

## Экзаменационные вопросы

1. Элементы теории множеств. Символы математической логики.
2. Функции одной переменной: определение, множество значений, область определения, способы задания.
3. Свойства функций одной переменной: чётность, периодичность, монотонность.
4. Понятие обратной функции.
5. Основные элементарные функции. Их свойства и графики.
6. Понятие сложной функции. Примеры сложных функций. Элементарные функции.
7. Определение числовой последовательности. Предел числовой последовательности.
8. Предел функции в точке. Левосторонний, правосторонний пределы.
9. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства и сравнение бесконечно малых функций.
10. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательный пределы.
11. Представление о неопределённостях и способах их раскрытия.
12. Определение непрерывности. Точки разрыва: классификация и примеры.
13. Свойства функций, непрерывных в точке и на отрезке.
14. Определение производной, её физический, геометрический и экономический смыслы.
15. Связь понятий непрерывности и дифференцируемости. Кривая Коха.
16. Свойства операции дифференцирования.
17. Производная сложной функции. Логарифмическая производная.
18. Производная обратной функции.
19. Производная функции, заданной неявно.
20. Производные основных элементарных функций. Таблица производных.
21. Дифференциал. Свойства дифференциала. Применения в приближенных вычислениях.
22. Производные и дифференциалы высших порядков.
23. Производная параметрически заданной функции.
24. Правило Лопиталя.
25. Монотонность. Экстремумы: определение, необходимый и достаточный признаки экстремума.
26. Достаточный признак экстремума, использующий вторую производную, а также (при необходимости) производные третьего и высших порядков.
27. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба. Необходимый и достаточный признаки существования точек перегиба.

28. Асимптоты графика функции.
29. Общая схема исследования функций и построения их графиков (на примерах функций  $y = x + \frac{1}{x-1}$  и  $y = x e^{-x^2}$ ).
30. Понятие функции нескольких переменных.
31. Топология пространства  $\mathbb{R}^2$ :  $\delta$ -окрестность, область, классификация областей.
32. Предел и непрерывность функции двух переменных.
33. Частные приращения и частные производные.
34. Полное приращение, полный дифференциал. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных.
35. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.
36. Производные сложных функций двух переменных.
37. Производные неявно заданных функций: для случаев функций одной и двух переменных.
38. Определения и уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке.
39. Экстремумы функций двух переменных: определения максимума и минимума, необходимое и достаточное условия существования экстремума.
40. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла: масса тонкой пластины.
41. Определение двойного интеграла.
42. Свойства двойного интеграла.
43. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
44. Двойной интеграл в полярных координатах.
45. Приложения двойных интегралов: вычисление площадей плоских фигур, центра масс тонкой пластины, объёмов цилиндрических тел.
46. Кривые в  $\mathbb{R}^3$ . Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла 1-го рода: масса нити.
47. Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода.
48. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода.
49. Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла 2-го рода: работа переменной силы.
50. Определение и свойства криволинейного интеграла 2-го рода.
51. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.
52. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.
53. Понятие числового ряда и его суммы. Основные свойства сходящихся числовых рядов.
54. Необходимый признак сходимости числового ряда.

55. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов. Признаки сравнения.
56. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов. Признак Даламбера.
57. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов. Радикальный признак Коши.
58. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов. Интегральный признак Коши.
59. Знакопередающиеся числовые ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.
60. Понятие степенного ряда. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
61. Ряды Тейлора и Маклорена. Необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора.
62. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.
63. Применение степенных рядов к приближённым вычислениям. Привести примеры.

«Математический анализ, 1,2-й семестры»

## Примеры экзаменационных задач

1. Вычислить пределы, не используя правило Лопиталя:
  - a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x^3}{x^3-2x^2+7}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ ; d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{x^2}$ ; e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$ ;
  - f)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{8}{x^2-16} - \frac{4}{x-4}\right)$ ; g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x^2+x}\right)$ .
2. Найти  $y'$ :
  - a)  $y = x^3 \ln x$ ; b)  $y = \frac{x}{\sin x}$ ; c)  $y = \arcsin(\sqrt{1-x})$ ; d)  $y = x e^{-x^2} \cos x$ ; e)  $y = (1+x^2)^{\lg x}$ .
3. Найти  $y''(0)$ , если  $y = e^{-4x} \sin(3x)$ .
4. Найти  $dy$ , если  $y = 2^{\sqrt{x}}$ .
5. Вычислить приближённо  $\operatorname{arctg}(1,05)$ .
6. С помощью правила Лопиталя вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ .
7. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции  $y = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ .
8. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции  $y = x^3(x-2)$ .
9. Исследовать функцию  $y = \frac{4x^2}{x+3}$  и построить её график.
10.  $z = y^2 \ln x$ . Найти  $z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$ .
11.  $z = y^2 \cdot \sqrt{y-x}$ . Найти  $dz$  и  $d^2z$ .
12.  $z = \frac{y}{x^2}, y = e^{uv}, x = \frac{u}{v}$ . Найти  $z'_u, z'_v$ .

