Matemáticas II.

(Ver. 1.12.2)

Marcos Bujosa

29 de agosto de 2020

Copyright © 2008–2020 (mbujosab@ucm.es)

Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/ o envie una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

[Versión 1.12.2] Puede encontrar la última versión de este material en

http://www.ucm.es/fundamentos-analisis-economico2/marcos-bujosa

Índice general

En estas notas encontrará todas las transparencias de clase junto con las correspondientes secciones de referencia y muchos ejercicios propuestos.

Al final de las notas encontrará las soluciones a los problemas, pero no debe mirarlas hasta que haya dado con "su" solución. Consultar las respuestas de otros sin haber resuelto antes el ejercicio por cuenta propia sirve de muy poco cuando se estudia. **Recuerde que el aprendizaje es una tarea activa, es decir, usted debe encontar la solución activamente, y no consultar la solución de otro** (la mía en particular).

NOTA: *Para poder sacar provecho de las lecciones en clase, es IMPRESCINDIBLE haber leído las correspondientes secciones de referencia, o manuales equivalentes que usted elija. El profesor dará por supuesto que usted así lo ha hecho.*

Las lecciones en clase serán una exposición general de cada tema. Los detalles deberán ser preparados por el alumno mediante las correspondientes secciones de referencia (que aparecen antes de las transparencias de cada lección) y/o los manuales recomendados. El tiempo dedicado a resolver problemas en clase es un buen momento para resolver dudas con el profesor.

Recuerde que usted debe haber leído las secciones de referencia correspondientes antes de cada clase.

Filosofía del curso

Este Material

Este es el material de un curso "boloñés"... esto quiere decir que se supone que las lecciones que se imparten en clase son tan sólo una ayuda que orienta al alumno en su trabajo y estudio personal, y en ellas sólo se destacan las ideas centrales del temario, pero sin entrar en los detalles. Por ello este material contiene dos tipos de secciones: por un lado las transparencias, que ayudan al profesor en la exposición de las lecciones impartidas en clase, acompañadas de ejercicios propuestos para ser resueltos inmediatamente después de cada lección. Por otro lado están las secciones de referencia: son mucho más formales y desarrollan el temario de forma rigurosa. En general estas dos partes siguen un desarrollo en paralelo, pero no siempre. A veces las transparencias adelantan cuestiones que se exponen de modo más formal en las notas. Y otras veces cuestiones expuestas en las notas formales no aparecen hasta un poco más adelante en las transparencias.

Este curso se acompaña de una librería en Python que puede encontrar en

https://github.com/mbujosab/nacallib

Su código implementa la notación que empleamos en el curso. De esta manera que se puede verificar que al seguir las reglas de escritura descritas en estas notas logramos que el ordenador sea capaz de operar con vectores, matrices, resolver sistemas de ecuaciones, diagonalizar matrices, calcular determinantes, etc. etc.

> *¡Que mejor muestra de que las matemáticas son un lenguaje, que usar dicho lenguaje con un PC para "enseñar" al PC a resolver problemas matemáticos y que todo funcione como se espera!*

Puede usar la libería y ejecutar los Notebooks de Jupyter en su navegador accediendo al siguiente enlace

https://mybinder.org/v2/gh/mbujosab/nacal-Jupyter-Notebooks/master

Es importantísimo experimentar con el ordenador, aprenderá mucho. No se desanime si le cuesta un poco al principio.

El tiempo dedicado a las clases presenciales y el tiempo de estudio personal

Las clases se centran en la explicación de lo que aparece en las transparencias, que es una introducción informal del contenido del curso. El objetivo de las clases es ofrecer al alumno una visión general, relegando los detalles a las secciones de referencia. En cada clase también dispondrá de algún tiempo para la resolución de ejercicios y problemas (que son propuestos al final de cada lección).

Tanto las explicaciones en clase como la resolución de los problemas se asientan en el material desarrollado en las secciones de referencia que aparecen antes de las transparencias de cada lección. Este material debe ser estudiado y trabajado por el alumno durante el tiempo de estudio personal. La demostración de la mayoría de los resultados expuestos en las notas son propuestos como ejercicios (aunque frecuentemente dispondrá de pistas que indican los pasos necesarios). La demostraciones completas aparecen en la sección de soluciones a los ejercicios. El propósito es doble: por una parte aligerar las notas. El segundo propósito es más importante: permitir al estudiante que intente demostar la veracidad de los resultados por su cuenta sin tener la solución a la vista. Recuerde que el esfuerzo y estudio individual son imprescindibles; limitarse a atender las explicaciones en clase no es en modo alguno suficiente.

El orden y la exposición de muchas de las lecciones se inspira en las clases en vídeo del Curso 18.06 de Álgebra Lineal del profesor Gilbert Strang[1] http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/, pero aquí se sigue un enfoque diferente: el Profesor Strang resuelve los sistemas mediante operaciones por filas (que es el método habitual), pero yo lo haré mediante operaciones por columnas; por ello encontrará algunas sutiles diferencias entre mis clases y las de G. Strang (aparte de que evidentemente las clases del Profesor Strang son excelentes). También la notación es particular en algunos detalles.

[1] *Gilbert Strang. 18.06 Linear Algebra,Spring 2010.* (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare), http://ocw.mit.edu (Accessed 23 Jan, 2013). License: Creative Commons BY-NC-SA

Un curso de álgebra lineal matricial

El curso gira en torno al Método de Eliminación de Gauss y las transformaciones elementales de matrices. Los distintos temas irán surgiendo a partir de este método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Hay numerosos libros de texto y manuales que siguen este modelo; por ejemplo Cullen (1972); Larson et al. (2004); Lay (2007); Poole (2004); Strang (2007, 2003), o el libro de problemas Arvesú Carballo et al. (2005).

Sin embargo el material de estas notas presenta una diferencia operativa respecto a los manuales indicados más arriba. Por ejemplo, aunque el Profesor Strang indica que *"un sistema* $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *tiene solución si el vector* $\boldsymbol{b}$ *es una combinación lineal de las* columnas *de* $\mathbf{A}$*"*, aplica el método de eliminación gaussiana operando con las *filas* por lo que realmente acaba resolviendo un sistema distinto aunque equivalente a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Así es como se hace en prácticamente todos los manuales de Álgebra Lineal. Sin embargo, aquí emplearemos el método de eliminación de Gauss por columnas, operando en el espacio columna de $\mathbf{A}$ para encontrar las combinaciones de las columnas que son iguales a $\boldsymbol{b}$.

Parte I

Álgebra Matricial. Espacios vectoriales y sistemas de ecuaciones lineales

Tema 1

Método de eliminación

Los estudiantes suelen percibir, "erróneamente", que las matemáticas son una batería de procedimientos para resolver problemas. Las matemáticas son un lenguaje, y la principal intención de este curso es que el estudiante lo perciba. Este primer tema es fundamental para lograr dicho objetivo. (Puede ver un resumen del tema en el Apéndice A en la página 285).

LECCIÓN 1: Operaciones con vectores y operaciones con matrices

En matemáticas los objetos que se usan tienen unas definiciones muy precisas. Comenzamos con dos muy importantes:

Definición 1. *Un* conjunto *es una colección de objetos* ***distintos****.*

Por ejemplo, los números 2, 4, y 6 son objetos distintos cuando los consideramos por separado, pero cuando los consideramos colectivamente forman un único conjunto de tamaño tres que escribimos como $\{2, 4, 6\}$. Si todo elemento del conjunto A está en el conjunto B, y todo elemento del conjunto B está en el conjunto A, se dice que los conjuntos A y B son iguales; por tanto los siguientes conjuntos son iguales

$$\{1,\ 2,\ 1\} = \{1,\ 2\} = \{2,\ 1\} = \{2,\ 1,\ 2\} = \{2,\ 1,\ 1\} = \{2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2\}.$$

No hay ningún orden en la disposición de los elementos de un conjunto (y solo cuentan los elementos distintos).

Definición 2. *Un* sistema *es una lista* ***ordenada*** *de objetos.*

Dos sistemas son distintos si las listas son diferentes, así los siguientes sistemas de números son todos distintos

$$\begin{bmatrix}1;\ 2;\ 1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1;\ 2\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}2;\ 1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}2;\ 1;\ 2\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}2;\ 1;\ 1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}2;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 2\end{bmatrix}.$$

En este curso trataremos con tres importantes tipos de sistemas: los vectores de $\mathbb{R}^n$ (sistemas de números), las matrices (sistemas de vectores) y los sistemas de ecuaciones.

1.1. Vectores de $\mathbb{R}^n$

Denotamos por $\mathbb{R}$ al conjunto de números reales (por ejemplo los números 7, $\frac{-3}{11}$, $\sqrt{2}$, ó $-\pi$). A los números reales también los llamaremos *escalares*.

Definición 3. *Llamamos* vector *de $\mathbb{R}^n$ a un sistema (o lista ordenada) de n números reales.*

El símbolo "$\mathbb{R}$" nos indica que el sistema está compuesto por números *reales*, y el superíndice "n" nos indica la cantidad de componentes que hay en la lista.

Es importante subrayar que hay un orden en la lista, así las componentes se identifican por la posición que ocupan en el vector: hay una primera componente, una segunda componente, etc. La forma de escribir la lista no es importante siempre que el orden de las componentes quede claro (es decir, siempre que quede claro quién es la primera componente, quien la segunda, etc.). Por ejemplo, podemos escribir el mismo vector en horizontal, o en vertical,

$$\begin{pmatrix}\pi, -1, 0, 1\end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix}\pi\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Ambas son representaciones del vector de $\mathbb{R}^4$ cuya primera componente es π, la segunda -1, la tercera 0 y la cuarta 1.

Nótese que al escribir un vector encerramos la lista ordenada de números entre *paréntesis*. Así, si tenemos una lista de números y la encerramos entre paréntesis, "creamos" un vector donde el índice de cada componente queda determinado por la posición que ocupa dentro del paréntesis.

Decimos que dos vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ son iguales si lo son sus correspondientes listas ordenadas de componentes, es decir, si y solo si $x_i = y_i$ para $i = 1 : n$. [1]

Por ejemplo, con los números 5, 10, 15 y 20, podemos crear dos vectores *distintos* del siguiente modo:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}20, & 10, & 15, & 5\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}5, & 20, & 15, & 10\end{pmatrix}.$$

Tenga en cuenta que dos vectores son iguales solo cuando lo son las listas correspondientes a ambos vectores. Por eso los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ NO son iguales.

[1] Si $n \leq m \in \mathbb{N}$ denotamos con $(n : m)$ a la secuencia $n, n+1, \dots, m$, es decir, a la lista ordenada de los números de $\{k \in \mathbb{N} | n \leq k \leq m\}$. Por tanto, con $i = 1 : n$ indicamos que el índice i recorre la sucesión de enteros que va desde 1 hasta n, es decir $1, 2, \dots, n$. Cuando el primer índice sea mayor que el segundo, $n \geq m \in \mathbb{N}$, entenderemos que $(n : m)$ es una lista vacía.

Notación. Denotaremos los vectores de $\mathbb{R}^n$ con letras minúsculas en negrita cursiva; por ejemplo $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}$ o $\boldsymbol{x}$. Y nos referiremos a los componentes genéricos de un vector con la misma letra con la que denotamos al vector completo (pero en cursiva y con un subíndice que indica la posición del componente dentro del vector). Por ejemplo:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6 \end{pmatrix};$$

es un vector de 6 componentes, y cuyo tercer componente es a_3; y para indicar que el segundo componente de $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0, & 4, & 6 \end{pmatrix}$ es un cuatro, escribimos $b_2 = 4$.

Uso de la librería en Python

```
b = Vector( [0, 4, 6] )                # Vector cuya lista de componentes es 0, 4 y 6
```

El operador selector "|". Para homogeneizar la notación que emplearemos con vectores y matrices, también denotaremos la *i*ésima componente de $\boldsymbol{a}$ añadiendo un subíndice en el que aparece el símbolo "|" junto al índice de la componente: $\boldsymbol{a}_{|i}$. De esta manera indicamos que el operador selector "|" *actúa* sobre el vector que está a su izquierda para seleccionar la componente *i*ésima indicada a su derecha. Así, las siguientes son formas eqivalentes de denotar la tercera componente de $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{b}_{|3} \equiv b_3.$$

Uso de la librería en Python

```
b|3                                                # tercera componente de b
```

Definiciones de algunos vectores especiales

Definición 4. *Llamamos vector nulo (o vector cero) de $\mathbb{R}^n$ al vector cuyas n componentes son cero, y lo denotamos con $\mathbf{0}$. Por ejemplo, los vectores nulos de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^5$ son respectivamente:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

¡Nótese que estos tres vectores nuloes no son iguales, pues no tienen el mismo número de componentes (y por tanto sus correspondientes listas ordenadas no son iguales)!

Uso de la librería en Python

```
V0( 3 )                                 # es el vector nulo de tres componentes
```

Definición 5. *Sea el vector $\boldsymbol{a}$. Llamamos vector opuesto de $\boldsymbol{a}$ al vector $-\boldsymbol{a}$, que es el vector cuyos componentes son los opuestos de los de $\boldsymbol{a}$; es decir $\big(-\boldsymbol{a}\big)_{|i} = -\big(\boldsymbol{a}_{|i}\big)$. Por ejemplo:*

$$\text{si } \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \textit{ entonces } -\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}; \quad \text{y si } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1, & -3\pi, & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \textit{ entonces } -\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1, & 3\pi, & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

☞ Hemos definido un vector de $\mathbb{R}^n$ como un sistema de n números reales. Al encerrar una lista de números entre paréntesis creamos un vector (cuyas componentes son los números encerrados en el orden en el que aparecen en la lista dentro del paréntesis). Por ejemplo
$$\boldsymbol{a} = (1,\ 4,\ 9,\ 2).$$
Para seleccionar una componente de la lista usamos el operador "$|$" y el índice de la componente que queremos seleccionar. Por ejemplo, la tercera componente de $\boldsymbol{a}$ es:
$$\boldsymbol{a}_{|3} = a_3 = 9.$$

1.2. Sumas de vectores y productos de vectores por escalares

Definición 6 (suma de vectores)**.** *La suma, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^n$, es el vector de $\mathbb{R}^n$ en el que cada componente iésima es la suma de las componentes $\boldsymbol{a}_{|i}$ y $\boldsymbol{b}_{|i}$. Es decir, sumamos componente a componente:*
$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}} \qquad \textit{para} \;\; i = 1:n.$$

Por tanto:
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix};$$
suma que también podríamos haber escrito de manera horizontal: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \Big((a_1+b_1), \ldots, (a_n+b_n)\Big)$.

Observación. Nótese que el operador "$|i$" es *distributivo* para la suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$.

Definición 7 (producto de un vector por un escalar)**.** *El producto, $\lambda\boldsymbol{b}$, de un vector $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^n$ por un escalar λ es el vector de $\mathbb{R}^n$ en el que cada componente iésima es el producto de λ por $\boldsymbol{b}_{|i}$. Es decir, multiplicamos cada componente de $\boldsymbol{b}$ por λ:*
$$\boxed{(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})} \qquad \textit{para} \;\; i = 1:n.$$

Al vector $\lambda\boldsymbol{b}$ lo denominamos múltiplo (o múltiplo escalar) de $\boldsymbol{b}$.

Por tanto
$$\lambda\boldsymbol{b} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \vdots \\ \lambda b_n \end{pmatrix};$$
múltiplo que también podríamos haber escrito horizontalmente: $\lambda\boldsymbol{b} = \lambda\Big(b_1, \ldots, b_n\Big) = \Big(\lambda b_1, \ldots, \lambda b_n\Big)$.

Observación. El operador "$|$" es *asociativo* para el producto por escalares: $\big(\lambda\boldsymbol{b}\big)_{|i} = \lambda\big(\boldsymbol{b}_{|i}\big)$. Fíjese como la región cubierta por el paréntesis se desplaza... en un lado del la igualdad "λ" está dentro del paréntesis e "$|i$" fuera, pero en el otro lado ocurre lo contrario[2]. Por tanto el producto por escalares se puede escribir sencillamente como: $\lambda\boldsymbol{b}_{|i}$.

A la operación de multiplicar un vector por un número también se la denomina "escalar el vector" (...es decir, cambiarlo de escala: piense que si tiene un vector con datos de salarios en miles de euros, expresar esos datos en euros es escalar los datos, y se logra multiplicando por 1000).

Definición 8 (Linealidad)**.** *Un operador distributivo respecto de la suma y asociativo respecto al producto por escalares se dice que es lineal.*

Así pues, el operador "$|i$" (que selecciona el componente $i$ésimo de un vector) es un operador lineal.

[2] de manera similar a la propiedad asociativa del producto de escalares: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

☞ La definición de las operaciones de suma de vectores y producto de un vector por un escalar convierte al operador "$_{|i}$" en un **operador lineal**; es decir, *distributivo* respecto a la suma:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$$

y *asociativo* respecto al producto por escalares:

$$\left(\lambda\boldsymbol{b}\right)_{|i} = \lambda\left(\boldsymbol{b}_{|i}\right).$$

Propiedades de la suma de vectores y del producto de un vector por un escalar

☞ Explotando las propiedades de la notación (junto con algunas propiedades de los *números reales*) demostraremos ocho propiedades que verifican la *suma de vectores* y el *producto de un vector por un escalar* (Proposición 1.2.1).

Recordatorio. *Para empezar recordemos algunas propiedades (¡no todas!) de los números reales que seguro que conoce y que usted ha manejado desde la escuela. . .*

Sean a, b y c números reales. Entonces:

1. $a + b = b + a$.
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. $a + 0 = a$.
4. $a + (-a) = 0$.
5. $ab = ba$.
6. $a(b + c) = ab + ac$.
7. $a(bc) = (ab)c$.
8. $1a = a$.

Ocho preguntas La cuestión que queremos abordar ahora es: ¿también se verificarán estas propiedades cuando operamos con vectores? En concreto, hagámonos las siguientes ocho preguntas:

1. ¿Es verdad que
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}?$$
¿Es cierto solo para los números del ejemplo? o ¿es una regla general para cualquier par de vectores?

2. ¿Es verdad que
$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}?$$
El paréntesis significa que primero hay que hacer la suma dentro del paréntesis, y al vector resultante sumarle el vector de fuera.

   ¿Es cierto solo para los números del ejemplo? o ¿es una regla general para cualquier trío de vectores?

3. ¿Es verdad que
$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}?$$
¿Es cierto solo para los vectores del ejemplo? o ¿es una regla general para cualquier par de vectores?

4. ¿Es verdad que
$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-5\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}?$$
¿Es cierto solo para los vectores del ejemplo? o ¿es una regla general para cualquier par de vectores?

5. ¿Es verdad que
$$2\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}?$$
(recuerde que primero se realizan las operaciones de dentro del paréntesis) ¿Es una regla general para cualquier par de vectores? ¿Y si cambiamos el escalar 2 por otro número?

6. ¿Es verdad que
$$(2+3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}?$$
(recuerde que primero se realizan las operaciones de dentro del paréntesis) ¿Es una regla general para cualquier par de vectores? ¿y si cambiamos los escalares 2 y 3 por otros números?

7. ¿Es verdad que
$$2\left(3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=(2\cdot 3)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}?$$
(recuerde, primero las operaciones dentro de los paréntesis). Hágase las mismas preguntas de más arriba.

8. ¿Es verdad que si $a=1$
$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}?$$
¿Es cierto solo para el escalar $a=1$?

En el Ejercicio 1 se le pide que demuestre las ocho propiedades que acabamos de revisar[3]. Su solución aparece al final de este documento ¡pero usted debe resolverlo por su cuenta y sin mirar! Si "cotillea" previamente la solución, el ejercicio le servirá de muy poco.

Para resolver el ejercicio únicamente necesita aplicar las reglas de notación vistas más arriba (definiciones de *suma* y *producto por escalares* de la Página 15); y cuando aparezcan operaciones entre componentes de los vectores (que son números reales) aplicar las propiedades de las operaciones entre números reales (las del recordatorio de la Página 16).

EJERCICIO 1. Demuestre las propiedades de la siguiente proposición:

Proposición 1.2.1 (Propiedades de las operaciones entre vectores)**.** *Para cualesquiera vectores* $\boldsymbol{a}$*,* $\boldsymbol{b}$ *y* $\boldsymbol{c}$ *con el mismo número de componentes, y para cualesquiera escalares (números)* λ *y* η*, se verifican las siguientes propiedades:*

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.
2. $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$.
3. $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.
4. $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.
5. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.
6. $(\lambda+\eta)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\eta\boldsymbol{a}$.
7. $\lambda(\eta\boldsymbol{a})=(\lambda\eta)\boldsymbol{a}$.
8. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

Pista. Dispone de dos estrategias. La primera se asemeja a la forma de operar mostrada en las ocho preguntas de más arriba (por ello es posible que le parezca más sencilla). La segunda estrategia explota las propiedades de *linealidad* del operador "$|$". Es importante que se familiarice con este segundo modo de trabajar: es más abstracto pero mucho más eficiente.

[3] Se le propone como ejercicio una ¡demostración! Las demostraciones son imprescindibles en matemáticas. Es IMPOSIBLE que adquiera una buena formación matemática si no realiza las demostraciones. Solo se adquiere una verdadera comprensión al realizar las demostraciones. Las que se le propondrán en el curso o son muy sencillas (como las de este primer ejercicio) o son "casi" una repetición de otras ya vistas, o las pistas que se le dan describen los pasos necesarios para dar con la demostración.

Aunque las demostraciones son sencillas es posible que le cuesten (probablemente sea la primera vez que intenta demostrar algo. . . y la primera vez suele resultar difícil). No se desanime; *es importante lograr demostrar proposiciones sencillas* (cuando acabe el curso se dará cuenta de que ha aprendido mucho con ello).

- **Estrategia 1.** Como estas propiedades provienen de los escalares (los números reales), la estrategia es operar con las componentes dentro de los vectores. Puede escribir sus vectores o como filas o como columnas (en ambos casos la demostración es idéntica).

  Estrategia 2. Recuerde que dos vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son iguales si son idénticos componente a componente: $\boldsymbol{v}_{|i} = \boldsymbol{w}_{|i}$. Use las propiedades del operador " $|i$ " siempre que pueda; es decir:

  1. las expresiones "$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_{|i}$" y " $\boldsymbol{v}_{|i}+\boldsymbol{w}_{|i}$ " son intercambiables (propiedad distributiva de " $|i$ ").
  2. las expresiones "$(a\boldsymbol{v})_{|i}$" y "$a(\boldsymbol{v}_{|i})$" son intercambiables (propiedad asociativa de " $|i$ ").

  Además recuerde que $\boldsymbol{v}_{|i}$, $\boldsymbol{w}_{|i}$, etc. son números reales; por tanto, puede usar las propiedades de las operaciones entre números reales del mismo modo que en la primera estrategia.

Nota 1. *Estas ocho propiedades nos permitirán definir el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ en el Tema 2.*

Vectores como representación de datos Como los vectores son un *un sistema* de números, podemos interpretar cada componente en función de la posición que ocupa. Por ejemplo, imagine que tiene datos del año 2003 sobre la tasa de crecimiento interanual del PIB de cinco países: España (1), Francia (2), Alemania (3), R. Unido (4) y EEUU (5); entonces podemos interpretar los distintos componentes del siguiente vector en función de su posición en la lista:

$$\boldsymbol{datos(2003)} = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 0.9 \\ -0.2 \\ 2.5 \\ 1.8 \end{pmatrix}.$$

Puesto que el número 1.8 está en la quinta posición, sabemos que corresponde al quinto país, y por tanto sabemos que EEUU creció a una tasa del 1.8 % en el año 2003[4]. ¿Qué país no creció en el año 2003?

En algunos manuales verá una interpretación de los vectores como segmentos con norma y dirección. Ésta es una interpretación frecuente en aplicaciones físicas, pero poco natural para los economistas. Para un economista la interpretación más natural es que los componentes de los vectores son datos (precios, cantidades, número de parados, tasa de inflación, etc.) y la posición de cada componente indica a quien corresponde el dato (como en el ejemplo anterior). Ésta será la interpretación que use en la asignatura de Econometría dentro de un par de cursos.

☞ Ahora pasamos a definir las matrices como un sistema de n vectores de $\mathbb{R}^m$ (es decir, una lista ordenada de n vectores de $\mathbb{R}^m$). La siguiente introducción así lo ilustra.

1.3. Matrices de $\mathbb{R}^{m\times n}$

Imagine que además tiene datos anuales de los cinco países de arriba durante el periodo: 2003 a 2006.

$$\boldsymbol{datos(2003)} = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 0.9 \\ -0.2 \\ 2.5 \\ 1.8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{datos(2004)} = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 2.0 \\ 1.1 \\ 3.2 \\ 3.1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{datos(2005)} = \begin{pmatrix} 3.3 \\ 1.6 \\ 0.7 \\ 1.9 \\ 3.7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{datos(2006)} = \begin{pmatrix} 3.3 \\ 2.0 \\ 0.9 \\ 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}.$$

Podemos escribir todos los datos juntos y dar al resultado el nombre de **PIB**. Así tenemos recogidos en **PIB** los datos de crecimiento del PIB de los cinco países en los años 2003–2006. Esto se hace construyendo una *matriz*.

Llamamos *matriz* a una lista ordenada de ***vectores*** *con el mismo número de componentes* (. . . es decir. . . ¡un vector de vectores!). De esta manera podríamos definir la matriz **PIB** como una lista de vectores con los datos de los cinco años disponibles:

$$\Big(\boldsymbol{datos(2003)}, \quad \boldsymbol{datos(2004)}, \quad \boldsymbol{datos(2005)}, \quad \boldsymbol{datos(2006)}\Big) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{datos(2003)} \\ \boldsymbol{datos(2004)} \\ \boldsymbol{datos(2005)} \\ \boldsymbol{datos(2006)} \end{pmatrix}.$$

[4]fuente: Informe ICAE sobre la economía española (Octubre 2006), publicado por el Instituto Complutense de Análisis Económico

Ahora bien, como los vectores se pueden escribir tanto en vertical como en horizontal, esta escritura nos podría dar como resultado una lista muy larga y visualmente difícil de leer. Por ejemplo, si escribimos los vectores en horizontal y unos detrás de otros tenemos:

$$\Big(\big(2.9,\quad 0.9,\quad -0.2,\quad 2.5,\quad 1.8\big), \big(3.1,\quad 2.0,\quad 1.1,\quad 3.2,\quad 3.1\big), \big(3.3,\quad 1.6,\quad 0.7,\quad 1.9,\quad 3.7\big), \big(3.3,\quad 2.0,\quad 0.9,\quad 1.5,\quad 3.5\big)\Big).$$

Sabemos que las cuartas componentes de cada uno de los vectores dentro de la matriz corresponden al Reino Unido... pero esta disposición de los datos no es fácil de leer [5]. Para facilitar la lectura dispondremos los datos según el siguiente convenio: disponemos los datos referidos al año 2003 en una primera columna, los del año 2004 en la segunda, los del año 2005 en la tercera y los del año 2006 en la cuarta. De ese modo se obtiene el siguiente arreglo rectangular de los datos:

$$\mathbf{PIB} = \begin{bmatrix} 2.9 & 3.1 & 3.3 & 3.3 \\ 0.9 & 2.0 & 1.6 & 2.0 \\ -0.2 & 1.1 & 0.7 & 0.9 \\ 2.5 & 3.2 & 1.9 & 1.5 \\ 1.8 & 3.1 & 3.7 & 3.5 \end{bmatrix}.$$

Ahora cada columna corresponde a un año distinto, y cada fila a un país distinto... ¡Mucho más fácil de leer!

Definición 9. *Llamamos* matriz *de* $\mathbb{R}^{m\times n}$ *a un sistema de* n *vectores de* $\mathbb{R}^m$.

El orden *de la matriz indica su número de filas y de columnas, y está compuesto por dos números: el primero corresponde al número de filas* (m) *y el segundo al número de columnas* (n). *El orden se suele expresar cómo "*$m\times n$*" (y se lee "*m *por* n*").*

En el ejemplo anterior el orden de la matriz **PIB** es 5 por 4. Nótese que *primero se indica el número de filas y luego el de columnas.* Frecuentemente expresaremos el orden de la matriz debajo de su nombre; por ejemplo: $\underset{5\times 4}{\mathbf{PIB}}$.

Al igual que en el caso de los vectores, identificamos los componentes por la posición que ocupan. De esta manera podemos decir que el componente de **PIB** ubicado en la primera fila y segunda columna es 3.1.

Notación. Denotamos las matrices de $\mathbb{R}^{m\times n}$ con letras mayúsculas y en negrita ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ...); y a los componentes genéricos de la matriz con la misma letra con la que denotamos a la matriz completa, pero en minúscula cursiva y con dos subíndices que indican la posición que ocupa el componente dentro de la matriz, comenzando siempre por la fila, y luego por la columna (por tanto el componente a_{ij} de $\mathbf{A}$ se encuentra en la fila $i$ésima y columna $j$ésima). Otras formas que usaremos para denotar dicho componente son:

$$a_{ij} \;\equiv\; \text{elem}_{ij}(\mathbf{A}) \;\equiv\; {}_{i|}\mathbf{A}_{|j}.$$

Por ejemplo, escribimos una matriz genérica $\mathbf{A}$ de orden 2 por 3 como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Y de la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

podemos afirmar que su orden es 2×3 y que su componente b_{21} es cero, y su componente ${}_{2|}\mathbf{B}_{|2}$ es -1.

Uso de la librería en Python

```
a = Vector( [1, 0] )
b = Vector( [2,-1] )
c = Vector( [3, 1] )
B = Matrix( [a, b, c] )                    # Matrix cuya lista de vectores es a, b, c

2|B|2                     # elemento de B situado en la segunda fila, segunda columna
```

[5] aunque un ordenador no tiene ningún problema con esta representación, los humanos si lo tenemos... ¡imagine una lista de 12 vectores con 20 componentes cada uno. Algo similar ocurre si escribimos varios vectores en columna, unos debajo de otros.

Tenga en cuenta que usamos un único índice para identificar las componentes de un vector $\boldsymbol{x}$, pero que necesitamos *dos* índices para identificar las componentes de una matriz $\mathbf{A}$. Así, cuando nos queremos referir a la componente $i$ésima del vector $\boldsymbol{x}$ lo hacemos así:

$$\boldsymbol{x}_{|i}.$$

Y cuando queremos referirnos al componente situado en la fila $i$ésima y columna $j$ésima de la matriz $\mathbf{A}$, lo hacemos así:

$$\text{elem}_{ij}(\mathbf{A})\,; \qquad \text{ó} \qquad a_{ij}\,; \qquad \text{ó} \qquad {}_{i|}\mathbf{A}_{|j}.$$

Pero ¿qué pasa si nos queremos referir a toda la fila $i$ésima o toda la columna $j$ésima de $\mathbf{A}$?

Filas de una matriz

La fila $i$ésima de $\mathbf{A}$ (de orden $m \times n$) es el vector de $\mathbb{R}^n$ cuyos componentes son a_{ik}, donde el índice k recorre todas las columnas ($k = 1 : n$) y que denotamos como:

$$\text{fila}_i(\mathbf{A}) \quad \equiv \quad {}_{i|}\mathbf{A} \quad = \big(a_{i1}, \dots, a_{in}\big) \in \mathbb{R}^n$$

(que por ser un vector de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir tanto en horizontal como en vertical).

El operador selector de filas: "$i|$". Al escribir "$i|$" como subíndice a la *izquierda* de la matriz seleccionamos la *fila* $i$ésima de la matriz. Por ejemplo, si $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; entonces ${}_{1|}\mathbf{B} = \big(1, \quad 2, \quad 3\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Uso de la librería en Python

```
1|B                                             # primera fila de B
```

Columnas de una matriz

La columna $j$ésima de $\mathbf{A}$ (de orden $m \times n$) es el vector de $\mathbb{R}^m$ con componentes a_{kj}, donde el índice k recorre todas las filas ($k = 1 : m$). Denotaremos dicha columna como $\text{col}_j(\mathbf{A})$ o bien como $\mathbf{A}_{|j}$:

$$\text{col}_j(\mathbf{A}) \quad \equiv \quad \mathbf{A}_{|j} \quad = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \big(a_{1j}, \dots, a_{mj}\big) \in \mathbb{R}^m,$$

(puesto que, por ser un vector de $\mathbb{R}^m$, se puede escribir tanto en horizontal como en vertical).

El operador selector de columnas: "$|j$". Al escribir "$|j$" como subíndice a la *derecha* de la matriz, seleccionamos la *columna* $j$ésima de la matriz. Así, si $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; entonces $\mathbf{B}_{|2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Uso de la librería en Python

```
B|2                                             # segunda columna de B
```

Pero... ¿cómo hacemos si queremos escribir la submatriz de $\mathbf{A}$ de orden $m \times 1$ cuya única columna es la $j$ésima de $\mathbf{A}$? La solución es usar el operador "corchete".

El operador corchete.

Seguiremos el siguiente convenio: si encerramos un vector entre corchetes creamos una matriz con *una única columna* igual al vector encerrado entre corchetes. Así por ejemplo, si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1, & 5, & 9\end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\5\\9\end{bmatrix}.$$

Y si encerramos entre corchetes una lista de vectores (todos con el mismo número de componentes), "creamos" una matriz cuyos vectores columna son los vectores de la lista y en el mismo orden en el que aparecen en la lista. Por ejemplo, si:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1, & 0, & 3, & 0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2, & 2, & 2, & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix}0, & 0, & 0, & 0\end{pmatrix},$$

y encerramos "entre corchetes" algunos de estos vectores, creamos matrices cuyas columnas son los vectores de la lista escritos en vertical; por ejemplo,

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \mathbf{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 2 & 0\\3 & 2 & 0\\0 & 2 & 0\end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 2\\0 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}.$$

El corchete opera sobre un vector de m componentes para para crear una matriz de $\mathbb{R}^{m\times 1}$, o sobre un sistema de n vectores (con m componentes cada uno) para crear una matriz de $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Ahora ya podemos escribir la submatriz de $\mathsf{B} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ que únicamente contiene la segunda columna de B:

$$\begin{bmatrix}\mathsf{B}_{|2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

Uso de la librería en Python

```
Matrix( [ B|2 ] )              # Matriz cuya única columna es la segunda columna de B
```

Nótese que $\begin{pmatrix}2, & -1\end{pmatrix}$ es un *vector* y se puede escribir como queramos (en vertical u horizontal), pero que $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ es una *matriz* que contiene una columna. Es más, como los componentes de las matrices aparecen entre corchetes, es sencillo distinguir entre vectores (componentes encerrados entre "paréntesis") y matrices (entre "corchetes"). Así $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1, & 2, & 3\end{pmatrix}$ es un vector y $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ es una matriz (y por tanto **son objetos distintos**).[6]

[6]**Nota para profesores de matemáticas y/o lectores "puntillosos"**. Tradicionalmente se sigue el siguiente convenio

$$\begin{cases}\mathbb{R} = & \mathbb{R}^1\\ \mathbb{R}^{n+1} = & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\end{cases}.$$

Sin embargo, aquí sigo un convenio alternativo acorde con el funcionamiento interno de Python:

$$\begin{cases}\mathbb{R}^0 = & \{\emptyset\}\\ \mathbb{R}^{n+1} = & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\end{cases};$$

(donde $\emptyset$ denota al conjunto vacío). De tal manera que $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}\times\{\emptyset\} = \{(\alpha,\emptyset)|\alpha\in\mathbb{R}\}$. Así pasa en Python, y por ello una tupla con un único elemento se escribe con `(a,)`. Nótese la coma detrás de la `a` (que se puede entender que separa el primer elemento, `a`, del último, que es vacío). De este modo, la selección de los elementos sigue la siguiente función recursiva: si $\boldsymbol{v} = (v_1, \boldsymbol{w}) \in \mathbb{R}^n$, donde $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^{n-1}$ entonces

$$\begin{cases}\big(v_1, \boldsymbol{w}\big)_{|1} = & v_1\\ \big(v_1, \boldsymbol{w}\big)_{|k+1} = & \boldsymbol{w}_{|k}\end{cases}.$$

Por tanto, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1, & 2, & 3\end{pmatrix}$ es un sistema de tres *números* de $\mathbb{R}$, y $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ es un sistema de tres *vectores* de $\mathbb{R}^1$, a saber $(1,)$, $(2,)$ y $(3,)$.

Con la notación que hemos establecido podemos describir una matriz mediante sus columnas:

$$\underset{m\times n}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{|1} & \mathbf{A}_{|2} & \dots & \mathbf{A}_{|n} \end{bmatrix}}_{\text{lista de columnas}}; \quad \text{donde} \quad \mathbf{A}_{|j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Resumen de la notación para la selección de componentes, filas y columnas

Tenemos varias alternativas para denotar los componentes (escalares), y las filas y columnas (vectores) de $\underset{n\times m}{\mathbf{A}}$.

Notaciones alternativas

Componentes – (escalares)	Fila $i$ésima – (vector de $\mathbb{R}^n$)	Columna $j$ésima – (vector de $\mathbb{R}^m$)
▪ a_{ij}		
▪ ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$	▪ ${}_{i|}\mathbf{A}$	▪ $\mathbf{A}_{|j}$
▪ $\text{elem}_{ij}(\mathbf{A})$	▪ $\text{fila}_i(\mathbf{A})$	▪ $\text{col}_j(\mathbf{A})$

En el ejemplo con datos económicos, ${}_{1|}\mathbf{PIB}$ corresponde a los datos de España y ${}_{5|}\mathbf{PIB}$ a los de EEUU; y por otra parte, $\mathbf{PIB}_{|3}$ corresponde a los datos del año 2005.

☞ *La notación relativa a las matrices tiene paralelismos con la de los vectores;* ***pero con importantes diferencias.***

Al encerrar una lista de vectores entre *corchetes*, creamos una matriz, cuyas *columnas* son los vectores de la lista en el orden en el que aparecen en la lista dentro del corchete. Por ejemplo

$$\boldsymbol{d} = (1,\ 2), \quad \boldsymbol{m} = (1,\ 0), \quad \boldsymbol{a} = (9,\ 2); \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}, & \boldsymbol{m}, & \boldsymbol{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, con las matrices NO hay la libertad para escribir horizontal o verticalmente la lista que hemos encerrado (es una importante diferencia con los vectores).

Los subíndices "$i|$" (por la izquierda) y "$|j$" (por la derecha) operan sobre la matriz, pero su comportamiento es distinto. El subíndice "$i|$" a la izquierda de la matriz selecciona la *fila* $i$ésima y el subíndice "$|j$" a la derecha selecciona la *columna* $j$ésima (donde filas y columnas son *vectores*):

$$\mathbf{A}_{|3} = (9,\quad 2)\,, \qquad {}_{2|}\mathbf{A} = (2,\quad 0,\quad 2)\,.$$

Así, "$\mathbf{A}_{|2}$" es un *vector* formado por las componentes de la segunda columna de $\mathbf{A}$; pero; "$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{|2}\end{bmatrix}$" es una *matriz columna* cuya única columna es igual que la segunda columna de $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_{|2} = (1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \neq \quad \begin{bmatrix}\mathbf{A}_{|2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \neq \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cuando aparecen ambos subíndices (uno por cada lado) se selecciona la *componente* situada en la fila $i$ésima y columna $j$ésima

$${}_{2|}\mathbf{A}_{|2} = a_{22} = 0.$$

Extensión de la notación vectorial y reglas de reescritura.

Nótese que ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$ es la componente $j$ésima de la fila i, es decir $\left({}_{i|}\mathbf{A}\right)_{|j}$, pero también es la componente $i$ésima de la columna j, por lo que sería conveniente poder escribir ${}_{i|}\left(\mathbf{A}_{|j}\right)$, de manera que

$${}_{i|}\mathbf{A}_{|j} = {}_{i|}\left(\mathbf{A}_{|j}\right) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right)_{|j}.$$

Para ello aceptaremos que el operador "$\mathsf{|}$" también pueda operar por la izquierda de un *vector*. Así

$${}_{i|}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{|i} = a_i.$$

Con esta flexibilización de la notación, y puesto que las filas y columnas de una matriz son vectores, cuando seleccionemos las *componentes* de $\mathbf{A}$, nos dará igual operar dos veces por el mismo lado o una vez por cada lado (ambas operaciones arrojan necesariamente el mismo resultado). Así

$${}_{i|}\big(\mathbf{A}_{|j}\big) = \big(\mathbf{A}_{|j}\big)_{|i} \qquad \text{y} \qquad \big({}_{i|}\mathbf{A}\big)_{|j} = {}_{j|}\big({}_{i|}\mathbf{A}\big).$$

Para no perder la *asociatividad* de la notación cuando "$\mathsf{|}$" opera por la izquierda de los *vectores*, también aceptaremos que los escalares aparezcan multiplicando por la derecha.[7] Es decir, $\lambda\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\lambda$. Esto de lugar dos reglas de reescritura:

☞ Primera. - "*podemos desplazar los paréntesis*" para sacar un símbolo por un lado e introducir otro por el otro lado:

$$(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} \quad = \quad \lambda\big(\boldsymbol{b}_{|i}\big) \qquad = \qquad \big({}_{i|}\boldsymbol{b}\big)\lambda \quad = \quad {}_{i|}(\boldsymbol{b}\lambda).$$

Segunda. - "*podemos intercambiar las posiciones del escalar y el selector*" sacando uno de ellos fuera del paréntesis y metiendo el otro:

$$\big(\boldsymbol{b}_{|i}\big)\lambda \quad = \quad (\boldsymbol{b}\lambda)_{|i} \qquad \text{y} \qquad \lambda\big({}_{i|}\boldsymbol{b}\big) \quad = \quad {}_{i|}(\lambda\boldsymbol{b}).$$

De hecho, puesto que las ocho expresiones de más arriba arrojan el mismo resultado (aunque el orden de ejecución de las operaciones difiera entre ellas) podemos omitir el paréntesis y escribir sencillamente $\lambda\boldsymbol{b}_{|i}$ o también cualquiera de las siguientes reordenaciones $\lambda\boldsymbol{b}_{|i} = \lambda\,{}_{i|}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_{|i}\lambda = {}_{i|}\boldsymbol{b}\lambda$.

No obstante, en las demostraciones usaremos las expresiones con paréntesis de más arriba, pues ayudan a seguir los pasos dados en cada demostración.

La transposición

Encerrando $\boldsymbol{a}$ entre corchetes creamos una matriz con una única columna; para crear una matriz cuya única única fila es $\boldsymbol{a}$ necesitamos una operación adicional: la *transposición*...

Definición 10 (Matriz transpuesta)**.** *Considere la matriz* $\mathbf{A}$ *de orden* m *por* n*, su matriz transpuesta, que denotamos como* $\mathbf{A}^\intercal$*, es la matriz de orden* n *por* m *cuyas* m *columnas son como las* m *filas de* $\mathbf{A}$*:*

$$\big(\mathbf{A}^\intercal\big)_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}; \qquad j = 1:n.$$

Por tanto, la transpuesta de $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ es la matriz n por m cuyas columnas son las filas de $\mathbf{A}$ escritas en vertical, es decir,

$$\mathbf{A}^\intercal = \begin{bmatrix} {}_{1|}\mathbf{A} & \dots & {}_{m|}\mathbf{A} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1\\0\\5\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^\intercal = \begin{bmatrix}1 & 0 & 5 & 1\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\0 & 1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^\intercal = \begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}.$

Uso de la librería en Python

```
~B                                               # Transpuesta de la matriz B
```

Creamos *matrices columna* (matrices de una columna) poniendo un vector entre corchetes; y ahora también podemos crear *matrices fila* (matrices de una fila)... primero aplicamos el corchete y luego la transpuesta.

[7] Como en estas notas propongo una notación propia, aquí aceptaremos una expresión como «$\boldsymbol{a}2$»... ¡expresión que nunca aparece en los textos! El **modo habitual de escribir** dicho producto es «$2\boldsymbol{a}$» con «el coeficiente primero». Aquí lo aceptaremos para mantener la asociatividad por la izquierda, pero tenga en cuenta que no es una forma empleada habitualmente.

Así, $\left[{}_{i|}\mathbf{A}\right]^{\intercal}$ es una matriz, de orden $1\times n$, cuya única fila es igual que la fila $i$ésima de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&1\end{bmatrix};\quad\longrightarrow\quad\begin{cases}\left[{}_{1|}\mathbf{B}\right]^{\intercal}=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}\\[2ex]\left[\mathbf{B}_{|3}\right]^{\intercal}=\begin{bmatrix}3&1\end{bmatrix}\end{cases}.$$

Uso de la librería en Python

```
~Matrix( [1|B] )                    # Matriz cuya única fila es la primera fila de B
~Matrix( [B|3] )                  # Matriz cuya única fila es la tercera columna de B
```

EJERCICIO 2. Demuestre las siguientes propiedades elementales de la transposición:
(a) La transposición intercambia los índices de las componentes de la matriz: ${}_{k|}\big(\mathbf{A}^{\intercal}\big)_{|j}={}_{j|}\mathbf{A}_{|k}$.
(b) Si $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ entonces $(\mathbf{A}^{\intercal})^{\intercal}=\mathbf{A}$.
(c) Si $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ y $1\leq i\leq n$ entonces $\mathbf{A}_{|i}={}_{i|}\big(\mathbf{A}^{\intercal}\big)$.

☞ Aunque las expresiones ${}_{i|}\big(\mathbf{A}^{\intercal}\big)$, $\big(\mathbf{A}^{\intercal}\big)_{|j}$ y ${}_{i|}\big(\mathbf{A}^{\intercal}\big)_{|j}$ solo tienen una interpretación posible (primero se transpone la matriz y luego se selecciona la fila, columna o ambas), siempre escribiré el paréntesis, pues ayuda a seguir las reglas de reescritura: "*puedo transponer (o quitar la transpuesta) si además cambio de lado los subíndices*" (fíjese en su aplicación en las demostraciones de las propiedades anteriores).

Definiciones de algunas matrices especiales

☞ Al igual que hicimos con los vectores, añadiremos algunas definiciones relativas a las matrices. *Preste atención al uso de la notación.*

Diremos que dos matrices con el mismo orden son iguales si son iguales sus correspondientes sistemas de vectores, es decir, $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ si y solo si $\mathbf{A}_{|j}=\mathbf{B}_{|j}$ para $j=1:n$ (son iguales columna a columna).

Definición 11. *Llamamos matriz nula (o matriz cero) de orden $m\times n$, $\mathbf{0}$, a la matriz cuyas n columnas son vectores nulos de $\mathbb{R}^m$: $\mathbf{0}_{|j}=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^m$, para $j=1:n$.*

Uso de la librería en Python

```
M0(4,3)                                                # matriz nula de orden 4 por 3
```

Definición 12. *Sea la matriz $\mathbf{A}$. Llamamos matriz opuesta de $\mathbf{A}$ a la matriz $-\mathbf{A}$, del mismo orden que $\mathbf{A}$ y cuyas columnas son las de $\mathbf{A}$ multiplicadas por -1, es decir, $\big(-\mathbf{A}\big)_{|j}=-\Big(\mathbf{A}_{|j}\Big)$.*

También daremos nombre a ciertas matrices en función de la disposición de sus componentes:

Definición 13. *Decimos que una matriz es cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas. Es decir, una matriz cuadrada es de orden $m\times m$.*

Cuando tenemos una matriz cuadrada de orden m por m frecuentemente abreviamos y decimos que es de orden m. Así, si decimos que una matriz es *de orden n* (y nada más) ya estamos indicando que es cuadrada.

Definición 14. *A las matrices que no son cuadradas las denominamos rectangulares.*

Recuerde que al expresar el orden de matrices rectangulares es necesario indicar el número de filas y columnas.

Definición 15 (Matriz simétrica)**.** *Decimos que la matriz* $\mathbf{A}$ *es simétrica cuando* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\intercal}$.

Así, $\mathbf{A}_{|j} = \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$. Por tanto, toda matriz simétrica es necesariamente cuadrada. Y puesto que la "*columna*" $j$ésima es igual a la "*fila*" $j$ésima, las componentes $i$ésimas de ambos vectores deben ser iguales, es decir, ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}_{|i}$.

Definición 16. *Decimos que una matriz es diagonal cuando todos los componentes fuera de la diagonal principal son nulos, es decir, si* $d_{ij} = 0$ *cuando* $i \neq j$.

Por ejemplo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{mm} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{mp} & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{y} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Aunque las tres matrices son diagonales, $\mathbf{D}$ es cuadrada, $\mathbf{F}$ tiene más columnas que filas y $\mathbf{G}$ tiene más filas que columnas. Tenga en cuenta que los componentes de la diagonal principal pueden tomar cualquier valor. Por tanto, ¡una matriz nula $\mathbf{0}$ siempre es diagonal! Además, *toda matriz diagonal y cuadrada es simétrica*, ya que por una parte

$${}_{i|}\mathbf{D}_{|j} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ d_{ii} & (i = j) \end{cases}, \quad \text{y por otra} \quad {}_{i|}\left(\mathbf{D}^{\intercal}\right)_{|j} = {}_{j|}\mathbf{D}_{|i} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ d_{ii} & (i = j) \end{cases}; \quad \text{por tanto} \quad \mathbf{D}^{\intercal} = \mathbf{D}.$$

Definición 17. *Llamamos matriz identidad de orden* n *(y se denota* $\mathbf{I}$*) a la matriz cuadrada y diagonal de orden* n *cuyas componentes en la diagonal principal son unos y el resto de componentes son cero, es decir*

$${}_{i|}\mathbf{I}_{|j} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}.$$

Por ejemplo, las matrices identidad de órdenes 3, 1 y 2 son

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nótese que la matriz identidad es simétrica (pues es cuadrada y diagonal).

Uso de la librería en Python

```
I(4)                                              # matriz identidad de orden 4
```

☞ Para terminar la lección solo nos queda estudiar las operaciones con matrices y sus propiedades.

1.4. Suma de matrices y producto de matrices por escalares

Definición 18 (suma de matrices)**.** *Definimos la suma de dos matrices* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$*, de orden* $m \times n$*, como la matriz del mismo orden cuyas columnas son suma de las columnas de* $\mathbf{A}$ *con las de* $\mathbf{B}$*:*

$$\boxed{(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}} \qquad \textit{para } j = 1:n,$$

es decir, $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \left[(\mathbf{A}_{|1} + \mathbf{B}_{|1}) \quad \dots \quad (\mathbf{A}_{|n} + \mathbf{B}_{|n}) \right]$.

Definición 19 (producto de una matriz por un escalar)**.** *Definimos el producto de una matriz* $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ *por un escalar* λ *como la matriz resultante de multiplicar las columnas de* $\mathbf{A}$ *por el escalar* λ*:*

$$\boxed{\left(\lambda\mathbf{A}\right)_{|j} = \lambda\left(\mathbf{A}_{|j}\right)} \qquad \textit{para } j = 1:n,$$

es decir, $\lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\lambda(\mathbf{A}_{|1}) & \dots & \lambda(\mathbf{A}_{|n})\end{bmatrix}$.

Definición 20. *Para cualquier λ decimos que $\lambda\mathbf{A}$ es un múltiplo de $\mathbf{A}$.*

☞ También aquí, la definición de las operaciones de suma y producto por un escalar convierten al operador "$|j$" en un **operador lineal**; es decir, *distributivo* respecto a la suma de matrices

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$$

y *asociativo* respecto al producto de una matriz por un escalar

$$\left(\lambda\mathbf{A}\right)_{|j} = \lambda\left(\mathbf{A}_{|j}\right).$$

Finalizamos la lección demostrando que la suma de matrices y producto de matrices por escalares verifican propiedades análogas a las de la Proposición 1.2.1. Para ello explotaremos las propiedades de la notación "$|j$" y las propiedades de las operaciones con *vectores de* $\mathbb{R}^n$ enumeradas en la Proposición 1.2.1.

Las demostraciones son idénticas a las del Ejercicio 1...

Propiedades de la suma de matrices y del producto de matrices por escalares

Ejercicio 3. Demuestre las propiedades de la siguiente proposición.

Proposición 1.4.1 (Propiedades de las operaciones entre matrices)**.** *Para cualesquiera matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ con idéntico orden (i.e, con mismo número de filas y de columnas), y para cualesquiera escalares λ y η, se verifica que:*

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$.
2. $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$.
3. $\mathbf{0}+\mathbf{A} = \mathbf{A}$.
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.
5. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$.
6. $(\lambda+\eta)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}+\eta\mathbf{A}$.
7. $\lambda(\eta\mathbf{A}) = (\lambda\eta)\mathbf{A}$.
8. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Pista. Explote que el operador "$|j$" es distributivo para la suma de matrices y asociativo para el producto por escalares. Use las propiedades de las operaciones con vectores de la Proposición 1.2.1, pues $\mathbf{A}_{|j}$, $\mathbf{B}_{|j}$ y $\mathbf{C}_{|j}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$.

Nota 2. *Estas ocho propiedades (de manera similar a las ocho propiedades de las operaciones con vectores de la Proposición 1.2.1) nos permitirán definir en el Tema 2 el espacio vectorial de matrices $\mathbb{R}^{m\times n}$.*

Operaciones componente a componente

En la mayoría de los libros se definen las operaciones de suma y producto por escalares componente a componente:

> *"la suma de dos matrices $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ y $\underset{m\times n}{\mathbf{B}}$, del mismo orden, es la matriz que resulta de sumar los componentes de $\mathbf{A}$ a los componentes de $\mathbf{B}$".*

y

> *"el producto de una matriz $\underset{n\times m}{\mathbf{A}}$ por un escalar λ: es la matriz resultante de multiplicar los componentes de $\mathbf{A}$ por el escalar λ".*

Ejercicio 4. Demuestre que las definiciones 18 y 19 implican que las operaciones de suma y producto por escalares se pueden calcular componente a componente, es decir, que

$${}_{i|}(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = {}_{i|}\mathbf{A}_{|j} + {}_{i|}\mathbf{B}_{|j}, \qquad \text{y} \qquad {}_{i|}(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda\left({}_{i|}\mathbf{A}_{|j}\right); \qquad \text{con } i=1:m, \quad \text{y} \quad j=1:n.$$

Por tanto,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \cdots & (a_{1n}+b_{1n})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_{m1}+b_{m1}) & (a_{m2}+b_{m2}) & \cdots & (a_{mn}+b_{mn})\end{bmatrix};$$

y

$$\lambda\mathbf{A}=\lambda\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Dos propiedades más de la transposición

Antes de operar por filas, necesitamos demostrar un par de propiedades más de la transpuesta.[8]

Ejercicio 5. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a)

Proposición 1.4.2 (Transpuesta de un múltiplo)**.** *Si* $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ *entonces* $(\lambda\mathbf{A})^{\intercal}=\lambda(\mathbf{A}^{\intercal})$.

(b)

Proposición 1.4.3 (Transpuesta de una suma)**.** *Si* $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ *y* $\underset{m\times n}{\mathbf{B}}$ *entonces* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\intercal}=\mathbf{A}^{\intercal}+\mathbf{B}^{\intercal}$.

Operando con las filas

Y ahora veamos las operaciones por filas:

Ejercicio 6. Demuestre que las definiciones 18 y 19 implican que también se puede operar "por filas", es decir, que

$${}_{i|}(\mathbf{A}+\mathbf{B})={}_{i|}\mathbf{A}+{}_{i|}\mathbf{B},\qquad \text{y}\qquad {}_{i|}(\mathbf{A}\lambda)=({}_{i|}\mathbf{A})\lambda;\qquad \text{donde } \underset{m\times n}{\mathbf{A}} \text{ y donde } i=1:m.$$

☞ Concluimos por lo tanto que el operador selector de *filas*, "$i|$", es **lineal**; es decir, *distributivo* respecto a la suma de matrices

$${}_{i|}(\mathbf{A}+\mathbf{B})={}_{i|}\mathbf{A}+{}_{i|}\mathbf{B}$$

y *asociativo* respecto al producto de una matriz por un escalar

$${}_{i|}(\lambda\mathbf{A})=\lambda({}_{i|}\mathbf{A}).$$

Extensión de la notación matricial y nuevas reglas de reescritura.

Si de nuevo aceptamos que se puede multiplicar por un escalar por el lado derecho, es decir, que $\mathbf{A}\lambda=\lambda\mathbf{A}$; logramos unas reglas de reescritura similares a las que obtuvimos en el caso del producto de un vector por un escalar y de propina algunas nuevas reglas para la transposición.

☞ **Producto de una matriz por un escalar:**

- "*podemos desplazar los paréntesis*" para sacar un símbolo por un lado e introducir otro por el otro lado:

$$(\lambda\mathbf{A})_{|j}=\lambda(\mathbf{A}_{|j})\qquad \text{y}\qquad ({}_{i|}\mathbf{A})\lambda={}_{i|}(\mathbf{A}\lambda).$$

- "*podemos intercambiar las posiciones del escalar y el selector*" sacando uno de ellos fuera del paréntesis y metiendo el otro:

$$(\mathbf{A}_{|j})\lambda=(\mathbf{A}\lambda)_{|j}\qquad \text{y}\qquad {}_{i|}(\lambda\mathbf{A})=\lambda({}_{i|}\mathbf{A}).$$

[8] De la transposición ya solo nos falta demostrar que $(\mathbf{AB})^{\intercal}=\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal}$, pero para ello antes tenemos que ver las definiciones de producto de un vector por una matriz $\boldsymbol{a}\mathbf{B}$ y producto de matrices $\mathbf{AB}$.

De hecho, puesto que las cuatro expresiones de la mitad izquierda del recuadro de más arriba arrojan el mismo resultado (aunque el orden de ejecución de las operaciones difiera entre ellas) podemos omitir el paréntesis y escribir sencillamente $\lambda\mathbf{A}_{|j}$. Y puesto que las cuatro expresiones de la mitad derecha del recuadro de más arriba arrojan el mismo resultado (aunque el orden de ejecución de las operaciones también difiera) podemos omitir el paréntesis y escribir sencillamente $\lambda\,{}_{i|}\mathbf{A}$.

La Propiedad 1.4.2 sobre la "traspuesta de un múltiplo" (que volvemos a copiar más abajo) junto al hecho de poder multiplicar por la derecha, $\mathbf{A}\lambda = \lambda\mathbf{A}$; nos dota de otra nueva regla de reescritura que permite el intercambio de posición del escalar y el símbolo de trasposición.

☞ **Traspuesta del producto por un escalar:**

- "*podemos desplazar los paréntesis*" para sacar un símbolo por un lado e introducir otro por el otro lado:
$$(\lambda\mathbf{A})^{\intercal} = \lambda(\mathbf{A}^{\intercal})$$
- "*podemos intercambiar las posiciones del escalar y el operador transposición*" sacando uno de ellos fuera del paréntesis y metiendo el otro:
$$(\mathbf{A}^{\intercal})\lambda = (\mathbf{A}\lambda)^{\intercal}.$$

Por último, recuerde que tanto los operadores selectores son lineales y por tanto distributivos respecto a la suma
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j} \qquad \text{y} \qquad {}_{i|}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = {}_{i|}\mathbf{A} + {}_{i|}\mathbf{B};$$
y que la trasposición también es distributiva respecto a la suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\intercal} = \mathbf{A}^{\intercal} + \mathbf{B}^{\intercal}$.

Lección 1

(Lección 1) T-1 Esquema de la Lección 1

Esquema de la *Lección 1*

- Operaciones con vectores y matrices
  - sumas y productos por escalares
  - Propiedades de estas operaciones

1

Resumen de la lección [9]**.** En esta lección se debe incidir en los siguientes puntos:

- Un **vector** de $\mathbb{R}^m$ es una lista ordenada de m números.
- Un **matriz** de $\mathbb{R}^{m\times n}$ es una lista ordenada de n vectores de $\mathbb{R}^m$.
- **La notación**:
  - Encerrando una lista de números entre paréntesis creamos un vector (que se puede escribir vertical u horizontalmente).
  - Con $\boldsymbol{a}_{|i}$ o con ${}_{i|}\boldsymbol{a}$ seleccionamos la componente $i$ésima del vector $\boldsymbol{a}$.
  - Encerrando una lista de vectores entre corchetes creamos una matriz (los vectores son sus columnas).

[9] Estos resúmenes tienen la intención de orientar, tanto al profesor como al alumno, sobre el objetivo de cada lección (incluyendo las secciones teóricas previas a cada lección). Tenga en cuenta que el contenido de la asignatura está en esas secciones previas, y que las transparencias solo son una ayuda para facilitar al profesor la exposición de las lecciones en el aula. No piense que la asignatura es únicamente lo que se ve en el aula. . . lo que se ve en clase es solo una parte.

- Con $\mathbf{A}_{|j}$ seleccionamos la columna $j$ésima de $\mathbf{A}$, que es *un vector*.
- Con ${}_{j|}\mathbf{A}$ seleccionamos la fila $i$ésima de $\mathbf{A}$, que también es *un vector*.
- Con ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$ seleccionamos el número que se encuentra en la fila $i$ésima y columna $j$ésima de $\mathbf{A}$.
- (¡la idea es usar la notación como si programáramos en Python... y de hecho lo podremos hacer con la librería que acompaña a este material!)

- **Operaciones:** En esta lección solo se verán dos operaciones: la ***suma*** y el ***producto por un escalar***. En el caso de vectores daremos una definición componente a componente y en el caso de las matrices daremos una definición columna a columna.

  Vectores. Suma: $\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y producto por un escalar: $\left(\lambda\boldsymbol{b}\right)_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

  Matrices. Suma: $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y producto por un escalar: $\left(\lambda\mathbf{A}\right)_{|j} = \lambda\left(\mathbf{A}_{|j}\right)$.

  Debe destacarse que la notación usada para definir estas operaciones es idéntica para matrices y vectores. Es muy importante aprender a explotar las propiedades de la notación. La demostración de las propiedades de la suma y el producto por escalares así lo evidencia, pues explota las propiedades de linealidad del operador "$|$":

  - el operador " $|i$ " es distributivo para la suma.
  - el operador " $|i$ " es asociativo para el producto por escalares.

  Al explotar esta característica de la notación se ve que las propiedades de la suma y el producto son idénticas tanto para matrices como para vectores.

- Por cuestiones didácticas se debe ver la interpretación geométrica de los vectores como puntos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, así como interpretación geométrica de las dos operaciones suma y producto por escalares (...pero se ha de destacar que la interpretación geométrica es bastante limitada, pues en $\mathbb{R}^3$ acaba toda posible visualización). Lo verdaderamente importante es que los vectores son listas ordenadas de números (...por ejemplo datos económicos de 200 individuos... algo imposible de visualizar geométricamente). En cuanto a las operaciones, **lo fundamental son sus propiedades**, que para las matrices son idénticas a las de los vectores *(para las matrices no tenemos una "visualización geométrica" y esto no nos causa dificultades... luego la interpretación geométrica es didáctica pero secundaria en la práctica).*

- **Se deben demostrar** las propiedades de la suma y producto por escalares (quizá no dé tiempo a demostrarlas todas en clase). El ejercicio consiste en jugar una y otra vez con las propiedades *distributiva* y *asociativa* de la notación hasta llegar a operar con números reales en el caso de los vectores (para ello se deben refrescar algunas de las propiedades de los números reales); o hasta llegar a operar con vectores en el caso de las matrices. El objetivo es que el alumno se dé cuenta de que todo consiste en jugar con esas dos propiedades...

De hecho lo más interesante de esta lección es mostrar el uso la notación para demostrar propiedades. Las demos son sencillas y se debe incidir en que la herramienta básica para demostrarlas es la mera sustitución de símbolos.

Si A es igual a B, donde aparece A se puede sustituir por B.

¡Las demos son cortas y solo usan la sustitución! (en esta lección no hay reducciones al absurdo o inducción) así que el juego es muy sencillo.

1. Primero realizaremos demostraciones más "visuales" con los componentes de un vector de $\mathbb{R}^n$ (ésta es la Estrategia 1 de resolución del Ejercicio 1, y recuerda a cómo se opera en ejercicios numéricos). Pero esta demostración debería ir seguida en cada caso por la demostración abstracta (Estrategia 2) que sólo usa las propiedades de la notación.

2. Al final de la lección se repiten las mismas demos en el caso de las matrices (pero usando directamente la demo abstracta... la Estrategia 1, "visual", sería muy pesada).

Se debe transmitir que esto es solo un juego de manipulación de símbolos (nótese que las propiedades que obtenemos para los vectores se pueden representar gráficamente con vectores del plano $\mathbb{R}^2$, lo que puede inducir a que estas expresiones significan algo... pero luego se obtienen propiedades análogas para las operaciones con matrices, ¡para las que no tenemos ninguna visualización geométrica!). La visualización es didáctica, pero **lo importante es el juego de manipulación de símbolos**. No hay mejor prueba de ello que la implementación de estas reglas como código de programación (véase la documentación de la librería de Python que acompaña a este material).

