$$10$$

$$5$$

$$17$$

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan perkalian titik dari dua vektor. Hasilnya adalah beberapa pendekatan floating point.

```
>wb &= computeAngle(A, B, C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\sqrt{17}}\right)$$

$$32.4711922908$$

Menggunakan pensil dan kertas, kita bisa melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kami memasukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan menyelesaikan untuk x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x),
```

$$4 = 200 (1 - x)$$

$$\left[x = \frac{49}{50} \right]$$

Artinya, fungsi penyebaran yang didefinisikan dalam "geometry.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Itu menyelesaikan istilah sin (arccos (...)) menjadi hasil pecahan. Kebanyakan siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita mendapatkan sebaran di B, kita bisa menghitung tinggi ha di sisi a. Ingat bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

Menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita bisa menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Formula Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung spread di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kami menghitung luas area yang dikuadratkan ("kuadrea"?), Memfaktorkannya dengan Maxima, dan kami mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{-c^4 - (-2b^2 - 2a^2)c^2 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4}{4a^2c^2}$$
$$\frac{(-c + b + a)(c - b + a)(c + b - a)(c + b + a)}{16}$$

Aturan Triple Spread

Kerugian dari spread adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut serupa. Namun, tiga sebaran segitiga memenuhi aturan "penyebaran rangkap tiga" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc + sb + sa)^2 = 2(sc^2 + sb^2 + sa^2) + 4sa sb sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang bertambah menjadi 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Sejak penyebaran

$$\alpha, \pi - \alpha$$

sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga benar, jika

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Misalnya, kita dapat menghitung sebaran sudut 60° . Ini $3/4$. Persamaan memiliki solusi kedua, di mana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x = \frac{3}{4}, x = 0 \right]$$

Sebaran 90° jelaslah 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90° , penyebarannya menyelesaikan persamaan penyebaran rangkap tiga dengan $a, b, 1$. Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan $a+b=1$.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$(y + x + 1)^2 = 2(y^2 + x^2 + 1) + 4xy$$

$$[x = 1 - y]$$

Karena penyebaran $180^\circ-t$ sama dengan penyebaran t , rumus penyebaran rangkap tiga juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau perbedaan dari dua sudut lainnya.

Jadi kita bisa menemukan sebaran sudut berlipat ganda. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami menjadikannya sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

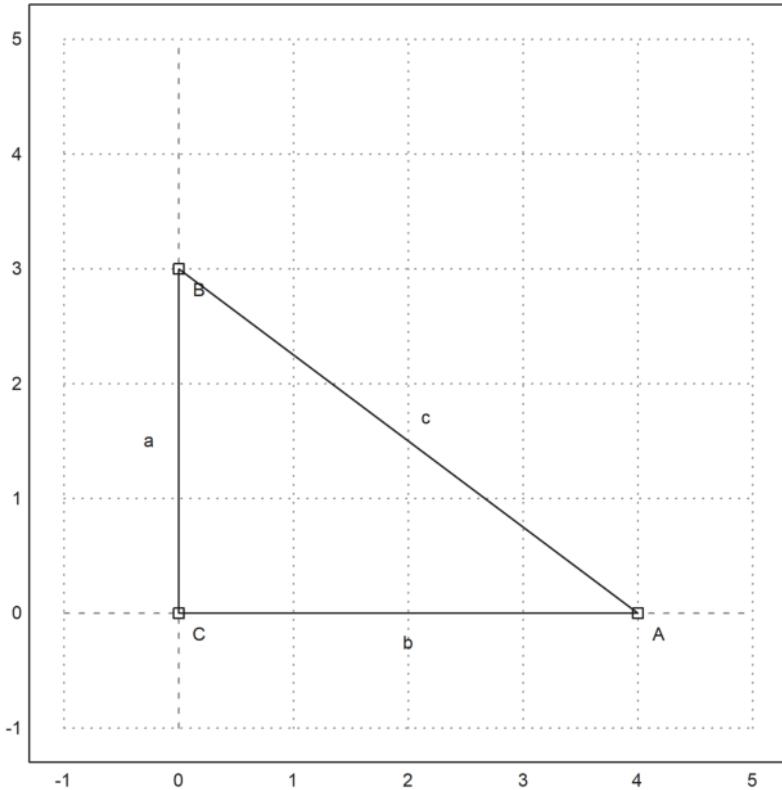
$$[x = 4a - 4a^2, x = 0]$$

$$- 4(a - 1)a$$

Pembagi Sudut

Ini situasinya, kita sudah tahu.

```
>C:=[0,0]; A:=[4,0]; B:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Mari kita hitung panjang bisektor sudut pada A. Tapi kita ingin menyelesaiakannya untuk umum a, b, c.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita menghitung sebaran sudut terbagi di A, menggunakan rumus sebaran rangkap tiga. Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kami harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbagi 180° -wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(% ,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\left(2x + \frac{a}{b+a}\right)^2 = 2 \left(2x^2 + \frac{a^2}{(b+a)^2}\right) + \frac{4ax^2}{b+a}$$

$$\left[x = \frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a}, x = \frac{\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kami dapat mencetak sudut di Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

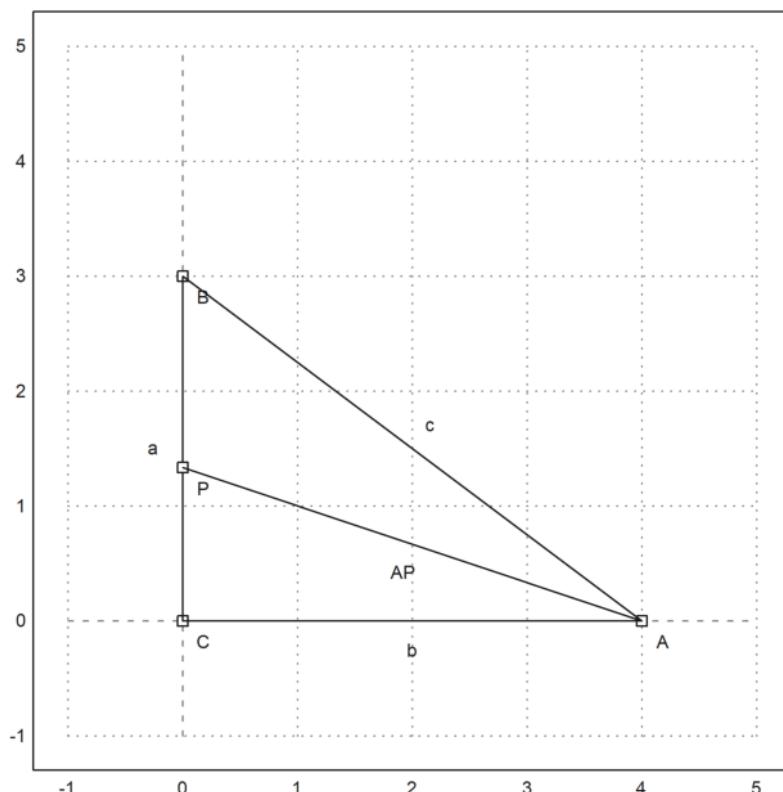
18°26'5.82''

Titik P adalah perpotongan dari garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0, tan(wa2)*4]
```

[0, 1.33333]

```
>plotPoint(P, "P"); plotSegment(A, P);
```



Mari kita periksa sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C, A, P), computeAngle(P, A, B)
```

0.321750554397

0.321750554397

Sekarang kita menghitung panjang bisektor AP.

Kita menggunakan teorema sinus di segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

memegang di segitiga apa pun. Persegi itu, itu diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

dimana a, b, c menunjukkan qudrance.

Karena BPA sebaran adalah $1-sa^2$, kita dapatkan darinya bisa / $1 = b / (1-sa^2)$ dan dapat menghitung bisa (kuadran garis-garis).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2b(b+a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

4.21637021356

4.21637021356

Kami juga dapat menghitung P menggunakan rumus spread.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b(\sqrt{b}\sqrt{b+a}-b-a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

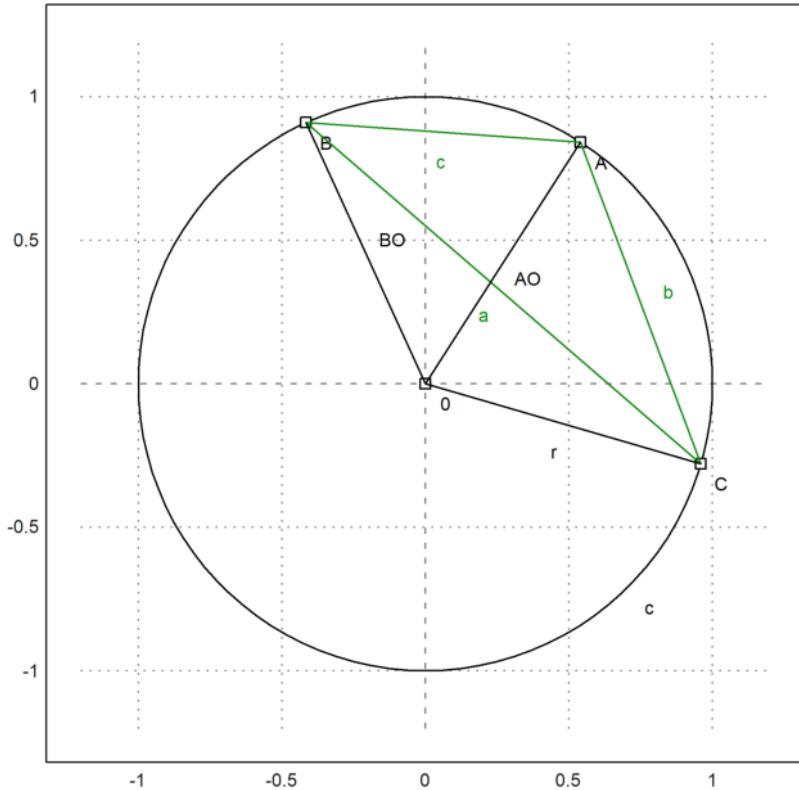
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

1.33333333333

Sudut Akord

Perhatikan situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0]; plotPoint(O,"O"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```



Kita bisa menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus sebaran rangkap tiga untuk sudut di pusat O untuk r . Jadi kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari keliling dalam hal kuadrat sisi. Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol yang kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{abc}{c^2 - 2bc + a(-2c - 2b) + b^2 + a^2}$$

Kita bisa menjadikannya sebagai fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk poin A, B, C kita.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Radiusnya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

Faktanya, penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut akord.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Sebenarnya sebarannya adalah $b/(4r)$, dan kita melihat bahwa sudut akor b adalah setengah dari sudut tengah.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

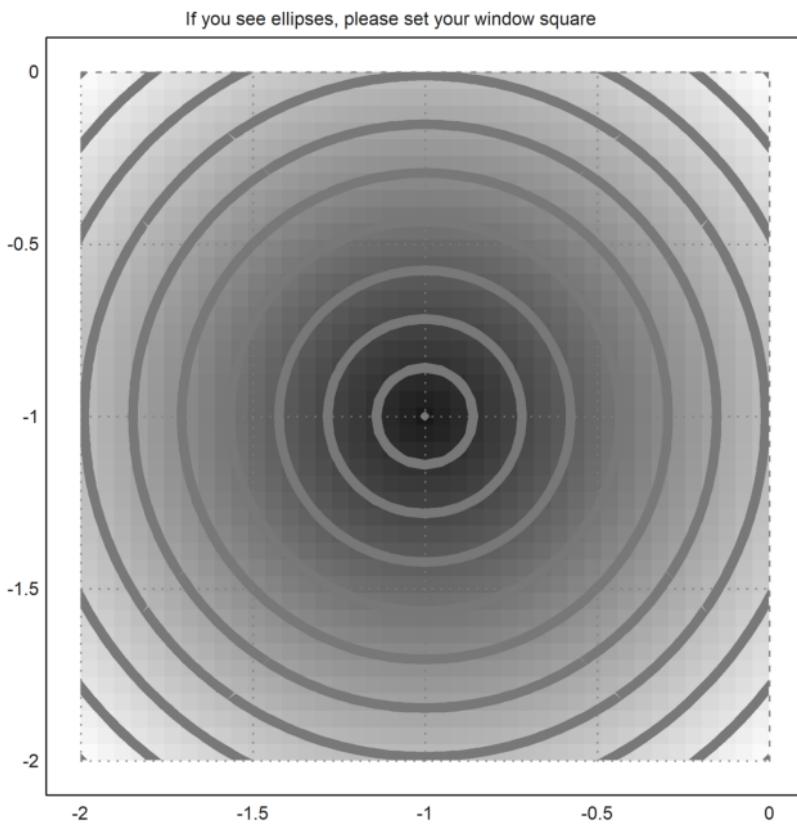
$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Catatan awal

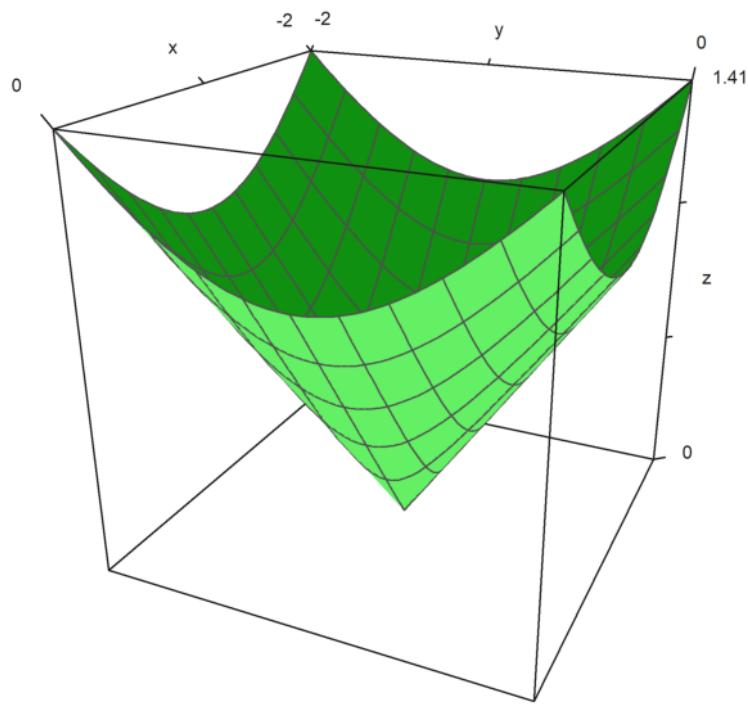
Fungsi yang, ke titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis level yang agak sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();  
>A=[-1,-1];  
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)  
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...  
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1", xmin=-2, xmax=0, ymin=-2, ymax=0) :
```

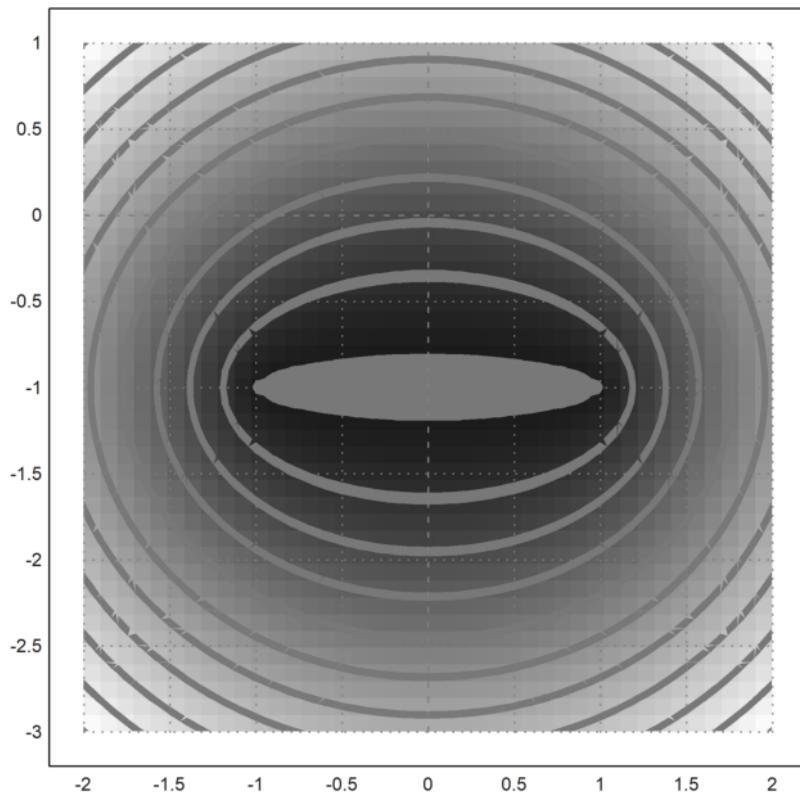


Tentu saja minimal 0 dicapai di A.

Dua titik

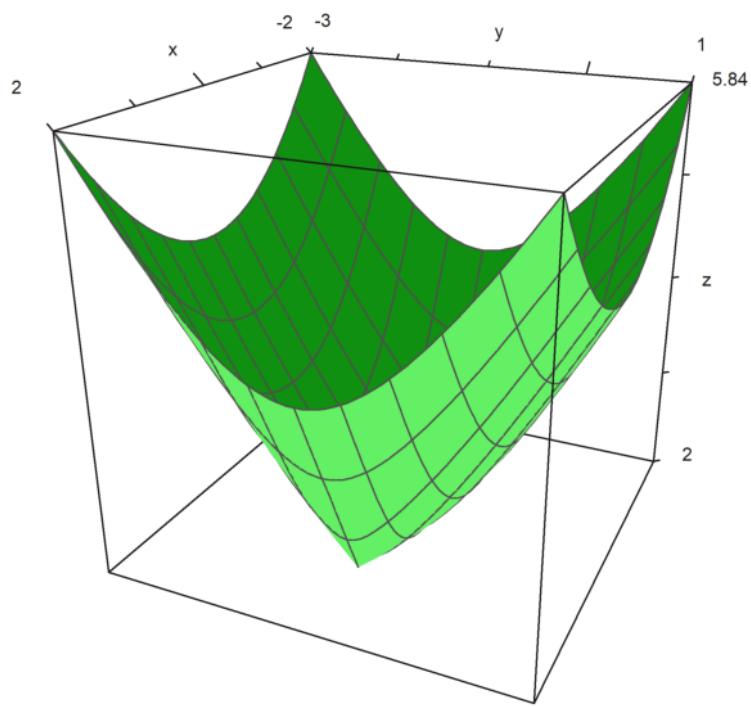
Sekarang kita melihat fungsi MA + MB dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah "fakta yang terkenal" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali untuk minimum AB yang konstan pada segmen [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



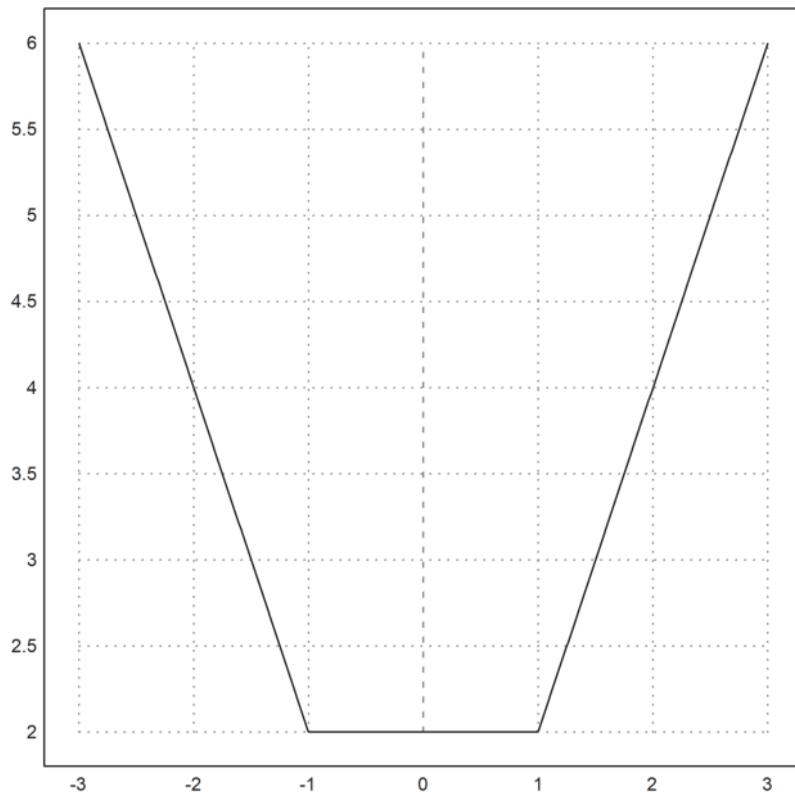
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2", xmin=-2, xmax=2, ymin=-3, ymax=1):
```



Batasan ke baris (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)", xmin=-3, xmax=3):
```



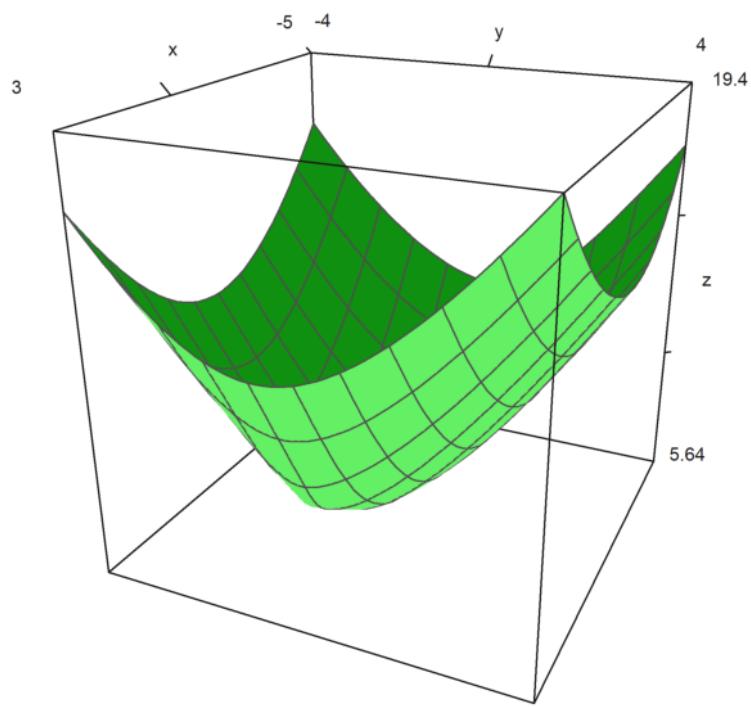
Tiga titik

Sekarang hal-hal menjadi kurang sederhana: Sedikit kurang diketahui bahwa $MA+MB+MC$ mencapai minimumnya pada satu titik bidang tetapi untuk menentukannya kurang sederhana:

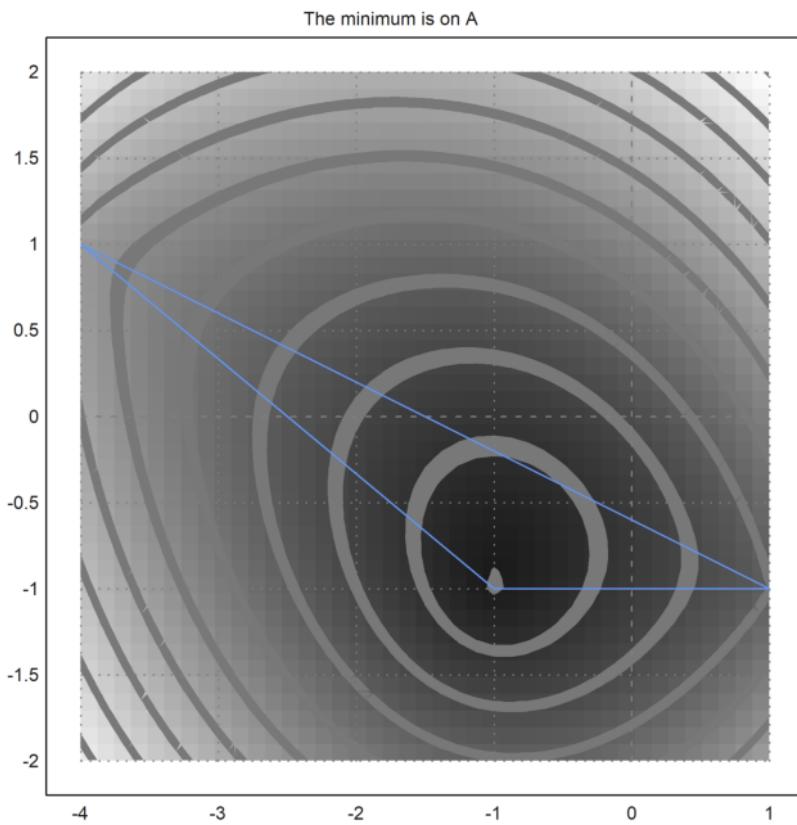
- 1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah dalam A), maka minimum tercapai pada titik ini (katakanlah AB+AC).

Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

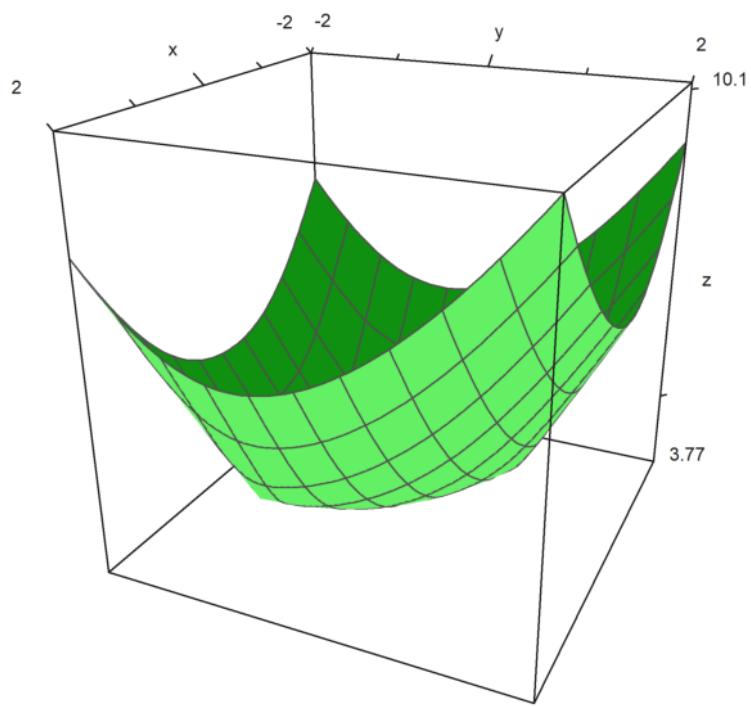


```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

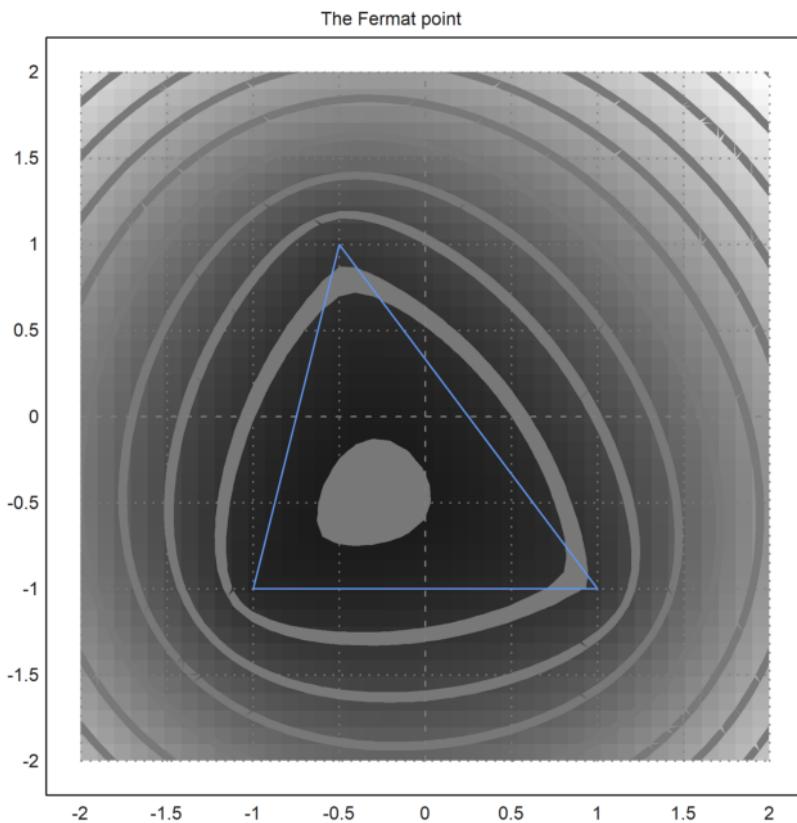


- 2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120° , minimum berada pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi ABC dengan sudut yang sama (lalu masing-masing 120°) :

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2);
```



```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)';
>plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```



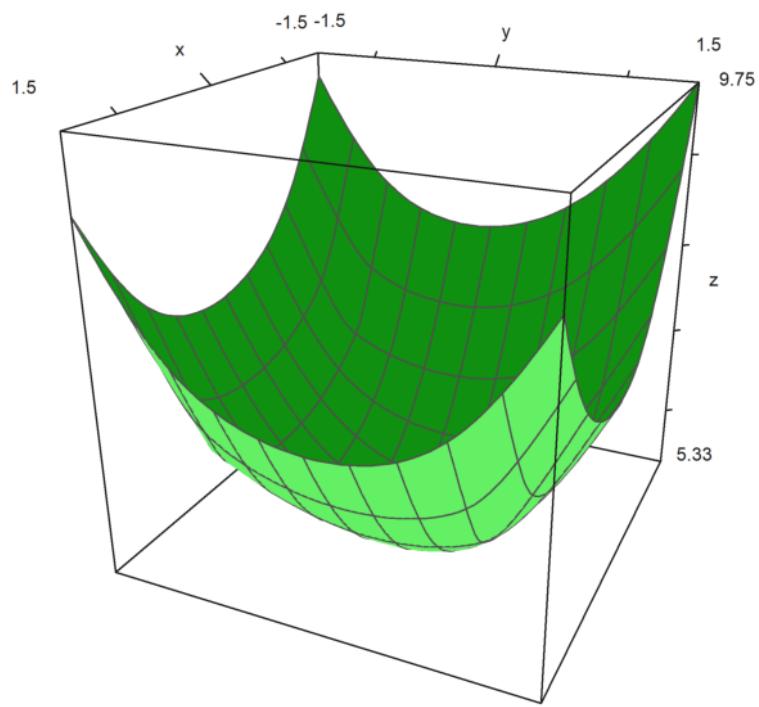
Merupakan kegiatan yang menarik untuk mewujudkan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; sebagai contoh, saya tahu soft tertulis di Java yang memiliki instruksi "garis kontur" ...

Semua ini di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Prancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada para penggila lainnya seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak penghasilan. Jadi titik unik F sehingga $FA + FB + FC$ minimal disebut titik Fermat segitiga. Tetapi tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat melakukannya! Pokoknya tradisinya adalah mencatat poin ini ...

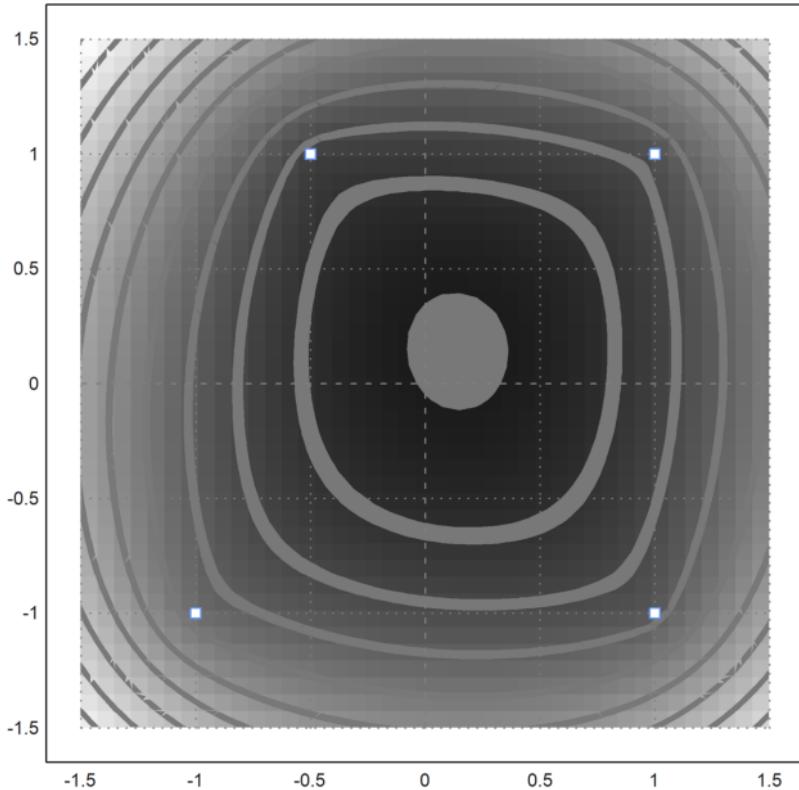
Empat titik

Langkah selanjutnya adalah menambahkan titik D ke-4 dan mencoba meminimalkan $MA + MB + MC + MD$; katakanlah bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```



```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);  
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);  
>insimg;
```



Masih ada minimum dan tidak ada yang dicapai pada simpul A, B, C atau D:

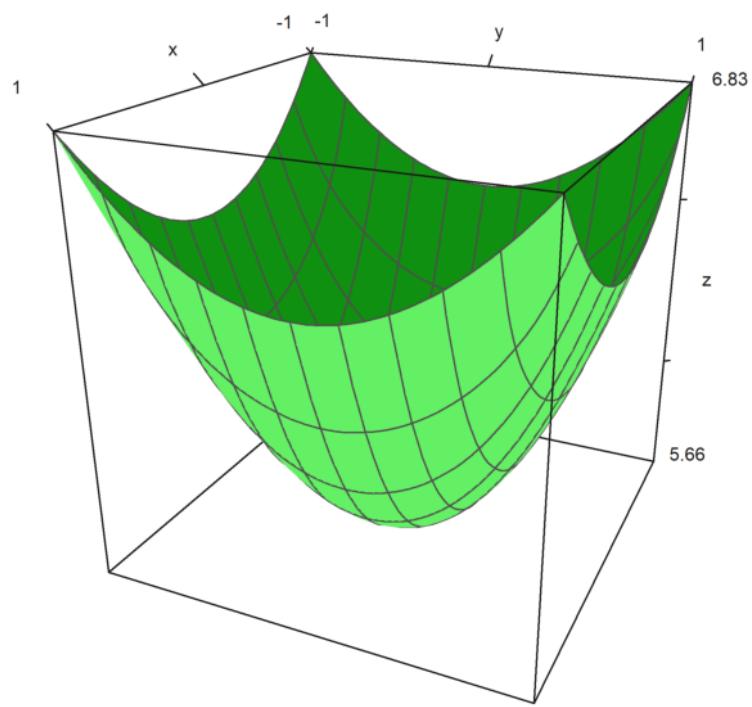
```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f", [0.2,0.2])
```

[0.142858, 0.142857]

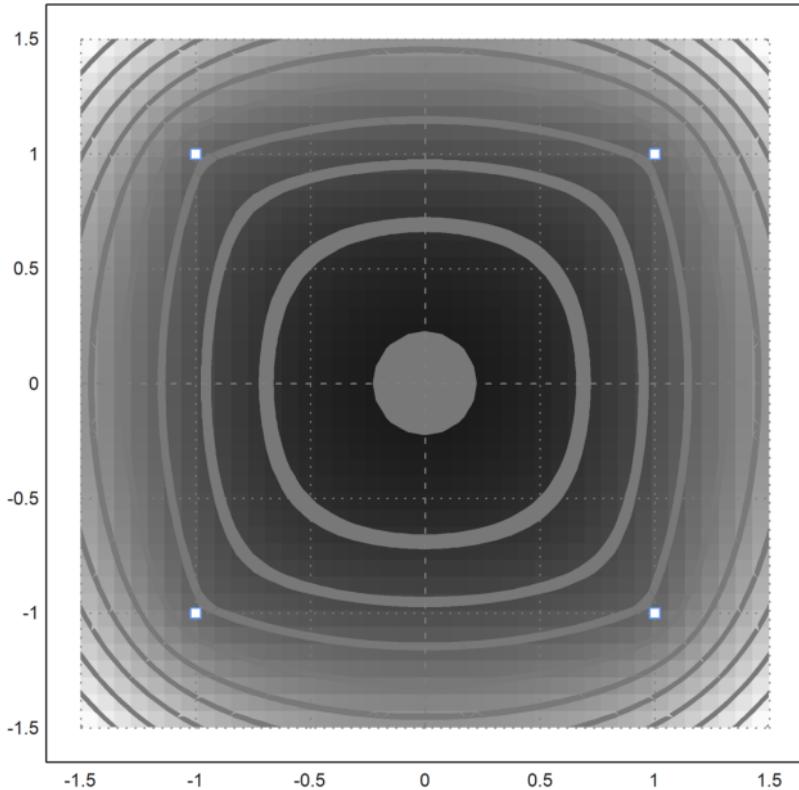
Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal rasional atau mendekati rasional ...

Sekarang ABCD adalah bujur sangkar, kami berharap bahwa titik optimal adalah pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```



```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda memiliki Povray diinstal, dan pvcgine.exe di jalur program.

Pertama kami menghitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah, Anda melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometry dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama, dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[ - a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

```
[ - a, - 1, 0]
```

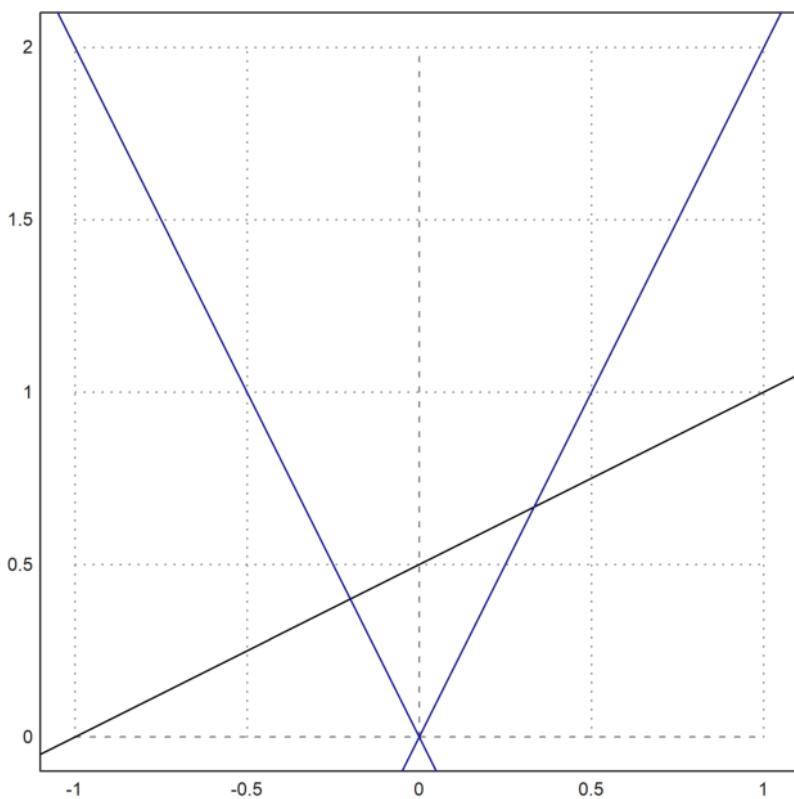
Lalu baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Kita merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);  
>color(black); plotLine(g(), "")  
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(), ""), plotLine(g2(), ""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 u}{a^2 + 1} - u\right)^2 + \frac{a^2 u^2}{(a^2 + 1)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5} - u\right)^2 + \frac{(2u-1)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran, di mana jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u = \frac{-\sqrt{5}\sqrt{a^2 + 1} + 2a^2 + 2}{4a^2 - 1}, u = \frac{\sqrt{5}\sqrt{a^2 + 1} + 2a^2 + 2}{4a^2 - 1} \right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

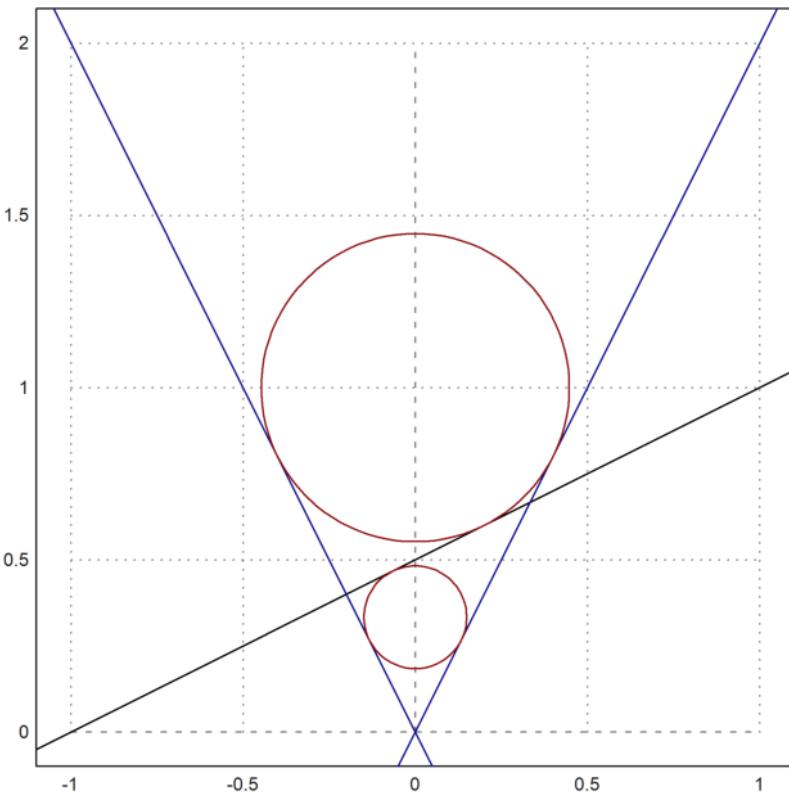
```
[0.333333, 1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071, 0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]), "");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]), "");
>insimg;
```



Contoh 8: Geometri Bumi

Di notebook ini, kami ingin melakukan beberapa komputasi bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu dulu.

```
>load spherical.e
```

Spherical functions for Euler.

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

$[-0.13569, 1.92657]$

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bola).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

S $7^{\circ}46.467'$ E $110^{\circ}23.050'$

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu bola ke bola lainnya pada bola ideal. Vektor ini adalah [heading, distance] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita mengalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7° .

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
65°20'26.60''  
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang bagus. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak yang begitu dekat hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA, Semarang)->" km", // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
88.0114026318 km
```

Ada fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk bumi yang elips. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA, Solo))
```

```
65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA, Semarang)+sangle(FMIPA, Solo, Semarang)+sangle(FMIPA, Semarang, Solo);
```

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2", //perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
2116.02948749 km^2
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA, Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kami juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Vektor berisi heading dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kami menggunakan svector. Untuk menambahkan vektor ke posisi, kami menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];  
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'  
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya 429,66 km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km", // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

431.565659488 km

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

294°17'2.85''

Namun, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, tetapi mengambil perkiraan jari-jari bumi di sepanjang jalan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

S 6°10.500' E 106°48.717'

Namun, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

S 6°10.500' E 106°48.717'

Tentunya kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan! Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kami jauh dari tujuan yang benar, jika kami menggunakan tajuk yang sama selama perjalanan kami.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh jaraknya, menggunakan heading ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya masih jauh.

```
>sposprint(p), skmpprint(esdist(p,Monas))
```

S 6°11.250' E 106°48.372'
1.529km

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada ketinggian yang sama.

```
> P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran dengan garis lintang 30°, tetapi jalur yang lebih pendek mulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

79.69°

Tapi, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah tujuan kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kami menyesuaikannya pada 1/10 dari jarak total.

```
>p=P1; dist=esdist(P1,P2); ...  
> loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

79.69°
81.67°
83.71°
85.78°
87.89°
90.00°
92.12°
94.22°
96.29°
98.33°

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti tajuk yang sama terlalu lama.

```
>skmpprint(esdist(p,P2))
```

0.203km

Kami mendapatkan perkiraan yang baik, jika kami menyesuaikan heading setelah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
> loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmpprint(esdist(p,Monas))
```

0.000km

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
> loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

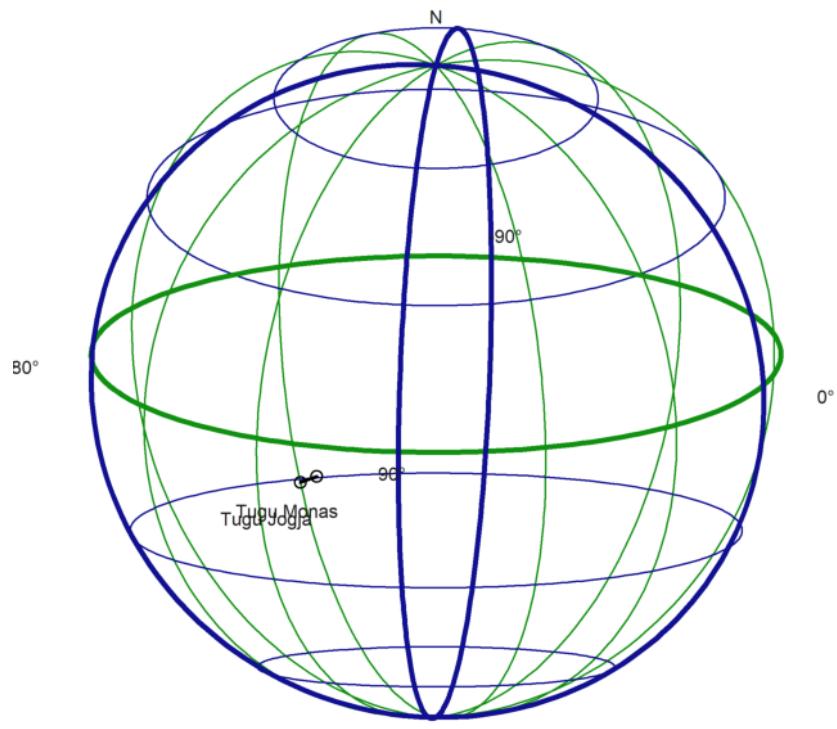
Kami menulis sebuah fungsi, yang menggambarkan bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

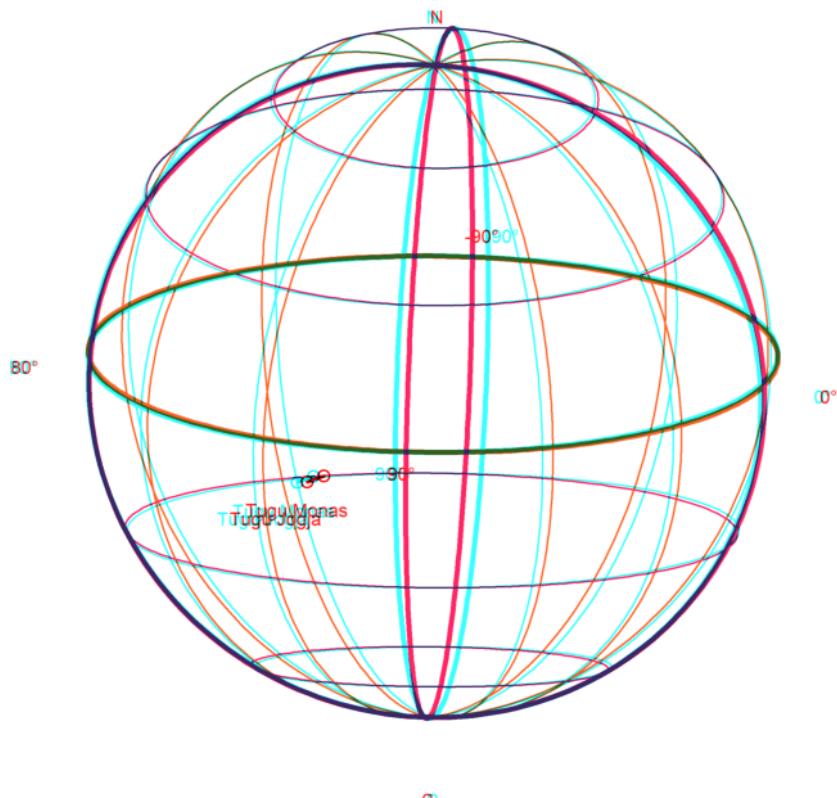
Sekarang plot semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan `plot3d` untuk mendapatkan tampilan anaglyphnya. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah / cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4) :
```



Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah $(360/n)$.
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan $(360/n)$.
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

- Misalkan persamaan parabolanya $y = ax^2 + bx + c$.
- Subsitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung

(sisinya-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.

- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

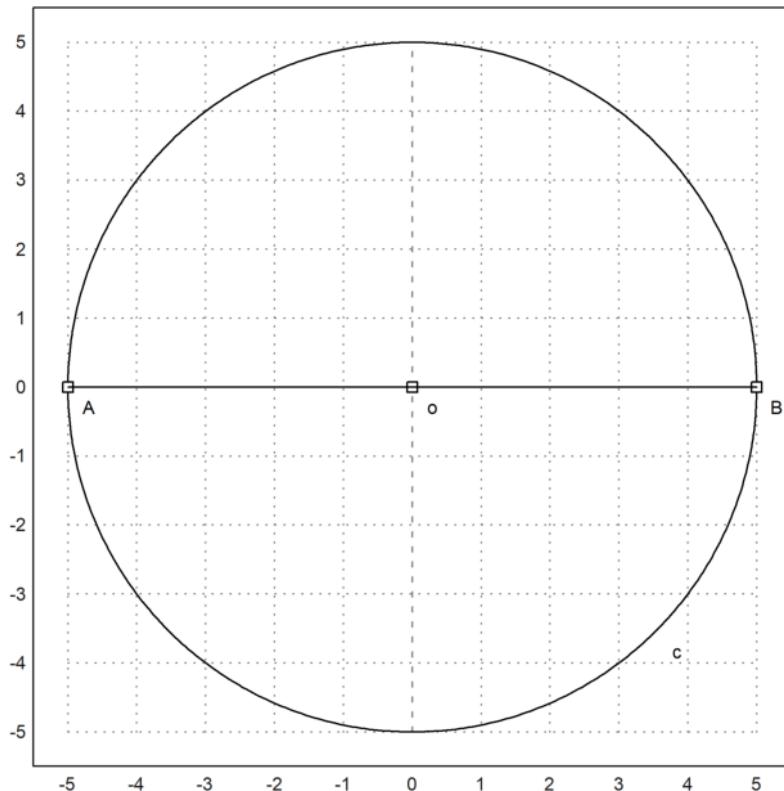
4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

Jawab:

1.

```
>o &:= [0,0]; c=circleWithCenter(o,5);
>color(1); setPlotRange(5); plotPoint(o); plotCircle(c);
>A=[-5,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[5,0]; plotPoint(B,"B");
>plotSegment(A,B,""):
```

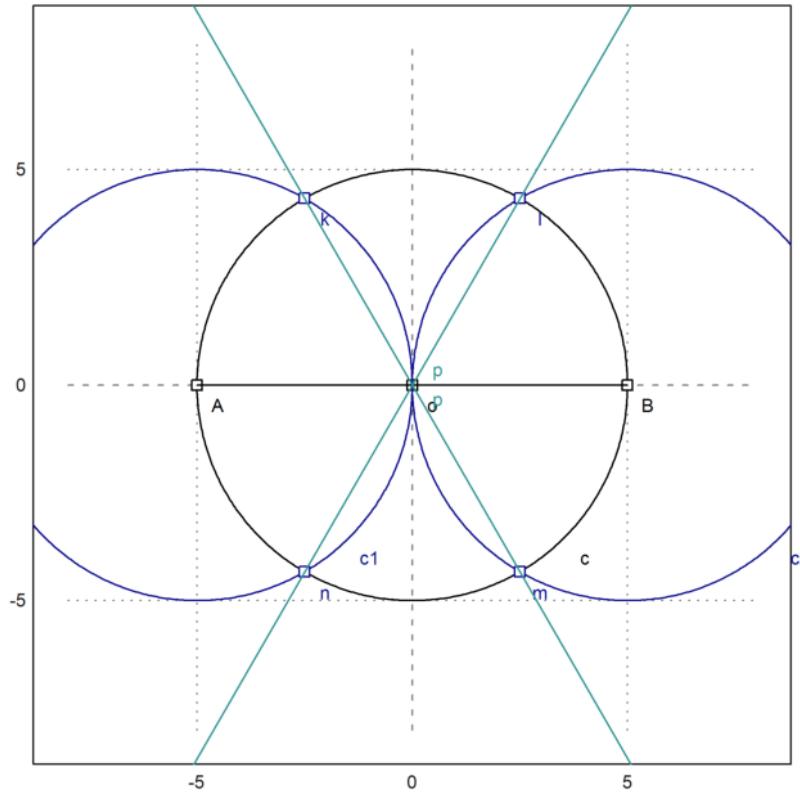


```
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,o));
>c2=circleWithCenter(B,distance(B,o));
>k=circleCircleIntersections(c1,c);
>l=circleCircleIntersections(c,c2);
>m=circleCircleIntersections(c2,c);
```

```

>n=circleCircleIntersections(c,c1);
>r=lineThrough(k,m); s=lineThrough(l,n);
>setPlotRange(8); plotPoint(o); plotCircle(c); plotPoint(A,"A");
>plotPoint(B,"B"); plotSegment(c1); plotCircle(c1); plotPoint(k);
>plotPoint(l); plotPoint(m); plotPoint(p);
>color(4); plotCircle(c1); plotCircle(c2); plotPoint(k); plotPoint(l);
>plotPoint(m); plotPoint(p);
>color(5); plotLine(r); plotLine(s):

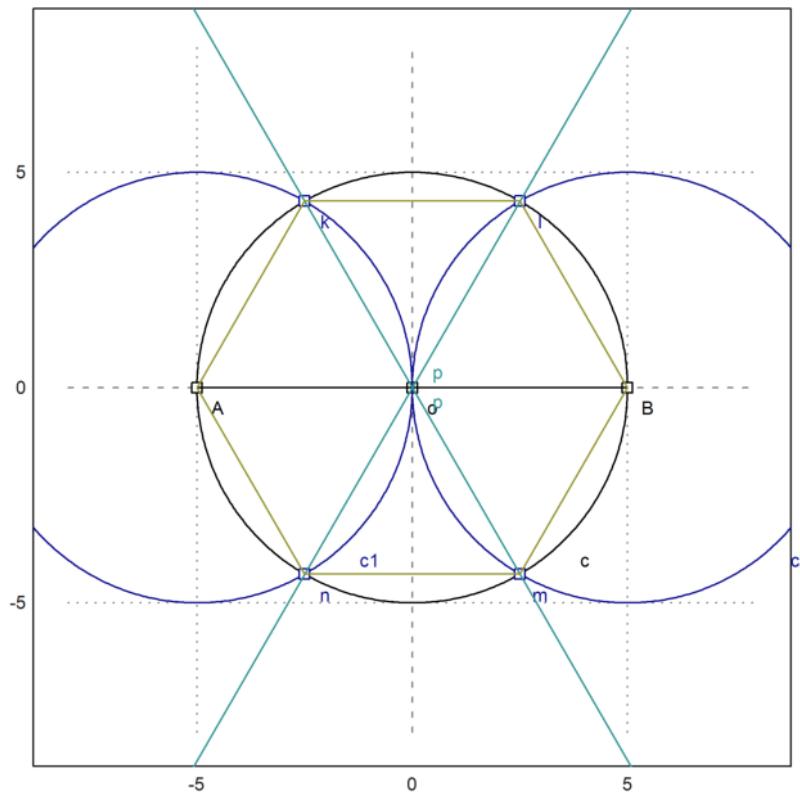
```



```

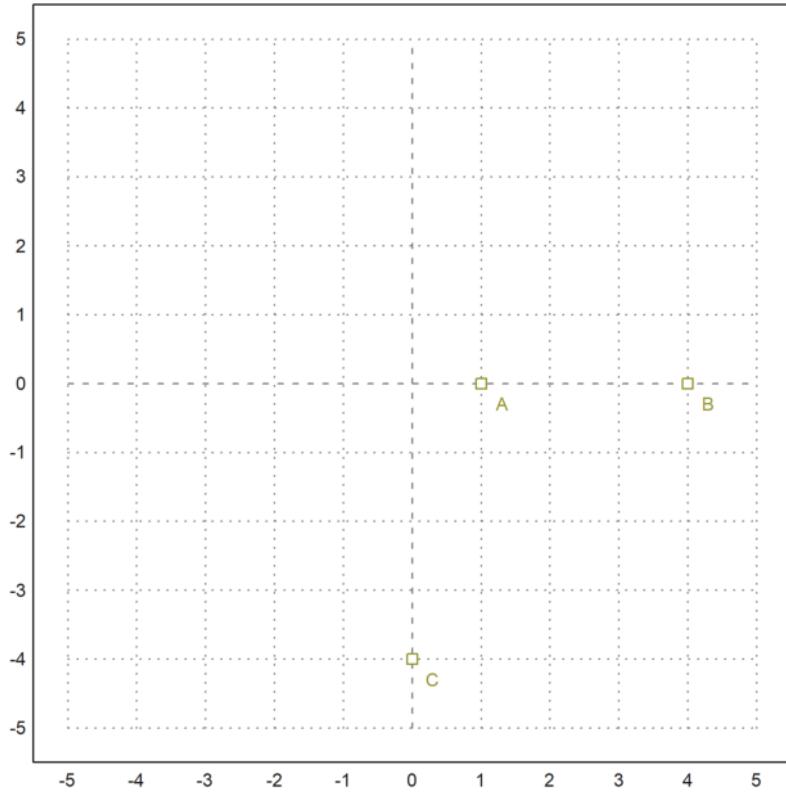
>color(6); plotSegment(A,k,""); plotSegment(A,n,""); plotSegment(k,l,"");
>plotSegment(l,B,""); plotSegment(B,m,""); plotSegment(m,n,""):

