Równanie transportu ciepła - wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Maciej Brzeżawski

Styczeń 2024

1 Dane oraz warunki początkowe

$$\frac{d}{dx}(-k(x)\frac{du(x)}{dx}) = 0$$
$$u(2) = 0$$
$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$
$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1,2] \end{cases}$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja:

$$x \in [0,2] \to u(x) \in \mathbb{R}$$

2 Obliczenia

Rozważmy dowolną funkcję $v \in V$ i pomnóżmy nasze równanie początkowe stronami:

$$-k'(x)u'' \cdot v\,dx = 0 \cdot v\,dx$$
$$\int_0^2 -k'(x)u'' \cdot v\,dx = \int_0^2 0 \cdot v\,dx$$

Przeprowadźmy następnie całkowanie przez części:

$$-\left[k(x)u'v\right]_0^2 + \int_0^2 k(x)u'v'\,dx = 0$$

$$k(0) \cdot u'(0) \cdot v(0) - k(2) \cdot u'(2) \cdot v(2) + \int_0^2 k(x) \cdot u' \cdot v'\,dx = 0$$

Korzystając kolejno z warunków podanych w zadaniu, po przekształceniach otrzymujemy:

$$k(0) \cdot [20 - u(0)] \cdot v(0) + \int_0^2 k(x) \cdot u' \cdot v' \, dx = 0$$

$$= (20 - u(0)) \cdot v(0) + \int_0^2 k(x) \cdot u' \cdot v' \, dx = 0$$

$$\int_0^2 k(x) v' u' \, dx - u(0) \cdot v(0) = -20 \cdot v(0)$$

Po tym przekształceniu, rozważane równanie zostało zapisane w postaci:

$$B(u, v) = L(v)$$