Los únicos problemas propuestos en esta lección consisten en demostrar las propiedades de la suma y producto por escalares (tanto para vectores como para matrices). Demostrar las propiedades es el ejercicio más importante y didáctico del curso, y de nada sirve que el alumno vea las demostraciones obtenidas por otra persona (por ejemplo las del profesor). No obstante, en esta primera clase el profesor debe mostrar como se hace (haciendo hincapié en el juego de sustitución de símbolos). En las próximas secciones teóricas aparecerán propuestos ejercicios con muchas demostraciones que no siempre se verán en clase (como ya se ha indicado, ver las demostraciones de otro no sirve para aprender; es obligación del estudiante completarlas por su cuenta... y sin mirar las soluciones).

(Lección 1) **T-2 Vectores de $\mathbb{R}^n$**

Vector de $\mathbb{R}^n$ es una lista ordenada de n números reales

Ejemplo 2. $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$: primer componente: 5, segundo componente: 1 y tercer componente: 10

$$\boldsymbol{v} = \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_2 = 1 \\ v_3 = 10 \end{cases} \quad ; \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5, & 1, & 10 \end{pmatrix}.$$

Notación

- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{0}$
- $\text{elem}_3(\boldsymbol{v}) \equiv {}_{3|}\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}_{|3} \equiv v_3 = 10$

El paréntesis alrededor de una lista de números denota un vector.

2

(Lección 1) **T-3 Operaciones básicas con vectores**

Suma de vectores: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{suman} \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}.$$

Producto por un escalar: $(\lambda\boldsymbol{a})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{a}_{|i})$

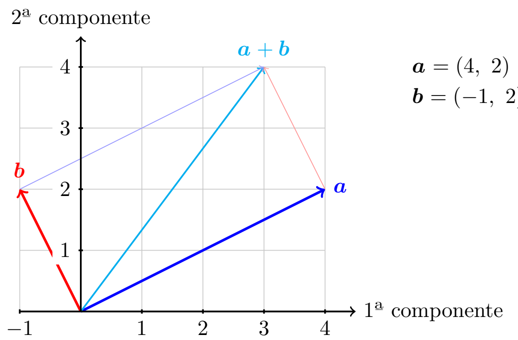
$$2 \cdot \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad -1 \cdot \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} \equiv -\boldsymbol{a}$$

(Por tanto, el operador " $|i$ " es lineal)

$\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (con n componentes) son iguales si: $\boldsymbol{a}_{|i} = \boldsymbol{b}_{|i}$, $\quad i = 1:n$.

3

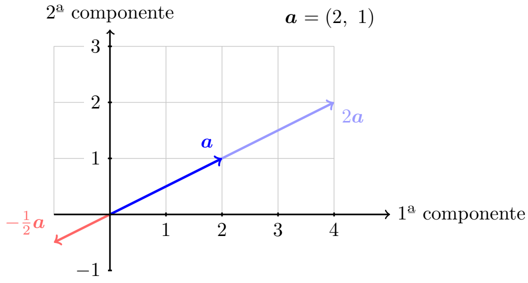
(Lección 1) **T-4 Suma de vectores**



$\boldsymbol{a} = (4,\ 2)$
$\boldsymbol{b} = (-1,\ 2)$

4

(Lección 1) T-5 **Producto de un vector por un escalar**



¿Qué forman el conjunto de todos los múltiplos de $\boldsymbol{a}$?
¿Pertenece el $\mathbf{0}$ a dicho conjunto?

5

(Lección 1) T-6 **Suma y producto por escalares**

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}} \qquad \boxed{(\lambda\boldsymbol{a})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{a}_{|i})}$$

Vectores

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
2. $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$
3. $\mathbf{0}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
4. $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$
5. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$
6. $(\lambda+\eta)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}+\eta\boldsymbol{a}$
7. $\lambda(\eta\boldsymbol{a}) = (\lambda\eta)\boldsymbol{a}$
8. $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
9. $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\lambda$

6

(Lección 1) T-7 **Matrices**

Matriz de $\mathbb{R}^{m\times n}$ es una lista ordenada de n vectores de $\mathbb{R}^m$

Ejemplo 3. Tres vectores de $\mathbb{R}^2$: $\boldsymbol{a} = (4,\ 2)$, $\boldsymbol{b} = (-1,\ 2)$ $\boldsymbol{c} = (0,\ 7)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 7\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\end{bmatrix}$$

Dos vectores de $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{x} = (4,\ -1,\ 0)$, $\boldsymbol{y} = (2,\ 2,\ 7)$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y}\end{bmatrix}$$

Notación

- $\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{0}$
- $\underset{2\times 3}{\mathbf{A}},\ \underset{3\times 2}{\mathbf{B}};\qquad \underset{2\times 3}{\mathbf{A}} \neq \underset{3\times 2}{\mathbf{B}}$

El corchete alrededor de una lista de vectores denota una matriz.

7

(Lección 1) T-8 Más notación

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Operadores que seleccionan

- $\text{elem}_{21}(\mathbf{A}) \;=\; {}_{2|}\mathbf{A}_{|1} \;=\; a_{21}: \qquad 7$
- $\text{fila}_1(\mathbf{A}) \;=\; {}_{1|}\mathbf{A} \;: \qquad \begin{pmatrix} 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$
- $\text{col}_1(\mathbf{A}) \;=\; \mathbf{A}_{|1} \;: \qquad \begin{pmatrix} 1, & 7 \end{pmatrix}$

8

(Lección 1) T-9 Operaciones básicas con matrices

Suma de matrices: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ suman } \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Producto por un escalar: $(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$

$$7\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 7a_{21} & 7a_{22} & 7a_{23} \end{bmatrix} \text{ y } -1\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix} = -\mathbf{A}.$$

(Por tanto, el operador “ $|i$ ” es lineal)

$\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ (del mismo orden) son iguales si: $\mathbf{A}_{|j} = \mathbf{B}_{|j}$

9

(Lección 1) T-10 Suma y producto por escalares

$$\boxed{(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}}; \qquad \boxed{(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})}$$

Matrices

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$
2. $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$
3. $\mathbf{0}+\mathbf{A} = \mathbf{A}$
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$
5. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$
6. $(\lambda+\eta)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}+\eta\mathbf{A}$
7. $\lambda(\eta\mathbf{A}) = (\lambda\eta)\mathbf{A}$
8. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$
9. $\lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda$

10

(Lección 1) T-11 Reglas de reescritura

Reglas distributivas

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i} \qquad {}_{i|}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = {}_{i|}\boldsymbol{a} + {}_{i|}\boldsymbol{b}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j} \qquad {}_{i|}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = {}_{i|}\mathbf{A} + {}_{i|}\mathbf{B}$$

Si además aceptamos que $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\lambda$ y $\lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda$, tenemos

Reglas asociativas (desplazando el paréntesis)

$$(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i}) \qquad {}_{i|}(\boldsymbol{b}\lambda) = ({}_{i|}\boldsymbol{b})\lambda$$
$$(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j}) \qquad {}_{i|}(\mathbf{A}\lambda) = ({}_{i|}\mathbf{A})\lambda$$

Intercambio entre el escalar y el operador

$$(\boldsymbol{b}\lambda)_{|i} = (\boldsymbol{b}_{|i})\lambda \qquad {}_{i|}(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda({}_{i|}\boldsymbol{b})$$
$$(\mathbf{A}\lambda)_{|j} = (\mathbf{A}_{|j})\lambda \qquad {}_{i|}(\lambda\mathbf{A}) = \lambda({}_{i|}\mathbf{A})$$

11

Problemas de la Lección 1

Complete los ejercicios de las secciones 1.2 a 1.4.

(L-1) PROBLEMA 1. Proporcione ejemplos de matrices 3 por 3 no nulas de los siguientes tipos de matrices:

(a) Diagonal: ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j} = 0$ si $i \neq j$.

(b) Simétrica: $\mathbf{A}_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$.

(c) Triangular superior: ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j} = 0$ si $i > j$.

(d) Antisimétrica: ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j} = -{}_{j|}\mathbf{A}_{|i}$.

(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 1.4.)

No deje de hacer los ejercicios de las secciones teóricas de cada lección.

Fin de los Problemas de la Lección 1

LECCIÓN 2: Combinaciones lineales

1.5. Producto punto (o producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$)

Antes de definir las combinaciones lineales, definamos el producto entre dos vectores de $\mathbb{R}^n$:

Definición 21 (Producto punto)**.** *El* producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$ *de dos vectores* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *es*

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n \ = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Este producto será muy importante en la segunda parte del curso para definir la ortogonalidad. Pero su introducción en este momento nos permitirá dotar de propiedades muy potentes a la notación del producto de matrices con vectores. Con ello lograremos demostraciones mucho más "limpias" (pues en lugar de sumatorios podremos usar productos punto) y con pasos más simples (tan solo habrá que aplicar repetidamente la linealidad tanto del producto punto como del operador selector).

Uso de la librería en Python

```
a * b                                  # producto punto entre los vectores a y b
```

Propiedades del producto punto

El producto punto (o producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$) satisface los siguientes axiomas para cualesquiera vectores $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ de $\mathbb{R}^n$ y para cualquier escalar a de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 7. Demuestre que el producto punto cumple con los siguientes axiomas:

(a) **Simetría:** $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$

(b) **Linealidad respecto al primer argumento:**

1. $(a\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = a(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$
2. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$

(c) **Positivo:** $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \geq 0$

(d) **Definido:** $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x} = 0.$

Fíjese que como el producto punto es simétrico, necesariamente también el lineal en el segundo argumento

$$\boldsymbol{x}\cdot(a\boldsymbol{y}) = (a\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{x} = a(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}); \qquad \text{y por tanto, además } \boldsymbol{x}\cdot(a\boldsymbol{y}) = (a\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}$$
$$\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}$$

1.6. Producto de una matriz por un vector (a su derecha)

Combinación lineal de vectores

Hay una operación *muy importante* (¡la más importante de todas las que veamos en este curso!): la suma de múltiplos de vectores. Por ejemplo

$$3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 7\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d}$$

donde $3,\ 1,\ -7$ y 2 son los coeficientes. Es un concepto tan importante que tiene nombre propio: Combinación lineal.

Definición 22 (Combinación lineal de vectores)**.** *Sean los vectores* $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$. *Llamamos combinación lineal a cualquier suma de múltiplos de dichos vectores:*

$$b_1\boldsymbol{a}_1 + b_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{a}_n$$

donde las letras "b_i" denotan los distintos coeficientes de la combinación lineal *(es decir, denotan los escalares que multiplican a cada uno de los vectores).*

EJERCICIO 8. Sean los vectores

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Compruebe que la combinación lineal $2\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{z}$ es el vector nulo.

Producto de una matriz por un vector El producto de una matriz por un vector a su derecha, $\mathsf{A}\boldsymbol{b}$, es una combinación lineal de las columnas de la matriz. Para recordarlo, *escribiremos el vector de la derecha en forma de columna*, y llamaremos a esta operación *producto de una matriz por un vector por la derecha* (o también combinación lineal de las columnas de A, o producto de una matriz por un vector columna).

Definición 23 (producto de una matriz por un vector a su derecha)**.** *Definimos el producto de una matriz* $\underset{m\times n}{\mathsf{A}}$ *con un vector por su derecha* $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{b}}$ *como la combinación lineal de las columnas de* A*, donde los coeficientes de la combinación lineal son los componentes de* $\boldsymbol{b}$*, es decir*

$$\mathsf{A}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}b_1 + \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix}b_2 + \cdots + \begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix}b_n. \tag{1.1}$$

Es decir, $\mathsf{A}\boldsymbol{b} = (\mathsf{A}_{|1})b_1 + (\mathsf{A}_{|2})b_2 + \cdots + (\mathsf{A}_{|n})b_n$.

EJERCICIO 9. Escriba en forma de producto de una matriz por un vector la combinación lineal del ejercicio 8.

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix( [ Vector([1,1,1]), Vector([1,0,1]), Vector([-2,2,1]) ] )
b = Vector( [1,2,-3] )
A*b
```

Es importante tener en cuenta que el número de columnas de la matriz A *debe ser igual* al número de componentes del vector $\boldsymbol{b}$ (¡es necesaria una componente de $\boldsymbol{b}$ por cada columna de la matriz A para poder expresar la suma de múltiplos de las columnas!)

Nótese que la Definición 23 implica que la componente $i$ésima del vector $\mathsf{A}\boldsymbol{b}$ es igual al producto punto: $\left({}_{i|}\mathsf{A}\right)\cdot\boldsymbol{b}$

$${}_{i|}\left(\mathsf{A}\boldsymbol{b}\right) = \left({}_{i|}\mathsf{A}\right)\cdot\boldsymbol{b} \qquad \text{donde } i = 1:m.$$

Uso de la librería en Python

```
2|(A*b) == (2|A)*b
```

Veamos dos casos especiales de producto de una matriz por un vector a su derecha. Pero antes fíjese que si realiza el producto punto entre un vector de $\mathbb{R}^n$ y la fila (columna) $i$ésima de la matriz identidad de orden n, selecciona la componente $i$ésima del vector, es decir, $\left({}_{i|}\mathsf{I}\right)\cdot\boldsymbol{x} = {}_{i|}\boldsymbol{x}$

$$\left({}_{i|}\mathsf{I}\right)\cdot\boldsymbol{x} = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 1x_i + \cdots + 0x_n = x_i = {}_{i|}\boldsymbol{x}.$$

Caso especial 1 (producto de una matriz identidad por un vector)**.** *Sea la matriz identidad* I *de orden* m *y el vector* $\boldsymbol{a}$ *de* m *componentes; entonces* $\mathsf{I}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ *ya que ambos vectores son iguales componente a componente:*

$${}_{i|}\left(\mathsf{I}\boldsymbol{a}\right) = \left({}_{i|}\mathsf{I}\right)\cdot\boldsymbol{a} = {}_{i|}\boldsymbol{a}.$$

Caso especial 2 (producto de una matriz por la columna *i*ésima de $\mathbf{I}$). *Sea la matriz* $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ *y* $\mathbf{I}_{|j}$ *la columna jésima de la matriz identidad de orden n entonces* $\mathbf{A}\big(\mathbf{I}_{|j}\big) = \mathbf{A}_{|j}$, *pues ambos vectores son iguales componente a componente:*

$$_{i|}\big(\mathbf{A}\big(\mathbf{I}_{|j}\big)\big) = \big(_{i|}\mathbf{A}\big)\cdot\big(\mathbf{I}_{|j}\big) = \big(_{j|}\mathbf{I}\big)\cdot\big(_{i|}\mathbf{A}\big) = {}_{j|}\big(_{i|}\mathbf{A}\big) = \big(_{i|}\mathbf{A}\big)_{|j} = {}_{i|}\big(\mathbf{A}_{|j}\big).$$

Este producto selecciona la columna jésima de $\mathbf{A}$.

☞ Hemos visto que la operación **MATRIZ** (de orden $m\times n$) por un ***vector*** (de n componentes) es un vector formado por una suma de múltiplos de las n columnas:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{b} = \big(\mathbf{A}_{|1}\big)b_1 + \big(\mathbf{A}_{|2}\big)b_2 + \cdots + \big(\mathbf{A}_{|n}\big)b_n \quad \in \mathbb{R}^n.$$

A un vector que es suma de múltiplos de vectores se le llama combinación lineal. Por tanto $\mathbf{A}\boldsymbol{b}$ es una *combinación lineal de las columnas* de $\mathbf{A}$.

También hemos visto que $\quad {}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = \big(_{i|}\mathbf{A}\big)\cdot\boldsymbol{b},\quad$ que $\quad \mathbf{I}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\quad$ y que $\quad \mathbf{A}\big(\mathbf{I}_{|j}\big) = \mathbf{A}_{|j}$.

Propiedades del producto de una matriz por un vector a su derecha

El producto de una matriz por un vector posee dos importantísimas propiedades. Son las *propiedades de linealidad*: la primera respecto a la suma de vectores, $\mathbf{A}\big(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\big) = \mathbf{A}\boldsymbol{b} + \mathbf{A}\boldsymbol{c}$, y la segunda respecto al producto por un escalar, $\mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\mathbf{A}\boldsymbol{b})$. Veámoslo.

Ejercicio 10. Demuestre las siguientes proposiciones (inténtelo primero sin mirar las pistas).

(a)

Proposición 1.6.1. *Sea la matriz* $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ *y los vectores* $\boldsymbol{b}$ *y* $\boldsymbol{c}$ *de* $\mathbb{R}^n$, *entonces:* $\mathbf{A}\big(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\big) = \mathbf{A}\boldsymbol{b} + \mathbf{A}\boldsymbol{c}$.

Pista. Demuestre que ambos vectores son iguales componente a componente, es decir, que ${}_{i|}\big(\mathbf{A}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\big)$ es igual a ${}_{i|}\big(\mathbf{A}\boldsymbol{b}+\mathbf{A}\boldsymbol{c}\big)$. Para ello emplee que cada componente es un producto punto y que los productos escalares también son lineales en el segundo argumento. Use también que el operador selector es lineal.

(b)

Proposición 1.6.2. *Sea la matriz* $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$, *el vector* $\boldsymbol{b}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *y el escalar* λ, *entonces:* $\mathbf{A}\big(\lambda\boldsymbol{b}\big) = \lambda\big(\mathbf{A}\boldsymbol{b}\big)$.

Pista. Siga la misma estrategia que en el apartado anterior.

☞ Por tanto, el producto de una matriz por un vector es un **operador lineal**; es decir, *distributivo* respecto a la suma de vectores

$$\mathbf{A}\big(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\big) = \mathbf{A}\boldsymbol{b} + \mathbf{A}\boldsymbol{c}.$$

y *asociativo* respecto al producto de un vector por un escalar

$$\mathbf{A}\big(\lambda\boldsymbol{b}\big) = \lambda\big(\mathbf{A}\boldsymbol{b}\big).$$

Ejercicio 11. Demuestre la siguiente propiedad que se parece a la anterior, pero no es igual (nótese donde están puestos los paréntesis). Inténtelo primero sin mirar las pistas.

Proposición 1.6.3. *Sea la matriz* $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$, *el vector* $\boldsymbol{b}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *y el escalar* λ, *entonces:* $\mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{b}) = (\lambda\mathbf{A})\boldsymbol{b}$.

Pista. Siga la misma estrategia que en el ejercicio anterior, pero recuerde además que, como el producto punto también es lineal en el primer argumento, $\boldsymbol{x}\cdot(\lambda\boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}$

Nótese que de las dos últimas propiedades se deduce que

$$(\lambda\mathbf{A})\boldsymbol{b} = \mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\mathbf{A}\boldsymbol{b})$$

y por tanto no son necesarios los paréntesis y se puede escribir:

$$\lambda\mathbf{A}\boldsymbol{b} = \mathbf{A}\lambda\boldsymbol{b}.$$

Observe además que (como aceptamos que el escalar multiplique a los vectores y matrices por la derecha) el escalar puede aparecer en cualquier lugar, lo único que se mantiene invariante es la posición relativa del vector respecto de la matriz, pues siempre está a su derecha): $\lambda \mathbf{A}\boldsymbol{b} = \mathbf{A}\lambda\boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{b}\lambda$. Añadamos dos propiedades más...

Ejercicio 12. Demuestre el siguiente corolario (inténtelo primero sin mirar las pistas).

Proposición 1.6.4. *Sea la matriz* $\underset{p\times m}{\mathbf{A}}$*, la matriz* $\underset{m\times n}{\mathbf{B}}$*, y el vector* $\boldsymbol{c}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, entonces:*

$$\mathbf{A}\big(\mathbf{B}\boldsymbol{c}\big) = \Big[\mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|1}\big), \quad \dots, \quad \mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|n}\big)\Big]\,\boldsymbol{c},$$

donde $\mathbf{B}_{|i}$ *es la iésima columna de* $\mathbf{B}$*.*

Pista. Comience con la expresión del lado izquierdo de la igualdad. Exprese el producto dentro de paréntesis como una combinación lineal de columnas (Definición 23 en la página 36) y aplique las propiedades de linealidad (proposiciones 1.6.1 y 1.6.2) y de nuevo la Definición 23 para obtener la expresión de la derecha de la igualdad.

Ejercicio 13. Demuestre la siguiente proposición

Proposición 1.6.5. *Sean las matrices* $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ *y* $\underset{m\times n}{\mathbf{B}}$ *y el vector* $\boldsymbol{c}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *entonces:* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\boldsymbol{c} = \mathbf{A}\boldsymbol{c} + \mathbf{B}\boldsymbol{c}$.

☞ Hemos visto varias propiedades que cumple la operación **MATRIZ** por ***vector***

Propiedades de linealidad

- $\mathbf{A}\big(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\big) = \mathbf{A}\boldsymbol{b} + \mathbf{A}\boldsymbol{c}$
- $\mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\mathbf{A}\boldsymbol{b})$

Otras propiedades

- $\mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{b}) = (\lambda\mathbf{A})\boldsymbol{b}$
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\boldsymbol{c} = \mathbf{A}\boldsymbol{c} + \mathbf{B}\boldsymbol{c}$
- $\mathbf{A}\big(\mathbf{B}\boldsymbol{c}\big) = \Big[\mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|1}\big), \quad \dots, \quad \mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|n}\big)\Big]\,\boldsymbol{c}$

☞ Hasta aquí hemos visto que matriz por vector ($\mathbf{A}\boldsymbol{b}$) es una combinación lineal de las *columnas* de la matriz.

A continuación veremos que vector por matriz ($\boldsymbol{a}\mathbf{B}$) es una combinación lineal de las *filas* de la matriz (con propiedades análogas).

1.7. Producto de un vector por una matriz (con el vector a la izquierda)

Definición 24 (producto de un vector (**fila**) por una matriz)**.** *El producto de un vector* $\boldsymbol{a}$ *de* m *componentes que multiplica por la izquierda a una matriz* $\mathbf{B}$ *con* m *filas y* n *columnas es una combinación lineal de las filas de* $\mathbf{B}$*, donde los coeficientes de la combinación lineal son los componentes del vector* $\boldsymbol{a}$*:*

$$\boldsymbol{a}\mathbf{B} \equiv (\mathbf{B}^{\intercal})\boldsymbol{a}$$

Puesto que el producto $\boldsymbol{a}\mathbf{B}$ *es una combinación lineal de las filas de* $\mathbf{B}$*, dicho producto es un vector de* $\mathbb{R}^n$*. Y para recordar que estamos operando con las filas de* $\mathbf{B}$*, escribiremos* $\boldsymbol{a}$ *en forma de fila (en horizontal):*

$$\boldsymbol{a}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \dots & a_m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = a_1\big({}_{1|}\mathbf{B}\big) + \cdots + a_m\big({}_{m|}\mathbf{B}\big) \quad \in \mathbb{R}^n.$$

Uso de la librería en Python

```
print( b*A == ~A*b )
b*A
```

Vector que, descrito componente a componente, se puede expresar como

$$(\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = \Big((\mathbf{B}^{\intercal})\boldsymbol{a}\Big)_{|j} = {}_{j|}\Big((\mathbf{B}^{\intercal})\boldsymbol{a}\Big) = \Big({}_{j|}(\mathbf{B}^{\intercal})\Big)\cdot\boldsymbol{a} = (\mathbf{B}_{|j})\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot(\mathbf{B}_{|j}),\quad \text{donde } j = 1:n.$$

Uso de la librería en Python

```
(b*A)|3 == b*(A|3)
```

Propiedades del producto de una matriz por un vector a su izquierda

Ejercicio 14. Demuestre las siguientes propiedades del producto $\boldsymbol{a}\mathbf{B}$.

(a) Sea el vector $\boldsymbol{a}$ de m componentes y $\mathbf{I}$ de orden m, entonces: $\boxed{\boldsymbol{a}\mathbf{I} = \boldsymbol{a}.}$
Pista. Recuerde que como $\mathbf{I}$ es simétrica, $\mathbf{I}^{\intercal} = \mathbf{I}$.

(b) Sea $\left({}_{i|}\mathbf{I}\right)$ la fila $i$ésima de la matriz $\mathbf{I}$ de orden m y sea matriz $\mathbf{A}$ de orden m por n, entonces: $\boxed{\left({}_{i|}\mathbf{I}\right)\mathbf{A} = {}_{i|}\mathbf{A}.}$
Pista. Recuerde el caso especial 2 en la página 37 y que como $\mathbf{I}$ es simétrica, $\mathbf{I}_{|i} = {}_{i|}\mathbf{I}$.

(c) Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ vectores de $\mathbb{R}^m$ y sea la matriz $\underset{m\times n}{\mathbf{C}}$, entonces: $\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\mathbf{C} = \boldsymbol{a}\mathbf{C} + \boldsymbol{b}\mathbf{C}}$
Pista. (*) Recuerde la Proposición 1.6.1 y recuerde que $\boldsymbol{v}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{v}$.

(d) Sea el escalar λ, el vector $\boldsymbol{a}$ de $\mathbb{R}^m$ y sea la matriz $\underset{m\times n}{\mathbf{B}}$, entonces: $\boxed{(\lambda\boldsymbol{a})\mathbf{B} = \lambda(\boldsymbol{a}\mathbf{B})}$
Pista. (*) Recuerde la Proposición 1.6.2

(e) Sean $\boldsymbol{a}$ un vector de $\mathbb{R}^m$ y λ un escalar; y sea $\mathbf{B}$ una matriz de orden m por n, entonces: $\boxed{\boldsymbol{a}(\lambda\mathbf{B}) = (\lambda\boldsymbol{a})\mathbf{B}.}$
Pista. (*) Recuerde la Proposición 1.6.3

(f) Sean $\boldsymbol{a}$ un vector de $\mathbb{R}^m$, y las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ de orden m por n, entonces: $\boxed{\boldsymbol{a}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \boldsymbol{a}\mathbf{B} + \boldsymbol{a}\mathbf{C}.}$
Pista. (*) Recuerde la Proposición 1.6.5.

☞ Hemos visto que la operación ***vector*** (de m componentes) por **MATRIZ** (de orden $m \times n$) es una combinación lineal de las m filas de $\mathbf{B}$:

$$\boldsymbol{a}\mathbf{B} \;=\; a_1\big({}_{1|}\mathbf{B}\big) + \cdots + a_m\big({}_{m|}\mathbf{B}\big) \quad \in \mathbb{R}^n.$$

Vector que, descrito componente a componente, se puede expresar como

$$\big(\boldsymbol{a}\mathbf{B}\big)_{|j} = \boldsymbol{a} \cdot \big(\mathbf{B}_{|j}\big), \quad \text{donde } j = 1:n.$$

Usando las propiedades de $\mathbf{A}\boldsymbol{b}$ y de la transposición, encontramos que $\boldsymbol{a}\mathbf{B}$ tiene propiedades análogas a las de $\mathbf{A}\boldsymbol{b}$.

- $\boldsymbol{a}\mathbf{I} = \boldsymbol{a}$
- $\big({}_{i|}\mathbf{I}\big)\mathbf{A} = {}_{i|}\mathbf{A}$;

Propiedades de linealidad

- $\big(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\big)\mathbf{C} = \boldsymbol{a}\mathbf{C} + \boldsymbol{b}\mathbf{C}$
- $(\lambda\boldsymbol{a})\mathbf{B} = \lambda(\boldsymbol{a}\mathbf{B})$

Otras propiedades

- $\boldsymbol{a}(\lambda\mathbf{B}) = (\lambda\boldsymbol{a})\mathbf{B}$
- $\boldsymbol{a}\big(\mathbf{B} + \mathbf{C}\big) = \boldsymbol{a}\mathbf{B} + \boldsymbol{a}\mathbf{C}$

Lección 2

(Lección 2) T-1 Esquema de la Lección 2

Esquema de la *Lección 2*

- Producto punto entre vectores
- Combinación lineal de vectores
- Visión por columnas de la geometría de las ecuaciones lineales

12

Resumen de la lección. Veremos el ***producto de una matriz por un vector***, y lo relacionaremos con los sistemas de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (el lado izquierdo es el producto de ¡una matriz por un vector!... $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$).[10]

El producto de $\mathbf{A}$ por $\boldsymbol{v}$ es un ***vector***. La componente *i*ésima de dicho vector, ${}_{i|}\big(\mathbf{A}\boldsymbol{v}\big)$, se puede expresar como un producto punto entre la fila *i*ésima de $\mathbf{A}$ y el vector $\boldsymbol{v}$, es decir, $\big({}_{i|}\mathbf{A}\big) \cdot \boldsymbol{v}$. Usaremos esto para lograr demostraciones sencillas y compactas (por ello comenzaremos revisando las propiedades de los productos punto).

En clase se debe incidir en los siguientes puntos. En la primera parte de la clase:

- La combinación lineal es una suma de múltiplos de vectores
- $\mathbf{A}\boldsymbol{b}$ es por definición: *"una combinación lineal de las columnas de la matriz* $\mathbf{A}$*"*
- Para *demostrar las propiedades del producto* $\mathbf{A}\boldsymbol{b}$ usaremos las propiedades del producto punto junto con las reglas de re-escritura que vimos lección anterior. Aunque se pueden demostrar de manera más visual escribiendo explícitamente las columnas de la matriz, las demostraciones son más compactas usando

$${}_{i|}\big(\mathbf{A}\boldsymbol{b}\big) = \big({}_{i|}\mathbf{A}\big) \cdot \boldsymbol{b}$$

[10] Aunque en las secciones teóricas ya hemos visto el producto de un vector por una matriz ($\boldsymbol{a}\mathbf{B}$), esa operación no aparecerá hasta la próxima clase, que es cuando la usaremos.

(así las demostraciones se convierten en un juego de manipulación de símbolos).

En la segunda parte de la clase:

- Interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones con n ecuaciones y n incógnitas (*visión por columnas*)[11].
- Subrayar que el sistema de ecuaciones nos pregunta por aquellas combinaciones lineales de las columnas de la matriz de coeficientes que son iguales al vector del lado derecho.
- En la parte izquierda de un sistema de ecuaciones aparece una matriz por un vector de incógnitas, $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$, que representa la combinación lineal que desconocemos, y que debe ser igual al vector del lado derecho, $\boldsymbol{b}$.

Esta lección y las siguientes tienen problemas propuestos. Pero es bueno demostrar en clase algunas de las propiedades indicadas en las secciones teóricas previas a esta lección (y en cualquier caso los alumnos deben demostrarlas todas como trabajo personal).

(Lección 2) T-2 **Producto punto**

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Simétrico

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$$

Lineal en el primer argumento

$$\begin{aligned}(a\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} &= a(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\\ (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}\end{aligned}$$

Positivo

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \geq 0$$

Definido

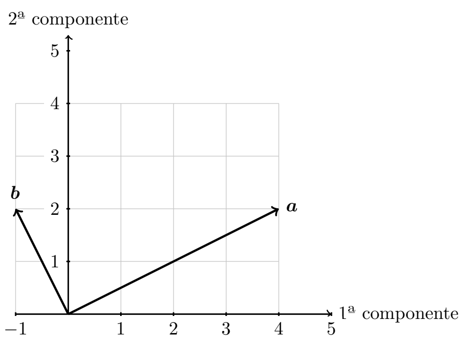
$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = 0$$

13

(Lección 2) T-3 **Combinaciones lineales**

La suma de $c\boldsymbol{a}$ y $d\boldsymbol{b}$ es una combinación lineal de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$

$$c\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{b} = c\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \textsf{\textbf{MATRIZ}} \times \boldsymbol{vector}$$



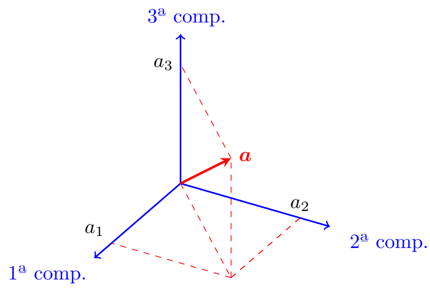
¿Es **0** una combinación lineal de ambos vectores? ¿Qué forman el conjunto de *todas* las combinaciones lineales de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$?

14

[11] Aquí no nombramos la interpretación geométrica tradicional (por filas). Dicha interpretación no se verá hasta bien entrada la segunda parte del curso, es decir, pasado el primer examen intermedio (Temas 1 y 2).

(Lección 2) **T-4 Combinaciones lineales en $\mathbb{R}^3$**

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$



¿Qué forman el conjunto de todos los múltiplos de $\boldsymbol{a}$?
¿Qué forman el conjunto de todas las combinaciones lineales de dos vectores en $\mathbb{R}^3$? (Combinación lineal) 15

(Lección 2) **T-5 Matriz por vector**

$$\mathbf{A}\boldsymbol{b} = b_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left({}_{1|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \left({}_{n|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

Así,

$$\boxed{{}_{i|}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{b}\right) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b}}$$

16

(Lección 2) **T-6 Matriz por vector**

$$\mathbf{A}\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{y} \qquad {}_{i|}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{b}\right) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b}$$

Matriz por vector

1. $\mathbf{I}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
2. $\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{|j}\right) = \mathbf{A}_{|j}$
3. $\mathbf{A}\left(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\right) = \mathbf{A}\boldsymbol{b} + \mathbf{A}\boldsymbol{c}$
4. $\mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\mathbf{A}\boldsymbol{b})$
5. $\mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{b}) = (\lambda\mathbf{A})\boldsymbol{b}$
6. $\mathbf{A}(\mathbf{B}\boldsymbol{c}) = \left[\mathbf{A}\left(\mathbf{B}_{|1}\right), \quad \ldots, \quad \mathbf{A}\left(\mathbf{B}_{|n}\right)\right]\boldsymbol{c}$
7. $\left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\right)\boldsymbol{c} = \mathbf{A}\boldsymbol{c} + \mathbf{B}\boldsymbol{c}$

Use las reglas de reescritura y las propiedades del producto punto 17

El problema fundamental del Álgebra lineal es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En esta lección solo veremos la interpretación geométrica de una sistema de ecuaciones. Para ver un método general de resolución de sistemas tendremos que esperar al Tema 2.

(Lección 2) T-7 **Ejemplo de sistema lineal: 2 ecuaciones y 2 incógnitas**

$$\begin{array}{rrcl} 2x & -y & = & 0 \\ -x & +2y & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\underbrace{\mathbf{A}\boldsymbol{x} \qquad}_{\text{¿qué combinación lineal}} \underbrace{\qquad = \ \boldsymbol{b}}_{\text{es igual a este vector?}}$$

$$x \cdot \mathbf{A}_{|1} + y \cdot \mathbf{A}_{|2} \qquad = \ \boldsymbol{b}$$

18

A se denomina *matriz de coeficientes*, $\boldsymbol{x}$ se denomina *vector de incógnitas*, y $\boldsymbol{b}$ *vector del lado derecho*.

(Lección 2) T-8 **Geometría del sistema lineal: Combinación lineal de columnas**

$$\begin{array}{rrcl} 2x & -y & = & 0 \\ -x & +2y & = & 3 \end{array}$$

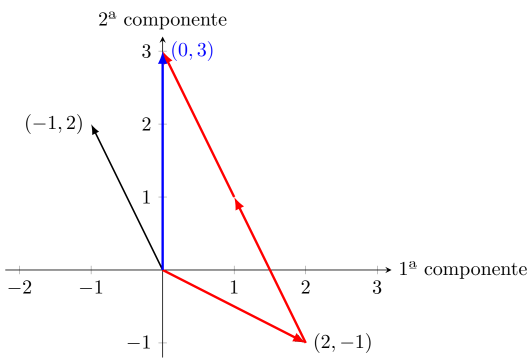
$$x\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

19

(Lección 2) T-9 **2 ecuaciones y 2 incógnitas: Visión por columnas**

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

¿Qué combinación lineal de $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ da $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$?



¿qué forma el conjunto de todas las posibles combinaciones?

20

(Lección 2) T-10 **Ejemplo: 3 ecuaciones y 3 incógnitas**

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -y & & = & 0 \\ -x & +2y & -z & = & -1 \\ & -3y & +4z & = & 4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

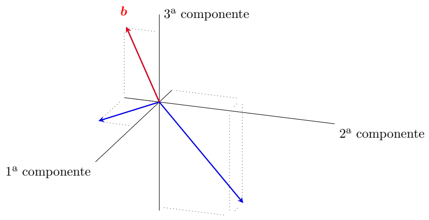
$$\underbrace{\mathbf{A}\boldsymbol{x} \qquad = \boldsymbol{b}}_{\text{¿qué combinación lineal es igual a este vector?}}$$

21

(Lección 2) T-11 **3 ecuaciones y 3 incógnitas: Visión por columnas**

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

¿Qué combinación lineal de las columnas da $\boldsymbol{b}$?



$$\left\{ x = \qquad ; \quad y = \qquad ; \quad z = \qquad \right\}$$

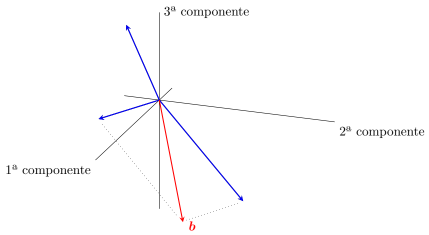
22

¿Y si cambia el vector del lado derecho?

(Lección 2) T-12 **3 ecuaciones y 3 incógnitas: Visión por columnas**

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

¿Qué combinación lineal de las columnas da el nuevo $\boldsymbol{b}$?



$$\left\{ x = \quad ; \quad y = \quad ; \quad z = \quad \right\}$$

23

(Lección 2) T-13 ¿Qué significa Ax=b?

$\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es una combinación de las columnas de $\mathbf{A}$:

Ejemplo

$$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\7\end{pmatrix}$$

"$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$" nos pregunta por una combinación lineal:

$$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\7\end{pmatrix}$$

Para resolver sistemas lineales, antes aprenderemos a transformar las matrices de coeficientes por eliminación (próximas lecciones) 24

Fin de la lección

Emplee el rato que queda de clase para aclarar dudas y resolver los ejercicios correspondientes a la Lección. En este momento dispone del profesor, rentabilice la clase centrándose en los problemas que no tenga claro cómo se resuelven (ejercicios análogos a los propuestos tras cada lección pueden "caer" en el examen... ¡es muy importante que sepa resolver tantos como pueda; y a un ritmo que le permita terminar el examen con tranquilidad!... Solo así podrá superar la asignatura.). Tenga en cuenta que además de los ejercicios propuestos por el profesor, dispone de numerosos ejercicios adicionales en los libros de texto y en la web (por ejemplo en el curso 18.06 del MIT).

Casi siempre tendrá tiempo de resolver dudas y ejercicios en el aula al final de cada lección. No desaproveche ese valioso tiempo en el que dispone del profesor para aclarar las dudas que le surjan al intentar resolver los problemas propuestos.

Problemas de la Lección 2

Los ejercicios de las secciones 1.6 a 1.7 corresponden a lo visto en esta lección (¡no deje de hacerlos!).

(L-2) PROBLEMA 1. Opere con las columnas para calcular los siguientes productos

(a)

$$\begin{bmatrix}4&1\\4&1\\6&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix}4&3\\6&6\\8&9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1/3\end{pmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-2) PROBLEMA 2. Dibuje $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, junto con $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, y $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$ en el plano en cuyos ejes se representan la primera y segunda componentes de los vectores.

(L-2) PROBLEMA 3. Represente gráficamente la visión por columnas del siguiente sistema cuya solución es $x=3$ e $y=-1$.

$$\begin{cases}2x+y=5\\x-3y=6\end{cases}$$

(L-2) PROBLEMA 4. Decida si el sistema de ecuaciones tiene solución:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ x - y &= 2 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

¿Qué ocurre si todos los miembros de la derecha son cero? ¿Hay otras opciones diferentes de cero para los miembros derechos que permitan que el sistema tenga solución? ¿Cuantas opciones más?
(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 1.2.)

(L-2) PROBLEMA 5. Sean $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Compruebe que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. ¿Puede encontrar más soluciones para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

Pista. Intente con un vector $\boldsymbol{x}$ con su primera componente igual a 4. Intente también cambiando el signo de $\boldsymbol{x}$. Intente alguna solución más. ¿Cuantas soluciones puede encontrar?

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-2) PROBLEMA 6. Suponga que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene dos soluciones $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ (sabiendo además que $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$). Demuestre entonces que $\frac{1}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ es también solución, aunque $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ no lo es.

Pista. Emplee las propiedades: $\mathbf{A}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \mathbf{A}\boldsymbol{b} + \mathbf{A}\boldsymbol{c}$ [Proposición 1.6.1 en la página 37] y $\mathbf{A}(c\boldsymbol{b}) = c(\mathbf{A}\boldsymbol{b})$ [Proposición 1.6.2 en la página 37].

(L-2) PROBLEMA 7. *"Es imposible que un sistema de ecuaciones lineales tenga exactamente dos soluciones"*. Explique por qué contestando al siguiente apartado:

(a) Si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son dos soluciones, ¿que otras soluciones existen? diga al menos una más.

(Strang, 2007, ejercicio 18 del conjunto de problemas 1.3.)

(L-2) PROBLEMA 8. Represente gráficamente la visión por columnas del siguiente sistema .

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad ; \qquad \left(\text{su solución es :} \qquad x = 1 + \frac{1}{3}, \quad y = -\frac{1}{3} \right).$$

No deje de hacer los ejercicios de las secciones teóricas de cada lección.

Fin de los Problemas de la Lección 2

LECCIÓN 3: Multiplicación matricial

1.8. Productos de matrices

Definición 25 (producto de matrices (por **columnas**))**.** *Sean las matrices* $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$ *y* $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$*, definimos la matriz producto* $(\mathbf{AB})$ *como aquella matriz cuya columna jésima es el producto de* $\mathbf{A}$ *por la columna jésima de* $\mathbf{B}$*; es decir*

$$\boxed{(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})}.$$

Es decir, las columnas de $\mathbf{AB}$ son combinaciones de las columnas de $\mathbf{A}$ (y los coeficientes de cada combinación son los componentes de cada una de las columnas de $\mathbf{B}$).

$$\mathbf{AB} \equiv \Big[\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|1}), \quad \dots, \quad \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|n})\Big].$$

Deduzcamos algunas propiedades que verifica el producto de matrices. . .

Ejercicio 15. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a)

Proposición 1.8.1. *Sean* $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$ *y* $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$ *matrices y* $\boldsymbol{c}$ *un vector de* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $\mathbf{A}(\mathbf{B}\boldsymbol{c}) = (\mathbf{AB})\boldsymbol{c}$.

(b)

Proposición 1.8.2 (El producto de matrices es asociativo)**.** *Sean las matrices* $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$*,* $\underset{p\times q}{\mathbf{B}}$ *y* $\underset{q\times n}{\mathbf{C}}$*, entonces*

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

Nota importante respecto al operador “ $_{|j}$ ”, el producto de matrices y la asociatividad: La definición de producto matricial mantiene la *asociatividad* del operador “ $_{|j}$ ”, POR LO QUE NO NECESITAMOS PARÉNTESIS. Así, $\mathbf{AB}_{|j}$ se refiere indistintamente a la columna jésima del producto $(\mathbf{AB})_{|j}$, o al producto de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}_{|j}$ (i.e., la columna jésima), $\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$. Y puesto que $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$; también el producto de matrices es asociativo y por tanto podemos escribir sencillamente $\mathbf{ABC}$.

☞ Hemos definido producto $(\mathbf{AB})$ de las matrices $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$ y $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$ como aquella matriz cuya columna jésima es el producto de $\mathbf{A}$ por la columna jésima de $\mathbf{B}$

$$(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j}).$$

Por tanto las columnas de $\mathbf{AB}$ son combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}$.

¡De nuevo nótese la asociatividad de la notación en la definición del producto!

El producto solo está definido si la primera matriz tiene tantas columnas como filas tiene la segunda.

Ejercicio 16. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a)

Proposición 1.8.3. *Sean las matrices* $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$*,* $\underset{m\times p}{\mathbf{B}}$ *y* $\underset{p\times n}{\mathbf{C}}$*, entonces* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$.

(b)

Proposición 1.8.4. *Sean las matrices* $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$*,* $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$ *y* $\underset{p\times n}{\mathbf{C}}$*, entonces* $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$.

(c)

Proposición 1.8.5. *Sean las matrices* $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$*,* $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$ *y el escalar* λ*, entonces* $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}$.

Pista. Recuerde que $\mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{b})\begin{cases} = (\lambda\mathbf{A})\boldsymbol{b} \\ \\ = \lambda(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) \end{cases}$; (Proposiciones 1.6.2 y 1.6.3 de la Página 37).

(d)

Proposición 1.8.6. *Sean la matriz identidad de orden* m*,* I*, y la matriz* $\underset{m\times n}{\mathsf{A}}$ *, entonces* $\mathsf{IA} = \mathsf{A}$.

Pista. Recuerde que $\mathsf{I}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (Caso Especial 1 en la página 36).

(e)

Proposición 1.8.7. *Sean la matriz* $\underset{m\times n}{\mathsf{A}}$ *y la matriz identidad de orden* n*,* I*, entonces* $\mathsf{AI} = \mathsf{A}$.

Pista. Recuerde que $\mathsf{A}(\mathsf{I}_{|j}) = \mathsf{A}_{|j}$ (Caso Especial 2 en la página 37).

Muy muy importante: hay que subrayar que no todas las propiedades de las matrices replican las propiedades de los números que usted conoce: por ejemplo, en general AB es distinto de BA.[12] Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

Por otra parte: entre los escalares si $\lambda^2 = \lambda$ entonces λ es necesariamente 0 o 1; pero con las matrices $\mathsf{A}^2 = \mathsf{A}$ no implica que A la matriz sea cero $\mathbf{0}$ o la identidad I. Por ejemplo si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, entonces $\mathsf{A}^2 = \mathsf{A}$.

En los escalares si $\lambda^2 = 0$ entonces λ es necesariamente 0, pero tampoco esto es cierto con las matrices. Por ejemplo, para $\mathsf{B} = \begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$

$$\mathsf{B}^2 = \begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

☞ El producto de matrices verifica las siguientes propiedades:

- $\mathsf{A}(\mathsf{B}\boldsymbol{c}) = (\mathsf{AB})\boldsymbol{c}$
- $\mathsf{A}(\mathsf{BC}) = (\mathsf{AB})\mathsf{C}$
- $(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mathsf{C} = \mathsf{AC}+\mathsf{BC}$
- $\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C}) = \mathsf{AB}+\mathsf{AC}$
- $\mathsf{A}(\lambda\mathsf{B}) = \lambda(\mathsf{AB}) = (\lambda\mathsf{A})\mathsf{B}$
- $\mathsf{IA} = \mathsf{A}$
- $\mathsf{AI} = \mathsf{A}$

Pese a las dos últimas propiedades, $\boxed{\text{en general } \mathsf{AB}\neq\mathsf{BA}.}$

☞ Por tanto, el producto de matrices es un **operador lineal**; pues es *distributivo* respecto a la suma de matrices

$$\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C}) = \mathsf{AB}+\mathsf{AC}.$$

y *asociativo* respecto al producto de una matriz por un escalar

$$\mathsf{A}(\lambda\mathsf{B}) = \lambda(\mathsf{AB}).$$

Otras dos formas de calcular el producto de matrices

Cálculo del producto de matrices componente a componente (filas por columnas)

Usando las reglas de asociatividad de la notación podemos completar la visión del producto de matrices con la siguiente expresión, que indica que se puede calcular el producto componente a componente vía productos escalares:

[12] para que ambos productos estén definidos es necesario que ambas matrices sean cuadradas y del mismo orden.

Proposición 1.8.8 (Cálculo del producto componente a componente)**.** *Sean las matrices* $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$ *,* $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$ *, entonces:*

$$\boxed{{}_{i|}(\mathbf{AB})_{|j} = ({}_{i|}\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B}_{|j})}$$

Demostración. ${}_{i|}(\mathbf{AB})_{|j} = {}_{i|}\big((\mathbf{AB})_{|j}\big) = {}_{i|}\big(\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})\big) = ({}_{i|}\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B}_{|j})$ □

Pero también deducimos otra forma de calcular el producto mediante operaciones por filas:

Cálculo del producto de matrices operando con las filas

Proposición 1.8.9. *Sean* $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$ *y* $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$*, entonces:* $\boxed{{}_{i|}(\mathbf{AB}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}.}$

Pista. Recuerde que $\boldsymbol{a} \cdot (\mathbf{B}_{|j}) = (\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j}$, para $j = 1:n$.

Demostración. Veamos que las componentes $j$ésimas son iguales:

$$\big({}_{i|}(\mathbf{AB})\big)_{|j} = {}_{i|}(\mathbf{AB})_{|j} = ({}_{i|}\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B}_{|j}) = \big(({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}\big)_{|j};$$

por tanto: ${}_{i|}(\mathbf{AB}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}$. □

☞ Usando las nuevas reglas derivadas de la definición del producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$ hemos obtenido otras dos formas de calcular el producto $\mathbf{AB}$.

La primera alternativa calcula el producto componente a componente usando el *producto punto*.

$$\boxed{{}_{i|}(\mathbf{AB})_{|j} = ({}_{i|}\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B}_{|j})}.$$

La segunda alternativa calcula el producto fila a fila:

$$\boxed{{}_{i|}(\mathbf{AB}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}},$$

de manera que las filas de $\mathbf{AB}$ son combinaciones lineales de las filas de $\mathbf{B}$.

Para finalizar vamos a demostrar que: $\mathbf{B}^\intercal(\mathbf{A}^\intercal) = (\mathbf{AB})^\intercal$

Transpuesta de un producto

Para finalizar, demuestre la siguiente propiedad transposición que usaremos a menudo:

EJERCICIO 17. Recordando que $(\mathbf{B}^\intercal)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\mathbf{B}$, y que $(\mathbf{A}^\intercal)_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$, demuestre que

$$\boxed{(\mathbf{AB})^\intercal = (\mathbf{B}^\intercal)(\mathbf{A}^\intercal)}.$$

Por tanto, para toda $\mathbf{A}$ de orden m por n se verifica que las matrices $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ son simétricas:

$$(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^\intercal = \mathbf{A}^\intercal(\mathbf{A}^\intercal)^\intercal = \mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}; \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal))^\intercal = (\mathbf{A}^\intercal)^\intercal(\mathbf{A}^\intercal) = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal).$$

Nuevas reglas de reescritura.

Realmente no es necesario escribir el "punto" en los productos

$$({}_{i|}\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{b}\,, \qquad \boldsymbol{a} \cdot (\mathbf{B}_{|j})\,, \qquad ({}_{i|}\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B}_{|j})\,,$$

(como tampoco lo es en el producto $2 \cdot \boldsymbol{x}$). Si omitimos el "punto", recuperamos la asociatividad de la notación

$$ {}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\boldsymbol{b} $$

$$ (\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = \boldsymbol{a}(\mathbf{B})_{|j} $$

$$ {}_{i|}(\mathbf{A}\mathbf{B})_{|j} = {}_{i|}\left((\mathbf{A}\mathbf{B})_{|j}\right) = ({}_{i|}\mathbf{A})(\mathbf{B}_{|j}) $$

y por tanto también podremos escribir las siguientes expresiones:

$$ {}_{i|}\mathbf{A}\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{a}\mathbf{B}_{|j}, \qquad {}_{i|}\mathbf{A}\mathbf{B}_{|j}, $$

pues se interpreten como se interpreten (bien como selección de una componente o bien como cálculo de un producto punto) siempre arrojan el mismo resultado.

☞ En ocasiones se trabaja con matrices por bloques. De eso trata lo que resta de lección, pero...

puede saltarse las Secciones 1.9 y 1.10 si quiere

1.9. Submatrices

Sea $\mathbf{I}$ de orden n y sea $\boldsymbol{\alpha}$ una lista de índices menores o iguales a n, por ejemplo $\boldsymbol{\alpha} = (2, 3, 4)$ con $4 \leq n$. Definimos $\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\alpha}}$ como la matriz (de n filas y tantas columnas como el *número de elementos de la lista*) cuyas columnas son las columnas de $\mathbf{I}$ (de orden n) indicadas en la lista. Por ejemplo

$$ \mathbf{I}_{|(2,3,4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{|2} & \mathbf{I}_{|3} & \mathbf{I}_{|4} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{|4} & \mathbf{I}_{|2} & \mathbf{I}_{|3} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{|(4,2,3)}. $$

Y definimos ${}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{I}$ como: ${}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{I} = \left(\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\mathsf{T}}$.

Selección de una submatriz por filas o por columnas Ahora con ayuda del producto de matrices podemos definir dos nuevas operaciones. Sea $\boldsymbol{\alpha}$ una lista de índices, entonces podemos seleccionar una lista de columnas (o filas) de una matriz $\mathbf{A}$ para construir una submatriz:

$$ \mathbf{A}_{|\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\alpha}}), \qquad \text{y} \qquad {}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{A} = ({}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{I})\mathbf{A}. $$

Recuperando el ejemplo de la matriz $\mathbf{PIB}$ de la primera lección (Página 18); la matriz con las filas de 2 a 4 de $\mathbf{PIB}$ (datos de Francia, Alemania y Reino Unido) o la matriz con sus dos primeras columnas (años 2003 y 2004) son

$$ {}_{(2,3,4)|}\mathbf{PIB} = \begin{bmatrix} 0.9 & 2.0 & 1.6 & 2.0 \\ -0.2 & 1.1 & 0.7 & 0.9 \\ 2.5 & 3.2 & 1.9 & 1.5 \end{bmatrix}; \quad \text{y} \quad \mathbf{PIB}_{|(1,2)} = \begin{bmatrix} 2.9 & 3.1 \\ 0.9 & 2.0 \\ -0.2 & 1.1 \\ 2.5 & 3.2 \\ 1.8 & 3.1 \end{bmatrix}. $$

Consecuentemente podemos crear una submatriz seleccionando filas y columnas simultáneamente. Si $\boldsymbol{\beta}$ es otra lista de índices:

$$ {}_{\boldsymbol{\alpha}|}\left((\mathbf{A})_{|\boldsymbol{\beta}}\right) = ({}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{I})\mathbf{A}(\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\beta}}) = \left({}_{\boldsymbol{\alpha}|}(\mathbf{A})\right)_{|\boldsymbol{\beta}}. $$

Así que podemos escribir sencillamente ${}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{A}_{|\boldsymbol{\beta}}$. Por ejemplo, la submatriz con los datos de Francia, Alemania y Reino Unido de los años 2003 y 2004 es

$$ {}_{(2,3,4)|}\mathbf{PIB}_{|(1,2)} = \begin{bmatrix} 0.9 & 2.0 \\ -0.2 & 1.1 \\ 2.5 & 3.2 \end{bmatrix}. $$

Además, también se verifica que

$$ ({}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{A})(\mathbf{B}_{|\boldsymbol{\beta}}) = ({}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{I})\mathbf{A}\mathbf{B}(\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\beta}}) = {}_{\boldsymbol{\alpha}|}(\mathbf{A}\mathbf{B})_{|\boldsymbol{\beta}}. $$

En particular

$$(\mathbf{AB})_{|\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|\boldsymbol{\beta}}); \qquad \text{y} \qquad {}_{\boldsymbol{\alpha}|}(\mathbf{AB}) = ({}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{A})\mathbf{B}.$$

Y también se verifica que

$${}_{\boldsymbol{\alpha}|}(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|\boldsymbol{\beta}} = {}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{A}_{|\boldsymbol{\beta}} + {}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{B}_{|\boldsymbol{\beta}} \qquad \text{y} \qquad \lambda\Big({}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{A}_{|\boldsymbol{\beta}}\Big) = {}_{\boldsymbol{\alpha}|}(\lambda\mathbf{A})_{|\boldsymbol{\beta}}.$$

Multiplicación matricial por bloques

Observando $\Big({}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{I}\Big)$ para la identidad de orden 4 y la lista de índices $\boldsymbol{\alpha} = (4,1,2)$:

$$\Big({}_{(4,1,2)|}\mathbf{I}\Big) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es fácil darse cuenta que si 4 es el *primer* componente de la lista, entonces la columna 4 es igual a la *primera* columna de la identidad de orden 3 (que es la longitud de la lista); que si 1 es la *segunda* componente de la lista, entonces columna 1 es igual a la *segunda* columna de la identidad; que si 2 es la *tercera* componente de la lista, entonces la columna 2 es igual a la *tercera* columna de la identidad; y que si algún índice no está en la lista $\boldsymbol{\alpha}$, la correspondiente columna es un vector nulo de tres componentes (donde 3 es la longitud de la lista).

En general, para la lista $\boldsymbol{\alpha}$ con t índices, resulta que si k es la *j ésima* componente de la lista, entonces la columna k es igual a la *j ésima* columna de la identidad de orden t:

$$\big({}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{I}\big)_{|k} = \big({}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_t)|}\mathbf{I}\big)_{|k} = \begin{cases} \mathbf{I}_{|j} \in \mathbb{R}^t & \text{si } k = \alpha_j \\ & \\ \mathbf{0} \in \mathbb{R}^t & \text{si } k \notin \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \in \mathbb{R}^t.$$

Por tanto, para $\mathbf{I}$ de orden 4

$$\Bigg(\big(\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\alpha}}\big)\big({}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{I}\big)\Bigg)_{|k} = \big(\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\alpha}}\big)\Bigg(\big({}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{I}\big)_{|k}\Bigg) = \begin{cases} (\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\alpha}})\mathbf{I}_{|j} = \big(\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\alpha}}\big)_{|j} = \mathbf{I}_{|k} & \text{si } k = \alpha_j \\ (\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\alpha}})\mathbf{0} \;= \mathbf{0} & \text{si } k \notin \boldsymbol{\alpha} \end{cases},$$

Por ejemplo, si $\boldsymbol{\alpha} = (4,1,2)$

$$\big(\mathbf{I}_{|(4,1,2)}\big)\big({}_{(4,1,2)|}\mathbf{I}\big) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora considere las matrices $\mathbf{A}$ de orden $m \times p$ y $\mathbf{B}$ de orden $p \times n$, y sea $\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_h$ una partición del conjunto de índices $\{1, \dots, p\}$, de manera que $\boldsymbol{\gamma}_1 \cup \boldsymbol{\gamma}_2 \cup \dots \cup \boldsymbol{\gamma}_h = \{1, \dots, p\}$, y $\boldsymbol{\gamma}_i \cap \boldsymbol{\gamma}_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$. Si empleamos dicha partición con las columnas de $\mathbf{A}$ y las filas de $\mathbf{B}$, el producto de las nuevas matrices (posiblemente con las filas de $\mathbf{B}$ y columnas de $\mathbf{A}$ reordenadas) resulta ser igual al producto $\mathbf{AB}$:

$$\big(\mathbf{A}_{|\boldsymbol{\gamma}_1,\dots,\boldsymbol{\gamma}_h}\big)\big({}_{\boldsymbol{\gamma}_1,\dots,\boldsymbol{\gamma}_h|}\mathbf{B}\big) = \mathbf{A}\big(\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\gamma}_1,\dots,\boldsymbol{\gamma}_h}\big)\big({}_{\boldsymbol{\gamma}_1,\dots,\boldsymbol{\gamma}_h|}\mathbf{I}\big)\mathbf{B} = \mathbf{AIB} = \mathbf{AB}.$$

Pero además se deduce que se puede calcular dicho producto mediante la suma de k productos de submatrices o bloques:

$$\sum_{t=1}^{h}\big(\mathbf{A}_{|\boldsymbol{\gamma}_t}\big)\big({}_{\boldsymbol{\gamma}_t|}\mathbf{B}\big) = \sum_{t=1}^{h}\Big(\mathbf{A}\big(\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\gamma}_t}\big)\big({}_{\boldsymbol{\gamma}_t|}\mathbf{I}\big)\mathbf{B}\Big) = \mathbf{A}\left(\sum_{t=1}^{h}\big(\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\gamma}_t}\big)\big({}_{\boldsymbol{\gamma}_t|}\mathbf{I}\big)\right)\cdot\mathbf{B} = \mathbf{AIB} = \mathbf{AB},$$

ya que al ser $\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_h$ una partición cada índice está incluido en una y solo una lista $\boldsymbol{\gamma}_t$, así $\Big(\sum_{t=1}^{k}\big(\mathbf{I}_{|\boldsymbol{\gamma}_t}\big)\cdot\big({}_{\boldsymbol{\gamma}_t|}\mathbf{I}\big)\Big) = \mathbf{I}$.

Por ejemplo, si la partición está formada por las tres listas $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ y $\boldsymbol{\gamma}_3$, tenemos que:

$$\mathbf{AB} = \Big(\mathbf{A}_{|\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3}\Big)\Big({}_{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|}\mathbf{B}\Big) = \sum_{\boldsymbol{\gamma}_k \in \text{partición}}\big(\mathbf{A}_{|\boldsymbol{\gamma}_k}\big)\big({}_{\boldsymbol{\gamma}_k|}\mathbf{B}\big) = \big(\mathbf{A}_{|\boldsymbol{\gamma}_1}\big)\big({}_{\boldsymbol{\gamma}_1|}\mathbf{B}\big) + \big(\mathbf{A}_{|\boldsymbol{\gamma}_2}\big)\big({}_{\boldsymbol{\gamma}_2|}\mathbf{B}\big) + \big(\mathbf{A}_{|\boldsymbol{\gamma}_3}\big)\big({}_{\boldsymbol{\gamma}_3|}\mathbf{B}\big).$$

Si además seleccionamos algunas filas de $\mathbf{A}$ y columnas de $\mathbf{B}$, entonces el bloque ${}_{\boldsymbol{\alpha}|}(\mathbf{AB})_{|\boldsymbol{\beta}}$ del producto $\mathbf{AB}$ es

$${}_{\boldsymbol{\alpha}|}(\mathbf{AB})_{|\boldsymbol{\beta}} \;=\; \Big({}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{A}_{|\boldsymbol{\gamma}_1,\dots,\boldsymbol{\gamma}_s}\Big)\Big({}_{\boldsymbol{\gamma}_1,\dots,\boldsymbol{\gamma}_s|}\mathbf{B}_{|\boldsymbol{\alpha}}\Big) \;=\; \sum_{\boldsymbol{\gamma}_k \in \text{partición}}\big({}_{\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{A}_{|\boldsymbol{\gamma}_k}\big)\big({}_{\boldsymbol{\gamma}_k|}\mathbf{B}_{|\boldsymbol{\beta}}\big) \tag{1.2}$$

Cuarta forma de calcular el producto de matrices

Si consideramos cada columna de $\mathbf{A}$ como un bloque o submatriz de $\mathbf{A}$ (submatrices de orden $m \times 1$) y cada fila de $\mathbf{B}$ como un bloque o submatriz de $\mathbf{B}$ (submatriz de orden $(1 \times n)$) obtenemos una nueva forma de calcular el producto como suma matrices:

$$\underset{m\times n}{\mathbf{AB}} = \left(\mathbf{A}_{|\{1:p-1\}}\right)\left({}_{\{1:p-1\}|}\mathbf{B}\right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\mathbf{A}_{|(k)}\right)\left({}_{(k)|}\mathbf{B}\right),$$

donde cada sumando $\underset{m\times 1}{\left(\mathbf{A}_{|(k)}\right)}\;\underset{1\times m}{\left({}_{(k)|}\mathbf{B}\right)}$ es una matriz de orden m por n.

$$\text{Ejemplo:}\quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{A}_{|(1)}\right)\left({}_{(1)|}\mathbf{B}\right) + \left(\mathbf{A}_{|(2)}\right)\left({}_{(2)|}\mathbf{B}\right) + \left(\mathbf{A}_{|(3)}\right)\left({}_{(3)|}\mathbf{B}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.10. Matrices particionadas

Recuerde que si $p \leq q \in \mathbb{N}$, entonces con $(p:q)$ denotamos a la secuencia $p, p+1, \ldots, q$. Ahora considere la matriz

$$\underset{5\times 6}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

junto con la siguiente partición de los índices de las filas: por una parte los índices correspondientes a las tres primeras filas, $(1:3)$, y por otra los correspondientes a las dos últimas, $(4:5)$. Considere además la siguiente partición de los índices de las columnas: los índices correspondientes a las cuatro primeras columnas por una parte, $(1:4)$, y los de las dos últimas por otra, $(5:6)$. Con dichas particiones de índices podemos particionar la matriz en 4 bloques:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} {}_{(1:3)|}\mathbf{B}_{|(1:4)} & {}_{(1:3)|}\mathbf{B}_{|(5:6)} \\ \hline {}_{(4:5)|}\mathbf{B}_{|(1:4)} & {}_{(4:5)|}\mathbf{B}_{|(5:6)} \end{array}\right];$$

de manera que

$${}_{(1:3)|}\mathbf{B}_{|(1:4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad {}_{(1:3)|}\mathbf{B}_{|(5:6)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$${}_{(4:5)|}\mathbf{B}_{|(1:4)} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad {}_{(4:5)|}\mathbf{B}_{|(5:6)} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Así, cuando cruzamos una matriz con lineas que van de un lado a otro o de arriba a abajo, las lineas delimitan los bloques o particiones (i.e., submatrices dentro de una matriz). Nótese que si dos bloques adyacentes se encuentran uno a la derecha del otro, ambos bloques comparten la misma lista de filas; y que si dos bloques adyacentes se encuentran uno encima del otro, ambos comparten la misma lista de columnas.

Considere ahora el siguiente subconjunto de índices $j_1, \ldots, j_s \in \mathbb{N}$ con $j_1 < \ldots < j_s \leq k$. Entonces, conocido k, con el conjunto $\{j_1, \ldots, j_s\}$ denotaremos la siguiente lista de sub-listas de índices (cuya última sub-lista acaba en k).

$$\{j_1, \ldots, j_s\} = (1:j),\ (j_1+1:j_2),\ \ldots,\ (j_s+1:k).$$

Esta lista de sub-listas describe una partición del conjunto de índices $i = 1, \ldots, n$, es decir, cada índice está incluido en una, y solo en una, de las sub-listas. Por otra parte, en cada sub-lista los índices resultan estar ordenados. Así pues, la matriz particionada del ejemplo de más arriba se puede expresar del siguiente modo:

$${}_{\{3\}|}\mathbf{B}_{|\{4\}} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Uso de la librería en Python