```



2.

```
>setPlotRange(5); A=[1,0]; B=[4,0]; C=[0,-4];
>plotPoint(A, "A"); plotPoint(B, "B"); plotPoint(C, "C");
```



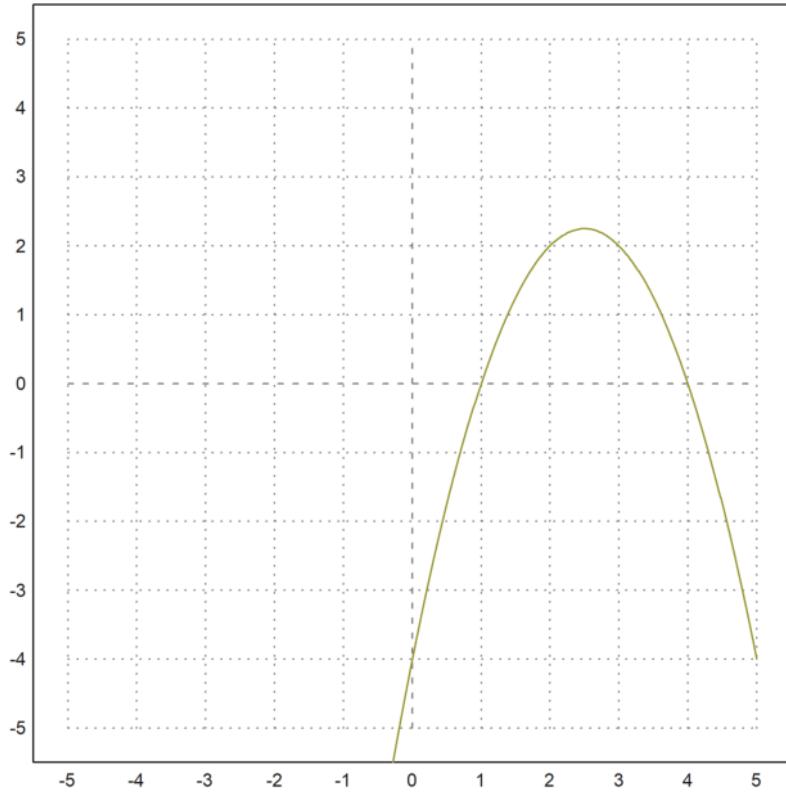
```
>sol &= solve([a+b=-c, 16*a+4*b=-c, c=-4], [a,b,c])
```

```
[[a = - 1, b = 5, c = - 4]]
```

```
>function y&=-x^2+5*x-4
```

$$-\ x^2 + 5 \ x - 4$$

```
>plot2d("-x^2+5*x-4", -5, 5, -5, 5):
```

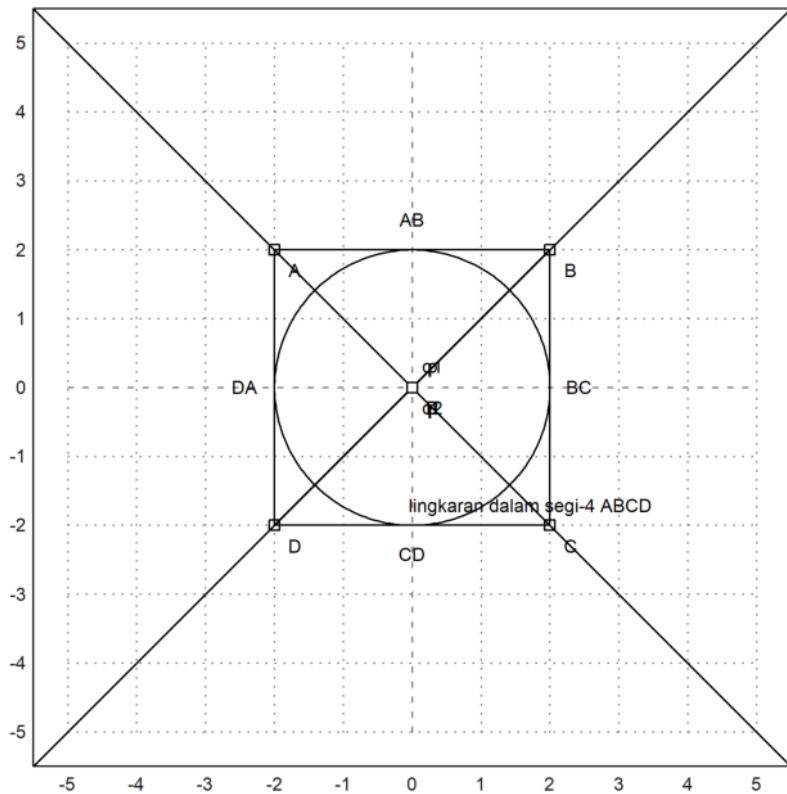


3.

```
>setPlotRange(-5,5,-5,5);
>A=[-2,2]; plotPoint(A, "A");
>B=[2,2]; plotPoint(B, "B");
>C=[2,-2]; plotPoint(C, "C");
>D=[-2,-2]; plotPoint(D, "D");
>plotSegment(A,B);
>plotSegment(B,C);
>plotSegment(C,D);
>plotSegment(D,A);
>plotSegment(A,C, "q1");
>plotSegment(B,D, "q2");
>q1=lineThrough(A,C);
>q2=lineThrough(B,D);
>p=lineIntersection(q1,q2);
>plotLine(q1); plotLine(q2);
>plotPoint(p, "P");
>r=norm(p-projectToLine(p,lineThrough(A,B)))
```

2

```
>plotCircle(circleWithCenter(p,r), "lingkaran dalam segi-4 ABCD");
```



```
>AB=norm(A-B) // panjang sisi AB
```

4

```
>CD=norm(C-D) // panjang sisi CD
```

4

```
>AD=norm(A-D) // panjang sisi AD
```

4

```
>BC=norm(B-C) // panjang sisi BC
```

4

```
>AB.CD
```

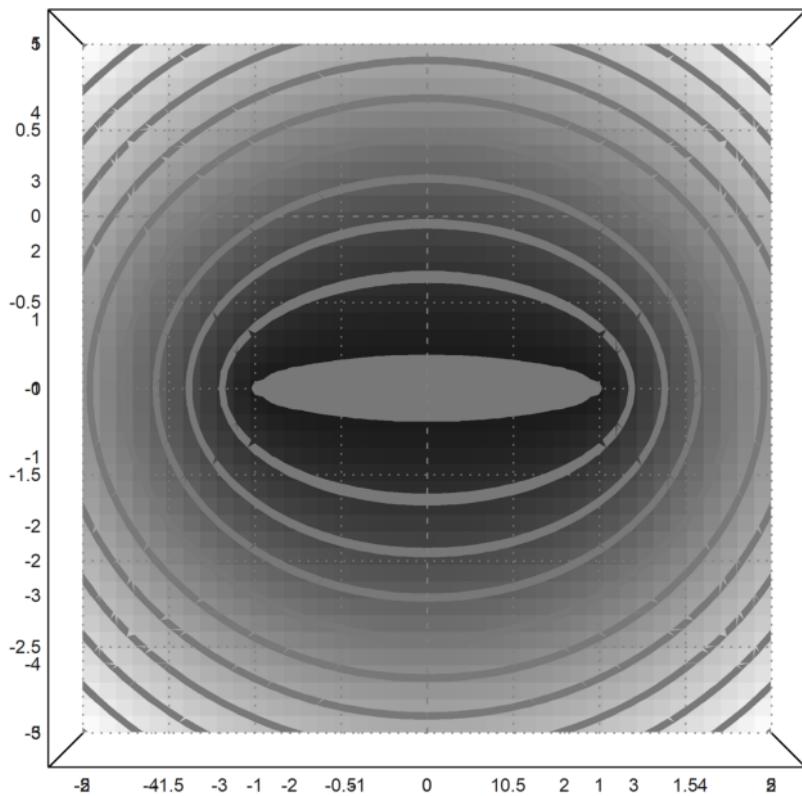
16

```
>AD.BC
```

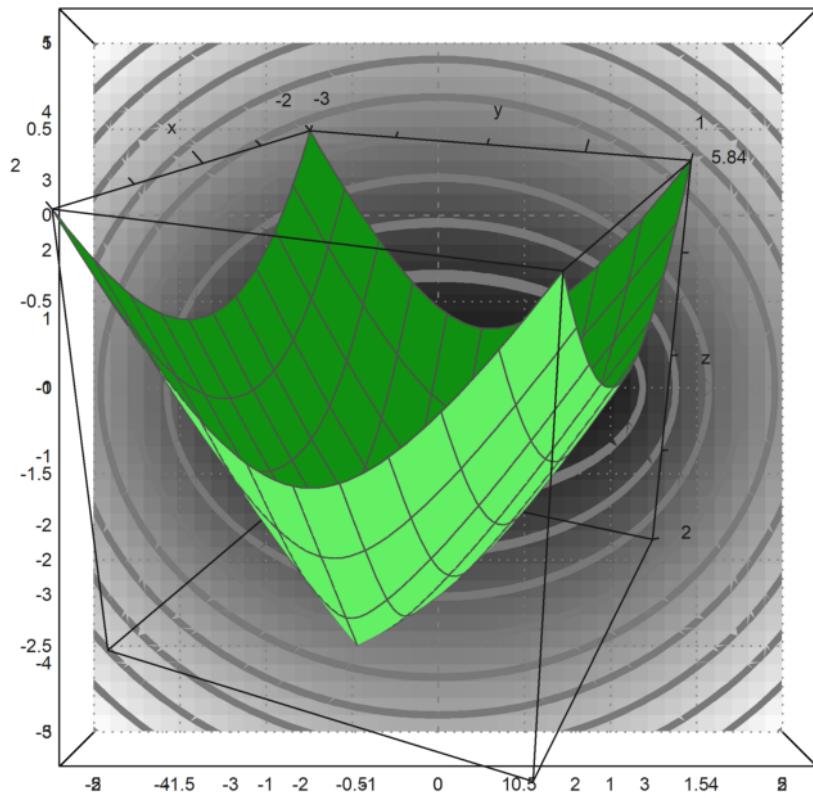
16

4.

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```

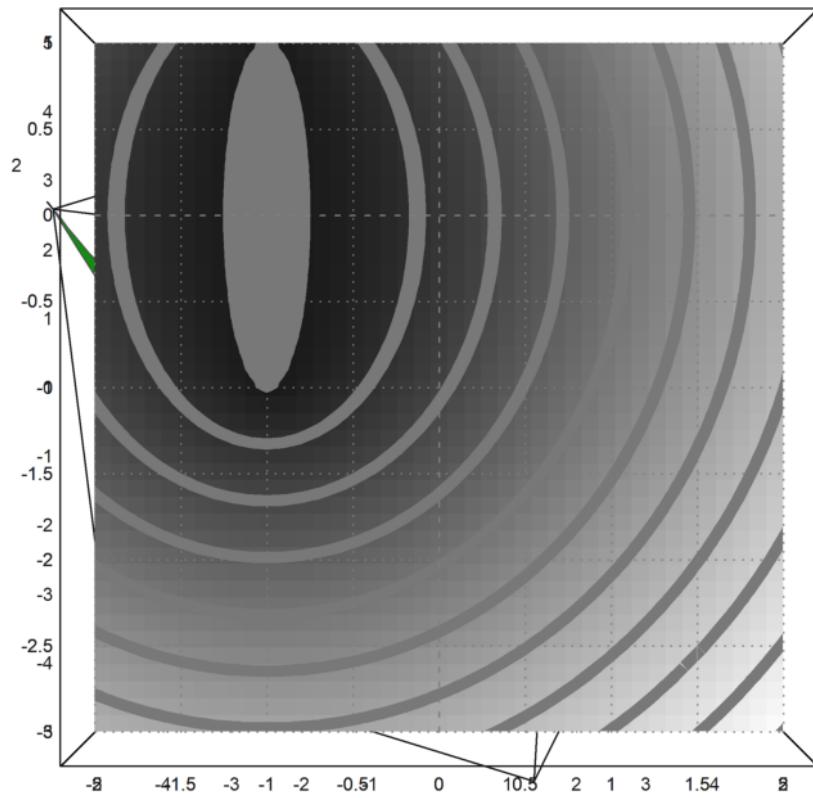


```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

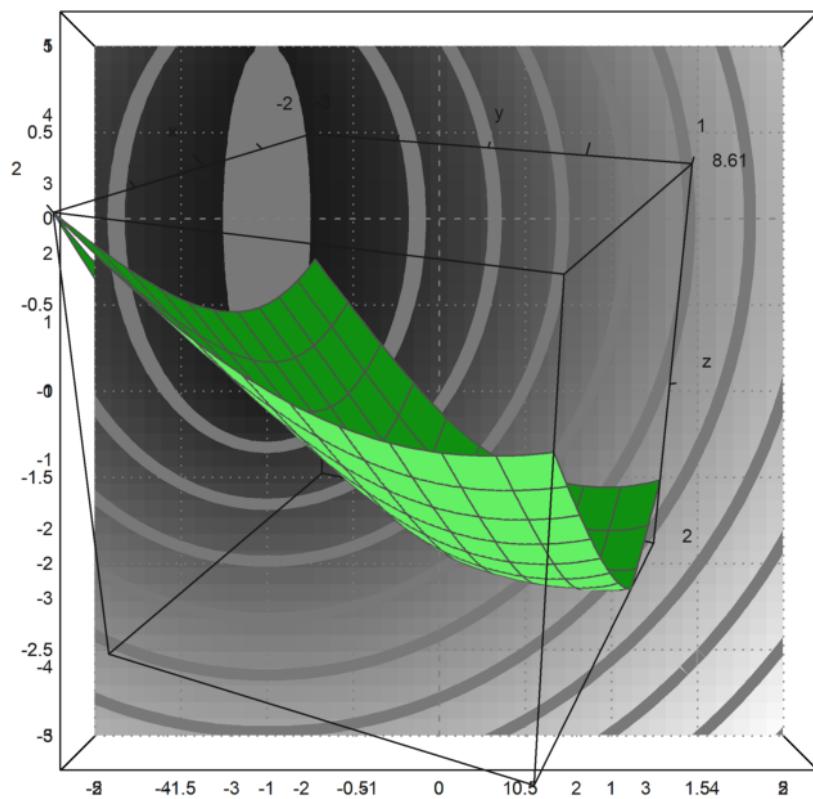


5.

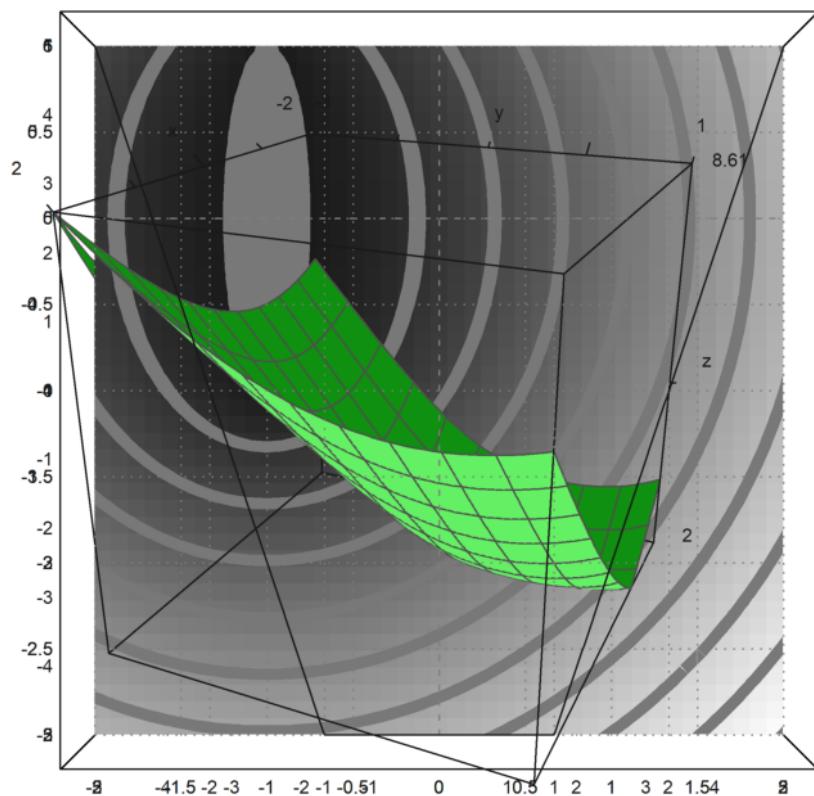
```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])^2+(y-p[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x+Q[1])^2+(y+Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



```
>plot3d("d2", xmin=-2, xmax=2, ymin=-3, ymax=1):
```



```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



BAB 7

KB PEKAN 14-15; MENGGUNAKAN EMT UNTUK STATISTIKA

article

eumat

Nama : Mukti Wibowo

NIM : 22305144036

Kelas : Matematika E 2022

EMT untuk Statistika

Dalam buku catatan ini, kami mendemonstrasikan plot statistik utama, pengujian, dan distribusi di Euler. Mari kita mulai dengan beberapa statistik deskriptif. Ini bukan pengantar statistik. Jadi, Anda mungkin memerlukan beberapa latar belakang untuk memahami detailnya.

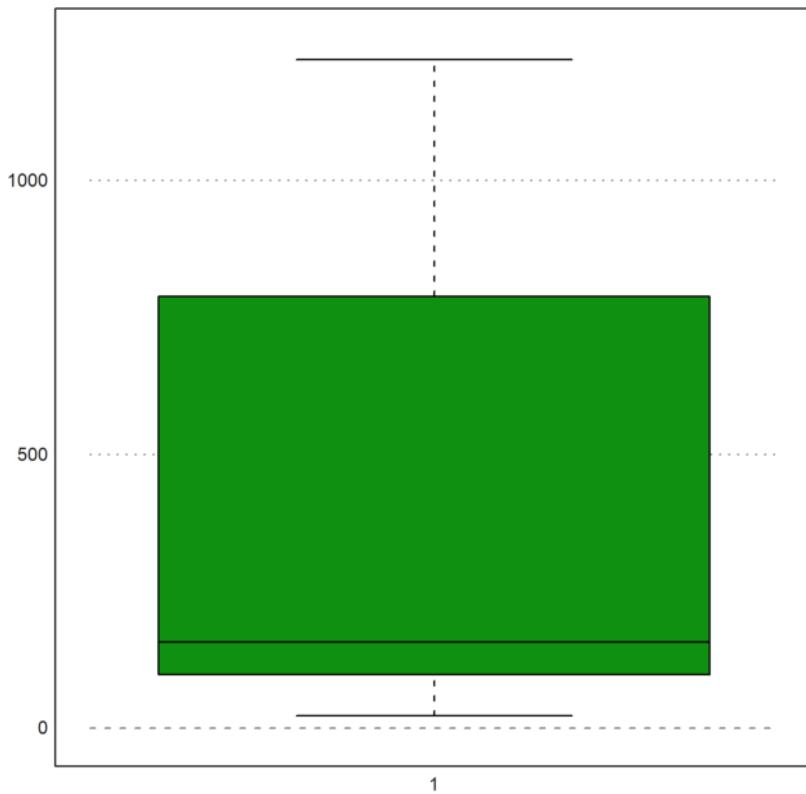
Asumsikan pengukuran berikut. Kami ingin menghitung nilai rata-rata dan standar deviasi yang diukur.

```
>M=[788,123,23,453,1221,192,879,104,98,67]; ...
>mean(M), dev(M),
```

```
394.8
422.741791431
```

Kita dapat memplot plot kotak-dan-kumis untuk data. Dalam kasus kami tidak ada outlier.

```
>boxplot(M):
```



Kami menghitung probabilitas bahwa suatu nilai lebih besar dari 1005, dengan asumsi nilai terukur dan distribusi normal.

Semua fungsi untuk distribusi di Euler diakhiri dengan ...dis dan menghitung distribusi probabilitas kumulatif (CPF).

$$\text{normaldis}(x, m, d) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2} dt.$$

Kami mencetak hasilnya dalam % dengan akurasi 2 digit menggunakan fungsi cetak.

```
>print((1-normaldis(1005,mean(M),dev(M)))*100,2,unit=" %")
```

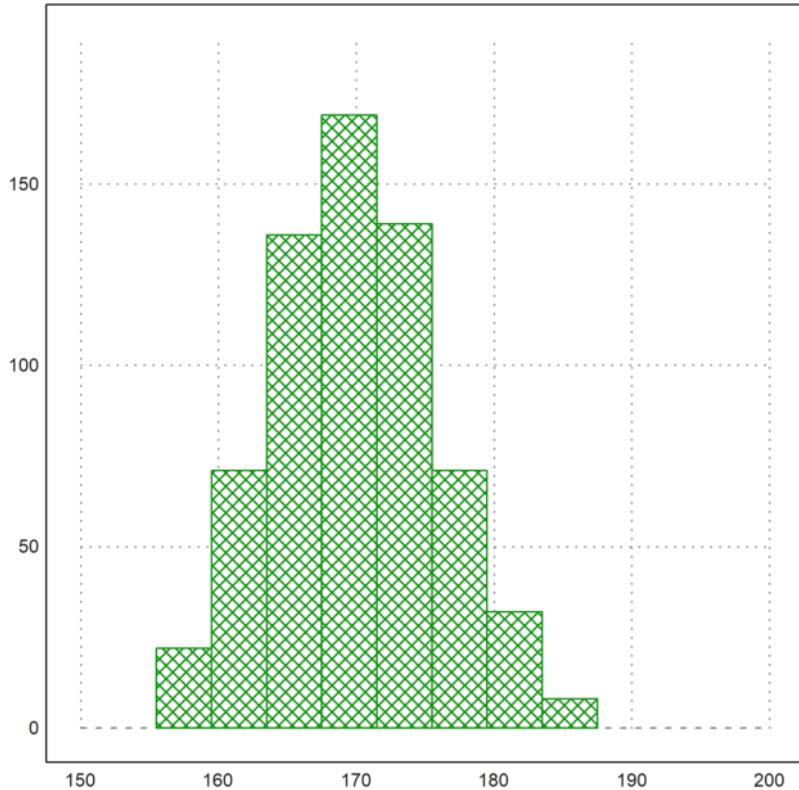
7.44 %

Untuk contoh berikutnya, kami mengasumsikan jumlah pria berikut dalam rentang ukuran yang diberikan.

```
>r=155.5:4:187.5; v=[22,71,136,169,139,71,32,8];
```

Berikut adalah plot distribusinya.

```
>plot2d(r,v,a=150,b=200,c=0,d=190,bar=1,style="/"):
```



Kita bisa memasukkan data mentah tersebut ke dalam sebuah tabel.

Tabel adalah metode untuk menyimpan data statistik. Tabel kita harus berisi tiga kolom: Awal jangkauan, akhir jangkauan, jumlah orang dalam jangkauan.

Tabel dapat dicetak dengan header. Kami menggunakan vektor string untuk mengatur header.

```
>T:=r[1:8]' | r[2:9]' | v'; writetable(T,labc=["from","to","count"])
```

from	to	count
155.5	159.5	22
159.5	163.5	71
163.5	167.5	136
167.5	171.5	169
171.5	175.5	139
175.5	179.5	71
179.5	183.5	32
183.5	187.5	8

Jika kita membutuhkan nilai rata-rata dan statistik lain dari ukuran, kita perlu menghitung titik tengah rentang. Kita dapat menggunakan dua kolom pertama dari tabel kita untuk ini.

Sumbul "`|`" digunakan untuk memisahkan kolom, fungsi "writetable" digunakan untuk menulis tabel, dengan opsi "labc" adalah untuk menentukan header kolom.

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval
```

```
157.5
161.5
165.5
```

```

169.5
173.5
177.5
181.5
185.5

```

Tetapi lebih mudah, untuk melipat rentang dengan vektor [1/2.1/2].

```
>M=fold(r,[0.5,0.5])
```

```
[157.5, 161.5, 165.5, 169.5, 173.5, 177.5, 181.5, 185.5]
```

Sekarang kita dapat menghitung mean dan deviasi sampel dengan frekuensi yang diberikan.

```
>{m,d}=meandev(M,v); m, d,
```

```

169.901234568
5.98912964449

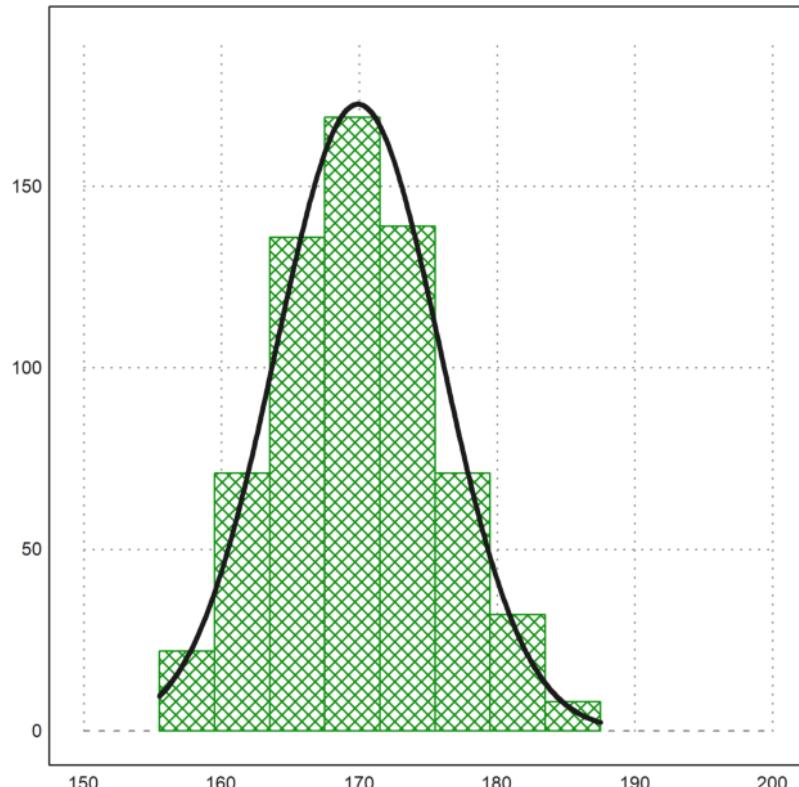
```

Mari kita tambahkan distribusi normal dari nilai-nilai ke plot batang di atas. Rumus untuk distribusi normal dengan mean m dan standar deviasi d adalah:

$$y = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2d^2}}.$$

Karena nilainya antara 0 dan 1, untuk memplotnya pada bar plot harus dikalikan dengan 4 kali jumlah total data.

```
>plot2d("qnormal(x,m,d)*sum(v)*4", ...
> xmin=min(r),xmax=max(r),thickness=3,add=1):
```



Meja

Di direktori notebook ini Anda menemukan file dengan tabel. Data tersebut mewakili hasil survei. Berikut adalah empat baris pertama dari file tersebut. Data berasal dari buku online Jerman "Einführung in die Statistik mit R" oleh A. Handl.

```
>printfile("table.dat", 4);
```

```
Person Sex Age Titanic Evaluation Tip Problem
1 m 30 n . 1.80 n
2 f 23 y g 1.80 n
3 f 26 y g 1.80 y
```

Tabel berisi 7 kolom angka atau token (string). Kami ingin membaca tabel dari file. Pertama, kami menggunakan terjemahan kami sendiri untuk token.

Untuk ini, kami mendefinisikan set token. Fungsi `strtokens()` mendapatkan vektor string token dari string yang diberikan.

```
>mf:=[ "m", "f" ]; yn:=[ "y", "n" ]; ev:=strtokens("g vg m b vb");
```

Sekarang kita membaca tabel dengan terjemahan ini.

Argumen `tok2`, `tok4` dll. adalah terjemahan dari kolom tabel. Argumen ini tidak ada dalam daftar parameter `readtable()`, jadi Anda harus menyediakannya dengan `":=`.

```
>{MT,hd}=readtable("table.dat",tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
>load over statistics;
```

Untuk mencetak, kita perlu menentukan set token yang sama. Kami mencetak empat baris pertama saja.

```
>writetable(MT[1:4],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

Person	Sex	Age	Titanic	Evaluation	Tip	Problem
1	m	30	n	.	1.8	n
2	f	23	y	g	1.8	n
3	f	26	y	g	1.8	y
4	m	33	n	.	2.8	n

Titik `.` mewakili nilai-nilai, yang tidak tersedia.

Jika kita tidak ingin menentukan token untuk terjemahan terlebih dahulu, kita hanya perlu menentukan, kolom mana yang berisi token dan bukan angka.

