3) Mostrar q' la unión de subespacios no genera un subespacio

Sea $A = \{ a \in \mathbb{R}^2 / a = (k \quad 0)^T, k \in \mathbb{R} \}$

$B = \{ b \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{R} / b = (0 \quad k)^T \}$

$A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow A \neq 0$ ✓

$\rightarrow u \in A, v \in A \Rightarrow u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in A$

$\rightarrow u \in A, k \in \mathbb{R} \Rightarrow k \cdot u = \begin{pmatrix} k \cdot u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in A$

$B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow$ Idem A

Ahora bien, $A \cup B = \{ v \in \mathbb{R}^2 / v \in A \lor v \in B \}$ no es subespacio.

Contraejemplo

$$\left.\begin{array}{l} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in A \Rightarrow u \in A \cup B \\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix} \in B \Rightarrow v \in A \cup B \end{array}\right\} u + v = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} u + v \notin A \\ u + v \notin B \\ \Downarrow \\ u + v \notin A \cup B \end{array}$$

4) Cuales son subesp. de $\mathbb{R}^3$?

a) $A = \{ (\lambda^2, -\lambda^2, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

(1) $A \neq \emptyset$. Si ya que $\lambda \in \mathbb{R}$ ✓

(2) $v, w \in A \Rightarrow V = (v^2, -v^2, 0)$; $W = (w^2, -w^2, 0)$
$v \in \mathbb{R}$; $w \in \mathbb{R}$

$\rightarrow V + W = (v^2, -v^2, 0) + (w^2, -w^2, 0) = (v^2 + w^2, -v^2 - w^2, 0)$
$= (v^2 + w^2, -(v^2 + w^2), 0) = (\beta^2, -\beta^2, 0), \ \beta \in \mathbb{R}$

Sea $\alpha = v^2 + w^2 \geq 0 \ \forall v, w \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow V + W \in A$ ✓ $\Rightarrow \exists \beta = \sqrt{\alpha} / \beta \in \mathbb{R}$

(3) $\alpha \in \mathbb{R}, v \in A$

$\alpha \cdot v = \alpha \cdot (\lambda^2, -\lambda^2, 0) = (\alpha \lambda^2, \alpha \cdot (-\lambda^2), 0) = (\alpha \lambda^2, -\alpha \lambda^2, 0)$
$= ((\sqrt{\alpha} \cdot \lambda)^2, -(\sqrt{\alpha} \cdot \lambda)^2, 0) \Rightarrow$ No se cumple!!

Contraejemplo $\rightarrow$ Para $\alpha = -1$, $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow A$ no es subespacio de $\mathbb{R}^3$

b) $B = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 / \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{Z} \}$

$\hookrightarrow$ No se cumple condicion (3) $\rightarrow \alpha \in \mathbb{R}, b \in B \Rightarrow \alpha \cdot b \notin B$ si α no es un nro. entero

AMIA
Guía 1 (G2)

4c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=z, \; x-y=\frac{1}{2}z\}$

$\Rightarrow C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; x = 3y, \; z = 4y\}$

$x - y = \frac{x+y}{2}$

$\frac{x}{2} = \frac{3y}{2}$

$x = 3y$

(1) $C \neq \emptyset$ ✓

(2) $U, V \in C \Rightarrow U + V = (3u, u, 4u) + (3v, v, 4v) =$

$= (3u+3v, u+v, 4u+4v) = (3(u+v), u+v, 4(u+v))$

$= (3w, w, 4w) \in C$

$w = (u+v) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow U + V \in C$ ✓

(3) $\alpha \in \mathbb{R}$
$V \in C \Rightarrow \alpha \cdot V = \alpha \cdot (3v, v, 4v) = (\alpha \cdot 3v, \alpha \cdot v, \alpha \cdot 4v)$

$= (3 \cdot (\alpha \cdot v), \alpha \cdot v, 4(\alpha \cdot v)) = (3\beta, \beta, 4\beta)$

$\beta = \alpha \cdot v \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha \cdot V \in C$ ✓

Por (1), (2) y (3), C es subespacio de $\mathbb{R}^3$