Michał Bronikowski
Deklaruję zadania numer:

Zadanie 2

Uporządkuj od najwolniej do najszybciej rosnącej funkcje (logarytmy mają podstawę 2):

$$\log n, (\log n)^n, n^{\log n}, \log(n^n), 3^{\log n}, n, n^2, 2^{\sqrt{n}}, 1.01^n, 0.99^n, (1+\frac{1}{n})$$

Rozwiązanie:
Na początku przekształciłem sobie podane funkcje do postaci:(Z zachowaniem kolejności z treśći)

$$\log n$$

$$(\log n)^n = 2^{\log n^{\log n}} = 2^{\log n \times \log n} = 2^{\log^2 n}$$

$$n^{\log n} = (\log n)^n = 2^{\log \log n^n} = 2^{\log \log n \times n}$$

$$\log(n^n) = n \times \log n$$

$$3^{\log n} = 2^{\log 3 \ ^{logn}} = 2^{\log n \times \log 3} = n^{\log 3}$$

$$n$$

$$n^2 = 2^{\log n \times 2}$$

$$2^{\sqrt{n}}$$

$$1.01^n = 2^{\log 1.01^n} = 2^{n \times \log 1.01}$$

$$0.99^n // Funkcja\ jest\ malejca$$

$$(1+\frac{1}{n}) = e$$

Funkcje ułożone w kolejności od najwolniej rtosnącej do najszybciej to:

$$0.99^n \prec (1+\frac{1}{n}) \prec \log n \prec n \prec \log(n^n) \prec 3^{\log n} \prec n^2 \prec n^{\log n} \prec 2^{\sqrt{n}} \prec 1.01^n \prec (\log n)^n$$

Uzasadnienie:
najwolniej rośnie 0.99^n, ponieważ jest to funkcja malejąca – zbieżna do zera. Druga w kolejności jest funkcja $(1 + \frac{1}{n})$, ponieważ zbiega do $e \approx 2.71$. Następna jest funkcja $\log n$, która rośnie szybciej od poprzednich, ale wolniej od n – które łatwo porównać do pozostałych funkcji. Następna w koleności funkcja to właśnie n, którą w prosty sposób można porównać z pozostałymi przedstawionymi w postaci 2^x ,$n^{\log 3}$lub $n \times \log n$. Następna funkcja to $\log(n^n)$, którą porównuję z pozostałymi funkcjami w postaci 2^x ,$n^{\log 3}$i stwierdzam, że rośnie od nich „wolniej”. Następnie z pozostałych funkcji zostaje jedna , która nie jest postaci 2^x czyli : $3^{\log n}$. Następnie porównuję wykłądniki w pozostałych funkcjach postaci 2^x i ustawiam je w kolejności od najwolniej rosnącego do najszybciej tj.:

$2^{\log n \times 2}$

$2^{\log \log n \times n}$

$2^{\sqrt{n}}$

$2^{n \times \log 1.01}$

$2^{\log^2 n}$

□

Zadanie 7

Rozważmy algorytm sortujący n liczb w następujący sposób. Wybierz najmniejszą, postaw na pierwszym miejscu, wybierz następną najmniejszą i postaw na drugim miejscu, następną postaw na trzecim miejscu itd. aż do wyczerpania liczb. Określ złożoność czasową powyższej procedury.

Na początku mamy n liczb wybieramy pierwszą z brzegu i porównujemy ją z $(n - 1)$ liczbami, aby wybrać najmniejszą. Następnie mamy $(n-1$ liczb i porównujemy je z $(n-2)$ liczbami itd. aż zostanie mi ostani wyraz, który porównam z 0 liczb. Suma tych wszystkich wyrazów jest postaci:

$\sum_{i=1}^{n-1} i$

Jest to szereg arytmetyczny, którego suma jest równa:

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \times n = \frac{1+n-1}{2} \times n = \frac{n}{2} \times n$

Więc złożoność czasowa tej procedury to: $\mathcal{O}(n^2)$

Zadanie 8

Oceń złożoność czasową pisemnego dodawania i mnożenia.

- Dodawanie

  Dodając pisemnie do siebie dwie liczby o n cyfrach wykonujemy maksymalnie n dodawań plus $n-1$ przeniesień.
  Złożoność : $\mathcal{O}(n)$

- Mnożenie

  Mam $n \times$ (n mnożeń + (n - 1) przeniesień) + n dodawań liczb dlugości (2n - 1) cyfr + maksymalnie (2n -2) przeniesienia w dodawaniu.

