

Прямая на плоскости

Задачи и упражнения.

- 4.1.** Построить прямые:
- а) $3x - 4y - 12 = 0$; б) $2x - y = 0$; в) $2x + 5 = 0$; г) $5 - 3y = 0$.
- 4.2.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку А, перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A, B\}$, если:
- а) $A(1, 2)$ и $B(3, 5)$; б) $A(-1, 2)$ и $B(3, -3)$; в) $A(2, 3)$ и $B(5, 1)$; г) $A(-1, 2)$ и $B(2, 2)$; д) $A(3, 2)$ и $B(3, -1)$.
- 4.3.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$, параллельно вектору \vec{s} , если: а) $\vec{s} = \{2, 3\}$; б) $\vec{s} = 2\vec{i}$ в) $\vec{s} = -3\vec{j}$.
- 4.4.** Найти уравнение прямой, проходящей через точки А и В, если:
- а) $A(-2, 4)$ и $B(1, -1)$; б) $A(2, 3)$ и $B(-1, 3)$; в) $A(-1, -2)$ и $B(-1, 1)$; г) $A(2, 4)$ и $B(0, 0)$.
- 4.5.** Точка движется прямолинейно и ее траектория проходит через точки $A(-2, 5)$ и $B(4, -1)$. Лежат ли точки $M_1(2, 1)$ и $M_2(4, 2)$ на траектории движения?
- 4.6.** Известно, что зависимость между количеством выпускаемой продукции и соответствующими издержками – линейная. Найти эту зависимость, если при выпуске 4 единиц продукции издержки составляют 16 тыс.руб., а при выпуске 8 единиц - 24 тыс.руб. Каковы издержки при выпуске 15 единиц продукции?
- 4.7.** Луч света распространяется по прямой $3x + 2y - 6 = 0$ и дойдя до оси абсцисс, он отражается от нее. Найти точку встречи луча с осью Ох и уравнение отраженного луча. Сделать чертеж.
- 4.8.** Найти проекцию точки $M(2, 8/3)$ на прямую, проходящую через точки $A(1, -1)$ и $B(2, 1/2)$.

4.9. Даны уравнение прямой $L: 3x - 4y + 12 = 0$ и точка $A(4,1)$.

а). Показать, что точка A не лежит на этой прямой; б) найти нормальный и направляющий векторы этой прямой; в) записать уравнение прямой L в нормальном виде, в отрезках, с угловым коэффициентом, в параметрической и канонической формах; г) вычислить расстояние от точки A до прямой; д) найти уравнения прямых, проходящих через точку A параллельно и перпендикулярно прямой L , соответственно.

4.10. Даны вершины треугольника ABC : $A(2,1)$, $B(-1,5)$ и $C(3,8)$.

а). Сделать чертеж; б) найти уравнения и длины сторон этого треугольника; в) найти уравнения и длины его высот; г) написать уравнения его медиан; д) найти уравнения его биссектрис (внутренних и внешних углов); е) вычислить величину углов треугольника; ж) через вершины треугольника провести прямые, параллельные противоположным сторонам.

4.11. Даны уравнения сторон треугольника ABC: AB: $5x - 3y + 2 = 0$;

BC: $x + y - 6 = 0$; CA: $3x - 5y - 2 = 0$. Найти:

а) координаты его вершин; б) величины его внутренних углов;

в) уравнения его высот и их длины; г) уравнения биссектрис его внешних углов.

4.12. Найти точку пересечения прямых L_1 и L_2 , если:

а) $L_1: x - 2y - 1 = 0$, $L_2: 2x - 3y - 3 = 0$; б) $L_1: 5x - 3y + 2 = 0$, $L_2: \frac{x - 4}{5} = \frac{y - 2}{3}$; в) $L_1: x + y - 6 = 0$, $L_2: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -1 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$;

г) $L_1: \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-1}$, $L_2: \frac{x - 4}{5} = \frac{y - 2}{3}$; д) $L_1: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, $L_2: \frac{x - 4}{5} = \frac{y + 1}{2}$.

4.13. Найти геометрическое место точек на плоскости, одинаково удаленных от точек A(-1,6) и B(5,2).

4.14. Даны прямые: $L_1: x - 2y + 4 = 0$ и $L_2: y - x/2 + 6 = 0$.

а). Показать, что эти прямые параллельны друг другу; б) найти расстояние между ними; в) провести прямую, равноудаленную от этих прямых.

4.15. Среди нижеприведенных прямых указать те, которые между собой: а) параллельны; б) взаимно перпендикулярны:

1) $3x - 4y - 7 = 0$; 2) $8x + 6y - 1 = 0$; 3) $2y - 3x/2 + 5 = 0$;

4) $\frac{x - 2}{-3} = \frac{y + 1}{4}$; 5) $\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -2 + 4t. \end{cases}$

Плоскость

4.25. Написать уравнение плоскости (и построить ее) , проходящей через точку А перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , если:

а) $A(-1,3,4)$, $B(1,-1,5)$ и $C(-2,1,3)$; б) $A(2,-3,-1)$, $B(-2,4,3)$ и $C(2,-1,3)$;

в) $A(3,-1,2)$, $B(0,-2,4)$ и $C(3,-2,1)$; г) $A(5,2,1)$, $B(3,2,-1)$ и $C(3,4,-1)$.

