

Michał Bronikowski
Deklaruję zadania numer: 1,2,3,4,5,6

1. Wiadomo, że rozwiązaniem równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

są liczby:

(a) $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(b) $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Pokaż na kilku przykładach, że bezpośrednie stosowanie tych wzorów może być niebezpieczne.

Odp:

Rozwiązanie: *zad1.rb*

Dane: *zad1-dane.txt*

2. Użyj komputera do wyznaczania wartości numerycznych kolejnych elementów ciągu (x_n) . Zdefiniowanego rekurencyjnie w następujący sposób:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{5}$$

$$x_{n+2} = \frac{26}{5}x_{n+1} - x_n$$

Skomentuj otrzymane wyniki. Czy są one wiarygodne?

Rozwiązanie:

Zastanówmy się jaki jest wzór jawny tego ciągu.

Niech

$$x_{n+2} = r^{n+2}$$

Wtedy:

$$r^{n+2} = \frac{26}{5}r^{n+1} - r^n // : r^n$$

$$r^2 = \frac{26}{5}r^1 - 1$$

$$r^2 - \frac{26}{5}r^1 + 1 = 0$$

Skorzystamy ze wzorów Viete'a:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{26}{5} \\ r_1 \times r_2 &= 1 \end{aligned}$$

Więc $r_1 = \frac{1}{5}$ a $r_2 = 5$.

Przedstawmy naszą zależność rekurencyjną dla 2 i 3 elementu naszego ciągu w postaci równania:

$$x_2 = \frac{1}{25} = A \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + B \times 5^2$$

$$x_3 = \frac{1}{125} = A \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 + B \times 5^3$$

Wnioskujemy z tego, że:

$$A = 1$$

$$B = 0$$

Mamy więc doczynienia z ciągiem o postaci:

$x_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ Można zauważyć, że ciąg ten jest malejący. Przejdźmy do wyznaczenia wartości tego ciągu przy użyciu komputera.

Plik: *zad2.rb*

Po wypisaniu 30 pierwszych elementów tego ciągu mogę stwierdzić, że otrzymane przeze mnie wyniki nie są wiarygodne, ponieważ przekazywane na wyjście elementy nie są w porządku malejącym, a wręcz w pewnym momencie zaczynają rosnąć, a wykazałem, że ciąg powinien być malejący.

3. Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, ustal ilu teoretycznie wyrazów szeregu:

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Należy użyć do obliczenia wartości π z błędem mniejszym niż 10^{-7}

Z kryterium **Leibniza**

Jeśli ciąg a_n jest malejący i zbieżny do zera to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest malejący. Nasz ciąg a_n jest postaci:

$$a_k = \frac{1}{2k+1}$$

- (a) Czy ciąg jest zbieżny

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} = 0$$

Ciąg jest więc zbieżny.

- (b) Czy ciąg jest malejący?

$$\frac{1}{2k+1} > \frac{1}{2k+2}$$

Ciąg jest malejący.

Skoro wiem, że szereg jest zbieżny skorzystam z własności:

$$|S - S_k| \leq a_{k+1}$$

Cemu tak jest?

Weźmy sobie szereg naprzemienny o wyrazach kolejno równych:

a1 , a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, a9,

Ustalmy sobie $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, S - suma całości. Wiemy, że suma od a_5 do a_n jest albo większa albo mniejsza od zera, ponieważ wyrazy możemy pogrupować w pary $(a_5, a_6); (a_7, a_8)$ itd. Każda z tych par w zależności od wartości a_5 jest albo ujemna, albo dodatnia ciąg

$$a_k = \frac{1}{2k+1}$$

jest malejący zaczynamy od liczby ujemnej więc potem dodajemy do niej dodatnią ale w module od niej mniejszą itd. Każda z tych par jest ujemna. Możemy teraz te wyrazy pogrupować tak że zostawimy sobie a_5 i resztę weźmiemy w dwójki, które w zależności od poprzednich np. jak były ujemne staną się dodatnie. Wiemy natomiast, że całość ma być ujemna, więc jak do ujemnej dodamy sumę tych par (> 0), to otrzymamy liczbę ujemną. Z tego wynika, że:

$$|S - S_k| \leq a_{k+1}$$

Zależy nam na tym, aby błąd był mniejszy od 10^{-7} więc:

$$|S - S_k| \leq a_{k+1} < 10^{-7}$$

Dalej:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(k+1)+1} &< 10^{-7} // \times (2k+1) \\ 1 &< 10^{-7} \times (2k+3) \\ k &= 5000000 - 3 \\ k &= 4999997 + 1 // + 1 \text{bomabywkszeodlanierwne} \\ k &= 4999998 \end{aligned}$$

Teraz wykonałem odpowiedni eksperyment z wykorzystaniem komputera.

