Proyecto // Parcial II

Grupos de Lie

*

Este proyecto está diseñado como una introducción a la geometría diferencial de los grupos de Lie.

1 Definición y propiedades básicas

Definicion 1.1. *Un grupo de Lie es una variedad diferenciable G junto con un par de funciones diferenciables $m : G \times G \to G$, $i : G \to G$ y un elemento distinguido $e \in G$ tal que*

1. $m(a, e) = m(e, a) = a$ *para todo* $a \in G$.
2. $m(c, m(a, b)) = m(m(c, a), b)$ *para todo* $a, b, c \in G$.
3. $m(a, i(a)) = m(i(a), a) = e$ *para todo* $a \in G$.

Esto es, todo grupo de Lie es un grupo, que además es una variedad y las operaciones de grupo son diferenciables. De ahora en adelante usaremos la notación $ab = m(a, b)$ y $i(a) = a^{-1}$.

Si $a \in G$, entonces la multiplicación derecha e izquierda por a define dos funciones $L_a, R_a : G \to G$ dada por

$$L_a(b) = ab$$
$$R_a(b) = ba$$

Ejercicio 1.1. *Para cada $a \in G$ demuestra que:*

1. L_a *y* R_a *son diferenciables.*
2. $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ *y* $R_a^{-1} = R_{a^{-1}}$. *Concluye que* L_a *y* R_a *son difeomorfismos.*
3. *Si* $b \in G$ *entonces* $L_a \circ L_b = L_{ab}$ *y* $R_a \circ R_b = R_{ba}$.
4. $i \circ L_a = R_{a^{-1}} \circ i$ *y* $i \circ R_a = L_{a^{-1} \circ i}$.

La función de multiplicación $m : G \times G \to G$ es diferenciable por lo que tiene diferencial en cada punto $(g, h) \in G \times G$. Recuerden que $T_{(g,h)}(G \times G) \cong T_gG \times T_hG$. Esta descomposición del espacio tangente nos permite describir la diferencial de m en términos de los difeomorfismos L_a y R_b.

Ejercicio 1.2. *Demuestra que se puede calcular la diferencial de m en el punto $(a,b) \in G \times G$ como*

$$Dm_{(a,b)}(v,w) = (DL_a)_b(w) + (DR_b)_a(v)$$

Pista: Usa que $Dm_{(a,b)}$ es lineal y calcula $Dm_{(a,b)}$ en vectores de la forma $(v,0)$ y $(0,w)$.

Ejercicio 1.3. *Demuestra que la diferencial del mapeo de inversión $i : G \to G$ en la identidad está dado por*

$$Di_e(v) = -v$$

Notemos que para cada $a \in G$ se tiene que $L_a(e) = ae = a$ y por lo tanto la diferencial $(DL_a)_e : T_eG \to T_aG$ conecta dichos espacios tangentes.

Ejercicio 1.4. *Demuestra que, para cada $a \in G$ la diferencial $(DL_a)_e$ es un isomorfismo lineal.*

Estos isomorfismos se pueden juntar en una función

$$\Psi : G \times T_eG \to TM$$

definida por

$$\Psi(a,v) = (a, (DL_a)_e(v)) \in TM$$

Ejercicio 1.5. *Este ejercicio tiene como objetivo demostrar que Ψ es un isomorfismo de haces vectoriales.*

1. *Demuestra que Ψ es una función diferenciable.*
2. *Define $\Gamma : TM \to G \times T_e$ como*

   $$\Gamma(a,v) = (a, DL_{a^{-1}}(v))$$

   Demuestra que Γ es diferenciable y que $\Psi^{-1} = \Gamma$.
3. *Demuestra que Ψ es un mapeo de haces vectoriales y concluye que Ψ es un isomorfismo de haces vectoriales.*
4. *Concluye que G es paralelizable.*

2 Campos invariantes

Las multiplicaciones por la izquierda y derecha también transportan o trasladan los campos vectoriales. Los campos invariantes son aquellos que coinciden con todos sus traslados:

Definicion 2.1. *Se dice que un campo vectorial X en G es izquierdo [derecho] invariante si para todo $a \in G$*

$$L_a^*(X) = X (R_a^*(X) = X)$$

es decir si para todo $b \in G$

$$(DL_a)_b(X_b) = X_{ab} \ [(DR_a)_b(X_b) = X_{ba}]$$

La colección de campos izquierdo invariantes es denotada por $\mathcal{X}^G(G)$.

Nota que si $X, Y \in \mathcal{X}^G(G)$ son un par de campos invariantes y $c \in \mathbb{R}$ entonces $X+cY$ es un campo izquierdo invariante. Esto es los campos izquierdo-invariantes forman un subespacio vectorial del conjunto de campos vectoriales.