```
a = Vector( [1,1,1,3,3] )
b = Vector( [2,2,2,4,4] )
B = Matrix( [a,a,a,a,b,b] )
{3}|B|{4}
```

Fíjese que con esta notación, los índices del conjunto a la izquierda indican por debajo de qué filas se cruza la matriz con líneas horizontales, y los índices del conjunto a la derecha indican a la derecha de qué columnas se cruza la matriz con líneas verticales. Una misma matriz admite distintas particiones. Por ejemplo, para la misma matriz $\mathbf{B}$ tenemos

$${}_{\{1\}|}\mathbf{B}_{|\{1,4\}} = \left[\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} {}_{(1)|}\mathbf{B}_{|(1)} & {}_{(1)|}\mathbf{B}_{|(2:4)} & {}_{(1)|}\mathbf{B}_{|(5:6)} \\ \hline {}_{(2:5)|}\mathbf{B}_{|(1)} & {}_{(2:5)|}\mathbf{B}_{|(2:4)} & {}_{(2:5)|}\mathbf{B}_{|(5:6)} \end{array}\right],$$

donde ahora

$${}_{(1)|}\mathbf{B}_{|(1)} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \qquad {}_{(1)|}\mathbf{B}_{|(2:4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad {}_{(1)|}\mathbf{B}_{|(5:6)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$${}_{(2:5)|}\mathbf{B}_{|(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad {}_{(2:5)|}\mathbf{B}_{|(2:4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad {}_{(2:5)|}\mathbf{B}_{|(5:6)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Así,

- Si $i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{N}$ con $i_1 < \ldots < i_r \leq m$ donde m es el número de filas de $\mathbf{A}$, entonces ${}_{\{i_1,\ldots,i_r\}|}\mathbf{A}$ es la matriz de bloques

$${}_{\{i_1,\ldots,i_r\}|}\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} {}_{(1:i_1)|}\mathbf{A} \\ \hline {}_{(i_1+1:i_2)|}\mathbf{A} \\ \hline \vdots \\ \hline {}_{(i_r+1:m)|}\mathbf{A} \end{array}\right].$$

- Si $j_1, \ldots, j_s \in \mathbb{N}$ con $j_1 < \ldots < j_s \leq n$ donde n es el número de columnas de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}_{|\{j_1,\ldots,j_s\}}$ es la matriz de bloques

$$\mathbf{A}_{|\{j_1,\ldots,j_s\}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_{|(1:j_1)} & \mathbf{A}_{|(j_1+1:j_2)} & \cdots & \mathbf{A}_{|(j_s+1:n)} \end{array}\right].$$

- Si $i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{N}$ con $i_1 < \ldots < i_r \leq n$ donde n es el número de filas de $\mathbf{A}$ y $j_1, \ldots, j_s \in \mathbb{N}$ con $j_1 < \ldots < j_s \leq m$ donde m es el número de columnas de $\mathbf{A}$ entonces

$${}_{\{i_1,\ldots,i_y\}|}\mathbf{A}_{|\{j_1,\ldots,j_s\}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} {}_{(1:i_1)|}\mathbf{A}_{|(1:j_1)} & {}_{(1:i_1)|}\mathbf{A}_{|(j_1+1:j_2)} & \cdots & {}_{(1:i_1)|}\mathbf{A}_{|(j_s+1:m)} \\ \hline {}_{(i_1+1:i_2)|}\mathbf{A}_{|(1:j_1)} & {}_{(i_1+1:i_2)|}\mathbf{A}_{|(j_1+1:j_2)} & \cdots & {}_{(i_1+1:i_2)|}\mathbf{A}_{|(j_s+1:m)} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline {}_{(i_k+1:n)|}\mathbf{A}_{|(1:j_1)} & {}_{(i_k+1:n)|}\mathbf{A}_{|(j_1+1:j_2)} & \cdots & {}_{(i_k+1:n)|}\mathbf{A}_{|(j_s+1:m)} \end{array}\right].$$

A continuación vamos a ver la suma $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ y el producto $(\mathbf{AB})$ de matrices particionadas.

Suma de matrices particionadas.

Considere las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ del mismo orden, y $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, matrices particionadas obtenidas de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ usando las mismas particiones de sus filas y columnas. Por ejemplo

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = {}_{\{h\}|}\mathbf{A}_{|\{k\}} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{11} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{12} \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{A}}_{21} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{22} \end{array}\right]; \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}} = {}_{\{h\}|}\mathbf{B}_{|\{k\}} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\mathcal{B}}_{11} & \boldsymbol{\mathcal{B}}_{12} \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{B}}_{21} & \boldsymbol{\mathcal{B}}_{22} \end{array}\right],$$

entonces la suma se puede calcular sumando bloque a bloque. En el ejemplo anterior:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} (\boldsymbol{\mathcal{A}}_{11} + \boldsymbol{\mathcal{B}}_{11}) & (\boldsymbol{\mathcal{A}}_{12} + \boldsymbol{\mathcal{B}}_{12}) \\ \hline (\boldsymbol{\mathcal{A}}_{21} + \boldsymbol{\mathcal{B}}_{21}) & (\boldsymbol{\mathcal{A}}_{22} + \boldsymbol{\mathcal{B}}_{22}) \end{array}\right] = {}_{\{h\}|}(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{|\{k\}}.$$

Nótese que como una matriz particionada es un objeto distinto usamos una grafía diferente para distinguirla de una matriz.

Producto de matrices particionadas

Así, si la partición de $\mathbf{A}$ tiene q filas de bloques y s columnas de bloques y la partición de $\mathbf{B}$ tiene s filas de bloques y r columnas de bloques

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = {}_{\{i_1,\ldots,i_{q-1}\}|}\mathbf{A}_{|\{h_1,\ldots,h_{s-1}\}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{11} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{12} & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{1s} \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{A}}_{21} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{22} & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{2s} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{A}}_{q1} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{q2} & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{qs} \end{array}\right], \; \boldsymbol{\mathcal{B}} = {}_{\{h_1,\ldots,h_{s-1}\}|}\mathbf{B}_{|\{j_1,\ldots,j_{r-1}\}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{\mathcal{B}}_{11} & \boldsymbol{\mathcal{B}}_{12} & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{B}}_{1r} \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{B}}_{21} & \boldsymbol{\mathcal{B}}_{22} & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{B}}_{2r} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{B}}_{s1} & \boldsymbol{\mathcal{B}}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{B}}_{sr} \end{array}\right],$$

entonces el bloque $\boldsymbol{\mathcal{AB}}_{pt}$ se puede calcular como

$$_{(i_{(p-1)}+1:i_p)|}(\mathbf{AB})_{|(h_{t-1}+1:h_t)} = \boldsymbol{\mathcal{AB}}_{pt} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{p1} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{ps} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\mathcal{B}}_{1t} \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{B}}_{2t} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{B}}_{st} \end{array}\right] = \sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{pk}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{kt}; \tag{1.3}$$

que es una forma más visual de representar un caso particular del cálculo de un bloque descrito en la Ecuación 1.2 en la página 51.

Es sencillo ver que este producto de matrices particionadas, descrito bloque a bloque (fila de bloques por columna de bloques) se puede calcular de otras formas equivalentes. Por ejemplo, por columnas de bloques, de manera que la $\boldsymbol{j}$ésima columna de bloques es:

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{11} \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{A}}_{21} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{A}}_{q1} \end{array}\right] \boldsymbol{\mathcal{B}}_{1j} + \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{12} \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{A}}_{22} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{A}}_{q2} \end{array}\right] \boldsymbol{\mathcal{B}}_{2j} + \cdots + \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{1s} \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{A}}_{2s} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{A}}_{qs} \end{array}\right] \boldsymbol{\mathcal{B}}_{sj}. \tag{1.4}$$

Lección 3

(Lección 3) T-1 Esquema de la Lección 3

Esquema de la *Lección 3*

- Producto matricial: $(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$
  - Propiedades
- Transpuesta de una matriz
- $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}\mathbf{A}$ (combinaciones lineales)
- Otras formas de calcular el producto
- Transpuesta de $\mathbf{AB}$

25

Resumen de la lección En esta lección se define el producto de matrices. Es muy importante remarcar que $(\mathbf{AB})$ es una matriz cuyas columnas son combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}$ y cuyas filas son combinaciones lineales de las filas de $\mathbf{B}$. De hecho, ¡*la notación empleada subrayará este hecho*!

También veremos que hay distintas formas de calcular el producto: *operando con las columnas*, $(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$ (nuestra definición de producto); *multiplicando filas por columnas*, $({}_{i|}\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B}_{|j})$ (que es la forma de calcular que ya conocen los alumnos) y *operando con las filas*, ${}_{i|}(\mathbf{AB}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}$.

- La definición de producto de matrices es:
$$(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j}),$$
es decir, que la columna $j$ésima de $(\mathbf{AB})$ es la matriz $\mathbf{A}$ multiplicada por la columna $j$ésima de $\mathbf{B}$ (y por tanto es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$).

  Como el paréntesis "se mueve", la notación es asociativa. Esto quiere decir que podemos escribir[13]
$$\mathbf{AB}_{|j},$$
que denota tanto la columna $j$ésima de $(\mathbf{AB})$, como la forma de calcular ($\mathbf{A}$ por la columna $j$ésima de $\mathbf{B}$).

- Con las reglas de re-escritura vistas en las lecciones anteriores es muy sencillo demostrar las propiedades del producto de matrices (conviene demostrar unas cuantas en clase para que el alumno se familiarice con el uso de la notación. El alumno debe demostrarlas todas por su cuenta).

- A partir de la definición de producto deduciremos otras formas de calculo del producto. Para lograrlo de manera rápida emplearemos que $\boldsymbol{a}\mathbf{B} = (\mathbf{B}^{\intercal})\boldsymbol{a}$. Así que previamente definimos la transposición y la notación relacionada (i.e., que los subíndices cambian de lado al transponer). Jugando con la notación se deducen inmediatamente las propiedades de la transpuesta.

- Después se repasan algunas cuestiones sobre la notación, y se subraya la diferencia entre vectores y matrices (las matrices tienen filas y columnas... y los vectores no).

  Es muy importante recordar que $\mathbf{A}_{|k}$ es el *vector* obtenido al seleccionar la columna $k$ésima de $\mathbf{A}$; y que ${}_{k|}\mathbf{A}$ es el *vector* obtenido al seleccionar la fila $k$ésima de $\mathbf{A}$. Así, los operadores "$|\, k$" y "$k\,|$" operan sobre las matrices para "extraer" columnas y filas de una matriz.

- Antes de ver otras formas de calcular el producto de matrices, es **fundamental** dejar claro que **MATRIZ**×***vector*** es un *vector*: una combinación lineal de las columnas $\boxed{\mathbf{A}\boldsymbol{b} = (\mathbf{A}_{|1})b_1 + \cdots + (\mathbf{A}_{|n})b_2}$; y que ***vector*** × **MATRIZ** es un *vector*: una combinación lineal de las filas $\boxed{\boldsymbol{a}\mathbf{B} = a_1({}_{1|}\mathbf{B}) + \cdots + a_m({}_{m|}\mathbf{B})}$, es decir, $\boldsymbol{a}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\intercal}\boldsymbol{a}$.

- Después se demuestra que la componente ${}_{i|}\mathbf{AB}_{|j}$ es el producto punto entre la fila $({}_{i|}\mathbf{A})$ y la columna $(\mathbf{B}_{|j})$.

[13] de igual modo que el hecho de que $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ nos permite escribir $\mathbf{ABC}$.

- Siguiendo el mismo juego de manipulación de signos también veremos que ${}_{i|}(\mathbf{AB}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}$.

  De nuevo la notación es asociativa (y "rica" en significados), por lo que se puede escribir sencillamente: ${}_{i|}\mathbf{AB}$.

- Para finalizar con este juego de manipulación de símbolos, se demostrará que la transpuesta del producto es el producto de las transpuestas: $(\mathbf{AB})^\intercal = \mathbf{B}^\intercal(\mathbf{A}^\intercal)$.

  ¡Todo sale de jugar con las reglas de re-escritura de la notación!

(Lección 3) T-2 **Multiplicación matricial (por columnas)**

Columna j del producto de $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$ con $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$ es:

$$\boxed{(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{AB}_{|j}$$

Cada columna de $\mathbf{AB}$ es una combinación de las p *columnas* de $\mathbf{A}$

Ejemplo 4.

$$\begin{bmatrix}2&1\\3&8\\4&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\1&0\end{bmatrix} = \Big[\ \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|1}) \ \Big|\ \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|2})\ \Big]$$

$$= \left[\begin{bmatrix}2&1\\3&8\\4&9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \ \middle|\ \begin{bmatrix}2&1\\3&8\\4&9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix}3&12\\11&18\\13&24\end{bmatrix}$$

26

(Lección 3) T-3 **Propiedades del producto de matrices**

$$\mathbf{MATRIZ} \times \mathbf{MATRIZ} = \mathbf{MATRIZ}$$

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ recuerde $\mathbf{A}(\mathbf{B}\boldsymbol{c}) = \Big[\mathbf{AB}_{|1}, \dots, \mathbf{AB}_{|n}\Big]\boldsymbol{c}$
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$.
3. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$.
4. $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \lambda(\mathbf{AB})$.
5. $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$.
6. $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$.

27

(**Lección 3**) T-**4** **Matrices transpuestas**

Transpuesta

$$(\text{columna } i \text{ de } \mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = (\text{fila } i \text{ de } \mathbf{A}) \quad \leftrightarrow \quad \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)_{|i} = {}_{i|}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^{\mathsf{T}} =$$

$${}_{i|}\mathbf{A}_{|j} = {}_{j|}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)_{|i}; \qquad (\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}; \qquad {}_{j|}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right) = \mathbf{A}_{|j}$$

Matrices simétricas $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ & 2 & 9 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

28

(**Lección 3**) T-**5** **Vectores, matrices fila y matrices columna**

$$(1, \quad 3, \quad -10) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \text{pero} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -10 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}. \quad {}_{2|}\mathbf{A} = (2, \quad 3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_{|1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1, \quad 2, \quad 4)$$

Al encerrar entre corchetes una lista vectores generamos una matriz cuyas columnas son dichos vectores

$$\begin{bmatrix} {}_{3|}\mathbf{A} & {}_{1|}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} {}_{1|}\mathbf{A} & {}_{2|}\mathbf{A} & {}_{3|}\mathbf{A} \end{bmatrix}$$

29

(**Lección 3**) T-**6** **Combinaciones lineales de filas y columnas**

Combinaciones lineales de columnas

$$\begin{bmatrix} \diamondsuit & \clubsuit \\ \heartsuit & \spadesuit \\ \diamondsuit & \clubsuit \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \diamondsuit \\ \heartsuit \\ \diamondsuit \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} \clubsuit \\ \spadesuit \\ \clubsuit \end{pmatrix}$$

MATRIZ $\times$ ***vector*** $=$***vector***

Combinaciones lineales de filas

$$(1, \quad 2, \quad 7) \begin{bmatrix} \spadesuit & \spadesuit \\ \diamondsuit & \heartsuit \\ \clubsuit & \clubsuit \end{bmatrix} = 1(\spadesuit \ \spadesuit) + 2(\diamondsuit \ \heartsuit) + 7(\clubsuit \ \clubsuit)$$

vector $\times$ **MATRIZ** $=$***vector***

Combinaciones lineales $\longrightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{a}\mathbf{B} = \left(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\right)\boldsymbol{a}}$

30

Recuerde además que si $\mathbf{A}$ es de orden m por n y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} b_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} b_n = \begin{pmatrix} \left({}_{1|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \left({}_{m|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b} \end{pmatrix}.$$

(Lección 3) T-7 **Vector por matriz**

Recuerde que

$${}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b};$$

por tanto

$$(\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = {}_{j|}(\boldsymbol{a}\mathbf{B}) = {}_{j|}\Big((\mathbf{B}^{\intercal})\boldsymbol{a}\Big) = \Big({}_{j|}(\mathbf{B}^{\intercal})\Big) \cdot \boldsymbol{a} = \left(\mathbf{B}_{|j}\right) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \left(\mathbf{B}_{|j}\right)$$

Nuevas reglas de re-escritura

$$\boxed{{}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b}} \quad \text{y} \quad \boxed{(\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = \boldsymbol{a} \cdot \left(\mathbf{B}_{|j}\right)}$$

31

Nótese que por una parte

$$\mathsf{MATRIZ} \cdot \boldsymbol{vector} = \boldsymbol{vector}$$

y por otra

$$\boldsymbol{vector} \cdot \mathsf{MATRIZ} = \boldsymbol{vector},$$

que

$$\mathsf{MATRIZ} \cdot \mathsf{MATRIZ} = \mathsf{MATRIZ},$$

pero que sin embargo

$$\boldsymbol{vector} \cdot \boldsymbol{vector} = escalar.$$

Nótese también que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{A}\left[\boldsymbol{x}\right] \quad \text{y que} \quad \boldsymbol{x}\mathbf{A} \neq \left[\boldsymbol{x}\right]^{\intercal}\mathbf{A};$$

puesto que a la izquierda de las desigualdades hay vectores y a la derecha hay matrices.

(Lección 3) T-8 **Multiplicación matricial: filas por columnas**

Sean $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$ y $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$, entonces:

$$\boxed{{}_{i|}(\mathbf{A}\mathbf{B})_{|j} = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \left(\mathbf{B}_{|j}\right)}$$

Demostración. Recuerde que

$${}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b}$$

por tanto ${}_{i|}(\mathbf{A}\mathbf{B})_{|j} = {}_{i|}\Big((\mathbf{A}\mathbf{B})_{|j}\Big) = {}_{i|}\Big(\mathbf{A}\left(\mathbf{B}_{|j}\right)\Big) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \left(\mathbf{B}_{|j}\right)$ $\square$

32

(Lección 3) T-9 Multiplicación matricial (por filas)

Sean $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$ y $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$, entonces:

$$\boxed{{}_{i|}(\mathbf{AB}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}}$$

Demostración. Veamos que las componentes $j$ésimas son iguales:

$$\Big({}_{i|}(\mathbf{AB})\Big)_{|j} = {}_{i|}\Big((\mathbf{AB})_{|j}\Big) = ({}_{i|}\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}_{|j}) = \Big(({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}\Big)_{|j}$$

por tanto ${}_{i|}(\mathbf{AB}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}$. □

33

(Lección 3) T-10 Multiplicación matricial (por filas)

Cada fila de $\mathbf{AB}$ es combinación de las p filas de $\mathbf{B}$

$$\begin{bmatrix}2&1\\3&8\\4&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\1&0\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c}\left[\begin{pmatrix}2&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\1&0\end{bmatrix}\right]^{\intercal}\\\hline \left[\begin{pmatrix}3&8\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\1&0\end{bmatrix}\right]^{\intercal}\\\hline \left[\begin{pmatrix}4&9\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\1&0\end{bmatrix}\right]^{\intercal}\end{array}\right] = \begin{bmatrix}3&12\\11&18\\13&24\end{bmatrix}$$

34

(Lección 3) T-11 Transpuesta de un producto de matrices

Puesto que

- vector por matriz es $\boldsymbol{a}\mathbf{B} = (\mathbf{B}^{\intercal})\boldsymbol{a}$, y
- $(\mathbf{A}^{\intercal})_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$,

resulta que:

$$\boxed{(\mathbf{AB})^{\intercal} = (\mathbf{B}^{\intercal})(\mathbf{A}^{\intercal})}.$$

Demostración.

$$\Big((\mathbf{AB})^{\intercal}\Big)_{|j} = {}_{j|}(\mathbf{AB}) = ({}_{j|}\mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{B}^{\intercal})({}_{j|}\mathbf{A}) = (\mathbf{B}^{\intercal})\Big((\mathbf{A}^{\intercal})_{|j}\Big) = \Big((\mathbf{B}^{\intercal})(\mathbf{A}^{\intercal})\Big)_{|j}.$$

□

El producto de una matriz con su transpuesta siempre es simétrico

35

Fin de la lección

Python

☞ Mire la implementación de las operaciones básicas del álgebra matricial en la librería de Python que acompaña a este curso: Sección 1.4 del pdf de la documentación (o estudie directamente el código si lo prefiere).

https://github.com/mbujosab/LibreriaDePythonParaMates2

Verá que la programación de las operaciones es una traducción literal de las *definiciones* vistas aquí; y que No hay ni una línea de código que describa las propiedades que hemos demostrado a lo largo de estas tres lecciones. ¡No es necesario! Las definiciones implican las propiedades (como hemos comprobado teóricamente con las demostraciones realizadas en estas tres primeras lecciones). Verifique con ejemplos numéricos que todas las propiedades se cumplen. Emplee los notebooks de Jupyter correspondientes a las tres primeras lecciones.

Problemas de la Lección 3

No deje de hacer los ejercicios de las secciones teóricas de cada lección.

(L-3) PROBLEMA 1. Calcule los siguientes productos de matrices (en el orden indicado) $\mathbf{EF}$, $\mathbf{FE}$ y $\mathbf{E}^2$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&0&1\end{bmatrix};\qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{bmatrix}.$$

(Strang, 2007, ejercicio 34 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) PROBLEMA 2. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas (en este caso proporcione además un contraejemplo).

(a) Si las columnas 1 y 3 de $\mathbf{B}$ son iguales, también las columnas 1 y 3 de $\mathbf{AB}$ son iguales.
(b) Si las filas 1 y 3 de $\mathbf{B}$ son iguales, también las filas 1 y 3 de $\mathbf{AB}$ son iguales.
(c) Si las filas 1 y 3 de $\mathbf{A}$ son iguales, también las filas 1 y 3 de $\mathbf{AB}$ son iguales.
(d) $(\mathbf{AB})^2=\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$.

(Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) PROBLEMA 3. Sean los vectores $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$. Calcule los siguientes productos

(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ (b) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ (c) $[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{b}]^{\intercal}$

(Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) PROBLEMA 4. Escriba las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de 2 por 2 cuyos elementos son $a_{ij}=i+j$ y $b_{ij}=(-1)^{i+j}$. Multiplíquelas para encontrar $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BA}$.
(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) PROBLEMA 5. El producto de dos matrices triangulares inferiores es nuevamente una matriz triangular inferior (todos sus elementos por encima de si diagonal principal son nulos). Confirme esto con un ejemplo 3 por 3, y luego explique por qué este hecho se deduce de las leyes de multiplicación de matrices.
(Strang, 2007, ejercicio 12 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) PROBLEMA 6. Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ las matrices de más abajo.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&-1&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-1&4\end{bmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&-1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&2&1\\2&1&-1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}2&4\\3&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\end{bmatrix}$$

Calcule (*en particular, ¡note que* $\mathbf{EF}\neq\mathbf{FE}$*!*)

(a) $\mathbf{B}+\mathbf{D}$ (b) $2\mathbf{E}-\mathbf{F}$ (c) $\mathbf{AC}$
(d) $\mathbf{BC}$ (e) $\mathbf{CB}$ (f) $\mathbf{ACD}$
(g) $\mathbf{EF}$ (h) $\mathbf{FE}$ (i) $\mathbf{CEF}$

Fin de los Problemas de la Lección 3

LECCIÓN 4: Eliminación

1.11. Transformaciones elementales

Como veremos a lo largo del curso, hay un algoritmo que permite resolver gran cantidad de problemas: decidir si una matriz es invertible y si lo es, encontrar su inversa, resolver sistemas de ecuaciones lineales, encontrar una base del complemento ortogonal de un subespacio de $\mathbb{R}^n$, pasar de las ecuaciones paramétricas a las cartesianas (y viceversa), calcular el determinante, completar el cuadrado de una forma cuadrática, etc. ¡Prácticamente todos los problemas que veremos en este curso se puede resolver con un único algoritmo! Este algoritmo se denomina *Método de Eliminación* y consiste en aplicar una sucesión de transformaciones elementales [14] sobre alguna matriz dada.

Pese a su potencia, el *Método de Eliminación* es simple: solo hay dos tipos de transformaciones elementales.

- Las del primer tipo *suman* un múltiplo de una columna a *otra* columna.
- Las del segundo tipo *multiplican* una columna por un número *distinto de cero*.

Al operador que realiza una transformación elemental lo denotaremos con el símbolo "$\boldsymbol{\tau}$", y lo situaremos como subíndice a la derecha de la matriz para indicar que operamos sobre las columnas: $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}$. Dentro de un corchete por debajo de cada "$\boldsymbol{\tau}$", indicaremos los detalles de la operación elemental. Vayamos con los detalles de cada tipo.

1.11.1. Transformaciones elementales Tipo I

La transformación $\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$ suma λ veces el vector $\boldsymbol{i}$ésimo al vector $\boldsymbol{j}$ésimo (con $\boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{i}$). Es decir, *se modifica el vector del último índice del corchete.*

Uso de la librería en Python

```
T( (8,2,3) )                           # Suma ocho veces el segundo vector al tercero
```

Matriz elemental Tipo I. Las matrices que se obtienen *tras aplicar una única transformación elemental* de *Tipo I* sobre $\mathbf{I}$ (de orden n) se denominan *matrices elementales de Tipo I.*

$$\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$$

Por ejemplo, si sobre las columnas de la matriz identidad de orden 3 aplicamos la transformación $\underset{[(\lambda)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$ (*que suma a la tercera columna "λ veces" la segunda*) obtenemos:

$$\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \lambda \\ & & 1 \end{bmatrix};$$

que es como la matriz identidad de orden 3 salvo porque la segunda componente de su tercera columna ha cambiado y ahora es λ (en lugar de cero).

Por tanto, la notación no solo nos indica que a la columna $\boldsymbol{j}$ésima le sumamos un múltiplo de la la $\boldsymbol{i}$ésima, $(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, sino que nos describe la matriz elemental correspondiente: en negrita aparecen los índices ($\boldsymbol{i}$ésima fila, $\boldsymbol{j}$ésima columna) de la componente de la matriz identidad que ha cambiado y entre paréntesis el nuevo valor (λ).

Uso de la librería en Python

```
I(3) & T( (8,2,3) )  # Transformación de las columnas de la matriz identidad de orden 3
                     # (suma 8 veces la segunda columna a la tercera)
```

[14] en la mayoría de manuales de Álgebra Lineal las transformaciones se realizan sobre las filas, pero aquí lo haremos sobre las columnas.

En general, si aplicamos $\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$ (*que suma a la $j$ésima columna "λ veces" la $i$ésima* (con $j \neq i$)) sobre las columnas de $\mathbf{I}$ (de orden n), cambiamos la $j$ésima columna de manera las columnas de la nueva matriz son:

$$\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|k} = \begin{cases} k = j \text{ columna } j\text{ésima} & \left(\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|j} = \lambda\mathbf{I}_{|i} + \mathbf{I}_{|j} \\ \\ k \neq j \text{ el resto de columnas no cambian} & \left(\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|k} = \mathbf{I}_{|k} \end{cases}$$

Veamos qué pasa si aplicamos una transformación Tipo I a una matriz cuadrada general.

Transformación de las columnas de una matriz $\mathbf{A}$: En general, si aplicamos $\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$ a las columnas de $\mathbf{A}$ obtenemos una matriz cuyas columnas son:

$$\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|k} = \begin{cases} \lambda\mathbf{A}_{|i} + \mathbf{A}_{|j} = \mathbf{A}\left(\lambda\mathbf{I}_{|i} + \mathbf{I}_{|j}\right) = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|j} & \text{para la columna } j\text{ésima } (k=j) \\ \\ \mathbf{A}_{|k} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{|k}\right) = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|k} & \text{para resto de columnas } (k \neq j) \end{cases} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|k}.$$

Por tanto, aplicar la transformación $\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$ sobre la matriz $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$ es equivalente a multiplicar dicha matriz $\mathbf{A}$ por la correspondiente matriz elemental $\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ de orden n.

$$\mathbf{A}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right).$$

Por ejemplo, si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$; entonces al sumar a la tercera columna "λ veces" la segunda, obtenemos:

$$\mathbf{A}_{\underset{[(\lambda)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\lambda 0 + c) \\ 0 & b & (\lambda b + c) \\ a & b & (\lambda b + c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \lambda \\ & & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right).$$

1.11.2. Transformaciones elementales Tipo II

La transformación $\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}$ multiplica por α al $\boldsymbol{i}$ésimo vector (con $\alpha \neq 0$). Es decir, *se modifica el vector del último índice del corchete.*

Uso de la librería en Python

```
T( (5, 2) )                                  # multiplica por 5 el segundo vector
```

Matriz elemental Tipo II Las matrices que se obtienen *tras modificar una matriz identidad* de orden n mediante una única transformación elemental de *Tipo II* se denominan *matrices elementales de Tipo II.*

$$\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$$

Por ejemplo, si sobre las columnas de la matriz identidad de orden 3 aplicamos la transformación $\underset{[(\alpha)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$ (*que multiplica la segunda columna por $\alpha \neq 0$*) obtenemos:

$$\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{bmatrix};$$

que es como la matriz $\mathbf{I}$ de orden 3 salvo porque la segunda componente de su segunda columna es α.

Uso de la librería en Python

```
I(3) & T( (5,1) )  # Transformación de las columnas de la matriz identidad de orden 3
                   # (multiplica por 5 la primera columna)
```

En general, si aplicamos $\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}$ (*que multiplica la columna iésima por* $\alpha \neq 0$) sobre las columnas de $\mathbf{I}$ (de orden n), modificamos su $i$ésima columna, de manera las columnas de la nueva matriz son:

$$\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|k} = \begin{cases} k=j \text{ columna } j\text{ésima} & \left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|j} = \alpha\mathbf{I}_{|j} \\ \\ k \neq j \text{ el resto de columnas no cambian} & \left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|k} = \mathbf{I}_{|k} \end{cases}$$

Las matrices elementales Tipo II son como la identidad salvo porque la $\boldsymbol{j}$ésima componente de la diagonal es α.

Transformación de las columnas de una matriz A: En general, si aplicamos $\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}$ a las columnas de $\mathbf{A}$ obtenemos una matriz cuyas columnas son:

$$\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|k} = \begin{cases} \alpha\mathbf{A}_{|k} & = \mathbf{A}\left(\alpha\mathbf{I}_{|k}\right) \quad \text{si } k=i \\ \\ \mathbf{A}_{|k} & = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{|k}\right) \quad \text{para el resto de columnas} \end{cases} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|k}.$$

De nuevo, aplicar una transformación elemental de *Tipo II* sobre la matriz $\mathbf{A}$ de orden n es equivalente a multiplicar dicha matriz $\mathbf{A}$ por la correspondiente matriz elemental *Tipo II* de orden n.

$$\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right).$$

Por ejemplo, si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$ entonces al multiplicar la segunda columna por α obtenemos:

$$\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & \alpha b & c \\ a & \alpha b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right).$$

1.11.3. Transformaciones de las columnas

Por tanto, al aplicar una transformación elemental $\boldsymbol{\tau}$ (sea del tipo que sea) sobre $\mathbf{A}$, siempre se verifica que:

$$\boxed{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}\right)}.$$

Así que nuevamente tenemos una regla de reescritura asociativa:

$$\boxed{(\mathbf{AB})_{\boldsymbol{\tau}} \;=\; \mathbf{AB}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}\right) \;=\; \mathbf{A}\left(\mathbf{B}_{\boldsymbol{\tau}}\right)}.$$

Comentario. *Fíjese que*

- ***multiplicar*** *una columna* ***por cero no es una transformación elemental****; y* ***restar una columna a ella misma tampoco lo es.***
- *la matriz identidad es simultáneamente una matriz elemental* ***Tipo I*** *y* ***Tipo II****:* $\mathbf{I}_{\underset{[(0)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{I} = \mathbf{I}_{\underset{[(1)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}$.

- *la notación para denotar las matrices elementales las describe casi completamente (aunque no del todo, pues la notación no indica el orden de la matriz).*

  Por ejemplo, $\mathbf{I}_{\underset{[(-7)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ *(de orden n), es como la matriz identidad (de orden n) pero la componente de la fila 1 y columna 3 es un "−7", es decir*

$$\mathbf{I}_{\underset{[(-7)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}1&0&-7\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \quad \textit{pero también} \quad \mathbf{I}_{\underset{[(-7)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}1&0&-7&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \quad \textit{ó} \quad \mathbf{I}_{\underset{[(-7)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}1&0&-7&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}, \quad \textit{ó}\ldots$$

  y $\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ *indica que la primera componente de la diagonal es un 3; es decir,*

$$\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}3\end{bmatrix}; \quad \textit{pero también,} \quad \mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}; \quad \textit{ó} \quad \mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \quad \textit{ó}\ldots$$

- *las matrices elementales (de orden n) se obtienen aplicando las correspondientes transformaciones elementales sobre la matriz identidad (de orden n)*

- *La transpuesta de una matriz elemental es otra matriz elemental. Las de Tipo II son simétricas y para las de Tipo I resulta evidente que* $\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ *es otra matriz elemental de Tipo I (la que suma λ veces la jésima columna a la iésima).*

☞ Hay dos tipos de transformaciones elementales

Tipo I. Suman a un vector un múltiplo de *otro* vector: $\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$

Tipo II. Multiplican un vector por un número *distinto de cero*: $\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}$

Al aplicar una transformación elemental $\boldsymbol{\tau}$ sobre las columnas de $\mathbf{A}$, se verifica que:

$$\boxed{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{A}\,(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})}.$$

La matriz resultante de aplicar una transformación elemental sobre la identidad, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$, se denomina matriz elemental. Hay dos tipos de matrices elementales:

Tipo I. $\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$, donde $j \neq i$

Tipo II. $\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}$, donde $\alpha \neq 0$ (y el índice dentro del corchete está repetido);

Por tanto, *la transpuesta de una matriz elemental es elemental.*

EJERCICIO 18. Escriba las siguientes matrices elementales de orden 4.

(a) $\mathbf{I}_{\underset{[(-7)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ (b) $\mathbf{I}_{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ (c) $\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ (d) $\mathbf{I}_{\underset{[(-10)\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$

EJERCICIO 19. ¿Qué operaciones realizan las matrices anteriores si multiplican por la derecha a la matriz $\mathbf{A}$?

EJERCICIO 20. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\1&2&3&4\end{bmatrix}$, exprese las siguientes transformaciones elementales de $\mathbf{A}$ como productos de $\mathbf{A}$ por matrices elementales y escriba el resultado:

(a) Multiplicar la primera columna por 3. (b) Restar la primera columna de la segunda.

1.12. Secuencias de transformaciones elementales. I

Considere que se aplica una sucesión de k sucesivas transformaciones elementales sobre las columnas de $\mathbf{A}$:

$$\Big(\cdots\big((\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1})_{\boldsymbol{\tau}_2}\cdots\big)_{\boldsymbol{\tau}_{(k-1)}}\Big)_{\boldsymbol{\tau}_k}$$

Denotamos a la aplicación dicha sucesión con $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$. Evidentemente, dicha aplicación es equivalente al producto de $\mathbf{A}$ por una sucesión de k matrices elementales:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \Big(\cdots\big((\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1})_{\boldsymbol{\tau}_2}\cdots\big)_{\boldsymbol{\tau}_{(k-1)}}\Big)_{\boldsymbol{\tau}_k} = \Big(\cdots\big((\mathbf{A}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1})\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_2}\big)\cdots\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_{(k-1)}}\Big)\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)\cdots\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right).$$

En particular, si $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ son k sucesivas transformaciones elementales de $\mathbf{I}$ de orden n, entonces

$$\boxed{\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)\cdots\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right)} \tag{1.5}$$

es decir, *la matriz* $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ *es producto de matrices elementales*; y por tanto

$$\boxed{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \mathbf{A}\mathbf{E}} \qquad \text{donde} \quad \mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}.$$

☞ Puesto que la aplicación de una sucesión de transformaciones elementales

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\mathbf{E}, \qquad \text{donde} \quad \mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k},$$

es un producto de matrices, la aplicación de una sucesión de transformaciones elementales es un **operador lineal**.

EJERCICIO 21. Demuestre que la aplicación de una secuencia de transformaciones elementales es un *operador lineal*.

Notación Para describir la secuencia de k trasformaciones elementales de las *columnas* de $\mathbf{A}$ usaremos el esquema

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_1} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1} \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_2} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2} \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_3} \cdots \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_k} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} \quad \text{o agregando varios pasos} \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}_p}} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}_{p+1}\\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}_k}} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}.$$

Por ejemplo, la sucesión de transformaciones $\mathbf{A}_{\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&1&5\\7&0&4\end{bmatrix}$, se escribe como:

$$\begin{bmatrix}0&1&5\\7&0&4\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}0&3&5\\7&0&4\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}0&3&5\\7&14&4\end{bmatrix}; \qquad \text{o bien como} \qquad \begin{bmatrix}0&1&5\\7&0&4\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(3)\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}0&3&5\\7&14&4\end{bmatrix}.$$

Alternativamente podemos describir una secuencia de transformaciones elementales mediante productos de matrices elementales. Por ejemplo, para la secuencia anterior:

$$\begin{bmatrix}0&1&5\\7&0&4\end{bmatrix}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(3)\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} = \begin{bmatrix}0&1&5\\7&0&4\end{bmatrix}_{\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}0&1&5\\7&0&4\end{bmatrix}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big) = \begin{bmatrix}0&3&5\\7&14&4\end{bmatrix}.$$

1.12.1. Intercambios

Aunque aquí solo contemplamos como operaciones elementales las de *Tipo I* y *II*, en la mayoría de manuales de Álgebra Lineal aparece como tercera operación elemental el *intercambio*:

Intercambio: $\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$ → intercambia los vectores $\boldsymbol{i}$ésimo y $\boldsymbol{j}$ésimo.

Uso de la librería en Python

```
T( {1, 3} )                           # intercambia los vectores primero y tercero
```

Definición 26 (Matriz de intercambio)**.** *Llamamos matriz intercambio* $\mathbf{I}_{\underset{[p\rightleftharpoons q]}{\tau}}$ *de orden n a la matriz que resulta de intercambiar las columnas p y q de la matriz identidad de orden n.*

$$\left(\mathbf{I}_{\underset{[p\rightleftharpoons q]}{\tau}}\right)_{|j} = \begin{cases} \mathbf{I}_{|q} & si\ j=p \\ \mathbf{I}_{|p} & si\ j=q \\ \mathbf{I}_{|j} & si\ j\neq p,q \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad {}_{i|}\left(\mathbf{I}_{\underset{[p\rightleftharpoons q]}{\tau}}\right)_{|j} = \begin{cases} 1 & si\quad i=q \quad y \quad j=p \\ 1 & si\quad i=p \quad y \quad j=q \\ 1 & si\quad i=j\neq p,q \\ 0 & en\ el\ resto\ de\ casos \end{cases}.$$

$$\boxed{\textit{Por tanto } \mathbf{I}_{\underset{[p\rightleftharpoons q]}{\tau}} \textit{ es simétrica.}}$$

Aquí no consideramos el intercambio como una transformación elemental puesto que en realidad el intercambio es una sucesión de transformaciones elementales de **Tipo I** junto con una de **Tipo II** (que multiplica una de las dos columnas intercambiadas por -1). El siguiente ejercicio le pide que lo compruebe.

EJERCICIO 22.

(a) Mediante transformaciones elementales transforme la matriz identidad de orden 3 en la matriz intercambio $\mathbf{I}_{\underset{[1\rightleftharpoons 2]}{\tau}}$.

(b) Mediante el producto de matrices elementales de **Tipo I** y **II** obtenga la matriz de intercambio $\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}$ de orden n.

Uso de la librería en Python

```
i = 2; j= 5                                        # indicamos quienes son j e i
I(6) & T( [(-1,j),(-1,j,i),(1,i,j),(-1,j,i)] )    # aplicación de lista de transf. elem.
# I(6) & T( {i,j} )                                # es más sencillo aplicar intercambio
```

Así pues, la matriz intercambio $\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}$ se puede factorizar como producto de varias matrices **Tipo I** y una matriz **Tipo II**, que multiplica por menos uno una de las columnas intercambiadas.

Intercambio de las columnas de A:

$$\left(\mathbf{A}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}\right)_{|k} = \begin{cases} \mathbf{A}_{|j} &= \mathbf{AI}_{|j} \quad \text{si } k=i \text{ (es decir, en la posición } i \text{ se coloca la columna } j) \\ \mathbf{A}_{|i} &= \mathbf{AI}_{|i} \quad \text{si } k=j \text{ (es decir, en la posición } j \text{ se coloca la columna } i) \\ \mathbf{A}_{|k} &= \mathbf{AI}_{|k} \quad \text{en el resto de casos (se mantienen las columnas en su sitio)} \end{cases} = \mathbf{A}\left(\left(\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}\right)_{|k}\right).$$

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a&0&0\\ b&b&0\\ c&c&c \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{A}_{\underset{[1\rightleftharpoons 2]}{\tau}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[1\rightleftharpoons 2]}{\tau}}\right) = \begin{bmatrix} a&0&0\\ b&b&0\\ c&c&c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$ intercambia las columnas 1 y 2.

Uso de la librería en Python

```
A & T( {1,2} )                    # intercambio de las dos primeras columnas de A
```

Matrices permutación

Denotaremos una sucesión de intercambios con: $\underset{[\circlearrowleft]}{\tau}$ (con el símbolo "$\circlearrowleft$" se quiere denotar que el resultado final es un reordenamiento de los vectores).

Definición 27 (Matriz permutación)**.** *Llamamos matriz permutación* $\mathsf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}$ *de orden n a la matriz que resulta tras realizar un número arbitrario de intercambios entre las columnas de la matriz identidad de orden n.*

Uso de la librería en Python

```
I(5) & T( [{1,3}, {4,2}, {1,5}] )                    # ejemplo de matriz permutación
```

Por definición, una matriz permutación se puede factorizar como un producto de matrices intercambio. Pese a que las matrices intercambio $\mathsf{I}_{\underset{[\boldsymbol{p}\rightleftharpoons\boldsymbol{q}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ son simétricas, las matrices permutación $\mathsf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}$ *no* son simétricas en general.

☞ Para describir la secuencia de k trasformaciones elementales de las *columnas* de A usaremos la notación

$$\mathsf{A} \to \mathsf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1} \to \mathsf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2} \to \ldots \to \mathsf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}, \qquad \text{donde} \quad \mathsf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathsf{A}\big(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\big) = \mathsf{AE} \quad \text{y} \quad \mathsf{E} = \mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}.$$

El intercambio, $\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$, es una secuencia de transformaciones *Tipo I* junto a una de *Tipo II* (*que cambia el signo de uno de los vectores*). Las matrices intercambio, $\mathsf{I}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$, son simétricas y su cuadrado es la matriz identidad (“intercambiar dos veces los mismos vectores nos deja como al principio”).

Un reordenamiento $\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}$ de vectores es una secuencia de intercambios. Llamamos matriz permutación $\mathsf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}$, al resultado de aplicar una sucesión de intercambios sobre las columnas de I. En general las matrices permutación no son simétricas.

1.13. Eliminación por columnas

Definición 28. *Llamamos* pivote *de una columna no nula, a su primer componente no nulo, y* posición de pivote *al índice de la fila en la que está el pivote.*

Definición 29. *Decimos que la matriz* K es pre-escalonada*, si todas las componentes a la derecha de cada pivote son nulas.*

Ejemplo 5.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El pivote de la primera columna es 3, el de la tercera es 1, y el de la cuarta 7. La posición de pivote de la primera columna es 4 (cuarta fila), la de la tercera es 5 (quinta fila) y a de la última 2 (segunda fila).

1.13.1. Método de eliminación (o eliminación de “Izquierda a derecha”)

El método de eliminación consiste en *pre-escalonar* una matriz mediante transformaciones elementales, es decir, en lograr una matriz en la que las componentes a la derecha de cada pivote son nulas. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(6)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

El Teorema 1.13.1 afirma que toda matriz se puede *pre-escalonar* mediante transformaciones elementales. *¡Prácticamente el resto del curso descansa sobre en este teorema!* Lo vamos a demostrar por inducción; es decir, demostrando que si una propiedad es cierta para cualquier matriz de n columnas, también lo es para cualquier matriz de $n+1$ columnas.

Teorema 1.13.1 (Eliminación)**.** *Para* $\underset{m\times n}{\mathsf{A}}$ *existen k trasformaciones elementales tales que* $\mathsf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ *es* pre-escalonada.

Demostración. Por inducción sobre el número de filas de $\mathbf{A}$.

PASO DE INDUCCIÓN: Supongamos que $\mathbf{A}$ tiene $(m+1)$ filas y que el resultado es cierto para matrices de m filas. Es decir, que existe una sucesión $\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k$ de trasformaciones elementales de las columnas tal que

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \left[\begin{array}{ccc} & \mathbf{K} & \\ \hline b_{(m+1)1} & \cdots & b_{(m+1)n} \end{array}\right]$$

donde la submatriz $\mathbf{K}$ es *pre-escalonada*. Entonces la matriz obtenida ya está pre-escalonada si se da alguno de los siguientes *supuestos* en su última fila:

- *Supuesto 1.* La última fila es nula.
- *Supuesto 2.* Son nulos los componentes de la última fila que están bajo las columnas nulas de $\mathbf{K}$ (como en el caso de la segunda columna del Ejemplo 5 en la página anterior).
- *Supuesto 3.* De entre los componentes de la última fila que están bajo las columnas nulas de $\mathbf{K}$, solo hay uno distinto de cero y, además, las componentes a su derecha son nulas (como ocurre en la última fila del Ejemplo 5, donde 1 es el primer componente no nulo de aquellos que tienen una columna de ceros por encima).

Si no se da ninguno de estos supuestos necesariamente se da el siguiente caso:

1. Si $b_{(m+1)r} \neq 0$ es primer coeficiente no nulo de aquellos que están bajo las columnas nulas de $\mathbf{K}$, al restar a cada columna $j$ésima (con $j \geq r$) la columna $r$ésima multiplicada por $\left(\frac{b_{(m+1)j}}{b_{(m+1)r}}\right)$, sin modificar $\mathbf{K}$ (pues $\mathbf{K}_{|j} = \mathbf{0}$ para $j \geq r$), *eliminamos* los coeficientes a la derecha de $b_{(m+1)r}$; obteniendo una matriz que cumple el *Supuesto 3*.

BASE DE INDUCCIÓN: Se prueba del mismo modo que el paso de inducción, pero sin $\mathbf{K}$, es decir con $r = 1$ y $m = 0$. □

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix( [ [0,2,2], [1,-2,-8], [1,1,1] ] ) # Mat. descrita como lista de filas
L = Elim(A,1)                                 # Eliminación por columnas
```

1.13.2. Método de eliminación Gaussiano

Definición 30. *Decimos que la matriz* $\mathbf{L}$ es escalonada*, si toda columna que precede a una no nula* $\mathbf{L}_{|k}$ *no es nula y su posición de pivote es anterior a la posición de pivote de* $\mathbf{L}_{|k}$.

Por tanto, en una matriz escalonada primero aparecen las columnas no nulas, y a continuación las nulas (es decir, o no hay columnas nulas, o todas ellas están en el lado derecho de la matriz). Además, conforme nos movemos de izquierda a derecha, los pivotes aparecen cada vez más abajo, de manera que recorriendo la matriz de izquierda a derecha, los pivotes describen una escalera descendente (de ahí el nombre de matriz "escalonada").

Ejemplo 6.

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 7&0&0&0\\ 6&0&0&0\\ 0&3&0&0\\ 0&6&1&0 \end{bmatrix}$$

El pivote de la primera columna es 7, el de la segunda es 3 y el de la tercera 1. La posición de pivote de la primera columna es 2 (segunda fila), la de la segunda es 4 (cuarta fila) y la de la tercera es 5.

La eliminación Gaussiana consiste en escalonar una matriz mediante transformaciones elementales. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 0&2&2\\ 1&-2&-8\\ 1&1&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 0&2&0\\ 1&-2&-6\\ 1&1&0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{\substack{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(6)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 0&2&0\\ 1&0&0\\ 1&3&6 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 2&0&0\\ 0&1&0\\ 3&1&6 \end{bmatrix}$$

El Corolario 1.13.2 en la página siguiente afirma que toda matriz se puede escalonar mediante transformaciones elementales (procedimiento que denominamos método de eliminación de Gaussiano).

Corolario 1.13.2 (Eliminación Gaussiana)**.** *Para* $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ *existen* k *trasformaciones elementales tales que* $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ *es escalonada.*

Demostración. Basta pre-escalonar $\mathbf{A}$ y reordenar sus columnas para que los pivotes describan una escalera descendente, dejando las columnas nulas a la derecha de las no nulas. □

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix( [ [0,2,2], [1,-2,-8], [1,1,1] ] ) # Mat. descrita como lista de filas
L = ElimG(A,1)                                # Eliminación Gaussiana por columnas
```

1.13.3. Método de eliminación Gauss-Jordan

La eliminación gaussiana se pude llevar más lejos, obteniendo una *forma escalonada reducida.*

Definición 31. *Decimos que una matriz* $\mathbf{R}$ es escalonada reducida*, si es escalonada, los pivotes son unos y los componentes situados a derecha e izquierda de los pivotes son cero.*

Ejemplo 7*.*

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Teorema 1.13.3 (Eliminación Gauss-Jordan)**.** *Para* $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ *existen* k *trasformaciones elementales tales que* $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ *es escalonada reducida.*

Demostración. Basta escalonar la matriz, y con cada pivote eliminar el resto de componentes no nulos de su fila. Después se divide cada columna por el valor del pivote para lograr los "unos". □

Continuamos el ejemplo hasta lograr su forma escalonada reducida por columnas:

$$\begin{bmatrix}0&2&2\\1&-2&-8\\1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(6)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&0\\1&3&6\end{bmatrix}\xrightarrow[{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\3&1&6\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{1}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]\\ [(6)\mathbf{2}]}}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(\frac{1}{6})\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{1}{4})\mathbf{1}]\\ [(\frac{1}{6})\mathbf{2}]}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([ [0,2,2], [1,-2,-8], [1,1,1] ]) # Mat. descrita como lista de filas
R = ElimGJ(A,1)                             # Forma escalonada reducida
```

☞ Mediante transformaciones elementales se puede *pre-escalonar*, escalonar, o escalonar y reducir cualquier matriz.

- Una matriz $\mathbf{K}$ es *pre-escalonada* si las componentes a la derecha de cada pivote son cero.
- Una matriz $\mathbf{L}$ es *escalonada* si está pre-escalonada y los pivotes describen una escalera descendente (cada pivote está más bajo que el pivote de la columna anterior) y las columnas nulas (si las hubiere) están todas a la derecha de la matriz.
- Una matriz $\mathbf{R}$ es *escalonada reducida* si es escalonada, cada pivote es un "1" y el resto de componentes de su fila son ceros (la matriz identidad es una escalonada reducida que además es cuadrada).

1.14. Nota sobre las transformaciones elementales por filas.

En los manuales se suelen aplicar las transformaciones elementales sobre las filas. De hecho las usaremos para explicar el espacio nulo por la izquierda, y también para completar el cuadrado de una forma cuadrática (última lección del curso). Por eso vamos a ver brevemente las transformaciones sobre las filas de una matriz y su relación con las transformaciones sobre las columnas.

- Podemos realizar una transformación elemental de las filas de $\mathbf{A}$ transformando las columnas de $\mathbf{A}^\intercal$:

$$\left((\mathbf{A}^\intercal)_{\boldsymbol{\tau}}\right)^\intercal = \left((\mathbf{A}^\intercal)\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}\right)^\intercal = ((\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})^\intercal)\,(\mathbf{A}^\intercal)^\intercal = ((\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})^\intercal)\mathbf{A},$$

  donde $(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})^\intercal$ es una matriz elemental (por ser la transpuesta de una elemental).

- Por tanto, multiplicar por una matriz elemental *por la izquierda* realiza una transformación elemental de las filas.

- Lo anterior sugiere usar la notación ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$ para la transformación "$\boldsymbol{\tau}$" de las filas de $\mathbf{A}$;

$${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A} = \left((\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})^\intercal\right)\mathbf{A}$$

  y consecuentemente ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}$, para la transformación "$\boldsymbol{\tau}$" de las filas de $\mathbf{I}$; es decir,

$${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I} = (\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})^\intercal.$$

  (nuevamente la transposición supone cambiar de lado el subíndice). Así pues,

$${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A} = ({}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I})\,\mathbf{A}.$$

  ¡No solo eso!... Puesto que $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = (\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1})\cdots(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k})$ y puesto que el producto de matrices es asociativo, deducimos que la transpuesta de $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ es

$$\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^\intercal = \left((\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1})\cdots(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k})\right)^\intercal = (\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k})^\intercal\cdots(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_i})^\intercal = {}_{\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I}\cdots{}_{\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{I} = {}_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_2\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{I}$$

  Nótese cómo al transponer no solo cambiamos de lado los subíndices, sino también invertimos el orden de la secuencia de transformaciones (de la misma manera que también cambia el orden en el que se multiplican las matrices elementales).

- Esto sugiere denotar a la operación de invertir el orden de las transformaciones como una transposición, de manera que

$$(\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k)^\intercal = \boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1;$$

  así

$$\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^\intercal \quad = \quad {}_{(\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k)^\intercal}\mathbf{A}^\intercal \quad = \quad {}_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{A}^\intercal$$

  (la transpuesta del producto de matrices, que *es el producto de las transpuestas con el orden cambiado*).

Uso de la librería en Python

```
~T( [ (3,2), (2,7,3), (-1,4) ] ) # transposición invierte el orden de las transf.
```

- Nótese que aunque las matrices elementales *Tipo II* son simétricas ${}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}$, las matrices elementales *Tipo I* no lo son:

$$\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}} = {}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I} \neq \mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}} = {}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}.$$

- Al igual que una secuencia de transformaciones sobre las columnas se puede expresar de varias formas alternativas:

$$\mathbf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(3)\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{7}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{4}]}} = \mathbf{A}_{\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(2)\mathbf{7}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{A}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(2)\mathbf{7}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)$$

también tenemos formas alternativas para representar una secuencia de transformaciones sobre las *filas* de $\mathbf{A}$:

$$\underset{\substack{[(3)\mathbf{2}]\\[(2)\mathbf{7}+\mathbf{3}]\\[(-1)\mathbf{4}]}}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A} = \underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(2)\mathbf{7}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A} = \Big(\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}\Big)\Big(\underset{[(2)\mathbf{7}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}\Big)\Big(\underset{[(-1)\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}\Big)\mathbf{A}.$$

Nótese que cuando se trabaja con las filas, las primeras transformaciones en actuar son las que quedan más a la derecha de $\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(2)\mathbf{7}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}$, o más abajo de $\underset{\substack{[(3)\mathbf{2}]\\[(2)\mathbf{7}+\mathbf{3}]\\[(-1)\mathbf{4}]}}{\boldsymbol{\tau}}$.

- Fíjese que aunque $\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2\cdots\boldsymbol{\tau}_k$ no es un producto de matrices... ¡casi se puede interpretar como tal!... Tan solo falta que las transformaciones actúen sobre una matriz para saber el orden n de las matrices elementales, y entonces actúan como un producto de matrices elementales.
- Recuerde que en general ${}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I} \neq \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$.
- y que sin embargo ${}_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{I} = {}_{(\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k)^{\intercal}}\mathbf{I} = \left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^{\intercal}$ (fíjese en el orden de los subíndices).
- Para indicar que una secuencia de transformaciones actúa sobre las *filas* de una matriz, escribiremos las abreviaturas por debajo de las fechas:

$$\begin{bmatrix}0&2&2\\1&-2&-8\end{bmatrix}\xrightarrow[{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{1}]}]{}\!\!\!\!\!\!\!\!\underset{}{\boldsymbol{\tau}}\;\begin{bmatrix}1&-2&-8\\0&2&2\end{bmatrix}\xrightarrow[{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}]{}\begin{bmatrix}1&0&-6\\0&2&2\end{bmatrix}\xrightarrow[{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(\frac{1}{2})\mathbf{2}]}}]{}\begin{bmatrix}1&0&-6\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

- Nótese que incluso cuando operamos con las filas, la notación sigue siendo asociativa para el producto:

$$\left({}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}\right)\mathbf{B} = {}_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{AB}).$$

- Cuando se escalona operando por filas se emplea la siguiente definición de *pivote*:

Definición 32. *Llamamos* pivote *de una fila no nula, a su primer componente no nulo, y* posición de pivote *al índice de la columna en la que está el pivote. Y decimos que la matriz* $\mathbf{U}$ es escalonada*, si toda fila que precede a una no nula* ${}_{k|}\mathbf{U}$ *no es nula y su posición de pivote es anterior a la posición de pivote de* ${}_{k|}\mathbf{U}$.

