

Ejercicios Parcial I

Santiago Martínez, Román Contreras

19 de agosto de 2017

1. Semana I

1.1. El grupo ortogonal

Ejercicio 1.1. Recordemos que el conjunto de matrices ortogonales, $O(n)$, está definido por:

$$O(n) = \{M \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid MM^* = Id\}$$

y que $SO(n) = \{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\}$.

1. Definamos las matrices R_α como

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

y R_y como

$$R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Demuestra que $R(\alpha), R_y \in O(2)$ y que $R(\alpha) \in SO(2)$ pero $R_y \notin SO(2)$.

2. Demuestra que $R(\alpha + \beta) = R(\alpha)R(\beta)$ y $R_0 = Id$.

3. Demuestra que $O(2) = \{R(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{R_y R(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

4. Demuestra que $O(2)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^2 \times \{0, 1\}$.

Ejercicio 1.2. Demuestra que $O(n)$ es una variedad diferenciable y calcula su dimensión.

Ejercicio 1.3 (*). Demuestra que $SO(n)$ es conexo.

1.2. Construcción de variedades

Los siguientes ejercicios conciernen algunas construcciones comunes y útiles para generar nuevas variedades a partir de variedades dadas.

Ejercicio 1.4. Sean M y N variedades diferenciables.

1. Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ dos funciones diferenciables. Demuestra que la función $f \times g : U \times V \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{m+l}$ definida por

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$$

es diferenciable y calcula su diferencial.

2. Sean (U, φ_U) y (V, φ_V) cartas de M y N , respectivamente. Demuestra que $(U \times V, \varphi_U \times \varphi_V)$ es una carta.

3. Si \mathcal{A}_M y \mathcal{A}_N son los atlas de M y N (de tipo C^r), demuestra que

$$\mathcal{A} = \{(U \times V, \varphi_U \times \varphi_V) \mid (U, \varphi_U) \in \mathcal{A}_M \text{ y } (V, \varphi_V) \in \mathcal{A}_N\}$$

forma un atlas de tipo C^r de $M \times N$.

4. Demuestra que con el atlas del inciso anterior $M \times N$ es una variedad diferenciable para el cual las funciones, llamadas las proyecciones canónicas, π_M, π_N definidas por $\pi_M(x, y) = x$ y $\pi(x, y) = y$, son diferenciables.

Ejercicio 1.5. Sea M una variedad diferenciable y $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo inyectivo tal que $f^2 = \text{Id}$.

1. Demuestra que para todo $p \in M$ existen una vecindad U de p tal que $f(U) \cap U = \emptyset$. cartas diferenciables $(U, \varphi_U), (V, \varphi_V)$.

2. Definimos una relación de equivalencia $x \sim y$ si $x = f(y)$. Las clases de equivalencia, o bien el conjunto obtenido de identificar p con $f(p)$ es llamado

$$M/f = \{[p]_{\sim} \mid p \in M\}$$

Demuestra, usando el inciso anterior, que M/f tiene una estructura diferenciable tal que la proyección canónica $\pi_f : M \rightarrow M/f$, dada por $\pi_f(p) = [p]$, es diferenciable.

2. Semana II

2.1. Espacios tangentes en \mathbb{R}^n

Recordemos la definición de espacio tangente en \mathbb{R}^n que manejamos en la clase: Dado $p \in \mathbb{R}^n$ definimos el conjunto

$$T_p \mathbb{R}^n := \{\gamma \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma(0) = p\} / \sim_p$$

donde $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$ cuando $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$. Definimos además las operaciones siguientes: $[\gamma_1] + [\gamma_2] := [\psi]$ donde $\psi(t) := \gamma_1(t) + \gamma_2(t) - p$ y definimos $\lambda[\gamma] := [\psi]$ con $\psi(t) := \lambda(\gamma(t) - p) + p$.

Ejercicio 2.1. 1. Demuestra que las operaciones antes mencionadas están bien definidas.

2. Demuestra que $T_p \mathbb{R}^n$ con las operaciones arriba definidas es un espacio vectorial.

3. Sea γ_i la curva dada por $\gamma_i(t) := p + t\hat{e}_i$. Demuestra que los vectores $[\gamma_i] \in T_p \mathbb{R}^n$ forman una base.

Ejercicio 2.2. Define la noción de espacio tangente en p a la esfera unitaria $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a partir del conjunto $\{\gamma \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}^n, \gamma(0) = p\}$. En particular define la suma de vectores y el producto por un escalar. Finalmente demuestra que $T_p \mathbb{S}^n$ se puede identificar canónicamente con el subespacio vectorial $\text{perp}(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, p \rangle = 0\}$.

Análogamente, define la noción de espacio tangente a una subvariedad.

Una referencia útil para estos ejercicios puede ser el capítulo 2 de *Introduction to differential topology* de Bröcker y Jänich.

2.2. Grupos de Lie y Algebras de Lie

Ejercicio 2.3. *Pensando a $SO(n)$ como subvariedad de $M_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$, calcula el espacio tangente de $SO(n)$.*