Michał Bronikowski
Deklaruję zadania numer: 1,2,3,4,5,6

1. Wiadomo, że rozwiązaniem równania kwadratowego

   $$ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$$

   są liczby:

   (a) $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

   (b) $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

   Pokaż na kilku przykładach, że bezpośrednie stosowanie tych wzorów może być niebezpieczne.
   Odp:
   Rozwiązanie: *zad1.rb*
   Dane: *zad1_dane.txt*

2. Użyj komputera do wyznaczania wartości numerycznych kolejnych elementów ciągu (x_n).Zdefiniowanego rekurencyjnie w następujący sposób:

   $x_0 = 1$
   $x_1 = \frac{1}{5}$
   $x_{n+2} = \frac{26}{5}x_{n+1} - x_n$

   Skomentuj otrzymane wynikii. Czy są one wiarygodne?
   Rozwiązanie:
   Zastanówmy się jaki jest wzór jawny tego ciągu.
   Niech

   $x_{n+2} = r^{n+2}$

   Wtedy:

   $$r^{n+2} = \frac{26}{5}r^{n+1} - r^n // : r^n$$

   $$r^2 = \frac{26}{5}r^1 - 1$$

   $$r^2 - \frac{26}{5}r^1 + 1 = 0$$

   Skorzystamy ze wzorów Viete'a:

$$r_1 + r_2 = \tfrac{26}{5}$$
$$r_1 \times r_2 = 1$$

Więc $r_1 = \frac{1}{5}$ a $r_2 = 5$.
Przedstawmy naszą zależność rekurencyjną dla 2 i 3 elementu naszego ciągu w postaci równania:

$x_2 = \frac{1}{25} = A \times (\frac{1}{5})^2 + B \times 5^2$

$x_3 = \frac{1}{125} = A \times (\frac{1}{5})^3 + B \times 5^3$
Wnioskujemy z tego, że:

$A = 1$

$B = 0$

Mamy więc doczynienia z ciągiem o postaci:

$x_n = (\frac{1}{5})^n$ Można zauważyć, że ciąg ten jest malejący. Przejdźmy do wyznaczenia wartości tego ciągu przy użyciu komputera.
Plik:*zad2.rb*
Po wypisaniu 30 pierwszych elementów tego ciągu mogę stwierdzić, że otrzymane przeze mnie wynikii nie są wiarygodne, ponieważ przekazywane na wyjście elementy nie są w porządku malejącym, a wręcz w pewnym momencie zaczynają rosnąć, a wykazałem, że ciąg powinien byc malejący.

3. Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, ustal ilu teoretycznie wyrazów szeregu:

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Należy użyć do obliczenia wartości π z błędem mniejszym niż 10^{-7}
Z kryterium **Leibniza**
Jeśli ciąg a_n jest malejący i zbieżny do zera to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest malejący.Nasz ciąg a_n jest postaci:

$$a_k = \frac{1}{2k+1}$$

(a) Czy ciąg jest zbieżny

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0$$

Ciąg jest więc zbieżny.

(b) Czy ciąg jest malejący?

$$\frac{1}{2k+1} < \frac{1}{2k+2}$$

Ciąg jest malejący.

Skoro wiem, że szereg jest zbieżny skorzystam z własności:

$$|S_{k+1} - S_k| = a_{k+1}$$

Zależy nam na tym, aby błąd był mniejszy od 10^{-7} więc:

$$|S_{k+1} - S_k| = a_{k+1} < 10^{-7}$$

Dalej:

$\frac{(-1)^k}{2k+1} < 10^{-7} // \times (2k+1)$
$(-1)^k < 10^{-7} \times (2k+2)$
$k = 5000000 - 2$
$k = 4999998$

Teraz wykonałem odpowiedni eksperyment z wykorzystaniem komputera.
Źródło: *zad3.rb , testzad3.rb*
Wynika z niego, że dla k = 4999998 program nie wyznacza π z błędem mniejszym niż 10^{-7}. Bład jest mniejszy od 10^{-7} dla k = 5000000.

4. Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, sprawdź,że do obliczenia $\ln 2$ z błedem mniejszym niż $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$ trzeba użyc ok. 2 milionów wyrazów szeregu:

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

Z kryterium **Leibniza**
Jeśli ciąg a_n jest malejący i zbieżny do zera to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest malejący.Nasz ciąg a_n i dla x = 2 jest postaci:

$$a_k = \frac{1}{k}$$

(a) Czy ciąg jest zbieżny

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$$

Ciąg jest więc zbieżny.