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([ [0,2,2], [1,-2,-8], [3,6,-6] ])
L = ElimGF(A,1)                              # Escalonamiento operando con las filas
```

Lección 4

(Lección 4) T-1 Esquema de la Lección 4

Esquema de la *Lección 4*

- Transformaciones elementales
- Identificación de matrices singulares $n \times n$ con el método de eliminación (por columnas)
  - Matriz *singular* (menos de n pivotes)
  - Producto de *matrices elementales*

37

Resumen de la lección En esta lección se cuenta la mecánica del método de eliminación "de izquierda a derecha" (y de paso la eliminación Gaussiana, para la que es visualmente más sencillo saber cuando ha terminado el procedimiento). Ahora se presenta sin ningún propósito concreto (en la próxima lección se empleará para invertir una matriz, y dos lecciones más tarde para resolver sistemas de ecuaciones). La eliminación únicamente emplea de dos tipos de operaciones que llamamos transformaciones elementales. La lección comienza con ellas:

Transformaciones Elementales Tipo I. Suman a una columna un múltiplo de *otra* columna

Transformaciones Elementales Tipo II. Multiplican una columna por un número *distinto de cero*

A ellas se añade una tercera transformación: el intercambio de posición de dos columnas (que resulta ser equivalente a una sucesión de transformaciones *Tipo I* y *II* —se debe mostrar en la pizarra con la matriz identidad de orden 2, animando a los estudiantes a que vayan indicando los pasos necesarios... está bien que vean que hay varias formas de llegar al mismo resultado).

Una vez introducidos los dos tipos de transformaciones elementales, se propone escalonar una matriz tres por tres. Con este ejercicio se indica en qué consiste una *matriz (pre)escalonada* y a qué se denomina *pivote*. El pivote de una columna no nula es su primer componente no nulo. Una matriz está *pre-escalonada* si las componentes a la derecha de cada pivote son nulas, y está *escalonada* si además los pivotes de sus columnas describen una escalera descendente, dejando las columnas nulas (si hay) a la derecha de las columnas no nulas.

A continuación, se propone a los estudiantes que intenten escalonar varias matrices y comprobar si la forma escalonada tiene tres pivotes (o si falta alguno). La idea es darles unos minutos para que lo intenten y comprendan la mecánica (a lo largo del curso, casi todo se resuelve mediante la eliminación gaussiana... así que es fundamental que sepan la mecánica cuanto antes).

Después se muestra cómo describir una transformación elemental $\boldsymbol{\tau}$ de las columnas de $\mathbf{A}$ mediante un producto de matrices $\mathbf{A}\,(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})$; donde $(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})$ es la matriz elemental resultante de aplicar una sola transformación elemental $\boldsymbol{\tau}$ a las columnas de la matriz identidad. Es importante explicar la notación usada para denotar las transformaciones elementales, que también describe las correspondientes matrices elementales.

Por último, veremos que una sucesión de transformaciones elementales sobre las columnas de $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ se puede expresar como el producto de $\mathbf{A}$ por una matriz producto de todas las matrices elementales, $\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)\cdots\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right)$, empleadas en la sucesión. Llamaremos *permutación*, $\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}$, a una sucesión arbitraria de intercambios, de manera que $\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}$ será una reordenación de las columnas de $\mathbf{I}$; y veremos que, puesto que $\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}$ es una sucesión de intercambios, $\mathbf{A}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)$ reordena las columnas de $\mathbf{A}$.

La demostración de que toda matriz se puede escalonar mediante transformaciones elementales no se cuenta en clase, pero dicha demostración es básicamente una descripción del método de eliminación (véase la documentación de la librería de Python que acompaña a estas notas).

(Lección 4) $\boxed{\text{T-2}}$ **Transformaciones elementales de una matriz**

Tipo *I*: $\mathbf{A}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ ***(con*** $i \neq j$***)***

suma a la columna jésima λ veces columna $i$ésima

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 1 & -6 & 3\end{bmatrix}_{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}1 & -3 & -2\\ 1 & -6 & 1\end{bmatrix}$$

Tipo *II*: $\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ ***(con*** $\alpha \neq 0$***)***

multiplica la columna iésima por α

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 1 & -6 & 3\end{bmatrix}_{\underset{[(10)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}1 & -30 & 0\\ 1 & -60 & 3\end{bmatrix}$$

38

Transformación **Tipo I** de la matriz identidad de orden 4:

$$\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{4}+\mathbf{2}]}{\tau}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación **Tipo II** de la matriz identidad de orden 4:

$$\mathbf{I}_{\underset{[(5)\mathbf{3}]}{\tau}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Lección 4) T-3 **Intercambios entre columnas**

Intercambio de columnas:
$\mathbf{A}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\tau}}$ → intercambia las columnas i y j de $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\tau}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Es posible realizar un intercambio de dos columnas mediante una sucesión de transformaciones elementales 39

Pivotes y forma escalonada de una matriz A: llamamos *pivote* de una columna no nula $\mathbf{A}_{|k}$ al primer componente no nulo de dicha columna; y llamaremos posición de pivote al número de la fila en la que está dicho coeficiente.

Diremos que una matriz $\mathbf{K}$ está *pre-escalonada*, si los componentes que quedan a la derecha de cada pivote son nulos. Y diremos que una matriz $\mathbf{L}$ es *escalonada*, si está pre- escalonada, y toda columna que precede a una columna no nula $\mathbf{A}_{|k}$ es no nula y con una posición de pivote anterior a la posición de pivote de $\mathbf{A}_{|k}$. Por tanto, en una matriz escalonada no puede haber columnas nulas a la izquierda de columnas no nulas (es decir, o no hay columnas nulas, o todas ellas están en el lado derecho de la matriz). Además, conforme nos movemos de izquierda a derecha, los pivotes cada vez aparecen más abajo (i.e., en filas con índices cada vez mayores). Así, recorriendo la matriz de izquierda a derecha, los pivotes describen una escalera descendente (de ahí el nombre de matriz "escalonada").

(Lección 4) T-4 **Eliminación y forma pre-escalonada de una matriz**

- *Pivote*: es el primer componente no nulo de una columna.
- *Eliminación*: modifica una matriz hasta que los *componentes a la derecha de cada pivote son cero*
- Buscamos los pivotes fila a fila

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\tau} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\tau} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

40

(Lección 4) T-5 Eliminación

Algoritmo de Eliminación
modifica una matriz mediante una secuencia de *transformaciones elementales*

Objetivo
obtener una forma *(pre)escalonada* de la matriz

- *pre-escalonada*: las componentes a la derecha de cada pivote son nulas.
- *escalonada*: las columnas nulas están a la derecha y los pivotes tienen una disposición descendente.

Siempre es posible (pre)escalonar una matriz mediante eliminación

Rango (r): número de pivotes de cualquiera de sus formas pre-escalonadas

Matriz *singular* si su forma (pre)escalonada tiene columnas nulas ($r < n$)

41

(Lección 4) T-6 Eliminación Gaussiana: ¿Cuando no hay suficientes pivotes?

matrices $n \times n$: **singulares** si no logramos n pivotes $\rightarrow$ ☹

$$\begin{bmatrix}0&1&3\\4&2&8\\1&1&1\end{bmatrix}$$

¿Y si la matriz fuera? $\begin{bmatrix}1&3&0\\2&6&4\\1&1&1\end{bmatrix}$

¿Y si la matriz fuera? $\begin{bmatrix}1&3&0\\2&6&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

¿Y si la matriz fuera? $\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&-4\end{bmatrix}$

42

(Lección 4) T-7 Producto de Matrices: matrices elementales

Restar 3 veces la primera columna de la segunda $\qquad \underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&3&0\\2&8&4\\1&1&1\end{bmatrix}}_{\mathsf{A}}\underbrace{\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}}_{\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&4\\1&-2&1\end{bmatrix}}_{\mathsf{A}_{\boldsymbol{\tau}}}$$

La matriz $\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ se de denomina *matriz elemental*:

$$\mathsf{A}\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}}\right)=\mathsf{A}_{\boldsymbol{\tau}}$$

Esta matriz elemental $\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ en particular se denota como $\mathsf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}$

$$\mathsf{A}\left(\mathsf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\mathsf{A}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}$$

43

(**Lección 4**) **T-8** **Producto de Matrices: matrices elementales**

Restar 2 veces la segunda columna de la tercera $\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&4\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&-2&5\end{bmatrix}$$

Esta matriz elemental $\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ en particular se denota como $\mathsf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$

$$\mathsf{A}\left(\mathsf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\mathsf{A}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$$

$\boxed{44}$

(**Lección 4**) **T-9** **Eliminación mediante matrices elementales**

$$\mathsf{A}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\left(\mathsf{A}\left(\mathsf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\right)\left(\mathsf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\mathsf{L}$$

producto asociativo (Proposición 1.8.2 en la página 47): podemos encontrar matriz que realiza todas las operaciones "de golpe"

$$\mathsf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\ {[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}}=\mathsf{A}\left(\left(\mathsf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathsf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\right)=\mathsf{L}$$

¿Qué efecto tiene el producto AI? $\boxed{45}$

Como el producto de matrices es asociativo (véase Proposición 1.8.2 en la página 47),

$$\mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\ {[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}}=\mathsf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\left(\mathsf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathsf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}= \qquad =\mathsf{E}$$

entonces

$$\mathsf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\ {[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}}=\mathsf{A}\left(\mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\ {[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}}\right)=\mathsf{AE}=\begin{bmatrix}1&3&0\\2&8&4\\1&1&1\end{bmatrix}\qquad =$$

(**Lección 4**) **T-10** **¿Cómo volver de L a A? Inversas**

¿Cómo deshacer el primer paso? (fue restar 3 veces la primera columna de la segunda)

$$\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$$\mathsf{I}_{\underset{[(-\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\quad\text{“deshace”}\quad\mathsf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$$

¿Qué deshace $\mathsf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}$?

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$\boxed{46}$

(Lección 4) **T-11** Matrices de intercambio

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}$$

¿Y si queremos intercambiar las filas?

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$$

¡El producto de matrices no es conmutativo!
El intercambio de las columnas i y j de $\mathbf{I}$ produce una matriz intercambio $\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$. 47

Para realizar operaciones sobre las columnas la matriz multiplica por la derecha, para hacerlo con las filas la matriz multiplica por la izquierda

El producto de matrices no es conmutativo.

(Lección 4) **T-12** Permutaciones

El producto arbitrario entre matrices intercambio $\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ es una matriz permutación $\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}$.

$$\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}} = \text{Matriz identidad } \mathbf{I} \text{ con columnas reordenadas}$$

Veamos el caso 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

¿Cuantos posibles reordenamientos o permutaciones hay?

¿Qué obtenemos con el producto de dos matrices permutación?

48

Fin de la lección

Problemas de la Lección 4

(L-4) PROBLEMA 1.

(a) ¿Cuáles son las matrices $\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\cdot)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)$, $\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\cdot)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)$ y $\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\cdot)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)$ que transforman $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ a una forma triangular $\mathbf{L}$?

(b) Multiplique dichas matrices elementales $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ para obtener una matriz $\mathbf{E}$ que realice la eliminación gaussiana: $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$.

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 24 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) PROBLEMA 2. Considere la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

¿Para que valor(es) de c no es posible encontrar tres pivotes (para qué valor de c la matriz es singular)?

(L-4) PROBLEMA 3. Suponga las siguientes matrices de orden 3 por 3.

(a) $\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ resta la columna 1 de la columna 2, y luego $\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ intercambia las columnas 2 y 3. ¿Qué matriz $\mathbf{E} = \left(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)$ realiza ambos cambios a la vez?

(b) $\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ intercambia las columnas 2 y 3 y luego $\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ resta la columna 1 de la columna 3. ¿Qué matriz $\mathbf{N} = \Big(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)$ realiza ambos cambios a la vez? Explique por qué las matrices $\mathbf{E}$ y $\mathbf{N}$ son iguales en ambos casos, pero las matrices elementales $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ son distintas.

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 28 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) Problema 4. Las matrices elementales $\mathbf{I}_{\underset{[(\cdot)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ y $\mathbf{I}_{\underset{[(\cdot)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ reducen la matriz $\mathbf{A}$ a su forma escalonada por columnas. Encuentre la matriz $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$ es dicha forma escalonada (triangular inferior), si $\mathbf{A}$ es

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(L-4) Problema 5. Aunque aquí sólo contemplamos como transformaciones elementales las de *Tipo I* y *II*, en la mayoría de manuales de Álgebra Lineal aparece como tercera operación elemental el *intercambio*:

$$\mathbf{A}_{\underset{[p\rightleftharpoons s]}{\boldsymbol{\tau}}} \to \text{intercambia las columnas } p \text{ y } s \text{ de } \mathbf{A}.$$

Demuestre que un intercambio de columnas es en realidad una sucesión transformaciones elementales de *Tipo I* y *II*. Hágalo transformando la matriz identidad $\underset{2\times 2}{\mathbf{I}}$ en $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mediante transformaciones elementales por columnas.

(L-4) Problema 6. Escriba las matrices de 3 por 3 que producen los siguientes pasos de eliminación:

(a) $\mathbf{I}_{\underset{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ resta 5 veces la columna 1 de la columna 2.

(b) $\mathbf{I}_{\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ resta 7 veces la columna 2 de la columna 3.

(c) la matriz permutación $\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}$ que intercambia las columna 1 y 2, y después las columnas 2 y 3.

(Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) Problema 7. En referencia a las matrices del Problema 6:

(a) Al aplicar $\underset{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$ y luego $\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$ a las columnas de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ se obtiene

$$\mathbf{A}_{\underset{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = [\quad,\qquad,\quad].$$

(b) Pero al aplicar $\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$ antes que $\underset{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$ se obtiene

$$\mathbf{A}_{\underset{[(-7)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-5)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = [\quad,\qquad,\quad].$$

(c) Cuando se aplica $\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$ primero, la columna ____ no se ve afectada por la columna ____. ¡Este hecho será es central para que la factorización LU funcione como lo hace!

(Strang, 2007, ejercicio 23 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) Problema 8. ¿Qué matriz $\mathbf{M}$ transforma el vector $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir $\boldsymbol{v}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$; y también el vector $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, es decir $\boldsymbol{w}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$?

(L-4) Problema 9. Hemos visto que para una matriz de intercambio, $\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\boldsymbol{\tau}}}$, el producto $\mathbf{A}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)$ tiene los mismos elementos que $\mathbf{A}$, pero las columnas están intercambiadas. ¿Qué pasaría si alteramos el orden del producto, es decir, si multiplicamos $\Big({}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\Big)\mathbf{A}$? Verifique su respuesta para el caso 2 por 2.

No deje de hacer los ejercicios de las secciones teóricas de esta lección.

Fin de los Problemas de la Lección 4

LECCIÓN 5: Matrices inversas

Una matriz $\mathbf{A}$ de orden m por n es *invertible por la derecha* si existe otra matriz $\mathbf{B}$ de orden n por m tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$$

Y una matriz $\mathbf{A}$ de orden m por n es *invertible por la izquierda* si existe otra matriz $\mathbf{B}$ de orden n por m tal que

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

1.15. Matrices invertibles

Definición 33. *Se dice que* $\mathbf{A}$ *de orden* n *(cuadrada) es* invertible *(o* tiene inversa*) si existe otra matriz* $\mathbf{B}$ *del mismo orden tal que* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

Cuando la matriz no tiene inversa *se dice que es* singular.

(es decir, $\mathbf{A}$ es invertible si lo es por ambos lados). Pues bien, si $\mathbf{A}$ es invertible su matriz inversa es única:

Proposición 1.15.1 (La matriz inversa es única)**.** *Si* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{B'}$ *verifican*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \qquad y \qquad \mathbf{AB'} = \mathbf{B'A} = \mathbf{I}$$

entonces $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{B'}$ *son iguales.*

Demostración. En efecto: $\quad \mathbf{B} = \mathbf{BI} = \mathbf{B}\underbrace{(\mathbf{AB'})}_{\mathbf{I}=\mathbf{AB'}} = \underbrace{\mathbf{I}}_{\mathbf{BA}=\mathbf{I}}\mathbf{B'} = \mathbf{B'}.$ □

Así pues, ya podemos dar una definición de *matriz inversa* de una matriz $\mathbf{A}$ invertible (y por tanto cuadrada):

Definición 34 (Matriz inversa)**.** *Si* $\mathbf{A}$ *es invertible, denotaremos con* $\mathbf{A}^{-1}$ *a la única matriz tal que* $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. *Además diremos que* $\mathbf{A}^{-1}$ *es* *la matriz inversa* *de* $\mathbf{A}$.

A continuación veremos varias propiedades de las matrices inversas. En particular, que el *producto de matrices invertibles* es invertible y que la transpuesta de una *matriz invertible* también es invertible, y que si una matriz tiene alguna fila o columna nula, entonces no es invertible.

EJERCICIO 23. Demuestre las siguientes proposiciones:

(a)

Proposición 1.15.2. *Si las matrices* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$, *ambas de orden* n, *tienen inversa, entonces:* $\boxed{(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.}$

(b)

Proposición 1.15.3. *Si* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ *tienen inversa, entonces* $\boxed{(\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1} \cdots \mathbf{A}_1^{-1}.}$

Pista. $\Big(\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_k\Big)^{-1} = \Big(\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k)\Big)^{-1} = (\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k)^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$

(c)

Proposición 1.15.4. *Sea* $\mathbf{A}$ *de orden* n *y sea* $\mathbf{B}$ *también de orden* n *e invertible. Entonces* $\mathbf{AB}$ *es invertible si y solo si* $\mathbf{A}$ *es invertible.*

(d)

Proposición 1.15.5. *Sea* $\mathbf{A}$ *invertible de orden* n *y sea* $\mathbf{B}$ *también de orden* n. *Entonces* $\mathbf{AB}$ *es invertible si y solo si* $\mathbf{B}$ *es invertible.*

(e)

Proposición 1.15.6. *Si* $\mathbf{A}$ *de orden* n *tiene inversa entonces la inversa de* $\mathbf{A}^\intercal$ *es:* $\boxed{(\mathbf{A}^\intercal)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\intercal.}$

Pista. Recuerde que $\mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}^\intercal = (\mathbf{AB})^\intercal$ y aplíquelo a $\mathbf{A}^\intercal(\mathbf{A}^{-1})^\intercal$ y a $(\mathbf{A}^{-1})^\intercal\mathbf{A}^\intercal$.

(f)

Proposición 1.15.7. *Si* $\mathbf{A}$ *tiene alguna columna (o fila) nula entonces es* singular *(no tiene inversa).*

☞ Una matriz $\mathbf{A}$ es invertible si existe otra matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. La inversa es única y se denota con $\mathbf{A}^{-1}$.

- el producto de matrices invertibles es invertible: $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- la transpuesta de una matriz invertible es invertible: $\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\intercal}$.
- Si alguna fila o columna de $\mathbf{A}$ es nula la matriz es *singular* (no tiene inversa).

☞ ¡No todas las matrices cuadradas son invertibles!

¿Qué hace que una matriz cuadrada sea invertible?... Todo tiene que ver con las matrices elementales. Veamos primero que las transformaciones elementales (y las matrices elementales) son invertibles.

Inversa de las matrices (transformaciones) elementales.

Resulta que la definición de las transformaciones elementales implica que son reversibles. Por ejemplo, sumar el doble de la primera columna a la tercera, y luego restar el doble de la primera columna de la tercera, nos deja como al principio:

$$\mathbf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}\right)\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}\right) = \mathbf{A}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Algo similar ocurre cuando multiplicamos una columna por $\alpha \neq 0$ y luego dividimos la misma columna por α.

$$\mathbf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(5)\mathbf{2}]}\substack{\boldsymbol{\tau}\\[\left(\frac{1}{5}\right)\mathbf{2}]}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(5)\mathbf{2}]}}\right)\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(1/5)\mathbf{2}]}}\right) = \mathbf{A}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/5&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

En general, $\mathbf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}} = \mathbf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}} = \mathbf{A}$ y $\mathbf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(\alpha)\boldsymbol{i}]}\substack{\boldsymbol{\tau}\\[\left(\frac{1}{\alpha}\right)\boldsymbol{i}]}} = \mathbf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[\left(\frac{1}{\alpha}\right)\boldsymbol{i}]}\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(\alpha)\boldsymbol{i}]}} = \mathbf{A}$, es decir,

$$\mathbf{A}_{(\boldsymbol{\tau}^{-1})\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau}^{-1})} = \mathbf{A}.$$

Recordando que $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2} = \left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)_{\boldsymbol{\tau}_2} = \left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_2}$ podemos expresar la linea anterior como

$$\left(\mathbf{A}_{(\boldsymbol{\tau}^{-1})}\right)\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}} = \left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}\right)\mathbf{I}_{(\boldsymbol{\tau}^{-1})} = \mathbf{A};$$

si en particular $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ tenemos que

$$\left(\mathbf{I}_{(\boldsymbol{\tau}^{-1})}\right)\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}} = \left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}\right)\mathbf{I}_{(\boldsymbol{\tau}^{-1})} = \mathbf{I}.$$

Así pues, llegamos al siguiente teorema

Teorema 1.15.8. *Si $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ es una matriz elemental, existe otra matriz elemental $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}$, tal que $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}^{-1}} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}^{-1}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{I}$.*

En la práctica:

$$\boxed{\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}}\right)\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}}\right) = \left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}}\right)\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}}\right) = \mathbf{I}} \quad \text{y} \quad \boxed{\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[\left(\frac{1}{\alpha}\right)\boldsymbol{i}]}}\right)\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(\alpha)\boldsymbol{i}]}}\right) = \left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(\alpha)\boldsymbol{i}]}}\right)\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[\left(\frac{1}{\alpha}\right)\boldsymbol{i}]}}\right) = \mathbf{I}}.$$

Como cada trasformación elemental es invertible (reversible), también lo es cualquier sucesión de transformaciones elementales (por ejemplo un intercambio). Pero en general hay que tener en cuenta que la última trasformación realizada ha de ser la primera en ser invertida (como cuando uno se pone los calcetines y luego los zapatos... si después se quiere descalzar debe quitarse primero los zapatos y terminar por los calcetines); así, si se realizan una serie de trasformaciones elementales en determinado orden, se deshacen en el orden inverso —véase la Proposición 1.15.3.

☞ Cualquier matriz $\mathbf{E}$ de la forma $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ es invertible por ser producto de matrices elementales, en particular,

$$\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1}}\right) = \left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)\cdots\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right)\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k^{-1}}\right)\cdots\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1^{-1}}\right) = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k\,\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1}} = \mathbf{I};$$

por lo que podemos denotar $\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1}$ como $\left(\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k\right)^{-1}$. Así pues, $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1}} = \mathbf{I}_{\left(\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k\right)^{-1}}$.

Uso de la librería en Python

```
t    = T([ (3,2), (2,1,3), (-1,3), (-2,1,2) ])     # Secuencia de transformaciones
tInv = t**(-1)                                     # Inversa de la secuencia de transf.

A    = I(4) & t                                    # A: producto de elementales
B    = I(4) & t**(-1)                              # B es la inversa de A
A*B                                                # Comprobación de que son inversas
```

Relación entre la matrices invertibles y matrices (transformaciones) elementales.

☞ Las siguientes proposiciones son muy importantes. Nos indican cuando es $\mathbf{A}$ invertible y cuando no lo es; y qué hay que mirar para saber si una matriz es invertible o no:

- La primera indica que si $\mathbf{A}$ es producto de matrices elementales, entonces es invertible.
- La segunda que si $\mathbf{A}$ tiene columnas que son combinación lineal del resto, entonces no es invertible (y por tanto no es producto de elementales).
- Por último, que $\mathbf{A}$ es invertible si y solo si tiene una forma escalonada (o pre-escalonada) que es invertible.

Ejercicio 24. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a)

Proposición 1.15.9. *Si $\mathbf{A}$ es el producto de matrices elementales, existe $\mathbf{B}$ (también producto de matrices elementales) tal que* $\mathbf{AB} = \mathbf{I} = \mathbf{BA}$ *(es decir, si $\mathbf{A}$ es el producto de matrices elementales entonces es invertible).*

(b)

Proposición 1.15.10. *Si alguna columna de $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ es combinación lineal del resto de columnas (o alguna fila de $\mathbf{A}$ es combinación lineal del resto de filas), $\mathbf{A}$ es* singular *(no tiene inversa).*

(c) Por último, como toda matriz se puede escalonar mediante transformaciones elementales, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.15.11. *$\mathbf{A}$ de orden n es invertible si y solo si es invertible cualquiera de sus formas (pre)escalonadas.*

Matrices (pre)escalonadas con inversa.

☞ Ahora ya sabemos que una matriz es invertible si y solo si también lo es cualquiera de sus formas (pre)escalonadas $\mathbf{K}$, pero no sabemos cómo descubrir si $\mathbf{K}$ es invertible. Como primer paso para encontrar un algoritmo que calcule la inversa de una matriz, demostraremos que una matriz cuadrada y escalonada, $\mathbf{K}$, que *no tiene columnas nulas*, se puede transformar en la matriz identidad $\mathbf{I}$ mediante trasformaciones elementales

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{K}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \mathbf{I} \qquad \text{(Teorema 1.15.12).}$$

Consecuentemente, $\mathbf{K}^{-1}$ es el producto de las matrices elementales; $\boxed{\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}$.

Puesto que cualquier matriz (pre)escalonada sin columnas nulas tiene pivotes en todas las columnas, cualquier matriz *cuadrada*, (pre)escalonada y sin columnas nulas, tiene pivotes en todas sus *filas* (cada pivote ocupa una fila y columna distintas, y sus n columnas tienen pivote).

Teorema 1.15.12. *Si una matriz $\mathbf{K}$, de orden n, es (pre)escalonada y sin columnas nulas, existen k trasformaciones elementales tales que* $\mathbf{L}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{K}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \mathbf{I}$ *donde* $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ *es de orden n.*

Demostración. Basta aplicar la eliminación Gauss-Jordan sobre $\mathbf{K}$ (Teorema 1.13.3 en la página 69), pues su forma escalonada reducida es la matriz identidad de orden n (pues $\mathbf{K}$, cuadrada de orden n, tiene n pivotes). □

Uso de la librería en Python

```
L = Matrix( [[5,0,0], [2,-2,0], [6,9,3]] )
R = ElimGJ(L,1)                                  # Forma Escalonada Reducida
```

Matrices (pre)escalonadas con inversa

Corolario 1.15.13. *Si* K *es (pre)escalonada y cuadrada, las siguientes propiedades son equivalentes*

1. K *no tiene columnas nulas*
2. K *es un producto de matrices elementales*
3. K *tiene inversa*

❶⇒ ❷ Si K no tiene columnas nulas, existen transf. elementales $\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k$ tales que

$$\begin{aligned} \mathsf{I} &= \mathsf{K}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathsf{K}\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) \quad \Rightarrow \\ \mathsf{I}\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^{-1} &= \mathsf{K}\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \\ \left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^{-1} &= \mathsf{K} \end{aligned}$$

donde $\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^{-1} = \mathsf{I}_{(\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k)^{-1}} = \mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1}}$ es un producto de matrices elementales.

❷⇒ ❸ *¡Ya se sabe! Proposición 1.15.9 en la página anterior*

❸⇒ ❶ *¡Ya se sabe! Proposición 1.15.7 en la página 79*

Uso de la librería en Python

```
L = Matrix( [[5,0,0], [2,-2,0], [6,9,3]] )
R = ElimGJ(L,1)                                # Forma Escalonada Reducida
I(L.n) & ( T(R.pasos[1]) )**-1                 # Producto de matrices elementales
```

Corolario 1.15.14 (Caracterización de las matrices que tienen inversa)**.** *Dada* A *de orden* n*, las siguientes propiedades son equivalentes*

1. *El resultado de (pre)escalonar* A *no tiene columnas nulas.*
2. A *es producto de matrices elementales.*
3. A *tiene inversa.*

Demostración.

❶⇒ ❷ Por el Teorema 1.13.2 sabemos que existen k trasf. elem. tales que $\mathsf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathsf{A}\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \mathsf{K}$ es (pre)escalonada. Si $\underset{n\times n}{\mathsf{K}}$ es (pre)escalonada y sin columnas nulas, entonces es producto de p matrices elementales $\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}'_1\cdots\boldsymbol{\tau}'_p}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) &= \mathsf{K} = \left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}'_1\cdots\boldsymbol{\tau}'_p}\right) \quad \Rightarrow \\ \mathsf{A}\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^{-1} &= \left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}'_1\cdots\boldsymbol{\tau}'_p}\right)\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \\ \mathsf{A} &= \left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}'_1\cdots\boldsymbol{\tau}'_p}\right)\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^{-1} \end{aligned}$$

donde tanto $\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}'_1\cdots\boldsymbol{\tau}'_p}$ como $(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k})^{-1}$ son producto de matrices elementales.

❷⇒ ❸ ¡Ya se sabe! Proposición 1.15.9 en la página anterior

❸⇒ ❶ ¡Ya se sabe! Proposiciones 1.15.11 en la página anterior y 1.15.7 en la página 79

□

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix( [ [2,-1,0], [-1,2,-1], [0,-1,2] ] )
p = ElimGJ(A).pasos
print( T(p[1]) )            # secuencia de las transformaciones aplicadas a las columnas
I(A.n) & T(p[1])            # es la inversa de A
# A * ( I(A.n) & T(p[1]) )  # descomente el principio de esta linea para comprobarlo
```

1.16. Caracterización de la invertibilidad por un lado

EJERCICIO 25. Demuestre las siguientes proposiciones:

(a)

Proposición 1.16.1. *Si* $\mathbf{B}$ *de orden* n *no es invertible y* $\mathbf{A}$ *es de orden* n*, entonces* $\mathbf{AB}$ *no es invertible.*

(b)

Proposición 1.16.2. *Si* $\mathbf{A}$ *de orden* n *no es invertible y* $\mathbf{B}$ *es de orden* n*, entonces* $\mathbf{AB}$ *no es invertible.*

(c)

Corolario 1.16.3. *Si* $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$*; y* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son cuadradas, entonces tanto* $\mathbf{A}$ *como* $\mathbf{B}$ *son invertibles, y consecuentemente* $\mathbf{B}$ *es la inversa de* $\mathbf{A}$.

☞ Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son cuadradas y del mismo orden; y $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son una la inversa de la otra.

☞ ¡Ya tenemos todas las piezas para diseñar un algoritmo que encuentre la inversa de una matriz de rango completo!

La eliminación permite encontrar una forma pre-escalonada de toda matriz (Teorema 1.13.1 en la página 67)

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p} = \mathbf{K},$$

y si $\mathbf{K}$ no tiene columnas nulas, aplicando Gauss-Jordan, se puede continuar con las transformaciones elementales hasta reducir $\mathbf{K}$ en $\mathbf{I}$ (Teorema 1.15.12 en la página 81)

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\tau}_{(p+1)}\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{I}.$$

Por tanto, la sucesión de k transformaciones elementales $\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p\;,\;\boldsymbol{\tau}_{(p+1)}\cdots\boldsymbol{\tau}_k$ transforma $\mathbf{A}$ en $\mathbf{I}$

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \mathbf{I};$$

es decir, si $\mathbf{K}$ no tiene columnas nulas, entonces $\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}$.

Por otra parte, si $\mathbf{K}$ tiene columnas nulas entonces $\mathbf{A}^{-1}$ no existe.

Uso de la librería en Python

```
A**-1                                            # Devuelve la matriz inversa de A
```

☞ Ahora bien, aplicar las k transformaciones elementales $\boldsymbol{\tau}_i$ a las columnas de $\mathbf{A}$ hasta tener $\mathbf{I}$, y después hacer el producto de todas las matrices elementales $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_i}$ empleadas en el proceso puede ser bastante pesado. ¿Hay una forma de hacer ambas cosas a la vez (la transformación de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{I}$ y el producto de todas las matrices $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$)?

!Desde luego que si! El secreto está en "alargar" las columnas de $\mathbf{A}$ con la matriz identidad...

1.17. Secuencias de transformaciones elementales. II

Es sencillo de ver que si $\boldsymbol{\tau}$ es una transformación elemental (y $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ de orden n), y si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen n columnas (el mismo número de columnas) entonces si, consideramos la matriz resultante de concatenar $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ (alargando las columnas de $\mathbf{A}$ poniendo las de $\mathbf{B}$ por debajo), $\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right]$, resulta que aplicar una transformación elemental a las columnas de esta nueva matriz "alargada" es equivalente a transformar tanto $\mathbf{A}$ como $\mathbf{B}$ y concatenar las matrices resultantes:

$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right] \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}} \left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right]_{\boldsymbol{\tau}} = \left[\frac{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}}{\mathbf{B}_{\boldsymbol{\tau}}}\right]$, de manera que la columna $j$ésima $\left[\frac{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}}{\mathbf{B}_{\boldsymbol{\tau}}}\right]_{|j}$ es la concatenación de columnas $\left(\frac{(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}})_{|j}}{(\mathbf{B}_{\boldsymbol{\tau}})_{|j}}\right)$.

Lo mismo ocurre si aplicamos una secuencia de k transformaciones elementales a las columnas:

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right]_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \left[\frac{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}{\mathbf{B}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}\right].$$

Por tanto, si antes de realizar las trasformaciones "pegamos" por debajo de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ la matriz $\mathbf{I}$ de orden 3 y aplicamos algunas transformaciones:

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(3)\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 3 & 5 \\ 7 & 14 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{A}_{\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}}{\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}}\right],$$

entonces sin necesidad de multiplicar sabemos que

$$\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \text{y que} \qquad \mathbf{A}_{\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 7 & 14 & 4 \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos calcular fácilmente la inversa de $\mathbf{A}$: basta con "pegar" la matriz identidad debajo y tratar de transformar la matriz $\mathbf{A}$ en la matriz identidad mediante transformaciones elementales.

Ejemplo 8.

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 15 & 9 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-5)\mathbf{3}+\mathbf{1}] \\ [(-3)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\frac{1}{5})\mathbf{1}] \\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{2}] \\ [(\frac{1}{3})\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}{\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}\right].$$

Puesto que $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \mathbf{I}$, entonces $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 0 \\ -1 & 3/2 & 1/3 \end{bmatrix}$.

☞

Método para calcular de inversa de una matriz

1. Mediante transformaciones elementales sobre las columnas encuentre una forma escalonada reducida de $\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]$.
2. Si en el resultado obtenido $\left[\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}\right]$ la matriz escalonada $\mathbf{R}$ tiene alguna columna nula, $\mathbf{A}$ no tiene inversa.
3. En caso contrario, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ es la inversa de $\mathbf{A}$.

Uso de la librería en Python

```
InvMat(A,1)                  # Calcula la inversa por eliminación Gauss-Jordan
```

1.18. Inversa de una matriz triangular

Definición 35. *Decimos que una matriz* $\mathbf{L}$ *es triangular inferior cuando todos los componentes por encima de la diagonal principal son nulos, es decir, si* $l_{ij} = 0$ *cuando* $i \leq j$.

Por ejemplo

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mm} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mp} & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{y} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & n_{(m-1)n} \\ n_{m1} & n_{m2} & \cdots & n_{mn} \end{bmatrix}.$$

Aunque las tres matrices son triangulares inferiores, $\mathbf{L}$ es cuadrada, $\mathbf{M}$ tiene más columnas que filas y $\mathbf{N}$ tiene más filas que columnas. Tenga en cuenta que los componentes de la diagonal principal y por debajo pueden tomar cualquier valor (por eso el nombre de "inferior"). Por tanto, ¡una matriz nula $\mathbf{0}$ siempre es triangular inferior!

Definición 36. *Decimos que una matriz* $\mathbf{U}$ *es triangular superior cuando todos los componentes por debajo la diagonal principal son nulos, es decir, si* $u_{ij} = 0$ *cuando* $i \geq j$.

Es decir, una matriz es triangular superior si su transpuesta es triangular inferior. Tenga en cuenta que tanto los componentes de la diagonal principal, y como por encima, pueden tomar cualquier valor (por eso el nombre de "superior"). Por tanto, una matriz nula $\mathbf{0}$ también es triangular superior.

Las matrices *diagonales* son simultáneamente triangulares superiores y triangulares inferiores.

☞ Una matriz triangular no puede tener ceros en la diagonal principal y ser invertible.

Veámos primero que la matriz de más abajo no es invertible, pues es imposible encontrar un vector (x, y, z) tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ a & 0 & \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

la variable x necesariamente debe ser cero, y con la segunda y tercera columnas de $\mathbf{A}$ no podemos obtener la segunda componente del vector del lado derecho. Y ahora vamos con el caso general...

Proposición 1.18.1. *Una matriz triangular de rango completo no tiene ceros en la diagonal principal.*

Demostración. Veamos que si una matriz cuadrada y triangular tiene un cero en la posición $j$ésima de su diagonal entonces no es invertible, y por tanto es singular. Supongamos que $\mathbf{A}$, de orden n, es triangular *inferior* (como la matriz del ejemplo anterior) y con un cero en la posición $j$ésima de su diagonal. Entonces no puede existir una matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, pues es imposible que $\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j}) = \mathbf{I}_{|j}$:

- como las primeras $j-1$ componentes de $\mathbf{I}_{|j}$ son nulas, o bien las primeras $j-1$ filas de $\mathbf{A}$ son nulas (en cuyo caso $\mathbf{A}$ es singular), o bien las primeras $j-1$ componentes de $\mathbf{B}_{|j}$ son necesariamente cero. Es decir, en la combinación $\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$ las primeras $j-1$ columnas de $\mathbf{A}$ necesariamente se multiplican por cero.
- pero como $\mathbf{A}$ es triangular inferior y con un cero en la componente ${}_{j|}\mathbf{A}_{|j}$, el resto de columnas de $\mathbf{A}$ (las columnas $j$ésima en adelante) tienen un cero en su $j$ésima componente. Por tanto, es imposible lograr un 1 en la componente ${}_{j|}\mathbf{I}_{|j}$. Es decir, no existe la matriz $\mathbf{B}$, y por tanto $\mathbf{A}$ es singular.

Si $\mathbf{A}$ es triangular *superior* de orden n y con un cero en la posición $j$ésima de su diagonal, su transpuesta es triangular inferior y, por el argumeno de más arriba, singular. Como el rango de $\mathbf{A}$ y de $\mathbf{A}^\intercal$ son iguales, $\mathbf{A}$ también es singular. □

Consecuentemente, los pivotes de una matriz cuadrada triangular inferior de *rango completo* están situados en la diagonal principal. Así que una matriz invertible y triangular inferior está necesariamente escalonada y los elementos de su diagonal son distintos de cero. Por tanto, para encontrar su inversa únicamente necesitamos aplicar los dos tipos de operaciones empleadas en la eliminación Gauss-Jordan: *Primero la eliminación* "de derecha a izquierda" para anular (en cada fila) los componentes situados a la izquierda de la diagonal, y *Segundo la normalización de los pivotes* dividiendo cada columna por el valor de su pivote para obtener la forma escalonada reducida $\mathbf{R}$ (fíjese en el Ejemplo 8 en la página anterior).

$$\left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{I}}\right] \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_1,\ldots,\boldsymbol{\tau}_n} \left[\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}^{-1}}\right].$$

Como las transformaciones aplicadas en la eliminación "de derecha a izquierda" (y en la normalización) no modifican las componentes nulas a la derecha (y por encima) de la diagonal principal de la matriz identidad, llegamos a la siguiente conclusión:

Proposición 1.18.2. *La inversa de una matriz triangular inferior es triangular inferior.*

Además, puesto que la inversa de transpuesta es la transpuesta de la inversa, tenemos el siguiente corolario:

Proposición 1.18.3. *La inversa de una matriz triangular superior es triangular superior.*

1.19. Rango de una matriz

☞ Antes hemos visto que si una matriz es invertible, ninguna de sus formas pre-escalonadas tiene columnas nulas. Una generalización de este resultado da lugar a la definición de rango que usaremos aquí.

Resulta que todas las formas pre-escalonadas de $\mathbf{A}$ tienen el mismo número de columnas nulas. Puesto que una forma escalonada $\mathbf{L}$ se obtiene reordenando las columnas de una forma pre-escalonada $\mathbf{K}$, ambas tienen el mismo número de pivotes. Así pues, para simplificar el argumento, usaremos formas escalonadas:

Supongamos que $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ y $\mathbf{E'} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}'_1\cdots\boldsymbol{\tau}'_p}$ son dos matrices invertibles tales que $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$ y $\mathbf{AE'} = \mathbf{L'}$ son escalonadas. Veamos que las posiciones de los pivotes de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L'}$ son coincidentes.

Por simetría basta comprobar que la posición de pivote de cualquier columna no nula de $\mathbf{L'}$ coincide con la posición de pivote el de alguna columna no nula de $\mathbf{L}$[15]. Para ello tendremos en cuenta que como

$$\mathbf{L'} = \mathbf{AE'} = \mathbf{LE}^{-1}\mathbf{E'}, \qquad \text{pues } \mathbf{A} = \mathbf{LE}^{-1},$$

por tanto las columnas de $\mathbf{L'}$ son combinación lineal de las de $\mathbf{L}$. Además, por ser $\mathbf{L}$ escalonada, la posición del pivote de cualquier combinación lineal de columnas de $\mathbf{L}$ coincide con la posición de pivote de la primera columna que esté multiplicada por un número no nulo:

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & * & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & * & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & * & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \star \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + \star \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ** \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{donde "$*$" son pivotes y "$\star \neq 0$".}$$

Así pues, la posición del pivote de cualquier combinación lineal de columnas de $\mathbf{L}$ coincide con la posición del pivote de alguna de columna de $\mathbf{L}$,... y por tanto la posición de pivote de cada columna de $\mathbf{L'}$ (que es una combinación de las columnas de $\mathbf{L}$) coincide con la posición de pivote de alguna columna $\mathbf{L}$ (y lo mismo se puede decir de las columnas de $\mathbf{L}$ respecto de las de $\mathbf{L'}$, pues $\mathbf{L} = \mathbf{L'}\left(\mathbf{E'}\right)^{-1}\mathbf{E}$). Concluimos que como las posiciones de los pivotes de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L'}$ son coincidentes, el numero de columnas no nulas de $\mathbf{L}$ coincide con el número de columnas no nulas de $\mathbf{L'}$. Este resultado nos permite dar la siguiente definición:

Definición 37 (Rango de una matriz)**.** *El rango de* $\mathbf{A}$ *es el número de columnas no nulas de cualquiera de sus formas pre-escalonadas, es decir, el número de pivotes de cualquiera de sus formas pre-escalonadas.*

1.19.1. Algunas propiedades del rango de una matriz

Proposición 1.19.1. *Si* $\mathbf{E}$ *es invertible, entonces* $\operatorname{rango}(\mathbf{A}) = \operatorname{rango}(\mathbf{AE})$.

Demostración. Con ambas matrices se pueden obtener las mismas formas pre-escalonadas, pues si $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}'_1\cdots\boldsymbol{\tau}'_p}$, entonces

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \left(\mathbf{AEE}^{-1}\right)_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = (\mathbf{AE})_{(\boldsymbol{\tau}'_1\cdots\boldsymbol{\tau}'_p)^{-1}\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}.$$

□

[15] "por simetría" me refiero a que siguiendo el mismo razonamiento también se llega a que la posición del pivote de cualquier columna no nula de $\mathbf{L}$ coincide con la posición del pivote el de alguna columna no nula de $\mathbf{L'}$

Proposición 1.19.2. *El rango de* $\mathbf{AB}$ *es menor o igual que el de* $\mathbf{B}$*.*

Demostración. Sea $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ tal que $\mathbf{BE} = \mathbf{L}$ es escalonada. Entonces

- Aplicando la proposición anterior tenemos que en particular: $\operatorname{rango}(\mathbf{AB}) = \operatorname{rango}((\mathbf{AB})\mathbf{E})$.
- Por otra parte tenemos que $(\mathbf{AB})\mathbf{E} = \mathbf{A}(\mathbf{BE}) = \mathbf{AL}$, y si k es el número de columnas nulas de la matriz escalonada $\mathbf{L}$, las últimas k columnas de $\mathbf{AL}$ son necesariamente nulas.
- Si realizamos transformaciones elementales sobre las columnas de $\mathbf{AL}$ de manera que no modificamos las k últimas, obtendremos una forma escalonada con al menos k columnas nulas. Por tanto, el rango de $\mathbf{AL}$ es menor o igual que el rango de $\mathbf{L}$, por lo que finalmente concluimos que

$$\operatorname{rango}(\mathbf{AB}) = \operatorname{rango}(\mathbf{ABE}) = \operatorname{rango}(\mathbf{AL}) \leq \operatorname{rango}(\mathbf{L}) = \operatorname{rango}(\mathbf{B}).$$

□

Proposición 1.19.3. *Si* $\mathbf{E}$ *es invertible, entonces* $\operatorname{rango}(\mathbf{EA}) = \operatorname{rango}(\mathbf{A})$.

Demostración. La proposición anterior nos indica que $\operatorname{rango}(\mathbf{EA}) \leq \operatorname{rango}(\mathbf{A})$, pero también nos indica que $\operatorname{rango}\left(\mathbf{E}^{-1}(\mathbf{EA})\right) \leq \operatorname{rango}(\mathbf{EA})$; por tanto $\operatorname{rango}(\mathbf{A}) \leq \operatorname{rango}(\mathbf{EA})$. Así, los rangos de $\mathbf{A}$ y de $\mathbf{EA}$ son iguales. □

Proposición 1.19.4. *Si* $\mathbf{R}$ *es escalonada reducida, entonces* $\operatorname{rango}(\mathbf{R}) = \operatorname{rango}(\mathbf{R}^{\intercal})$.

Demostración. Mediante k transformaciones elementales de las filas es posible anular las componentes por debajo de los pivotes de $\mathbf{R}$, de manera que todas las componentes de ${}_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{R} = \mathbf{S}$ son nulas salvo, los pivotes que siguen siendo los mismos unos. Por tanto, $\mathbf{S}$ también es escalonada reducida y con el mismo rango que $\mathbf{R}$. Sea $\mathbf{E} = {}_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{I}$, aplicando la Proposición 1.19.1 en la primera igualdad y la Proposición 1.19.3 en la ultima, concluimos que

$$\operatorname{rango}(\mathbf{R}^{\intercal}) = \operatorname{rango}(\mathbf{R}^{\intercal}\mathbf{E}^{\intercal}) = \operatorname{rango}(\mathbf{S}^{\intercal}) = \operatorname{rango}(\mathbf{S}) = \operatorname{rango}(\mathbf{ER}) = \operatorname{rango}(\mathbf{R}).$$

□

Proposición 1.19.5. $\operatorname{rango}(\mathbf{A}) = \operatorname{rango}(\mathbf{A}^{\intercal})$.

Demostración. Sea $\mathbf{E}$ invertible tal que $\mathbf{AE} = \mathbf{R}$ es escalonada reducida, entonces (aplicando la Proposición 1.19.3 en la última igualdad) tenemos que: $\operatorname{rango}(\mathbf{A}) = \operatorname{rango}(\mathbf{AE}) = \operatorname{rango}(\mathbf{R}) = \operatorname{rango}(\mathbf{R}^{\intercal}) = \operatorname{rango}(\mathbf{E}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal}) = \operatorname{rango}(\mathbf{A}^{\intercal})$. □

Y por último

Proposición 1.19.6. *El rango de* $\mathbf{AB}$ *es menor o igual que el de* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. $\operatorname{rango}(\mathbf{AB}) = \operatorname{rango}(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal}) \leq \operatorname{rango}(\mathbf{A}^{\intercal}) = \operatorname{rango}(\mathbf{A})$. □

Uso de la librería en Python

```
Elim(A).rango   # rango es una atributo de la clase Elim

A.rango()       # rango() es un método de la clase Matrix
```

Rango completo y rango completo por filas o por columnas Una matriz cuyas formas pre-escalonadas tienen pivote en todas las columnas se dice que es *de rango completo por columnas*; y si tienen pivote en todas las filas se dice que es *de rango completo por filas*. Una matriz que es de rango completo tanto por filas como por columnas (y que por tanto es cuadrada) se dice que es *de rango completo*. Así pues, por el Corolario 1.15.13, *una matriz de rango completo es invertible*, pues es cuadrada y sin columnas nulas (por tener todas pivote).

Lección 5

(Lección 5) T-1 Esquema de la Lección 5

Esquema de la *Lección 5*

- Inversa de $\mathbf{A}$
- Gauss-Jordan / encontrar $\mathbf{A}^{-1}$
- Inversa de $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A}^{\intercal}$

51

Resumen de la lección Damos la definición inversa de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$: es otra matriz $\mathbf{B}$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Es importante indicar que no toda matriz cuadrada tiene inversa... y se ofrecen dos argumentos. La imposibilidad de combinar las columnas de $\mathbf{A}$ para generar las columnas de $\mathbf{I}$ si las columnas de $\mathbf{A}$ están alineadas. Y se demuestra que es imposible que se puedan combinar las columnas de $\mathbf{A}$ de manera que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, con $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, y que al mismo tiempo exista $\mathbf{A}^{-1}$.

Se muestra que encontrar la inversa de $\mathbf{A}$ de orden n implica resolver n sistemas de ecuaciones (encontrar n combinaciones de las columnas de $\mathbf{A}$, una por cada columna de $\mathbf{I}$ de orden n).

La aparente "magia" del método de Gauss es que es posible resolver a la vez esos n sistemas de ecuaciones. Para ello basta alargar las columnas de $\mathbf{A}$ y aplicar Gauss, recordando que cada transformación elemental es multiplicar por una matriz elemental.

Se muestra la inversa de un producto de matrices invertibles y la inversa de la transpuesta de una matriz invertible.

Por último, se da una caracterización de las matrices invertible directamente relacionada con el método de Gauss y las matrices elementales (la demo formal aparece en las secciones de referencia, pero tras haber aplicado Gauss con un ejemplo en la pizarra, se pueden ilustrar las ideas que hay debajo de esta caracterización circular).

(Lección 5) T-2 Inversa de una matriz (matrices cuadradas)

$\mathbf{A}$ cuadrada y de orden n tiene inversa (o que es invertible) si existe otra matriz $\mathbf{B}$ (del mismo orden) tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Entonces

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}.$$

No todas las matrices tiene inversa

Las matrices cuadradas sin inversa se denominan *singulares*

52

(Lección 5) T-3 **Caso singular (no inversa)**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

¿Es posible encontrar una matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$?
...columnas de $\mathbf{I}$ deben ser combinaciones lineales de columnas de $\mathbf{A}$... pero ambas columnas apuntan en la misma dirección. Así pues

$$\boxed{\text{esta matriz es singular}}$$

53

(Lección 5) T-4 **Inversa de una matriz: caso singular (no inversa)**

En este caso se puede encontrar $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pero si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ para $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ $\Rightarrow$ no puede haber $\mathbf{A}^{-1}$

$$\boxed{\text{Suponer } \mathbf{A}^{-1} \text{ nos lleva a una } \textit{contradicción}}$$

$$\text{Si } \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ y } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} : \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Cuando existe $\mathbf{A}^{-1}$...

la única solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

54

(Lección 5) T-5 **Calculando la matriz inversa**

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es resolver m sistemas (de m ecuaciones cada uno)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

55

(Lección 5) T-6 **Gauss-Jordan: resolviendo dos sistemas de golpe**

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan por columnas

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{cc}1&3\\2&7\\\hline 1&0\\0&1\end{array}\right]\rightarrow \qquad\qquad \rightarrow \qquad\qquad =$$

56

(Lección 5) T-7 **Gauss-Jordan: ¿Por qué funciona?**

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{cc}1&3\\2&7\\\hline 1&0\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \qquad\qquad \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \qquad\qquad =\left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{E}}\right]$$

es decir,

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]_{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2}=\left[\frac{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2}}{\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2}}\right]=\left[\frac{\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2}\right)}{\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2}}\right]=\left[\frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{E}}\right]=\left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{E}}\right],$$

donde $\mathbf{E}=\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2}=\mathbf{I}_{\underset{\substack{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}{\boldsymbol{\tau}}}$

$\boxed{\text{¿quien es } \mathbf{E}\text{?}}$

57

$$\text{donde}\quad \mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix},\quad \text{y donde}\quad \mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix};$$

y por tanto

$$\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-3\\-2&1\end{bmatrix}.$$

Puesto que $\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)=\mathbf{I}$, entonces $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ es la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

$\boxed{\text{Dicho de otro modo, si } \mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}=\mathbf{I} \text{ entonces } \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}=\mathbf{A}^{-1}.}$

También podemos calcular la inversa operando con las filas (como en la mayoría de los libros de texto). En este caso multiplicamos por la izquierda para operar con las filas .

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}]=\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&7&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}]{}\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow[{\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}]{}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&7&-3\\0&1&-2&1\end{array}\right]=\left[{}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{A}\,|\,{}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I}\right]=\left[\mathbf{I}\,|\,{}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I}\right].$$

¿Quién es la matriz ${}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I}$ del lado derecho? El razonamiento es el mismo:

$${}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}]=\left[\left({}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I}\right)\mathbf{A}\,|\,{}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I}\right]=\left[\mathbf{I}\,|\,{}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I}\right]$$

Puesto que $\left({}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I}\right)\mathbf{A}=\mathbf{I}$, entonces ${}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I}=\mathbf{A}^{-1}$.

(Lección 5) T-8 **Inversa de un producto**

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ invertibles y del mismo orden. Entonces $(\mathbf{AB})$ es invertible ¿Cómo es $(\mathbf{AB})^{-1}$?
Probemos con $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})$:

$$\mathbf{AB}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right) =$$

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)\mathbf{AB} =$$

58

(Lección 5) T-9 **Inversa de la matriz transpuesta**

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

Hagamos la transpuesta en ambos lados

$$\left((\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}\right)\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$$

por tanto

$$\boxed{\text{la inversa de } \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \text{ es} \qquad\qquad\qquad}$$

59

(Lección 5) T-10 **Matrices intercambio y matrices permutación**

¿Son invertibles las matrices intercambio, $\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}$?

60

EJERCICIO 26. Demuestre que $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\tau}}\right)^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\tau}}\right) == \mathbf{I}$.

(Lección 5) T-11 **Caracterización de las matrices que tienen inversa**

Dada $\mathbf{A}$ de orden n, las siguientes propiedades son equivalentes

1. La forma (pre)escalonada $\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k} = \mathbf{L}$ no tiene columnas nulas.
2. $\mathbf{A}$ tiene inversa.
3. $\mathbf{A}$ es producto de matrices elementales.

$$\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\right) = \mathbf{I} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A} = \left(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\right)^{-1}$$

donde $\left(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\right)^{-1} = \mathbf{I}_{(\tau_1\cdots\tau_k)^{-1}} = \mathbf{I}_{\tau_k^{-1}\cdots\tau_1^{-1}}$

61

Resumen de la lección

- Si dos o más columnas de una matriz cuadrada A están alineadas (si unas son combinación lineal de las otras) la matriz es singular.
- Si una matriz cuadrada A tiene menos pivotes que columnas es singular.
- Si el sistema de n ecuaciones con n incógnitas $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene más de una solución la matriz cuadrada A es singular.
- Encontrar la matriz inversa de $\underset{n\times n}{\mathsf{A}}$ es resolver n sistemas de ecuaciones.
- La matriz inversa de A es el producto de las matrices elementales (operaciones elementales) que transforman A en I.

$$\left[\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{I}}\right]_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \left[\frac{\mathsf{A}\left(\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)}{\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}\right] = \left[\frac{\mathsf{AE}}{\mathsf{E}}\right] = \left[\frac{\mathsf{I}}{\mathsf{E}}\right] \Longrightarrow \mathsf{E} = \mathsf{A}^{-1}, \qquad \text{donde} \quad \mathsf{E} = \mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}.$$

- $\left(\mathsf{AB}\right)^{-1} = \mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1}$.
- $\left(\mathsf{A}^{-1}\right)^{\mathsf{T}} = \left(\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} \equiv \mathsf{A}^{-\mathsf{T}}$.
- $\left(\underset{[\circlearrowleft]}{\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{\mathsf{T}}\left(\underset{[\circlearrowleft]}{\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \mathsf{I} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\underset{[\circlearrowleft]}{\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{\mathsf{T}} = \left(\underset{[\circlearrowleft]}{\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{-1}$.

Fin de la lección

Problemas de la Lección 5

(L-5) PROBLEMA 1. Aplique el método de Gauss-Jordan para invertir las siguientes matrices

(a)

$$\mathsf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathsf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathsf{A_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 2.

(a) Si A es invertible y $\mathsf{AB} = \mathsf{AC}$, demuestre rápidamente que $\mathsf{B} = \mathsf{C}$.
(b) Si $\mathsf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, encuentre un ejemplo con $\mathsf{AB} = \mathsf{AC}$, pero $\mathsf{B} \neq \mathsf{C}$.

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 3. Calcule la inversa de la matriz genérica 2×2

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

¿Qué condiciones sobre a, b, c, y d aseguran que existe la inversa?

(L-5) PROBLEMA 4. Calcule las inversas de las siguientes matrices, usando Gauss-Jordan.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}; \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(L-5) PROBLEMA 5. Si la matriz 3 por 3 A es tal que $\mathsf{A}_{|1} + \mathsf{A}_{|2} = \mathsf{A}_{|3}$, demuestre que $\underset{3\times 3}{\mathsf{A}}$ no es invertible de estas dos formas alternativas:

(a) Encuentre una solución $\boldsymbol{x}$ diferente de cero de $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(b) La eliminación preserva la condición $columna1 + columna2 = columna3$. Explique por qué no hay un tercer pivote.

(Strang, 2007, ejercicio 26 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 6. Encuentre las inversas de

(a)

$$\mathsf{A_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathsf{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathsf{A_3} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 7. Calcule la inversa de

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

¿Para qué valores de a y b no hay inversa?

(Strang, 2007, ejercicio 42 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 8. Encuentre E^2, E^8 y E^{-1} si $\quad \mathsf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.5.)

(L-5) PROBLEMA 9. Dada la matriz de permutación

$$\mathsf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

escriba la matriz $\mathsf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}^{-1}$. ¿Que otra relación tiene con la matriz P (aparte de ser su inversa)?

(L-5) PROBLEMA 10. La matriz A de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad I mediante las siguientes operaciones elementales sobre las columnas (en este orden):

$\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 4 veces columna 1 de la columna 2.

$\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 3 veces columna 1 de la columna 3.

$\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta columna 3 de la columna 2.

(a) Escriba $\mathbf{A}^{-1}$ en términos de operaciones con matrices elementales $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$. Calcule la matriz $\mathbf{A}^{-1}$.
(b) ¿Cuál es la matriz original $\mathbf{A}$?

(Basado en *MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2006*)

(L-5) PROBLEMA 11. La matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad $\mathbf{I}$ mediante las siguientes tres operaciones elementales sobre las filas (en el siguiente orden):

$\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 4 veces fila 1 de la fila 2.

$\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 3 veces fila 1 de la fila 3.

$\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta fila 3 de la fila 2.

(a) Escriba $\mathbf{A}^{-1}$ en términos de las matrices elementales $\mathbf{E}$. Calcule la matriz $\mathbf{A}^{-1}$.
(b) ¿Cuál es la matriz original $\mathbf{A}$?

(*MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2006*)

(L-5) PROBLEMA 12.

(a) Encuentre la inversa de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Encuentre la inversa de la siguiente matriz usando el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

(Poole, 2004, ejercicio 36, 38 y 59 del conjunto de problemas 3.3.)

(L-5) PROBLEMA 13. Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ matrices cuadradas. Justifique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

(a) Si $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$ entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.
(b) $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$.

(L-5) PROBLEMA 14. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 0 & 2a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Demuestre que $\mathbf{A}$ es invertible para todo valor del parámetro a.
(b) Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ cuando $a = 0$.

(L-5) PROBLEMA 15. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcule $\mathbf{A}^{-1}$.

(L-5) PROBLEMA 16. Encuentre las inversas, si existen, de las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(L-5) PROBLEMA 17. Tan solo hay un número finito ($n!$) de matrices de permutación de dimensión $n \times n$. Además, cualquier potencia de una matriz permutación es también una matriz permutación. Emplee este hecho para demostrar que $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^r = \mathbf{I}$ para algún número entero r.

(L-5) PROBLEMA 18. Si cada columna de $\mathbf{A}$ es un múltiplo de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ siempre es un múltiplo de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Escriba un ejemplo de 3 por 3. ¿Cuántos pivotes se producen por eliminación?
(Strang, 2007, ejercicio 26 del conjunto de problemas 1.4.)

Fin de los Problemas de la Lección 5

Tema 2

Espacios vectoriales y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

LECCIÓN 6: Introducción a los espacios y subespacios vectoriales

2.1. Espacios vectoriales y subespacios vectoriales

En la Lección 1 definimos la suma y el producto por escalares para $\mathbb{R}^n$ (*el conjunto de listas ordenadas de n números reales*)

$$\big(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\big)_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i} \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda\boldsymbol{b}\big)_{|i} = \lambda\big(\boldsymbol{b}_{|i}\big),$$

y comprobamos que verificaban las siguientes propiedades:

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
2. $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$
3. $\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$
4. $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$
5. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$
6. $(\lambda+\eta)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\eta\boldsymbol{a}$
7. $\lambda(\eta\boldsymbol{a})=(\lambda\eta)\boldsymbol{a}$
8. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

También definimos la suma y el producto por escalares para $\mathbb{R}^{m\times n}$ (*el conjunto de matrices de orden m por n*)

$$\big(\mathbf{A}+\mathbf{B}\big)_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j} \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda\mathbf{A}\big)_{|j} = \lambda\big(\mathbf{A}_{|j}\big),$$

y comprobamos que verificaba las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$
2. $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$
3. $\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$
5. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$
6. $(\lambda+\eta)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\eta\mathbf{A}$
7. $\lambda(\eta\mathbf{A})=(\lambda\eta)\mathbf{A}$
8. $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$

A primera vista es evidente que subyace una estructura común entre $\mathbb{R}^n$ (y las correspondientes operaciones de suma de vectores y su producto por escalares) y el conjunto de matrices $\mathbb{R}^{m\times m}$ (y las correspondientes operaciones de suma de matrices y su producto por escalares). Esa estructura se denomina *espacio vectorial*.

Definición 38. *Un* espacio vectorial *es un conjunto $\mathcal{V}$ de objetos*[1] *que llamamos* vectores *junto con dos operaciones*

- *La* suma *asocia a cualquier par de vectores de $\mathcal{V}$ con otro vector de $\mathcal{V}$. Es decir, al sumar dos vectores obtenemos un vector.*
- *El* producto por escalares *asocia a cualquier par formado por un escalar (número real) y un vector con otro vector de $\mathcal{V}$. Es decir, al multiplicar un vector por un escalar obtenemos un vector.*

que verifican las siguientes ocho propiedades:

1. $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$
2. $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$
3. *Hay un único vector $\vec{0}$ tal que $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$*
4. *Hay un único vector $-\vec{x}$ tal que $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$*
5. $a(\vec{x}+\vec{y})=a\vec{x}+a\vec{y}$
6. $(a+b)\vec{x}=a\vec{x}+b\vec{x}$
7. $(a\cdot b)\vec{x}=a(b\vec{x})$
8. $1\vec{x}=\vec{x}$

Así que para cualquier entero n, el conjunto de listas ordenadas $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial, y para cualquier par de enteros $m\times n$ el conjunto de matrices $\mathbb{R}^{m\times n}$ es un espacio vectorial. En el caso particular de $\mathbb{R}^n$ usamos los símbolos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$, $\mathbf{0}$, etc. para denotar las *listas ordenadas de números reales* (i.e., los vectores de $\mathbb{R}^n$); y en el caso particular de $\mathbb{R}^{m\times n}$ usamos $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{0}$, etc. para las matrices (i.e., los vectores de $\mathbb{R}^{m\times n}$).

[1] objetos matemáticos: como lo son los números, las listas de números, matrices, funciones, polinomios, variables aleatorias, etc.

La definición de espacio vectorial es muy abstracta ya que nada se dice sobre la naturaleza de los objetos que constituyen el conjunto $\mathcal{V}$ ni sobre cómo están definidas las operaciones *suma de vectores* y *producto de un escalar por un vector* (véase el último problema de esta Lección 6).

Para denotar espacios vectoriales genéricos usaremos caracteres como: $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{V}$ ó $\mathcal{W}$.

En este curso nos centramos en $\mathbb{R}^n$, pero debe saber que hay muchos conjuntos con estructura de espacio vectorial. Por ejemplo: el conjunto de funciones (con las operaciones de suma y producto habituales) es un espacio vectorial, y lo mismo ocurre con el conjunto de polinomios, el conjunto de sucesiones, el conjunto de variables aleatorias, etc.

☞ Hemos visto que el conjunto de matrices m por n y las listas ordenadas de $\mathbb{R}^n$ comparten una estructura común: la estructura de *espacio vectorial*.

Dicha estructura consiste en un conjunto junto con las operaciones de la suma de vectores y producto de un escalar por un vector; y que verifican las mismas propiedades que ya vimos para la suma y producto para escalares en la Lección 1. A los elementos de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ se los denomina *vectores* de $\mathcal{V}$.

Hay algunas propiedades muy elementales que se cumplen en cualquier espacio vectorial $\mathcal{V}$ y que se deducen de las ocho propiedades descritas más arriba. Por ejemplo, para el vector nulo $\vec{0} \in \mathcal{V}$ y cualquier escalar a:

$$a\vec{0} = a(\vec{0} + \vec{0}) = a\vec{0} + a\vec{0}.$$

Restando $-(a\vec{0})$ a ambos lados deducimos que $\vec{0} = a\vec{0}$. De manera similar para el escalar 0 y cualquier vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$:

$$0\vec{x} = (0 + 0)\vec{x} = 0\vec{x} + 0\vec{x}$$

Restando $-(0\vec{x})$ a ambos lados deducimos que $\vec{0} = 0\vec{x}$. Por último $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$, puesto que

$$\vec{x} + (-1)\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1)\vec{x} = (1 - 1)\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}.$$

Así, acabamos de demostrar el siguiente teorema

Teorema 2.1.1. *Si $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial*

1. $\vec{0} = a\vec{0}$ *para* $\vec{0} \in \mathcal{V}$ *y* $a \in \mathbb{R}$.
2. $\vec{0} = 0\vec{x}$ *para* $\vec{x} \in \mathcal{V}$ *y* $0 \in \mathbb{R}$.
3. $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$ *para todo* $\vec{x} \in \mathcal{V}$.

Particularizando a los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{m\times n}$ tenemos que:

En $\mathbb{R}^n$

1. $\mathbf{0} = a\mathbf{0}$ para $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$.
2. $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{x}$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y $0 \in \mathbb{R}$.
3. $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^{m\times n}$

1. $\mathbf{0} = a\mathbf{0}$ para $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $a \in \mathbb{R}$.
2. $\mathbf{0} = 0\mathbf{A}$ para $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $0 \in \mathbb{R}$.
3. $(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$ para todo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

En la Lección 2 definimos las *combinaciones lineales* en $\mathbb{R}^n$. Ahora daremos una definición de combinación lineal para un espacio vectorial $\mathcal{V}$ genérico:

Definición 39 (Combinación lineal)**.** *Sea* $\left[\vec{z}_1; \vec{z}_2; \ldots; \vec{z}_n\right]$ *un sistema de vectores de* $\mathcal{V}$*. Llamamos combinación lineal de dichos vectores a la suma de dichos vectores multiplicados por escalares:*

$$a_1\vec{z}_1 + a_2\vec{z}_2 + \cdots + a_n\vec{z}_n$$

donde los a_i denotan a los distintos coeficientes de la combinación lineal.

2.1.1. Subespacios

Hay ciertos subconjuntos de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ que (con las mismas operaciones) son espacios vectoriales por si mismos. A dichos subconjuntos se los denomina *subespacios*.

Definición 40. *Un subconjunto $\mathcal{W}$ no vacío de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ es un* subespacio *de $\mathcal{V}$ si es cerrado para la suma y el producto de por escalares. Es decir, si para todo $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}$ en $\mathcal{W}$ y todo escalar a,* *1.* $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ *esta en el subespacio* $\mathcal{W}$ *2.* $a\boldsymbol{x}$ *esta en el subespacio* $\mathcal{W}$

Así, para demostrar que $\mathcal{W}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$ basta comprobar que es cerrado tanto para la suma como para el producto por escalares. También basta demostrar que *es cerrado para las combinaciones lineales*, pues si para todo $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}$ en $\mathcal{W}$ y para todo $a, b \in \mathbb{R}$

$$a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y} \quad \text{esta en el subespacio } \mathcal{W}$$

entonces con $a=b=1$ satisfacemos la primera condición de la definición y con $b=0$ la segunda. Por tanto, decir que *el conjunto es cerrado para las combinaciones lineales* es equivalente a decir que el conjunto es cerrado para la suma y el producto por escalares.

☞ Un subespacio es un espacio vectorial que está contenido dentro de otro espacio vectorial (compruébelo).

Para comprobar si $\mathcal{W}$ es subespacio basta verificar que es cerrado para la suma y el producto por escalares (es decir, que es cerrado para las combinaciones lineales).

Ejemplos

- Los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya primera componente es cero

  Si sumamos dos vectores con primera componente nula, obtenemos otro vector con la primera componente nula; y lo mismo ocurre si multiplicamos por un escalar un vector con primera componente nula.

- Las funciones reales ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) que además son continuas

  Si sumamos dos funciones reales y continuas, obtenemos otra función real y continua; y lo mismo ocurre si multiplicamos una función real y continua por un escalar.

- Variables aleatorias con esperanza cero

Como curiosidad, nótese que como todo conjunto está contenido en si mismo, todo espacio vectorial es un *subespacio* de si mismo. Así, son subespacios de $\mathcal{V}$, todo $\mathcal{V}$ y también el subconjunto $\{\vec{0}\}$ que contiene únicamente el vector cero.

La intersección de subespacios es un subespacio (como afirma el siguiente teorema), sin embargo la unión de subespacios suele no ser cerrada para la suma (piense en la unión del conjunto de *vectores de* $\mathbb{R}^3$ *cuya primera componente es cero* y el conjunto de *vectores de* $\mathbb{R}^3$ *cuya última componente es cero*, si sumamos un vector del primer grupo con uno del segundo, generalmente obtendremos un vector en el que no son cero ni la primera componente, ni la última (al sumar nos "salimos" del conjunto).

Teorema 2.1.2. *Si* $\mathcal{S}$ *es un espacio vectorial y* $\mathcal{V}_1$ *y* $\mathcal{V}_2$ *son subespacios de* $\mathcal{S}$*, entonces también es subespacio la intersección de* $\mathcal{V}_1$ *y* $\mathcal{V}_2$

$$\mathcal{W} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2.$$

Demostración. Basta probar que la intersección es cerrada para las combinaciones lineales. Para ello tomamos a y b de $\mathbb{R}$ y $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de $\mathcal{W}$. Como $\mathcal{W}$ es la intersección, entonces $\vec{x}$ e $\vec{y}$ pertenecen tanto a $\mathcal{V}_1$ como $\mathcal{V}_2$.

- Por ser $\mathcal{V}_1$ un subespacio (i.e., cerrado para las comb. lineales) sabemos que $a\vec{x}+b\vec{y} \in \mathcal{V}_1$.
- Por ser $\mathcal{V}_2$ un subespacio (i.e., cerrado para las comb. lineales) sabemos que $a\vec{x}+b\vec{y} \in \mathcal{V}_2$.

Por tanto, si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ pertenecen a $\mathcal{W}$, entonces $a\vec{x}+b\vec{y} \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \; = \; \mathcal{W}$. □

Lección 6

(Lección 6) T-1 Esquema de la Lección 6

Esquema de la *Lección 6*

- Introducción a los espacios y subespacios vectoriales

62

(Lección 6) T-2 Introducción

¿Que operaciones hemos empleado con vectores?