```
>ctok=[2, 4, 5, 7]; {MT,hd,tok}=readtable("table.dat",ctok=ctok);
```

Fungsi `readtable()` sekarang mengembalikan satu set token.

```
>tok
```

```
m  
n  
f  
y  
g  
vg
```

Tabel berisi entri dari file dengan token yang diterjemahkan ke angka.

String khusus NA="." ditafsirkan sebagai "Tidak Tersedia", dan mendapatkan NAN (bukan angka) dalam tabel. Terjemahan ini dapat diubah dengan parameter NA, dan NAval.

```
>MT [1]
```

```
[1, 1, 30, 2, NAN, 1.8, 2]
```

Berikut isi tabel dengan angka yang belum diterjemahkan.

```
>writetable(MT, wc=5)
```

1	1	30	2	.	1.8	2
2	3	23	4	5	1.8	2
3	3	26	4	5	1.8	4
4	1	33	2	.	2.8	2
5	1	37	2	.	1.8	2
6	1	28	4	5	2.8	4
7	3	31	4	6	2.8	2
8	1	23	2	.	0.8	2
9	3	24	4	6	1.8	4
10	1	26	2	.	1.8	2
11	3	23	4	6	1.8	4
12	1	32	4	5	1.8	2
13	1	29	4	6	1.8	4
14	3	25	4	5	1.8	4
15	3	31	4	5	0.8	2
16	1	26	4	5	2.8	2
17	1	37	2	.	3.8	2
18	1	38	4	5	.	2
19	3	29	2	.	3.8	2
20	3	28	4	6	1.8	2
21	3	28	4	1	2.8	4
22	3	28	4	6	1.8	4
23	3	38	4	5	2.8	2
24	3	27	4	1	1.8	4
25	1	27	2	.	2.8	4

Untuk kenyamanan, Anda dapat memasukkan output readtable() ke dalam daftar.

```
>Table={{readtable("table.dat", ctok=ctok)} };
```

Menggunakan kolom token yang sama dan token yang dibaca dari file, kita dapat mencetak tabel. Kita dapat menentukan ctok, tok, dll. Atau menggunakan daftar Tabel.

```
>writetable(Table,ctok=ctok,wc=5);
```

Person	Sex	Age	Titanic	Evaluation	Tip	Problem
1	m	30	n	.	1.8	n
2	f	23	y	g	1.8	n
3	f	26	y	g	1.8	y
4	m	33	n	.	2.8	n
5	m	37	n	.	1.8	n
6	m	28	y	g	2.8	y
7	f	31	y	vg	2.8	n
8	m	23	n	.	0.8	n
9	f	24	y	vg	1.8	y
10	m	26	n	.	1.8	n
11	f	23	y	vg	1.8	y
12	m	32	y	g	1.8	n
13	m	29	y	vg	1.8	y
14	f	25	y	g	1.8	y
15	f	31	y	g	0.8	n
16	m	26	y	g	2.8	n
17	m	37	n	.	3.8	n
18	m	38	y	g	.	n
19	f	29	n	.	3.8	n
20	f	28	y	vg	1.8	n
21	f	28	y	m	2.8	y
22	f	28	y	vg	1.8	y
23	f	38	y	g	2.8	n
24	f	27	y	m	1.8	y
25	m	27	n	.	2.8	y

Fungsi tablecol() mengembalikan nilai kolom tabel, melewatkannya setiap baris dengan nilai NAN("." dalam file), dan indeks kolom, yang berisi nilai-nilai ini.

```
>{c,i}=tablecol(MT,[5,6]);
```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak kolom dari tabel untuk tabel baru.

```
>j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok)
```

Person	Evaluation	Tip
2	g	1.8
3	g	1.8
6	g	2.8
7	vg	2.8
9	vg	1.8
11	vg	1.8
12	g	1.8
13	vg	1.8
14	g	1.8
15	g	0.8
16	g	2.8
20	vg	1.8
21	m	2.8
22	vg	1.8

```

23          g      2.8
24          m      1.8

```

Tentu saja, kita perlu mengekstrak tabel itu sendiri dari daftar Tabel dalam kasus ini.

```
>MT=Table[1];
```

Tentu saja, kita juga dapat menggunakan untuk menentukan nilai rata-rata kolom atau nilai statistik lainnya.

```
>mean(tablecol(MT, 6))
```

```
2.175
```

Fungsi `getstatistics()` mengembalikan elemen dalam vektor, dan jumlahnya. Kami menerapkannya pada nilai "m" dan "f" di kolom kedua tabel kami.

```
>{xu, count}=getstatistics(tablecol(MT, 2)); xu, count,
```

```
[1, 3]
[12, 13]
```

Kami dapat mencetak hasilnya dalam tabel baru.

```
>writetable(count', labr=tok[xu])
```

```

m      12
f      13

```

Fungsi `selectable()` mengembalikan tabel baru dengan nilai dalam satu kolom yang dipilih dari vektor indeks. Pertama kita mencari indeks dari dua nilai kita di tabel token.

```
>v:=indexof(tok, ["g", "vg"])
```

```
[5, 6]
```

Sekarang kita dapat memilih baris tabel, yang memiliki salah satu nilai dalam v di baris ke-5.

```
>MT1:=MT[selectrows(MT, 5, v)]; i:=sortedrows(MT1, 5);
```

Sekarang kita dapat mencetak tabel, dengan nilai yang diekstrak dan diurutkan di kolom ke-5.

```
>writetable(MT1[i], labc=hd, ctok=ctok, tok=tok, wc=7);
```

Person	Sex	Age	Titanic	Evaluation	Tip	Problem
2	f	23	y	g	1.8	n
3	f	26	y	g	1.8	y
6	m	28	y	g	2.8	y
18	m	38	y	g	.	n
16	m	26	y	g	2.8	n

15	f	31	y	g	0.8	n
12	m	32	y	g	1.8	n
23	f	38	y	g	2.8	n
14	f	25	y	g	1.8	y
9	f	24	y	vg	1.8	y
7	f	31	y	vg	2.8	n
20	f	28	y	vg	1.8	n
22	f	28	y	vg	1.8	y
13	m	29	y	vg	1.8	y
11	f	23	y	vg	1.8	y

Untuk statistik berikutnya, kami ingin menghubungkan dua kolom tabel. Jadi kami mengekstrak kolom 2 dan 4 dan mengurutkan tabel.

```
>i=sortedrows(MT,[2,4]); ...
> writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',ctok=[1,2],tok=tok)
```

m	n
m	n
m	n
m	n
m	n
m	n
m	n
m	y
m	Y
m	Y
m	Y
m	Y
f	n
f	y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y

Dengan getstatistics(), kita juga bisa menghubungkan hitungan dalam dua kolom tabel satu sama lain.

```
>MT24=tablecol(MT,[2,4]); ...
>{xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1],MT24[2]); ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2])
```

m	n	y
	7	5
f	1	12

Tabel dapat ditulis ke file.

```
>filename="test.dat"; ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2],file=filename);
```

Kemudian kita bisa membaca tabel dari file tersebut.

```
>{MT2,hd,tok2,hdr}=readtable(filename,>clabs,>rlabs); ...
>writetable(MT2,labr=hdr,labc=hd)
```

	n	y
m	7	5
f	1	12

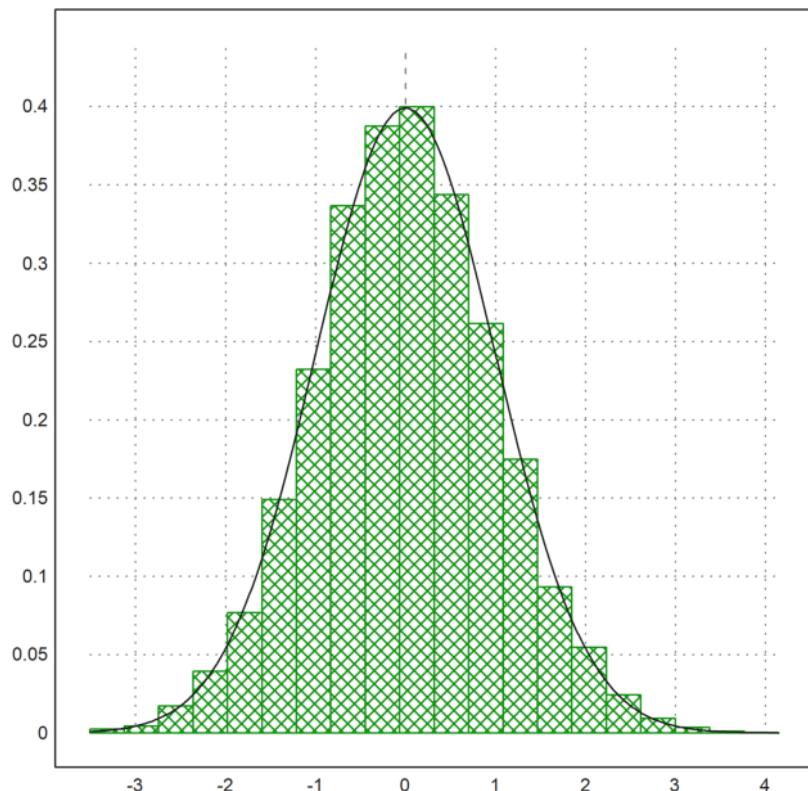
Dan hapus file tersebut.

```
>fileremove(filename);
```

Distribusi

Dengan plot2d, terdapat metode yang sangat mudah untuk memplot sebaran data eksperimen.

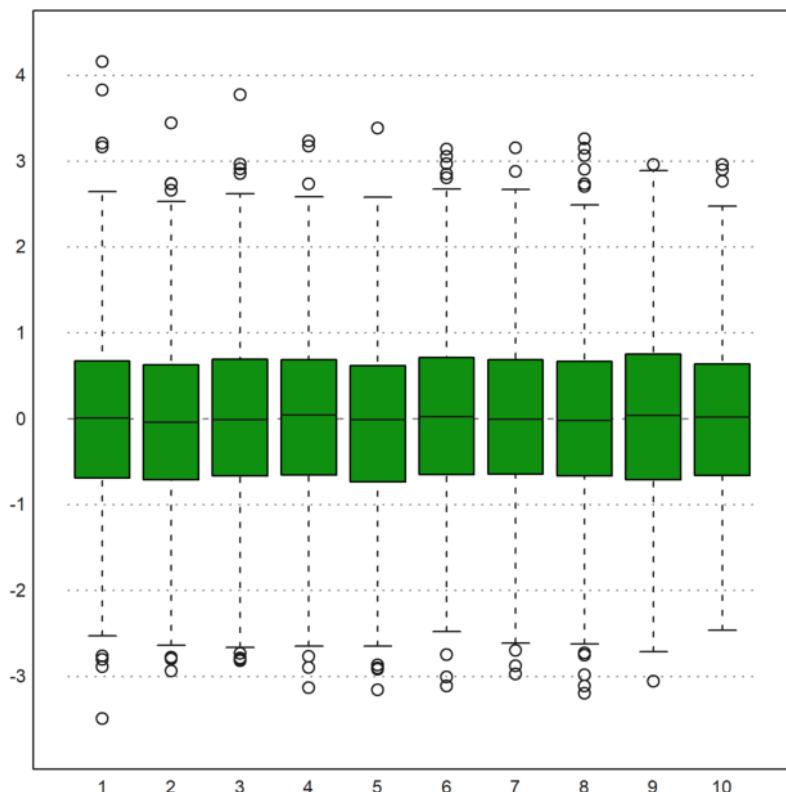
```
>p=normal(1,10000); //10000 random normal-distributed sample p
>plot2d(p,distribution=20,style="\\"/"); // plot the random sample p
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1); // add the standard normal distribution plot
```



Harap perhatikan perbedaan antara plot batang (sampel) dan kurva normal (distribusi nyata). Masukkan kembali tiga perintah untuk melihat hasil pengambilan sampel lainnya.

Berikut adalah perbandingan 10 simulasi dari 1000 nilai terdistribusi normal menggunakan apa yang disebut plot kotak. Plot ini menunjukkan median, kuartil 25% dan 75%, nilai minimal dan maksimal, dan outlier.

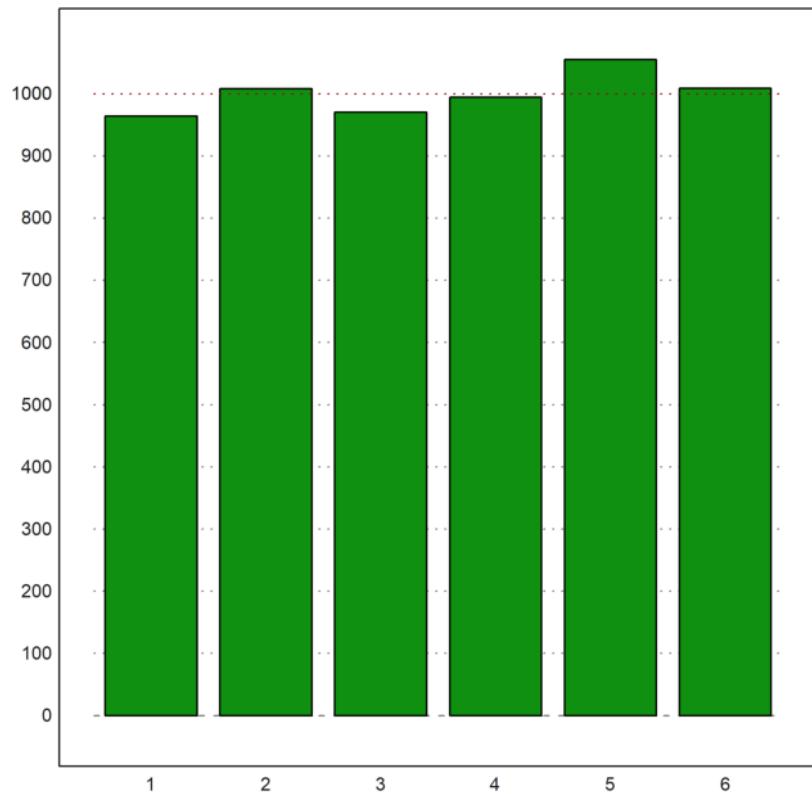
```
>p=normal(10,1000); boxplot(p):
```



Untuk membangkitkan bilangan bulat acak, Euler memiliki intrarandom. Mari kita simulasikan lemparan dadu dan plot distribusinya.

Kita menggunakan fungsi getmultiplicities(v,x), yang menghitung seberapa sering elemen v muncul di x. Kemudian kita memplot hasilnya menggunakan columnplot().

```
>k=intrandom(1,6000,6); ...
>columnplot(getmultiplicities(1:6,k)); ...
>ygrid(1000,color=red):
```



Sementara intrandom(n,m,k) mengembalikan bilangan bulat yang terdistribusi secara seragam dari 1 ke k, dimungkinkan untuk menggunakan distribusi bilangan bulat lain yang diberikan dengan randpint(). Dalam contoh berikut, probabilitas untuk 1,2,3 masing-masing adalah 0,4,0,1,0,5.

```
>randpint(1,1000,[0.4,0.1,0.5]); getmultiplicities(1:3,%)
```

[371, 97, 532]

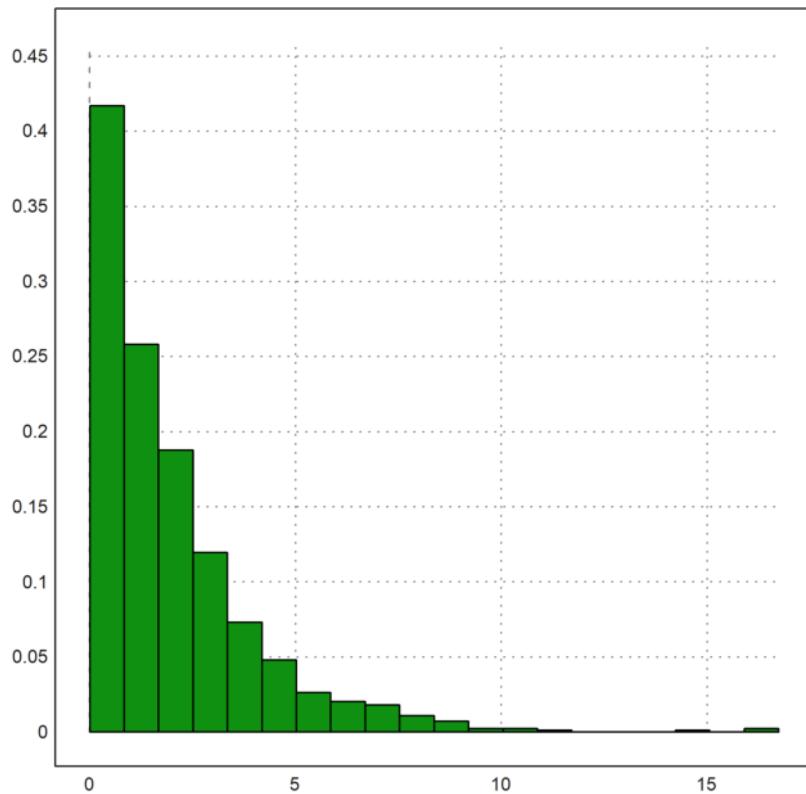
Euler dapat menghasilkan nilai acak dari lebih banyak distribusi. Coba lihat referensinya. Misalnya, kami mencoba distribusi eksponensial. Variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi eksponensial, jika PDF-nya diberikan oleh

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

dengan parameter

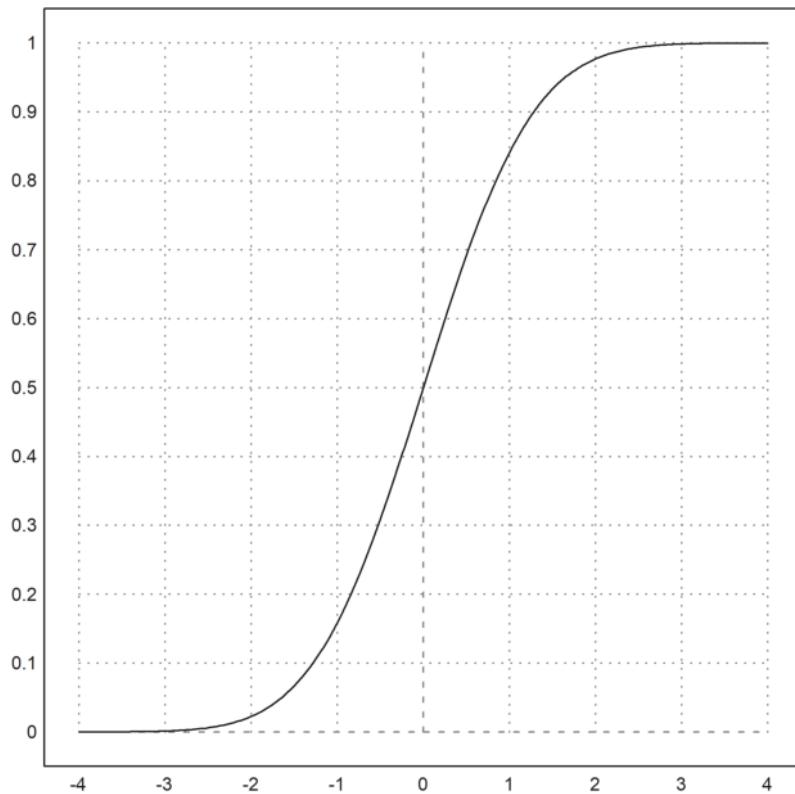
$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \text{ adalah rata-rata, dan dilambangkan dengan } X \sim \text{Eksponensial}(\lambda).$$

```
>plot2d(randexponential(1,1000,2),>distribution):
```



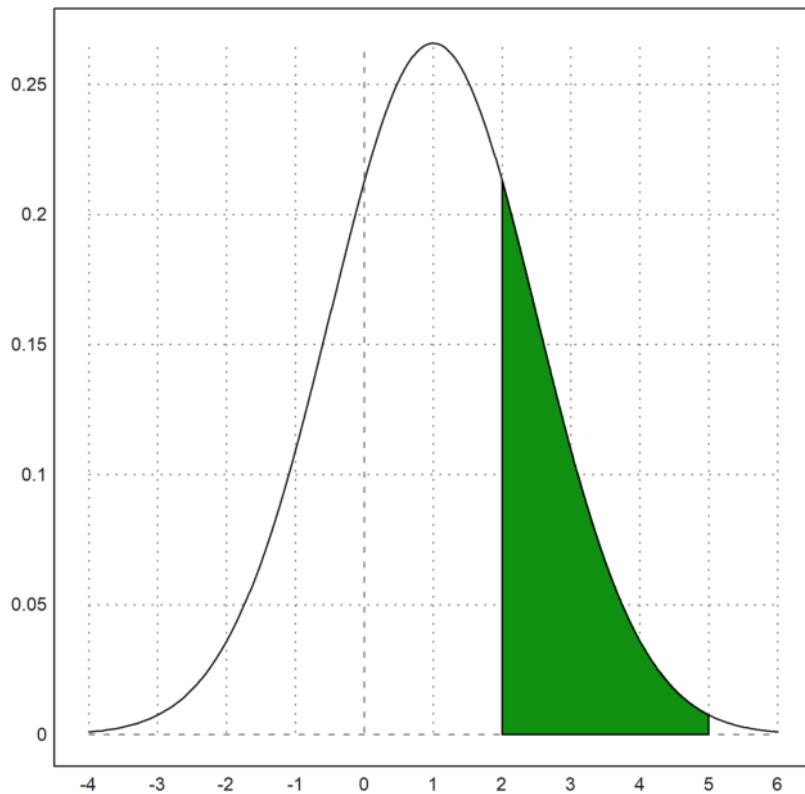
Untuk banyak distribusi, Euler dapat menghitung fungsi distribusi dan inversnya.

```
>plot2d("normaldis", -4, 4):
```



Berikut ini adalah salah satu cara untuk memplot kuantil.

```
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",-4,6); ...  
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",a=2,b=5,>add,>filled):
```



$$\text{normaldis}(x, m, d) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2} dt.$$

Probabilitas untuk berada di area hijau adalah sebagai berikut.

```
>normaldis(5, 1, 1.5) - normaldis(2, 1, 1.5)
```

0.248662156979

Ini dapat dihitung secara numerik dengan integral berikut.

$$\int_2^5 \frac{1}{1.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-1}{1.5})^2} dx.$$

```
>gauss("qnormal(x, 1, 1.5)", 2, 5)
```

0.248662156979

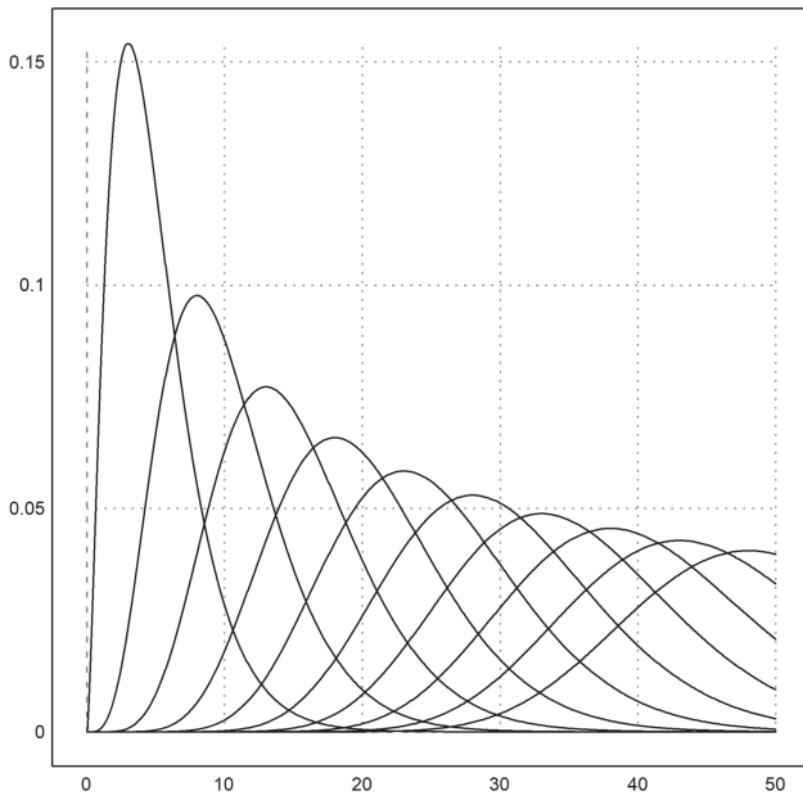
Mari kita bandingkan distribusi binomial dengan distribusi normal mean dan deviasi yang sama. Fungsi `invbindis()` memecahkan interpolasi linier antara nilai bilangan bulat.

```
>invbindis(0.95, 1000, 0.5), invnormaldis(0.95, 500, 0.5*sqrt(1000))
```

525.516721219
526.007419394

Fungsi qdis() adalah kepadatan distribusi chi-kuadrat. Seperti biasa, Euler memetakan vektor ke fungsi ini. Jadi kita mendapatkan plot dari semua distribusi chi-kuadrat dengan derajat 5 sampai 30 dengan mudah dengan cara berikut.

```
>plot2d("qchidis(x, (5:5:50)')", 0, 50):
```



Euler memiliki fungsi yang akurat untuk mengevaluasi distribusi. Mari kita periksa chidis() dengan integral. Penamaan mencoba untuk konsisten. Misalnya.,

- distribusi chi-kuadrat adalah chidis(),
- fungsi kebalikannya adalah invchidis(),
- densitasnya adalah qchidis().

Pelengkap distribusi (ekor atas) adalah chicdis().

```
>chidis(1.5, 2), integrate("qchidis(x, 2)", 0, 1.5)
```

```
0.527633447259  
0.527633447259
```

Distribusi Diskrit

Untuk menentukan distribusi diskrit Anda sendiri, Anda dapat menggunakan metode berikut. Pertama kita mengatur fungsi distribusi.

```
>wd = 0 | ((1:6)+[-0.01, 0.01, 0, 0, 0, 0])/6
```

```
[0, 0.165, 0.335, 0.5, 0.666667, 0.833333, 1]
```

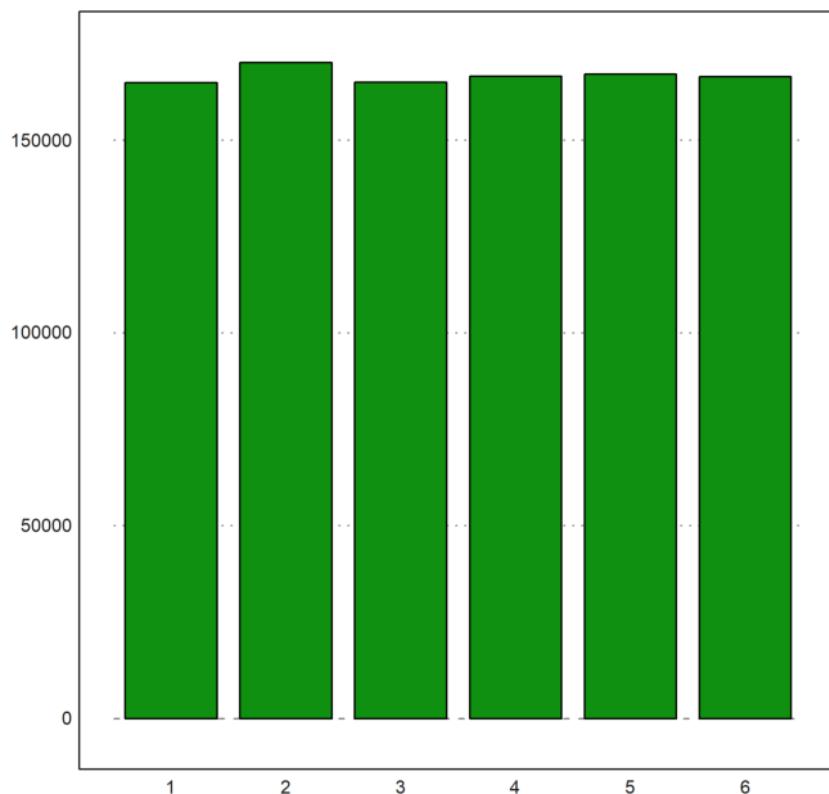
Artinya dengan probabilitas $wd[i+1]-wd[i]$ kita menghasilkan nilai acak i.

Ini hampir merupakan distribusi yang seragam. Mari kita tentukan generator angka acak untuk ini. Fungsi `find(v,x)` menemukan nilai x dalam vektor v. Fungsi ini juga berlaku untuk vektor x.