Ejercicio 2.1. *Demuestra que si $X \in \mathcal{X}^G(X)$ es un campo izquierdo invariante y $Y = i^*(X)$, i.e. $Y_a = (Di)_{a^{-1}}(X_{a^{-1}})$, entonces Y es izquierdo invariante.*

Ejercicio 2.2. *Para cada vector $v \in T_eG$ define el campo vectorial X_v como $(X_v)_a = (DL_a)_e(v)$. Demuestra que X_v es un campo vectorial diferenciable e izquierdo-invariante.*

Prueba también que el mapeo $v \mapsto X_v$ es un isomorfismo lineal entre T_eG y $\mathcal{X}^G(G)$. Por lo que $\mathcal{X}^G(G)$ es un espacio vectorial con $dim(\mathcal{X}^G(G)) = dim(G)$.

Ejercicio 2.3. *Demuestra que si $X, Y \in \mathcal{X}^G(G)$ entonces $[X, Y] \in \mathcal{X}^G(G)$.*

Por todo lo probado hasta ahora $T_eG \cong \mathcal{X}^G(G)$ es un espacio vectorial finito dimensional junto con una operación $[\cdot,\cdot] : \mathcal{X}^G(G) \times \mathcal{X}^G(G) \to \mathcal{X}^G(G)$ bilineal y antisimétrica. Esta operación satisface la identidad de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

A un espacio vectorial junto con una operación así se le llama un álgebra de Lie.

Definicion 2.2. *Un álgebra de Lie es un espacio vectorial V junto con una operación $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ que satisface*

1. *$[\cdot,\cdot]$ es bilineal.*
2. *Para todos $v, w \in V$, $[v, w] = -[w, v]$.*
3. *Para todos $v, w, z \in V$, $[v, [w, z]] + [z, [v, w]] + [w, [z, v]] = 0$.*

Definicion 2.3. *A T_eG se le llama el álgebra de Lie asociada a G y es usualmente escrita con letras góticas $\mathfrak{g} = T_eG$.*

3 Subgrupos a un parámetro

Definicion 3.1. *Una curva diferenciable $a : \mathbb{R} \to G$ es un subgrupo a un parámetro si*

$$a(0) = e$$
$$a(t+s) = a(t)a(s)$$

Cada subgrupo a un parámetro produce transformaciones a un parámetro de G de la siguiente manera: Sea $\Psi_a : G \times \mathbb{R} \to G$ la función definida por

$$\Psi_a(b, t) = ba(t) = R_{a(t)}(b)$$

Ejercicio 3.1. *Demuestra que Ψ_a es diferenciable. Y que para todo $b \in G$ y $t, s \in \mathbb{R}$ se tiene que $\Psi_a(b, t+s) = \Psi_a(\Psi_a(b, t), s)$.*

Para cada b fijo esto define una curva diferenciable $\beta_a^b(t) = \Psi_a(b,t)$ que satisface $\beta_a^b(0) = \Psi_a(b,0) = a(0)b = eb = b$. Luego $(\beta_a^b)'(0) \in T_bM$. La colección de dichos vectores tangentes $X_a = \left\{(\beta_a^b)'(0) \mid b \in G\right\}$ forma un campo vectorial, que denotaremos por

$$X_a(b) = \frac{\partial \Psi_a}{\partial t}(b,0)$$

Ejercicio 3.2. *Demuestra que X_a es un campo vectorial izquierdo invariante y $(X_a)_e = a'(0)$.*

Noten que para obtener un campo izquierdo invariante hay que multiplicar por la derecha por el subgrupo a un parámetro.

Hemos visto cada subgrupo a un parámetro define un campo vectorial izquierdo invariante. Ahora veremos que el reciproco también es cierto.

Para lo que sigue usaremos lo que viene en las notas de ecuaciones diferenciales en variedades.

Ejercicio 3.3. *Sea $Sub_1(G)$ el conjunto de subgrupos a un parámetro de G. Acabamos de definir una función $\Theta : Sub_1(G) \to \mathcal{X}^G(G)$ dado por*

$$\Theta(a) = \frac{\partial \Psi_a}{\partial t}$$

Cada campo izquierdo invariante $X \in \mathcal{X}^G(G)$ es una ecuación diferencial en G la cual induce un flujo maximal $\Psi_X : G \times \mathbb{R} \to G$ (asumiremos por el momento que está definido en todo $G \times \mathbb{R}$)

1. *Demuestra que la curva $a(t) = \Psi_X(e,t)$ es un subgrupo a un parámetro de G.*

2. *Demuestra que $\Theta(a) = X$. Pista: Demuestra que $\Psi_a = \Psi_X$.*

3. *Concluye que Θ es biyectiva.*

Dado que $T_eG \cong \mathcal{X}^G(G) \cong Sub_1(G)$ todo vector tangente en la identidad tiene asociado un subgrupo a un parámetro.