4.26. Вычислить величину угла между плоскостями, если они

заданы уравнениями: а) $2x-3y+z+3=0$ и $3x-6y-z-12=0$;

б) $x+2y-2z+1=0$ и $2x-y-2z+4=0$; в) $2x-y+7z-4=0$ и $2x-3y-z+5=0$;

г) $x-3/2y+2z-4=0$ и $-2x+3y-4z+12=0$.

4.27. Даны точки $M_0(-12,7,-1)$, $M_1(-3,4,-7)$, $M_2(1,5,-4)$ и $M_3(-5,-2,0)$.

а). Написать уравнение плоскости α , проходящей через точки M_1 ,

M_2 и M_3 ; б) провести плоскость $\alpha_{||}$, параллельную плоскости α

и проходящую через точку M_0 ; в) вычислить расстояние точки

M_0 от плоскости α .

- 4.28. Даны вершины пирамиды $M_0(1, -6, 5)$, $M_1(-1, 2, -3)$, $M_2(4, -1, 0)$ и $M_3(2, 1, -2)$. а). Найти уравнения ее граней; б) вычислить длину высот пирамиды; в) найти величины ее двугранных углов.
- 4.29. Найти расстояние между плоскостями, если они заданы уравнениями: а) $x - 2y + 2z - 4 = 0$ и $-2x + 4y - 4z + 29 = 0$; б) $6x - 2y + 3z - 8 = 0$ и $2x - 2y/3 + z - 1/3 = 0$.
- 4.30. Написать уравнение плоскости: а) параллельной плоскости xOy и проходящей через точку $M_0(-7, 6, 3)$; б) проходящей через ось Oy и точку $M_0(2, 1, 3)$; в) параллельной оси Oz и проходящей через две точки $M_1(1, 2, 3)$ и $M_2(0, -4, 2)$; г) параллельной плоскости $3x - y + z - 7 = 0$ и проходящей через точку $M_0(-1, 2, 6)$.
- 4.31. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной заданным плоскостям и проходящей через заданную точку M_0 , если: а) $2x - y + z - 4 = 0$ и $x - 3y - z + 5 = 0$, $M_0(0, 0, 0)$; б) $x + y - 2z + 5 = 0$ и $3x - 2y + z - 4 = 0$, $M_0(2, 0, -3)$.
- 4.32. Проверить, что плоскости $x - y + 2z - 5 = 0$, $2x - 3y + z + 1 = 0$ и $3x - 2y + 4z - 11 = 0$ пересекаются в одной точке и вычислить координаты этой точки.

Прямая в пространстве

4.33. Прямая L задана общим уравнением. Написать ее каноническое уравнение, если:

$$\text{а) } L_1: \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0, \\ 2x + 3y - z - 8 = 0 \end{cases}; \quad \text{б) } L_2: \begin{cases} x + y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

4.34. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1, -2, 0)$ параллельно: а) вектору $\vec{s} = \{3, 1, -4\}$; б) оси Ox ;

в) оси Oy ; г) прямой $\begin{cases} x = 2 - 5t, \\ y = 2t, \\ 3 + 4t. \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$; д) прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-2}$;

е) прямой $\begin{cases} 2x + 3y - z + 3 = 0, \\ 5x - y + 4z - 5 = 0. \end{cases}$

4.35. Составить каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 , если:

а) $M_1(2, 3, -5)$ и $M_2(-1, 7, 0)$; б) $M_1(0, 0, 0)$ и $M_2(2, -4, 6)$.

4.36. Найти угол между прямыми L_1 и L_2 , если:

а) $L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+7}{1} = \frac{z+3}{-2}$ и $L_2: \frac{x+1}{-3} = \frac{y-5}{6} = \frac{z}{2}$;

б) $L_1: \begin{cases} x - 2y - 4 = 0, \\ 2x + z - 6 = 0 \end{cases}$ и $L_2: \begin{cases} x = 3t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = 5 + t. \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

4.37. Задана прямая $L: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$ и точка $M_0(2, 0, 1)$,

не принадлежащая прямой L (проверить!). Требуется:

а) составить уравнение плоскости, проходящей через прямую L

и точку M_0 ; б) найти уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно прямой L ; в) найти проекцию точки M_0 на прямую L ; г) вычислить расстояние от точки M_0 до прямой L ; д) написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую L .

4.38. Заданы параллельные прямые $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{2}$ и

$$\frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}. \text{ Требуется: а) написать уравнение плоскости,}$$

содержащей эти прямые, б) найти расстояние между прямыми.

4.39. Проверив, что прямые $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 2x+y-2z+2=0 \end{cases}$ и $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{5}$

параллельны, найти расстояние между ними.

4.40. Найти расстояние от точки $M_0(2, -2, 0)$ до прямой L , если:

$$\text{а) } L: \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 1 + t, \\ z = t. \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad \text{б) } L: \begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0, \\ 2x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

4.41. Заданы прямая L и плоскость α :

$$\text{а) } L: \frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1} \text{ и } \alpha: 2x-5y+4z+24=0;$$

$$\text{б) } L: \begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 1 + t, \\ z = -4 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ и } \alpha: 2x-y+3z+23=0;$$

$$\text{в) } L: \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases} \text{ и } \alpha: -x + 2y - 2z = 0.$$

Требуется найти: 1) точку пересечения прямой с плоскостью;

2) уравнение проекции прямой на плоскость; 3) величину угла,

образованного прямой с плоскостью.