```
>function wrongdice (n,m) := find(wd,random(n,m))
```

Kesalahannya sangat halus sehingga kami melihatnya hanya dengan iterasi yang sangat banyak.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,wrongdice(1,1000000))):
```



Berikut adalah fungsi sederhana untuk memeriksa distribusi seragam dari nilai 1...K dalam v. Kami menerima hasilnya, jika untuk semua frekuensi

$$\left| f_i - \frac{1}{K} \right| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

```
>function checkrandom (v, delta=1) ...
```

```
K=max(v); n=cols(v);
fr=getfrequencies(v,1:K);
return max(fr/n-1/K)<delta/sqrt(n);
endfunction
```

Memang fungsi menolak distribusi seragam.

```
>checkrandom(wrongdice(1, 1000000))
```

0

Dan itu menerima generator acak bawaan.

```
>checkrandom(intrandom(1, 1000000, 6))
```

1

Kita dapat menghitung distribusi binomial. Pertama ada binomials() , yang mengembalikan probabilitas i atau kurang hit dari n percobaan.

```
>bindis(410, 1000, 0.4)
```

0.751401349654

Fungsi Beta terbalik digunakan untuk menghitung interval kepercayaan Clopper-Pearson untuk parameter p. Level default adalah alfa.

Arti interval ini adalah jika p berada di luar interval, hasil pengamatan 410 dalam 1000 jarang terjadi.

```
>clopperpearson(410, 1000)
```

[0.37932, 0.441212]

Perintah berikut adalah cara langsung untuk mendapatkan hasil di atas. Tapi untuk n besar, penjumlahan langsungnya tidak akurat dan lambat.

```
>p=0.4; i=0:410; n=1000; sum(bin(n, i)*p^i*(1-p)^(n-i))
```

0.751401349655

Omong-omong, invbinsum() menghitung kebalikan dari binomials().

```
>invbindis(0.75, 1000, 0.4)
```

409.932733047

Di Bridge, kami mengasumsikan 5 kartu beredar (dari 52) dengan dua tangan (26 kartu). Mari kita hitung probabilitas distribusi yang lebih buruk dari 3:2 (mis. 0:5, 1:4, 4:1, atau 5:0).

```
>2*hypergeomsum(1, 5, 13, 26)
```

0.321739130435

Ada juga simulasi distribusi multinomial.

```
>randmultinomial(10,1000,[0.4,0.1,0.5])
```

390	91	519
398	114	488
392	102	506
398	116	486
424	84	492
407	102	491
426	93	481
427	112	461
397	96	507
393	115	492

Merencanakan Data

Untuk memplot data, kami mencoba hasil pemilu Jerman sejak 1990, yang diukur dalam jumlah kursi.

```
>BW := [ ...  
>1990, 662, 319, 239, 79, 8, 17; ...  
>1994, 672, 294, 252, 47, 49, 30; ...  
>1998, 669, 245, 298, 43, 47, 36; ...  
>2002, 603, 248, 251, 47, 55, 2; ...  
>2005, 614, 226, 222, 61, 51, 54; ...  
>2009, 622, 239, 146, 93, 68, 76; ...  
>2013, 631, 311, 193, 0, 63, 64];
```

Untuk partai, kami menggunakan rangkaian nama.

```
>P := ["CDU/CSU", "SPD", "FDP", "Gr", "Li"];
```

Mari kita cetak persentasenya dengan baik.

Pertama, kami mengekstrak kolom yang diperlukan. Kolom 3 sampai 7 adalah kursi masing-masing partai, dan kolom 2 adalah jumlah kursi. kolom adalah tahun pemilihan.

```
>BT := BW[, 3:7]; BT := BT/sum(BT); YT := BW[, 1]';
```

Kemudian kami mencetak statistik dalam bentuk tabel. Kami menggunakan nama sebagai tajuk kolom, dan tahun sebagai tajuk untuk baris. Lebar default untuk kolom adalah wc=10, tetapi kami lebih memilih hasil yang lebih padat. Kolom akan diperluas untuk label kolom, jika perlu.

```
>writetable(BT*100, wc=6, dc=0, >fixed, labc=P, labr=YT)
```

	CDU/CSU	SPD	FDP	Gr	Li
1990	48	36	12	1	3
1994	44	38	7	7	4
1998	37	45	6	7	5
2002	41	42	8	9	0
2005	37	36	10	8	9
2009	38	23	15	11	12
2013	49	31	0	10	10

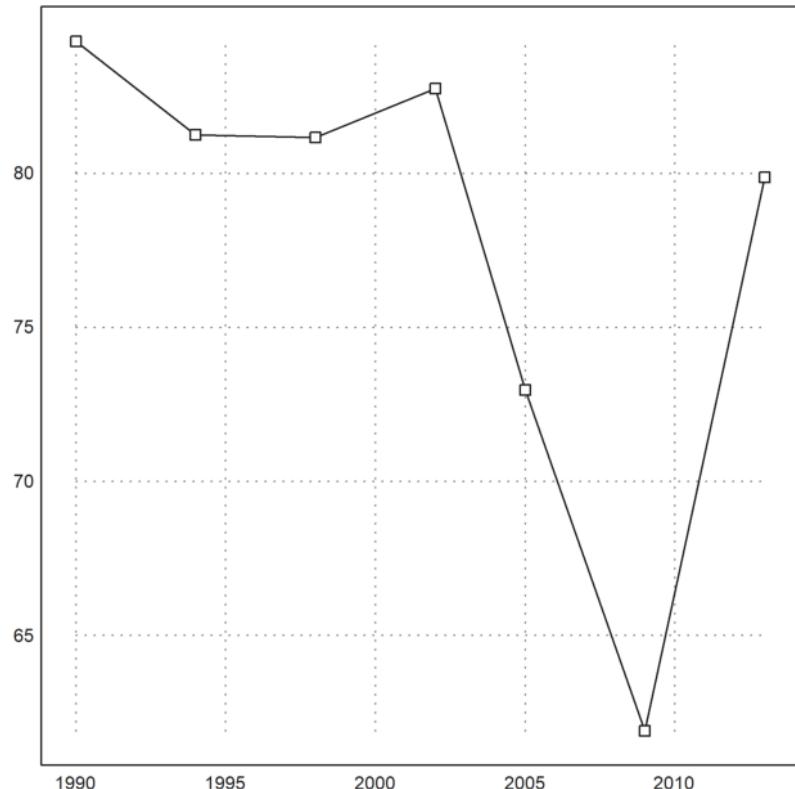
Perkalian matriks berikut mengekstrak jumlah persentase dari dua partai besar yang menunjukkan bahwa partai-partai kecil telah mendapatkan rekaman di parlemen hingga tahun 2009.

```
>BT1:=(BT.[1;1;0;0;0])'*100
```

```
[84.29, 81.25, 81.1659, 82.7529, 72.9642, 61.8971, 79.8732]
```

Ada juga plot statistik sederhana. Kami menggunakan untuk menampilkan garis dan titik secara bersamaan. Alternatifnya adalah memanggil plot2d dua kali dengan >add.

```
>statplot(YT,BT1,"b"):
```

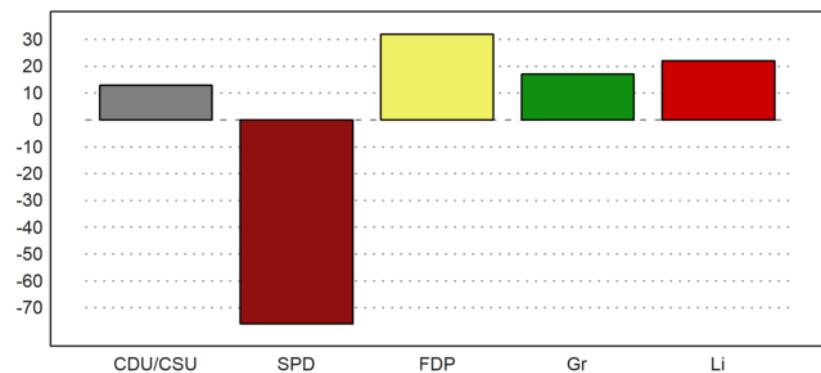
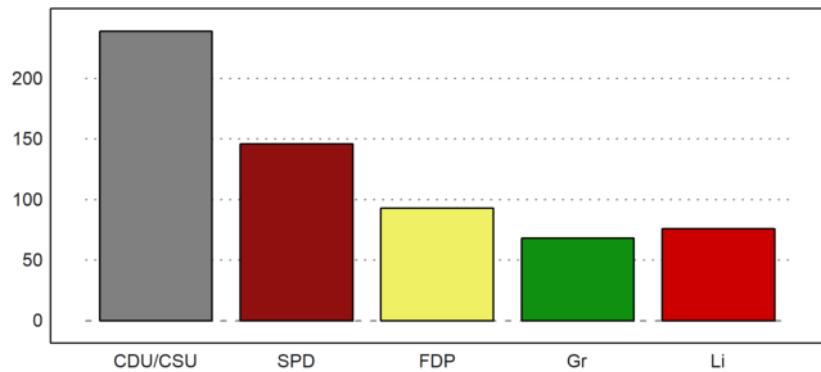


Tentukan beberapa warna untuk masing-masing pihak.

```
>CP:=[rgb(0.5,0.5,0.5),red,yellow,green,rgb(0.8,0,0)];
```

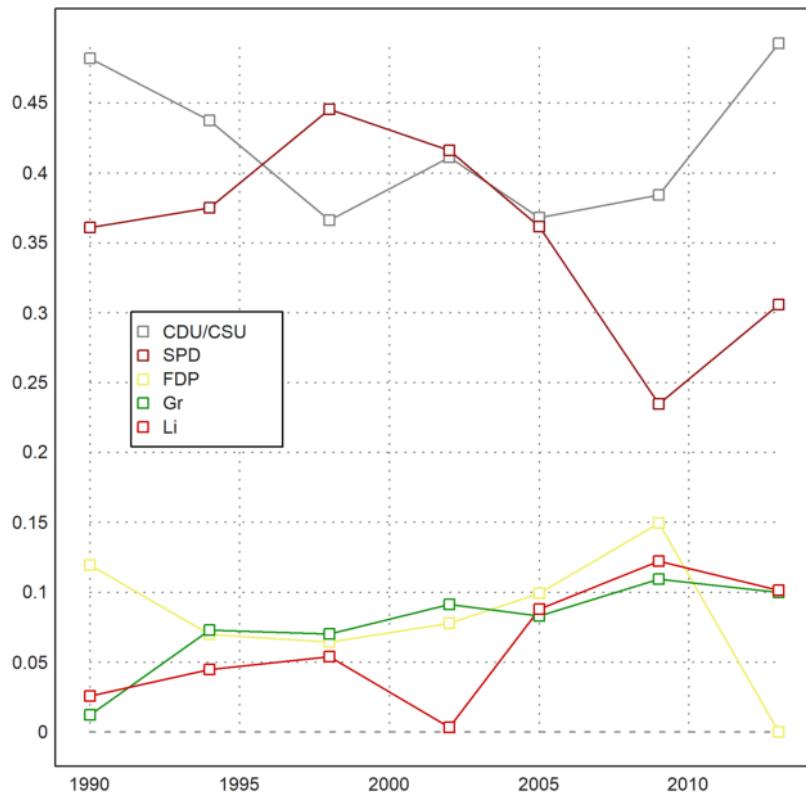
Sekarang kita bisa memplot hasil pemilu 2009 dan mengubahnya menjadi satu plot menggunakan gambar. Kita dapat menambahkan vektor kolom ke setiap plot.

```
>figure(2,1); ...
>figure(1); columnsplot(BW[6,3:7],P,color=CP); ...
>figure(2); columnsplot(BW[6,3:7]-BW[5,3:7],P,color=CP); ...
>figure(0):
```



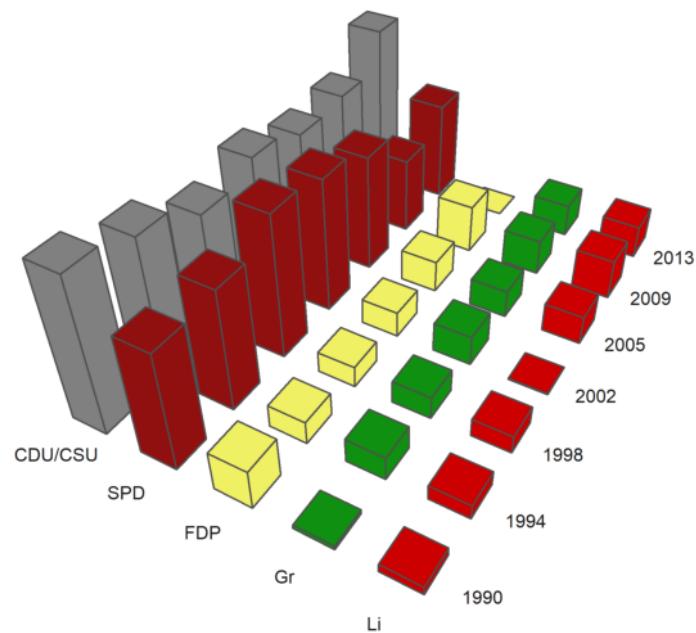
Plot data menggabungkan deretan data statistik dalam satu plot.

```
>J:=BW[,1]'; DP:=BW[,3:7]'; ...
>dataplot(YT,BT',color=CP); ...
>labelbox(P,colors=CP,styles="[]",>points,w=0.2,x=0.3,y=0.4):
```



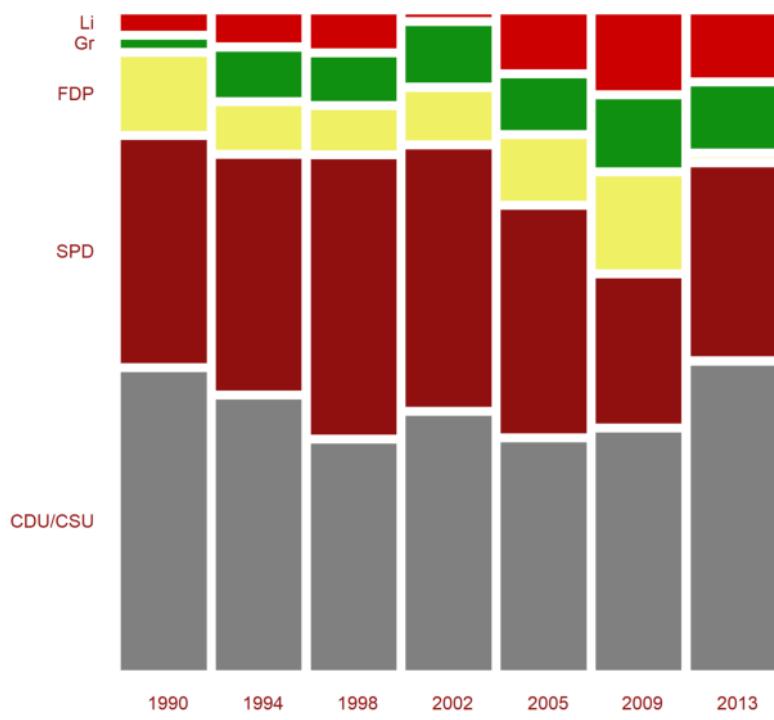
Plot kolom 3D menunjukkan deretan data statistik dalam bentuk kolom. Kami menyediakan label untuk baris dan kolom. sudut adalah sudut pandang.

```
>columnsplot3d(BT, scols=P, srows=YT, ...
>   angle=30°, ccols=CP):
```



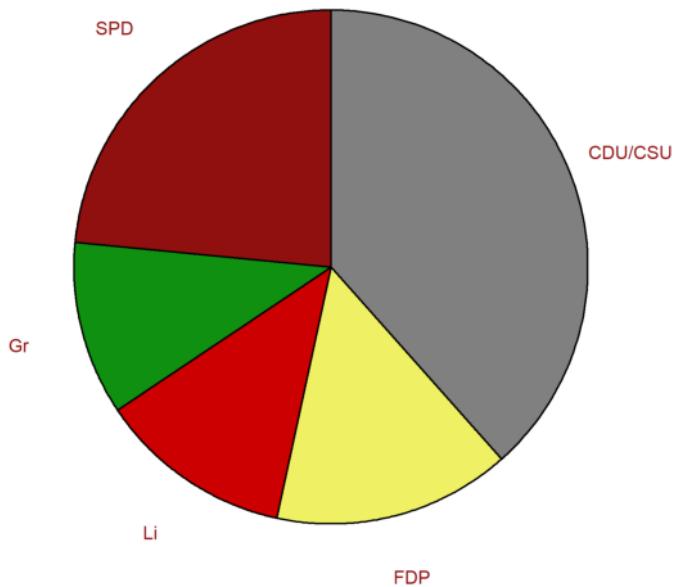
Representasi lainnya adalah plot mozaik. Perhatikan bahwa kolom plot mewakili kolom matriks di sini. Karena panjang label CDU/CSU, kami mengambil jendela yang lebih kecil dari biasanya.

```
>shrinkwindow(>smaller); ...
>mosaicplot(BT', srows=YT, scols=P, color=CP, style="#" );
>shrinkwindow():
```



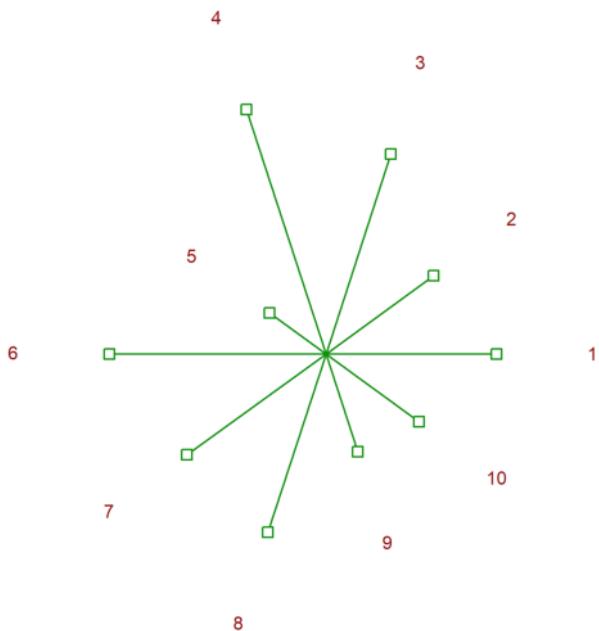
Kita juga bisa membuat diagram lingkaran. Karena hitam dan kuning membentuk koalisi, kami menyusun ulang elemennya.

```
>i=[1,3,5,4,2]; piechart(BW[6,3:7][i],color=CP[i],lab=P[i]):
```



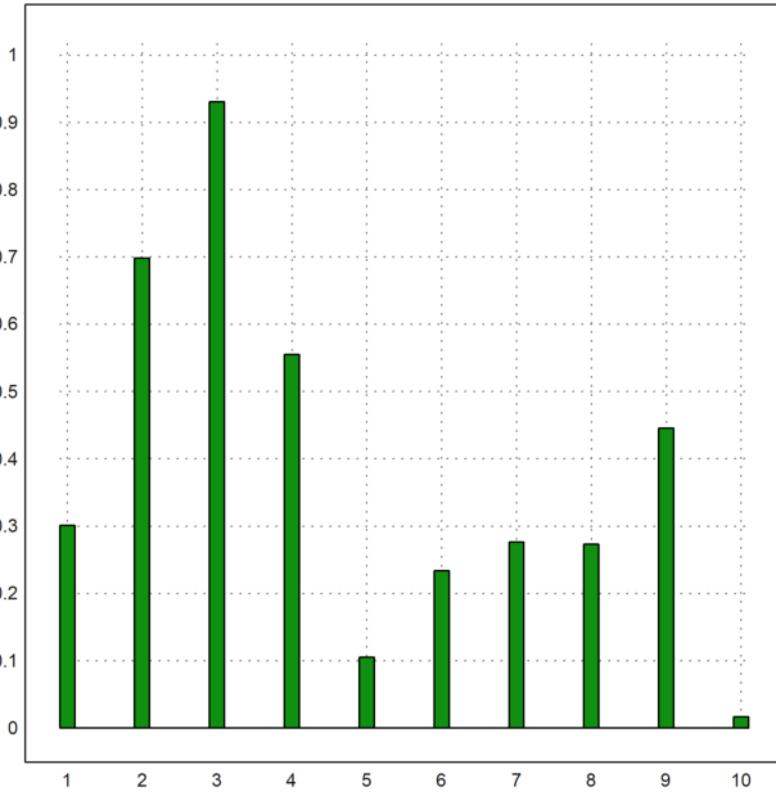
Ini jenis plot lainnya.

```
>starplot(normal(1,10)+4,lab=1:10,>rays):
```



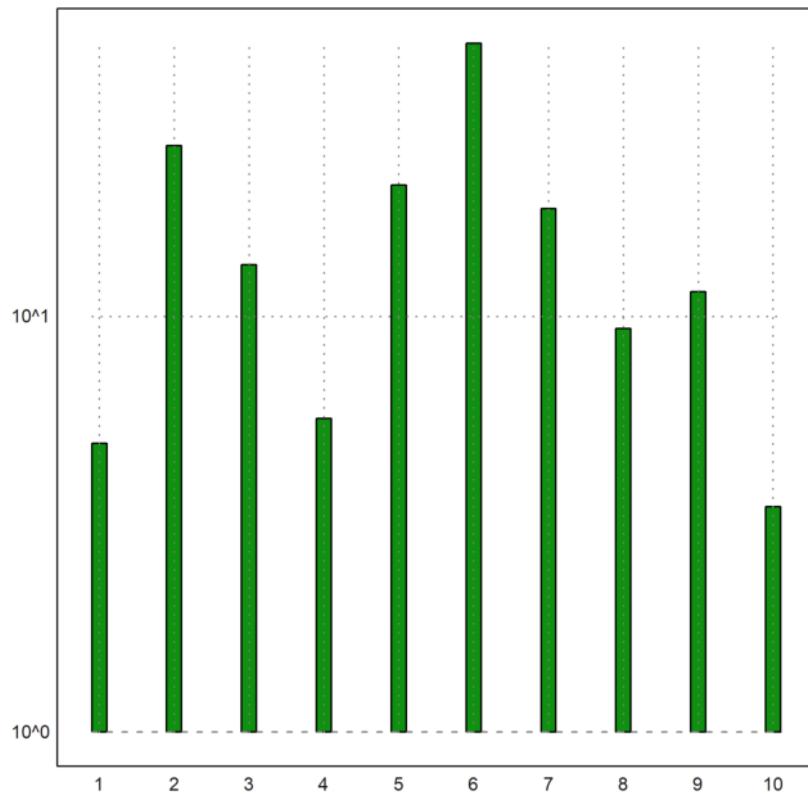
Beberapa plot di plot2d bagus untuk statika. Berikut adalah plot impuls dari data acak, terdistribusi secara seragam di [0,1].

```
>plot2d(makeimpulse(1:10,random(1,10)),>bar):
```



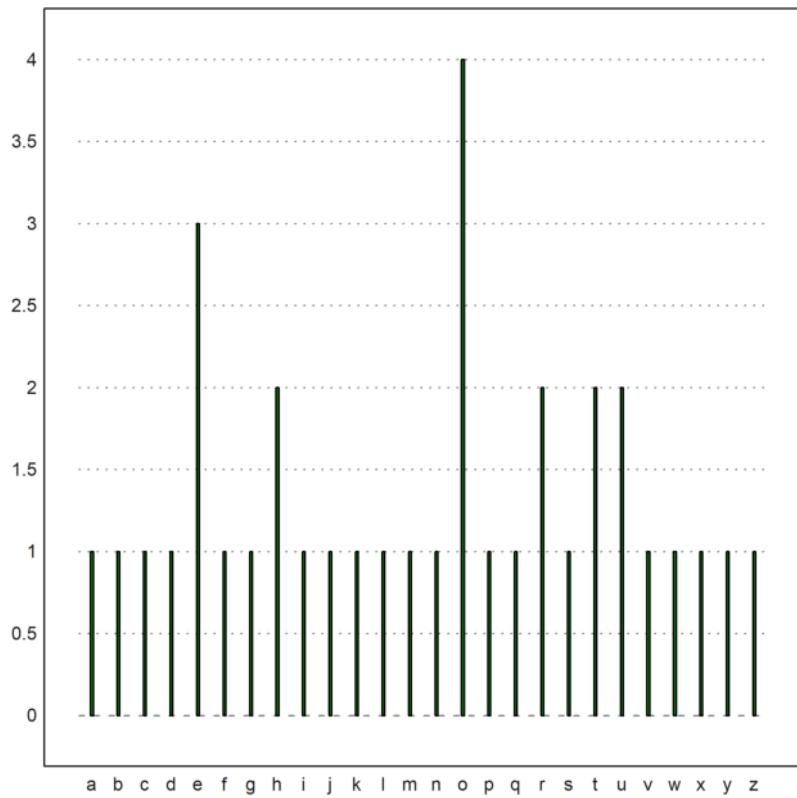
Tetapi untuk data yang terdistribusi secara eksponensial, kita mungkin memerlukan plot logaritmik.

```
>logimpulseplot(1:10,-log(random(1,10))*10):
```



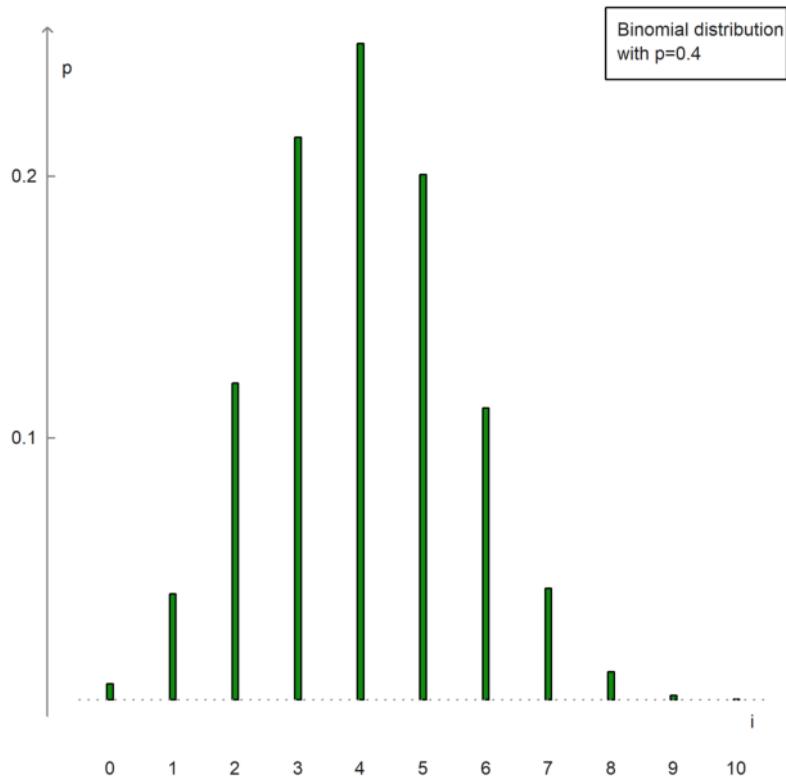
Fungsi `columnplot()` lebih mudah digunakan, karena hanya membutuhkan vektor nilai. Selain itu, ia dapat mengatur labelnya ke apa pun yang kita inginkan, kita telah mendemonstrasikannya di tutorial ini. Ini adalah aplikasi lain, di mana kami menghitung karakter dalam sebuah kalimat dan memplot statistik.

```
>v=strtochar("the quick brown fox jumps over the lazy dog"); ...
>w=ascii("a"):ascii("z"); x=getmultiplicities(w,v); ...
>cw=[]; for k=w; cw=cw|char(k); end; ...
>columnplot(x,lab=cw,width=0.05):
```



Dimungkinkan juga untuk mengatur sumbu secara manual.

```
>n=10; p=0.4; i=0:n; x=bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i); ...
>columnsplot(x,lab=i,width=0.05,<frame,<grid); ...
>yaxis(0,0:0.1:1,style="->",>left); xaxis(0,style="."); ...
>label("p",0,0.25), label("i",11,0); ...
>textbox(["Binomial distribution","with p=0.4"]):
```



Berikut ini adalah cara memplot frekuensi bilangan dalam vektor.
Kami membuat vektor bilangan acak bilangan bulat 1 hingga 6.

```
>v:=intrandom(1,10,10)
```

```
[8, 4, 7, 9, 10, 7, 7, 5, 2, 4]
```

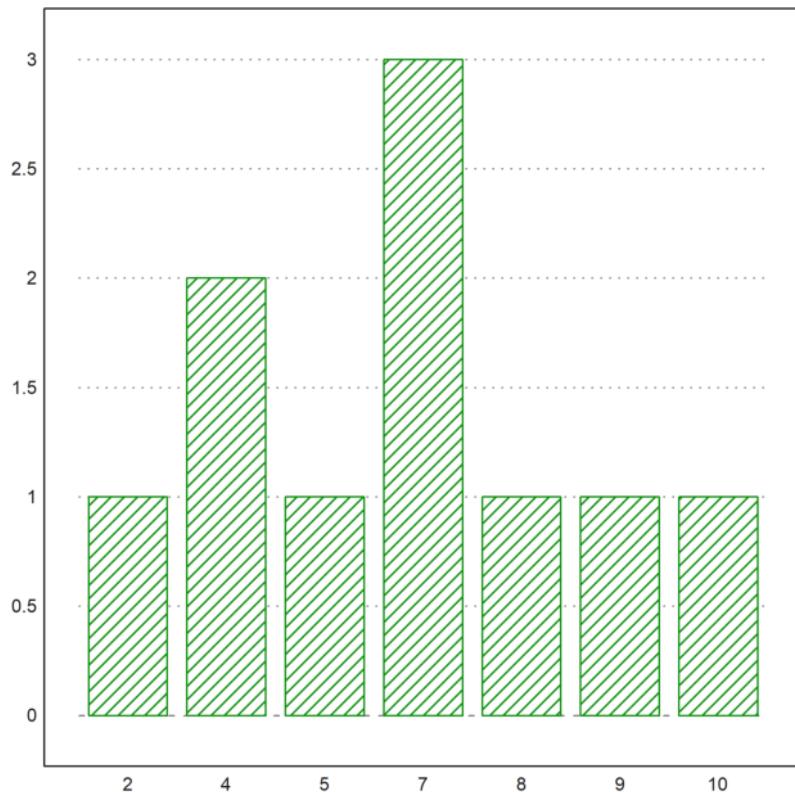
Kemudian ekstrak angka unik di v.

```
>vu:=unique(v)
```

```
[2, 4, 5, 7, 8, 9, 10]
```

Dan plot frekuensi dalam plot kolom.

```
>columnsplot (getmultiplicities(vu,v),lab=vu,style="/") :
```



Kami ingin menunjukkan fungsi untuk distribusi nilai empiris.

