Ejercicios Parcial I

Santiago Martínez, Román Contreras

August 14, 2017

1 Semana I

1.1 El grupo ortogonal

Ejercicio 1.1. *Recordemos que el conjunto de matrices ortogonales,* $O(n)$*, está definido por:*

$$O(n) = \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid MM^* = Id\}$$

y que $SO(n) = \{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\}$.

1. *Definamos las matrices* R_α *como*

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

   y R_y *como*

$$R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Demuestra que $R(\alpha), R_y \in O(2)$ *y que* $R(\alpha) \in SO(2)$ *pero* $R_y \notin SO(2)$.

2. *Demuestra que* $R(\alpha + \beta) = R(\alpha)R(\beta)$ *y* $R_0 = Id$.

3. *Demuestra que* $O(2) = \{R(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{R_y R(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

4. *Demuestra que* $O(2)$ *es difeomorfo a* $\mathbb{S}^2 \times \{0, 1\}$.

Ejercicio 1.2. *Demuestra que* $O(n)$ *es una variedad diferenciable y calcula su dimensión.*

Ejercicio 1.3 (*)**.** *Demuestra que* $SO(n)$ *es conexo.*

1.2 Construcción de variedades

Los siguientes ejercicios conciernen algunas construcciones comunes y útiles para generar nuevas variedades a partir de variedades dadas.

Ejercicio 1.4. *Sean* M *y* N *variedades diferenciables.*

1. *Sean* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $g : V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ *dos funciones diferenciables. Demuestra que la función* $f \times g : U \times V \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{m+l}$ *definida por*

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$$

   es diferenciable y calcula su diferencial.

2. *Sean* (U, φ_U) *y* (V, φ_V) *cartas de* M *y* N*, respectivamente. Demuestra que* $(U \times V, \varphi_U \times \varphi_V)$ *es una carta.*

3. *Si* $\mathscr{A}_M$ *y* $\mathscr{A}_N$ *son los atlas de* M *y* N *(de tipo* C^r*), demuestra que*

$$\mathscr{A} = \{(U \times V, \varphi_U \times \varphi_V) \mid (U, \varphi_U) \in \mathscr{A}_M \text{ y } (V, \varphi_V) \in \mathscr{A}_N\}$$

   forma un atlas de tipo C^r *de* $M \times N$.

4. *Demuestra que con el atlas del inciso anterior* $M \times N$ *es una variedad diferenciable para el cual las funciones, llamadas las proyecciones canónicas,* π_M, π_N *definidas por* $\pi_M(x, y) = x$ *y* $\pi(x, y) = y$*, son diferenciables.*

Ejercicio 1.5. *Sea* M *una variedad diferenciable y* $f : M \to M$ *un difeomorfismo inyectivo tal que* $f^2 = Id$.

1. *Demuestra que para todo* $p \in M$ *existen una vecindad* U *de* p *tal que* $f(U) \cap U = \emptyset$*. cartas diferenciables* $(U, \varphi_U), (V, \varphi_V)$.

2. *Definimos una relación de equivalencia* $x \sim y$ *si* $x = f(y)$*. Las clases de equivalencia, o bien el conjunto obtenido de identificar* p *con* $f(p)$ *es llamado*

$$M/f = \{[p]_\sim \mid p \in M\}$$

   Demuestra, usando el inciso anterior, que M/f *tiene una estructura diferenciable tal que la proyección canónica* $\pi_f : M \to M_f$*, dada por* $\pi_f(p) = [p]$*, es diferenciable.*

2 Semana II

2.1 Grupos de Lie y Algebras de Lie

Ejercicio 2.1. *Pensando a* $SO(n)$ *como subvariedad de* $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$*, calcula el espacio tangente de* $SO(n)$.