- suma de vectores: $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$
- producto por un escalar: $a \cdot \boldsymbol{v}$

63

(Lección 6) T-3 Espacio vectorial: definición

Un *espacio vectorial* es un conjunto $\mathcal{V}$ junto con *dos operaciones*

Suma $(\vec{x} + \vec{y})$**:** $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$
Para todo $\vec{x}$ e $\vec{y}$ existe un $\vec{z}$ en $\mathcal{V}$ que llamamos *suma* de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Producto por escalares $(a\vec{x})$**:** $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$
Para todo $\vec{x}$ y a (número real) existe un $\vec{z}$ en $\mathcal{V}$ que llamamos $a\vec{x}$

que verifican:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$
- Hay un único $\vec{0}$ tal que $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- Hay un único $-\vec{x}$ tal que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

- $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$
- $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$
- $(a \cdot b)\vec{x} = a(b\vec{x})$
- $1\vec{x} = \vec{x}$

64

(Lección 6) T-4 Espacios Vectoriales: resumen

- Un espacio vectorial es un conjunto $\mathcal{V}$ de objetos matemáticos (pueden ser números, listas de números, matrices, funciones, etc)...
- y dos operaciones:
  - una operación que llamamos *suma de vectores*
  - y otra que llamamos *producto de un escalar por un vector*.

  que deben verificar las ocho propiedades indicadas.
- A los elementos del espacio vectorial los denominamos genéricamente *vectores*.

Para nosotros los escalares serán siempre los números reales ($\mathbb{R}$).

65

(Lección 6) **T-5 Ejemplos: $\mathbb{R}^2$**

$\mathbb{R}^2$: conjunto de pares de números reales

$$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}\pi\\e\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1^{\text{a}}\text{ comp.}\\2^{\text{a}}\text{ comp}\end{pmatrix}$$

Es el plano xy (Todos los vectores bi-dimensionales) dibujo

66

(Lección 6) **T-6 Más ejemplos**

$\mathbb{R}^3$: todas las ternas de números reales

$$\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^1$: números reales

$\mathbb{R}^n$: n-tuplas de números reales

67

(Lección 6) **T-7 Subespacios vectoriales**

Subespacio vectorial de $\mathcal{V}$

Un subconjunto no vacío $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$ si (con las mismas operaciones)

Para cualesquiera vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$, y cualesquiera escalares c y d.

- $(\vec{v}+\vec{w})$ está en $\mathcal{W}$
- $(c\cdot\vec{v})$ también está $\mathcal{W}$

$$\boxed{\text{Cualquier combinación lineal } (c\cdot\vec{v}+d\cdot\vec{w}) \text{ está en } \mathcal{W}}$$

$\mathcal{W}$ es un subespacio si es cerrado para ambas operaciones.

Un subespacio vectorial es un espacio vectorial que está contenido dentro un espacio vectorial.

68

(Lección 6) **T-8 Ejemplos**

¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son subespacios?

- Primer cuadrante del plano
- Recta en el plano que contiene el cero
- Recta en el plano que no pasa por el origen
- $\{\mathbf{0}\}$: conjunto con únicamente por el vector nulo $\mathbf{0}$

Todo subespacio debe contener el vector "cero"

69

(Lección 6) **T-9 Listado de subespacios de $\mathbb{R}^2$**

1. Todo (el plano) $\mathbb{R}^2$
2.
3.

¿y para $\mathbb{R}^3$? gráfico 3D

70

(Lección 6) T-10 Unión e Intersección de subespacios

Sean dos subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$

- $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$: todos los vectores que están en $\mathcal{S}$, en $\mathcal{T}$, o en ambos

  ¿Es un subespacio?

- $S \cap T$: los vectores que están simultáneamente en $\mathcal{S}$, y en $\mathcal{T}$

  ¿Es un subespacio?

71

Fin de la lección

Problemas de la Lección 6

(L-6) Problema 1.

(a) Encuentre un subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ ($W \subseteq \mathbb{R}^2$) cerrado para la suma, (si $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$ entonces $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \in W$), pero no para el producto por un escalar ($c\boldsymbol{v}$ no necesariamente pertenece a W).

(b) Encuentre un subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ ($W \subseteq \mathbb{R}^2$) cerrado para el producto (si $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$, entonces $c\boldsymbol{v} \in W$), pero no para la suma ($\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ no necesariamente pertenece a W).

(Strang, 2007, ejercicio 1 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-6) Problema 2. Considere el plano $\mathbb{R}^2$ como un espacio vectorial. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son también sub-espacios vectoriales, y cuales no?

(a) $\{(a, a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$
(b) $\{(b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\}$
(c) $\{(0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$
(d) $\{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de números enteros.
(e) $\{(d, e) \mid d, e \in \mathbb{R},\ d \cdot e = 0\}$
(f) $\{(f, f) \mid f \in \mathbb{R}\}$

(L-6) Problema 3. ¿Por qué $\mathbb{R}^2$ no es un sub-espacio de $\mathbb{R}^3$?
(Strang, 2007, ejercicio 31 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-6) Problema 4. Sea P el plano en $\mathbb{R}^3$ formado por el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación

$$x - y - z = 3.$$

Encuentre dos vectores en P y demuestre que su suma no está en P.

(L-6) Problema 5. Demuestre que en general para $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, el conjunto de soluciones $\{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ **no es** un subespacio.

(L-6) Problema 6. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de matrices de orden 2. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix};$$

(a) Diga un sub-espacio que contenga $\mathbf{A}$ pero no $\mathbf{B}$.
(b) Diga un subespacio que contenga $\mathbf{B}$ pero no $\mathbf{A}$.
(c) ¿Hay algún subespacio que contenga a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ pero no contenga a la matriz identidad $\underset{n\times n}{\mathbf{I}}$?

(L-6) Problema 7. Considere el conjunto de matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$ como un espacio vectorial. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios?

(a) El conjunto de matrices simétricas, $\mathcal{S} = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{A}\}$
(b) El conjunto de matrices NO simétricas, $\mathcal{NS} = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A}^{\intercal} \neq \mathbf{A}\}$
(c) El conjunto de matrices *anti-simétricas* $\mathcal{AS} = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A}^{\intercal} = -\mathbf{A}\}$

(L-6) PROBLEMA 8.

(a) La intersección de dos planos que pasan por $(0,0,0)$ probablemente es una ____________, aunque puede ser un ____________.
(b) La intersección de un plano que pasa por $(0,0,0)$ con una recta que pasa por $(0,0,0)$ probablemente es ____________, aunque puede ser ____________.
(c) Si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son subespacios de $\mathbb{R}^5$, su intersección $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ (vectores en ambos subespacios) es un subespacio de $\mathbb{R}^5$. Compruebe los requerimientos sobre $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ y $c\boldsymbol{x}$.

(Strang, 2007, ejercicio 18 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-6) PROBLEMA 9. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son realmente subespacios?

(a) el plano de vectores $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ cuya primera componente es $b_1 = 0$.
(b) el plano de vectores $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ cuya primera componente es $b_1 = 1$.
(c) Los vectores $\boldsymbol{b}$ con $b_2 b_3 = 0$ (esta es la unión de dos subespacios: el plano de vectores con segundas componentes nulas $b_2 = 0$ y el plano de vectores con terceras componentes nulas $b_3 = 0$).
(d) Únicamente el vector $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.
(e) Todas las combinaciones de dos vectores dados $(1,\ 1,\ 0)$ y $(2,\ 0,\ 1)$.
(f) El plano de vectores $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ que satisface $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$.

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 2.1.)

Uno más. . . un poco más difícil

(L-6) PROBLEMA 10. Para que un conjunto tenga estructura de espacio vectorial, se requiere que la suma y la multiplicación por un escalar cumplan las ocho siguientes condiciones; donde $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ son vectores, y a y b escalares

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.
2. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$.
3. Hay un único vector que llamamos $\mathbf{0}$ ("vector cero") tal que $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x}$.
4. Para cada $\boldsymbol{x}$, hay un único vector que llamamos $-\boldsymbol{x}$ ("el vector opuesto") tal que $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.
5. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.
6. $(a \cdot b)\boldsymbol{x} = a(b\boldsymbol{x})$.
7. $a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$.
8. $(a + b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$.

(a) Suponga que la suma en $\mathbb{R}^2$ añade un 1 de más a cada componente, de modo que $(3,1) + (5,0) = (9,2)$ en lugar de $(8,1)$. Si la multiplicación por un escalar permanece sin cambio, ¿qué reglas se rompen?
(b) Demuestre que el conjunto de todos los números reales positivos con la siguiente nueva definición de suma y producto por un escalar es espacio vectorial
   - $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = xy$
   - $c\boldsymbol{x} = x^c$

   ¿Cuál es el vector $\mathbf{0}$ en este caso?:
(c) Suponga que $(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$ se define cómo $(x_1 + y_2, x_2 + y_1)$; con el producto usual $c\boldsymbol{x} = (cx_1, cx_2)$. ¿Cuáles de las ocho reglas no se cumplen?

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 2.1.)

Fin de los Problemas de la Lección 6

LECCIÓN 7: Resolviendo Ax = 0

2.2. Eliminación Gaussiana para resolver $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

☞ Este Tema 2 del curso trata sobre sistemas de ecuaciones lineales. Como verá a continuación, los sistemas de ecuaciones lineales están íntimamente relacionados con los subespacios de $\mathbb{R}^n$.

Antes de seguir, **una advertencia**: seguramente usted ya conoce algún método de resolución. Mi experiencia es que los alumnos en el mejor de los casos saben ejecutar unos pasos a ciegas para obtener una solución, pero sin entender por qué funciona el método... y con demasiada frecuencia ni siquiera son capaces de ejecutar el método correctamente. Así pues, *por el momento olvide lo que sabe y trate de entender el método que se expone aquí.* Es un método deliberadamente distinto del que se cuenta habitualmente, con ello se pretende, entre otras cosas, que el estudiante no recurra a aplicar ciegamente unas cuantas recetas (mal aprendidas en muchos casos).

Por suerte el método que se expone aquí es muy sencillo y aplicable a multitud de problemas (... y para mayor fortuna ¡usted ya sabe todo lo necesario, pues lo ha usado en la Lección 5 para invertir matrices!).

Como hemos indicado, el Tema 2 del curso trata sobre sistemas de ecuaciones lineales

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

La matriz matriz $\mathbf{A}$ se denomina *matriz de coeficientes del sistema*, el vector $\boldsymbol{x}$ se denomina *vector de incógnitas*, y el vector que se encuentra a la derecha de la igualdad se denomina *vector del lado derecho.*[2] Cuando el vector del lado derecho es un vector nulo, el sistema de ecuaciones de denomina *sistema homogéneo*. En esta Lección 7 solo nos ocuparemos del los sistemas de ecuaciones que son homogéneos.

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Fíjese que el lado izquierdo de un sistema de ecuaciones esta formado por el producto de una matriz con un vector, es decir, *el lado izquierdo* $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ *es una combinación lineal* de las columnas de la matriz de coeficientes. Por tanto, el sistema de más arriba nos está preguntando ¿qué combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}$ son vectores nulos? Evidentemente si el vector de incógnitas $\boldsymbol{x}$ es igual a $\mathbf{0}$, tenemos que

$$\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Pero además de la combinación trivial $\mathbf{A0}$, ¿existen otros vectores $\boldsymbol{x} \neq 0$ para los que la combinación lineal $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es el vector nulo? Veamos un par de ejemplos. Imagine que la matriz de coeficientes es la matriz identidad de orden 3, entonces tenemos el sistema $\mathbf{I}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Puesto que

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

es evidente que no hay más soluciones que aquella en la que todas las componentes de $\boldsymbol{x}$ son nulas (es decir, la solución trivial $\mathbf{I0} = \mathbf{0}$). Sin embargo, es posible encontrar otras soluciones para el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

por ejemplo: $\boldsymbol{x} = (2, 2, 2)$... y seguro que es capaz de encontrar muchas más.

[2] fíjese que *nada de lo que aparece* en la expresión anterior se denomina "la solución"... en dicha expresión no hay escrita ninguna solución. No llame al vector del lado derecho "la solución"... su nombre es más modesto, tan solo es el "*vector del lado derecho*".

2.2.1. Espacio nulo de una matriz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$

Los anteriores ejemplos muestran que algunos sistemas homogéneos sólo tienen la solución trivial ($\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$), pero que otros tienen más soluciones. Denominamos *espacio nulo* al conjunto de todas las soluciones de un *sistema homogéneo.*

Definición 41. *Sea $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$. Denominamos espacio nulo de $\mathbf{A}$ (que denotamos como $\mathcal{N}(\mathbf{A})$) al subconjunto de vectores $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$ que cumplen la condición de ser solución del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, es decir* [3]

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \, \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}.$$

En el primer ejemplo de la página anterior, el *espacio nulo de* $\mathbf{I}$ tan solo contenía el vector $\mathbf{0}$, es decir, $\mathcal{N}(\mathbf{I}) = \{\mathbf{0}\}$. En el segundo ejemplo, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ contiene infinitos vectores (además del $\mathbf{0}$). Pues bien, resulta que el *espacio nulo* de cualquier matriz es un subespacio vectorial.

Proposición 2.2.1. *Para cualquier $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$, el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Basta comprobar que cualquier combinación de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ también es solución.

Sean $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ dos vectores de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, es decir, que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y que $\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, y sean b y c dos números reales; entonces

$$\mathbf{A}\big(b\boldsymbol{x} + c\boldsymbol{x}\big) = b \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{x} + c \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{y} = b \cdot \mathbf{0} + c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \big(b\boldsymbol{x} + c\boldsymbol{x}\big) \in \mathcal{N}(\mathbf{A}).$$

□

Es muy importante destacar que el conjunto de soluciones es subespacio solo para el caso de los sistemas *homogéneos*. . . para el sistema NO homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, pues evidentemente el vector nulo $\mathbf{0}$ no pertenece al conjunto de soluciones.

2.2.2. Resolución de un Sistema Homogéneo

Ahora ya sabemos que si conocemos algunas soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, también son solución sus combinaciones lineales, pero. . . ¿cómo encontrar todas las soluciones? es decir, ¿como calcular $\mathcal{N}(\mathbf{A})$?

Revisitando el método de eliminación. Vimos en la Sección 1.17 en la página 83 que si aplicamos a $\mathbf{A}$ una secuencia de k transformaciones elementales $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ tenemos:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \left[\begin{array}{c}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\\ \hline \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)\\ \hline \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}.\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{AE}\\ \hline \mathbf{E}.\end{array}\right], \qquad \text{donde} \quad \mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}.$$

Ahora fijémonos en la columna j-ésima de la matriz "alargada"

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{AE}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]_{|j} = \left(\begin{array}{c}\mathbf{A}(\mathbf{E}_{|j})\\ \hline \mathbf{E}_{|j}\end{array}\right).$$

Para cada columna tenemos que la parte inferior, $\mathbf{E}_{|j}$, nos indica qué combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$ hemos usado para "cocinar" la parte superior de la columna.

Ejemplo 9. Fíjese cómo a lo largo de todo el proceso de eliminación, la parte inferior, de cada columna de cada matriz, indica cómo calcular la parte superior de esa columna:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}; \quad \left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&2&0&1\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\\ \hline 1&-2&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\ \hline 1&-2&2&-1\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{AE}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]$$

[3]Esta forma de identificar los elementos de un subconjunto como soluciones de un sistema de ecuaciones se denomina *ecuación cartesiana*.

Por ejemplo, la 1ª columna de la 1ª matriz, la 2ª columna de la 2ª matriz, y la 3ª columna de la 3ª matriz, verifican respectivamente que:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Advierta que la igualdad $\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)_{|j} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)_{|j}$ se cumple en todas y cada una de las columnas de todas y cada una de las matrices.

☞ En todo momento a lo largo de la secuencia de transformaciones

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] \to \left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]_{\boldsymbol{\tau}_1} \to \ldots \to \left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \left[\frac{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}{\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}\right].$$

la parte inferior de cada columna indica qué combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$ hemos usado para obtener la parte superior de la columna: $\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_h}\right)_{|j} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_h}\right)_{|j}$; $\quad h = 1:k$.

Por el Teorema 1.13.2 en la página 69 sabemos que para cualquier $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ existen k trasformaciones elementales tales que $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{K}$ es pre-escalonada:

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \left[\frac{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}{\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}\right] = \left[\frac{\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)}{\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}\right] = \left[\frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{E}}\right] = \left[\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{E}}\right]; \quad \text{donde} \quad \mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}.$$

Solo caben dos posibilidades, que $\mathbf{K}$ tenga columnas nulas o que no tenga. Si la columna $\mathbf{K}_{|j}$ es nula, significa que

$$\mathbf{K}_{|j} = \mathbf{A}\left(\mathbf{E}_{|j}\right) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{|j} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right),$$

es decir, que si $\mathbf{K}$ tiene columnas nulas, los vectores que aparecen por debajo de las columnas nulas son *soluciones* al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (así como todas las combinaciones lineales de dichas *soluciones*).

Por tanto, encontrar soluciones al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es tan sencillo como alargar $\mathbf{A}$ poniendo la matriz identidad por debajo, y aplicar transformaciones elementales a las columnas de la matriz ampliada hasta pre-escalonar $\mathbf{A}$. Si la forma pre-escalonada $\mathbf{K}$ tiene columnas nulas, los vectores que hay debajo son soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Con respecto al Ejemplo 9 en la página anterior, sabemos que los vectores

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

son soluciones al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; pero que también lo es cualquier combinación lineal de ambos vectores. Por ejemplo, si los sumamos obtenemos una nueva solución

$$\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

¿Hay otras soluciones que no sean combinación lineal de las encontradas? La Proposición 2.2.3 en la página siguiente muestra que todas las soluciones son combinación lineal de las soluciones que hemos encontrado aplicando el método de Gauss. En el caso de que $\mathbf{K}$ sea de rango completo por columnas (i.e., que no tenga columnas nulas), la única solución es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (la solución trivial). Pero antes demuestre el siguiente resultado, que por comodidad enunciamos sobre las matrices escalonadas $\mathbf{L}$, es decir, sobre el resultado de ordenar las columnas de una forma pre-escalonada $\mathbf{K}$:

EJERCICIO 27. Demuestre que

Lema 2.2.2. *Si $\mathbf{L}$ de orden n por m está escalonada y es de rango r, entonces los coeficientes x_i, $i = 1, \ldots, r$ de la combinación $\mathbf{L}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ correspondientes a las r columnas no nulas deben ser cero (es decir, las columnas no nulas de $\mathbf{L}$ deben estar multiplicadas por cero para que $\mathbf{L}\boldsymbol{x}$ sea $\mathbf{0}$).*

Sobre una matriz pre-escalonada $\mathbf{K}$ ocurre lo mismo: son nulos los coeficientes x_i que corresponden a las columnas no nulas de $\mathbf{K}$, aunque ya no son necesariamente los primeros (pues las columnas no están ordenadas).

Veamos ahora el resultado fundamental de esta lección...

Proposición 2.2.3. *O todas las soluciones a* $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *son combinaciones lineales de las soluciones encontradas por el método de eliminación, o bien, la única solución es* $\mathbf{0}$*, si la forma pre-escalonada de* $\mathbf{A}$ *no tiene columnas nulas, es decir:*

$$\acute{O}\quad \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\textit{combinaciones lineales de las soluciones encontradas por eliminación}\} \quad \acute{o} \quad \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}.$$

Demostración. Para simplificar la exposición, de nuevo usaremos una forma *escalonada*. Sea $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ tal que $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$ es escalonada. Puesto que $\mathbf{E}$ es invertible, para todo vector $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$ existe un *único* vector $\boldsymbol{y}_x = \left(\mathbf{E}^{-1}\right)\boldsymbol{x}$ tal que

$$\mathbf{E}\boldsymbol{y}_x = \boldsymbol{x}.$$

Sustituyendo $\boldsymbol{x}$ por $\mathbf{E}\boldsymbol{y}_x$ (y recordando que $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$) tenemos que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{AE}\boldsymbol{y}_x = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{L}\boldsymbol{y}_x = \mathbf{0}.$$

La cuestión es: ¿cómo deben ser las componentes de $\boldsymbol{y}_x$ para que $\mathbf{L}\boldsymbol{y}_x = \mathbf{0}$? Puesto que $\mathbf{L}$ está escalonada, las componentes correspondientes a las columnas no nulas tienen que ser cero (Lema 2.2.2 en la página anterior) y el resto pueden tomar cualquier valor. De esta manera, si $\mathbf{L}$ no tiene columnas nulas, entonces $\boldsymbol{y}_x$ es cero y la única solución es $\boldsymbol{x} = \mathbf{E}\boldsymbol{y}_x = \mathbf{0}$

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}.$$

Si $\mathbf{L}$ tiene columnas nulas, entonces $\boldsymbol{y}_x$ es de la forma $(0,\ldots,0,\,y_{r+1},\,\ldots,y_n)$ donde los ceros corresponden a las r columnas no nulas de $\mathbf{L}$ (necesariamente las r primeras) y el resto a las columnas nulas (las últimas). Así, $\boldsymbol{x}$ solo puede ser combinación de las columnas de $\mathbf{E}$ que están debajo de las columnas nulas de $\mathbf{L}$, pues los r primeros componentes de $\boldsymbol{y}_x$ son cero:[4]

$$\boldsymbol{x} \;=\; \mathbf{E}\boldsymbol{y}_x \;=\; \mathbf{E}\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ y_{r+1}\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \;=\; y_{r+1}\Big(\mathbf{E}_{|r+1}\Big) + \cdots + y_n\Big(\mathbf{E}_{|n}\Big);$$

por tanto: $\qquad \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \Big\{\text{combinaciones lineales de las soluciones encontradas.}\Big\}.$ $\square$

Así, finalizamos el Ejemplo 9 en la página 108 concluyendo que el espacio nulo de $\mathbf{A}$ (es decir, el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$) es:

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{existen } a, b \in \mathbb{R} \ \text{ tales que } \ \boldsymbol{x} = a\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Es decir, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ *es el subconjunto de vectores* $\boldsymbol{x}$ *de* $\mathbb{R}^4$ *que cumplen la condición de que para cada* $\boldsymbol{x}$ *es posible encontrar dos números reales a y b tales: a veces la primera solución especial más b veces la segunda es igual al vector* $\boldsymbol{x}$.[5]

Nomenclatura usada por G. Strang Siguiendo la nomenclatura de G. Strang, a las columnas de $\mathbf{A}$ que acaban siendo nulas en la forma pre-escalonada $\mathbf{K}$ se denominarán *columnas libres* y el resto se llamarán *columnas pivote*.

Las variables (o incógnitas) correspondientes a columnas pivote, se denominarán *variables pivote* (o variables endógenas), el resto se denominarán *variables libres* (o variables exógenas); y las columnas de $\mathbf{E}$ que quedan debajo de las columnas nulas de $\mathbf{L}$ se denominarán *soluciones especiales* (realmente no son especiales, pero así las llama G. Strang).

[4] Si empleamos una forma pre-escalonada, los ceros ya no están necesariamente al principio, pero el argumento sigue siendo el mismo.

[5] Esta forma de identificar los elementos $\boldsymbol{x}$ de un subconjunto como aquellos que para los que es posible encontrar los parámetros que permitan expresar cada $\boldsymbol{x}$ como una combinación lineal se denomina *ecuación paramétrica*.

Fíjese que con las *ecuaciones paramétricas* es muy fácil obtener elementos del conjunto, basta emplear usar dos valores cualesquiera para a y b. Por el contrario, las *ecuaciones cartesianas* (Definición 41 en la página 108) nos sirven para verificar si un vector $\boldsymbol{x}$ pertenece o no al conjunto, basta verificar que $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es cero. ¡Cada tipo de ecuación sirve para una cosa distinta, unas para generar ejemplos, y las otras para verificar la pertenencia!

☞

Algoritmo para resolver $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

1. Eliminación gaussiana (o Gauss-Jordan): $\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_1,\ldots,\boldsymbol{\tau}_k} \left[\begin{array}{c}\mathbf{K}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]$, donde $\mathbf{K} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ y $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$.
2. Si hay *soluciones especiales* (columnas de $\mathbf{E}$ bajo las columnas nulas de $\mathbf{K}$)
   - Solución completa: $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \{$conjunto de combinaciones lineales de esas *soluciones especiales*$\}$
3. Si no hay *soluciones especiales* (si $\mathbf{K}$ no tiene columnas nulas)
   - Solución completa: $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \{\mathbf{0}\}$

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix( [ [1,2,0,1],[0,1,1,0],[1,2,0,1] ] )
Homogenea(A, 1)                                  # Resuelve la ecuación homogenea
```

Uso de la librería en Python

```
Homogenea(A).enulo                               # Espacio Nulo de A
```

Lección 7

(Lección 7) T-1 Esquema de la Lección 7

Esquema de la *Lección 7*

- Espacio Nulo de $\mathbf{A}$: resolviendo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

Cálculo del Espacio Nulo ($\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$)
mediante eliminación **por columnas**

- Forma (pre)escalonada por columnas
- Variables pivote (*o endógenas*) y variables libres (*o exógenas*)
- Soluciones especiales

72

(Lección 7) **T-2 Subespacios asociados a matrices: espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$**

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{N}(\mathbf{A})$ contiene todas las soluciones $\boldsymbol{x}$ al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

$\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es *subconjunto* de ¿$\mathbb{R}^?$?
Diga algunas soluciones. Dígalas todas

¿Qué aspecto (dimensión) tiene $\mathcal{N}(\mathbf{A})$? (dibujo)

73

(Lección 7) **T-3 ¿Es el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ un subespacio?**

Debemos comprobar que para cualquier a, b
Si $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ y si $\mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$, entonces

El conjunto de soluciones $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es subespacio

74

(Lección 7) **T-4 Conjunto de soluciones del sistema no homogéneo**

Cambiemos el lado derecho (sistema NO homogéneo)

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el conjunto de soluciones?

¿Forman las soluciones un espacio vectorial?
¿Pertenece $\mathbf{0}$ al conjunto de soluciones?

75

(**Lección 7**) **T-5 Cálculo del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

- ¿Hay columnas que sean combinación lineal del resto?
- La eliminación nos lo dirá…

76

(**Lección 7**) **T-6 ¿Qué columnas son combinación lineal del resto?**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \qquad = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \hline \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

Entonces $\quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow$

y $\quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow$

77

(**Lección 7**) **T-7 Cálculo del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$: eliminación Gaussiana y "soluciones especiales"**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \rightarrow \qquad = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \hline \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

Si $\mathbf{A}\left(\mathbf{E}_{|j}\right) = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{E}_{|j}$ es solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$\boxed{\text{el número de pivotes de } \mathbf{L} \text{ es el rango de una matriz}}$

78

(Lección 7) T-8 **Cálculo del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$: eliminación Gaussiana**

¿Cuál es el conjunto de TODAS las soluciones, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, o *solución general*?

-

-

¿Cuántas soluciones especiales tengo?
¿Cuántas columnas nulas tengo?

79

(Lección 7) T-9 **Eliminación Gaussiana por columnas: ¿Por qué funciona?**

Sea $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$ $(\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ rango completo)

¿Es $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *combinación de las col. de* $\mathbf{E}$? $(\boldsymbol{x} = \mathbf{E}\boldsymbol{y}_x)$

Para $\boldsymbol{y} = \mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{x}$ *tenemos que* $\boldsymbol{x} = \mathbf{E}\boldsymbol{y}$ *¿de todas las columnas?*

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] \to \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right] = \left[\begin{array}{ccccc} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{E}_{|1} & \mathbf{E}_{|2} & \mathbf{E}_{|3} & \mathbf{E}_{|4} & \mathbf{E}_{|5} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{AE}\boldsymbol{y} = \mathbf{L}\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; (y_j^* = 0 \text{ para columnas pivote})$$

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\boldsymbol{x}$ *es combinación solo de las* soluciones especiales

80

(Lección 7) T-10 **Calculo de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$: Algoritmo completo para resolver Ax=0**

Algoritmo para resolver $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

1. Encuentre una forma (pre)escalonada: $\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_1,\ldots,\boldsymbol{\tau}_k} \left[\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{E}}\right]$
2. *Soluciones especiales:* columnas bajo las columnas nulas de $\mathbf{K}$
   - Solución completa $\mathcal{N}(\mathbf{A})$: {combinaciones lineales de las soluciones especiales}
3. Si no hay *soluciones especiales* (si $\mathbf{K}$ no tiene columnas nulas)
   - Solución completa: $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$

81

(Lección 7) T-11 Otro ejemplo: $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$

$$\left[\frac{\mathbf{A}^{\intercal}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \qquad = \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right]$$

¿Cuántos pivotes?

¿Cuántas columnas libres? ¿Cuántas soluciones especiales?

¿conjunto de soluciones a $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

82

Fin de la lección

Problemas de la Lección 7

(L-7) PROBLEMA 1. Calcule la forma escalonada para obtener los rangos de las siguientes matrices. Describa el espacio nulo con ecuaciones paramétricas, e indique su forma geométrica..

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(L-7) PROBLEMA 2. Describa el espacio nulo de las siguientes matrices con ecuaciones paramétricas, e indique su forma geométrica.

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

(L-7) PROBLEMA 3. Reduzca $\mathbf{A}$ a una forma escalonada para encontrar sus rangos. Encuentre las soluciones especiales de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Describa todas las soluciones. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-7) PROBLEMA 4. Encuentre la forma escalonada y el rango de las siguientes matrices (encuentre además la solución de los sistemas homogéneos $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ en cada caso):

(a) La matriz de 3 por 4 con todos sus componentes iguales a uno.
(b) La matriz de 4 por 4 con $a_{ij} = (-1)^{ij}$.
(c) La matriz de 3 por 4 con $a_{ij} = (-1)^{j}$.

(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-7) PROBLEMA 5. La matriz $\mathbf{A}$ tiene dos soluciones especiales:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Describa todas las posibilidades para el número de columnas de $\mathbf{A}$.
(b) Describa todas las posibilidades para el número de filas de $\mathbf{A}$.
(c) Describa todas las posibilidades para el rango de $\mathbf{A}$.

Explique sus respuestas.
(*MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall, 2008*)

(L-7) PROBLEMA 6. Encuentre la forma escalonada reducida por columnas (Sección 1.13.3) de las siguientes matrices

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(L-7) PROBLEMA 7. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Sabiendo que $\mathbf{A}$ es invertible, y sin realizar ningún cálculo ¿puede decir cuál es su forma *escalonada reducida*?
(b) Calcule la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

(L-7) PROBLEMA 8. Suponga que $\mathbf{A}$ tiene como forma escalonada reducida por columnas $\mathbf{R}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \clubsuit \\ 2 & a & \clubsuit \\ 1 & 1 & \clubsuit \\ b & 8 & \clubsuit \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿Qué puede decir sobre la tercera columna de $\mathbf{A}$?
(b) ¿Qué números son a y b?
(c) Describa el espacio nulo de $\mathbf{A}$ si: $\mathbf{A}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{R}$.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, March 1, 2004

(L-7) PROBLEMA 9. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(a) Sabiendo que $\mathbf{A}$ es invertible, y sin realizar ningún cálculo ¿puede decir cuál es su forma *escalonada reducida*?
(b) Calcule la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

Fin de los Problemas de la Lección 7

LECCIÓN 8: Resolviendo Ax = b

En esta lección veremos que el método de eliminación nos permite deducir si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es resoluble y, si lo es, encontrar el conjunto de vectores $\boldsymbol{x}$ tales que la combinación de columnas $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es igual al vector del lado derecho $\boldsymbol{b}$.

2.3. Eliminación sobre la matriz ampliada

Considere el *sistema NO homogéneo* $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (es decir, con $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$). Es posible re-escribir el sistema para que tenga una apariencia de *sistema homogéneo* ya que:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad\iff\quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \quad\iff\quad \left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ -\boldsymbol{b}\ \right]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0};$$

donde el vector de incógnitas, $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{pmatrix}$, tiene una restricción: *su última componente debe ser un 1.*

Pues bien, el método de resolución que exponemos aquí intenta resolver este "pseudo-*sistema homogéneo*" tratando de encontrar soluciones que tengan un 1 en su última componente (es decir, trataremos de *encontrar algún vector de* $\mathcal{N}\left(\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ -\boldsymbol{b}\ \right]\right)$ *que tenga un 1 en la última componente*).

La matriz $\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ -\boldsymbol{b}\ \right]$ se denomina *Matriz Ampliada*, y marcamos una línea vertical para recordar que la parte izquierda de la matriz corresponde a la *Matriz de coeficientes* del sistema y que la columna de la derecha es el *Vector del lado derecho* (**con el signo cambiado**).

☞ Las implicaciones "si y solo si" de más arriba indican que encontrar soluciones al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es equivalente a encontrar vectores del espacio nulo de la Matriz Ampliada *que tengan un 1 como última componente*.

La mecánica para encontrarlas es aplicar el método de eliminación como en el caso homogéneo. Si logramos anular la última columna, manteniendo el 1 de abajo del todo, habremos encontrado una solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Ejemplo 10. Considere el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ con $\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix} \quad$ y $\quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix}5\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$

Para resolver el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (con $\mathbf{A}$ de orden m por n) por el método de eliminación, "alargamos" la matriz ampliada $\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ -\boldsymbol{b}\ \right]$ (de orden m por $(n+1)$) con una matriz identidad de orden $(n+1)$:

$$\left[\begin{array}{c|c}\underset{m\times n}{\mathbf{A}} & \text{-}\boldsymbol{b}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{\underset{n\times n}{\mathbf{I}}}\\ & 1\end{array}\right] \qquad \text{donde} \qquad \underset{(n+1)\times(n+1)}{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix}\underset{n\times n}{\mathbf{I}} & \\ & 1\end{bmatrix}.$$

Distinguimos las partes correspondientes al vector del lado derecho[6] y la matriz de coeficientes con la siguiente partición:

$$\left[\begin{array}{c|c}\underset{m\times n}{\mathbf{A}} & \text{-}\boldsymbol{b}\\ \hline \underset{m\times n}{\mathbf{I}} & \\ \hline & 1\end{array}\right].$$

Aplicamos el método de eliminación para pre-escalonar la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \text{-}\boldsymbol{d}\\ \hline \mathbf{I} & \\ \hline & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-5\\2&2&4&1\\3&1&4&-1\\4&1&5&1\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(5)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\2&0&0&11\\3&-2&-2&14\\4&-3&-3&21\\ \hline 1&-1&-2&5\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(7)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\2&0&0&\mathbf{11}\\3&-2&0&0\\4&-3&0&0\\ \hline 1&-1&-1&-2\\0&1&-1&7\\0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right]$$

[6] con el signo cambiado

Como no hay ningún pivote en la segunda fila en la parte de la matriz de coeficientes, no es posible eliminar el 11 (el pivote) de la última columna. Es decir, la última columna no es una combinación lineal del resto de columnas.

El único vector de $\mathcal{N}\left(\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ -\boldsymbol{d}\ \right]\right)$ que hemos encontrado tiene su última componente igual a cero, así que el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ NO tiene solución.

Ejemplo 11. Ahora considere el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Aplicando el método de eliminación sobre la matriz ampliada tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 4 & -10 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(5)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 14 \\ 4 & -3 & -3 & 21 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(7)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Hemos encontrado dos soluciones especiales (los vectores por debajo de las dos columnas nulas), de las cuales la segunda tiene un 1 como ultima componente, por tanto el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es resoluble y $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2, & 7, & 0 \end{pmatrix}$ es *una* solución (compruébelo).

¿Una solución o infinitas soluciones?

Fíjese que si sumamos cualquier múltiplo de la tercera columna a la cuarta, obtenemos un nuevo vector de $\mathcal{N}\left(\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ -\boldsymbol{d}\ \right]\right)$ con un 1 como última componente. De hecho, el conjunto de vectores de $\mathcal{N}\left(\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ -\boldsymbol{d}\ \right]\right)$ con un 1 como última componente son los vectores de la forma

$$\left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ \text{existe } a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Y por tanto todas las soluciones al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ son de la forma

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ \text{existe } a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nótese que si $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ es de rango r, si $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ es escalonada y llamamos $\mathbf{E}$ a $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$, entonces

$$\mathcal{N}\left(\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ -\boldsymbol{d}\ \right]\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{(n+1)} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \lambda_{(r+1)}\mathbf{E}_{|(r+1)} + \cdots + \lambda_n \mathbf{E}_{|n} + \lambda_{(n+1)}\mathbf{E}_{|(n+1)} \right\};$$

y puesto que únicamente el último vector $\mathbf{E}_{|n+1}$ tiene un 1 en su última componente[7], el conjunto de vectores de $\mathcal{N}\left(\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ -\boldsymbol{d}\ \right]\right)$ con un 1 en su última componente es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \lambda_{r+1}\mathbf{E}_{|r+1} + \cdots + \lambda_n \mathbf{E}_{|n} + \mathbf{E}_{|n+1} \right\};$$

es decir, necesariamente $\lambda_{(n+1)} = 1$.

De esto se deducen *dos consecuencias cuando* $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *es resoluble:*

- El conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es el resultado de quitar la última componente a los vectores del conjunto anterior.

- Si el rango de $\mathbf{A}$ es menor que n (si la forma escalonada de $\mathbf{A}$ tiene columnas nulas) el sistema tiene infinitas soluciones. Y si por el contrario $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$, solo existe una solución... (el vector cuyas n componentes son las n primeras componentes de $\mathbf{E}_{|n+1}$).

[7]recuerde que la última componente del resto de vectores $\mathbf{E}_{|j}$ con $j \neq (n+1)$ es un 0

Algoritmo de resolución de un sistema no homogéneo

Aplicando el método de eliminación a la matriz ampliada logramos la transformación:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \\ \hline & 1 \end{array}\right]_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \boldsymbol{c} \\ \hline \vdots\cdots\vdots & \vdots \\ \hline 0\cdots 0 & d \end{array}\right],$$

donde $\mathbf{K}$ es una matriz pre-escalonada de $\mathbf{A}$, y donde $\boldsymbol{c}$ tiene ceros en mismas filas donde $\mathbf{K}$ tiene algún pivote. Llegados a este punto, solo caben dos posibilidades (y recuerde que la única componente distinta de cero, de la última fila, corresponde a la última columna):

1. Si $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, entonces el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución, pues debajo de $\boldsymbol{c}$ hay un vector del espacio nulo de la matriz ampliada cuya última componente d es distinta de cero (es lo que pasó en el segundo de los dos ejemplos anteriores). Si $d \neq 1$, basta dividir la última columna por d para obtener un vector del espacio nulo de la matriz ampliada.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \hline \vdots\cdots\vdots & \vdots \\ \hline 0\cdots 0 & d \end{array}\right] \xrightarrow[{[(\frac{1}{d})(n+1)]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccccc|c} * & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & * & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & * & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{donde “$*$” son pivotes.}$$

2. Si $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$, entonces el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ NO tiene solución.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{L} & \boldsymbol{c} \\ \hline \vdots\cdots\vdots & \vdots \\ \hline 0\cdots 0 & d \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} * & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & * & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & * & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d \end{array}\right].$$

Por tanto, *el sistema tiene solución si y solo si logramos transformar $-\boldsymbol{b}$ en un $\mathbf{0}$*.

Este método, con una mínima variación, permite resolver simultáneamente sistemas que compartan la matriz de coeficientes. Por ejemplo, podemos resolver simultáneamente los dos ejemplos anteriores:

$$\left[\begin{array}{c||c|c} \mathbf{A} & -\boldsymbol{b} & -\boldsymbol{d} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline\hline & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc||c|c} 1 & 1 & 2 & -5 & -5 \\ 2 & 2 & 4 & -10 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc||c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 3 & -2 & -2 & 14 & 14 \\ 4 & -3 & -3 & 21 & 21 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc||c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Es decir, $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ NO tiene solución pero $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ si es resoluble, y el conjunto de todas las soluciones es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \text{existe } a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

☞ Hemos visto que mediante la eliminación podemos saber si el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (con $\mathbf{A}$ de orden m por n) es resoluble (y encontrar *una* solución cuando lo es).

Procedimiento de resolución Aplicamos la eliminación sobre la matriz ampliada $\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ -\boldsymbol{b}\ \right]$. Si la última componente, d, de la última columna resulta ser distinta de 1, dividimos dicha columna por d para que dicha componente sea un uno.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & -\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline 0\cdots0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_p} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \boldsymbol{c} \\ \hline \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} & \boldsymbol{s} \\ \hline 0\cdots0 & 1 \end{array}\right], \quad \text{donde} \quad \mathbf{K} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}.$$

- Si $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$ el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ NO tiene solución.
- Si $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{s}$ *es una solución*, y el conjunto de todas las soluciones es

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{existe } \boldsymbol{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{y}\}.$$

Nótese que si $\mathbf{K}$ no tiene columnas nulas, entonces $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ y por tanto la única solución es $\boldsymbol{s}$.

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix( [ [1,1,2], [2,2,4], [3,1,4], [4,1,5] ] );  b = Vector( [5, 10, 1, -1] )
SEL( A, b, 1 )                            # resuelve el Sistema de Ecuaciones Lineales
```

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix( [ [1,2,1], [7,-3,0], [6,4,2] ] );  b = Vector( [4, 4, 12] )
SEL( A, b, 1 )                       # En este caso es necesario normalizar la última columna
```

2.3.1. El Teorema de de Rouché-Frobenius

☞ La discusión de más arriba nos permite concluir que los rangos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ y de la matriz ampliada $\left[\mathbf{A}\middle| -\boldsymbol{b}\right]$ nos clasifican los posibles casos en cuanto al número de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Ya sabemos que para un sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (donde $\mathbf{A}$ es de orden m por n), al aplicar el método de eliminación Gaussiana sobre la matriz ampliada

$$\left[\mathbf{A}\,\middle|\, -\boldsymbol{b}\right] \to \left[\mathbf{K}\,\middle|\,\boldsymbol{c}\right]$$

solo se pueden dar dos casos: que la última columna se transforme en una columna nula ($\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$), o que no ($\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$):

1. Si $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$, entonces la matriz ampliada incluye un pivote más, es decir,

$$\operatorname{rango}\left(\left[\mathbf{A}\,\middle|\, -\boldsymbol{b}\right]\right) > \operatorname{rango}(\mathbf{A}), \qquad \iff \qquad \text{el sistema NO tiene solución}$$

2. Si $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, entonces

$$\operatorname{rango}\left(\left[\mathbf{A}\,\middle|\, -\boldsymbol{b}\right]\right) = \operatorname{rango}(\mathbf{A}), \qquad \iff \qquad \text{el sistema es resoluble.}$$

Si además el rango es igual al número de columnas de $\mathbf{A}$ ($r = n$), entonces la forma pre-escalonada $\mathbf{K}$ no tiene columnas nulas (es decir, $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$), por lo que el sistema tiene una única solución. Pero si el rango es menor que n el sistema tiene infinitas soluciones, ya que a una solución $\boldsymbol{x}$ se le puede sumar cualquier vector de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ para obtener otra solución. El anterior resultado se resume en el siguiente teorema:

Teorema 2.3.1 (Rouché-Frobenius)**.** *Un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con n incógnitas tiene solución si y solo si el rango de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es igual al rango de la matriz aumentada $[\mathbf{A}| -\boldsymbol{b}]$. En particular:*

1. *Si* $\operatorname{rango}(\mathbf{A}) = n$*, la solución es única.*
2. *En caso contrario hay infinitas soluciones.*

Por otra parte, cuando el rango de $\mathbf{A}$ es igual al número de filas (rango completo por filas $\operatorname{rango}(\mathbf{A}) = m$), el sistema tiene solución para cualquier vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$; pues en tal caso siempre es posible transformar $-\boldsymbol{b}$ en $\mathbf{0}$ (ya que al pre-escalonar la matriz ampliada, y como hay un pivote en cada fila de la parte correspondiente a la matriz de coeficientes, se eliminan todas las componentes de la última columna, por estar a la derecha de los pivotes).

Corolario 2.3.2. *Para toda matriz cuadrada* $\mathbf{A}$ *de orden* n*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El rango de* $\mathbf{A}$ *es* n *(ó* $\mathbf{A}$ *es de rango completo).*
2. $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *si y solo si* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$*.*
3. $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *tiene solución única.*
4. $\mathbf{A}$ *no es singular.*
5. $\mathbf{A}$ *es invertible.*
6. $\mathbf{A}$ *es producto de matrices elementales:* $\mathbf{A} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k}$*.*

2.4. Espacio columna de una matriz

Considere el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}$ de orden m por n

$$\mathcal{L}\Big(\big[\mathbf{A}_{|1}, \ldots, \mathbf{A}_{|n}\big]\Big) = \Big\{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \text{existen } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{b} = x_1\mathbf{A}_{|1} + \cdots + x_n\mathbf{A}_{|n}\Big\}$$

o bien, usando la notación matricial,

$$\mathcal{L}\Big(\big[\mathbf{A}_{|1}, \ldots, \mathbf{A}_{|n}\big]\Big) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \mid \text{existe } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}\}$$

Puesto que este subconjunto de $\mathbb{R}^n$ *contiene todas* las combinaciones lineales de las columnas, obviamente *es cerrado* para las combinaciones lineales. Por tanto, este conjunto es un *subespacio* de $\mathbb{R}^n$. Lo denominamos *espacio columna* de $\mathbf{A}$, y lo denotamos por $\mathcal{C}(\mathbf{A})$. Por ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{C}(\mathbf{A}) = \left\{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \text{existen } x, y, z \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{b} = x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Evidentemente $\boxed{\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{tiene solución si y solo si} \quad \boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}).}$

El espacio columna y la eliminación

El subespacio $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ es cerrado para la suma y el producto por escalares, pero precisamente ese es el tipo de operaciones que realizan las transformaciones elementales de las columnas. Por tanto, al aplicar transformaciones elementales sobre las columnas de $\mathbf{A}$ obtenemos nuevas matrices cuyas columnas pertenecen a $\mathcal{C}(\mathbf{A})$. Así, si $\mathbf{E}$ es invertible (es decir, si $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k}$) entonces el espacio columna de $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{E}$ está contenido en el espacio columna de $\mathbf{A}$:

$$\mathcal{C}(\mathbf{B}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{A});$$

pero como las transformaciones elementales son "reversibles", mediante una sucesión de transformaciones elementales se puede retornar de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$, pues $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}$. Por tanto, también ocurre que

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{B}).$$

Es decir,

$$\boxed{\text{si} \quad \mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{E}, \quad \text{entonces} \quad \mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}(\mathbf{B}).}$$

¡Al aplicar la eliminación, todas las matrices que aparecen en el proceso tienen el mismo espacio columna!

Lección 8

(Lección 8) T-1 Esquema de la Lección 8

Esquema de la *Lección 8*

- El espacio columna de $\mathbf{A}$: resolviendo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- Estudiaremos solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, ... *si existe.*
  - ¿es única?
  - ¿o hay toda una familia?
    - $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n$

83

(Lección 8) T-2 Subespacios asociados a matrices: espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sus columnas son vectores de ;
¿Qué debemos añadir al conjunto de columnas para generar un subespacio?

Llamamos a este conjunto *espacio columna de* $\mathbf{A}$*:* $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.
Así que $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ es un subespacio de

84

(Lección 8) T-3 Subespacios asociados a matrices: espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{C}(\mathbf{A})$ es un subespacio de ¿$\mathbb{R}^?$?
¿Qué hay en $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?
¿Está todo el espacio $\mathbb{R}^3$ incluido en $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?
Para responder volvamos a los sistemas de ecuaciones...

85

(**Lección 8**) **T-4 Conexión entre $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y Ax=b**

¿Tiene $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ solución para cualquier $\boldsymbol{b}$? *(*la cuestión de hoy*)*

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿Para qué vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema es resoluble?

¿Se puede encontrar una solución para $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$? ¿y para $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$? ¿y para $\boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? ¿y para $\boldsymbol{b}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$?

86

(**Lección 8**) **T-5 Conexión entre $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y Ax=b**

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿Se puede desechar alguna columna y mantener el mismo $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?

Unas columnas de $\mathbf{A}$ son combinación lineal del resto y la eliminación Gaussiana lo descubrirá

87

(**Lección 8**) **T-6 Un paso más: forma escalonada reducida**

Eliminación de *Gauss-Jordan*. Podemos simplificar más las columnas no nulas (*pivotes iguales a 1,… con ceros a la izda.*)

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\frac{1}{2})\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{E}}\right]$$

$$\boxed{\Big(\mathbf{A}\mathbf{E}\Big)_{|j} = \mathbf{A}\Big(\mathbf{E}_{|j}\Big)} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}(\mathbf{R})$$

aunque

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) \neq \mathcal{N}(\mathbf{R}).$$

88

(Lección 8) **T-7** **Sistema de ecuaciones completo**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \;\;2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + \;\;8x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = b_3 \end{cases}$$

¿Qué descubre el método de eliminación (izda. a dcha.) respecto de las columnas?

¿Qué deben cumplir b_1, b_2 y b_3 para que exista solución?

Si $b_1 = 1$ y $b_2 = 5$, ¿cuánto debe valer b_3 para que exista solución?
¡Veamos!

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} - 1\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\, \mathbf{A} \;\middle|\; -\boldsymbol{b} \,\right] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

89

(Lección 8) **T-8** **Sistema de ecuaciones completo**

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{sobre}\mathbf{A}]{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \text{-}b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \text{-}b_2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \text{-}b_3 \\ \hline 3 & \text{-}1 & \text{-}2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{-}1 & \frac{1}{2} & 0 & \text{-}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{buscan. sol. partic.}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{5}] \\ [(b_2)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b_1+b_2\text{-}b_3 \\ \hline 3 & \text{-}1 & \text{-}2 & 2 & 3b_1\text{-}b2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{-}1 & \frac{1}{2} & 0 & \text{-}2 & \text{-}b_1+\frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{E} & \boldsymbol{x}_p \\ \hline & 1 \end{array}\right]$$

Condición para que el sistema sea resoluble es...
Si $b_1 = 1$ y $b_2 = 5$ entonces
Si $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ¿cómo es la última columna?
Resuelva para $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$... si $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$

90

Comprobemos:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}_p = (3b_1 - b_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \left(-b_1 + \frac{1}{2}b_2\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix};$$

que es resoluble si $b_1 + b_2 = b_3$. Si $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, entonces

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}_p = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

¡Pruebe con otro $\boldsymbol{b}$!

(Lección 8) **T-9** **Algoritmo de resolución completa (o general) del sistema Ax=b**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}\;;\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix};\qquad \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&2&2&-2\\2&4&6&8&-2\\3&6&8&10&-4\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&0&2&4&2\\3&0&2&4&2\\\hline 1&-2&-2&-2&2\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&0&2&0&0\\3&0&2&0&0\\\hline 1&-2&-2&2&4\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-2&-1\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\text{existe }\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\text{ tal que }\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

91

Otra forma de expresar el mismo conjunto

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2\text{ tal que }\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-2&2\\1&0\\0&-2\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

(Lección 8) **T-10** **Algoritmo de resolución completa (o general) del sistema Ax=b**

Aplicamos la eliminacion a la matriz ampliada $\left[\mathbf{A}|-\boldsymbol{b}\right]$

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}&-\boldsymbol{b}\\\hline\mathbf{I}&\mathbf{0}\\\hline 0\cdots0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{Eliminación}}\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}&\boldsymbol{c}\\\hline\mathbf{E}&\boldsymbol{x}_p\\\hline 0\cdots0&1\end{array}\right],\quad\text{donde}\quad\mathbf{K}=\mathbf{AE}.$$

- Si $\boldsymbol{c}\neq\mathbf{0}$, el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ NO tiene solución.
- Si $\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{b}\in\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y el conjunto de soluciones es

$$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\;|\text{existe }\boldsymbol{y}\in\mathcal{N}(\mathbf{A})\text{ tal que }\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+\boldsymbol{y}.\}.$$

Si $\mathcal{N}(\mathbf{A})=\{\mathbf{0}\}$, entonces $\boldsymbol{x}_p$ es la única solución.

92

Nótese que

$$\begin{cases}\mathbf{A}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{b}\\\mathbf{A}\boldsymbol{y}&=\mathbf{0}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{b}$$

Así que

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\quad\text{es otra solución del sistema }\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}.$$

Nótese también que

$$\begin{cases}\mathbf{A}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{b}\\\mathbf{A}\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{b}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\mathbf{0}$$

Así que si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son soluciones a $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ entonces

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\in\mathcal{N}(\mathbf{A}).$$

(Lección 8) T-**11** **Teorema de Rouché-Frobenius**

Sist. $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$	$r = m = n$	$r = n < m$	$r = m < n$	$r < m;\quad r < n$
soluciones				

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\tau_1,\dots,\tau_k} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccccc|c} \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \text{-}b_1 \\ 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \text{-}b_2 \\ 0 & 0 & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} & \cdots & 0 & 0 & \text{-}b_k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \text{-}b_m \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

donde $\mathbf{A}$ *(de orden $m \times n$) tiene rango* r; y donde "**1**" son pivotes.

$$\boxed{\text{Los rangos de } \mathbf{A} \text{ y } \big[\mathbf{A}| - \boldsymbol{b}\big] \text{ nos dicen todo sobre el } \textit{número} \text{ de soluciones}}$$

93

Fin de la lección

Problemas de la Lección 8

(L-8) PROBLEMA 1. ¿Cuáles de las siguientes reglas proporcionan una definición correcta del rango de $\mathbf{A}$?

(a) El número de columnas diferentes de cero en $\mathbf{R}$ (forma reducida por columnas).
(b) El número de columnas menos el número total de filas
(c) El número de columnas menos el número de columnas libres
(d) El número de unos en $\mathbf{R}$.

(Strang, 2007, ejercicio 12 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 2. Encuentre la solución completa (o *solución general*) a

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Strang, 2003, ejercicio 4 del conjunto de problemas 3.4.)

(L-8) PROBLEMA 3. Encuentre la solución completa (o *solución general*) a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(L-8) PROBLEMA 4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(L-8) PROBLEMA 5.
Sean
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentre la forma escalonada por columnas de $\mathbf{A}$
(b) Encuentre las variables libres
(c) Encuentre las soluciones especiales:
(d) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es consistente (tiene solución) cuando la segunda componente de $\boldsymbol{b}$ satisface $b_2 =$ ____.
(e) Encuentre la solución completa del sistema lineal de ecuaciones cuando b_2 satisface la condición.

(Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 6. Calcule lo mismo que en el problema anterior para encontrar la solución completa de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 7. Describa el conjunto de vectores $\boldsymbol{b}$ que hacen el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ resoluble (el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$) para el caso
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$
encontrando las restricciones necesarias sobre $\boldsymbol{b}$ tras realizar el procedimiento de eliminación. ¿Cual es el rango de $\mathbf{A}$? Indique un posible lado derecho y la una solución particular al sistema. Describa también el espacio nulo.
(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 8. Suponga una compañía que pinta coches, trenes y aviones:
Cada coche supone 10 horas de trabajo de preparación, 30 de pintado y 12 de retoques finales.
Cada tren supone 20 horas de trabajo de preparación, 75 de pintado y 36 de retoques finales.
Cada avión supone 40 horas de trabajo de preparación, 135 de pintado y 64 de retoques finales.
Dada la plantilla de la empresa, decide dedicar los siguientes recursos cada semana, 760 horas de trabajo a la preparación, 2595 al pintado, y 1224 a retoques finales. ¿Cuantos aviones, trenes y coches puede pintar la empresa a la semana?.

(L-8) PROBLEMA 9. Para el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dado por
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 20 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre el valor de c que hace a la matriz $\mathbf{A}$ no invertible. Use dicho valor en los apartados siguientes.
(b) Encuentre la solución completa al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(c) Describa el sistema de ecuaciones mediante la visión por columnas (columnas de $\mathbf{A}$ y el vector $\boldsymbol{b}$), o bien mediante la visión por filas (las tres ecuaciones del sistema).

(L-8) PROBLEMA 10. Construya (si es que es posible) una matriz cuyo espacio columna contenga a $(1, 1, 5)$ y a $(0, 3, 1)$ y cuyo espacio nulo conste de todas las combinaciones de $(1, 1, 2)$.
(Strang, 2007, ejercicio 62 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 11. ¿Para qué vectores $\boldsymbol{b}$ los siguientes sistemas tienen solución?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 24 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-8) PROBLEMA 12. ¿Cuáles deben ser las condiciones sobre b_1 y b_2 (en caso de haber alguna) para que $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ tenga solución?

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\2&4&0&7\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}.$$

Encuentre dos vectores en el espacio nulo de $\mathbf{A}$; así como la solución completa al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 13. Sea la matriz

$$\underset{3\times 4}{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-0&1\\0&1&1&-1\\0&0&1&-0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(a) Sin realizar la multiplicación, diga una base de $\mathcal{N}(\mathbf{B})$, y el rango de $\mathbf{B}$. Explique su respuesta.

(b) ¿Cuál es la solución completa a $\mathbf{B}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$?

(L-8) PROBLEMA 14. ¿Para qué miembros derechos $\boldsymbol{b}$ los siguientes sistemas son resolubles? Dicho de otra forma ¿qué condición debe cumplir $\boldsymbol{b}$ para que sea solución del sistema?

(a)

$$\begin{bmatrix}1&4&2\\2&8&4\\-1&-4&-2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

¿Cubre el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ todo el espacio $\mathbb{R}^3$ o sólo un subespacio? Si es un subespacio, ¿es un plano en $\mathbb{R}^3$? ¿es una recta, o es un punto?

(b)

$$\begin{bmatrix}1&4\\2&9\\-1&-4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

¿Cubre el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ todo $\mathbb{R}^3$ o sólo un subespacio? Si es un subespacio, ¿es un plano en $\mathbb{R}^3$? ¿es una recta, o es un punto? *Basado en (Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 2.1.)*

(L-8) PROBLEMA 15. La solución completa a $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\underset{m\times 1}{\boldsymbol{b}}$ es:

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, c_1,c_2\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}. \qquad \text{¿Cómo es } \mathbf{A}?$$

(L-8) PROBLEMA 16. Ana, Belén, y Carlos deciden que no les gusta el color de las paredes del aula donde estudian Matemáticas II. Ana compra un bote de pintura roja, seis de pintura azul, y un bote de pintura verde. La factura es de 44 euros; Belén compra dos botes azules y tres verdes la factura es de 24 euros; y por último Carlos compra un bote rojo y cinco azules por un importe de 33 euros.

(a) ¿Cuanto vale cada bote de pintura?
(b) ¿Qué no tiene sentido en la respuesta a la pregunta anterior?
(c) Cuando Ana, Belén, y Carlos comparan las facturas se dan cuenta de que a uno de ellos le han cobrado 4 euros de menos. ¿A quién?

(d) Tras intentar dar respuesta a la pregunta anterior, se habrá dado cuenta de que es un tanto "trabajoso" dar con el resultado. Intente lo siguiente: genere la matriz ampliada $\begin{bmatrix}\mathbf{A}|\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix}$ donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones, y $\boldsymbol{a}$ es el vector de precios suponiendo que a Ana deberían haberle cobrado 4 euros más (es decir 48 en lugar de 44), $\boldsymbol{b}$ el vector de precios suponiendo que sólo a Belén deberían haberle cobrado 4 euros más, y $\boldsymbol{c}$ lo mismo para Carlos. Calcule la forma escalonada reducida de la matriz ampliada. A la vista de lo obtenido ¿cuanto vale cada bote de pintura? y ¿a quien han cobrado 4 euros de menos?

(L-8) PROBLEMA 17. Suponga que el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es consistente (que tiene solución), donde $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ y $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$. **Demuestre** las siguientes afirmaciones:

(a) $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$.

(b) Si $\boldsymbol{x}_0$ es una solución particular del sistema, entonces cualquier vector de la forma $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}$, donde $\boldsymbol{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, es también solución del sistema.

(c) Demuestre que si hay dependencia lineal entre las columnas de $\mathbf{A}$, entonces hay más de una solución.

(L-8) PROBLEMA 18. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de eliminación Gaussiano.

$$\begin{cases} 3x + y + z = 6 \\ x - y - z = -2 \\ \phantom{x - {}} 4y + z = 3 \end{cases}$$

(L-8) PROBLEMA 19. Escriba los siguientes problemas clásicos en forma matricial 2 por 2 para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, y resuélvalos:

(a) X es dos veces más viejo que Y, y la suma de la edad de ambos es igual a 39.

(b) Los puntos $(x, y) = (2, 5)$ y $(x, y) = (3, 7)$ están en la recta $y = mx + c$. Encuentre los valores de m y de c.

(Strang, 2007, ejercicio 32 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-8) PROBLEMA 20. La parábola $y = a + bx + cx^2$ pasa por los puntos $(x, y) = (1, 4)$, $(2, 8)$ y $(3, 14)$. Encuentre y resuelva una ecuación matricial para las incógnitas $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}$.
(Strang, 2007, ejercicio 33 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-8) PROBLEMA 21. Explique por qué el sistema

$$\begin{cases} u + v + w = 2 \\ u + 2v + 3w = 1 \\ \phantom{u + {}} v + 2w = 0 \end{cases}$$

es singular y no tiene solución.

¿Por qué valor debe sustituirse el último cero del lado derecho para que el sistema sea resoluble? Indique una de las soluciones al sistema.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 1.2.)

(L-8) PROBLEMA 22. Resuelva el siguiente sistema para encontrar una combinación de las columnas que sea igual a $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} u - v + w &= b_1 \\ v + w &= b_2 \\ w &= b_3. \end{aligned}$$

Verifique que su respuesta es correcta multiplicando la matriz de coeficientes del sistema por su vector solución para obtener $\boldsymbol{b}$.
(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 1.2.)

(L-8) PROBLEMA 23. Escoja un coeficiente b que haga singular este sistema. Luego, escoja un valor para g que permita resolver el sistema. Encuentre dos soluciones del caso singular

$$\begin{cases} 2x + by &= 16 \\ 4x + 8y &= g \end{cases}$$

Basado en (Strang, 2003, ejercicio 6 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 24. Encuentre las siguiente matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, o bien, explique por qué no es posible encontrar tales matrices.

(a) La única solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

(b) La única solución a $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

(Strang, 2007, ejercicio 49 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 25. La solución completa de $\mathbf{A}x = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Encuentre $\mathbf{A}$.
(Strang, 2007, ejercicio 50 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 26. Suponga que la columna quinta de $\mathbf{L}$ no tiene pivote. Entonces x_5 es una variable ____________ . En este caso el vector cero (es) (no es) la única solución al sistema homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Además, si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene una solución, entonces tiene ____________ soluciones.
(Strang, 2007, ejercicio 40 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 27. Considere un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$; donde la matriz $\mathbf{A}$ tiene tres filas y cuatro columnas.

(a) Un sistema como este ¿tiene siempre solución? Si no es así, escriba un ejemplo de sistema que no tenga solución.
(b) ¿Es posible que el sistema tenga una única solución? Si es así, proporcione un ejemplo.
(c) Formule, si es posible, una condición necesaria y suficiente sobre $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{b}$ que garantice que el sistema tiene al menos una solución.
(d) Formule, si es posible, una condición necesaria y suficiente sobre $\mathbf{A}$ que garantice que el sistema tiene al menos una solución para cualquier vector $\boldsymbol{b}$.

(L-8) PROBLEMA 28. Mediante eliminación gaussiana por columnas sobre la matriz $\mathbf{A}$ de orden 4×7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & -7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hemos obtenido la matriz $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{AE}$$

donde

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es el producto de una serie de matrices elementales

(a) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$?
(b) Resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(c) Exprese, si es posible, la solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ en función de las variables x_2, x_4 y x_6.
(d) ¿Es posible encontrar un vector $\boldsymbol{b}$ en $\mathbb{R}^4$ para el que el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tenga solución? Si es posible dé un ejemplo.
(e) Proporcione un vector $\boldsymbol{b}$ tal que el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ sea solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(f) Si $\boldsymbol{b}$ es la suma de todas las columnas de $\mathbf{A}$. Escriba, si es posible, la solución completa del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Versión modificada de MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2004

(L-8) PROBLEMA 29. $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ es una matriz de rango r. Suponga que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución para algunos vectores $\boldsymbol{b}$, pero infinitas soluciones para otros vectores $\boldsymbol{b}$.

(a) Decida si el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ contiene sólo el vector cero, y explique porqué.
(b) Decida si el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ es todo $\mathbb{R}^m$ y explique porqué.
(c) Para esta matriz $\mathbf{A}$, encuentre las relaciones entre los números r, m; y entre r y n.
(d) ¿Puede existir un lado derecho $\boldsymbol{b}$ para el que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenga una y sólo una solución? ¿Porqué es posible o porqué no?

(L-8) PROBLEMA 30. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 9 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre un conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y describa con él el espacio nulo de $\mathbf{A}$.
(b) Encuentre la solución completa— es decir todas las soluciones (x_1, x_2, x_3, x_4) — de

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 - 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Cuando una matriz $\underset{m \times n}{\mathbf{A}}$ tiene rango $r = m$ ¿para qué vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ puede resolverse? ¿Cuantas soluciones especiales tiene $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (dimensión del espacio nulo)?

(L-8) PROBLEMA 31. Considere el sistema de ecuaciones,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & cz & = & 2 \end{array} \right.$$

¿Para qué valores de c este sistema no tiene solución? ¿sólo una solución? ¿e infinitas soluciones?

(L-8) PROBLEMA 32. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y + 2z & = 1 \\ 2x - 3y + mz & = 3 \\ -x + 2y + 3z & = 2m \end{cases}$$

(a) Demuestre que tiene solución para cualquier valor del parámetro m.
(b) Halle la solución del sistema anterior si $m = -1$.
(c) ¿Corresponde la solución obtenida a las ecuaciones de una recta en $\mathbb{R}^3$?¿Existe algún valor del parámetro m para el que la solución del sistema anterior sea un plano en $\mathbb{R}^3$? ¿Y un punto en $\mathbb{R}^3$?
(d) Halle la solución del sistema anterior cuando $m = 1$.

(L-8) PROBLEMA 33. ¿Cuáles de las siguientes descripciones son correctas? Las soluciones $\boldsymbol{x}$ del sistema

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

constituyen:
(a) Un plano
(b) Una recta
(c) Un punto
(d) Un subespacio
(e) El espacio nulo de $\mathbf{A}$.
(f) El espacio columna de $\mathbf{A}$.

(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-8) PROBLEMA 34. Considere la ecuación $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿Para que vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema tiene solución?

Basado en *MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall 2008*

(L-8) PROBLEMA 35. En un teatro de barrio, tres grupos están haciendo cola. Hay cuatro tipos de tarifas; tercera edad (t), adulto (a), infantil (i) y tarifa con descuento para empleados del teatro y familiares (d).

El primer grupo compra tres entradas de adulto y tres infantiles por 39 euros.

El segundo grupo compra tres entradas de adulto y cuatro de la tercera edad por 44 euros

El tercer grupo compra dos entradas con descuento y dos entradas infantiles por 22 euros

(a) Si intenta descubrir el precio de cada entrada ¿cuantas soluciones puede encontrar? Ninguna, una, o infinitas
(b) Si las entradas de la tercera edad valen lo mismo que las infantiles. ¿Cuánto vale cada tipo de entrada?

(L-8) PROBLEMA 36. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -5 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - 7x_4 = 7 \end{cases}$$

(a) (0.5 pts) ¿Cuál es el rango de la matriz de coeficientes?
(b) (1.5 pts) Resuelva el sistema de ecuaciones
(c) (0.5 pts) Describa la forma geométrica del conjunto de vectores solución a este sistema de ecuaciones (considerando el conjunto como un subconjunto de $\mathbb{R}^4$).

(L-8) PROBLEMA 37. Considere el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) Encuentre los valores del parámetro a de manera que la solución del sistema sea una recta.
(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de a el conjunto de soluciones es un plano?

(L-8) PROBLEMA 38. Sea la matriz $\underset{3\times 4}{\mathbf{A}}$ y el vector columna $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre todas la soluciones al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (si es que existen soluciones). Describa el conjunto de soluciones geométricamente. ¿Es dicho conjunto un sub-espacio vectorial?
(b) ¿Quién es el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$? Cambie el 7 de la esquina inferior derecha por un número que conduzca a un espacio columna más pequeño de la nueva matriz (digamos $\mathbf{M}$). Dicho número es ____.
(c) Encuentre un lado derecho $\boldsymbol{b}$ tal que, para la nueva matriz, el sistema $\mathbf{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenga solución; y otro lado derecho $\boldsymbol{b}$ tal que $\mathbf{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tenga solución.

(L-8) PROBLEMA 39. Encuentre la solución completa del sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 6 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Fin de los Problemas de la Lección 8

LECCIÓN 9: Independencia, base y dimensión

2.5. Combinaciones lineales de vectores de $\mathcal{V}$

(Recuerde la Definición 38 en la página 99 de *Espacio Vectorial* y la Definición 40 en la página 100 de *Subespacio*).

Denominamos *sistema de vectores* a una lista ordenada de vectores $\vec{z}_i$ de un espacio vectorial $\mathcal{V}$. Para expresar un sistema de n vectores, escribiremos la lista de vectores entre corchetes y separados por ";".

$$\mathsf{Z} = \left[\vec{z}_1;\ \vec{z}_2;\ldots;\vec{z}_n\right], \quad \text{con} \quad \vec{z}_i \in \mathcal{V}.$$

Y para denotarlos usaremos caracteres del tipo: A, B,..., U, V, W, X, Y, ó Z.

Nótese que las matrices son casos particulares de sistemas de vectores, pues una matriz $\mathbf{A}$ de orden m por n es un sistema de n vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_{|1};\ \mathbf{A}_{|2};\ldots;\mathbf{A}_{|n}\right], \quad \text{con} \quad \mathbf{A}_{|j} \in \mathbb{R}^m.$$

Uso de la librería en Python

```
D=Matrix([ Vector([1,0,0]), Vector([-1,0,1]) ])
D.sis           # El atributo sis de cada Matrix es el Sistema formado por sus columnas
```

Extendiendo la notación matricial a los espacios vectoriales

Aunque no es lo habitual, aquí extenderemos la notación empleada con las matrices a espacios vectoriales genéricos [8].

Sistema de n vectores de $\mathcal{V}$ por un vector de $\mathbb{R}^n$

Denotaremos el j-ésimo vector de un sistema $\mathsf{Z} = \left[\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_n\right]$, de manera similar a como hacemos con las matrices:

$$\mathsf{Z} = \left[\mathsf{Z}_{|1};\ \mathsf{Z}_{|2};\ldots;\mathsf{Z}_{|n}\right], \quad \text{donde} \quad \mathsf{Z}_{|j} = \vec{z}_j \in \mathcal{V},$$

y expresaremos una combinación lineal de los vectores del sistema Z del siguiente modo

$$\mathsf{Z}\boldsymbol{a} = (\mathsf{Z}_{|1})a_1 + \cdots + (\mathsf{Z}_{|n})a_n = \sum_{k=1}^{n} (\mathsf{Z}_{|k})a_k; \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Por tanto, $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ (con $\mathbf{A}$ de orden m por n y $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$) es un caso particular de vectores de $\mathbb{R}^m$. Sin embargo, con esta generalización, el producto $\mathsf{Z}\boldsymbol{a}$ es un vector $\vec{z}$ de $\mathcal{V}$ por lo que, dependiendo de la naturaleza de $\mathcal{V}$, dicho vector pudiera ser una función, o matriz, o polinomio, o variable aleatoria, o etc. Recuerde que el producto $\mathsf{Z}\boldsymbol{a}$ de un "*sistema de n vectores de $\mathcal{V}$ por un vector de $\mathbb{R}^n$*" es una combinación lineal de vectores de Z y por tanto es un vector de $\mathcal{V}$.

El siguiente ejercicio muestra que el producto $\mathsf{Z}\boldsymbol{a}$ verifica las *propiedades de linealidad*: la primera respecto a la suma, $\mathsf{Z}\big(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\big) = \mathsf{Z}\boldsymbol{b} + \mathsf{Z}\boldsymbol{c}$, y la segunda respecto al producto por un escalar, $\mathsf{Z}(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\mathsf{Z}\boldsymbol{b})$.

EJERCICIO 28. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a)

Proposición 2.5.1. *Sean Z, un sistema de n vectores de $\mathcal{V}$, y $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ de $\mathbb{R}^n$, entonces:;* $\mathsf{Z}\big(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\big) = \mathsf{Z}\boldsymbol{b} + \mathsf{Z}\boldsymbol{c}$.

(b)

Proposición 2.5.2. *Sean Z, un sistema de n vectores de $\mathcal{V}$, el escalar λ y $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^n$, entonces* $\mathsf{Z}\big(\lambda\boldsymbol{b}\big) = \lambda\big(\mathsf{Z}\boldsymbol{b}\big)$.

[8] espacios vectoriales genéricos, pero solo de dimensión finita

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([ [1,-3, 0], [1,-6, 1] ])
B = Matrix([ [1, 1, 1], [1, 2, 3] ])
C = Matrix([ [1, 0, 0], [1, 1, 1] ])
S = Sistema( [A, B, C] )                # ¡Sistema de Matrices!
S*Vector([-2, 1, 2])                    # Sistema por Vector (comb. lineal de matrices)
```

Sistema de n vectores de $\mathcal{V}$ por una matriz de $\mathbb{R}^{n\times p}$

Podemos extender aún más la notación matricial. Si $\mathbf{A}$ es una matriz de n filas y p columnas, denotamos por $\mathsf{Z}\mathbf{A}$ al sistema de vectores

$$\mathsf{Z}\mathbf{A} = \Big[\mathsf{Z}\big(\mathbf{A}_{|1}\big);\dots;\mathsf{Z}\big(\mathbf{A}_{|p}\big)\Big]; \quad \text{donde} \quad \mathsf{Z}\big(\mathbf{A}_{|j}\big) = \sum_{k=1}^{n} (\mathsf{Z}_{|k})a_{kj}, \quad \text{y} \quad j=1:p$$

es decir, que el vector j-ésimo del sistema de vectores $\mathsf{Z}\mathbf{A}$ es

$$\big(\mathsf{Z}\mathbf{A}\big)_{|j} = \mathsf{Z}\big(\mathbf{A}_{|j}\big).$$

(compare esta expresión con Definición 25 en la página 47).