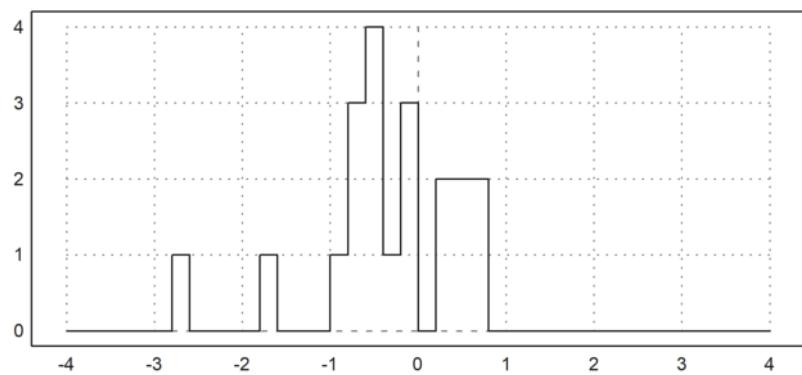
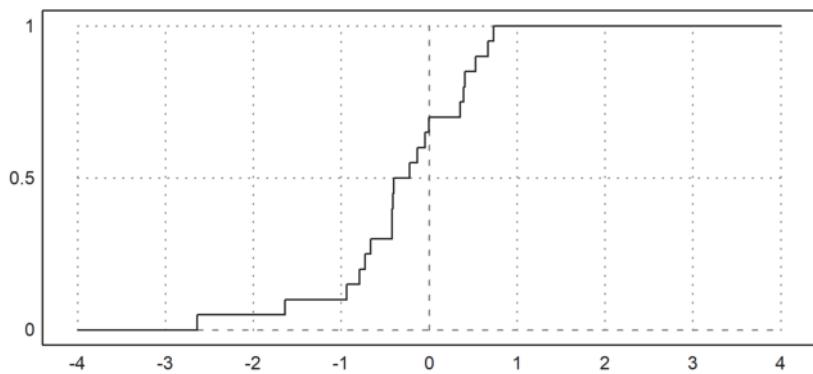
```
>x=normal(1,20);
```

Fungsi empdist(x,vs) membutuhkan array nilai yang diurutkan. Jadi kita harus mengurutkan x sebelum kita dapat menggunakaninya.

```
>xs=sort(x);
```

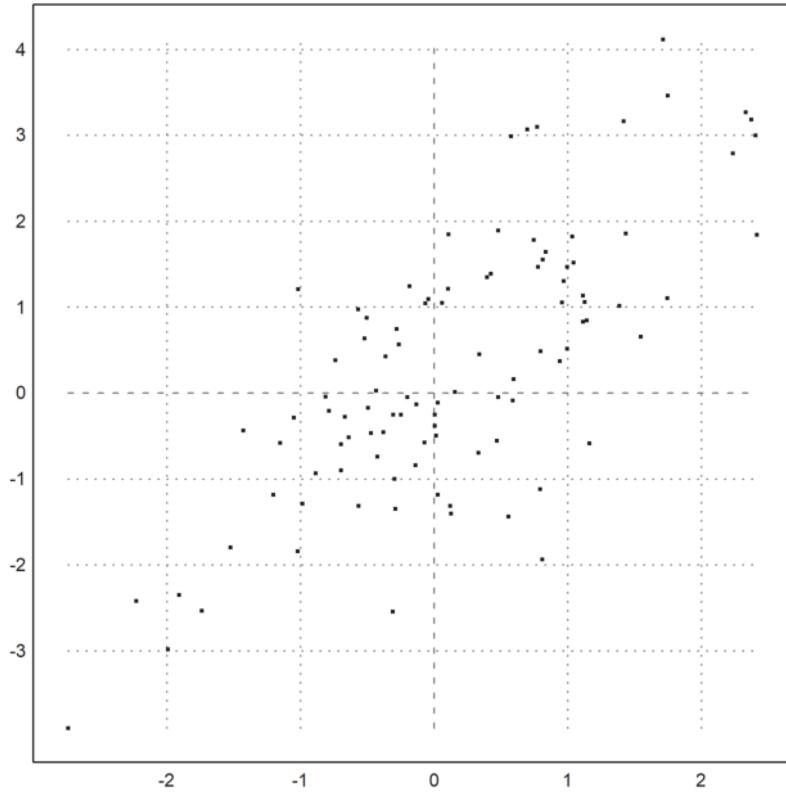
Kemudian kami memplot distribusi empiris dan beberapa batang kepadatan menjadi satu plot. Alih-alih plot batang untuk distribusi, kali ini kami menggunakan plot gigi gergaji.

```
>figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d("empdist",-4,4;xs); ...
>figure(2); plot2d(histo(x,v=-4:0.2:4,<bar)); ...
>figure(0):
```



Plot pencar mudah dilakukan di Euler dengan plot titik biasa. Grafik berikut menunjukkan bahwa X dan $X+Y$ jelas berkorelasi positif.

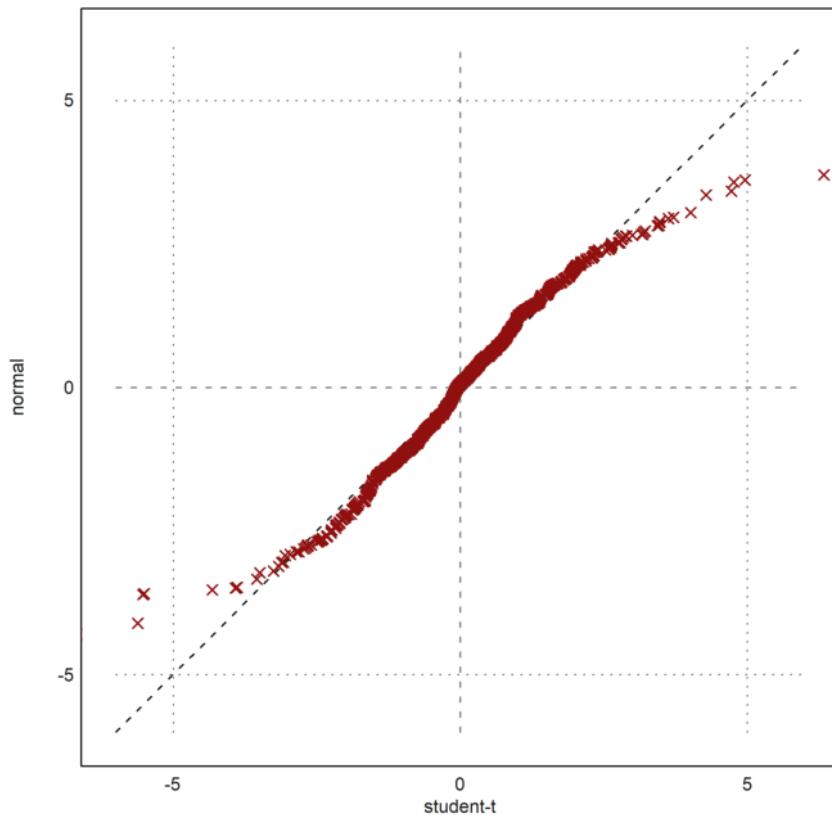
```
>x=normal(1,100); plot2d(x,x+rotright(x),>points,style=".."):
```



Seringkali, kami ingin membandingkan dua sampel dari distribusi yang berbeda. Ini dapat dilakukan dengan plot kuantil-kuantil.

Untuk pengujian, kami mencoba distribusi student-t dan distribusi eksponensial.

```
>x=randt(1,1000,5); y=randnormal(1,1000,mean(x),dev(x)); ...
>plot2d("x",r=6,style="--",yl="normal",xl="student-t",>vertical); ...
>plot2d(sort(x),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



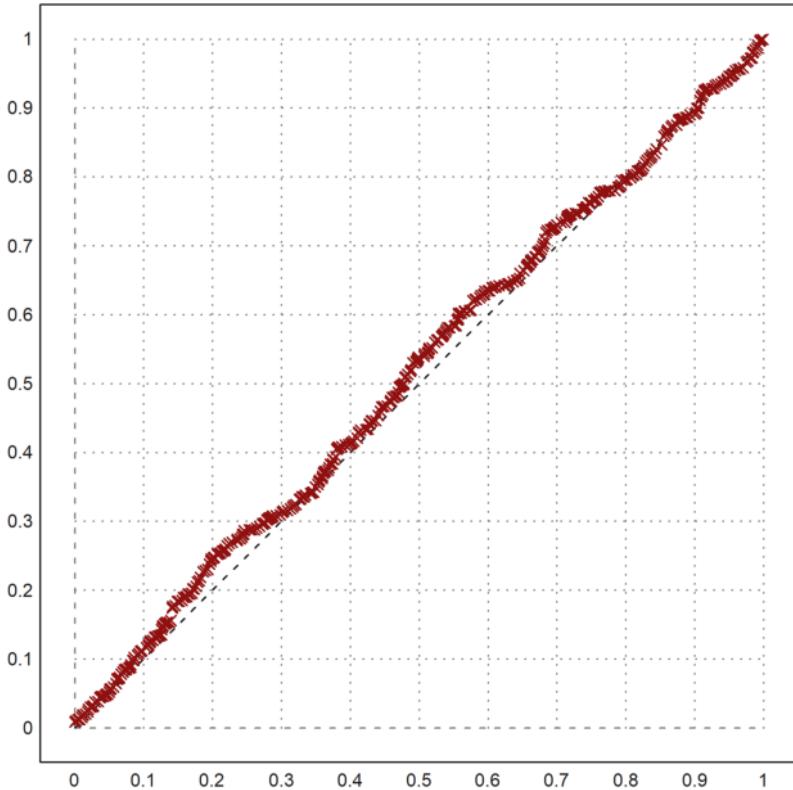
Plot jelas menunjukkan bahwa nilai terdistribusi normal cenderung lebih kecil di ujung ekstrim.

Jika kita memiliki dua distribusi dengan ukuran berbeda, kita dapat memperluas yang lebih kecil atau mengecilkan yang lebih besar. Fungsi berikut ini baik untuk keduanya. Dibutuhkan nilai median dengan persentase antara 0 dan 1.

```
>function medianexpand (x,n) := median(x,p=linspace(0,1,n-1));
```

Mari kita bandingkan dua distribusi yang sama.

```
>x=random(1000); y=random(400); ...
>plot2d("x",0,1,style="--"); ...
>plot2d(sort(medianexpand(x,400)),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



Regresi dan Korelasi

Regresi linier dapat dilakukan dengan fungsi polyfit() atau berbagai fungsi fit.

Sebagai permulaan, kami menemukan garis regresi untuk data univariat dengan polyfit(x,y,1).

```
>x=1:10; y=[2,3,1,5,6,3,7,8,9,8]; writetable(x' | y', labc=["x", "y"])
```

x	y
1	2
2	3
3	1
4	5
5	6
6	3
7	7
8	8
9	9
10	8

Kami ingin membandingkan kecocokan yang tidak berbobot dan berbobot. Pertama koefisien fit linier.

```
>p=polyfit(x,y,1)
```

```
[0.733333, 0.812121]
```

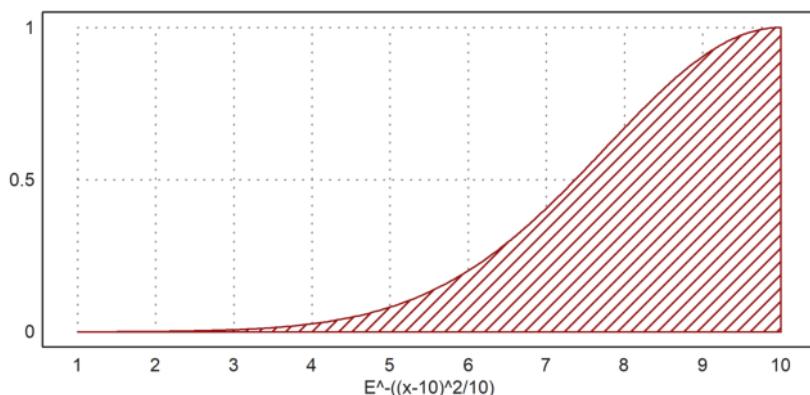
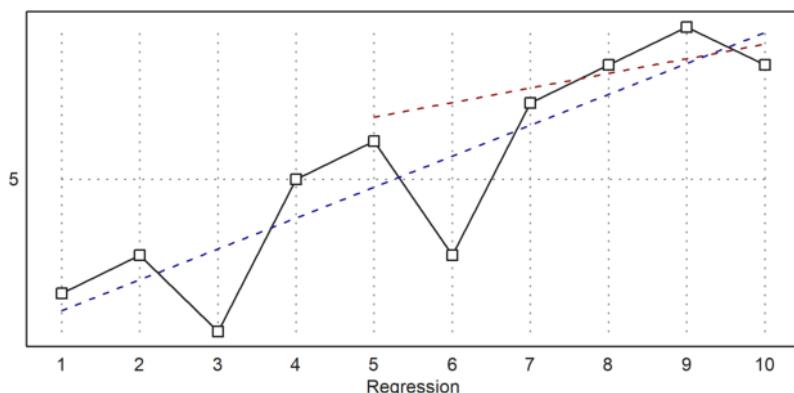
Sekarang koefisien dengan bobot yang menekankan nilai terakhir.

```
>w &= "exp(-(x-10)^2/10)"; pw=polyfit(x,y,1,w=w(x))
```

```
[4.71566, 0.38319]
```

Kami memasukkan semuanya ke dalam satu plot untuk poin dan garis regresi, dan untuk bobot yang digunakan.

```
>figure(2,1); ...
>figure(1); statplot(x,y,"b",xl="Regression"); ...
> plot2d("evalpoly(x,p)",>add,color=blue,style="--"); ...
> plot2d("evalpoly(x,pw)",5,10,>add,color=red,style="--"); ...
>figure(2); plot2d(w,1,10,>filled,style="/",fillcolor=red,xl=w); ...
>figure(0):
```



Sebagai contoh lain kita membaca survei siswa, umur mereka, umur orang tua mereka dan jumlah saudara dari sebuah file.

Tabel ini berisi "m" dan "f" di kolom kedua. Kami menggunakan variabel tok2 untuk menyetel terjemahan yang tepat alih-alih membiarkan readtable() mengumpulkan terjemahan.

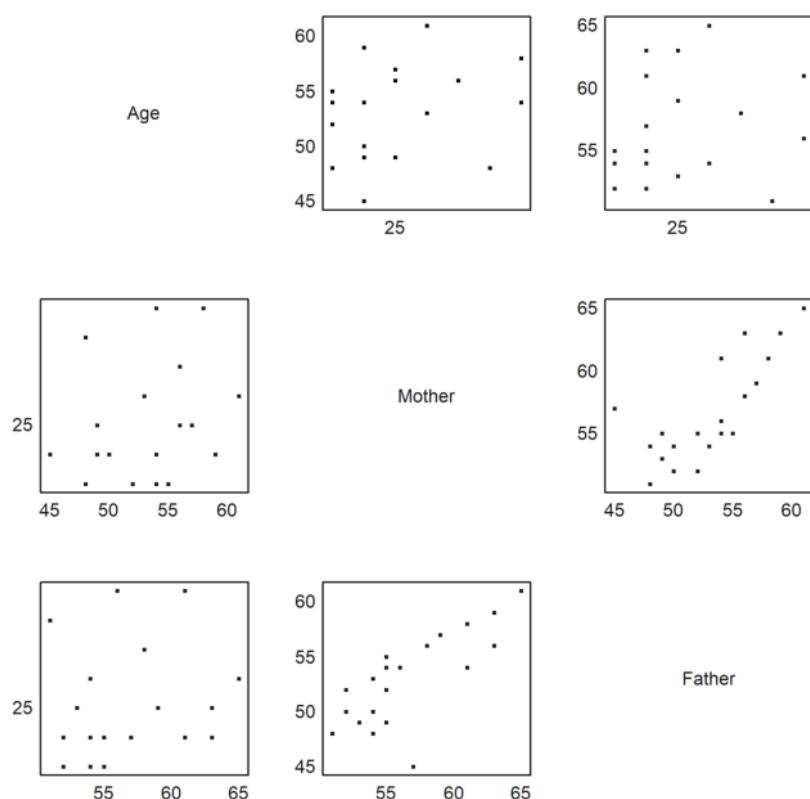
```
>{MS,hd}:=readtable("table1.dat",tok2:=[ "m", "f"]); ...
>writetable(MS,labc=hd,tok2:=[ "m", "f"]);
```

Person	Sex	Age	Mother	Father	Siblings
1	m	29	58	61	1

2	f	26	53	54	2
3	m	24	49	55	1
4	f	25	56	63	3
5	f	25	49	53	0
6	f	23	55	55	2
7	m	23	48	54	2
8	m	27	56	58	1
9	m	25	57	59	1
10	m	24	50	54	1
11	f	26	61	65	1
12	m	24	50	52	1
13	m	29	54	56	1
14	m	28	48	51	2
15	f	23	52	52	1
16	m	24	45	57	1
17	f	24	59	63	0
18	f	23	52	55	1
19	m	24	54	61	2
20	f	23	54	55	1

Bagaimana usia bergantung satu sama lain? Kesan pertama berasal dari sebar berpasangan.

```
>scatterplots(tablecol(MS, 3:5), hd[3:5]):
```



Jelas terlihat bahwa usia ayah dan ibu saling bergantung. Mari kita tentukan dan plot garis regresi.

```
>cs:=MS[, 4:5]'; ps:=polyfit(cs[1], cs[2], 1)
```

```
[17.3789, 0.740964]
```

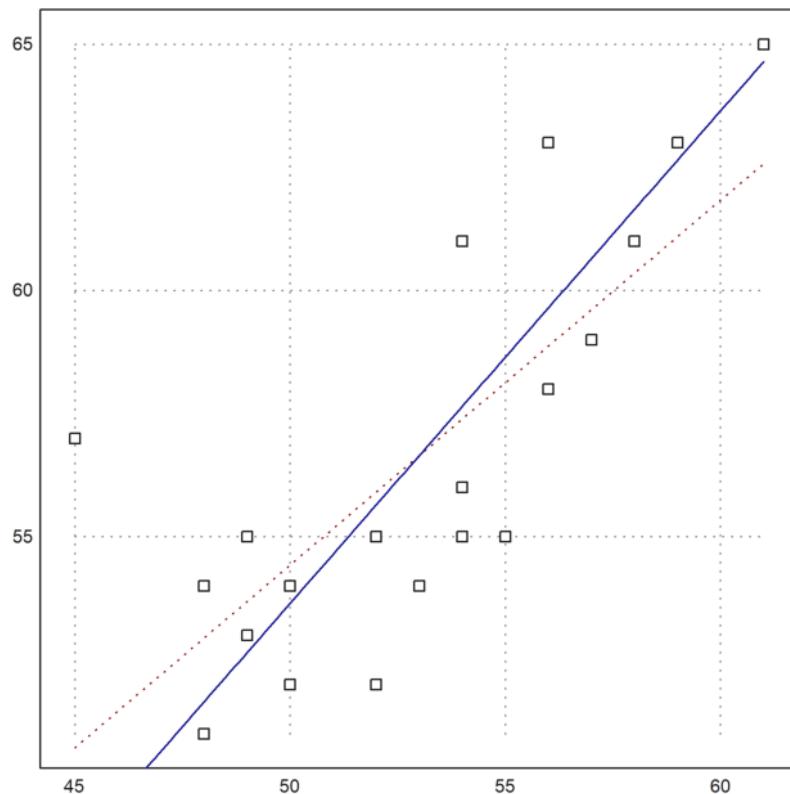
Ini jelas model yang salah. Garis regresi adalah $s=17+0,74t$, di mana t adalah umur ibu dan s adalah umur ayah. Perbedaan usia mungkin sedikit bergantung pada usia, tetapi tidak terlalu banyak. Sebaliknya, kami mencurigai fungsi seperti $s=a+t$. Maka a adalah rata-rata dari $s-t$. Ini adalah perbedaan usia rata-rata antara ayah dan ibu.

```
>da:=mean(cs[2]-cs[1])
```

3.65

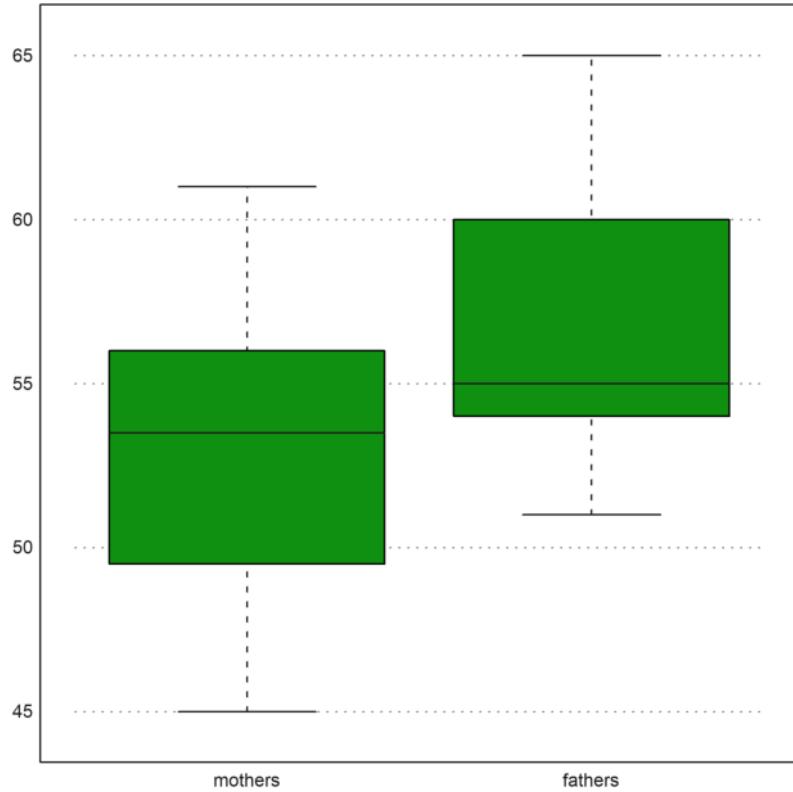
Mari kita plot ini menjadi satu plot pencar.

```
>plot2d(cs[1],cs[2],>points); ...
>plot2d("evalpoly(x,ps)",color=red,style=".",>add); ...
>plot2d("x+da",color=blue,>add):
```



Berikut adalah plot kotak dari dua zaman. Ini hanya menunjukkan, bahwa usianya berbeda.

```
>boxplot(cs, ["mothers", "fathers"]):
```



Menariknya, perbedaan median tidak sebesar perbedaan rata-rata.

```
>median(cs[2])-median(cs[1])
```

1.5

Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.

```
>correl(cs[1],cs[2])
```

0.7588307236

Korelasi peringkat adalah ukuran untuk urutan yang sama di kedua vektor. Ini juga cukup positif.

```
>rankcorrel(cs[1],cs[2])
```

0.758925292358

Membuat Fungsi baru

Tentu saja, bahasa EMT dapat digunakan untuk memprogram fungsi-fungsi baru. Misalnya, kita mendefinisikan fungsi skewness.

$$sk(x) = \frac{\sqrt{n} \sum_i (x_i - m)^3}{(\sum_i (x_i - m)^2)^{3/2}}$$

di mana m adalah rata-rata dari x .

```
>function skew (x:vector) ...  
  
m=mean(x);  
return sqrt(cols(x))*sum((x-m)^3)/(sum((x-m)^2))^(3/2);  
endfunction
```

Seperti yang Anda lihat, kita dapat dengan mudah menggunakan bahasa matriks untuk mendapatkan implementasi yang sangat singkat dan efisien. Mari kita coba fungsi ini.

```
>data=normal(20); skew(normal(10))
```

-0.345712541034

Ini adalah fungsi lain, yang disebut koefisien kemiringan Pearson.

```
>function skew1 (x) := 3*(mean(x)-median(x))/dev(x)  
>skew1(data)
```

0.388648988706

Simulasi Monte Carlo

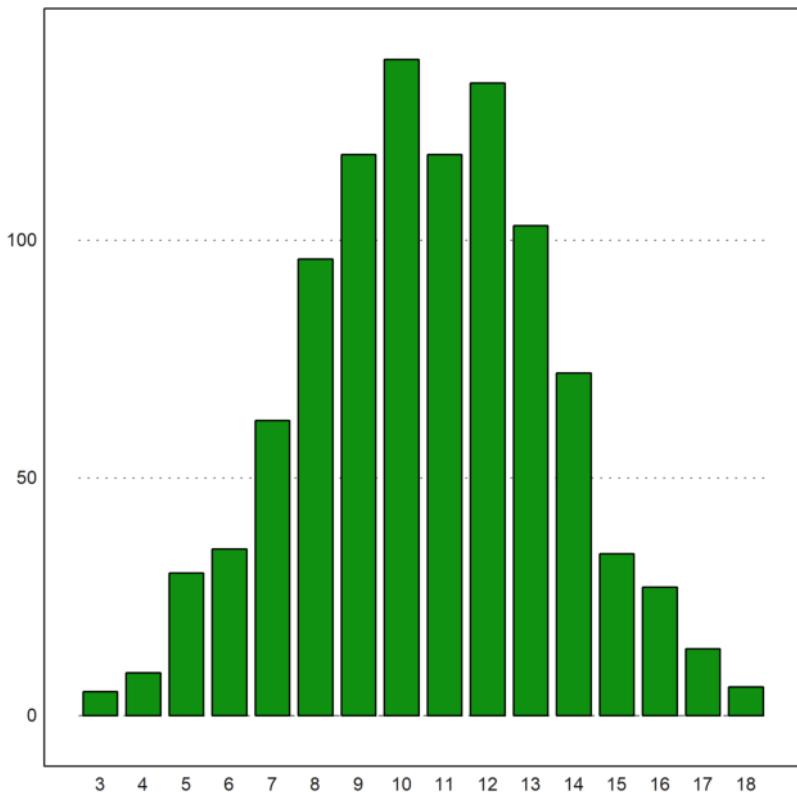
Euler dapat digunakan untuk mensimulasikan kejadian acak. Kita telah melihat contoh sederhana di atas. Ini satu lagi, yang mensimulasikan 1000 kali 3 lemparan dadu, dan meminta distribusi jumlahnya.

```
>ds:=sum(intrandom(1000,3,6))'; fs=getmultiplicities(3:18,ds)
```

[5, 9, 30, 35, 62, 96, 118, 138, 118, 133, 103, 72, 34,
27, 14, 6]

Kita bisa merencanakan ini sekarang.

```
>columnsplot(fs,lab=3:18):
```



Untuk menentukan distribusi yang diharapkan tidak begitu mudah. Kami menggunakan rekursi lanjutan untuk ini.