(b) Czy ciąg jest malejący?

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{k+1}$$

Ciąg jest malejący.

Skoro wiem, że szereg jest zbieżny skorzystam z własności:

$$|S_{k+1} - S_k| = a_{k+1}$$

Zależy nam na tym, aby błąd był mniejszy od $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$ więc:

$$|S_{k+1} - S_k| = a_{k+1} < \frac{1}{2} \times 10^{-6}$$

Dalej

$\frac{1}{k} < \frac{1}{2} \times 10^{-6} // \times 2$

$\frac{2}{k} < 10^{-6}$

$k = 2 \times 10^6$

Dalej wykaż, że wykorzystanie prostego związku

$$\ln 2 = \ln[e \times \frac{2}{e}]$$

może znacznie przyśpieszyć obliczenia.
Odp:

$$\ln[e \times \frac{2}{e}] = \ln e + \ln \frac{2}{e} = 1 + \ln \frac{2}{e}$$

Sprawdźmy teraz ilu elementów ciągu musimy użyć aby obliczyć $\ln \frac{2}{e}$ z błędem mniejszym niż $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$. Podstawmy do naszego szeregu za x = $\frac{2}{e}$. Otrzymujemy:

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(\frac{2}{e} - 1)^k}{k}$$

Dalej:

$$a_k = \frac{(\frac{2}{e} - 1)^k}{k}$$

Więc:

$$\frac{(\frac{2}{e} - 1)^k}{k} < \frac{1}{2} \times 10^{-6} // \times 2$$

$$\frac{2(\frac{2}{e} - 1)^k}{k} < 10^{-6}$$

Jedyne sensowne wytłumaczenie jakie przychodzi mi do głowy jest takie, że w porównaniu do ciągu $\frac{2}{k}$ ten maleje szybciej ponieważ w liczniku mamy $2(\frac{2}{e} - 1)^k$, które dla nieparzystych k jest ujemne.

5. Wykorzystując pomysł z poprzedniego zadania zaproponuj szybki algorytm do wyznaczania ln bardzo dużych liczb.

```
def calc(x,k)
    sum = 0
    for i in 1..k
        sum+=(((-1) ** (i-1) ) * (((x-1) ** i) / i))
    end
    sum
end

def ln x
    if  x > 5
      temp = x / Math::E
     return 1 + 1 + ln(temp/Math::E)
    else
     return 1 + calc((x / Math::E),30)
    end
end
```

Listing 1: Algorytm do wyznacznia logarytmu naturalnego

Opis:

Na początku sprawdzam czy **x** jest większy od 5, aby podczas dzielenia przez **e** wynik nie był większy od 2. Następnie wyciągam z tej liczby **e** i do wyniku dodaje **1** i rekurencyjnie wywołuję funkcję **ln** z tym co mi zostało po wyciągnięciu e. Jeżeli argument funkcji **ln** jest mniejszy równy 5 to postępuje zgodnie z pomysłem z poprzedniego zadania.

Test: *testzad5.rb*

6. W języku **PWO ++** funkcja **ATAN** oblicza arc tgz bardzą dużą dokłądnością, ale tylko wtedy gdy $|x| \leqslant 1$. Zaproponuj algorytm wyznaczający w jęzuku **PWO ++** arc tg z dużą dokładnością dla $|x| > 1$.

7. Wykorzystując pomysł z poprzedniego zadania zaproponuj szybki algorytm do wyznaczania ln bardzo dużych liczb.

```ruby
def ATan(x)
    return Math.atan(x) if x.abs <= 1
    print "Wywolano funkcja ATan z |x| > 1"
end

def FATan(x)
    if x < 0
        a = - (Math::PI / 2.0)
     return a - ATan(1.0/x)
    else
        a = (Math::PI / 2.0)
     return a - ATan(1.0/x)
    end
end
```

Listing 2: Kod w Ruby

Korzystam z faktu, że gdy $x >= 0$ to:

$$\operatorname{arc\,tg}(x) + \operatorname{arc\,tg}(\frac{x}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

A gdy $x < 0$ to:

$$\operatorname{arc\,tg}(x) + \operatorname{arc\,tg}(\frac{x}{2}) = -\frac{\pi}{2}$$