Además de las propiedades de linealidad de más arriba, también se verifica la asociatividad con el producto de matrices: $\mathsf{Z}(\mathbf{B}\boldsymbol{c}) = (\mathsf{Z}\mathbf{B})\boldsymbol{c}$ y $\mathsf{Z}\big(\mathbf{BC}\big) = \big(\mathsf{Z}\mathbf{B}\big)\mathbf{C}$:

Ejercicio 29. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a)

Proposición 2.5.3. *Sean* Z *un sistema de* m *vectores de* $\mathcal{V}$*, la matriz* $\underset{m\times n}{\mathbf{B}}$ *, y el vector* $\boldsymbol{c}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, entonces:*

$$\mathsf{Z}(\mathbf{B}\boldsymbol{c}) = (\mathsf{Z}\mathbf{B})\boldsymbol{c}.$$

(b)

Proposición 2.5.4. *Sean* Z *un sistema de* p *vectores de* $\mathcal{V}$*, y* $\underset{p\times q}{\mathbf{B}}$ *y* $\underset{q\times n}{\mathbf{C}}$ *, entonces* $\quad \mathsf{Z}\big(\mathbf{BC}\big) = \big(\mathsf{Z}\mathbf{B}\big)\mathbf{C}$.

Uso de la librería en Python

```
D = Matrix([ Vector([1,0,0]), Vector([-1,0,1]) ])
S*D                                     # Sistema por Matriz (Sistema de Matrices)
```

☞ Al extender la notación matricial para expresar combinaciones lineales en espacios vectoriales genéricos, hemos logrado algunos resultados sobre combinaciones lineales de sistemas de vectores de $\mathcal{V}$ que nos serán de utilidad.

- $\mathsf{Z}\big(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\big) = \mathsf{Z}\boldsymbol{b} + \mathsf{Z}\boldsymbol{c}$
- $\mathsf{Z}\big(\lambda\boldsymbol{b}\big) = \lambda\big(\mathsf{Z}\boldsymbol{b}\big)$
- $\mathsf{Z}(\mathbf{B}\boldsymbol{c}) = (\mathsf{Z}\mathbf{B})\boldsymbol{c}$
- $\mathsf{Z}(\mathbf{BC}) = (\mathsf{Z}\mathbf{B})\mathbf{C}$

2.6. Sistemas generadores

En la Sección 2.4 en la página 123 definimos el espacio columna de $\mathbf{A}$ de orden m por n como el conjunto de todas las combinaciones lineales de sus columnas:

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{L}\Big(\big[\mathbf{A}_{|1};\dots;\mathbf{A}_{|n}\big]\Big) = \Big\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \;\Big|\; \text{existen } x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{y} = \big(\mathbf{A}_{|1}\big)x_1 + \cdots + \big(\mathbf{A}_{|n}\big)x_n\Big\}.$$

Ésta es una forma habitual de engendrar subespacios vectoriales; y aunque en este curso nos centramos fundamentalmente en los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$, ahora vamos a generalizar esta idea a cualquier espacio vectorial $\mathcal{V}$.

Definición 42 (Subespacio $\mathcal{L}(\mathsf{Z})$ engendrado por un sistema Z)**.** *Dado un sistema,* $\mathsf{Z} = [\vec{z}_1; \ldots; \vec{z}_n]$*, de vectores de* $\mathcal{V}$*, el* subespacio engendrado por dicho sistema *es*

$$\mathcal{L}(\mathsf{Z}) = \mathcal{L}\Big([\mathsf{Z}_{|1}; \ldots; \mathsf{Z}_{|n}]\Big) = \Big\{\vec{v} \in \mathcal{V} \;\Big|\; \textit{existen } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \textit{ tales que } \vec{v} = (\mathsf{Z}_{|i})a_1 + \cdots + (\mathsf{Z}_{|n})a_n\Big\},$$

es decir $\mathcal{L}\big([\vec{z}_1; \ldots; \vec{z}_n]\big)$ es el conjunto de combinaciones lineales de $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n$, *o usando la notación matricial*

$$\mathcal{L}(\mathsf{Z}) = \Big\{\vec{v} \in \mathcal{V} \;\Big|\; \textit{existe } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \textit{ tal que } \vec{v} = \mathsf{Z}\boldsymbol{a}\Big\};$$

Definición 43 (Sistema generador de $\mathcal{W}$)**.** *Si* $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathsf{Z})$*, entonces decimos que* Z *es un sistema generador de* $\mathcal{W}$*.*

Ejemplo 12. Las columnas de $\mathbf{A}$ son un *sistema generador* de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$. Las soluciones especiales de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ lo son de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Uso de la librería en Python

```
D = Matrix([ Vector([1,0,0]), Vector([-1,0,1]) ])
SubEspacio( D.sis )      # SubEspacio generado por el Sistema de columnas de D
                         # muestra la representación con ec. paramétricas y cartesianas

C = Matrix([ [1,0,0], [1,1,1] ])
Homogenea(C).sgen        # Sistema generador del espacio nulo de C
Homogenea(C).enulo       # Espacio nulo de C
```

☞ Un sistema de vectores Z es un sistema generador de $\mathcal{V}$ si: $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathsf{Z})$

Observe que $\mathcal{L}(\mathsf{Z})$ es un subespacio vectorial, ya que

- la suma $\mathsf{Z}\boldsymbol{b} + \mathsf{Z}\boldsymbol{c} = \mathsf{Z}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$, es una combinación lineal donde $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ son los coeficientes
- el producto $\lambda(\mathsf{Z}\boldsymbol{b}) = \mathsf{Z}(\lambda\boldsymbol{b})$, es una combinación lineal donde $\lambda\boldsymbol{b}$ son los coeficientes

Es decir, *el conjunto de combinaciones lineales de vectores de un sistema* Z *es un subespacio*, pues es cerrado para la suma y el producto por escalares.

Puesto que $\mathcal{L}(\mathsf{Y})$ es un subespacio que *únicamente* contiene las combinaciones lineales de $\mathsf{Y} = [\vec{y}_1; \ldots; \vec{y}_n]$, el subespacio $\mathcal{L}(\mathsf{Y})$ *está contenido en cualquier otro subespacio que también contenga los vectores* $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$; es decir, es el subespacio más pequeño que contiene los vectores $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$.

Ahora es fácil establecer un criterio para saber si dos sistemas $\mathsf{Y} = [\vec{y}_1; \ldots; \vec{y}_n]$ y $\mathsf{Z} = [\vec{z}_1; \ldots; \vec{z}_k]$ generan un mismo espacio: como $\mathcal{L}(\mathsf{Y}) \subset \mathcal{L}(\mathsf{Z})$ si y solo si $\mathsf{Y}_{|i} \in \mathcal{L}(\mathsf{Z})$, $i = 1:n$, y como dos conjuntos A y B son iguales si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$; llegamos al siguiente corolario

Corolario 2.6.1. *Los subespacios engendrados por dos sistemas,* $\mathsf{Y} = [\vec{y}_1; \ldots; \vec{y}_n]$ *y* $\mathsf{Z} = [\vec{z}_1; \ldots; \vec{z}_k]$*, son iguales si y sólo si*

$$\mathsf{Y}_{|i} \in \mathcal{L}(\mathsf{Z}) \textit{ para todo } i = 1:n \qquad \textit{y} \qquad \mathsf{Z}_{|j} \in \mathcal{L}(\mathsf{Y}) \textit{ para todo } j = 1:k.$$

Definición 44. *Diremos que dos sistemas son equivalentes si generan el mismo espacio.*

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix( [[2,-1,0],[-1,2,-1]] )
B = ElimGJ(Matrix(A))
SubEspacio(A.sis) == SubEspacio(B.sis) # ¿Son equivalentes los Sistemas A.sis y B.sis?
```

Transformaciones elementales sobre sistemas de vectores (...y una nueva operación)

Al igual que con las matrices, podemos aplicar transformaciones elementales sobre los sistemas de vectores:

- *(Transformación* Tipo I *sobre el sistema de vectores)* Si $i \neq j$ entonces

$$\mathsf{Z} = [\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_i;\ldots;\vec{z}_j;\ldots;\vec{z}_n] \xrightarrow[{[(\alpha)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}]{\boldsymbol{\tau}} [\vec{z}_1;\ldots;(\alpha\vec{z}_i+\vec{z}_j);\ldots;\vec{z}_j;\ldots;\vec{z}_n] = \mathsf{Z}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathsf{Z}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)$$

- *(Transformación* Tipo II *sobre el sistema de vectores)* Si $\alpha \neq 0$ entonces

$$\mathsf{Z} = [\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_i;\ldots;\vec{z}_n] \xrightarrow[{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}]{\boldsymbol{\tau}} [\vec{z}_1;\ldots;(\alpha\vec{z}_i);\ldots;\vec{z}_n] = \mathsf{Z}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathsf{Z}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)$$

Así, si mediante una sucesión de transformaciones elementales $\boldsymbol{\tau}_1,\ldots,\boldsymbol{\tau}_k$ transformamos un sistema de vectores Z en un sistema $\mathsf{Y} = \mathsf{Z}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathsf{Z}\mathbf{E}$, donde $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$. Por el Corolario 2.6.1 concluimos que ambos sistemas generan el mismo subespacio;

$$\mathcal{L}(\mathsf{Z}) = \mathcal{L}(\mathsf{Z}\mathbf{E}) = \mathcal{L}(\mathsf{Y}) \quad \text{puesto que} \quad \mathsf{Y}_{|j} = \mathsf{Z}\mathbf{E}_{|j} \quad \text{y} \quad \mathsf{Z}_{|j} = \mathsf{Y}\big(\mathbf{E}^{-1}\big)_{|j}.$$

A estas transformaciones podemos añadir una nueva: *quitar vectores nulos* del sistema:

- *(Quitando vectores nulos)* $\quad \mathcal{L}\Big([\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_i;\ldots;\vec{z}_n;\ \vec{0}]\Big) = \mathcal{L}\Big([\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_i;\ldots;\vec{z}_n]\Big).$

Por tanto, si en un sistema de vectores uno de los vectores es combinación lineal del resto, podemos quitarlo del sistema y continuar generando el mismo subespacio:

Proposición 2.6.2. *Si* $\mathsf{Z} = [\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_n]$ *es un sistema de vectores entonces*

$$\mathcal{L}\Big([\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_{i-1};\ \vec{z}_i;\ \vec{z}_{i+1},\ldots\vec{z}_n]\Big) = \mathcal{L}\Big([\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_{i-1};\ \vec{z}_{i+1};\ldots;\vec{z}_{n-1}]\Big).$$

si, y solo si, $\vec{z}_i$ *es combinación lineal del resto de vectores de* Z*.*

Demostración. Basta aplicar el Corolario 2.6.1. □

☞ Volviendo al espacio generado por las columnas de una matriz $\mathbf{A}$:

Si $\mathbf{L}$ es una matriz escalonada de $\mathbf{A}$ de r columnas no nulas (de rango r), entonces

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}(\mathbf{L}) = \mathcal{C}\left(\mathbf{L}_{|(1,\ldots,r)}\right),$$

donde $\mathbf{L}_{|(1,\ldots,r)}$ es la submatriz correspondiente a las r primeras columnas $(1:r)$.

Es decir, las columnas no nulas de $\mathbf{L}$ generan $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

Observación. Como $\vec{0} \in \mathcal{V}$, y puesto que $\mathcal{L}\Big([\vec{0};\ \vec{0};\ \vec{0}]\Big) = \mathcal{L}\Big([\vec{0};\ \vec{0}]\Big) = \mathcal{L}\Big([\vec{0}]\Big) = $ ¿...?, convenimos que $\mathcal{L}\Big([\emptyset]\Big) = \{\vec{0}\}$; es decir, admitimos al sistema vacío como un sistema generador del subespacio $\{\vec{0}\}$.

2.7. Sistemas linealmente dependientes

Ejercicio 30. Demuestre que

Proposición 2.7.1. *Dado un sistema de vectores* $\mathsf{Z} = [\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_n]$*, existe* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *tal que* z_i *es combinación lineal del resto de vectores de* Z *si, y solo si, existe* $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $\mathsf{Z}\boldsymbol{a} = \vec{0}$*.*

La anterior proposición da lugar a la definición de *sistema linealmente dependiente* y de *sistema linealmente independiente*:

Definición 45. *Diremos que el sistema* Z *de* n *vectores de* $\mathcal{V}$

- *es un* sistema linealmente dependiente *si existe* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *no nulo tal que,* $\quad \mathsf{Z}\boldsymbol{a} = \vec{0}$.
- *es un* sistema linealmente independiente *si ocurre lo contrario, es decir,* $\quad \mathsf{Z}\boldsymbol{a} = \vec{0}$ *solo cuando* $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

☞ Particularizando para $\mathbb{R}^m$ tenemos que

Proposición 2.7.2. *Para un sistema* $\left[\boldsymbol{v}_1;\ldots;\boldsymbol{v}_n\right]$ *de* n *vectores de* $\mathbb{R}^m$*, las siguientes propiedades son equivalentes:*

- *El rango de la matriz* $\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{v}_1;\ldots;\boldsymbol{v}_n\right]$ *es* n
- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$
- *La combinación lineal* $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ *es* $\mathbf{0}$ *si y solo si* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
- *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *son linealmente independientes*

Demostración. ¡Ya se sabe! □

2.8. Bases y dimensión

Hemos visto que en un sistema de vectores linealmente dependiente es posible retirar algún vector sin reducir el espacio generado. Pero si el sistema es linealmente independiente, al retirar cualquiera de los vectores se reduce el espacio engendrado por ellos. Un sistema de vectores que tenga el tamaño justo para generar el subespacio $\mathcal{W}$ sin que sobre ningún vector tiene un nombre especial:

Definición 46. *Diremos que el sistema* B *es* una base *de un subespacio* $\mathcal{W}$ *si simultáneamente*

1. B *genera el subespacio, es decir, si* $\mathcal{L}(\mathsf{B}) = \mathcal{W}$.
2. B *es linealmente independiente, es decir,* $\mathsf{B}\boldsymbol{x} = \vec{0}$ *si y solo si* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Es decir, una base de $\mathcal{W}$ es un sistema de vectores B con un número suficiente elevado de vectores como para generar el subespacio $\mathcal{W}$ pero, simultáneamente, suficientemente reducido como para que el sistema sea linealmente independiente.

Ejemplo 13. Las columnas no nulas de una matriz escalonada de $\mathbf{A}$ constituyen una base de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

Ejemplo 14. Las soluciones *especiales* encontradas al resolver $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ constituyen una base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Pues bien, ¡todas las bases de un subespacio $\mathcal{W}$ tienen el mismo número de vectores! Usaremos la siguiente proposición para demostrarlo:

Proposición 2.8.1. *Si* Y *y* Z *son dos sistemas con* n *y con* r *de vectores de* $\mathcal{V}$ *respectivamente, donde* $n > r$*, y tales que* $\mathsf{Y}_{|i} \in \mathcal{L}(\mathsf{Z})$ *para* $i = 1:n$*, entonces* Y *es linealmente dependiente.*

Demostración. Como cada $\mathsf{Y}_{|i}$ es combinación lineal de los vectores del sistema Z, existe $\mathbf{M}$ de orden r por n tal que

$$\mathsf{Y}_{|j} = \mathsf{Z}\mathbf{M}_{|j} \quad \text{para} \quad j = 1:n; \quad \text{es decir, tal que} \quad \mathsf{Y} = \mathsf{Z}\mathbf{M}.$$

Como $\mathbf{M}$ tiene más columnas que filas, existe un vector $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{M}\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$; y por tanto

$$\mathsf{Y}\boldsymbol{a} = \mathsf{Z}\mathbf{M}\boldsymbol{a} = \mathsf{Z}\mathbf{0} = \vec{0}.$$

□

Así pues, *dos bases de un mismo subespacio $\mathcal{W}$ tienen el mismo número de elementos*; pues si una base tuviera más vectores que la otra, por la Proposición 2.8.1, sería un sistema dependiente, y por tanto ya no sería una base.

Definición 47. *Decimos que un subespacio es de dimensión finita si tiene una base con un número finito de vectores. En tal caso, llamamos* dimensión de un subespacio $\mathcal{W}$ *al número de vectores de cualquiera de sus bases.*

Eliminación "de izquierda a derecha" y sistemas "acoplados" de vectores

Notación. Denotaremos con $\mathsf{Y}_{|(1:s)}$ al subsistema de $\mathsf{Y} = \left[\vec{y}_1;\ldots;\vec{y}_n\right]$ formado por sus primeros s vectores, es decir

$$\mathsf{Y}_{|(1:s)} = \left[\vec{y}_1;\ldots;\vec{y}_s\right] = \left[\vec{y}_j | j < s\right] \quad \text{con} \quad s \leq n,$$

y asumiremos que $\mathcal{L}\left(\mathsf{Z}_{|(1:0)}\right) = \mathcal{L}([\emptyset]) = \{\vec{0}\}$.

Definición 48 (Sistemas acoplados)**.** *Diremos que dos sistemas* Y *y* Z *con* n *vectores cada uno, están* acoplados *si*

$$\mathcal{L}\Big(\big[\vec{y}_1;\ldots;\vec{y}_i\big]\Big)=\mathcal{L}\Big(\big[\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_i\big]\Big)\quad \textit{para } i=1:n,$$

es decir, si

$$\mathcal{L}\Big(\mathsf{Y}_{|(1:i)}\Big)=\mathcal{L}\Big(\mathsf{Z}_{|(1:i)}\Big)\quad \textit{para } i=1:n.$$

Proposición 2.8.2 (Eliminación "de izquierda a derecha" en un sistema)**.** *Si transformamos un sistema de vectores* $\mathsf{Z}=\big[\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_n\big]$ *mediante una secuencia* $\boldsymbol{\tau}_1,\ldots,\boldsymbol{\tau}_k$ *de trasformaciones elementales* "de izquierda a derecha"

$$\mathsf{Z}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\;=\;\mathsf{Z}\mathbf{E}\;=\;\mathsf{Y}\quad\textit{donde}\quad \mathbf{E}=\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k},$$

de tal forma que cada $\mathsf{Y}_{|j}$ *es de la forma* $\mathsf{Z}\mathbf{E}_{|j}$ *con* $e_{jj}\neq 0$, *es decir,*

$$\mathsf{Y}=\big[\vec{y}_1;\ldots;\vec{y}_n\big]=\big[\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_n\big]\begin{bmatrix}e_{11}&e_{12}&e_{13}&\cdots&e_{1n}\\ &e_{22}&e_{23}&\cdots&e_{2n}\\ &&e_{33}&\cdots&e_{3n}\\ &&&\ddots&\vdots\\ &&&&e_{nn}\end{bmatrix}=\mathsf{Z}\mathbf{E},$$

entonces Y *y* Z *están acoplados.*

Demostración. Por una parte, como $\mathbf{E}$ es triangular superior sin elementos nulos en la diagonal principal, cada vector $\mathsf{Y}_{|j}=\mathsf{Z}\mathbf{E}_{|j}$ es un múltiplo no nulo ($e_{jj}\neq 0$) de $\mathsf{Z}_{|j}$ más una combinación lineal de los vectores $\mathsf{Z}_{|k}$ con $k=1:(j-1)$, y por tanto $\mathcal{L}\big(\mathsf{Y}_{|(1:j)}\big)\subset\mathcal{L}\big(\mathsf{Z}_{|(1:j)}\big)$ para $j=1:n$.

Por otra parte, recordando que la inversa de una triangular superior es triangular superior (Sección 1.18), sabemos que también $\mathbf{E}^{-1}$ es triangular superior sin elementos nulos en la diagonal, y como $\mathsf{Z}=\mathsf{Y}\mathbf{E}^{-1}$, usando el mismo argumento concluimos que $\mathcal{L}\big(\mathsf{Z}_{|(1:j)}\big)=\mathcal{L}\big(\mathsf{Y}_{|(1:j)}\big)$ para $j=1:n$. □

Notación. Sean $\mathsf{Y}=\big[\vec{y}_1;\ldots;\vec{y}_n\big]$ y $\mathsf{Z}=\big[\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_k\big]$ dos sistemas de vectores de un espacio vectorial $\mathcal{V}$. Denotaremos con $\mathsf{Y}{\sim}\mathsf{Z}$ al sistema de $n+k$ vectores resultante de *concatenar* Y (de n vectores) y Z (de k vectores)

$$\mathsf{Y}{\sim}\mathsf{Z}\;=\;\big[\vec{y}_1;\ldots;\vec{y}_n;\;\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_k\big].$$

Lemma 15. *Sean* $\mathsf{Y}=\big[\vec{y}_1;\ldots;\vec{y}_n\big]$ *y* $\mathsf{Z}=\big[\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_k\big]$ *dos sistemas de vectores de un espacio vectorial* $\mathcal{V}$ *tales que* $\mathcal{L}(\mathsf{Y})=\mathcal{L}(\mathsf{Z})$. *Entonces para cualquier sistema* $\mathsf{X}=\big[\vec{x}_1;\ldots;\vec{x}_r\big]$ *de vectores de* $\mathcal{V}$ *se verifica que*

$$\mathcal{L}\Big(\mathsf{Y}{\sim}\mathsf{X}\Big)=\mathcal{L}\Big(\mathsf{Z}{\sim}\mathsf{X}\Big).$$

Demostración. Hay que demostrar que $\{\vec{z}_1,\ldots,\vec{z}_k,\;\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_r\}\subset\mathcal{L}\big(\mathsf{Y}{\sim}\mathsf{X}\big)$ y que $\{\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_n,\;\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_r\}\subset\mathcal{L}\big(\mathsf{Z}{\sim}\mathsf{X}\big)$. Como ambos contenidos se prueban de la misma manera, solo comprobaremos el primero.

Por un lado tenemos que $\{\vec{z}_1,\ldots,\vec{z}_k\}\subset\mathcal{L}(\mathsf{Z})=\mathcal{L}(\mathsf{Y})\subset\mathcal{L}\big(\mathsf{Y}{\sim}\mathsf{X}\big)$. Por otro que $\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_r\}\subset\mathcal{L}\big(\mathsf{Y}{\sim}\mathsf{X}\big)$. Luego $\{\vec{z}_1,\ldots,\vec{z}_k\}\cup\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_r\}\subset\mathcal{L}\big(\mathsf{Y}{\sim}\mathsf{X}\big)$. □

Corolario 2.8.3. *Si* Y *y* Z *son dos sistemas acoplados de* n *vectores y*

$$\vec{z}_s\;\in\;\mathcal{L}\Big(\mathsf{Z}_{|(1:s-1)}\Big),\quad \textit{es decir}\quad \mathcal{L}\Big(\big[\vec{z}_j|j<s\big]\Big),\tag{2.1}$$

entonces los sistemas $\big[\vec{z}_j|j\neq s\big]$ *y* $\big[\vec{y}_j|j\neq s\big]$ *también están acoplados.*

Demostración. Si $s=n$ el resultado es trivial. Así que supongamos que $s<n$. Puesto que Z y Y están acoplados, $\mathcal{L}\big(\mathsf{Y}_{|(1:i)}\big)=\mathcal{L}\big(\mathsf{Z}_{|(1:i)}\big)$ para todo $i<s$, y como consecuencia de (2.1) tendremos que

$$\mathcal{L}\Big(\mathsf{Y}_{|(1:s-1)}\Big)\;=\;\mathcal{L}\Big(\mathsf{Z}_{|(1:s-1)}\Big)\;\overset{(2.1)}{=}\;\mathcal{L}\Big(\mathsf{Z}_{|(1:s)}\Big)\;=\;\mathcal{L}\Big(\mathsf{Y}_{|(1:s)}\Big)$$

luego aplicando el Lemma 15 (en $\overset{*}{=}$) tendremos que para todo $s<i$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big(\big[\vec{y}_j|j\neq s\big]\Big)\;=\;\mathcal{L}\Big(\mathsf{Y}_{|(1:s-1)}{\sim}\mathsf{Y}_{|(s+1:i)}\Big)\;&\overset{*}{=}\;\mathcal{L}\Big(\mathsf{Y}_{|(1:s)}{\sim}\mathsf{Y}_{|(s+1:i)}\Big)=\mathcal{L}\Big(\mathsf{Y}_{|(1:i)}\Big)=\mathcal{L}\Big(\mathsf{Z}_{|(1:i)}\Big)\\ &=\;\mathcal{L}\Big(\mathsf{Z}_{|(1:s)}{\sim}\mathsf{Z}_{|(s+1:i)}\Big)\\ &\overset{*}{=}\;\mathcal{L}\Big(\mathsf{Z}_{|(1:s-1)}{\sim}\mathsf{Z}_{|(s+1:i)}\Big)\;=\;\mathcal{L}\Big(\big[\vec{z}_j|j\neq s\big]\Big).\end{aligned}$$

□

Corolario 2.8.4. *Si* Y *y* Z *son dos sistemas acoplados de* n *vectores y* $\vec{y}_s = \vec{0}$ *entonces los sistemas* $\left[\vec{y}_j | j \neq s\right]$ *y* $\left[\vec{z}_j | j \neq s\right]$ *también están acoplados.*

Definición 49. *Si* $[\vec{y}_1; \ldots; \vec{z}_y]$ *y* $[\vec{z}_1; \ldots; \vec{z}_n]$ *son dos sistemas acoplados diremos que el par* $(\vec{y}_s, \vec{z}_s)$ *es superfluo si* $\vec{y}_s = \vec{0}$. *En tal caso diremos que* $\left[\vec{y}_j | j \neq s\right]$ *y* $\left[\vec{z}_j | j \neq s\right]$ *son los sistemas acoplados resultantes de quitar el par superfluo* $(\vec{y}_s, \vec{z}_s)$.

Corolario 2.8.5. *Si* $[\vec{y}_1; \ldots; \vec{y}_n]$ *y* $[\vec{z}_1; \ldots; \vec{z}_n]$ *son dos sistemas acoplados también lo son* $[\vec{y}_j | \vec{y}_j \neq \vec{0}]$ *y* $[\vec{z}_j | \vec{y}_j \neq \vec{0}]$.

Demostración. Basta ir quitando los pares superfluos correspondientes a los ceros en el sistema $[\vec{y}_1; \ldots; \vec{y}_n]$. □

☞ El anterior corolario nos muestra una forma de encontrar una base de $\mathcal{L}(\mathsf{Z})$ entre los vectores de Z: Basta escoger el subsistema con aquellos vectores de $\mathsf{Z}_{|j}$ que no se anulen tras aplicar el método de eliminación $\mathsf{Z}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k}$, es decir

$$\left[\mathsf{Z}_{|j} \;\middle|\; \mathsf{Z}\mathbf{E}_{|j} \neq \vec{0}\right], \quad \text{donde} \quad \mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k}.$$

Encontrando una base de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ entre las columnas de $\mathbf{A}$. Aplicando la eliminación (de "izquierda a derecha") sobre $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \hline \mathbf{E} \end{bmatrix};$$

sabemos que $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\Big(\big[\mathbf{K}_{|1}; \ \mathbf{K}_{|3}\big]\Big)$ y que la dimensión de $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ es 2 por ser ambos vectores linealmente independientes. Y por el Corolario 2.8.5, también sabemos que $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\Big(\big[\mathbf{A}_{|1}; \ \mathbf{A}_{|3}\big]\Big)$. Como la dimensión es 2, concluimos que $\big[\mathbf{A}_{|1}; \ \mathbf{A}_{|3}\big]$ es una base de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

☞ Hemos visto que si tenemos un sistema de vectores y aplicamos el método de eliminación (de *"izquierda a derecha"*), los sucesivos sistemas que van apareciendo tienen la propiedad de que los subespacios generados por los j primeros vectores de los distintos sistemas generan el mismo espacio. Es decir, para Z, y la sucesión de transformaciones elementales $\boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_k$ tal que $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k}$ es triangular superior

$$\text{Si} \quad \mathsf{Y} = \mathsf{Z}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k} = \mathsf{Z}\mathbf{E}, \quad \text{entonces } \mathsf{Y} \text{ y } \mathsf{Z} \text{ están acoplados.}$$

es decir,

$$\mathcal{L}\Big(\big[\mathsf{Z}_{|1}; \ldots; \mathsf{Z}_{|j}\big]\Big) = \mathcal{L}\Big(\big[\mathsf{Y}_{|1}; \ldots; \mathsf{Y}_{|j}\big]\Big) \quad \text{para } j = 1:n.$$

Pero si además algunos vectores de Y acaban siendo nulos, los correspondientes vectores de Z se pueden quitar y el sistema resultante continúa generando el mismo subespacio (Corolario 2.8.5).

Hemos usado esta idea para encontrar una base de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ entre las columnas de $\mathbf{A}$ pre-escalonando la matriz mediante eliminación (de *"izquierda a derecha"*).

Ahora podemos completar el Corolario 2.3.2 en la página 123 con cuatro nuevas afirmaciones:

Corolario 2.8.6. *Para toda matriz cuadrada* $\mathbf{A}$ *de orden* n, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El rango de* $\mathbf{A}$ *es* n *(ó* $\mathbf{A}$ *es de rango completo).*
2. $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *si y solo si* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
3. $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *tiene solución única.*
4. $\mathbf{A}$ *no es singular.*
5. $\mathbf{A}$ *es invertible.*
6. $\mathbf{A}$ *es producto de matrices elementales:* $\mathbf{A} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k}$.
7. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *son linealmente independientes.*
8. *Las filas de* $\mathbf{A}$ *son linealmente independientes.*
9. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una base de* $\mathbb{R}^n$.
10. *Las filas de* $\mathbf{A}$ *forman una base de* $\mathbb{R}^n$.

2.9. Sistemas linealmente independientes

☞ Finalizamos la lección con algunos resultados clásicos de los subespacios vectoriales.

Proposición 2.9.1. *Si* $\left[\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_n\right]$ *es un sistema linealmente independiente y* $\vec{z}_{n+1} \notin \mathcal{L}\Big(\left[\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_n\right]\Big)$ *entonces* $\left[\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_n;\ \vec{z}_{n+1}\right]$ *es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que $a_1\vec{z}_1+\cdots+a_n\vec{z}_n+a_{n+1}\vec{z}_{n+1}=\vec{0}$. Como $\vec{z}_{n+1} \notin \mathcal{L}\Big(\left[\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_n\right]\Big)$, necesariamente $a_{n+1}=0$. Y como $\left[\vec{z}_1;\ldots;\vec{z}_n\right]$ es un sistema linealmente independiente, entonces también $a_1,\ldots,a_n=0$. □

Corolario 2.9.2. *Cualquier subespacio de un espacio de dimensión finita es de dimensión finita y su dimensión es menor o igual a la del espacio.*

Demostración. Sea $\mathcal{W}$ un subespacio de $\mathcal{V}$, entonces sabemos que existen sistemas linealmente independientes formados por vectores de $\mathcal{W}$. Por ejemplo el vacío. Por otra parte, cualquier sistema de vectores linealmente independientes tiene como mucho tantos vectores como la dimensión del subespacio. Tomemos de todos los posibles sistemas linealmente independientes de $\mathcal{W}$, un sistema M *con el mayor número posible de vectores.* Entonces $\mathcal{L}(\mathsf{M}) \subset \mathcal{W}$. Veamos que si suponemos que existe $\vec{v}\in\mathcal{W}$ tal que $\vec{v}\notin\mathcal{L}(\mathsf{M})$, necesariamente llegamos a una contradicción. Basta añadir $\vec{v}$ al sistema M para obtener un sistema linealmente independiente formado por vectores de $\mathcal{W}$. Pero esto contradice que M sea un sistema linealmente independiente con el mayor número posible de vectores. □

Corolario 2.9.3. *Si* $\mathcal{W}$ *es un subespacio de* $\mathcal{V}$ *de la misma dimensión de* $\mathcal{V}$*, entonces* $\mathcal{W}$ *y* $\mathcal{V}$ *son iguales.*

Demostración. Tomemos una base B de $\mathcal{W}$. Entonces sabemos que $\mathcal{L}(\mathsf{B})=\mathcal{W}$. Para demostrar que $\mathcal{L}(\mathsf{B})=\mathcal{V}$, supongamos lo contrario. Supongamos que existe $\vec{v}\in\mathcal{V}$ tal que $\vec{v}\notin\mathcal{L}(\mathsf{B})$. Entonces podríamos incluir $\vec{v}$ en B y obtendríamos un sistema linealmente independiente con más elementos que la dimensión de $\mathcal{V}$. □

Lección 9

(Lección 9) T-1 Esquema de la Lección 9

Esquema de la *Lección 9*

- *Independencia* lineal
- *Sistema generador* de un espacio
- **BASE** y dimensión

94

(Lección 9) T-2 Sistema de ecuaciones homogéneo: nuestro punto de partida

Suponga $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ con $m<n$ y el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.
(más incógnitas que ecuaciones ($m<n$), *columnas libres*)
Entonces *hay* soluciones no nulas a $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.
Hay combinaciones lineales no triviales $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ que son $\mathbf{0}$

95

(Lección 9) T-3 Independencia lineal

Vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ son (*linealmente*) independientes si:
ninguna combinación lineal es $\vec{0}$

$$(\vec{v}_1)p_1 + (\vec{v}_2)p_2 + \cdots + (\vec{v}_n)p_n \neq \vec{0}$$

excepto la combinación nula (todos p_i nulos).

$$\boxed{\left(\vec{v}_1\right)p_1 + \cdots + \left(\vec{v}_n\right)p_n = \vec{0} \quad \text{solo ocurre cuando todos los } p_i \text{ son cero}}$$

Si $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^m$:

$$\boxed{\left[\boldsymbol{v}_1; \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n\right]\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0} \quad \text{solo ocurre cuando } \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}}$$

96

(Lección 9) T-4 independencia lineal: ejemplos en $\mathbb{R}^2$

¿Puede encontrar números a y b tales que $a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$?

- $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v}$
- $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$
- 2 vectores no alineados
- 3 vectores en $\mathbb{R}^2$

97

(Lección 9) T-5 independencia lineal y rango de una matriz

Las columnas de $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ son:

- independientes:

  Si el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es

- dependientes si:

  $\mathbf{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ para algún $\boldsymbol{c}$ distinto del vector cero.

- independientes si: rango $(\mathbf{A})$
- dependientes si: rango $(\mathbf{A})$

98

(Lección 9) T-6 Espacio generado por un sistema de vectores: Sistema generador

Sistema generador
El sistema de vectores $\mathsf{Z} = [\vec{z}_1; \ldots; \vec{z}_j]$ genera un subespacio $\mathcal{W}$ si sus combinaciones lineales "llenan" dicho subespacio $\mathcal{W}$

- $\mathcal{W}$ consiste en todas las combinaciones lineales de $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_j$.
- $\mathcal{W}$ es el menor subespacio que contiene Z.

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}\Big([\vec{z}_1; \ldots; \vec{z}_j]\Big).$$

Ejemplo

- El espacio columna:
$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{b} \mid \exists \boldsymbol{x} \text{ tal que } \boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}\} = \mathcal{L}\Big(\text{las columnas de } \mathbf{A}\Big).$$
- El espacio nulo:
$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} = \mathcal{L}\Big(\text{soluciones especiales de } \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\Big).$$

99

(Lección 9) T-7 Base de un espacio vectorial

Base de un subespacio $\mathcal{W}$
es un sistema de vectores $\Big[\vec{z}_1; \ldots; \vec{z}_d\Big]$ tales que;

1. generan el subespacio $\mathcal{W}$
2. son linealmente independientes

ejemplos
$\mathbb{R}^3$:

Los vectores $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ son una base de $\mathbb{R}^n$ si la matriz que forman es invertible

Todas las bases de un subespacio $\mathcal{W}$ dado tienen el mismo *número* de vectores

100

(Lección 9) T-8 Dimensión

todas las bases de un subespacio $\mathcal{W}$ tienen el mismo *número* de vectores

La dimensión de un espacio es ese número

Ese número indica como de "grande" es el espacio

101

(Lección 9) T-9 **Ejemplos:** $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

- ¿generan las columnas $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?
- ¿son las columnas una base de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?
- ¿Cuál es el rango$(\mathbf{A})$?
- escriba varias bases distintas de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

$$\boxed{\text{rango}(\mathbf{A}) = \text{n}^{\text{o}} \text{ pivotes} = \text{dimensión de } \mathcal{C}(\mathbf{A})}$$

102

(Lección 9) T-10 **Ejemplos:** $\mathcal{N}(\mathbf{A})$

$$\underset{m\times n}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ¿está $\boldsymbol{v}$ en $\mathcal{N}(\mathbf{A})$?
- ¿Es suficiente $\boldsymbol{v}$ para generar el espacio $\mathcal{N}(\mathbf{A})$?
- escriba otro vector en $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ independiente de $\boldsymbol{v}$.
- ¿generan $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ el espacio $\mathcal{N}(\mathbf{A})$?
- ¿son $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ una base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$?
- ¿Cuál es la dimensión del espacio $\mathcal{N}(\mathbf{A})$?

$$\boxed{\text{n-rango}(\mathbf{A}) = \text{n}^{\text{o}} \text{ variables libres} = \text{dimensión de } \mathcal{N}(\mathbf{A})}$$

103

Fin de la lección

Problemas de la Lección 9

(L-9) PROBLEMA 1. Establezca si los siguientes vectores son o no linealmente independientes, resolviendo $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Decida también, si generan $\mathbb{R}^4$, intentando resolver $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-9) PROBLEMA 2. Señale la opción correcta. Suponga que $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_6$ son seis vectores de $\mathbb{R}^4$.
(a) Estos vectores (generan)(no generan)(podrían no generar) $\mathbb{R}^4$.
(b) Estos vectores (son)(no son)(podrían ser) linealmente independientes.
(c) Si esos vectores son las columnas de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (tiene)(no tiene)(podría no tener) solución.

(d) Si esos vectores son las columnas de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (tiene)(no tiene)(podría no tener) una solución única.
(Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-9) PROBLEMA 3. Encuentre una matriz con la siguiente propiedad, o explique por qué no existe tal matriz.

(a) La solución *completa* a $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ es el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Encuentre $\mathbf{B}$, o diga por qué no existe.

(b) La solución *completa* a $\mathbf{C}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ es el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$. Encuentre $\mathbf{C}$, o diga por qué no existe.

(L-9) PROBLEMA 4. Demuestre que $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ son independientes pero que $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ son dependientes:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Resuelva $\mathbf{A}\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ (donde las $\boldsymbol{v}$s son las columas de $\mathbf{A}$).
(Strang, 2007, ejercicio 1 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-9) PROBLEMA 5. Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

Si $\mathbf{A}^{\intercal} = 2\mathbf{A}$, entonces las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes.

(L-9) PROBLEMA 6. ¿cuáles de los siguientes vectores generan el espacio $\mathbb{R}^3$?

(a) $(1,2,0)$ y $(0,-1,1)$.
(b) $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, y $(1,3,1)$.
(c) $(-1,2,3)$, $(2,1,-1)$, y $(4,7,3)$.
(d) $(1,0,2)$, $(0,1,0)$, $(-1,3,0)$, y $(1,-4,1)$.

(L-9) PROBLEMA 7. ¿Son linealmente dependientes o independientes los siguientes sistemas de vectores? Si son dependientes, escriba un vector como combinación de los otros.

(a) $(-1,2,3)$, $(2,1,-1)$, y $(4,7,3)$ en $\mathbb{R}^3$.
(b) $(1,2,0)$ y $(0,-1,1)$ en $\mathbb{R}^3$.
(c) $(1,2)$, $(2,3)$, y $(8,-2)$ en $\mathbb{R}^2$.
(d) $t^2+2t+1, \quad t^3-t^2, \quad t^3+1,$ y t^3+t+1 en P_3.

(L-9) PROBLEMA 8. Suponga que la única solución de $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. ¿Cuál es el rango y por qué? Las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente ____________.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-9) PROBLEMA 9. **[Importante]** Si $\mathbf{A}$ es de orden 4×6, demuestre que las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes.

(L-9) PROBLEMA 10. $\mathbf{A}$ is a matrix with a nullspace $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\right\}$ spanned by the following three vectors

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\\4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\1\end{pmatrix}$$

(a) Give a matrix $\mathbf{B}$ such that its column space $\mathcal{C}(\mathbf{B})$ is the same as $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. (There is more than one correct answer.) [Thus, any vector $\boldsymbol{y}$ in the nullspace of $\mathbf{A}$ satisfies $\mathbf{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y}$ for some $\boldsymbol{u}$.]
(b) Give a different possible answer to (a): another $\mathbf{B}$ with $\mathcal{C}(\mathbf{B}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

(c) For some vector $\boldsymbol{b}$, you are told that a particular solution to $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ is

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Now, your classmate Zarkon tells you that a second solution is:

$$\boldsymbol{x}_Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

while your other classmate Hastur tells you «No, Zarkon's solution can't be right, but here's a second solution that is correct:»

$$\boldsymbol{x}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Is Zarkon's solution correct, or Hastur's solution, or are both correct? (Hint: what should be true of $\boldsymbol{x}$ - $\boldsymbol{x}_p$ if $\boldsymbol{x}$ is a valid solution?)

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring, 2009

(L-9) PROBLEMA 11. Si el sistema de 9 por 12 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es resoluble para todo $\boldsymbol{b}$, entonces $\mathcal{C}(\mathbf{A}) =$ ____ (Strang, 2007, ejercicio 30 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-9) PROBLEMA 12. Si a una matriz $\mathbf{A}$ se le "añade" una nueva columna extra $\boldsymbol{b}$, entonces el espacio columna se vuelve más grande, a no ser que ____________. Proporcione un ejemplo en el que espacio columna se haga más grande, y uno en el que no. ¿Por qué $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es resoluble cuando el espacio columna no crece al añadir $\boldsymbol{b}$?

(L-9) PROBLEMA 13. **[Importante]**[9] Suponga que el sistema de vectores de $\mathbb{R}^m$ $\left[\boldsymbol{v}_1; \ \dots \ \boldsymbol{v}_n\right]$ genera el subespacio $\mathcal{V}$, y suponga que $\boldsymbol{v}_n$ es una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_{n-1}$. Demuestre que el sistema $\left[\boldsymbol{v}_1; \ \dots \ \boldsymbol{v}_{n-1}\right]$ también genera el subespacio $\mathcal{V}$.

(L-9) PROBLEMA 14. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre una base del espacio columna (del espacio vectorial generado por las columnas) $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.
(b) Encuentre una base del espacio nulo (del conjunto de soluciones del sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$) $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.
(c) Encuentre las condiciones lineales sobre a, b, c, d que garantizan que el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (a, b, c, d)$ tiene solución.

(d) Encuentre la solución completa al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 5, 2007

(L-9) PROBLEMA 15.

(a) Encuentre la solución completa al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[9] *pista:* Piense si el espacio $\mathcal{V}$ se puede expresar como el espacio columna de una matriz $\mathbf{V}$ cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$. Una vez expresado de esa manera, recuerde que las operaciones entre columnas no alteran el espacio columna de la matriz. Por último, transforme $\mathbf{V}$ de manera que transforme una de las columnas en un vector de ceros.

(b) Encuentre una base del espacio columna de la siguiente matriz por bloques de orden 3 por 9 $\begin{bmatrix} \mathsf{A} & 2\mathsf{A} & \mathsf{A}^2 \end{bmatrix}$.
MIT Course 18.06 Final, May 18, 1998

(L-9) PROBLEMA 16. ¿Cuáles de los siguientes vectores generan el espacio de polinomios de, a lo sumo, grado 4; es decir, el conjunto de polinomios $P_3 = \{at^3 + bt^2 + ct + d\}$?
(a) $t+1$, t^2-t, y t^3.
(b) t^3+t y t^2+1.
(c) t^2+t+1, $t+1$, 1, y t^3.
(d) t^3+t^2, t^2-t, $2t+4$, y t^3+2t^2+t+4.

(L-9) PROBLEMA 17. Considere los vectores $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 1)$ y $\boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 1)$.
(a) **Demuestre** que $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ son linealmente independientes.
(b) ¿Pertenece $\boldsymbol{v} = (2, 1, 2)$ al espacio generado por $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$? Explique las razones de su respuesta.
(c) Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a $\boldsymbol{u}_1$ y a $\boldsymbol{u}_2$. Explique su respuesta.

(L-9) PROBLEMA 18.
(a) ¿Son linealmente independientes los siguientes vectores? Explique su respuesta.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Son los siguientes vectores una base de $\mathbb{R}^4$? Explique su respuesta.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(c) ¿Son los siguientes vectores una base del subespacio descrito por el plano tridimensional $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0$? Explique su respuesta.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Encuentre el valor de q para el que los siguientes vectores no generan $\mathbb{R}^3$.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} q \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(L-9) PROBLEMA 19. Suponga que tiene 4 vectores columna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{z}$ en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$.
(a) Dé un ejemplo donde el espacio columna de A contenga $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, pero no a $\boldsymbol{z}$. (escriba unos vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{z}$; y una matriz A que cumplan lo anterior).
(b) ¿Cuáles son las dimensiones del espacio columna y del espacio nulo de su matriz ejemplo A del apartado anterior?

Fin de los Problemas de la Lección 9

LECCIÓN 10: Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz $\mathbf{A}$

2.10. Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz $\mathbf{A}$

Hasta aquí hemos visto dos espacios vectoriales asociados a una matriz $\mathbf{A}$ de orden m por n

- El espacio nulo de $\mathbf{A}$:

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) \;=\; \mathcal{L}\Big(\text{soluciones especiales de } \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\Big) \;=\; \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\} \;\subset\; \mathbb{R}^n$$

- El espacio columna de $\mathbf{A}$:

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) \;=\; \mathcal{L}\Big(\text{columnas de } \mathbf{A}\Big) \;=\; \{\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m \mid \exists\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \text{ tal que } \boldsymbol{b}=\mathbf{A}\boldsymbol{x}\} \;\subset\; \mathbb{R}^m$$

que están relacionados con los sistemas $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

Pero nótese que transponiendo la matriz $\mathbf{A}$ podemos plantear dos sistemas de ecuaciones completamente nuevos, cuya la matriz de coeficientes es $\mathbf{A}^\intercal$ (de n filas y m columnas):

$$(\mathbf{A}^\intercal)\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{A}^\intercal)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}.$$

Así, los espacios nulo y columna asociados a la matriz $(\mathbf{A}^\intercal)$ de orden n por m son

- El espacio nulo de $\mathbf{A}^\intercal$:

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \;=\; \mathcal{L}\Big(\text{soluciones especiales de } (\mathbf{A}^\intercal)\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\Big) \;=\; \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m \mid (\mathbf{A}^\intercal)\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\} \;\subset\; \mathbb{R}^m$$

- El espacio columna de $\mathbf{A}^\intercal$:

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \;=\; \mathcal{L}\Big(\text{columnas de } \mathbf{A}^\intercal\Big) \;=\; \{\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n \mid \exists\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \text{ tal que } \boldsymbol{b}=\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{x}\} \;\subset\; \mathbb{R}^n$$

Nótese que $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ pero $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$; y que $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ pero $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$: el espacio nulo por la izquierda de $\mathbf{A}$

El subespacio $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es el conjunto de soluciones al sistema $(\mathbf{A}^\intercal)\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, que nos pregunta ¿qué combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}^\intercal$ son iguales a cero? Pero esto es lo mismo que preguntar ¿qué combinaciones lineales de las *filas* de $\mathbf{A}$ son iguales a cero? Es decir, las soluciones del siguiente sistema homogéneo

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

lo que justifica el nombre de *espacio nulo por la izquierda* (pues en este sistema homogéneo el vector $\boldsymbol{x}$ multiplica por la izquierda). Consecuentemente podemos expresar el espacio nulo por la izquierda de $\mathbf{A}$ (de orden m por n) como

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \;=\; \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x}\mathbf{A}=\mathbf{0}\}.$$

$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$: el espacio fila de $\mathbf{A}$

El subespacio $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es el conjunto de combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}^\intercal$, es decir, es el conjunto de combinaciones lineales de las *filas* de $\mathbf{A}$. Por este motivo lo denominamos *espacio fila de* $\mathbf{A}$. Consecuentemente podemos expresar el espacio fila de $\mathbf{A}$ de orden m por n como

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \;=\; \{\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n \mid \exists\boldsymbol{x} \text{ tal que } \boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}\mathbf{A}\} \;=\; \mathcal{L}\Big(\text{las filas de } \mathbf{A}\Big).$$

Fíjese que el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{x}\mathbf{A}=\boldsymbol{b}$ nos pregunta *qué combinación lineal de las filas* $\boldsymbol{x}\mathbf{A}$ es igual a $\boldsymbol{b}$.

2.10.1. Encontrando bases para los espacios $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$

Sabemos que aplicando la eliminación de izquierda a derecha *sobre las columnas* de $\mathbf{A}$ podemos encontrar bases para los espacios *columna* $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y *nulo* $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Por tanto, aplicando la eliminación *sobre las columnas* de $\mathbf{A}^{\intercal}$ encontraremos bases para los nuevos subespacios $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$. ¡Pero esto supone que, para encontrar bases de los cuatro espacios, necesitamos aplicar el método de eliminación dos veces! una para $\mathbf{A}$ y otra para $\mathbf{A}^{\intercal}$.

¿Es posible aplicar el método de eliminación sobre las *columnas* de $\mathbf{A}$ y encontrar una base tanto para $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ como para $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$? Afortunadamente si. La siguiente proposición nos da la pista necesaria para hacerlo.

Proposición 2.10.1. *Sean* $\mathbf{A}$ *de orden* m *por* n *y* $\mathbf{E}$ *invertible y de orden* n*, entonces* $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^{\intercal}\right)$, *es decir, dado* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ *se verifica que*

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{x}\mathbf{AE} = \mathbf{0}.$$

Demostración. Veamos las implicaciones en uno y otro sentido.

- Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) \implies \boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{x}\mathbf{AE} = \mathbf{0E} \implies \boldsymbol{x}(\mathbf{AE}) = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^{\intercal}\right)$
- Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^{\intercal}\right) \implies \boldsymbol{x}(\mathbf{AE}) = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{x}\mathbf{AEE}^{-1} = \mathbf{0E}^{-1} \implies \boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

□

Consecuentemente, si $\mathbf{A}$ es de orden m por n y $\mathbf{E}$ es invertible y de orden n, entonces

- un sistema de vectores formado por varias filas $\left[{}_{i_1|}\mathbf{A}, \ldots, {}_{i_r|}\mathbf{A}\right]$ es linealmente independiente si y sólo si el sistema de vectores $\left[{}_{i_1|}\mathbf{AE}, \ldots {}_{i_r|}\mathbf{AE}\right]$ es linealmente independiente.
- la dimensión del espacio fila de $\mathbf{A}$ es igual a la dimensión del espacio fila de $\mathbf{AE}$.
- por tanto, si encontramos una base entre las filas de $\mathbf{AE}$, las correspondientes filas de $\mathbf{A}$ serán una base del espacio fila de $\mathbf{A}$.

El siguiente lema demuestra que las filas con pivote de cualquier forma escalonada $\mathbf{L}$ de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes. Demostramos el resultado sobre $\mathbf{L}$ para ayudarnos en el razonamiento, pero como una matriz escalonada es una pre-escalonada con sus columnas reordenadas; y como reordenar las columnas no cambia los pivotes de fila, el resultado también es cierto para cualquier forma pre-escalonada $\mathbf{K}$.

Ejercicio 31. Demuestre que

Lema 2.10.2. *Si* $\mathbf{L}$ *está escalonada, entonces las filas con pivote son linealmente independientes. Además, cada fila sin pivote es combinación lineal de las filas con pivote que la preceden.*

Pista. Recuerde la demostración del Lema 2.2.2 en la página 109.

Una base para el espacio fila. Sea $\mathbf{E}$ una matriz invertible tal que $\mathbf{AE}$ es (pre)escalonada y sea $\mathbf{S}$ una matriz que selecciona las filas de $\mathbf{AE}$ que forman una base del espacio fila de $\mathbf{AE}$; por ejemplo, las filas pivote:

$$\mathbf{S}(\mathbf{AE}) = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&-4&0&0\\4&4&0&0\\-1&-1&1&0\\-6&-7&3&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&-4&0&0\\-1&-1&1&0\end{bmatrix}.$$

Como $\mathbf{S}$ selecciona una base del espacio fila, entonces para cualquier vector $\boldsymbol{u}$ existe un único vector $\boldsymbol{x}$ (una única combinación lineal de las filas) tal que

$$\boldsymbol{x}\mathbf{SAE} = \boldsymbol{u}\mathbf{AE}.$$

Pero entonces también la ecuación $\boldsymbol{x}\mathbf{SA} = \boldsymbol{u}\mathbf{A}$ tiene una única solución ya que por ser $\mathbf{E}$ invertible

$$\boldsymbol{x}\mathbf{SA} = \boldsymbol{u}\mathbf{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}\mathbf{SAE} = \boldsymbol{u}\mathbf{AE}.$$

Luego $\mathbf{SA}$ (la misma seleccion, pero de las columnas de $\mathbf{A}$) selecciona una base del espacio de fila de $\mathbf{A}$.

Por tanto, la dimensión del espacio fila de una matriz coincide con la dimensión del espacio fila de cualquiera de sus escalonadas, que a su vez coincide con el rango.

Ejemplo 16.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & -1\\ -2 & 0 & 1 & 2\\ 4 & -4 & -3 & -4\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -6 & 5 & 5 & 6\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -4 & -1 & 0\\ 4 & 4 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ -6 & -7 & -1 & 0\\ \hline 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(4)\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -4 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0\\ -6 & -7 & 3 & 0\\ \hline 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{bmatrix}$$

De este proceso de eleiminación, deducimos que:

$$\begin{cases} \text{Una base del espacio columna } \mathcal{C}(\mathbf{A})\text{: Las columnas 1, 2 y 3 de } \mathbf{L} & \Rightarrow\quad \mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\Big(\big[\mathbf{L}_{|1};\ \mathbf{L}_{|2};\ \mathbf{L}_{|3}\big]\Big)\\ \text{Una base del espacio } \textit{fila } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\text{: Las filas 1, 2 y 4 de } \mathbf{A} & \Rightarrow\quad \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \mathcal{L}\Big(\big[\,{}_{1|}\mathbf{A};\ {}_{2|}\mathbf{A};\ {}_{4|}\mathbf{A}\big]\Big)\\ \text{Una base del espacio nulo } \mathcal{N}(\mathbf{A})\text{: La última columna de } \mathbf{E} & \Rightarrow\quad \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\Big(\big[\mathbf{E}_{|4}\big]\Big)\end{cases}$$

Una base para el espacio nulo por la izquierda. Nos falta una regla sencilla para encontrar una base del espacio *nulo por la izquierda*. Y puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^{\intercal}\right)$ una buena estrategia es simplificar al máximo alguna forma escalonada de $\mathbf{A}$, y mirar ahí qué combinaciones de las filas son nulas. Por ello, aplicaremos la eliminación Gauss-Jordan hasta llegar a $\mathbf{R}$, una forma escalonada *reducida* (es decir, hasta que los pivotes sean iguales a 1 y con ceros a derecha e izquierda). En el ejemplo anterior:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1\\ -2 & 0 & 1 & 2\\ 4 & -4 & -3 & -4\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -6 & 5 & 5 & 6\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(4)\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -4 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0\\ -6 & -7 & 3 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{[(2)\mathbf{1}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0\\ -5 & -7 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 3 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{[(\frac{1}{2})\mathbf{1}]\\ [(\frac{-1}{4})\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0\\ -1 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{R}\end{bmatrix}$$

Ahora, en la forma escalonada reducida es inmediato ver que cada fila sin pivote es combinación de las filas con pivote que la anteceden. En particular

$$\begin{cases} {}_{3|}\mathbf{R} = 2\big({}_{1|}\mathbf{R}\big) - 1\big({}_{2|}\mathbf{R}\big) & \Rightarrow\quad (-2,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0)\mathbf{R} = \mathbf{0}\\ \quad\text{y} & \\ {}_{5|}\mathbf{R} = -1\big({}_{1|}\mathbf{R}\big) + 1\big({}_{2|}\mathbf{R}\big) + 3\big({}_{3|}\mathbf{R}\big) & \Rightarrow\quad (1,\ \ -1,\ \ 0,\ \ -3,\ \ 1)\mathbf{R} = \mathbf{0}\end{cases}$$

Fíjese que efectivamente

$$\begin{cases} {}_{3|}\mathbf{A} = 2\big({}_{1|}\mathbf{A}\big) - 1\big({}_{2|}\mathbf{A}\big) & \Rightarrow\quad (-2,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0)\mathbf{A} = \mathbf{0}\\ \quad\text{y} & \\ {}_{5|}\mathbf{A} = -1\big({}_{1|}\mathbf{A}\big) + 1\big({}_{2|}\mathbf{A}\big) + 3\big({}_{3|}\mathbf{A}\big) & \Rightarrow\quad (1,\ \ -1,\ \ 0,\ \ -3,\ \ 1)\mathbf{A} = \mathbf{0}\end{cases}$$

> En el proceso de eliminación $\mathbf{A} \to \mathbf{R}$ "se ven" bases para los cuatro subespacios fundamentales asociados a $\mathbf{A}$

$$\text{Base } \mathcal{C}(\mathbf{A}) = \left[\begin{pmatrix} 1\\0\\2\\0\\-1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\3 \end{pmatrix} \right] = \left[\mathbf{R}_{|1};\ \mathbf{R}_{|2};\ \mathbf{R}_{|3} \right] \qquad \text{Base } \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left[\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right] = \left[\mathbf{E}_{|4} \right]$$

$$\text{Base } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \left[\begin{pmatrix} 1\\-2\\-1\\-1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2\\0\\1\\2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right] = \left[{}_{1|}\mathbf{A};\ {}_{2|}\mathbf{A};\ {}_{4|}\mathbf{A} \right] \qquad \text{Base } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \left[\begin{pmatrix} -2\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\-3\\1 \end{pmatrix} \right]$$

Nótese que en la base de soluciones de $\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0}$, (la base de soluciones el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$), sistemáticamente hemos asignado los siguientes valores a las variables que multiplican a las filas sin pivote:

- En el primer vector se asigna un 1 a la variable correspondiente a la *primera* fila sin pivotes y 0 al resto de variables correspondientes a filas sin pivote.
- En el segundo vector se asigna un 1 a la variable correspondiente a la *segunda* fila sin pivotes y 0 al resto de variables correspondientes a filas sin pivote.
- En el tercer vector se asigna un 1 a la variable correspondiente a la *tercera*...

Por este motivo las componentes de los vectores correspondientes a las filas sin pivote forman una matriz identidad (en verde en el ejemplo anterior). De hecho, es la estructura que de manera natural arrojan las soluciones especiales del siguiente procedimiento alternativo: [10].

Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{R}^{\intercal}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$, *si aplicamos la eliminación sobre* $\mathbf{R}^{\intercal}$, *las nuevas soluciones especiales serán una base de* $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

Continuando el ejemplo anterior

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{R}^{\intercal}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc} 1&0&2&0&-1\\ 0&1&-1&0&1\\ 0&0&0&1&3\\ 0&0&0&0&0\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{5}]\\ [(-3)\mathbf{4}+\mathbf{5}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccccc} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ \hline 1&0&-2&0&1\\ 0&1&1&0&-1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&-3\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

A su vez, y como ya sabemos, las filas con pivote de las columnas con pivote de la matriz $\mathbf{R}$ también forman una matriz identidad. Los unos en azul del ejemplo forman la diagonal de dicha matriz identidad.

Un caso en el que es inmediato ver una base del Espacio Nulo por la izquierda Ambos hechos (la matriz identidad de orden r en $\mathbf{R}$ y la matriz identidad de orden $n-r$ en las columnas que resultan ser soluciones especiales) sugieren una sencilla ilustración para el caso en que la forma escalonada reducida resulta tener las primeras filas con pivote, de manera que se encuentran sobre las filas sin pivote. Es decir, el caso en que las filas con pivote de $\mathbf{R}$ son consecutivas y aparecen en la parte superior de la matriz:

Sea $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ de rango r y $\underset{n\times n}{\mathbf{E}}$ (no singular) tales que $\mathbf{AE} = \mathbf{R}$, es una forma escalonada reducida cuyas primeras filas tienen pivote, y que escribimos como una matriz por bloques:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \underset{r\times r}{\mathbf{I}} & \underset{r\times n-r}{\mathbf{0}} \\ \underset{m-r\times r}{\mathbf{G}} & \underset{m-r\times n-r}{\mathbf{0}} \end{bmatrix},$$

[10] Evidentemente también se puede obtener una base a partir de $\mathbf{A}$ mediante eliminación gaussiana por columna de $\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}^{\intercal}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]$ pero en general son necesarios más pasos que si partimos de $\mathbf{R}^{\intercal}$.

entonces aplicando la eliminación sobre $\mathsf{R}^\intercal$ tendremos

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{R}^\intercal\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}\mathsf{I} & \mathsf{G}^\intercal\\ \mathsf{0} & \mathsf{0}\\ \hline \mathsf{I} & \mathsf{0}\\ \mathsf{0} & \mathsf{I}\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc}\mathsf{I} & \mathsf{0}\\ \mathsf{0} & \mathsf{0}\\ \hline \mathsf{I} & -\mathsf{G}^\intercal\\ \mathsf{0} & \mathsf{I}\end{array}\right];$$

por lo que las columnas de la matriz por bloques $\begin{bmatrix}-\mathsf{G}^\intercal\\ \mathsf{I},\end{bmatrix}$ es decir las filas de la matriz por bloques $\begin{bmatrix}-\mathsf{G} & \mathsf{I}\end{bmatrix}$, son una base de $\mathcal{N}\left(\mathsf{R}^\intercal\right)=\mathcal{N}\left(\mathsf{A}^\intercal\right)$.

2.11. Suma e intersección de subespacios

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ subespacios de un espacio vectorial $\mathcal{V}$. La suma de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, que escribimos como $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, es el conjunto de vectores de $\mathcal{V}$ que se pueden escribir como $\vec{a}+\vec{b}$ con $\vec{a}\in\mathcal{A}$ y $\vec{b}\in\mathcal{B}$. Ya sabemos que la intersección $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ es un subespacio. Veamos que la suma $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ también lo es:

Proposición 2.11.1. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subespacios de $\mathcal{V}$, entonces la suma $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ también es un subespacio.*

Demostración. Sean $\vec{a}_1,\vec{a}_2\in\mathcal{A}$ y $\vec{b}_1,\vec{b}_2\in\mathcal{B}$. Si $\vec{p}=\vec{a}_1+\vec{b}_1$ y $\vec{q}=\vec{a}_2+\vec{b}_2$, entonces $\vec{p},\vec{q}\in\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Veamos que cualquier combinación lineal también también pertenece a $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Sean $x,y\in\mathbb{R}$, entonces

$$x\left(\vec{p}\right)+y\left(\vec{q}\right)=x\Big(\vec{a}_1+\vec{b}_1\Big)+y\Big(\vec{a}_2+\vec{b}_2\Big)=\Big(x(\vec{a}_1)+y(\vec{a}_2)\Big)+\Big(x(\vec{b}_1)+y(\vec{b}_2)\Big)\in\mathcal{A}+\mathcal{B},$$

pues $\Big(x(\vec{a}_1)+y(\vec{a}_2)\Big)\in\mathcal{A}$ y $\Big(x(\vec{b}_1)+y(\vec{b}_2)\Big)\in\mathcal{B}$. □

Proposición 2.11.2. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subespacios de $\mathcal{V}$, entonces* $\dim(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\dim(\mathcal{A})+\dim(\mathcal{B})-\dim(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$.

Demostración. Asumamos que $\dim(\mathcal{A})=p$, $\dim(\mathcal{B})=q$ y $\dim(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})=r$, y sean $\mathsf{A}=\left[\vec{a}_1;\ldots;\vec{a}_p\right]$ y $\mathsf{B}=\left[\vec{b}_1;\ldots;\vec{b}_q\right]$ bases de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Consideremos el sistema de vectores $\mathsf{Z}=\left[\vec{a}_1;\ldots;\vec{a}_p;\vec{b}_1;\ldots;\vec{b}_q\right]$ que genera $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Para encontrar una base de $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ entre los vectores de Z procedemos aplicando transformaciones elementales *"de izquierda a derecha"* como hicimos en la Proposición 2.8.2 en la página 140. Cada vector $\vec{b}_i$ que acaba siendo eliminado necesariamente pertenece a $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$. Puesto que $\dim(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})=r$, tras el proceso de eliminación *"de izquierda a derecha"*, habremos eliminado r vectores de B. Dichos vectores son necesariamente una base de $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ y el conjunto de vectores de Z que no se anulan es una base de $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Así, $\dim(\mathcal{A}+\mathcal{B})=(p+q)-r=\dim(\mathcal{A})+\dim(\mathcal{B})-\dim(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$. □

Definición 50 (Suma directa)**.** *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subespacios de $\mathcal{V}$, y su intersección contiene únicamente al vector nulo, $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\vec{0}$; entonces la suma de los subespacios $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se denomina* suma directa *y se denota con $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$.*

Definición 51 (Espacios complementarios)**.** *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subespacios de $\mathcal{V}$, y su suma directa es todo el espacio, $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}=\mathcal{V}$, entonces decimos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son* subespacios complementarios.

Veamos que si $\mathcal{V}=\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$, cualquier vector $\vec{v}\in\mathcal{V}$ se puede descomponer de manera única en la suma de dos vectores, uno que pertenece a $\mathcal{A}$ y otro que pertenece a $\mathcal{B}$.

Proposición 2.11.3. *Si $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ con $\vec{a}\in\mathcal{A}$, $\vec{b}\in\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\{\vec{0}\}$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son únicos.*

Demostración. Imagine que $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{v}=\vec{a}_*+\vec{b}_*$, con $\vec{a},\vec{a}_*\in\mathcal{A}$ y $\vec{b},\vec{b}_*\in\mathcal{B}$. Entonces

$$\vec{v}-\vec{v}=(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}_*+\vec{b}_*)=\underbrace{(\vec{a}-\vec{a}_*)}_{\in\mathcal{A}}-\underbrace{(\vec{b}+\vec{b}_*)}_{\in\mathcal{B}}=\vec{0}\qquad\Longrightarrow\qquad(\vec{a}-\vec{a}_*)=-(\vec{b}+\vec{b}_*)\in\mathcal{B}.$$

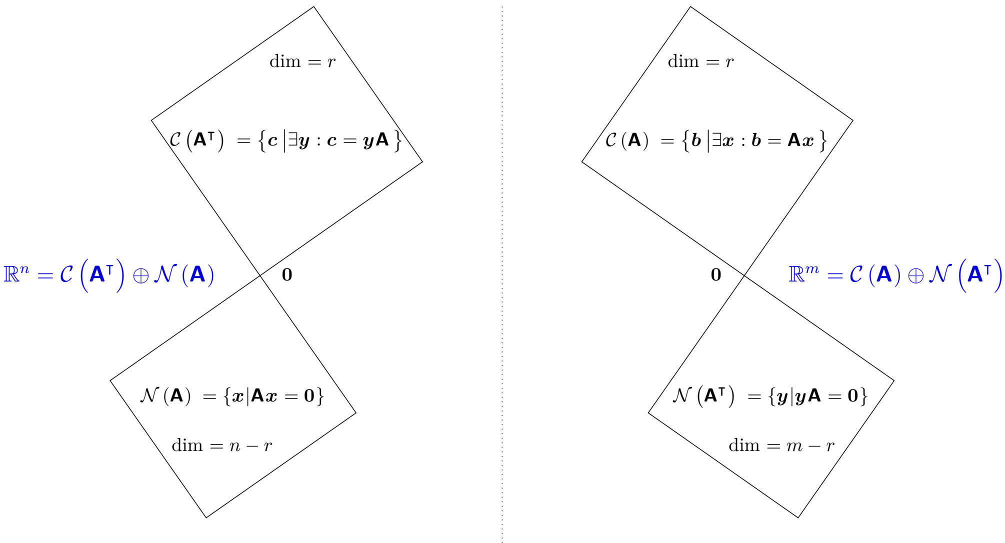
Es decir, $(\vec{a}-\vec{a}_*)\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\{\vec{0}\}$, y por tanto $(\vec{a}-\vec{a}_*)=\vec{0}=(\vec{b}-\vec{b}_*)$, es decir, $\vec{a}=\vec{a}_*$ y $\vec{b}=\vec{b}_*$. □

Para una matriz $\mathbf{A}$ de orden m por n con rango t, el subespacio $\mathcal{C}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^m$ tiene dimensión r y el subespacio $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal) \subset \mathbb{R}^m$ tiene dimensión $m-r$, por tanto, $\dim(\mathcal{C}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)) = 0$, y $\mathbb{R}^m = \mathcal{C}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$. Por otra parte el subespacio $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) \subset \mathbb{R}^n$ tiene dimensión r y el subespacio $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^n$ tiene dimensión $n-r$, por tanto, $\dim(\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A})) = 0$, y $\mathbb{R}^n = \mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Así, si $\mathbf{A}$ es de orden m por n, por la Proposición 2.11.3, todo vector de $\mathbb{R}^m$ se puede descomponer en la suma de un vector de $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$ más otro de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$; y todo vector de $\mathbb{R}^n$ se puede descomponer en la suma de un vector de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ más otro de $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$.

El siguiente teorema y dibujo resume lo visto hasta aquí.

Teorema 2.11.4 (Teorema Fundamental del Álgebra (parte 1))**.** *Sea* $\mathbf{A}$ *de orden* m *por* n*, entonces el espacio columna y el espacio fila tienen la misma dimensión, que es igual al rango* r *de la matriz. El espacio nulo tiene dimensión* $n-r$ *y el espacio nulo por la izquierda tiene dimensión* $m-r$*.*



Lección 10

(Lección 10) T-1 Esquema de la Lección 10

Esquema de la *Lección 10*

- Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz $\mathbf{A}$
  - Espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$
  - Espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$
  - Espacio fila $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$
  - Espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$

104

(Lección 10) T-2 **Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz $\mathbf{A}$**

¿Donde están estos subespacios si $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$?

- Espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$
- Espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$
- Espacio fila
  Combinaciones lineales de las filas
  Combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}^\intercal = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$
- Espacio nulo por la izquierda de $\mathbf{A}$, $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$

105

(Lección 10) T-3 **Bases de los 4 subespacios: Espacio fila**

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\ {[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 1 & -2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{2}]}\\ {[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline -1 & 2 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{E}}\right]$$

operaciones preservan $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ (pero no el espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$)

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \neq \mathcal{C}\left(\mathbf{L}^\intercal\right) \neq \mathcal{C}\left(\mathbf{R}^\intercal\right); \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \text{ pero } \notin \mathcal{C}\left(\mathbf{R}^\intercal\right)$$

¿Cuál es la dimensión del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$?
¿base del espacio fila de $\mathbf{A}$?
¿base del espacio columna de $\mathbf{A}$?

106

(Lección 10) T-4 **Espacio nulo por la izquierda: ¿por qué ese nombre?**

$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$

$$\mathbf{A}^\intercal \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{A}^\intercal & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir...

$$\boldsymbol{y}\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} & \mathbf{A} & \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

107

(Lección 10) T-5 Bases de los 4 subespacios: Espacio nulo por la izquierda

Ejemplo 17.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{por filas}]{\text{eliminación}}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{U}$$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}]=\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&2&3&1&1&0&0\\1&1&2&1&0&1&0\\1&2&3&1&0&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&2&3&1&1&0&0\\0&-1&-1&0&-1&1&0\\0&0&0&0&-1&0&1\end{array}\right]=[\mathbf{U}|\mathbf{E}]$$

Comprobemos que: $\mathbf{EA}=\mathbf{U}\dots$

108

Nótese que en este caso, si $\mathbf{A}$ tiene m filas, la matriz identidad $\mathbf{I}$, tiene que ser de orden m.

$$\mathbf{E}\left[\underset{m\times n}{\mathbf{A}}\;\underset{m\times m}{\mathbf{I}}\right]=\left[\underset{m\times n}{\mathbf{U}}\;\underset{m\times m}{\mathbf{E}}\right]$$

(Lección 10) T-6 Bases de los 4 subespacios: Espacio nulo por la izquierda

$$\mathbf{EA}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{U}$$

Cuál es el rango de $\mathbf{A}$?
y la dimensión del espacio nulo por la izquierda?
¿puede ver una base del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$?
¿Que combinaciones de las filas de $\mathbf{A}$ dan una fila de ceros?

$$\underset{m\times n}{\mathbf{A}};\qquad \dim\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)=\quad;\qquad \dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)=\quad.$$

109

(Lección 10) T-7 Eliminación por columnas no modifica el espacio nulo por la izquierda

Sea $\underset{n\times n}{\mathbf{E}}$ *invertible* (producto de matrices elementales) entonces

- *Si* $\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$
$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}=\mathbf{0}\quad\text{y}\quad\boldsymbol{x}\mathbf{AE}=\mathbf{0E}=\mathbf{0}\quad\Rightarrow\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^{\intercal}\right);$$
- *Si* $\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^{\intercal}\right)$
$$\boldsymbol{x}\mathbf{AE}=\mathbf{0}\quad\text{y}\quad\boldsymbol{x}\mathbf{A}=\mathbf{0E}^{-1}=\mathbf{0}\quad\Rightarrow\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right).$$

Por tanto,
$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)=\mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^{\intercal}\right).$$

110

Podemos comprobar en el último ejemplo que

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}\mathbf{R}=\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

(Lección 10) **T-8** **Encontrando una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ mediante eliminación por columnas**

Sea $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ y $\underset{n\times n}{\mathbf{E}}$ (no singular) tales que $\mathbf{AE}=\mathbf{R}$, donde

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\underset{r\times r}{\mathbf{I}} & \underset{r\times n-r}{\mathbf{0}}\\ \underset{m-r\times r}{\mathbf{G}} & \underset{m-r\times n-r}{\mathbf{0}}\end{bmatrix},$$

(suponiendo que las primeras variables son pivote) entonces

$$\begin{bmatrix}-\underset{m-r\times r}{\mathbf{G}} & \underset{m-r\times m-r}{\mathbf{I}}\end{bmatrix}\mathbf{R}=\begin{bmatrix}-\mathbf{G} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{G} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\underset{m-r\times m}{\mathbf{0}}$$

por tanto, las filas de la matriz $\underset{m-r\times m}{\begin{bmatrix}-\mathbf{G} & \mathbf{I}\end{bmatrix}}$ son una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{R}^{\intercal}\right)=\mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^{\intercal}\right)=\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$. 111

(Lección 10) **T-9** **Encontrando una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ mediante eliminación por columnas**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&-1&-1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{R}$$

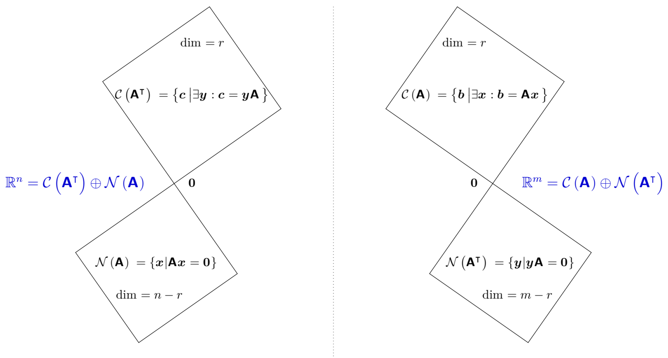
donde

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underset{2\times 2}{\mathbf{I}} & \underset{2\times 2}{\mathbf{0}}\\ \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} & \underset{1\times 2}{\mathbf{0}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underset{2\times 2}{\mathbf{I}} & \underset{2\times 2}{\mathbf{0}}\\ \underset{1\times 2}{\mathbf{G}} & \underset{1\times 2}{\mathbf{0}}\end{bmatrix};$$

es decir, $\underset{1\times 2}{\mathbf{G}}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$.

Las filas de $\begin{bmatrix}-\underset{1\times 2}{\mathbf{G}} & \underset{1\times 1}{\mathbf{I}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ son base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$. 112

(Lección 10) **T-10** **Los 4 espacios**



$\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ ¿dimensiones?

- $\dim\left(\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)\right)=\qquad\qquad\qquad=\dim\left(\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\right)$
- $\dim\left(\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)\right)=$
- $\dim\left(\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\right)=$

113

Fin de la lección

Problemas de la Lección 10

(L-10) PROBLEMA 1. Encuentre la dimensión, y construya una base para los cuatro subespacios asociados con cada una de las siguientes matrices

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

(b) ¿Cuánto suma $\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$? ¿Y $\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A})$?

(c) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) ¿Cuánto suma $\dim \mathcal{C}(\mathbf{U}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{U}^\intercal)$? ¿Y $\dim \mathcal{C}(\mathbf{U}^\intercal) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{U})$?

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 2. Describa los cuatro subespacios en el espacio tridimensional asociados con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 3.

(a) Si el rango de una matriz 7 por 9 es 5, ¿Cuáles son las dimensiones de sus cuatro subespacios fundamentales? ¿Cuánto suman las cuatro dimensiones?

(b) Si es rango de una matriz de 3 por 4 es 3, ¿cuáles son el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$?

(Strang, 2007, ejercicio 20 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 4. Si $\mathbf{A}$ tiene los mismos cuatro subespacios fundamentales que $\mathbf{B}$, ¿Es cierto que $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$?
(Strang, 2007, ejercicio 19 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 5. Encuentre la dimensión y una base para cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{AE}; \quad \text{donde} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 6. Encuentre las dimensiones de los siguientes espacios vectoriales:

(a) El espacio de todos los vectores en $\mathbb{R}^4$ tales que la suma de sus componentes es cero.

(b) El espacio nulo de la matriz identidad de 4 por 4.

(c) El espacio de todas las matrices de 4 por 4

(Strang, 2007, ejercicio 32 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-10) PROBLEMA 7. Sin multiplicar las matrices, encuentre bases de los espacios fila y columna de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

¿Cómo sabe a partir de esta factorización que $\mathbf{A}$ no es invertible?
(Strang, 2007, ejercicio 36 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son sub-espacios vectoriales? Para aquellos casos que no lo son, muestre un ejemplo que viole alguna de las propiedades.

(a) Dada una matriz $\mathbf{A}$ de orden 3×5 con rango completo por filas, el conjunto de soluciones del sistema

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) El conjunto de todos los vectores $\boldsymbol{x}$ tales que $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{0}$ y $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle=\boldsymbol{0}$ para los vectores particulares $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$.

(c) Todas las matrices de orden 3×5 cuyo espacio columna contiene al vector $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

(d) Todas las matrices de orden 5×3 con $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ en su espacio nulo.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring, 2009

(L-10) Problema 9. ¿Cuál es el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y el espacio fila $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$ de la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&5&-2\\2&-1&3&-4\\-1&4&2&2\end{bmatrix}$$

MIT Course 18.06 Final. May 18, 1998

(L-10) Problema 10. Si $\underset{5\times4}{\mathbf{A}}$ es una matriz con sus cuatro columnas linealmente independientes, escriba explícitamente:

(a) El espacio nulo de $\mathbf{A}$.
(b) La dimensión del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$.
(c) Una solución particular $\boldsymbol{x}_p$ del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{A}_{|2}$.
(d) La solución general (completa) de $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{A}_{|2}$.
(e) La forma escalonada reducida $\mathbf{R}$ de la matriz $\mathbf{A}$.

(L-10) Problema 11. Verdadero o falso

(a) Si una matriz es cuadrada $(m=n)$, entonces el espacio columna es igual al espacio fila.
(b) La matriz $\mathbf{A}$ y la matriz $(-\mathbf{A})$ comparten los mismos cuatro sub-espacios fundamentales.
(c) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ comparten los mismos cuatro sub-espacios fundamentales, entonces $\mathbf{A}$ es un múltiplo de $\mathbf{B}$.
(d) Indique si la siguiente aseveración es verdadera o falsa. Si es verdadera explique el motivo, si es falsa encuentre un contraejemplo: *"Un sistema con n ecuaciones y n incógnitas es resoluble cuando las columnas de la matriz de coeficientes son independientes."*

(L-10) Problema 12. Se conoce la siguiente información sobre $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix};\qquad\text{y que}\qquad\mathbf{A}\boldsymbol{w}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18\\9\end{pmatrix}.$$

De hecho, $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es siempre algún múltiplo del vector $\begin{pmatrix}-2, & 1\end{pmatrix}$ sea cual sea el vector $\underset{4\times1}{\boldsymbol{x}}$.

(a) ¿Cuál es el orden y el rango de $\mathbf{A}$?
(b) ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$?
(c) ¿Cuál es la dimensión del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$?
(d) ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$?
(e) Encuentre una solución $\boldsymbol{x}$ no nula al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

(L-10) Problema 13. Sea la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{|1}&\mathbf{A}_{|2}&\mathbf{A}_{|3}&\mathbf{A}_{|4}&\mathbf{A}_{|5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&5&1&0\\2&1&4&2&1\\3&0&9&3&1\\-1&-1&-1&-1&2\end{bmatrix}$$

con su forma escalonada reducida por columnas $\mathbf{R}$ calculada mediante eliminación gaussiana sin efectuar permutaciones:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & -1 & 5 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 9 & 3 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 3/8 & 2/8 & -3 & -1 & -1/8\\ -5/8 & 2/8 & 2 & 0 & -1/8\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1/8 & 2/8 & 0 & 0 & 3/8 \end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{R}\\ \hline \mathbf{E}\end{bmatrix}$$

(a) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$? ¿y las dimensiones del espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, del espacio fila $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$ y del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$?
(b) Encuentre una base del espacio fila $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$.
(c) Encuentre una base del espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.
(d) Encuentre una base del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.
(e) Exprese $\mathbf{A}_{|3}$ como una combinación lineal de $\mathbf{A}_{|1}$, $\mathbf{A}_{|2}$, $\mathbf{A}_{|4}$ y $\mathbf{A}_{|5}$.

(L-10) PROBLEMA 14. Construya (si es que es posible) una matriz cuyo espacio nulo esté generado por todas las combinaciones de $(2,2,1,0)$ y $(3,1,0,1)$.
(Strang, 2007, ejercicio 60 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-10) PROBLEMA 15. Construya (si es que es posible) una matriz cuyo espacio nulo sea todas las combinaciones de $(4,3,2,1)^\intercal$
(Strang, 2007, ejercicio 61 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-10) PROBLEMA 16.

(a) Suponga que el producto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es la matriz nula: $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. Entonces el espacio (I)______________ de la matriz $\mathbf{A}$ contiene el espacio (II)______________ de la matriz $\mathbf{B}$. También el espacio (III)______________ de la matriz $\mathbf{B}$ contiene el espacio (IV)______________ de la matriz $\mathbf{A}$. (incluya los nombres de los cuatro espacios fundamentales en los lugares apropiados)

(I)______________, (II)______________, (III)______________, (IV)______________

(b) Suponga que la matriz $\mathbf{A}$ es de dimensiones 5 por 7 con rango r, y $\mathbf{B}$ es de dimensiones 7 por 9 de rango s. ¿Cuáles son las dimensiones de los espacios (I) y (II)? Del hecho de que el espacio (I) contiene el espacio (II), ¿qué sabe acerca de $r+s$?

(L-10) PROBLEMA 17. Mediante eliminación gausiana por columnas (y posiblemente algún intercambio de columnas) sobre la matriz $\mathbf{A}$ de orden 4×8

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 2 & -2 & 1 & -5 & 0 & 2 & -3\\ -1 & -2 & 1 & -2 & 3 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -2 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 2/4 & -2 & -2/4 & -3 & 1 & 0 & -2 & 3/4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2/4 & 0 & 2/4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 3/4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -2/4 & 0 & -2/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{R}\\ \hline \mathbf{E}\end{bmatrix}$$

(a) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$?
(b) ¿Cuáles son las dimensiones de los cuatro espacios fundamentales de $\mathbf{A}$?
(c) ¿Cuantas soluciones tiene el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$? ¿Depende la respuesta de cómo es $\boldsymbol{b}$? Justifique su respuesta.

(d) ¿Son las filas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes? ¿Por qué?
(e) Escriba una base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ (del conjunto de soluciones del sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$).
(f) Escriba una base del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

Basado en *MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2004*

(L-10) Problema 18. Sea la matriz $\mathbf{R}$ de dimensiones 5 por 3 (en su forma escalonada reducida por columnas) con tres pivotes ($r = 3$).

(a) ¿Cual es el espacio nulo de $\mathbf{R}$?
(b) Sea la matriz por bloques $\mathbf{B}$ de 10 por 3; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ 2\mathbf{R} \end{bmatrix}$. ¿Cuál es la forma escalonada reducida por columnas de esta matriz? ¿y su rango?
(c) Sea la matriz por bloques $\mathbf{C}$ de 10 por 6; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$. ¿Cuál es la forma escalonada reducida por columnas de esta matriz?
(d) ¿Cual es el rango de $\mathbf{C}$?
(e) ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo de $\mathbf{C}^{\intercal}$; $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{C}^{\intercal}\right)$?

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall 1993

(L-10) Problema 19. Sea el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{cuya solución completa es } \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, c, d \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) (1^{pts}) ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial generado por las filas de $\mathbf{A}$? Explique su respuesta.
(b) (1^{pts}) ¿Quién es $\mathbf{A}$ (escriba la matriz completa)? Explique su respuesta.
(c) (0.5^{pts}) ¿Para qué vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución?

(L-10) Problema 20. ¿Falso o verdadero? (proporcione una razón aceptable)

(a) Si las columnas de una matriz son dependientes, también lo son las filas.
(b) El espacio columna de una matriz de 2 por 2 es el mismo que su espacio fila.
(c) El espacio columna de una matriz 2 por 2 tiene la misma dimensión que su espacio fila.
(d) Las columnas de una matriz son una base para el espacio columna.

(Strang, 2007, ejercicio 28 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-10) Problema 21. Si $\mathbf{A}$ es una matriz y $\mathbf{R}$ es su forma escalonada reducida **por filas**. Conteste verdadero o falso a las siguientes afirmaciones. (Si hay contraejemplos a las afirmaciones, debe elegir "falso" como respuesta).

(a) Si $\boldsymbol{x}$ es una solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ entonces también es solución al sistema $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(b) Si $\boldsymbol{x}$ es una solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces también es solución al sistema $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(c) ¿Y si $\mathbf{R}$ fuera la forma reducida **por columnas** de $\mathbf{A}$?

basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall 2008

Fin de los Problemas de la Lección 10

LECCIÓN 11: Repaso

2.12. Repaso

Lección 11

(Lección 11) T-1 Esquema de la Lección 11

Esquema de la *Lección 11*

- Bases de nuevos espacios vectoriales
- Matrices de rango uno
- Variables libres

114

(Lección 11) T-2 Un nuevo espacio vectorial

$\mathbb{R}^{3\times 3}$: ¡Todas las matrices 3×3! $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; $c\mathbf{A}$; $\underset{3\times 3}{\mathbf{0}}$

subespacios de $\mathbb{R}^{3\times 3}$

- $\mathcal{U}$: Todas las matrices triangulares superiores
- $\mathcal{S}$: Todas las matrices simétricas
- $\mathcal{U} \cap \mathcal{S}$: Intersección de los dos anteriores:

¿Cuál es la dimensión de estos subespacios?
¿Es $\mathcal{U} \cup \mathcal{S}$ un subespacio?
Sea $\mathcal{U} + \mathcal{S}$ el conjunto de todas las sumas de cualquier vector de $\mathcal{U}$ + cualquiera de $\mathcal{S}$; entonces $\mathcal{U} + \mathcal{S} =$?

115

(Lección 11) T-3 Matrices de rango 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & & \end{bmatrix}$$

- ¿Una base del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$?:
- ¿Una base del espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$?

¿Dimensión de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, dimensión de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ y $\text{rango}\left(\mathbf{A}\right)$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Toda matriz de rango uno tiene una descomposición de la forma

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_{|1}\right]\left[{}_{1|}\mathbf{A}\right]^{\intercal} = \text{matriz columna por matriz fila}$$

116

(Lección 11) T-4 **Matrices de rango 1**

Suponga el subconjunto de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \right\}$$

¿Es $\mathcal{S}$ un subespacio?
¿dimensión y base?
$\mathcal{S}$ es espacio nulo de cierta matriz $\mathbf{A}$ $(\mathbf{A}\boldsymbol{v} = 0)$... ¿Qué matriz?

117

(Lección 11) T-5 **Matrices de rango 1**

$$\underset{1\times 4}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \text{rango}\,(\mathbf{A}) = \qquad\qquad \mathcal{S} = \mathcal{N}\,(\mathbf{A})$$

- $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{N}\,(\mathbf{A}) =$
- ¿base de $\mathcal{S}=\mathcal{N}\,(\mathbf{A})$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\dim \mathcal{C}\,(\mathbf{A}^\intercal) =$
- $\dim \mathcal{N}\,(\mathbf{A}^\intercal) =$ ¿base $\mathcal{N}\,(\mathbf{A}^\intercal)$?
- $\dim \mathcal{C}\,(\mathbf{A}) =$

118

(Lección 11) T-6 Un problema de Micro

Resuelva Y en *términos de X* para obtener la FPP

$$\begin{cases} X & = 4L_x \\ \quad Y & = 3L_y \\ \quad\quad L_x + L_y & = 80 \end{cases} \quad\to\quad \begin{cases} X \quad - 4L_x \quad & = 0 \\ \quad Y \quad\quad - 3L_y & = 0 \\ \quad\quad L_x + \; L_y & = 80 \end{cases}$$

(*"en términos de" X significa X libre*)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -80 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -80 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}] \\ [(80)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & -4 & 320 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 0 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = L_y \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 - 4L_y \\ 3L_y \\ 80 - L_y \\ L_y \end{pmatrix}$$

"en términos de" L_y

119

(Lección 11) T-7 Variable libre

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & -4 & 320 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(\frac{-1}{4})\mathbf{4}] \\ [(-320)\mathbf{4}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 240 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 & 80 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 240 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow a = X \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 240 - \frac{3}{4}X \\ \frac{1}{4}X \\ 80 - \frac{1}{4}X \end{pmatrix}$$

"en términos de" X

120

(Lección 11) T-8 Variables libres

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = -1 \\ -x - 2y + 3z + 5w = -5 \\ -x - 2y - z - 7w = 7 \end{cases}$$

1. Resuelva en función de y y w
2. Resuelva en función de x y w
3. Resuelva en función de x y z
4. Resuelva en función de x y y

121

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -2 & 3 & 5 & -5 \\
-1 & -2 & -1 & -7 & 7 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 6 & -6 \\
-1 & 0 & -2 & -6 & 6 \\ \hline
1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{3}+\mathbf{4}] \\ [(3)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline
1 & -2 & 1 & -4 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|c}
-2 & -4 & 4 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 3 \\
0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{l}
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{1}] \\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}
\left[\begin{array}{cc|c}
1 & 0 & 0 \\
\frac{-1}{2} & -2 & 2 \\
0 & -3 & 3 \\
0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\frac{-1}{3})\mathbf{1}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}
\left[\begin{array}{cc|c}
1 & 0 & 0 \\
\frac{-1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & \frac{-1}{3} & 1
\end{array}\right]
\\[2ex]
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{1}] \\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}
\left[\begin{array}{cc|c}
1 & 0 & 0 \\
\frac{-1}{2} & -2 & 2 \\
0 & -3 & 3 \\
0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{2}] \\ [(\frac{1}{2})\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}
\left[\begin{array}{cc|c}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\
\frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & 1
\end{array}\right]
\end{array}\right.
$$

Fin de la lección

Problemas de la Lección 11

(L-11) PROBLEMA 1.

(a) ¿Cuál es el menor subespacio de matrices de 3 por 3 que contiene a todas las matrices simétricas y a todas las matrices triangulares inferiores?

(b) ¿Cuál es el mayor subespacio que está contenido los dos subespacios anteriores?

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-11) PROBLEMA 2. Para cada una de las siguientes afirmaciones, diga si sin verdaderas o falsas. Justifique su respuesta

(a) **Verdadero/Falso:** El conjunto de matrices 3 por 3 no invertibles es un sub-espacio.

(b) **Verdadero/Falso:** Si el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, entonces $\mathbf{A}$ no es de rango completo por filas.

(c) **True/False:** There exist $n \times n$ matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ such that $\mathbf{B}$ is not invertible but $\mathbf{AB}$ is invertible.

(d) **True/False:** For any permutation matrix $\mathbf{P}$, we have that $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2004

(L-11) PROBLEMA 3.

(a) Sean los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ en $\mathbb{R}^7$ ¿Cuál es la dimensión (o cuáles son las posibles dimensiones) del espacio generado por estos tres vectores?

(b) Sea una matriz cuadrada $\mathbf{A}$. Si su espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ está compuesto únicamente por el vector nulo $\mathbf{0}$, ¿Cuál es el espacio nulo de su traspuesta (espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$?

(c) Piense en el espacio vectorial de todas las matrices de orden 5 por 5, $\mathcal{M}_{5\times 5}$. Piense en el subconjunto de matrices 5 por 5 que son invertibles ¿es este subconjunto un sub-espacio vectorial? Si lo es, explique el motivo; si no lo es encuentre un contraejemplo.

(d) Indique si la siguiente aseveración es verdadera o falsa. Si es verdadera explique el motivo, si es falsa encuentre un contraejemplo: *"Si $\mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$, entonces necesariamente $\mathbf{B} = \mathbf{0}$"*

(e) Si intercambio dos columnas de la matriz $\mathbf{A}$ ¿qué espacios fundamentales siguen siendo iguales?

(f) Si intercambio dos filas de la matriz $\mathbf{A}$ ¿qué espacios fundamentales siguen siendo iguales?

(g) ¿Por qué el vector $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ no puede estar en el espacio nulo de una matriz $\mathbf{A}$ y simultáneamente ser una fila de dicha matriz?

(L-11) PROBLEMA 4. Empleando la definición de sub-espacio vectorial, verifique si los siguientes subconjuntos son sub-espacios vectoriales del espacio vectorial que los contiene.

(a) $\mathcal{V}$ es el espacio vectorial de todas las matrices 2×2 de números reales, con las operaciones habituales de suma y producto por un escalar; y el conjunto $\mathcal{W}$ son todas las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

donde a y b son números reales.

(b) $\mathcal{V}$ es el espacio vectorial $C[0,1]$ de todas las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$; y el conjunto $\mathcal{W}$ son todas las funciones $f \in C[0,1]$ tales que $f(0) = 2$.

(L-11) PROBLEMA 5. Encuentre una base (de dimensión infinita) para el espacio de todos los polinomios

$$\mathcal{P} = \left\{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid \text{ para todo } n \right\}.$$

(L-11) PROBLEMA 6. ¿Cuál es la dimensión de los siguientes espacios?

(a) El conjunto de matrices simétricas de orden 2×2, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\intercal$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix},$$

(b) El conjunto de matrices simétricas de orden 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

tales que $a + d = 0$.

(c) El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$ de la forma $\{\begin{pmatrix} x, & y, & x-3y, & 2y-x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Fin de los Problemas de la Lección 11

Parte II

Ortogonalidad

Tema 3

Ortogonalidad (Espacio Euclideo)

LECCIÓN 12: Vectores y subespacios ortogonales

3.1. Producto punto (producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$)

En la Lección 2 vimos que el producto punto entre dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^n$ es

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \;=\; a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Propiedades del producto escalar usual

El producto punto (o producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$) satisface los siguientes axiomas para cualesquiera vectores $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ de $\mathbb{R}^n$ y para cualquier número real a.

- **Simetría:** $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \;=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$
- **Linealidad respecto al primer argumento:**
  1. $(a\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = a(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$
  2. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$
- **Positivo:** $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \geq 0$
- **Definido:** $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = 0.$

El producto punto de un vector por si mismo es una operación importante, pues $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$ es el cuadrado de la longitud de $\boldsymbol{x}$:

Definición 52. *La longitud* (o norma) *de un vector $\boldsymbol{x}$ es la raíz cuadrada de $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$:*

$$\textit{longitud de } \boldsymbol{x} \;\equiv\; \|\boldsymbol{x}\| \;\equiv \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

Por ejemplo, la longitud de $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}6 & 2 & 3\end{pmatrix}$ es $\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = \sqrt{\begin{pmatrix}6 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}} = \sqrt{6^2+2^2+3^2} = \sqrt{49} = 7.$

Nótese que $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Definición 53 (Vector unitario)**.** *Se dice que un vector es unitario si su longitud es igual a uno.*

A partir de un vector no nulo $\boldsymbol{x}$, es muy fácil obtener un múltiplo unitario (longitud uno); basta con dividirlo por su longitud. Por ejemplo si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, entonces $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = \sqrt{4} = 2$. Así,

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

es unitario. ¡Compruébelo!

Vectores perpendiculares

Definición 54 (Vectores perpendiculares u ortogonales)**.** *Dos vectores son ortogonales* (perpendiculares) *si su producto escalar es cero.*

Por ejemplo, los vectores $\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$ son perpendiculares (dibújelos en el plano para comprobarlo):

$$\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2-2 = 0.$$

La propiedad más importante que verifican los vectores perpendiculares es el Teorema de Pitágoras.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Pitágoras)**.** *Sean $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$; entonces $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0$* (son perpendiculares) *si y solo si*

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Demostración. Si $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son *perpendiculares*, entonces $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$ y

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) =&\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\\ =&(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{y}\\ =&\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}\\ =&\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+\quad 2\big(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\big)\quad+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}\\ =&\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+\qquad 0\qquad+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} \qquad\qquad =\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2.\end{aligned}$$

□

Un sistema de vectores perpendiculares y no nulos es un sistema linealmente independiente. Para demostrarlo, veamos primero algunas propiedades del producto $\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}$ cuanto A tiene columnas perpendiculares entre si.

Proposición 3.1.2. *Sea A una matriz cuyas columnas son perpendiculares entre si, entonces $\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}$ es diagonal, y las componentes de la diagonal son el cuadrado de las normas de cada una de las columnas de A.*

Demostración. $_{i|}\big(\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}\big)_{|j}=\big(\mathsf{A}_{|i}\big)\cdot\big(\mathsf{A}_{|j}\big)=\begin{cases}0 & \text{cuando } i\neq j\\ \|\mathsf{A}_{|i}\|^2 & \text{cuando } i=j\end{cases}$ □

Puesto que $\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}$ es diagonal, su fila *i*ésima es un múltiplo de la fila *i*ésima de la matriz identidad:

$$_{i|}\big(\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}\big)={}_{i|}\mathsf{I}\Big(\|\mathsf{A}_{|i}\|^2\Big)=\|\mathsf{A}_{|i}\|^2\Big({}_{i|}\mathsf{I}\Big);$$

y por tanto, el producto $_{i|}\mathsf{A}^\intercal\cdot\mathsf{A}\boldsymbol{x}$, de la columna *i*ésima de A (la fila $_{i|}\mathsf{A}^\intercal$) con la combinación de columnas $\mathsf{A}\boldsymbol{x}$ es:

$$_{i|}\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}\boldsymbol{x}=\|\mathsf{A}_{|i}\|^2\Big({}_{i|}\mathsf{I}\cdot\boldsymbol{x}\Big)=\|\mathsf{A}_{|i}\|^2\big(x_i\big),\quad\text{pues}\quad\big({}_{i|}\mathsf{I}\cdot\boldsymbol{x}\big)\ \text{ selecciona el elemento } i\text{ésimo de } \boldsymbol{x}.$$

Vamos a usar esto para ver que un sistema de vectores no nulos y perpendiculares entre si, es linealmente independiente.

Proposición 3.1.3. *Sea un sistema de vectores $\big[\boldsymbol{a}_1;\ldots;\boldsymbol{a}_n\big]$ distintos de $\boldsymbol{0}$ y perpendiculares entre si, entonces el sistema es linealmente independiente.*

Demostración. Consideremos la matriz $\mathsf{A}=\big[\boldsymbol{a}_1;\ldots;\boldsymbol{a}_n\big]$. Tenemos que demostrar que si $\mathsf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ entonces $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. Multiplicando por $\mathsf{A}^\intercal$ a ambos lados del sistema $\mathsf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ tenemos que $\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, y como

$$_{i|}\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}\boldsymbol{x}\ =\ \|\mathsf{A}_{|i}\|^2\big(x_i\big);\qquad\text{resulta que}\qquad {}_{i|}\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}\boldsymbol{x}={}_{i|}\boldsymbol{0}\quad\Longleftrightarrow\quad\|\mathsf{A}_{|i}\|^2\big(x_i\big)=0.$$

Como los vectores del sistema son distintos de cero, sus normas también lo son $\Big(\|\mathsf{A}_{|i}\|\neq 0\Big)$. Así que necesariamente $x_i=0$ para $i=1,\ldots,n$, es decir, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. □

3.2. Ortogonalidad de los 4 subespacios

Definición 55 (Subespacios ortogonales)**.** *Dos* subespacios *$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales ($\mathcal{A}\perp\mathcal{B}$), si todo vector de $\mathcal{A}$ es perpendicular a todo vector de $\mathcal{B}$; es decir, si para cualquier $\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}$ y cualquier $\boldsymbol{b}\in\mathcal{B}$, resulta que $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.*

La siguiente proposición muestra que el espacio nulo es ortogonal al espacio fila; y que el espacio nulo por la izquierda es ortogonal al espacio columna.

Proposición 3.2.1. *Sea A de orden m por n, entonces*

- *El espacio nulo y el espacio fila son ortogonales:* $\boxed{\mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right)\perp\mathcal{C}\left(\mathsf{A}^\intercal\right)}$.
- *El espacio nulo por la izquierda y el espacio columna son ortogonales:* $\boxed{\mathcal{N}\left(\mathsf{A}^\intercal\right)\perp\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)}$.

Demostración. El espacio fila es el conjunto de combinaciones lineales de las filas de A, es decir el conjunto de vectores de la forma $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{y}\mathsf{A}$ con $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$; y los vectores del espacio nulo son los vectores $\boldsymbol{x}$ tales que $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Evidentemente los vectores $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{x}$ son perpendiculares puesto que:

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{0} = 0.$$

Por otra parte, el espacio columna de A es el conjunto de combinaciones lineales de las columnas de A, es decir el conjunto de vectores de la forma $\boldsymbol{b} = \mathsf{A}\boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$; y los vectores del espacio nulo por la izquierda son los vectores $\boldsymbol{z}$ tales que $\boldsymbol{z}\mathsf{A} = \boldsymbol{0}$. También los vectores $\boldsymbol{z}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares puesto que:

$$\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{z}\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

□

Uso de la librería en Python