Fungsi berikut menghitung banyaknya cara bilangan k dapat dinyatakan sebagai jumlah dari n bilangan dalam rentang 1 sampai m. Ini bekerja secara rekursif dengan cara yang jelas.

```
>function map countways (k; n, m) ...
```

```
if n==1 then return k>=1 && k<=m
else
  sum=0;
  loop 1 to m; sum=sum+countways(k-#,n-1,m); end;
  return sum;
end;
endfunction
```

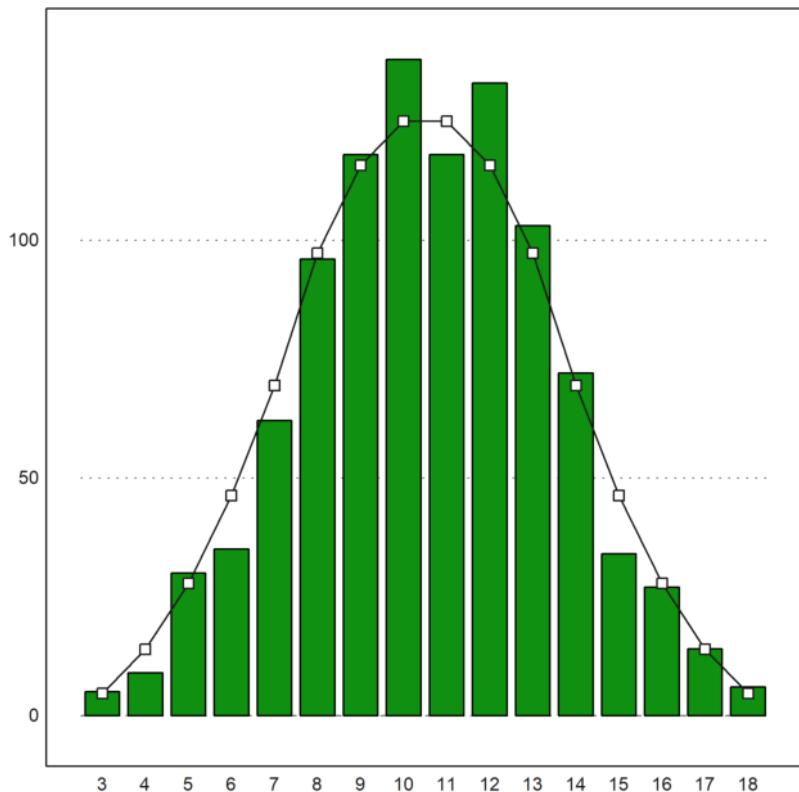
Inilah hasil lemparan dadu sebanyak tiga kali.

```
>cw=countways(3:18,3,6)
```

```
[1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3,
1]
```

Kami menambahkan nilai yang diharapkan ke plot.

```
>plot2d(cw/6^3*1000,>add); plot2d(cw/6^3*1000,>points,>add):
```



Untuk simulasi lain, penyimpangan nilai rata-rata n 0-1-variabel acak terdistribusi normal adalah $1/\sqrt{n}$.

```
>longformat; 1/sqrt(10)
```

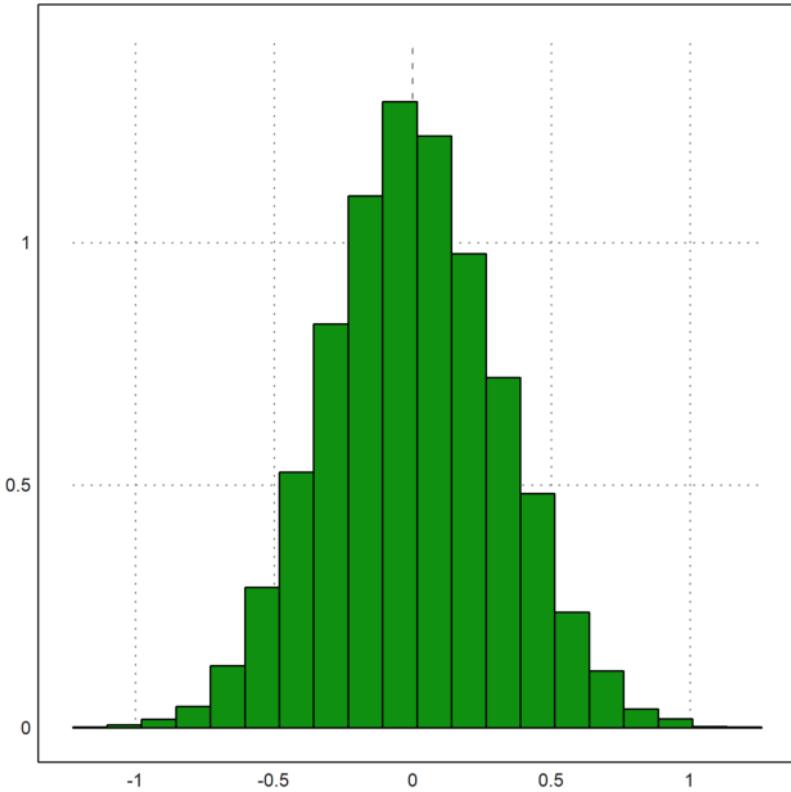
0.316227766017

Mari kita periksa ini dengan simulasi. Kami menghasilkan 10.000 kali 10 vektor acak.

```
>M=normal(10000,10); dev(mean(M)')
```

0.31348333145

```
>plot2d(mean(M)',>distribution):
```



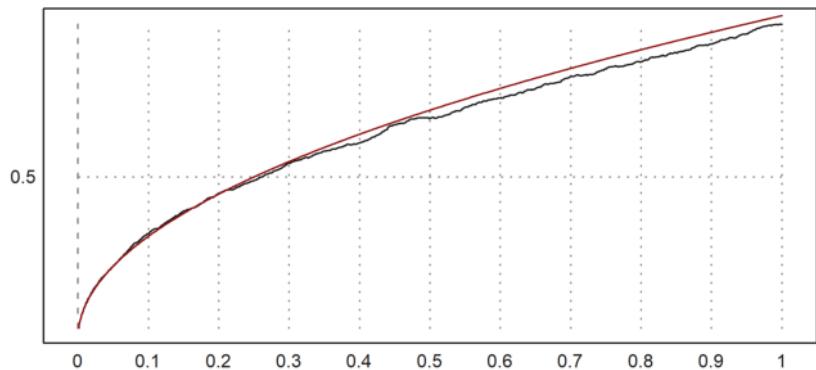
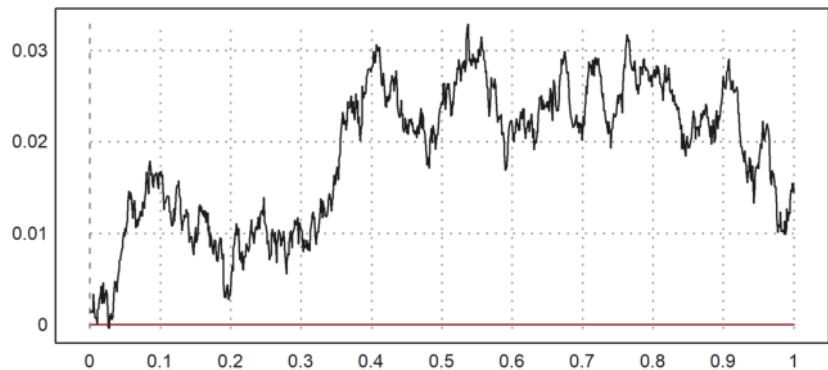
Median dari 10 bilangan acak terdistribusi 0-1-normal memiliki deviasi yang lebih besar.

```
>dev(median(M)')
```

0.369509865965

Karena kita dapat dengan mudah membuat jalan acak, kita dapat mensimulasikan proses Wiener. Kami mengambil 1000 langkah dari 1000 proses. Kami kemudian memplot standar deviasi dan rata-rata langkah ke-n dari proses ini bersama dengan nilai yang diharapkan dalam warna merah.

```
>n=1000; m=1000; M=cumsum(normal(n,m)/sqrt(m)); ...
>t=(1:n)/n; figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d(t,mean(M)'), plot2d(t,0,color=red,>add); ...
>figure(2); plot2d(t,dev(M)'), plot2d(t,sqrt(t),color=red,>add); ...
>figure(0):
```



Tes

Tes adalah alat penting dalam statistik. Di Euler, banyak tes yang diterapkan. Semua tes ini mengembalikan kesalahan yang kami terima jika kami menolak hipotesis nol.

Sebagai contoh, kami menguji lemparan dadu untuk distribusi seragam. Pada 600 lemparan, kami mendapat nilai berikut, yang kami masukkan ke uji chi-square.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(100,6)')
```

0.498830517952

Tes chi-kuadrat juga memiliki mode yang menggunakan simulasi Monte Carlo untuk menguji statistik. Hasilnya harus hampir sama. Parameter `>p` menginterpretasikan vektor-y sebagai vektor probabilitas.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(1/6,6)',>p,>montecarlo)
```

0.495

Kesalahan ini terlalu besar. Jadi kita tidak bisa menolak pemerataan distribusi. Ini tidak membuktikan bahwa dadu kami adil. Tapi kita tidak bisa menolak hipotesis kita.

Selanjutnya kami menghasilkan 1000 lemparan dadu menggunakan generator angka acak, dan melakukan pengujian yang sama.

```
>n=1000; t=random([1,n*6]); chitest(count(t*6,6),dup(n,6)')
```

0.316270851418

Mari kita uji nilai rata-rata 100 dengan uji-t.

```
>s=200+normal([1,100])*10; ...
>ttest(mean(s), dev(s), 100, 200)
```

0.284858316973

Fungsi `ttest()` membutuhkan nilai rata-rata, simpangan, jumlah data, dan nilai rata-rata untuk diuji. Sekarang mari kita periksa dua pengukuran untuk rata-rata yang sama. Kami menolak hipotesis bahwa mereka memiliki rata-rata yang sama, jika hasilnya $<0,05$.

```
>tcomparedata(normal(1,10), normal(1,10))
```

0.0780781363533

Jika kami menambahkan bias ke satu distribusi, kami mendapat lebih banyak penolakan. Ulangi simulasi ini beberapa kali untuk melihat efeknya.

```
>tcomparedata(normal(1,10), normal(1,10)+2)
```

0.000434292197039

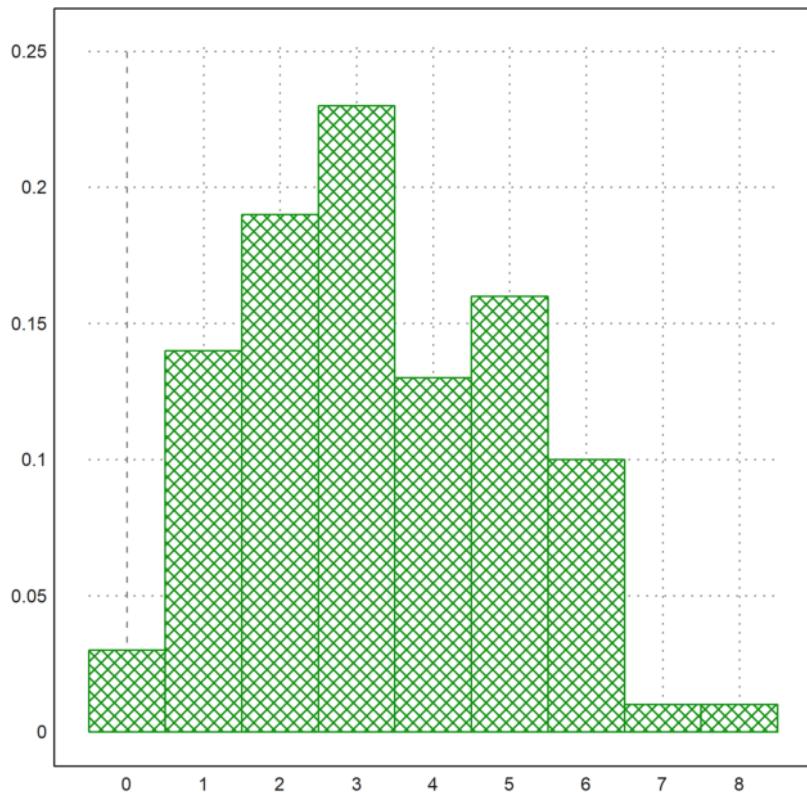
Dalam contoh berikutnya, kami menghasilkan 20 lemparan dadu acak 100 kali dan menghitungnya. Harus ada rata-rata $20/6=3,3$.

```
>R=random(100,20); R=sum(R*6<=1); mean(R)
```

3.28

Kami sekarang membandingkan jumlah satu dengan distribusi binomial. Pertama kita memplot distribusi satuan.

```
>plot2d(R, distribution=max(R)+1, even=1, style="\\"":
```



```
>t=count(R,21);
```

Kemudian kami menghitung nilai yang diharapkan.

```
>n=0:20; b=bin(20,n)*(1/6)^n*(5/6)^(20-n)*100;
```

Kita harus mengumpulkan beberapa angka untuk mendapatkan kategori yang cukup besar.

```
>t1=sum(t[1:2])|t[3:7]|sum(t[8:21]); ...
>b1=sum(b[1:2])|b[3:7]|sum(b[8:21]);
```

Uji chi-square menolak hipotesis bahwa distribusi kita adalah distribusi binomial, jika hasilnya <0,05.

```
>chitest(t1,b1)
```

0.295831675377

Contoh berikut berisi hasil dari dua kelompok orang (pria dan wanita, katakanlah) memilih satu dari enam partai.

```
>A=[23,37,43,52,64,74;27,39,41,49,63,76]; ...
> writetable(A,wc=6,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

	1	2	3	4	5	6
m	23	37	43	52	64	74
f	27	39	41	49	63	76

Kami ingin menguji independensi suara dari jenis kelamin. Tes tabel chi² melakukan ini. Hasilnya terlalu besar untuk menolak kemerdekaan. Jadi kami tidak bisa mengatakan, jika pemungutan suara tergantung pada jenis kelamin dari data tersebut.

```
>tabletest (A)
```

0.990701632326

Berikut adalah tabel yang diharapkan, jika kita mengasumsikan frekuensi pemungutan suara yang diamati.

```
>writetable(expectedtable(A), wc=6, dc=1, labr=["m", "f"], labc=1:6)
```

	1	2	3	4	5	6
m	24.9	37.9	41.9	50.3	63.3	74.7
f	25.1	38.1	42.1	50.7	63.7	75.3

Kita dapat menghitung koefisien kontingensi yang dikoreksi. Karena sangat mendekati 0, kami menyimpulkan bahwa pemungutan suara tidak bergantung pada jenis kelamin.

```
>contingency (A)
```

0.0427225484717

Beberapa Tes Lagi

Selanjutnya kami menggunakan analisis varians (F-test) untuk menguji tiga sampel data yang terdistribusi normal untuk nilai rata-rata yang sama. Metode tersebut dinamakan ANOVA (analysis of variance). Di Euler, fungsi varanalysis() digunakan.

```
>x1=[109,111,98,119,91,118,109,99,115,109,94]; mean(x1),
```

106.545454545

```
>x2=[120,124,115,139,114,110,113,120,117]; mean(x2),
```

119.111111111

```
>x3=[120,112,115,110,105,134,105,130,121,111]; mean(x3)
```

116.3

```
>varanalysis(x1,x2,x3)
```

0.0138048221371

Ini berarti, kami menolak hipotesis dengan nilai rata-rata yang sama. Kami melakukan ini dengan probabilitas kesalahan 1,3%.

Ada juga uji median yang menolak sampel data dengan distribusi rata-rata yang berbeda menguji median sampel bersatu.

```
>a=[56, 66, 68, 49, 61, 53, 45, 58, 54];  
>b=[72, 81, 51, 73, 69, 78, 59, 67, 65, 71, 68, 71];  
>mediantest(a,b)
```

0.0241724220052

Tes lain tentang kesetaraan adalah tes peringkat. Ini jauh lebih tajam daripada tes median.

```
>ranktest(a,b)
```

0.00199969612469

Dalam contoh berikut, kedua distribusi memiliki rata-rata yang sama.

```
>ranktest(random(1,100),random(1,50)*3-1)
```

0.143560703116

Mari kita coba mensimulasikan dua perlakuan a dan b yang diterapkan pada orang yang berbeda.

```
>a=[8.0, 7.4, 5.9, 9.4, 8.6, 8.2, 7.6, 8.1, 6.2, 8.9];  
>b=[6.8, 7.1, 6.8, 8.3, 7.9, 7.2, 7.4, 6.8, 6.8, 8.1];
```

Tes signum memutuskan, jika a lebih baik dari b.

```
>signtest(a,b)
```

0.0546875

Ini terlalu banyak kesalahan. Kita tidak dapat menolak bahwa a sama baiknya dengan b.

Tes Wilcoxon lebih tajam dari tes ini, tetapi bergantung pada nilai kuantitatif perbedaannya.

```
>>wilcoxon(a,b)
```

0.0296680599405

Mari kita coba dua tes lagi menggunakan rangkaian yang dihasilkan.

```
>>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20)-1)
```

0.00227496393515

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20))
```

0.52975950705

Angka Acak

Berikut ini adalah tes untuk generator angka acak. Euler menggunakan generator yang sangat bagus, jadi kita tidak perlu berharap ada masalah.

Pertama kami menghasilkan sepuluh juta angka acak di [0,1].

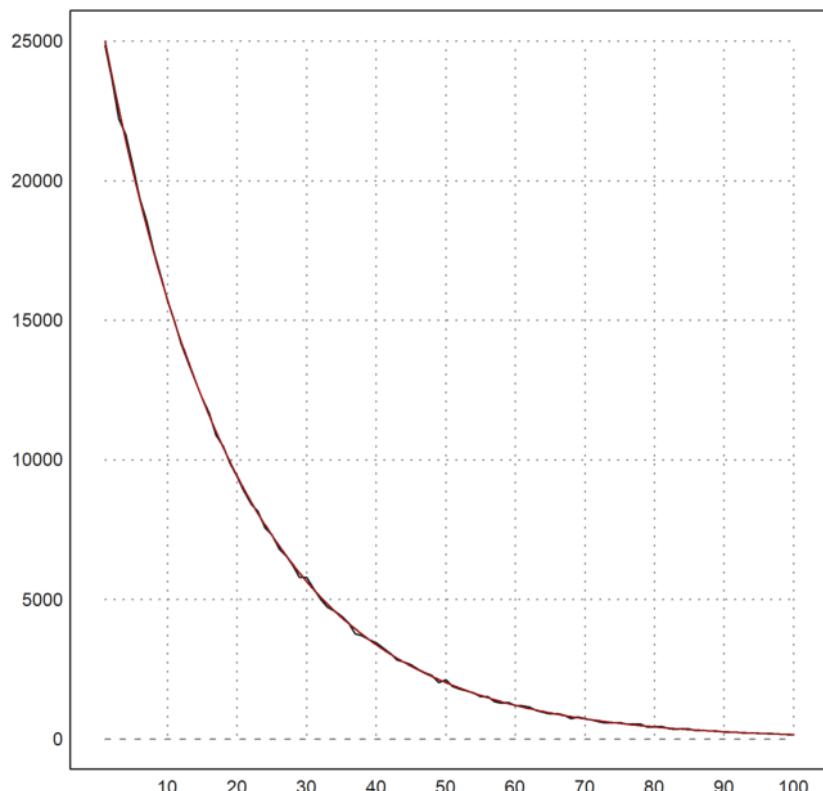
```
>n:=10000000; r:=random(1,n);
```

Selanjutnya kita menghitung jarak antara dua angka kurang dari 0,05.

```
>a:=0.05; d:=differences(nonzeros(r<a));
```

Akhirnya, kami memplot berapa kali, setiap jarak terjadi, dan membandingkannya dengan nilai yang diharapkan.

```
>m=getmultiplicities(1:100,d); plot2d(m); ...
> plot2d("n*(1-a)^(x-1)*a^2",color=red,>add):
```



Hapus datanya.

```
>remvalue n;
```

Pengantar untuk Pengguna Proyek R

Jelas, EMT tidak bersaing dengan R sebagai paket statistik. Namun, ada banyak prosedur dan fungsi statistik yang tersedia di EMT juga. Jadi EMT dapat memenuhi kebutuhan dasar. Lagi pula, EMT hadir dengan paket numerik dan sistem aljabar komputer.

Notebook ini cocok untuk Anda jika sudah familiar dengan R, namun perlu mengetahui perbedaan sintaks EMT dan R. Kami mencoba memberikan gambaran umum tentang hal-hal yang jelas dan kurang jelas yang perlu Anda ketahui.

Selain itu, kami mencari cara untuk bertukar data antara kedua sistem.

Perhatikan bahwa ini adalah pekerjaan yang sedang berjalan. **Sintaks Dasar**

Hal pertama yang Anda pelajari di R adalah membuat vektor. Di EMT, perbedaan utamanya adalah operator : dapat mengambil ukuran langkah. Apalagi daya ikatnya rendah.

```
>n=10; 0:n/20:n-1
```

```
[0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5,  
7, 7.5, 8, 8.5, 9]
```

Fungsi c() tidak ada. Dimungkinkan untuk menggunakan vektor untuk menggabungkan berbagai hal.

Contoh berikut, seperti banyak lainnya, dari "Introduction to R" yang disertakan dengan proyek R. Jika Anda membaca PDF ini, Anda akan menemukan bahwa saya mengikuti jalannya dalam tutorial ini.

```
>x=[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]; [x,0,x]
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7, 0, 10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Operator titik dua dengan ukuran langkah EMT diganti dengan fungsi seq() di R. Kita bisa menulis fungsi ini di EMT.

```
>function seq(a,b,c) := a:b:c; ...  
>seq(0,-0.1,-1)
```

```
[0, -0.1, -0.2, -0.3, -0.4, -0.5, -0.6, -0.7, -0.8, -0.9, -1]
```

Fungsi rep() dari R tidak ada di EMT. Untuk input vektor, dapat ditulis sebagai berikut.

```
>function rep(x:vector,n:index) := flatten(dup(x,n)); ...  
>rep(x,2)
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7, 10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Perhatikan bahwa "=" atau ":=" digunakan untuk tugas. Operator "->" digunakan untuk unit di EMT.

```
>125km -> " miles"
```

77.6713990297 miles

The "<->" operator for assignment is misleading anyway, and not a good idea of R. The following will compare a and -4 in EMT.

```
>a=2; a<-4
```

0

Di R, "a<-4<3" berfungsi, tetapi "a<-4<-3" tidak. Saya juga memiliki ambiguitas serupa di EMT, tetapi mencoba menghilangkannya sedikit demi sedikit.

EMT dan R memiliki vektor tipe boolean. Namun dalam EMT, angka 0 dan 1 digunakan untuk mewakili salah dan benar. Di R, nilai benar dan salah tetap bisa digunakan dalam aritmatika biasa seperti di EMT.

```
>x<5, %*x
```

[0, 0, 1, 0, 0]
[0, 0, 3.1, 0, 0]

EMT melempar kesalahan atau menghasilkan NAN tergantung pada bendera "kesalahan".

```
>errors off; 0/0, isNaN(sqrt(-1)), errors on;
```

NAN
1

String sama di R dan EMT. Keduanya berada di lokal saat ini, bukan di Unicode.

Di R ada paket untuk Unicode. Di EMT, sebuah string dapat berupa string Unicode. String unicode dapat diterjemahkan ke pengkodean lokal dan sebaliknya. Selain itu, u"..." dapat berisi entitas HTML.

```
>u"     ; René Grothmann"
```

  René Grothmann

Berikut ini mungkin atau mungkin tidak ditampilkan dengan benar di sistem Anda sebagai A dengan titik dan garis di atasnya. Itu tergantung pada font yang Anda gunakan.

```
>chartoutf([480])
```

Penggabungan string dilakukan dengan "+" atau "|". Itu bisa termasuk angka, yang akan dicetak dalam format saat ini.

```
>"pi = "+pi
```

pi = 3.14159265359

Pengindeksan

Sebagian besar waktu, ini akan berfungsi seperti di R.

Tetapi EMT akan menginterpretasikan indeks negatif dari belakang vektor, sedangkan R menginterpretasikan $x[n]$ sebagai x tanpa elemen ke-n.

```
>x, x[1:3], x[-2]
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]  
[10.4, 5.6, 3.1]  
6.4
```

Perilaku R dapat dicapai dalam EMT dengan drop().

```
>drop(x, 2)
```

```
[10.4, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Vektor logis tidak diperlakukan berbeda sebagai indeks di EMT, berbeda dengan R. Anda perlu mengekstraksi elemen bukan nol terlebih dahulu di EMT.

```
>x, x>5, x[nonzeros(x>5)]
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]  
[1, 1, 0, 1, 1]  
[10.4, 5.6, 6.4, 21.7]
```

Sama seperti di R, vektor indeks dapat berisi pengulangan.

```
>x[[1,2,2,1]]
```

```
[10.4, 5.6, 5.6, 10.4]
```

Tetapi nama untuk indeks tidak dimungkinkan di EMT. Untuk paket statistik, hal ini sering diperlukan untuk memudahkan akses ke elemen vektor.

Untuk meniru perilaku ini, kita dapat mendefinisikan fungsi sebagai berikut.

```
>function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ...  
>s=["first","second","third","fourth"]; sel(x,["first","third"],s)
```

```
[10.4, 3.1]
```

Tipe Data

EMT memiliki lebih banyak tipe data tetap daripada R. Jelas, di R terdapat vektor yang tumbuh. Anda dapat menyetel vektor numerik kosong v dan menetapkan nilai ke elemen v[17]. Ini tidak mungkin di EMT. Berikut ini agak tidak efisien.

```
>v=[]; for i=1 to 10000; v=v|i; end;
```

EMT sekarang akan membuat vektor dengan v dan i ditambahkan pada tumpukan dan menyalin vektor itu kembali ke variabel global v .
Semakin efisien pra-mendefinisikan vektor.

```
>v=zeros(10000); for i=1 to 10000; v[i]=i; end;
```

Untuk mengubah jenis tanggal di EMT, Anda dapat menggunakan fungsi seperti `complex()`.

```
>complex(1:4)
```

```
[ 1+0i , 2+0i , 3+0i , 4+0i ]
```

Konversi ke string hanya dimungkinkan untuk tipe data dasar. Format saat ini digunakan untuk penggabungan string sederhana. Tapi ada fungsi seperti `print()` atau `frac()`.

Untuk vektor, Anda dapat dengan mudah menulis fungsi Anda sendiri.

```
>function tostr (v) ...
```

```
s="[";  
loop 1 to length(v);  
    s=s+print(v[#,2,0);  
    if #<length(v) then s=s+","; endif;  
end;  
return s+"]";  
endfunction
```

```
>tostr(linspace(0,1,10))
```

```
[0.00,0.10,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90,1.00]
```

Untuk komunikasi dengan Maxima, terdapat fungsi `convertmxm()`, yang juga dapat digunakan untuk me-format vektor untuk output.

```
>convertm xm(1:10)
```

```
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
```

Untuk Lateks, perintah `tex` dapat digunakan untuk mendapatkan perintah Lateks.

```
>tex(&[1,2,3])
```

```
\left[ 1 , 2 , 3 \right]
```

Faktor dan Tabel

Dalam pengantar R ada contoh dengan apa yang disebut faktor.
Berikut ini adalah daftar wilayah dari 30 negara bagian.

```
>austates = ["tas", "sa", "qld", "nsw", "nsw", "nt", "wa", "wa", ...
>"qld", "vic", "nsw", "vic", "qld", "qld", "sa", "tas", ...
>"sa", "nt", "wa", "vic", "qld", "nsw", "nsw", "wa", ...
>"sa", "act", "nsw", "vic", "vic", "act"];
```

Asumsikan, kita memiliki pendapatan yang sesuai di setiap negara bagian.

```
>incomes = [60, 49, 40, 61, 64, 60, 59, 54, 62, 69, 70, 42, 56, ...
>61, 61, 61, 58, 51, 48, 65, 49, 49, 41, 48, 52, 46, ...
>59, 46, 58, 43];
```

Sekarang, kami ingin menghitung rata-rata pendapatan di wilayah tersebut. Menjadi program statistik, R memiliki factor() dan tappy() untuk ini.

EMT dapat melakukannya dengan menemukan indeks wilayah di daftar unik wilayah.

```
>auterr=sort(unique(austates)); f=indexofsorted(auterr,austates)
```

```
[6, 5, 4, 2, 2, 3, 8, 8, 4, 7, 2, 7, 4, 4, 5, 6, 5, 3,
8, 7, 4, 2, 2, 8, 5, 1, 2, 7, 7, 1]
```

Pada saat itu, kita dapat menulis fungsi loop kita sendiri untuk melakukan sesuatu hanya untuk satu faktor. Atau kita bisa meniru fungsi tapply() dengan cara berikut.