Ejercicio 3.4. *Demuestra que para todo $v \in T_eG$ existe un único subgrupo a un parámetro de G, digamos $a_v : \mathbb{R} \to G$, tal que $a_v'(0) = v$.*

Dichos mapeos se juntan en un único mapeo llamado el mapeo exponencial del grupo G.

Definicion 3.2. *El mapeo exponencial $exp : T_eG \to G$ es la función definida por*

$$exp(v) = a_v(1)$$

Ejercicio 3.5. *Demuestra que, para todo $v \in T_eG$ se tiene*

$$a_v(t) = exp(tv)$$

4 Métricas invariantes

La noción de campo vectorial invariante se puede extender a campos tensoriales. Eso ya que los difeomorfismos L_a (y R_a) también trasladan campos tensoriales. Recordamos que si $g : M \to N$ es un difeomorfismo y $T \in T^r_s M$ es un campo tensorial entonces $g_* T$ es el campo tensorial en N tal que para todo $g(q) \in N$ y todos $v_1, \cdots, v_r \in T_{g(q)}N$ y $f^1, \cdots, f^s \in T^*_{g(q)}N$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
(g_*(T))_{g(q)}(v_1, \cdots, v_r, f^1, \cdots, f^s) \\
&= T(Df_q^{-1}(v_1), \cdots, Df_q^{-1}(v_r), f^1 \circ Df_q, \cdots, f^s \circ Df_q)
\end{aligned}
$$

Definicion 4.1. *Un campo tensorial $T \in T^r_s G$ es izquierdo [derecho] invariante si para todo $a \in G$ se tiene que $(L_a)_*(T) = T$ [$(R_a)_*(T) = T$]. El espacio de (r, s)-tensores izquierdo-invariantes es denotado por $(T^r_s)^G G$. El espacio de r-formas diferenciales izquierdo-invariantes es denotado por $\Omega^r_G G$.*

En particular una 1-forma ω es izquierdo invariante si para todo $a \in G$ y todo campo vectorial $X \in \mathcal{X}(G)$

$$
(L_a)_*(\omega)(X) = \omega\left(DL_a^{-1}(X)\right) = \omega\left(DL_{a^{-1}}(X)\right)
$$

Ejercicio 4.1. *Sean $\omega \in \Omega^1 G$ y $X \in \mathcal{X}(G)$.*

1. *Demuestra que ω es izquierdo-invariante si y sólo si $\omega(Y)$ es una función constante para todo $Y \in \mathcal{X}^G G$.*

2. *Demuestra que X es izquierdo-invariante si y sólo si $\tau(X)$ es una función constante para todo $\tau \in \Omega^1_G G$.*

Definicion 4.2. *Una métrica izquierdo(derecho)-invariante en G es una métrica $g \in T^2_0(G)$ (simétrica, positivo definida) que es izquierdo(derecho)-invariante.*

Ejercicio 4.2. *Demuestra que siempre existe una métrica izquierdo-invariante.*

Ejercicio 4.3. *Sea g una métrica riemanniana en G y $X \in \mathcal{X}(G)$.*

1. *Demuestra que g es izquierdo invariante si y sólo si para todo par $Y, Z \in \mathcal{X}^G(G)$ la función $g(Y, Z)$ es constante.*

2. *Supón que g es izquierdo invariante. Demuestra que X es izquierdo invariante si y sólo si para todo $Y \in \mathcal{X}^G(G)$ la función $g(X, Y)$ es constante.*

Ejercicio 4.4. *Demuestra que si g es una métrica izquierdo(derecho)-invariante entonces para todo $a \in G$ los difeomorfismos $L_a(R_a)$ son isometrías.*

Ejercicio 4.5. *Demuestra que si X es derecho invariante entonces $\mathcal{L}_X g = 0$. Pista: Recuerda que el flujo de X está dado por $\Psi_a(b, t) = a(t)b$, donde $a : \mathbb{R} \to G$ es una solución a $x' = X(x)$ con $a(0) = e$ y luego evalúa $\mathcal{L}_X g$ con campos izquierdo-invariantes.*

Ejercicio 4.6. *Supongamos que g es una métrica izquierdo y derecho invariante (o bi-invariante). Usa la fórmula de Koszul:*

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) =& \frac{1}{2}(Xg(Y, X) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\
&+ g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X))
\end{aligned}
$$

y la ecuación

$$\mathcal{L}_X g(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z])$$

para demostrar que si X es un campo izquierdo invariante entonces

$$\nabla_X X = 0$$

Concluye que las curvas $\gamma_v(t) = exp(tv)$, para $v \in T_eG$ unitario, son geodésicas.
Pista: Calcula $g(\nabla_X X, Z)$ para cualquier campo $Z \in \mathcal{X}^G(G)$.