Źródło: *zad3.rb*, *testzad3.rb*

Wynika z niego, że dla $k = 4999998$ program nie wyznacza π z błędem mniejszym niż 10^{-7} . Błąd jest mniejszy od 10^{-7} dla $k = 5000000$.

4. Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, sprawdź, że do obliczenia $\ln 2$ z błędem mniejszym niż $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$ trzeba użyć ok. 2 milionów wyrazów szeregu:

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

Z kryterium **Leibniza**

Jeśli ciąg a_n jest malejący i zbieżny do zera to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest malejący. Nasz ciąg a_n i dla $x = 2$ jest postaci:

$$a_k = \frac{1}{k}$$

- (a) Czy ciąg jest zbieżny

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

Ciąg jest więc zbieżny.

- (b) Czy ciąg jest malejący?

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{k+1}$$

Ciąg jest malejący.

Skoro wiem, że szereg jest zbieżny skorzystam z własności:

$$|S - S_k| \leq a_{k+1}$$

Zależy nam na tym, aby błąd był mniejszy od $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$ więc:

$$|S - S_k| \leq a_{k+1} < \frac{1}{2} \times 10^{-6}$$

Dalej

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{2} \times 10^{-6} // \times 2$$

$$\frac{2}{k+1} < 10^{-6}$$

$$k + 1 = 2 \times 10^6$$

$$k = 2 \times 10^6 - 1$$

Dalej wykaż, że wykorzystanie prostego związku

$$\ln 2 = \ln\left[e \times \frac{2}{e}\right]$$

może znacznie przyspieszyć obliczenia.

Odp:

$$\ln\left[e \times \frac{2}{e}\right] = \ln e + \ln \frac{2}{e} = 1 + \ln \frac{2}{e}$$

Sprawdźmy teraz ile elementów ciągu musimy użyć aby obliczyć $\ln \frac{2}{e}$ z błędem mniejszym niż $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$. Podstawmy do naszego szeregu za $x = \frac{2}{e}$. Otrzymujemy:

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\left(\frac{2}{e} - 1\right)^k}{k}$$

Szereg ten nie jest naprzemienny, co trochę komplikuje całą sprawę.

Zaokrąglimy więc licznik, który jest równy ok. -0.264241 do wartości równej $\frac{1}{5}$. Więc

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^k}{k}$$

Dalej Można zauważyć, że są to wartości asymptotycznie szybko malejące. Ponadto wszystkie $\rightarrow 0$. I już różnica $S_{11} - S_{10}$ równa jest w module $|3.9866828560608525e - 08|$. Wiedząc, że wartości będą coraz to mniejsze, a już mamy doczynienie z liczbą praktycznie niezauważalną". Twierdzę, że do optymalnego obliczenia (z dość małym błędem) sumy tego szeregu będziemy potrzebować nie więcej niż 30 jego wyrazów. (Dalsze iteracje będą zbyt mało znaczące).

5. Wykorzystując pomysł z poprzedniego zadania zaproponuj szybki algorytm do wyznaczania \ln bardzo dużych liczb.

```

1 def calc(x,k)
2     sum = 0
3     for i in 1..k
4         sum+=((( -1) ** (i-1) ) * (((x-1) ** i) / i))
5     end
6     sum
7 end
8

```

```

9 def ln x
10   if x > 5
11     temp = x / Math::E
12     return 1 + 1 + ln(temp/Math::E)
13   else
14     return 1 + calc((x / Math::E), 30)
15   end
16 end

```

Listing 1: Algorytm do wyznaczenia logarytmu naturalnego

Opis:

Na początku sprawdzam czy x jest większy od 5, aby podczas dzielenia przez e wynik nie był większy od 2. Następnie wyciągam z tej liczby e i do wyniku dodaje 1 i rekurencyjnie wywołuję funkcję **ln** z tym co mi zostało po wyciągnięciu e . Jeżeli argument funkcji **ln** jest mniejszy równy 5 to postępuje zgodnie z pomysłem z poprzedniego zadania.

Test: *testzad5.rb*

6. W języku **PWO ++** funkcja **ATAN** oblicza \arctg z dużą dokładnością, ale tylko wtedy gdy $|x| \leq 1$. Zaproponuj algorytm wyznaczający w języku **PWO ++** \arctg z dużą dokładnością dla $|x| > 1$.

```

1 def ATan(x)
2   return Math.atan(x) if x.abs <= 1
3   print "Wywołano funkcje ATan z |x| > 1"
4 end
5
6 def FATan(x)
7   if x < 0
8     a = - (Math::PI / 2.0)
9     return a - ATan(1.0/x)
10  elsif x == 0
11    return ATan(x)
12  else
13    a = (Math::PI / 2.0)
14    return a - ATan(1.0/x)
15  end
16 end

```

Listing 2: Kod w Ruby

Korzystam z faktu, że gdy $x \geq 0$ to:

$$\arctg(x) + \arctg\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

A gdy $x < 0$ to:

$$\arctg(x) + \arctg\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$