```
>function map_tappl (i; f$call, cat, x) ...
u=sort(unique(cat));
f=indexof(u,cat);
return f$(x[nonzeros(f==indexof(u,i))]);
endfunction
```

Ini sedikit tidak efisien, karena menghitung wilayah unik untuk setiap i, tetapi berhasil.

```
>tappl(auterr,"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5, 57.3333333333, 55.5, 53.6, 55, 60.5, 56, 52.25]
```

Perhatikan bahwa ini berfungsi untuk setiap vektor wilayah.

```
>tappl(["act","nsw"],"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5, 57.3333333333]
```

Sekarang, paket statistik EMT mendefinisikan tabel seperti pada R. Fungsi readtable() dan writetable() dapat digunakan untuk input dan output.

Sehingga kita bisa mencetak rata-rata pendapatan negara di daerah dengan cara yang bersahabat.

```
>writetable(tappl(auterr,"mean",austates,incomes),labc=auterr,wc=7)
```

act	nsw	nt	qld	sa	tas	vic	wa
44.5	57.33	55.5	53.6	55	60.5	56	52.25

Kami juga dapat mencoba meniru perilaku R sepenuhnya.

Faktor jelas harus disimpan dalam kumpulan dengan jenis dan kategori (negara bagian dan teritori dalam contoh kita). Untuk EMT, kami menambahkan indeks yang telah dihitung sebelumnya.

```
>function makef (t) ...  
  
## Factor data  
## Returns a collection with data t, unique data, indices.  
## See: tapply  
u=sort(unique(t));  
return {{t,u,indexofsorted(u,t)}};  
endfunction  
  
>statef=makef(austates);
```

Sekarang elemen ketiga dari koleksi akan berisi indeks.

```
>statef[3]
```

```
[6, 5, 4, 2, 2, 3, 8, 8, 4, 7, 2, 7, 4, 4, 5, 6, 5, 3,  
8, 7, 4, 2, 2, 8, 5, 1, 2, 7, 7, 1]
```

Sekarang kita bisa meniru tapply() dengan cara berikut. Ini akan mengembalikan tabel sebagai kumpulan data tabel dan judul kolom.

```
>function tapply (t:vector,tf,f$:call) ...
```

```
## Makes a table of data and factors  
## tf : output of makef()  
## See: makef  
uf=tf[2]; f=tf[3]; x=zeros(length(uf));  
for i=1 to length(uf);  
    ind=nonzeros(f==i);  
    if length(ind)==0 then x[i]=NAN;  
    else x[i]=f$(t[ind]);  
    endif;  
end;  
return {{x,uf}};  
endfunction
```

Kami tidak menambahkan banyak pengecekan tipe di sini. Satu-satunya tindakan pencegahan menyangkut kategori (faktor) tanpa data. Tetapi orang harus memeriksa panjang t yang benar dan kebenaran koleksi tf. Tabel ini dapat dicetak sebagai tabel dengan writetable().

```
>writetable(tapply(incomes,statef,"mean"),wc=7)
```

act	nsw	nt	qld	sa	tas	vic	wa
44.5	57.33	55.5	53.6	55	60.5	56	52.25

Array

EMT hanya memiliki dua dimensi untuk array. Tipe datanya disebut matriks. Namun, akan mudah untuk menulis fungsi untuk dimensi yang lebih tinggi atau pustaka C untuk ini.

R memiliki lebih dari dua dimensi. Di R array adalah vektor dengan bidang dimensi.

Dalam EMT, vektor adalah matriks dengan satu baris. Itu dapat dibuat menjadi matriks dengan redim().

```
>shortformat; X=redim(1:20, 4, 5)
```

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Ekstraksi baris dan kolom, atau sub-matriks, sangat mirip dengan R.

```
>X[, 2:3]
```

2	3
7	8
12	13
17	18

Namun, dalam R dimungkinkan untuk menetapkan daftar indeks spesifik vektor ke suatu nilai. Hal yang sama dimungkinkan di EMT hanya dengan satu putaran.

```
>function setmatrixvalue (M, i, j, v) ...
```

```
loop 1 to max(length(i),length(j),length(v))
  M[i#{},j#{}] = v#;
end;
endfunction
```

Kami mendemonstrasikan ini untuk menunjukkan bahwa matriks dilewatkan dengan referensi di EMT. Jika Anda tidak ingin mengubah matriks asli M, Anda perlu menyalinnya ke dalam fungsi.

```
>setmatrixvalue(X, 1:3, 3:-1:1, 0); X,
```

1	2	0	4	5
6	0	8	9	10
0	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Produk luar di EMT hanya dapat dilakukan di antara vektor. Ini otomatis karena bahasa matriks. Satu vektor harus berupa vektor kolom dan yang lainnya vektor baris.

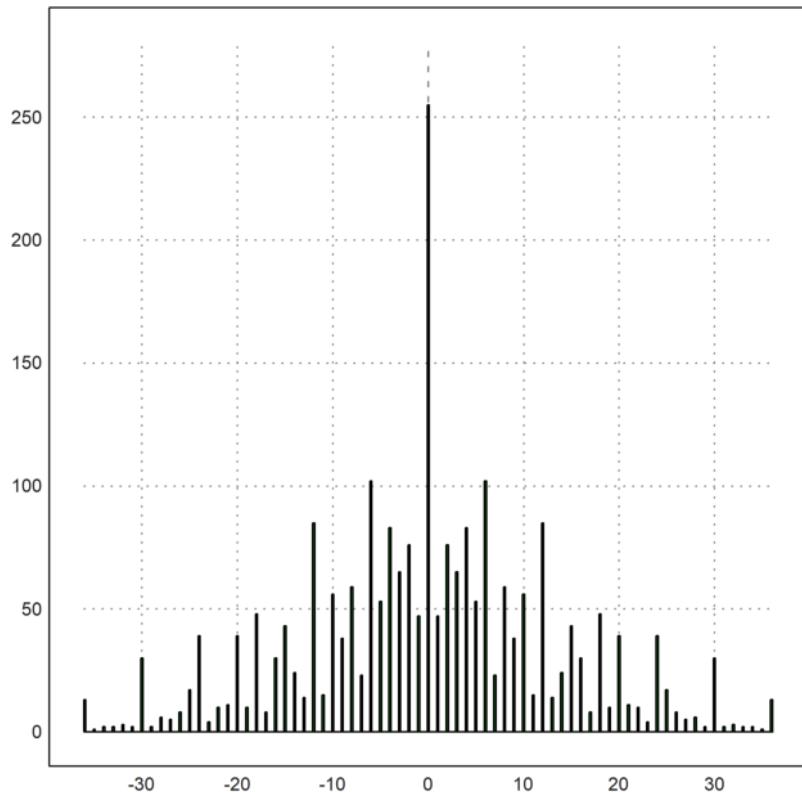
```
>(1:5) * (1:5)'
```

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Dalam pengantar PDF untuk R ada contoh, yang menghitung distribusi ab-cd untuk a,b,c,d dipilih dari 0 sampai n secara acak. Solusi dalam R adalah membentuk matriks 4 dimensi dan menjalankan table() di atasnya. Tentu saja, ini bisa dicapai dengan satu putaran. Tapi loop tidak efektif di EMT atau R. Di EMT, kita bisa menulis loop di C dan itu akan menjadi solusi tercepat.

Tapi kami ingin meniru perilaku R. Untuk ini, kami perlu meratakan perkalian ab dan membuat matriks ab-cd.

```
>a=0:6; b=a'; p=flatten(a*b); q=flatten(p-p'); ...
>u=sort(unique(q)); f=getmultiplicities(u,q); ...
>statplot(u,f,"h"):
```



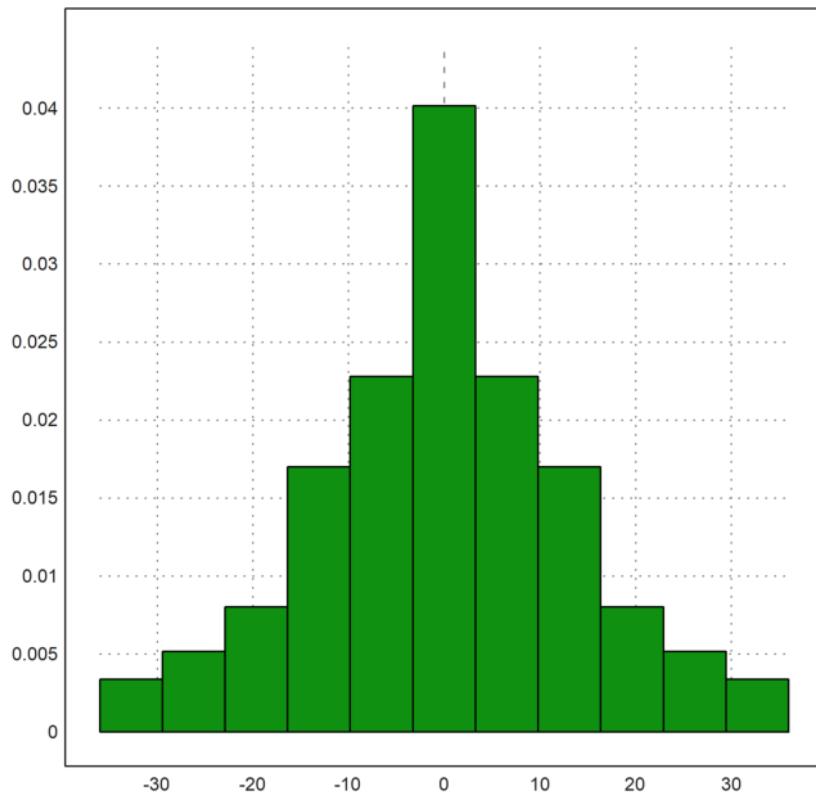
Selain perkalian yang tepat, EMT dapat menghitung frekuensi dalam vektor.

```
>getfrequencies(q,-50:10:50)
```

```
[0, 23, 132, 316, 602, 801, 333, 141, 53, 0]
```

Cara paling mudah untuk memplot ini sebagai distribusi adalah sebagai berikut.

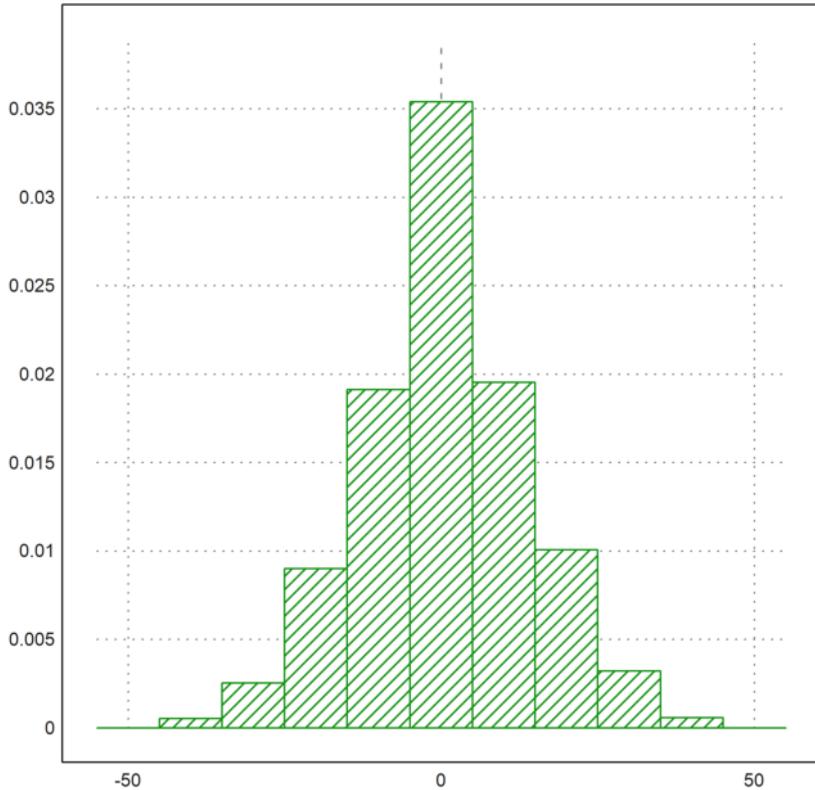
```
>plot2d(q,distribution=11):
```



Tetapi juga memungkinkan untuk melakukan pra-perhitungan hitungan dalam interval yang dipilih sebelumnya. Tentu saja, berikut ini menggunakan getfrequencies() secara internal.

Karena fungsi histo() mengembalikan frekuensi, kita perlu menskalakannya sehingga integral di bawah grafik batang adalah 1.

```
>{x,y}=histo(q,v=-55:10:55); y=y/sum(y)/differences(x); ...
>plot2d(x,y,>bar,style="/"):
```



Daftar

EMT memiliki dua jenis daftar. Salah satunya adalah daftar global yang bisa berubah, dan yang lainnya adalah tipe daftar yang tidak bisa diubah. Kami tidak peduli dengan daftar global di sini.

Jenis daftar yang tidak dapat diubah disebut koleksi di EMT. Ini berperilaku seperti struktur di C, tetapi elemennya hanya diberi nomor dan tidak diberi nama.

```
>L={"Fred","Flintstone",40,[1990,1992]}{}
```

```
Fred
Flintstone
40
[1990, 1992]
```

Saat ini elemen tidak memiliki nama, meskipun nama dapat diatur untuk tujuan khusus. Mereka diakses oleh nomor.

```
>(L[4])[2]
```

```
1992
```

File Input dan Output (Membaca dan Menulis Data)

Anda sering ingin mengimpor matriks data dari sumber lain ke EMT. Tutorial ini memberitahu Anda tentang banyak cara untuk mencapai hal ini. Fungsi sederhana adalah `writematrix()` dan `readmatrix()`.

Mari kita tunjukkan cara membaca dan menulis vektor real ke file.

```
>a=random(1,100); mean(a), dev(a),
```

```
0.500574  
0.295494
```

Untuk menulis data ke file, kami menggunakan fungsi writematrix().

Karena pengantar ini kemungkinan besar ada di direktori, di mana pengguna tidak memiliki akses tulis, kami menulis data ke direktori home pengguna. Untuk buku catatan sendiri, hal ini tidak diperlukan, karena file data akan ditulis ke dalam direktori yang sama.

```
>filename="test.dat";
```

Sekarang kita menulis vektor kolom a' ke file. Ini menghasilkan satu nomor di setiap baris file.

```
>writematrix(a',filename);
```

Untuk membaca data, kami menggunakan readmatrix().

```
>a=readmatrix(filename)';
```

Dan hapus file tersebut.

```
>fileremove(filename);  
>mean(a), dev(a),
```

```
0.500574  
0.295494
```

Fungsi writematrix() atau writetable() dapat dikonfigurasi untuk bahasa lain.

Misalnya, jika Anda memiliki sistem bahasa Indonesia (titik desimal dengan koma), Excel Anda memerlukan nilai dengan koma desimal yang dipisahkan oleh titik koma dalam file csv (defaultnya adalah nilai yang dipisahkan koma). File berikut "test.csv" akan muncul di folder current Anda.

```
>filename="test.csv"; ...  
>writematrix(random(5,3),file=filename,separator=",");
```

Anda sekarang dapat membuka file ini dengan Excel bahasa Indonesia secara langsung.

```
>fileremove(filename);
```

Terkadang kami memiliki string dengan token seperti berikut ini.

```
>s1:="f m m f m m m f f f m m f"; ...  
>s2:="f f f m m f f";
```

Untuk menandai ini, kami mendefinisikan vektor token.

```
>tok := [ "f", "m" ]
```

f

m

Kemudian kita dapat menghitung berapa kali setiap token muncul dalam string, dan memasukkan hasilnya ke dalam tabel.

```
>M:=getmultiplicities(tok,strtokens(s1))_ ...  
>  getmultiplicities(tok,strtokens(s2));
```

Tulis tabel dengan header token.

```
>writetable(M,labc=tok,labr=1:2,wc=8)
```

	f	m
1	6	7
2	5	2

Untuk statika, EMT dapat membaca dan menulis tabel.

```
>file="test.dat"; open(file,"w"); ...  
>writeln("A,B,C"); writematrix(random(3,3)); ...  
>close();
```

The file looks like this.

```
>printfile(file)
```

A,B,C
0.3434430599178467,0.8574257851025051,0.5136148941969806
0.9181683468838732,0.3747042346977908,0.08231034269387794
0.805747996777566,0.120413750519589,0.3423896427746488

Fungsi readtable() dalam bentuknya yang paling sederhana dapat membaca ini dan mengembalikan kumpulan nilai dan baris heading.

```
>L=readtable(file,>list);
```

Koleksi ini dapat dicetak dengan writetable() ke notebook, atau ke file.

```
>writetable(L,wc=10,dc=5)
```

A	B	C
0.34344	0.85743	0.51361
0.91817	0.3747	0.08231
0.80575	0.12041	0.34239

Matriks nilai adalah elemen pertama dari L. Perhatikan bahwa mean() dalam EMT menghitung nilai rata-rata dari baris matriks.

```
>mean(L[1])
```

```
0.571495  
0.458394  
0.42285
```

File CSV

Pertama, mari kita menulis matriks ke dalam file. Untuk hasilnya, kami membuat file di direktori kerja saat ini.

```
>file="test.csv"; ...  
>M=random(3,3); writematrix(M,file);
```

Berikut adalah isi dari file ini.

```
>printfile(file)
```

```
0.193012930176267, 0.877615331950273, 0.67249446695765  
0.9796942338692071, 0.5394132942194725, 0.8267597692434585  
0.5670535872688307, 0.5811163668496959, 0.07020295735786267
```

CSV ini dapat dibuka pada sistem bahasa Inggris ke dalam Excel dengan klik dua kali. Jika Anda mendapatkan file seperti itu di sistem Jerman, Anda perlu mengimpor data ke Excel dengan memperhatikan titik desimal.

Tetapi titik desimal juga merupakan format default untuk EMT. Anda dapat membaca matriks dari file dengan readmatrix().

```
>readmatrix(file)
```

```
0.193013 0.877615 0.672494  
0.979694 0.539413 0.82676  
0.567054 0.581116 0.070203
```

Dimungkinkan untuk menulis beberapa matriks ke satu file. Perintah open() dapat membuka file untuk ditulis dengan parameter "w". Standarnya adalah "r" untuk membaca.

```
>open(file,"w"); writematrix(M); writematrix(M'); close();
```

Matriks dipisahkan oleh garis kosong. Untuk membaca matriks, buka file dan panggil readmatrix() beberapa kali.

```
>open(file); A=readmatrix(); B=readmatrix(); A==B, close();
```

1	0	0
0	1	0
0	0	1

Di Excel atau spreadsheet serupa, Anda dapat mengekspor matriks sebagai CSV (nilai yang dipisahkan koma). Di Excel 2007, gunakan "simpan sebagai" dan "format lain", lalu pilih "CSV". Pastikan, tabel saat ini hanya berisi data yang ingin Anda ekspor.

Ini sebuah contoh.

```
>printfile("excel-data.csv")
```

```
Could not open the file  
excel-data.csv  
for reading!  
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.  
printfile:  
    open(filename, "r");
```

Seperti yang Anda lihat, sistem Jerman saya menggunakan titik koma sebagai pemisah dan koma desimal. Anda dapat mengubahnya di pengaturan sistem atau di Excel, tetapi tidak perlu membaca matriks ke dalam EMT.

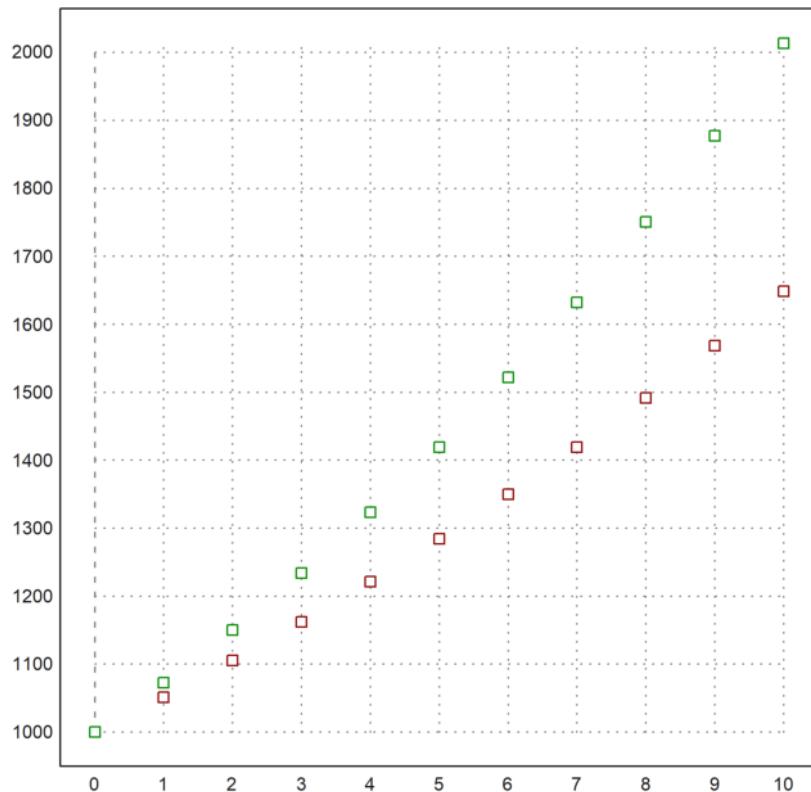
Cara termudah untuk membaca ini ke Euler adalah readmatrix(). Semua koma diganti dengan titik dengan parameter >koma. Untuk CSV bahasa Inggris, hilangkan saja parameter ini.

```
>M=readmatrix("excel-data.csv",>comma)
```

0	1000	1000
1	1051.27	1072.51
2	1105.17	1150.27
3	1161.83	1233.68
4	1221.4	1323.13
5	1284.03	1419.07
6	1349.86	1521.96
7	1419.07	1632.32
8	1491.82	1750.67
9	1568.31	1877.61
10	1648.72	2013.75

Let us plot this.

```
>plot2d(M' [1],M' [2:3],>points,color=[red,green]'):
```



Ada cara yang lebih mendasar untuk membaca data dari file. Anda dapat membuka file dan membaca angka baris demi baris. Fungsi `getvectorline()` akan membaca angka dari baris data. Secara default, ini menghapusk titik desimal. Tapi itu juga bisa menggunakan koma desimal, jika Anda memanggil `setdecimaldot(",")` sebelum Anda menggunakan fungsi ini.

Fungsi berikut adalah contoh untuk ini. Itu akan berhenti di akhir file atau baris kosong.

```
>function myload (file) ...
```

```
open(file);
M=[];
repeat
    until eof();
    v=getvectorline(3);
    if length(v)>0 then M=M_v; else break; endif;
end;
return M;
close(file);
endfunction
```

```
>myload(file)
```

0.193013	0 0.877615	0 0.672494
0.979694	0 0.539413	0 0.82676
0.567054	0 0.581116	0 0.070203

Dimungkinkan juga untuk membaca semua angka dalam file itu dengan getvector().

```
>open(file); v=getvector(10000); close(); redim(v[1:9],3,3)
```

```
0.193013      0  0.877615  
0  0.672494  0.979694  
0  0.539413      0
```

Thus it is very easy to save a vector of values, one value in each line and read back this vector.

```
>v=random(1000); mean(v)
```

```
0.5196
```

```
>writematrix(v',file); mean(readmatrix(file)')
```

```
0.5196
```

Menggunakan Tabel

Tabel dapat digunakan untuk membaca atau menulis data numerik. Sebagai contoh, kami menulis tabel dengan tajuk baris dan kolom ke file.

```
>file="test.tab"; M=random(3,3); ...  
>open(file,"w"); ...  
>writetable(M,separator=",",labc=["one","two","three"]); ...  
>close(); ...  
>printfile(file)
```

```
one,two,three  
0.67,      0.26,      0.95  
0.94,      0.44,      0.42  
0.78,      0.75,      0.62
```

Ini dapat diimpor ke Excel.

Untuk membaca file di EMT, kami menggunakan readtable().

```
>{M,headings}=readtable(file,>clabs); ...  
>writetable(M,labc=headings)
```

```
one      two      three  
0.67      0.26      0.95  
0.94      0.44      0.42  
0.78      0.75      0.62
```

Menganalisis Garis

Anda bahkan dapat mengevaluasi setiap baris dengan tangan. Misalkan, kita memiliki garis dengan format berikut.

```
>line="2020-11-03,Tue,1'114.05"
```

2020-11-03, Tue, 1'114.05

Pertama kita dapat menandai garis.

```
>vt=strtoks(line)
```

2020-11-03

Tue

1'114.05

Kemudian kita dapat mengevaluasi setiap elemen garis menggunakan evaluasi yang sesuai.

```
>day(vt[1]), ...
>indexof(["mon","tue","wed","thu","fri","sat","sun"],tolower(vt[2])), ...
>strepl(vt[3], "'", "")()
```

738162

2

1114.05

Menggunakan ekspresi reguler, dimungkinkan untuk mengekstraksi hampir semua informasi dari sebaris data.

Asumsikan kita memiliki baris berikut sebuah dokumen HTML.

```
>line=<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>
```

```
<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>
```

Untuk mengekstrak ini, kami menggunakan ekspresi reguler, yang mencari

- tanda kurung tutup >,
- string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung dengan sub-pertandingan "(...)";

- braket pembuka dan penutup menggunakan solusi terpendek,
- sekali lagi string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung,
- dan tanda kurung buka <.

Ekspresi reguler agak sulit dipelajari tetapi sangat kuat.

```
>{pos,s,vt}=strxfind(line,>([<>]+)<.+?>([<>]+)<" );
```

Hasilnya adalah posisi kecocokan, string yang cocok, dan vektor string untuk sub-kecocokan.

```
>for k=1:length(vt); vt[k](), end;
```

1145.45
5.6

Ini adalah fungsi yang membaca semua item numerik antara <td> dan </td>.

```
>function readtd (line) ...
v=[]; cp=0;
repeat
{pos,s,vt}=strxfind(line,"<td.*?>(.+?)</td>",cp);
until pos==0;
if length(vt)>0 then v=v|vt[1]; endif;
cp=pos+strlen(s);
end;
return v;
endfunction
```

```
>readtd(line+"<td>non-numerical</td>")
```

```
1145.45
5.6
-4.5
non-numerical
```

Membaca dari Web

Situs web atau file dengan URL dapat dibuka di EMT dan dapat dibaca baris demi baris.

Dalam contoh, kami membaca versi terkini dari situs EMT. Kami menggunakan ekspresi reguler untuk memindai "Versi ..." dalam judul.

```
>function readversion () ...
urlopen("http://www.euler-math-toolbox.de/Programs/Changes.html");
repeat
until urleof();
s=urlgetline();
k=strfind(s,"Version ",1);
if k>0 then substring(s,k,strfind(s,"<",k)-1), break; endif;
end;
urlclose();
endfunction
```

```
>readversion
```

```
Version 2022-05-18
```

Input dan Output Variabel

Anda dapat menulis variabel dalam bentuk definisi Euler ke file atau ke baris perintah.

```
>writevar(pi, "mypi");
```

```
mypi = 3.141592653589793;
```

Untuk pengujian, kami membuat file Euler di direktori kerja EMT.

```
>file="test.e"; ...
>writevar(random(2,2), "M", file); ...
>printfile(file, 3)
```

```
M = [ ..
0.3889796696897931, 0.7232353954925241;
0.4715488418385627, 0.5389679930230041];
```

We can now load the file. It will define the matrix M.

```
>load(file); show M,
```

```
M =
0.38898  0.723235
0.471549 0.538968
```

By the way, jika writevar() digunakan pada variabel, itu akan mencetak definisi variabel dengan nama variabel ini.

```
>writevar(M); writevar(inch$)
```

```
M = [ ..
0.3889796696897931, 0.7232353954925241;
0.4715488418385627, 0.5389679930230041];
inch$ = 0.0254;
```

Kami juga dapat membuka file baru atau menambahkan file yang sudah ada. Dalam contoh kami menambahkan file yang dihasilkan sebelumnya.

```
>open(file, "a"); ...
>writevar(random(2,2), "M1"); ...
>writevar(random(3,1), "M2"); ...
>close();
>load(file); show M1; show M2;
```

```
M1 =
0.21576  0.10825
0.456531 0.583648
M2 =
0.367268
0.7222
0.508242
```

Untuk menghapus file apa pun gunakan fileremove().

```
>fileremove(file);
```

Vektor baris dalam file tidak memerlukan koma, jika setiap angka berada di baris baru. Mari kita buat file seperti itu, menulis setiap baris satu per satu dengan writeln().

```
>open(file,"w"); writeln("M = ["); ...
>for i=1 to 5; writeln(""+random()); end; ...
>writeln("]"); close(); ...
>printfile(file)
```

```
M = [
0.126426837289
0.529493296988
0.509812841347
0.755669771802
0.366297480248
];
```

```
>load(file); M
```

```
[0.126427, 0.529493, 0.509813, 0.75567, 0.366297]
```