13.  $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$ ,  $y = 2^{\cos t}$ ,  $x = \frac{1}{t}$ . Найти  $\frac{dz}{dt}$ .
14.  $z = \operatorname{arctg}(1 - x - y)$ ,  $y = \ln(3x - 1)$ . Найти  $\frac{dz}{dx}$ .
15. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением  $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$  в точке  $M_0(1; 2; -1)$ .
16.  $3x^2y - y \sin(xy) = y^2x$ . Найти  $y'$ .
17.  $z \operatorname{tg}(x - 3y) - y \sin(xz) = z^3 - 4\sqrt{y - 3x}$ . Найти  $z'_x$ ,  $z'_y$ .
18. Исследовать на экстремум функцию:  $z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 4x + 2y - 11$ .
19. Вычислить двойной интеграл:
- $\iint_D (x + y) dx dy$ , если область  $D$  ограничена линиями  $y = 0$ ,  $x = 4$ ,  $xy = 1$ ,  $y = \sqrt{x}$ ;
  - $\iint_D xy^2 dx dy$ , если область  $D$  ограничена линиями  $y^2 = 2x$ ,  $x = 2$ ;
  - $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , если область  $D$  ограничена линией  $y^2 + x^2 = 2y$ .
20. С помощью двойного интеграла найти площадь области  $D$ , если  $D : y > x^2$ ,  $y < 4 - 3x^2$ .
21. С помощью двойного интеграла найти координаты центра тяжести однородной пластины  $D$ , если  $D : y > x$ ,  $0 < 1 - x^2 - y^2$ .
22. Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода:
- $\int_L xy dl$ , если  $L$  — отрезок прямой  $x - y = 1$  между точками  $(0; -1)$  и  $(1; 0)$ .
  - $\int_L x dl$  вдоль линии  $L : \begin{cases} x = t^2/2 \\ y = \frac{1}{3}(2t + 1)^{3/2} \end{cases}$  между точками  $t = 0$  и  $t = 1$ .
  - $\int_L \frac{y dl}{\sqrt{x + 1}}$  вдоль линии  $L : x = \frac{y^2}{2} - y$  между точками  $(-1/2; 1)$  и  $(0; 0)$ .
23. Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода:
- $\int_L xy dy - y dx$ , если  $L$  — отрезок прямой  $x - y = 0$  от точки  $(0; 0)$  до точки  $(1; 1)$ .
  - $\int_L dx - \frac{2x}{y^2} dy$  вдоль линии  $L : y = \frac{1}{x-1}$  от точки  $(2; 1)$  до точки  $(3; 1/2)$ .
  - $\int_L x dx + x dy$  вдоль линии  $L : \begin{cases} x = \sin t \\ y = -\cos t - \sin t \end{cases}$  от точки  $t = 0$  до точки  $t = \pi$ .
  - $\int_{(1;e)}^{(2;1)} \ln y dx + \frac{x}{y} dy$ .
24. Исследовать на сходимость числовые ряды:
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ ; b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$ ; c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n}$ ; d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ ; e)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ ; f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$ .

25. Найти интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{2^n(n^2+1)}$ . Исследовать сходимость на концах интервала.
26. Используя степенной ряд, вычислить приближённо  $\cos(1)$  с абсолютной погрешностью  $\delta = 0,001$ .
27. Используя степенной ряд, вычислить приближённо  $\int_0^{1/2} \frac{(x - \sin x)}{x^3} dx$  с абсолютной погрешностью  $\delta = 0,001$ .
28. Записать пять первых, отличных от нуля, членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при заданных начальных условиях:

а)  $y' = e^y + xy$ ,  $y(0) = 0$ ; б)  $y'' = x + y^2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

«Математический анализ, 1,2-й семестры»

## Пример экзаменационного билета

### Билет №31

1. Асимптоты графика функции. (8 баллов)
2. Формула Грина. (8 баллов)
3. Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (2x - y) dx dy$ , если область  $D$  ограничена линиями  $y = 0$ ,  $2x = 1 + y^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ . (8 баллов)
4. Вычислить  $y'$ , если  $y = \sqrt{x^3 + x^2 - x}$ . (8 баллов)
5. Используя степенной ряд, вычислить приближённо  $\sin^2(1/2)$  с абсолютной погрешностью  $\delta = 0,001$ . (8 баллов)

«Математический анализ, 1,2-й семестры»

## Список литературы

### Теоретическая часть.

1. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 1. – М.: Айрис-пресс, 2010. — 288 с.
2. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 2. – М.: Айрис-пресс, 2009. — 256 с.

### Практическая часть.

1. *Журбенко Л. Н., Никонова Г.А. и др.* Математика в примерах и задачах. – М.: ИНФРА-М, 2009. — 373 с.
2. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожесникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I, II. – М.: Высшая школа. 1997.