```
a  = Vector([1,1,1])
A  = Matrix([a,-a,a,-a])

C  = SubEspacio( A.sis )                           # Espacio columna de A
F  = SubEspacio( (~A).sis )                        # Espacio fila de A
N  = SubEspacio( A )                               # Espacio nulo de A
NI = SubEspacio( ~A )                              # Espacio nulo por la izquierda de A

print( F  == ~N )          # ¿Es cierto que F  es igual a complemento ortogonal de N?
print( NI == ~C )          # ¿Es cierto que NI es igual a complemento ortogonal de C?
```

El método de eliminación como generador de bases del complemento ortogonal

Si dos subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son complementarios (Definición 51 en la página 153) y ortogonales entre si, se dice uno es el *complmento ortogonal* del otro.

En la lección anterior vimos que con el método de eliminación podíamos encontrar bases de los cuatro espacios fundamentales de una matriz. Por tanto es un método que sirve para encontrar una base del *complemento ortogonal* de cualquier subespacio de $\mathbb{R}^m$. Si tenemos un sistema de vectores Z de $\mathbb{R}^m$, basta escribir dichos vectores en forma de filas de una matriz y aplicar el método: las soluciones especiales que encontremos serán una base del complemento ortogonal del espacio generado por Z.

Por ejemplo, podemos buscar una base para el complemento ortogonal del espacio generado por los vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\-3\\0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\-4\\1\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

Aplicando la eliminación sobre una matriz cuyas filas son los vectores dados tenemos:

$$\left[\begin{array}{cccc}1&-3&0&-1\\0&-1&1&1\\1&-4&1&0\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\ {[(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}\\ {[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&-1&0&0\\\hline 1&3&3&4\\0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \implies \text{Base del complemento ortogonal: } \left\{ \begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Uso de la librería en Python

```
S = Sistema( [Vector([1,-3,0,-1]), Vector([0,-1,1,1]), Vector([1,-4,1,0])] )
(~Matrix(S)                            # Matriz cuyas filas son los vectores de S
Homogenea(~Matrix(S),1).sgen           # Sistema generador del complento ortogonal
SubEspacio( Homogenea(~Matrix(S)).sgen ) == ~SubEspacio(S)          # Comprobación
```

3.2.1. Ecuaciones implícitas (o cartesianas) y ecuaciones paramétricas

En la Sección 2.2.2 de la Lección 7 aparecieron por primera vez las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones cartesianas (véase las notas a pie de página números 5 en la página 110 y 3 en la página 108). Ahora vamos a ver cómo pasar de unas a las otras. Así dispondremos en todo momento de dos modos de describir el conjunto de soluciones. Cada modo tiene un propósito distinto: las ecuaciones paramétricas nos permiten generar ejemplos de vectores que pertenecen al conjunto (basta dar valores arbitrarios a los parámetros) y las cartesianas nos permiten comprobar si un vector $\boldsymbol{y}$ pertenece al conjunto (basta comprobar que $\boldsymbol{y}$ es solcuión de las ecuaciones cartesianas).

El camino que hemos recorrido hasta ahora: de las ecuaciones cartesianas (o implícitas) a las paramétricas

Podemos expresar el conjunto de soluciones de un sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde $\mathbf{A}$ es de orden m por n, con las ecuaciones cartesianas

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

y una vez encontrada una solución particular $\boldsymbol{s}$ y un sistema generador $\big[\boldsymbol{n}_1; \ \dots \ \boldsymbol{n}_k\big]$ de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, también hemos descrito el conjunto de soluciones con las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ \middle|\ \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^k \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} + \big[\boldsymbol{n}_1; \ \dots \ \boldsymbol{n}_k\big]\boldsymbol{p}\right\}.$$

Hasta ahora siempre hemos pasado de las ecuaciones cartesianas (o implícitas) a las ecuaciones paramétricas; veamos como recorrer el camino inverso.

Recorriendo el camino inverso: de las ecuaciones paramétricas a las cartesianas (o implícitas)

En el camino inverso, dado el conjunto de soluciones de "un sistema desconocido, $\mathbf{D}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$", encontraremos las filas de una matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ (ortogonales a los vectores que generan el espacio nulo) y un vector del lado derecho tales que definan un sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ cuyo conjunto de soluciones coincide con el dado.

Procedimiento. Cuando disponemos de unas ecuaciones paramétricas

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ \middle|\ \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^k \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} + \big[\boldsymbol{n}_1; \ \dots \ \boldsymbol{n}_k\big]\boldsymbol{p}\right\},$$

disponemos tanto de una solución particular $\boldsymbol{s}$ (un vector del conjunto de soluciones), como de un sistema generador del espacio nulo $\big[\boldsymbol{n}_1; \ \dots \ \boldsymbol{n}_k\big]$, es decir, $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\left(\big[\boldsymbol{n}_1; \ \dots \ \boldsymbol{n}_k\big]\right)$. Y además sabemos que por eliminación podemos encontrar una base del complemento ortogonal de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, es decir una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ (el espacio fila de $\mathbf{A}$). Pues bien, usaremos los vectores de una base del espacio fila como filas de la matriz $\mathbf{A}$ que buscamos.

En particular, si $\underset{k\times n}{\mathbf{F}}$ es la matriz cuyas *filas* son los vectores $\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_k$, por ejemplo, si $\mathbf{F} = \big[\boldsymbol{n}_1 \ \dots \ \boldsymbol{n}_k\big]^{\intercal}$, entonces, aplicando la eliminación llegaremos a

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{F}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c}\mathbf{K}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]$$

donde las $n-r$ columnas de $\mathbf{E}$ que quedan bajo las columnas nulas de $\mathbf{K}$ (de rango r) son son una base del espacio fila $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, pues son una base del complemento ortogonal de $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\left(\big[\boldsymbol{n}_1; \ \dots \ \boldsymbol{n}_k\big]\right)$.

Por ejemplo, si se aplica la eliminación *Gaussiana* y se escalona $\mathbf{F}$, basta usar como matriz de coeficientes $\mathbf{A} = \left(\mathbf{E}_{|(r+1,\dots,n)}\right)^{\intercal}$, es decir, la matriz cuyas filas son las $(n-r)$ últimas columnas de $\mathbf{E}$. Así, puesto que las filas de $\mathbf{A}$ son ortogonales a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, sabemos que

$$\mathbf{A}\big[\boldsymbol{n}_1 \ \dots \ \boldsymbol{n}_k\big] = \mathbf{0}.$$

Multiplicando por $\mathbf{A}$ la ecuación paramétrica $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_1; \dots \boldsymbol{n}_k\end{bmatrix}\boldsymbol{p}$ tendremos que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \mathbf{A}\boldsymbol{s} \;+\; \mathbf{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_1; \dots \boldsymbol{n}_k\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \mathbf{A}\boldsymbol{s},$$

donde $\mathbf{A}\boldsymbol{s}$ es el vector del lado derecho, es decir, $\boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{s}$. Este sistema es, por construcción, un sistema cuyas soluciones son las ecuaciones paramétricas de las que hemos partido, ya que

$$\begin{cases}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} & \text{cuando} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} & \text{cuando} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{n}_i \quad \text{para } i = 1:k\end{cases}.$$

Procedimiento abreviado para usar con lápiz y papel. No es necesario encontrar primero los vectores perpendiculares a $\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_k$ para luego formar con ellos las filas de $\mathbf{A}$ y después multiplicar la ecuación paramétrica inicial para obtener el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$... ¡Podemos hacer todo esto a la vez!

Si $\mathbf{M}$ es la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{s} \,||\, \boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_k\end{bmatrix}^{\intercal} \qquad \text{(nótese el símbolo de transposición)},$$

donde $\boldsymbol{x}$ es el vector de incógnitas, $\boldsymbol{s}$ es una solución particular y $\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_1; \dots \boldsymbol{n}_k\end{bmatrix}$ es un sistema generador de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$; podemos tratar de hacer columnas de ceros en la submatriz con las k últimas filas (correspondientes a los vectores $\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_k$). Una vez finalizado el proceso de eliminación, “aparecerá” sobre dichas columnas nulas el sistema de ecuaciones deseado. Por ejemplo, sea el conjunto

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + a\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \right\}.$$

entonces

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{cccc} x & y & z & w \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc} x & (y-x) & z & (w-x) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} x & (y-x) & z & (w-x-z) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y - x & = 0 \\ w - x - z & = 1 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix};\; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Y donde las filas de $\mathbf{A}$ son las soluciones especiales encontradas en el proceso de eliminación (véase las transparencias T-134 y T-135, Página 185)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M} \\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix}\mathbf{K} \\ \hline \mathbf{E}\end{bmatrix}.$$

Es decir, si $\mathbf{A}$ es la matriz cuyas filas son las soluciones especiales (columnas de $\mathbf{E}$) encontradas al aplicar la eliminación sobre $\mathbf{M}$ para anular las columnas formadas por sus últimas k filas (correspondientes a los k vectores $\boldsymbol{n}_i$ multiplicados por parámetros en las ecuaciones paramétricas); tenemos que

$$\mathbf{A}\mathbf{M}^{\intercal} \;=\; \mathbf{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x}_p \,||\, \boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_k\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \,|\, \mathbf{A}\boldsymbol{x}_p \,||\, \boldsymbol{0}, \dots, \boldsymbol{0}\end{bmatrix}.$$

Así pues, las ecuaciones cartesianas del conjunto descrito más arriba es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Puntos, rectas, planos e hiper-planos de $\mathbb{R}^n$. Espacios afines

Dado un sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, el conjunto de soluciones posee una forma geométrica especial, ya que es “plano”, es decir, no es curvado. En particular, si $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = 0$ el conjunto es *un punto*; si $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = 1$ el conjunto es *una recta*; si $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = 2$ el conjunto es *un plano*, y si $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = d > 2$ el conjunto es *un hiper-plano de dimensión d*.

Esto sugiere emplear nuevos nombres para conceptos ya conocidos: podemos denominar ecuaciones de un punto, recta, plano, etc. a las ecuaciones que describen el conjunto de soluciones de un sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Por tanto, podemos preguntarnos por las ecuaciones cartesianas (o las ecuaciones paramétricas) de, por ejemplo, una recta en $\mathbb{R}^n$.

De hecho, estos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ descritos como la suma de un vector particular $\boldsymbol{s}$ más las combinaciones lineales de un sistema de vectores $\left[\boldsymbol{n}_1; \ \ldots \ \boldsymbol{n}_k\right]$ se denominan *espacios afines*. La librería de Python guarda el conjunto de soluciones de sistema de ecuaciones en forma de espacio afín en el atributo `eafin`; y su representación en Jupyter muestra tanto las ecuaciones cartesianas como las paramétricas de dichos espacios.

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix( [ [-1,1,0,0], [-1,0,-1,1] ] )
b = Vector([0,1])
SEL(A,b).eafin
```

Podemos generar un espacio afín con una matriz y un vector

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix( [ [-1,1,0,0], [-1,0,-1,1] ] )
v = Vector([0,0,0,1])
EAfin(A,v)
```

como con un sistema de vectores y un vector

Uso de la librería en Python