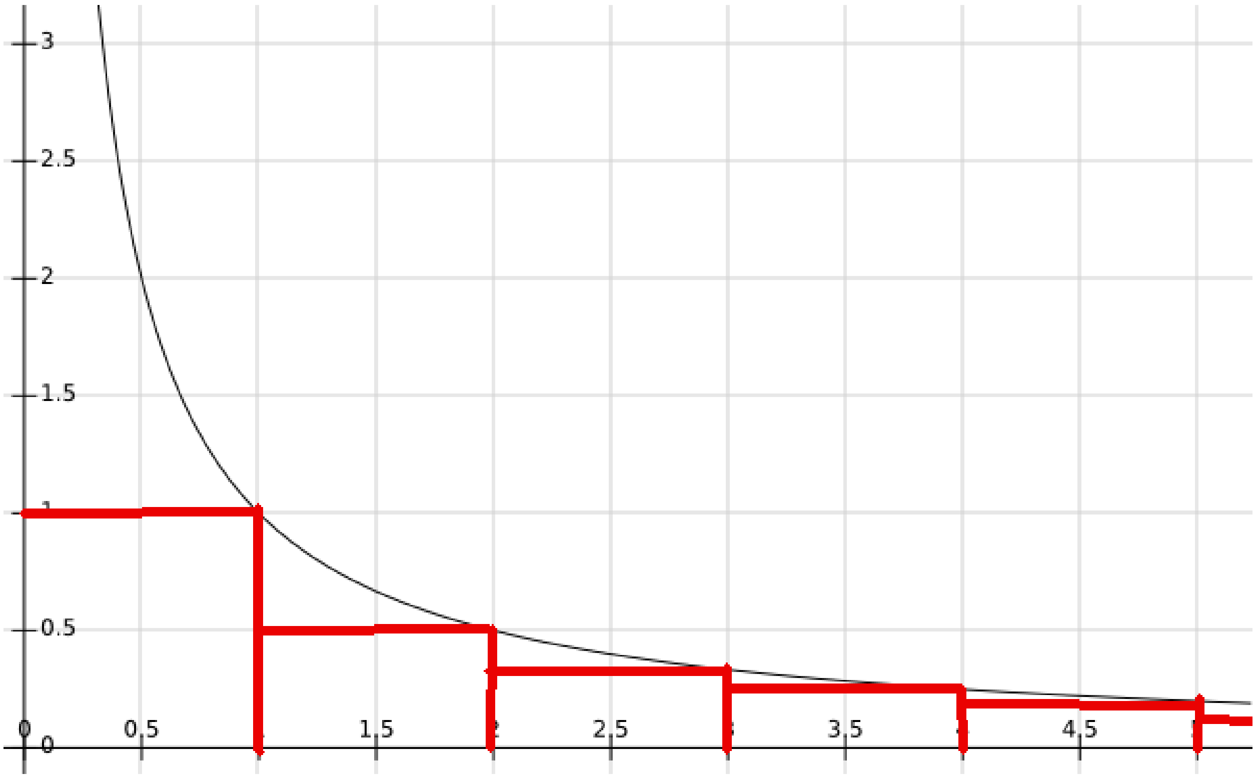
  Złożoność: $\mathcal{O}(n^2)$

Zadanie 10

Używając całkowania (oszacuj podobnie jak na wykładzie) sumę:

$\sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{k}$

Na początku tak jak na wykładzioe narysowałem sobiue wykres pomocniczy:



Rysunek pomocniczy – funkcaj $\frac{1}{x}$ i prostokąty o szerokości 1

Pole pod wykresem jest równe:

$$\int_1^n \frac{1}{x} = \ln n - \ln 0 = \ln n$$

Wszystkie „błędy” obliczeniowe „mieszczą” się w pierwszym prostokącie, więc należy odjąć $\mathcal{O}(1)$

Ostateczny wynik jest postaci: $\ln n - \mathcal{O}(1)$

□

Zadanie 13

Wykaż, że ilość liczb całkowitych w następujących przedziałach są odpowiednio równe ($a < b$):

a) $\langle a, b\rangle$ $--$ $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1$
Najmniejsza liczba w tym przedziale to: $\lceil a \rceil$
Największa liczba w tym przedziale to: $\lfloor b \rfloor$
Ilość liczb w tym przedziale jest więc równa: $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1$

b) $\langle a, b)$ $--$ $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil$
Najmniejsza liczba w tym przedziale to: $\lceil a \rceil$
Największa liczba w tym przedziale to:

Dla $b \in Z$ $\lfloor b \rfloor - 1$
Dla $b \notin Z$ $\lfloor b \rfloor$

Ilość liczb w tym przedziale jest więc równa:

Dla $b \in Z$ $\lfloor b \rfloor - 1 - \lceil a \rceil + 1 \; //i \; \lfloor b \rfloor = \lceil b \rceil$
$Podstawiajc : \lceil b \rceil - \lceil a \rceil$

Dla $b \notin Z$ $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1 \; //i \; \lfloor b \rfloor = \lceil b \rceil - 1$
$Podstawiajc : \lceil b \rceil - \lceil a \rceil$

c) $(a, b\rangle$ $--$ $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$
Najmniejsza liczba w tym przedziale to:

Dla $a \in Z$ $\lceil a \rceil + 1$
Dla $a \notin Z$ $\lfloor b \rfloor$
Największa liczba w tym przedziale to: $\lceil a \rceil$
Ilość liczb w tym przedziale jest więc równa:

Dla $a \in Z$ $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil - 1 + 1 \; //i \; \lfloor a \rfloor = \lceil a \rceil$
$Podstawiajc : \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$

Dla $a \notin Z$ $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1 \; //i \; \lceil a \rceil = \lfloor a \rfloor - 1$
$Podstawiajc : \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$

d) (a, b) $--$ $\lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$

1. Dla $a \in Z \; i \; b \notin Z$
   Najmniejsza liczba w tym przedziale to: $\lceil a \rceil + 1$
   Największa liczba w tym przedziale to: $\lfloor b \rfloor$
   Ilość liczb w tym przedziale jest więc równa: $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil - 1 + 1 = \lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$

2. Dla $a \notin Z \; i \; b \in Z$
   Najmniejsza liczba w tym przedziale to: $\lceil a \rceil$
   Największa liczba w tym przedziale to: $\lfloor b \rfloor - 1$
   Ilość liczb w tym przedziale jest więc równa:$\lfloor b \rfloor - 1 - \lceil a \rceil + 1 = \lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$

3. Dla $a \notin Z \; i \; b \notin Z$
   Najmniejsza liczba w tym przedziale to: $\lceil a \rceil$
   Największa liczba w tym przedziale to: $\lfloor b \rfloor$
   Ilość liczb w tym przedziale jest więc równa:$\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1 = \lceil b \rceil - 1 - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$

4. Dla $a \in Z \; i \; b \in Z$
   Najmniejsza liczba w tym przedziale to: $\lceil a \rceil + 1$
   Największa liczba w tym przedziale to: $\lfloor b - 1$
   Ilość liczb w tym przedziale jest więc równa:$\lfloor b \rfloor - 1 - \lceil a \rceil - 1 + 1 = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$

Zadanie 14

Pokaż, że dla dowolnego $x \geqslant 0$:

$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$

Rozwiązanie:

FAKT:

$x \leqslant \lfloor x \rfloor \Rightarrow \sqrt{x} \geqslant \sqrt{\lfloor x \rfloor} \Rightarrow \lfloor \sqrt{x} \rfloor \geqslant \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$

$\exists_{a \in N} \quad a \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant a+1$

Ponadto da się znaleźć takie c, że:

$\exists_{a,b \in N} \quad c^2 \leqslant a \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant a+1 \leqslant (c+1)^2$

- Dla $x = 0$ ta nierówność jest oczywista dla $a, b = 0$. Zarówno dla $x = 0$ nierówność $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$ jest prawdziwa.
- Dla $x > 0$. Możemy nierównosc przekształcić w następujący sposób :

$$c^2 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant (c+1)^2 / \surd$$

$$c \leqslant \lfloor \sqrt{x} \rfloor \leqslant \sqrt{x} \leqslant (c+1)$$

Wiem, że c jest liczbą naturalną więc jeżeli w nierówności występuje podłoga, która sprowadza $\sqrt{x}$ do części całkowitej i $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leqslant \sqrt{x}$ jest ograniczone przez dwie kolejne liczby naturalne to:$\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ jest równy $\sqrt{x}$

$\square$