```
S = Sistema([ Vector([-1,-1,1,0]), Vector([0,0,1,1]) ])
v = Vector([0,0,0,1])
EAfin(S,v)
```

3.3. Definición geométrica del producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$

☞ En muchos libros se emplea una definición “geométrica” del producto escalar usual de dos vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ usando la norma de dichos vectores y el coseno del ángulo que forman. Lo exponemos a continuación.

Definición 56 (Producto escalar en $\mathbb{R}^n$ (definición *geométrica*))**.**

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \;=\; \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cdot \cos\theta$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ medido en radianes.

Por tanto, el *coseno del ángulo θ* formado por los vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ es

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}; \qquad -1 \leq \cos\theta \leq 1.$$

Si los vectores son perpendiculares, es decir, si $\theta = \pi/2$, entonces $\cos\theta = \cos\pi/2 = 0$ y por tanto

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \;=\; \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cdot 0 = 0.$$

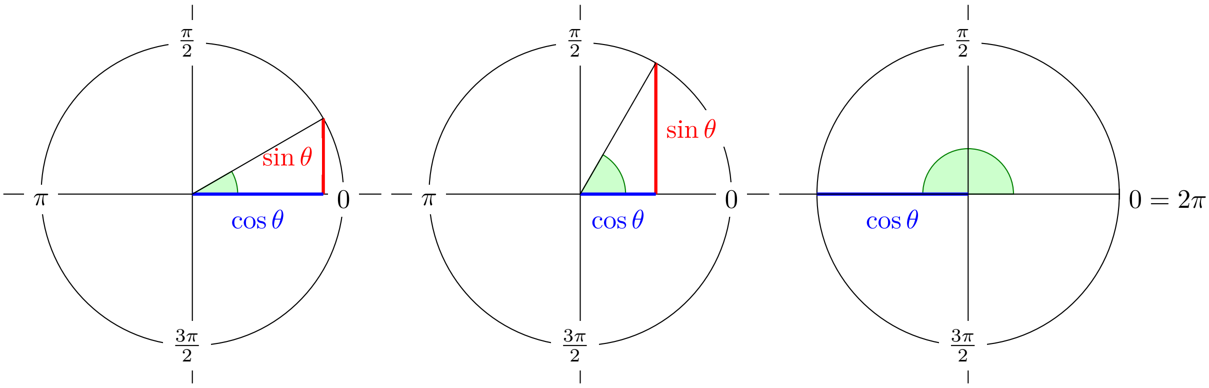


Figura 3.1: Relación entre el ángulo y su seno y coseno (círculos con radio uno)

Si el ángulo es cero, $(\theta = 0)$, entonces $\cos\theta = \cos 0 = 1$. y por tanto

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \;=\; \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|.$$

Así, con la definición geométrica se llega al mismo resultado

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \;=\; \|\boldsymbol{a}\|^2.$$

Nótese que el efecto de multiplicar un vector $\boldsymbol{x}$ por α es obtener un vector paralelo a $\boldsymbol{x}$ cuya longitud ha sido multiplicada por α.

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\alpha^2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})} = |\alpha| \, \|\boldsymbol{x}\|$$

Cuando un vector $\boldsymbol{y}$ es paralelo al vector $\boldsymbol{x}$ el producto escalar de ambos es

$$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) = \alpha\|\boldsymbol{x}\|^2$$

En tal caso, cuando los vectores son paralelos (y $\alpha \neq 0$), su ángulo es cero (o 180) ya que:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} = \frac{\alpha\|\boldsymbol{x}\|^2}{|\alpha| \, \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \pm 1.$$

En estadística, el *coseno del ángulo θ* de dos *variables centradas* (i.e., con media nula) se denomina *correlación*.

Lección 12

(Lección 12) T-1 Esquema de la Lección 12

Esquema de la *Lección 12*

- Vectores y subespacios ortogonales
- Espacio nulo $\perp$ espacio fila $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$
- espacio nulo por la izquierda $\perp$ espacio columna $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$
- Ecuaciones implícitas y paramétricas

124

(Lección 12) T-2 **Algunas definiciones**

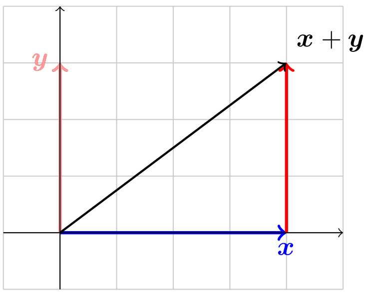
- Producto escalar

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

- Longitud de un vector $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ $\qquad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2.$
- Vector unitario: $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ $\qquad \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \cdot \boldsymbol{x}$
- Vectores ortogonales (perpendiculares): $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0.$

125

(Lección 12) T-3 **Vectores ortogonales**



$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \;=\; 0.$$

Tma. Pitágoras: $\qquad \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}).$$

126

(Lección 12) T-4 **Norma al cuadrado de un vector**

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\to\; \|\boldsymbol{x}\|^2 = \qquad ; \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\to\; \|\boldsymbol{y}\|^2 = \qquad ;$$

¿Son estos vectores ortogonales?

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}; \qquad \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \qquad ;$$

(Pitágoras) $\qquad\qquad$ (Ortogonalidad)

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \iff \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0.$$

127

(Lección 12) T-5 **Subespacios ortogonales**

El subespacio $\mathcal{S}$ es ortogonal al subespacio $\mathcal{T}$

Significa: Cada vector de $\mathcal{S}$ es ortogonal a cada vector de $\mathcal{T}$

¿Son ortogonales el plano de la pizarra y el suelo?

128

(Lección 12) T-6 **Espacio nulo ortogonal a espacio fila**

- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp$ filas de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} ({}_{1|}\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{x} \\ \vdots \\ ({}_{m|}\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \boldsymbol{d}\mathbf{A}$ (cualquier combinación lineal de filas de $\mathbf{A}$)

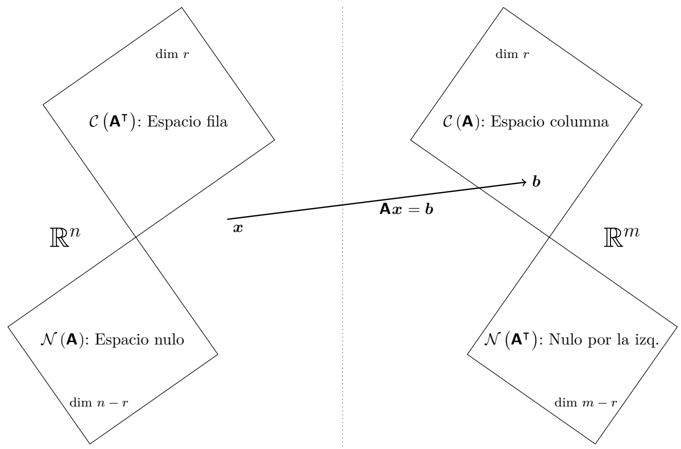
$$\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \cdot \mathbf{0} = 0.$$

$$\boxed{\text{espacio nulo} \perp \text{espacio fila} \qquad \mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)}$$

También: $\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$

129

(Lección 12) T-7 **El gran esquema**



$$\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}); \qquad \mathcal{C}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal).$$

130

(Lección 12) T-8 **Revisitando la eliminación gaussiana**

Dame varios vectores y los escribo como filas de una matriz $\mathbf{M}$ ...

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{M}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}1&-3&0&-1\\0&-1&1&1\\1&-4&1&0\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&-1&0&0\\ \hline 1&3&3&4\\0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}\mathbf{C}&\mathbf{0}\\ \hline \mathbf{D}&\mathbf{N}\end{array}\right]$$

Base del espacio generado por los vectores (fila): $\mathcal{V}$

Base del complemento ortogonal: $\mathcal{V}^{\perp}$ $\qquad$ $\mathbf{MN}=\mathbf{0}$

Pero si me das $\mathbf{N}_{|1}$ y $\mathbf{N}_{|2}$ y empiezo de nuevo... obtendré una base de...

Algoritmo que encuentra una base del complemento ortogonal

131

(Lección 12) T-9 **Ecuaciones implícitas (cartesianas) y paramétricas de rectas y planos**

Ecuación implícita (cartesiana): Todos los $\boldsymbol{x}$ que satisfacen $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

Por ejemplo todos los (x_1, x_2, x_3) que satisfacen

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1\\ \qquad\qquad x_3=1\end{cases};$$

Ecuación paramétrica: Es la solución general $\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{x}_p{+}\boldsymbol{x}_n$

(En el ejemplo anterior) Todos los $\boldsymbol{x}$ de la forma:

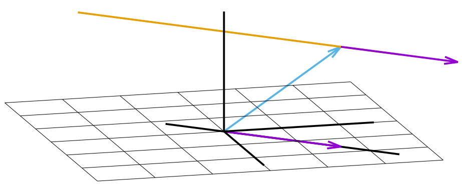
$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad \text{ó}\quad \begin{cases}x_1=1+a\\x_2=1+a\\x_3=1\end{cases}$$

En este caso dimensión 1 $\qquad$ Una recta (sólo hay un parámetro a)

recta $\qquad$ recta

132

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\text{ y }\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\in\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right);\qquad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right).$$

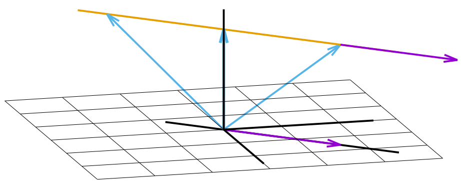


Pero también

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

ó

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x_1 = -1+a \\ x_2 = -1+a \\ x_3 = 1 \end{cases}$$



(Lección 12) T-10 Ecuaciones implícitas (cartesianas) y paramétricas de rectas y planos

Ecuación implícita (cartesiana): $\boldsymbol{x}$ que satisfacen $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Por ejemplo todos los (x_1, x_2, x_3) que satisfacen

$$\left\{ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \right. ;$$

Ecuación paramétrica: Es la solución general $\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{x}_p{+}\boldsymbol{x}_n$

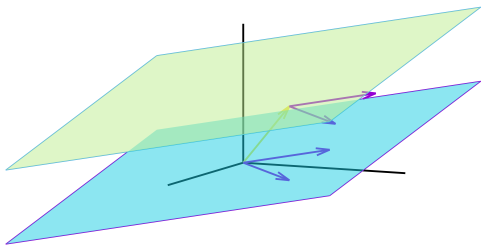
(En el ejemplo anterior) Todos los $\boldsymbol{x}$ de la forma:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x_1 = 1+a-b \\ x_2 = 1+a \\ x_3 = 1+b \end{cases}$$

En este caso dimensión 2 Un plano (hay dos parámetros a y b)

plano plano 133

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right); \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right).$$

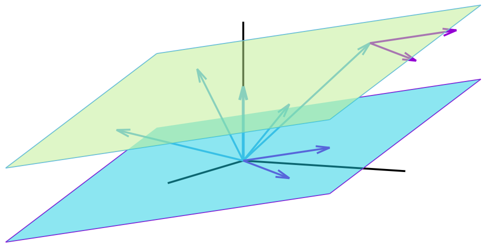


Pero también

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x_1 = a - b \\ x_2 = a \\ x_3 = 1 + b \end{cases}$$

ó

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x_1 = -1 + a - b \\ x_2 = -1 + a \\ x_3 = 1 + b \end{cases}$$



(**Lección 12**) $\boxed{\textbf{T-11}}$ **De la solución al sistema de ecuaciones**

Ecuaciones implícitas del plano paralelo al generado por $(1,1,0,1)$ y $(0,0,1,1)$ que pasa por $(0,0,0,1)$.
Ecuaciones paramétricas de este plano son

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}_p} + a\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}_a} + b\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}_b}$$

Si multiplicamos por una matriz A cuyas filas son ortogonales a los vectores generadores $\boldsymbol{x}_a$ y $\boldsymbol{x}_b$ tenemos

$$\mathsf{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\mathsf{A}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}} + a\underbrace{\mathsf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{0}} + b\underbrace{\mathsf{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{0}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

¿Cómo encontrar A?

134

(Lección 12) **T-12** De la solución al sistema de ecuaciones

$$\mathbf{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}} + a\,\mathbf{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{0}} + b\,\mathbf{A}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} x & y & z & w \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc} x & (y-x) & z & (w-x) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} x & (y-x) & z & (w-x-z) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}_p + a\mathbf{A}\boldsymbol{x}_a + b\mathbf{A}\boldsymbol{x}_b \quad\longrightarrow\quad \boldsymbol{x}\mathbf{A}^{\intercal} = \boldsymbol{x}_p\mathbf{A}^{\intercal}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + a\mathbf{0} + b\mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} y-x & = 0 \\ w-x-z & = 1 \end{cases}$$

135

Fin de la lección

Problemas de la Lección 12

(L-12) Problema 1. Describa el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.15 del conjunto de problemas II.2.)

(L-12) Problema 2.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_P = (1,2)$ y $\boldsymbol{x}_Q = (3,1)$.
(b) Encuentre una representación implícita de la recta anterior.

(L-12) Problema 3.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_P = (1,-3,1)$ y $\boldsymbol{x}_Q = (-2,4,5)$.
(b) Encuentre una representación implícita de la recta.
(Lang, 1986, Example 1 in Section 1.5)

(L-12) Problema 4. ¿Hay algún vector que sea perpendicular a si mismo?
(Hefferon, 2008, ejercicio 2.17 del conjunto de problemas II.2.)

(L-12) Problema 5.

(a) Ecuación paramética de la recta paralela a $2x - 3y = 5$ que pasa por el punto $(1,1)$.
(b) Encuentre una representación implícita de la recta.

(L-12) Problema 6. Calcule la longitud de cada uno de estos vectores

(a) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. (e) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.11 del conjunto de problemas II.2.)

(L-12) PROBLEMA 7. Encuentre un vector unitario (de norma uno) con la misma direccción que $\boldsymbol{v} = (2, -1, 0, 4, -2)$.

(L-12) PROBLEMA 8. Encuentre el valor de k de manera que estos vectores sean perpendiculares.

$$\begin{pmatrix} k & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.14 del conjunto de problemas II.2.)

(L-12) PROBLEMA 9. Escriba una matriz con las propiedades requeridas, o explique por qué es imposible:

(a) El espacio columna contiene $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, el espacio nulo contiene $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) El espacio fila contiene $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, y el espacio nulo contiene $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución, y $\mathbf{A}^{\intercal} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) Cada fila es ortogonal a cada columna (y $\mathbf{A}$ no es la matriz cero)

(e) La suma de columnas da una columna de ceros, la suma de filas suma una fila de unos.

(Strang, 2003, ejercicio 3 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-12) PROBLEMA 10. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, las columnas de $\mathbf{B}$ pertencen a ________ de $\mathbf{A}$. Las filas de $\mathbf{A}$ están contenidas en el __________ de $\mathbf{B}$. Por qué no es posible que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sean matrices 3 por 3 de rango 2?
(Strang, 2003, ejercicio 4 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-12) PROBLEMA 11. Suponga que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$ y que $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$. ¿Debe ocurrir que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$?
(Hefferon, 2008, ejercicio 2.20 del conjunto de problemas II.2.)

(L-12) PROBLEMA 12.

(a) Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución y $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{y}$ es perpendicular a ____.

(b) Si $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ tiene solución y $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{x}$ es perpendicular a ____.

(Strang, 2003, ejercicio 5 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-12) PROBLEMA 13. Demuestre, para $\mathbb{R}^n$, que si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son perpendiculares, entonces $||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2 = ||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2$.
(Hefferon, 2008, ejercicio 2.33 del conjunto de problemas II.2.)

(L-12) PROBLEMA 14.

(a) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto (0,1,1) y tiene por vectores directores (0,1,2) y (1,1,0)

(b) Escriba la ecuación implicita del mismo plano.

(L-12) PROBLEMA 15.

(a) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto (2,1,3) y es perpendicular a (3, 1, 1).

(b) Escriba la ecuación implicita del mismo plano.

(L-12) PROBLEMA 16. Considere el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) (1^{pts}) Obtenga la solución al sistema.

(b) (0.5^{pts}) Explique por qué el conjunto de vectores solución al sistema anterior es una recta en $\mathbb{R}^5$. Indique un vector director y un punto por el que pasa la recta.
(c) (1^{pts}) Encuentre todos los vectores perpendiculares al vector director anterior. Pruebe que el conjunto de vectores perpendiculares a dicho vector forman un subespacio vectorial de dimensión 4. Encuentre una base de dicho subespacio vectorial.

(L-12) PROBLEMA 17. Encuentre una matriz de 1 por 3 cuyo espacio nulo conste de todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$. Encuentre una matriz de 3 por 3 con el mismo espacio nulo.
(Strang, 2007, ejercicio 9 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-12) PROBLEMA 18. A is a 4 by 2 matrix with exactly two special solutions to $\boldsymbol{x}\mathsf{A} = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix}3, & 1, & 0, & 0\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix}6, & 0, & 2, & 1\end{pmatrix}.$$

(a) Find the reduced row echelon form R of A.
(b) What is the row space of A?
(c) What is the complete solution to $\boldsymbol{x}\mathsf{R} = (3,\ 6)$?
(d) Find a combination of rows 2, 3, 4 that equals the zero vector. (Not OK to use 0 (row 2) + 0 (row 3) + 0 (row 4) = 0 . The problem is to show that these 3 rows are dependent.)

basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, March 4, 2013

Fin de los Problemas de la Lección 12

LECCIÓN 13: Proyecciones sobre subespacios

3.4. Proyecciones sobre subespacios

Definición 57 (Suma directa $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$). *Se dice que $\mathbb{R}^n$ es* suma directa *de los subespacios $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ (y lo denotamos con $\mathbb{R}^n = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$) si para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ existe una descomposición única de la forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$.*

Teorema 3.4.1. *Sea $\mathbf{A}$ de orden m por n, y rango r; entonces $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) = \mathbb{R}^m$ y $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal) \oplus \mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.*

Demostración.

- Sea $\mathsf{C} = [\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r]$ una base de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y $\mathsf{L} = [\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_{(n-r)}]$ una base de $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$. Puesto que cada vector de C es perpendicular a los vectores de L, los vectores de C son linealmente independientes de los de L, y por tanto el sistema $[\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r, \boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_{(n-r)}]$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Consecuentemente, todo vector $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$ se puede expresar de manera única como combinación de los vectores de dicha base:

$$\boldsymbol{v} \;=\; a_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{c}_r \quad + \quad a_{(r+1)}\boldsymbol{l}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{l}_{(n-r)} \quad = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{z},$$

  donde $\boldsymbol{b} = \left(a_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{c}_r\right) \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$ y $\boldsymbol{z} = \left(a_{(r+1)}\boldsymbol{l}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{l}_{(n-r)}\right) \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$.

- De igual manera, sea el sistema de vectores $\mathsf{F} = [\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r]$ una base de $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$ y $\mathsf{N} = [\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_{(m-r)}]$ una base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Puesto que cada vector de F es perpendicular a los vectores de N, los vectores de F son linealmente independientes de los de N, y por tanto el sistema $[\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r, \boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_{(m-r)}]$ es una base de $\mathbb{R}^m$. Consecuentemente, todo vector $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^m$ se puede expresar de manera única como combinación de los vectores de dicha base:

$$\boldsymbol{y} \;=\; a_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{f}_r \quad + \quad a_{(r+1)}\boldsymbol{n}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{n}_{(m-r)} \quad = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{z},$$

  donde $\boldsymbol{b} = \left(a_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{c}_r\right) \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$ y $\boldsymbol{z} = \left(a_{(r+1)}\boldsymbol{n}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{n}_{(m-r)}\right) \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$.

$\square$

Así, si $\mathbf{A}$ es de orden m por n, todo vector de $\mathbb{R}^m$ se puede descomponer como suma de un vector de $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$ más otro de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$; y todo vector de $\mathbb{R}^n$ se puede descomponer como suma de un vector de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ más otro de $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$.

Proposición 3.4.2. $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})$.

Demostración. Para demostrar que dos conjuntos son iguales basta mostrar que todo elemento del primer conjunto está en el segundo, y viceversa. Veamos que así ocurre con $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})$.

Primero comprobemos que todo vector de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es también un vector de $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})$:

> Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Multiplicando ambos lados de la igualdad por $\mathbf{A}^\intercal$ tenemos $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^\intercal\mathbf{0} = \mathbf{0}$; y por tanto $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})$.

Ahora toca la segunda parte:

> Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})$ entonces $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Multiplicando por $\boldsymbol{x}$ tenemos que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{0} = 0$. Pero esto quiere decir que el vector $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ tiene norma cero, ya que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (\mathbf{A}\boldsymbol{x}) \cdot (\mathbf{A}\boldsymbol{x})$, es el cuadrado de la norma de $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$. Como el único vector de norma cero es $\mathbf{0}$ (el vector nulo) tenemos que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, y por tanto $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

$\square$

La proposición anterior tiene consecuencias sobre el rango de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$:

Corolario 3.4.3. *El rango de $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ es igual al rango de $\mathbf{A}$.*

Demostración. El rango de una matriz es igual al número de columnas con pivote, es decir, al número total de columnas menos las columnas sin pivote. El número de columnas sin pivote es la dimensión del espacio nulo. Como tanto $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ como $\mathbf{A}$ tienen n columnas e idéntico espacio nulo ($\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})$), necesariamente tienen el mismo rango: $k = n - \dim\mathcal{N}(\mathbf{A})$. $\square$

Lección 13

(Lección 13) T-1 Esquema de la Lección 13

Esquema de la *Lección 13*

- Proyecciones
- Matrices proyección

136

(Lección 13) T-2 Suma directa de subespacios

$\mathbb{R}^n$ es *suma directa* de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ $\quad (\mathbb{R}^n = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$

si todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tiene una descomposición **única** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$,

con $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$.

Ejemplo 18. $\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$ Base de $\mathbb{R}^3$; $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

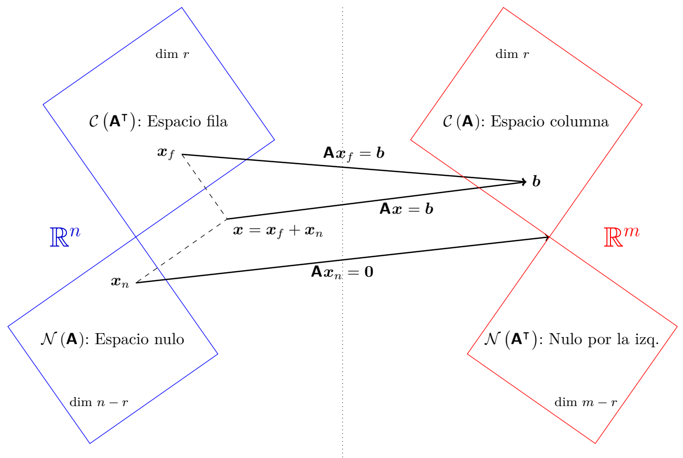
$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ \exists c_1, c_2, c_3 \ \Big|\ \boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

donde $\boldsymbol{a} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ y $\boldsymbol{b} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. Por tanto $\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \oplus \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)}$

También $\boxed{\mathbb{R}^2 = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \oplus \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)}$

137

(Lección 13) T-3 El gran esquema: $b \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$



$$\mathbb{R}^n = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \oplus \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right); \qquad \mathbb{R}^m = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \oplus \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right).$$

138

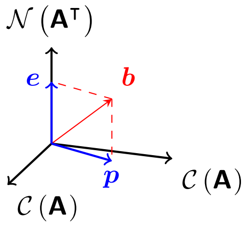
(Lección 13) T-4 **Proyección ortogonal**

Sea $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$; puesto que $\mathbb{R}^m = \mathcal{C}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$,

todo vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ tiene una descomposición

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{b}; \qquad \boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{e}.$$

con $\boldsymbol{p} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$ y $\boldsymbol{e} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$



¿Cómo calcular $\boldsymbol{p}$?

139

(Lección 13) T-5 **Ecuaciones normales**

Sea $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$. Buscamos la descomposición de $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{e} \qquad \text{con } \boldsymbol{p} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}) \text{ y } \boldsymbol{e} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$$

Entonces

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{tal que} \qquad \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$$

Por tanto

$$\mathbf{A}^{\intercal}\Big(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{b}\Big) = \mathbf{0}; \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^{\intercal}\Big(\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\Big) = \mathbf{0}; \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{b}}$$

Solución única cuando $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ es invertible.

140

(Lección 13) T-6 **¿Cuando es $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ invertible?**

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\right)$
$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{0} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\right) \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$
$\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x}\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cdot\mathbf{0} = 0.$ Pero $\boldsymbol{x}\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (\mathbf{A}\boldsymbol{x})\cdot(\mathbf{A}\boldsymbol{x}) = \|\mathbf{A}\boldsymbol{x}\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$

El rango de $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ es igual al rango de $\mathbf{A}$
$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\right)$, y tanto $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ como $\mathbf{A}$ tienen n columnas.

$\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ invertible si y sólo si $\mathbf{A}$ tiene columnas independientes

$\boxed{\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\ \widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{b} \text{ tiene solución única si y sólo si } \mathbf{A} \text{ tiene columnas independientes}}$

141

(**Lección 13**) T-7 **Solución a las ecuaciones normales (rango completo por columnas))**

$\boxed{\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{b}}$ ($\mathbf{A}$ de rango completo por columnas)

La solución $\widehat{\boldsymbol{x}} = (\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{b}$

La proyección $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{b}$

La matriz de proyección $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}$

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{P}\boldsymbol{b}$$

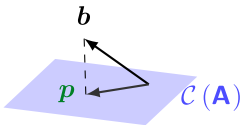
$\mathbf{P}$: Simétrica e idempotente.

142

(**Lección 13**) T-8 **Matriz proyección**

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}}$$

$\mathbf{P}\boldsymbol{b}$ proyecta $\boldsymbol{b}$ sobre el punto más próximo de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

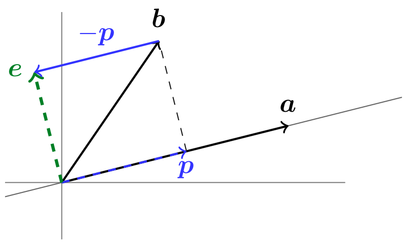


Casos extremos:

- Si $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$ entonces $\mathbf{P}\boldsymbol{b} =$
- Si $\boldsymbol{b} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$ entonces $\mathbf{P}\boldsymbol{b} =$

143

(**Lección 13**) T-9 **Proyección**



recta$= \mathcal{C}(\mathbf{A})$; $\mathbf{A} = [\boldsymbol{a}]$; $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$

Queremos encontrar el punto sobre la linea más próximo a $\boldsymbol{b}$

¿Donde aparece la *ortogonalidad*? $\boldsymbol{p} \in \mathcal{C}\left([\boldsymbol{a}]\right) \quad \perp \quad \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}) \in \mathcal{N}\left([\boldsymbol{a}]^{\intercal}\right)$.

$\boldsymbol{p}$ es algún múltiplo de $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{a}]x$

La solución $\widehat{\boldsymbol{x}} = \left([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{b}$

La proyección $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{a}]\widehat{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{b}$

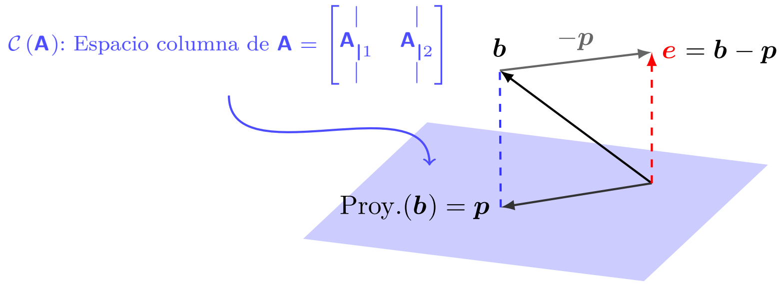
La matriz de proyección $\mathbf{P} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}$

144

(Lección 13) **T-10 Dos dimensiones**

¿Por qué proyectar?
Así que resolveremos

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \Big(\text{Proy. de } \boldsymbol{b} \text{ sobre } \mathcal{C}(\mathbf{A})\Big).$$

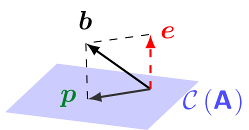


$\boldsymbol{e} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$ . . . ese es el hecho fundamental.

145

(Lección 13) **T-11 Ecuaciones normales**

¿Qué es la proyección de $\boldsymbol{b}$ sobre el espacio columna de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{A}_{|1} & \mathbf{A}_{|2} \\ | & | \end{bmatrix}$?



$$\boldsymbol{p} = \left(\mathbf{A}_{|1}\right)\widehat{x_1} + \left(\mathbf{A}_{|2}\right)\widehat{x_2} \;=\; \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$$

"Encontrar una combinación de columnas tal que $\boldsymbol{e} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$*"*

$$\boldsymbol{e} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e} \in$$

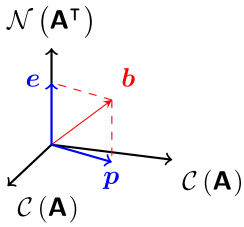
$$\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{e} = \mathbf{A}^{\intercal}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}) \quad = \quad \mathbf{A}^{\intercal}(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}$$

$$\boxed{(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{b}}$$

146

(Lección 13) T-12 Matriz proyección

$\boldsymbol{b}$ tiene un componente, $\boldsymbol{p}$, en $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y otro, $\boldsymbol{e}$, en $\mathcal{C}(\mathbf{A})^{\perp}$.



$$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{p}=\mathbf{P}\boldsymbol{b}$ es la proyección sobre $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

$\boldsymbol{e}=(\mathbf{I}-\mathbf{P})\boldsymbol{b}$ es la proyección sobre $\mathcal{C}(\mathbf{A})^{\perp}$

147

Fin de la lección

Problemas de la Lección 13

(L-13) Problema 1. Proyecte el primer vector ($\boldsymbol{b}$) sobre la recta generada por el segundo vector ($\boldsymbol{a}$). Compruebe que $\boldsymbol{e}$ es perpendicular a $\boldsymbol{a}$. Encuentre la matriz proyección $\mathbf{P}=[\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}$ sobre la recta generada por cada vector $\boldsymbol{a}$. Verifique en cada caso que $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$. Multiplique $\mathbf{P}\boldsymbol{b}$ en cada caso para calcular la proyección $\boldsymbol{p}$.

(a) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2, & 1\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3, & -2\end{pmatrix}$.
(b) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2, & 1\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3, & 0\end{pmatrix}$.
(c) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1, & 1, & 4\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1, & 2, & -1\end{pmatrix}$.
(d) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1, & 1, & 4\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3, & 3, & 12\end{pmatrix}$.

(Hefferon, 2008, ejercicio 1.6 del conjunto de problemas VI.1.)

(L-13) Problema 2. Proyecte ortogonalmente el vector sobre la recta.

(a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, La recta : $\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists c\in\mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix};\right\}$.

(b) $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, la recta descrita por la ecuación $y=3x$.

(L-13) Problema 3. Aunque los dibujos nos han guiado el desarrollo del tema, no estamos restringidos a espacios que podamos dibujar. En $\mathbb{R}^4$ proyecte el vector sobre la recta.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}; \qquad \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists c\in\mathbb{R} \text{ tal que } \quad \boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\right\}.$$

(L-13) Problema 4.

(a) Proyecte el vector $\boldsymbol{b}=(1,1)$ sobre las rectas generadas por $\boldsymbol{a}_1=(1,0)$ y $\boldsymbol{a}_2=(1,2)$. Sume las proyecciones: $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$. Las proyecciones no suman $\boldsymbol{b}$ porque los vectores $\boldsymbol{a}$ no son ortogonales.
(b) La proyección de $\boldsymbol{b}$ sobre el plano generado por $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ será igual a $\boldsymbol{b}$. Encuentre $\mathbf{P}=\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}$ para $\mathbf{A}=[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]=\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&2\end{smallmatrix}\right]$.

(Strang, 2003, ejercicio 8–9 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-13) Problema 5.

(a) Si $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ demuestre que $(\mathbf{I} - \mathbf{P})^2 = \mathbf{I} - \mathbf{P}$. Cuando $\mathbf{P}$ proyecta sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$, $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ proyecta sobre el ________.

(b) Si $\mathbf{P}^\intercal = \mathbf{P}$ demuestre que $(\mathbf{I} - \mathbf{P})^\intercal = \mathbf{I} - \mathbf{P}$.

(Strang, 2003, ejercicio 17 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-13) PROBLEMA 6.

(a) Calcule las matrices proyección $\mathbf{P} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^\intercal[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^\intercal$ sobre las rectas que pasan por $\boldsymbol{a}_1 = (-1, 2, 2)$ y $\boldsymbol{a}_2 = (2, 2, -1)$. Compruebe que $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$. Multiplique esas matrices proyección y explique por qué su producto $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ es lo que es.

(b) Proyecte $\boldsymbol{b} = (1, 0, 0)$ sobre las rectas generadas por $\boldsymbol{a}_1$, y $\boldsymbol{a}_2$ y también por $\boldsymbol{a}_3 = (2, -1, 2)$. Sume las tres proyecciones $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3$.

(c) Encuentre la matriz proyección $\mathbf{P}_3$ sobre $\boldsymbol{a}_3 = (2, -1, 2)$. Verifique que $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{I}$. ¡La base $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ es ortogonal!

(Strang, 2003, ejercicio 5–7 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-13) PROBLEMA 7. Proyecte $\boldsymbol{b}$ sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$ resolviendo $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$. Encuentre $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix}$

(c) Calcule las matrices proyección $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ sobre los espacios columna. Verifique que $\mathbf{P}_1\boldsymbol{b}_1$ da la primera proyección $\boldsymbol{p}_1$. Verifique también que $\left(\mathbf{P}_2\right)^2 = \mathbf{P}_2$.

(Strang, 2003, ejercicio 11–12 del conjunto de problemas 4.2.)

Fin de los Problemas de la Lección 13

LECCIÓN 14: Mínimos cuadrados

3.5. Mínimos cuadrados

Aunque el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución cuando $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}(\mathbf{A})$, ¡El sistema $(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$ siempre se puede resolver! Antes de demostrarlo hay que recordar que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\intercal$ tienen el mismo rango; y que rango$(\mathbf{AB}) \leq$ rango$(\mathbf{A})$, pues las columnas de $\mathbf{AB}$ son combinaciones de las columnas de $\mathbf{A}$ y por tanto $\mathcal{C}(\mathbf{AB}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{A})$.

Proposición 3.5.1. *Sea $\mathbf{A}$ de orden m por n y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, entonces el sistema $(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$ siempre tiene solución.*

Demostración. El sistema $(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$ tiene solución si el rango de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ es igual que el rango de la matriz ampliada $[\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\,|\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}]$; es decir, si $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$ es combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$. Veámoslo:

Como al añadir una columna a una matriz, el rango (el número de pivotes) no puede disminuir, sabemos que rango$([\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\,|\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}]) \geq$ rango$(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}) = k$.

Por otra parte, $[\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\,|\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}] = \mathbf{A}^\intercal[\mathbf{A}\,|\boldsymbol{b}]$ que es el producto de la matriz $\mathbf{A}^\intercal$ por la matriz ampliada $[\mathbf{A}\,|\boldsymbol{b}]$, y como recordábamos más arriba rango$([\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\,|\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}]) =$ rango$(\mathbf{A}^\intercal[\mathbf{A}\,|\boldsymbol{b}]) \leq$ rango$(\mathbf{A}^\intercal) =$ rango$(\mathbf{A}) = k$.

Así que, como por una parte rango$([\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\,|\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}]) \geq k$ y por la otra rango$([\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\,|\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}]) \leq k$, se deduce que rango$([\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\,|\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}]) = k$; que es el rango de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ del sistema $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$, y por tanto el sistema siempre tiene solución ($\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)$). □

Se puede obtener el mismo resultado empleando la interpretación geométrica de la proyección ortogonal: cuando proyectamos el vector $\boldsymbol{b}$ sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$, descomponemos $\boldsymbol{b}$ en un vector $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$ (en el espacio columna de $\mathbf{A}$) y un vector $\boldsymbol{e}$ (ortogonal a dicho espacio columna): $\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{b}$. Entonces $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{x} + \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{e} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$. Pero $\boldsymbol{e}$ es ortogonal al espacio fila de $\mathbf{A}^\intercal$, así que $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$, y por tanto $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$.

Lección 14

(Lección 14) T-1 Esquema de la Lección 14

Esquema de la *Lección 14*

- "Mejor respuesta" a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ cuando $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}(\mathbf{A})$
  - Solución de Mínimos Cuadrados: $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$ (cuando $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ es invertible)

148

(Lección 14) T-2 "Mejor respuesta" a $\mathbf{A}x = b$ cuando $b \notin \mathcal{C}(\mathbf{A})$

$\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ $(m > n)$. Querríamos "resolver" $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ cuando $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}(\mathbf{A})$

"La eliminación fallará"

Cuando $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución:
resuelva las ecuaciones normales

$$\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$$

- $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$ es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}^\intercal$
- $\mathbf{A}^\intercal(\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}})$ también es combinación lineal de columnas de $\mathbf{A}^\intercal$

$\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$ siempre tiene solución
($\widehat{\boldsymbol{x}}$ será la "mejor respuesta" a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$)

149

(Lección 14) T-3 ¿Cuando es $\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}$ invertible?

$\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathsf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$ siempre tiene solución ($\widehat{\boldsymbol{x}}$ "mejor respuesta" a $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$)

La matriz $\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}$ juega un papel clave en el sistema:

$$\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathsf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$$

diga algo acerca de $\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}$:

- ¿Es cuadrada?
- ¿Es simétrica?
- ¿Cuando es invertible?

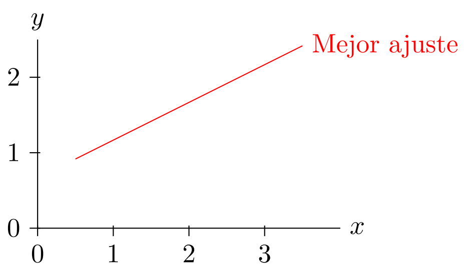
150

3.5.1. Ajuste de una recta por mínimos cuadrados

(Lección 14) T-4 Aplicación: Mínimos cuadrados (Ajuste lineal)

"buscando la mejor recta de ajuste $\widehat{y} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}x$"

Puntos (x, y): $(1,1)$; $(2,2)$; $(3,2)$



$$\begin{cases} \alpha + 1\beta &= 1 \\ \alpha + 2\beta &= 2 \\ \alpha + 3\beta &= 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (\mathsf{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{y} \text{ Sin solución})$$

151

(Lección 14) T-5 Aplicación: Mínimos cuadrados (Ajuste lineal)

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{y} \quad \text{(Sin solución)} \;\rightarrow\; \mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\widehat{\beta} = \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\beta}.$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}\\ \widehat{\beta}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 6\\ 6 & 14\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}\\ \widehat{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 11\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\alpha} = \frac{2}{3}; \quad \widehat{\beta} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{Mejor solución: } \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}x}$$

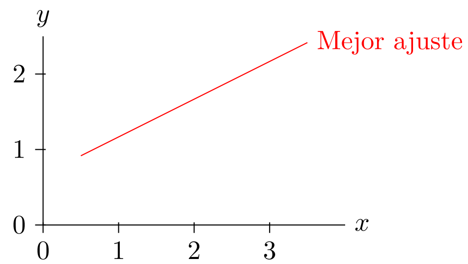
152

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\beta} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2/3\\ 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7/6\\ 10/6\\ 13/6\end{pmatrix}$$

y

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7/6\\ 10/6\\ 13/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/6\\ 2/6\\ -1/6\end{pmatrix}$$

(Lección 14) T-6 Aplicación: Mínimos cuadrados (Ajuste lineal)



$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}\\ \widehat{\beta}\end{pmatrix} = \boldsymbol{p} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} p_1 &= \frac{7}{6}\\ p_2 &= \frac{10}{6}\\ p_3 &= \frac{13}{6}\end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} e_1 &= -\frac{1}{6}\\ e_2 &= \frac{2}{6}\\ e_3 &= -\frac{1}{6}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{e} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p} &= 0\\ \boldsymbol{e}\mathbf{A} &= \mathbf{0}\end{cases}.$$

153

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix}-1/6, & 2/6, & -1/6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7/6\\ 10/6\\ 13/6\end{pmatrix} = 0; \qquad \boldsymbol{e}\mathbf{A} = \begin{pmatrix}-1/6, & 2/6, & -1/6\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 0\end{pmatrix}$$

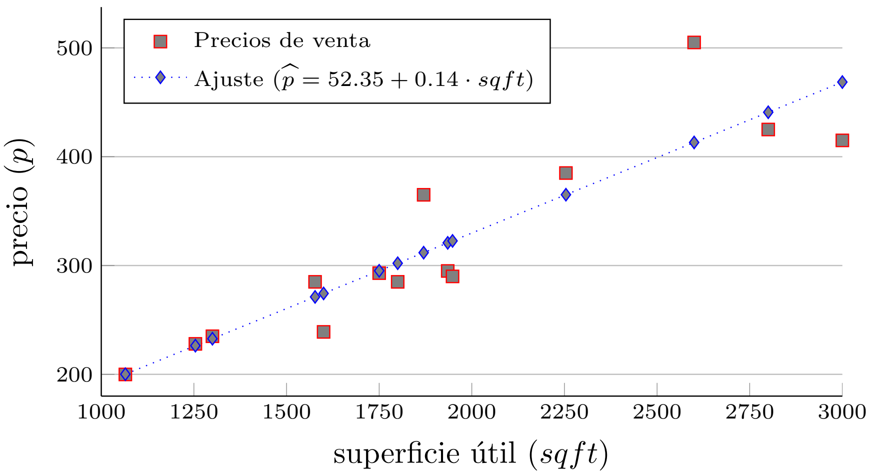
Ejemplo 19. [**precio de las viviendas:**]

Considere los datos del Cuadro 19 en la página siguiente. Precios de venta (miles de dólares) y superficie útil (pies al cuadrado) de 14 casas unifamiliares en la comunidad *University City* de la ciudad de San Diego en California en 1990(Ramanathan, 2002, pp. 78)

n	Precio ($\boldsymbol{y}$)	Superficie ($\boldsymbol{x}$)
1	199.9	1065
2	228.0	1254
3	235.0	1300
4	285.0	1577
5	239.0	1600
6	293.0	1750
7	285.0	1800
8	365.0	1870
9	295.0	1935
10	290.0	1948
11	385.0	2254
12	505.0	2600
13	425.0	2800
14	415.0	3000

(Lección 14) **T-7 Aplicación: ajustando por mínimos cuadrados**

Precios de venta (miles de dólares) y superficie útil (pies al cuadrado) de 14 casas unifamiliares en la *University City* de la ciudad de San Diego en California en 1990 (Ramanathan, 2002, pp. 78)



154

Precios de venta (miles de dólares) y superficie útil (pies al cuadrado) de 14 casas unifamiliares en la comunidad

n	Precio	Superficie	Precio ajustado por Mínimos Cuadrados	Error $\widehat{e}$
1	199.9	1065	200.1200	-0.22000
2	228.0	1254	226.3438	1.65619
3	235.0	1300	232.7263	2.27368
4	285.0	1577	271.1602	13.83984
5	239.0	1600	274.3514	-35.35142
6	293.0	1750	295.1640	-2.16397
7	285.0	1800	302.1015	-17.10148
8	365.0	1870	311.8140	53.18600
9	295.0	1935	320.8328	-25.83278
10	290.0	1948	322.6365	-32.63653
11	385.0	2254	365.0941	19.90587
12	505.0	2600	413.1017	91.89826
13	425.0	2800	440.8518	-15.85180
14	415.0	3000	468.6019	-53.60187

University City de la ciudad de San Diego en California en 1990 (Ramanathan, 2002, pp. 78)

Fin de la lección

Problemas de la Lección 14

(L-14) PROBLEMA 1. Con las medidas $\boldsymbol{y} = (0, 8, 8, 20)$ tomadas en los instantes $\boldsymbol{x} = (0, 1, 3, 4)$,

(a) Plantee y resuelva las ecuaciones normales $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$.
(b) Para el mejor ajuste lineal, encuentre los ajustes p_i y los cuatro errores e_i.
(c) ¿Cuál es el cuadrado de la norma del vector de errores $\|\boldsymbol{e}\|^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2$?
(d) Dibuje la recta de regresión
(e) Sustituya las medidas $\boldsymbol{y}$ por los valores ajustados $\boldsymbol{p} = (1, 5, 13, 17)$ escriba las cuatro ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{p}$. Encuentre la solución exacta a $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{p}$
(f) Verifique que $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p} = (-1, 3, -5, 3)$ es perpendicular a las dos columnas de $\mathbf{A}$.
(g) ¿Cuál es la distancia más corta $\|\boldsymbol{e}\|$ desde $\boldsymbol{y}$ al espacio columna de $\mathbf{A}$?

(Strang, 2003, ejercicio 1–3 del conjunto de problemas 4.3.)

(L-14) PROBLEMA 2.

(a) Escriba las tres ecuaciones $y = \alpha + \beta x$ dado el conjunto de datos: $y = 7$ para $x = -1$, $y = 7$ para $x = 1$, y $y = 21$ para $x = 2$. Encuentre la solución de mínimos cuadrados $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ y pinte el mejor ajuste lineal.
(b) Encuentre la proyección $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$. Es decir, tres valores del mejor ajuste lineal. Demuestre que el vector de error es $\boldsymbol{e} = (2, -6, 4)$. ¿Por que es $\mathbf{P}\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$?

(L-14) PROBLEMA 3. Our measurements at times $t = 1, 2, 3$ are $b = 1, 4$, and b_3. We want to fit those points by the nearest line $C + Dt$, using least squares.

(a) Which value for b_3 will put the three measurements on a straight line? *Which line is it?* Will least squares choose that line if the third measurement is $b_3 = 9$? (Yes or no).
(b) What is the linear system $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ that would be solved exactly for $\boldsymbol{x} = (C, D)$ if the three points do lie on a line? Compute the projection matrix $\mathbf{P}$ onto the column space of $\mathbf{A}$.
(c) What is the rank of that projection matrix $\mathbf{P}$? How is the column space of $\mathbf{P}$ related to the column space of $\mathbf{A}$? (You can answer with or without the entries of $\mathbf{P}$ computed in (b).)
(d) Suppose $b_3 = 1$. Write down the equation for the best least squares solution $\widehat{\boldsymbol{x}}$, and show that the best straight line is horizontal.

MIT 18.06 - Quiz 2, November 2, 2005

Fin de los Problemas de la Lección 14

Parte III

Determinantes

Tema 4

Determinantes

LECCIÓN 15: Propiedades de los determinantes

$\boxed{\textbf{\textit{Lección 15}}}$

(Lección 15) $\boxed{\text{T-1}}$ Esquema de la Lección 15

Esquema de la *Lección 15*

- Determinante: $\det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}|$ $\qquad [\det : \quad \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}]$
  - Volumen vs determinante
  - Propiedades: **1, 2, 3**
- Usted deducirá las propiedades: **4 – 11**

155

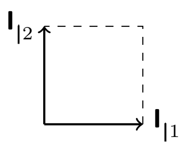
4.1. Definición de la función determinante con tres propiedades relacionadas con el volumen o área

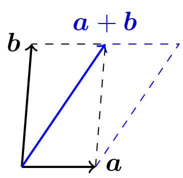
4.1.1. Tres propiedades de la función área (volumen) de un paralelogramo

La función volumen de un paralelepípedo (2 dimensiones) tiene las siguientes propiedades:

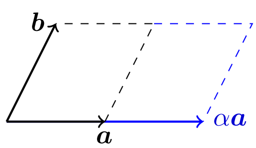
(Lección 15) $\boxed{\text{T-2}}$ Superficie: propiedades en $\mathbb{R}^2$

1. $\text{Area}\Big[\mathbf{I}_{|1};\ \mathbf{I}_{|2}\Big] = 1$





2. $\text{Area}\Big[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}\Big] = \text{Area}\Big[\boldsymbol{a};\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\Big]$



3. $\text{Area}\Big[\alpha\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}\Big] = |\alpha| \cdot \text{Area}\Big[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}\Big]$

156

donde $\mathbf{I}_{|1}$ y $\mathbf{I}_{|2}$ son las columnas de la matriz identidad $\underset{2\times 2}{\mathbf{I}}$; donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores de $\mathbb{R}^2$; y α es un número real.

La función volumen de un paralelogramo (3 dimensiones), o en general de un n-*paralelótopo* (paralelepípedo de n dimensiones); es la función con las siguientes propiedades:

(Lección 15) T-3 Volumen: propiedades en $\mathbb{R}^n$

Para matrices n por n: $\underset{n\times n}{\mathbf{A}} = \left[\mathbf{A}_{|1};\ \ldots\ \mathbf{A}_{|n}\right]$

1. $\text{Vol}\big(\underset{n\times n}{\mathbf{I}}\big) = 1$

2. $\text{Vol}(\mathbf{A}) = \text{Vol}\Big[\ldots;\mathbf{A}_{|k};\ldots\Big] = \text{Vol}\Big[\ldots;(\mathbf{A}_{|k}+\mathbf{A}_{|i});\ldots\Big]$ para $i \neq k$

3. $|\alpha| \cdot \text{Vol}(\mathbf{A}) \;=\; \text{Vol}\Big[\ldots;\alpha\mathbf{A}_{|k};\ldots\Big]$ para cualquier $k \in \{1:n\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

157

4.1.2. Las tres primeras propiedades (P-1 to P-3)

Por analogía con la función volumen, definimos el determinante del siguiente modo:

Definición 58. *Denominamos* función determinante *a toda función que asigna a cada sistema de n vectores de* $\mathbb{R}^n$ *(o a cada matriz cuadrada de orden n) un número real*

$$\det: \quad \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

y que verifica las siguientes tres propiedades:

(Lección 15) T-4 Determinante: 3 propiedades que lo definen

P-1 P-1 **Determinante de las matrices identidad:**

$$\det \underset{n\times n}{\mathbf{I}} = 1$$

P-2 P-2 **Sumar una columna a otra no altera el determinante**:

$$\det \underset{n\times n}{\mathbf{A}} = \det\Big[\ldots;\mathbf{A}_{|i};\ldots\Big] = \det\Big[\ldots;(\mathbf{A}_{|i}+\mathbf{A}_{|k});\ldots\Big] \text{ para } i \neq k$$

P-3 P-3 **Multiplicar una columna multiplica el determinante**

$$\alpha \cdot \det \mathbf{A} \;=\; \det\Big[\ldots;\alpha\mathbf{A}_{|k};\ldots\Big] \text{ para cualquier } k \in \{1:n\} \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Valor absoluto de } \det \mathbf{A} = \text{Vol}\, \mathbf{A}}$$

158

Es decir, el valor absoluto de la función determinante es la función volumen. Emplearemos dos notaciones alternativas para el determinante de la matriz $\mathbf{A}$:

$$\text{determinante de } \mathbf{A} \equiv \det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}|$$

Advertencia: Una barra vertical a cada lado de una matriz $|\mathbf{A}|$ significa determinante de la matriz. Una barra vertical a cada lado de un número $|a|$ significa valor absoluto del número. Es decir, el significado de las barras viene dado por el objeto encerrado: si es un número es el *valor absoluto*, y si es una matriz es el *determinante*. Jugando con esto, podemos decir que

$$\text{Vol}\,\mathbf{A} = \text{Valor absoluto de } \det \mathbf{A} = |\det \mathbf{A}| = |\,|\mathbf{A}|\,|.$$

Así pues, las tres propiedades se pueden expresar para $\mathbb{R}^3$ como;

P-1: $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$

P-2: $\begin{vmatrix}a_1&(b_1+c_1)&c_1\\a_2&(b_2+c_2)&c_2\\a_3&(b_3+c_3)&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$

P-3: $\begin{vmatrix}a_1&(\beta b_1)&c_1\\a_2&(\beta b_2)&c_2\\a_3&(\beta b_3)&c_3\end{vmatrix}=\beta\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$

4.2. Resto de propiedades (P-4 a P-11)

4.2.1. Determinante de una matriz con una columna de ceros

(Lección 15) T-5 Determinante de una matriz con una columna de ceros

P-4 **Det. de una matriz con una columna de ceros** P-4

Si $\mathbf{A}$ *tiene una columna de ceros* $\mathbf{0}$*, entonces*

$$\boxed{\det(\mathbf{A})=0}$$

160

A resolver en clase

EJERCICIO 32. Sea una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden n con una columna de ceros $\mathbf{0}$. Demuestre que su determinante es cero:

4.2.2. Transformaciones elementales por columnas.

Recordemos que son de dos tipos:

Tipo *I*: $\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ $\rightarrow$ suma a la columna s de $\mathbf{A}$, la columna p multiplicada por α (con $j\neq k$)

Tipo *II*: $\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ multiplica la columna j de $\mathbf{A}$, por α (con $\alpha\neq 0$)

Las transformaciones elementales de *Tipo I* no modifican el determinante, pero las de *Tipo II* si lo hacen:

(Lección 15) T-6 Determinante tras una transformación elemental de las columnas

P-5 **Aplicar una transformación de *Tipo I* no altera el determinante** $(s\neq p)$ P-5

$$\det\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\det\mathbf{A}.$$

P-6 **Multiplicar una columna por un número** $\alpha\neq 0$ ***(transformación de Tipo II)*** **multiplica el determinante de dicha matriz por** α P-6

$$\det\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\alpha\,|\mathbf{A}|\,.$$

(Ya se sabe: es un caso particular de **P-3***)*

161

EJERCICIO 33. Demuestre la propiedad **P-5**: $\det\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=|\mathbf{A}|\,.$

Ejemplo 20. Para $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & (b_1+\alpha c_1) & c_1 \\ a_2 & (b_2+\alpha c_2) & c_2 \\ a_3 & (b_3+\alpha c_3) & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\det\Big[\boldsymbol{a};\ (\boldsymbol{b}+\alpha\boldsymbol{c});\ \boldsymbol{c}\Big]=\det\Big[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c}\Big];$$

y también

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha\, b_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha\, b_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha\, b_3 & c_3 \end{vmatrix} =\alpha \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\det\Big[\boldsymbol{a};\ \alpha\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c}\Big]=\alpha\ \det\Big[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c}\Big];$$

4.2.3. Sucesión de transformaciones elementales por columnas.

(Lección 15) T-7 Matrices elementales

Ya sabemos que

$$\det\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=|\mathbf{A}|\,;\qquad \det\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\alpha\,|\mathbf{A}|\,.$$

Determinante de matrices elementales

$$\det\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=1 \qquad \text{y} \qquad \det\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\alpha.$$

Así, puesto que $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}=\mathbf{A}\,(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})\,,$ entonces

$$|\mathbf{A}\,(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}| \tag{4.1}$$

donde $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ es una matriz elemental 163

Veamos más resultados relacionados con las matrices elementales:

EJERCICIO 34. Demuestre las siguientes proposiciones

(a) $\det\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)=|\mathbf{A}|\cdot\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right|\cdots\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right|\,.$

(b) Si $\mathbf{B}$ es de rango completo, es decir, si $\mathbf{B}=\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$, entonces $|\mathbf{B}|=\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right|\cdots\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right|$, y por tanto $|\mathbf{B}|\neq 0$.

(c) *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son de orden* n*, y* $\mathbf{B}$ *es de rango completo entonces*

$$\det(\mathbf{AB})=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}| \tag{4.2}$$

(Lección 15) T-8 **Determinante tras una sucesión de transformaciones elementales**

Ejemplo 21. Una sucesión $\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k$ de trasformaciones *Tipo I* de la matriz $\mathbf{A}$ no altera el determinante.

$$\left|\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right| = \left|\mathbf{A}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right| = |\mathbf{A}| \cdot \left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right| = |\mathbf{A}| \cdot 1 = |\mathbf{A}|$$

Ejemplo 22. Pero si lo puede hacer una sucesión de trasformaciones *Tipo II*.

$$\begin{vmatrix} 2a & 3c \\ 2b & 3d \end{vmatrix} = \underline{\ ?\ } \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

164

4.2.4. Propiedad antisimétrica. Determinante de una matriz singular, de la inversa y del producto de matrices

Permutación (o intercambio) de columnas

(Lección 15) T-9 **Propiedad antisimétrica**

P-7 **[Propiedad antisimétrica]** **P-7**

Intercambiar dos columnas de una matriz cambia el signo del determinante.

Demostración. Un intercambio de columnas es una sucesión de transformaciones elementales *Tipo I* y una única de *Tipo II* que multiplica por -1 una columna (EJERCICIO 22 en la página 66). □

Así que:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

165

Matrices singulares. Matrices inversas

Nota 3. *Mediante operaciones elementales es posible reducir* $\mathbf{A}$ *a su forma escalonada reducida* $\mathbf{R}$*; y hemos de contemplar dos casos:*

- *Cuando la matriz es singular (rango* $< n$*) el determinante es cero;*
- *Cuando la matriz es de rango completo (*$\mathbf{R} = \mathbf{I}$*). En este caso basta con mirar cómo las operaciones* Tipo II *han ido cambiando el valor del determinante de* $\mathbf{A}$ *hasta llegar a la matriz* $\mathbf{I}$ *(las de* Tipo I *no importan!...)*

(Lección 15) T-10 Matrices singulares. Matrices inversas

P-8 **P-8** **Si $\mathbf{A}$ es singular entonces $|\mathbf{A}| = 0$.**

P-9 **P-9** $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \left(\det \mathbf{A}\right)^{-1}$**.**

Demostración. Sea $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{AE} = \mathbf{R}$ (donde $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$).

$$\text{Entonces:}\quad |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{E}| = |\mathbf{R}| \quad \text{con dos casos:}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A} \text{ singular } (\mathbf{R}_{|n} = \mathbf{0}): & |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{E}| = 0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{A}| = 0 \\ \\ \mathbf{A} \text{ no singular } (\mathbf{R} = \mathbf{I}): & |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{E}| = 1 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{E}| = \left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \end{cases}.$$

□

166

Determinante de la matriz inversa

Además, también podemos calcular mediante la eliminación gaussiana el determinante de la matriz inversa. Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ tenemos $|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{E}| = |\mathbf{A}|\cdot\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = |\mathbf{I}| = 1$ y por tanto

$$\boxed{\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = (|\mathbf{A}|)^{-1}.}$$

Ejemplo 23. Para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&2\\2&2\end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{cc}1&2\\2&2\\\hline 1&0\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[\mathit{Tipo I}]{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{cc}1&0\\2&-2\\\hline 1&-2\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[\mathit{Tipo II}]{\underset{[(-1/2)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{cc}1&0\\2&1\\\hline 1&1\\0&-1/2\end{array}\right] \xrightarrow[\mathit{Tipo I}]{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\\hline -1&1\\1&-1/2\end{array}\right]$$

Por tanto

$$\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \left|\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right| \left|\mathbf{I}_{\underset{[(-1/2)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right| \left|\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right| = 1\cdot\frac{-1}{2}\cdot 1 = \frac{-1}{2};$$

$$\text{es decir} \quad \boxed{|\mathbf{A}| = -2.}$$

Determinante del producto.

Recuerde que para cualquier $\mathbf{B}$ de orden n, existe $\mathbf{E}$ (de rango completo) tal que $\mathbf{BE} = \mathbf{L}$ es una forma escalonada de $\mathbf{B}$. Si $\mathbf{B}$ es singular entonces $\mathbf{L}_{|n} = \mathbf{0}$. Aplicando las mismas transformaciones elementales por columnas a $\mathbf{AB}$, es decir calculando el producto $\mathbf{ABE}$ tenemos

$$\mathbf{ABE}_{|n} = \mathbf{AL}_{|n} = \mathbf{0};$$

puesto que $\mathbf{E}_{|n} \neq \mathbf{0}$, necesariamente $(\mathbf{AB})$ es singular (véase Corolario 2.3.2 en la página 123).

(Lección 15) T-11 Determinante de un producto de matrices

P-10 **[Determinante del producto de matrices]** **P-10**

$$\boxed{\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}).} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \mathbf{B} \text{ singular, también lo es } \mathbf{AB} \Rightarrow & \det(\mathbf{AB}) = 0 = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \\ \\ \mathbf{B} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k} \Rightarrow & \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \end{cases}$$

167

4.2.5. Determinante de la matriz transpuesta.

A resolver en clase

EJERCICIO 35. **[Matrices transpuestas]**
(a) ¿Qué relación hay entre el determinante de una matriz elemental $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ y el determinante de su transpuesta ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}$?

(b) Sea $\mathbf{B}$ de rango completo, demuestre que $|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}^{\intercal}|$.

(Lección 15) T-12 Determinante de la transpuesta

P-11 **Determinante de la transpuesta** **P-11**

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{\intercal}|.$$

Demostración.

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{A} \text{ singular:} & \mathbf{A}^{\intercal} \text{ singular } \Rightarrow \det \mathbf{A}^{\intercal} = \det \mathbf{A} = 0 \\ \text{si } \mathbf{A} \text{ NO singular:} & \mathbf{A} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k} \Rightarrow \det \mathbf{A}^{\intercal} = \det \mathbf{A}, \end{cases}$$

□

168

Si $\mathbf{A}$ es singular, $\mathbf{A}^{\intercal}$ también es singular (véase Proposición 2.8.6 en la página 141); y por tanto ambas matrices tienen determinante nulo.

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([ [1,-1,0], [1,1,1], [2,0,3] ])
A.determinante()
( Matrix(A) & T({ 1,3}) ).determinante()
(~Matrix(A) & T((10,2)) ).determinante()
```

Fin de la lección

Problemas de la Lección 15

(L-15) PROBLEMA 1. Complete las demostraciones (los EJERCICIOS) de esta lección.

(L-15) PROBLEMA 2. Sabiendo que el determinante del producto de dos matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ cualesquiera es $|\mathbf{BC}| = |\mathbf{B}|\,|\mathbf{C}|$; demuestre que para toda matriz $\mathbf{A}$ invertible (y por tanto con $\det \mathbf{A} \neq 0$)

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

(L-15) PROBLEMA 3. Considere las matrices $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ y $\underset{3\times 3}{\mathbf{B}}$ tales que $\det(\mathbf{A}) = 2$ y $\det(\mathbf{B}) = -2$

(a) (0.5^{pts}) Calcule los determinantes de $\mathbf{AB}^2$ y $(\mathbf{AB})^{-1}$
(b) (0.5^{pts}) ¿Es posible calcular el rango de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$? ¿y de $\mathbf{AB}$?

(L-15) PROBLEMA 4. Aplique el método de Gauss-Jordan para calcular el determinante de las siguientes matrices

(a)

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(L-15) PROBLEMA 5. La matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad $\mathbf{I}$ mediante las siguientes tres operaciones elementales sobre las columnas (en el siguiente orden):

$\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 4 veces columna 1 de la columna 2.

$\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 3 veces columna 1 de la columna 3.

$\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta columna 3 de la columna 2.

Calcule el determinante de $\mathbf{A}$.

(L-15) PROBLEMA 6.

(a) Encuentre el determinante de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Encuentre el determinante de la siguiente matriz usando el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

Fin de los Problemas de la Lección 15

LECCIÓN 16: Cofactores y fórmulas para el cálculo del determinante

Lección 16

(Lección 16) T-1 Esquema de la Lección 16

Esquema de la *Lección 16*

- Cálculo de $|\mathbf{A}|$ por eliminación gaussiana
- **P-12** — Propiedad multilineal
- Desarrollo del determinante por cofactores (Expansión de Laplace).
- Aplicaciones de la función determinante
  - Regla de Cramer para la resolución de un sistema de ecuaciones
  - Calculo de la inversa de una matriz

169

Si la matriz elemental $\underset{n\times n}{\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}}$ es de orden n. Entonces sabemos que necesariamente la transformación $\boldsymbol{\tau}$ actúa únicamente sobre las n primeras columnas; es decir, tanto si $\boldsymbol{\tau}$ es de *Tipo I*: $\underset{[(\alpha)\boldsymbol{p}+\boldsymbol{s}]}{\boldsymbol{\tau}}$ como si es de *Tipo II*: $\underset{[(\alpha)\boldsymbol{p}]}{\boldsymbol{\tau}}$, los índices $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}$ son necesariamente menores o iguales a n.

Por tanto, para la siguiente matriz por bloques de orden $n+1$, e idéntica transformación $\boldsymbol{\tau}$ se verifica que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\tau}} & \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \\ & 1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}}. \tag{4.4}$$

Y si $\mathbf{B}$ es la matriz identidad, y puesto que $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & 1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}}$ y $\underset{n\times n}{\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}}$ son matrices elementales del mismo tipo, ambas tienen idéntico determinante. Repitiendo k veces el paso dado en (4.4) tenemos que

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} & \\ & 1 \end{vmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & 1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & 1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}_1}\cdots\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & 1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right|\cdots\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right| = \left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right|. \tag{4.5}$$

Vamos a emplear este resultado para relacionar el determinante de dos matrices que tienen distinto orden:

Proposición 4.2.1. *Si* $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ *tiene la forma* $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \underset{n\times n}{\mathbf{B}} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0\ \cdots\ 0 & 1 \end{array}\right]$, *entonces* $\boxed{\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}).}$

Demostración. Solo caben dos posibilidades. Si $\mathbf{B}$ es de rango completo, es decir, si $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$, por (4.5) ya sabemos que

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{B} & \\ & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} & \\ & 1 \end{vmatrix} = \left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right| = |\mathbf{B}|.$$

Y si $\mathbf{B}$ es singular, es decir si las columnas de $\mathbf{B}$ son linealmente dependientes, también lo son las de $\mathbf{A}$, por tanto

$$|\mathbf{A}| = 0 = |\mathbf{B}|.$$

□

4.3. Determinante matrices triangulares

EJERCICIO 36.
(a) ¿Cómo es el determinante de una matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ de rango completo?
(b) ¿Cuál es el determinante de una matriz cuadrada y triangular con algún elemento nulo en su diagonal
(c) ¿Cómo es el determinante de una matriz triangular superior $\mathbf{U}$?

4.4. Cálculo del determinante por eliminación Gaussiana

Por tanto, el determinante de cualquier matriz cuadrada y triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. Este descubrimiento nos permite calcular el determinante con menos operaciones, pues basta con encontrar una forma escalonada de la matriz extendida, compensando en su últia fila las operaciones realizadas en las n primeras columnas.

Ejemplo 24. Considere de nuevo la matriz $\begin{bmatrix}1&5\\2&3\end{bmatrix}$ entonces

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&5&\\2&3&\\ \hline &&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&\\2&-7&\\ \hline &&1\end{array}\right]$$

Multiplicando los elementos de la diagonal obtenemos el valor del determiante de $\mathbf{A}$. En este caso $\det \mathbf{A} = -7$.

Ejemplo 25. Para la matriz $\begin{bmatrix}0&2&1\\9&6&3\\0&1&1\end{bmatrix}$ tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&1&\\9&6&3&\\0&1&1&\\ \hline &&&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(\frac{1}{2})\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&0&\\9&6&0&\\0&1&1&\\ \hline &&&\frac{1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(3)\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(\frac{1}{3})\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{ccc|c}0&6&0&\\9&0&0&\\0&3&1&\\ \hline &&&\frac{1}{6}\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{ccc|c}6&0&0&\\0&9&0&\\3&0&1&\\ \hline &&&\frac{-1}{6}\end{array}\right]$$

Y por tanto $\det \mathbf{A} = (6)(9)(1)(\frac{-1}{6}) = -9$.

4.5. Determinante de matrices diagonales por bloques

Puesto que para cualquier matriz cuadrada $\mathbf{B}$ se verifica que $\begin{vmatrix}\mathbf{B}&\\&1\end{vmatrix} = |\mathbf{B}|$; si $\mathbf{A}$ es de orden m y $\mathbf{I}$ de orden n, entonces, aplicando la anterior igualdad repetidamente n veces, deducimos que

$$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \underset{m\times n}{\mathbf{0}}\\ \underset{n\times m}{\mathbf{0}} & \underset{n\times n}{\mathbf{I}}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{A} & \underset{m\times(n-1)}{\mathbf{0}}\\ \underset{(n-1)\times m}{\mathbf{0}} & \underset{(n-1)\times(n-1)}{\mathbf{I}}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{A} & \underset{m\times(n-2)}{\mathbf{0}}\\ \underset{(n-2)\times m}{\mathbf{0}} & \underset{(n-2)\times(n-2)}{\mathbf{I}}\end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix}\mathbf{A}&0\\0&1\end{vmatrix} = |\mathbf{A}|.$$

Pero todo lo realizado en las anteriores secciones se podía haber desarrollado de manera similar si en lugar de extender la matriz $\mathbf{B}$ con la última fila y columna de la matriz identidad $n+1$, se hubiera hecho anteponiendo la primera fila y columna de la matriz identidad $n+1$. Así, para cualquier matriz cuadrada $\mathbf{B}$ también se verifica que

$$\begin{vmatrix}1&\\&\mathbf{B}\end{vmatrix} = |\mathbf{B}|;\quad \text{por lo que también se deduce que}\quad \begin{vmatrix}\mathbf{I}&\\&\mathbf{A}\end{vmatrix} = |\mathbf{A}|.$$

Producto de matrices particionadas por bloques. En la Sección 1.10 se mostró cómo calcular el producto de matrices particionadas por bloques siguiendo la fórmula de la Ecuación 1.3 en la página 54.

EJERCICIO 37. Demuestre las siguientes propiedades:

(a) Sean A de orden m y B de orden n, entonces $\begin{vmatrix} \mathsf{A} & \underset{m\times n}{\mathbf{0}} \\ \underset{n\times m}{\mathbf{0}} & \mathsf{B} \end{vmatrix} = \left|\mathsf{A}\right| \cdot \left|\mathsf{B}\right|.$

(b) Sean A de orden m, B de orden n y C de orden n por m, entonces

$$\begin{vmatrix} \mathsf{A} & \underset{m\times n}{\mathbf{0}} \\ \mathsf{C} & \mathsf{B} \end{vmatrix} = \left|\mathsf{A}\right| \cdot \left|\mathsf{B}\right|.$$

4.6. Fórmulas sencillas para matrices de orden menor que 4

Para matrices de orden 1, 2 o 3, hay formulas sencillas. ¡Ojo, para matrices de orden 4 o más NO HAY REGLAS SENCILLAS! No extrapole que lo que funciona para una matriz 3 por 3 se puede hacer de manera similar para una matriz de orden 4 por 4.

Para matrices de orden 1: Para $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ tenemos

$$\left[\begin{array}{c|c} a & \\ \hline & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\det \mathsf{A} = \left|a\right| = a.}$$

Para matrices de orden 2. Deduzcamos la formula general para una matriz de la forma $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$

- Caso $a \neq 0$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & \\ c & d & \\ \hline & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(\frac{1}{a})\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(a)\mathbf{2}] \\ [(-b)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc|c} a & 0 & 0 \\ c & ad-cb & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \det \mathsf{A} = ad - bc.$$

- Caso $a = 0$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & \\ c & d & \\ \hline & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc|c} b & a & \\ d & c & \\ \hline & & -1 \end{array}\right] \text{(que es como el caso anterior)} \quad \Rightarrow \quad \det \mathsf{A} = (bc-ad)(-1) = ad-bc.$$

Otra vez la misma regla. Por tanto, siempre

$$\boxed{\det \mathsf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.}$$

Para matrices de orden 3. Deduzcamos la formula general para una matriz de la forma $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$

- Caso $a \neq 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ d & e & f & \\ g & h & i & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(a)\mathbf{2}] \\ [(a)\mathbf{3}] \\ [(-b)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-c)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(\frac{1}{a})\mathbf{4}] \\ [(\frac{1}{a})\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & \\ d & ae-bd & af-cd & \\ g & ah-bg & ai-cg & \\ \hline & & & \frac{1}{a^2} \end{array}\right]$$

donde ahora tenemos una matriz diagonal por bloques y por tanto

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} = |a| \cdot \begin{vmatrix} ae-bd & af-cd \\ ah-bg & ai-cg \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{a^2} &= \frac{1}{a}\Big((ae-bd)(ai-cg)-(af-cd)(ah-bg)\Big) \\ &= \frac{1}{a}\Big((a^2ei-aecg-bdai+bdcg)-(a^2fh-afbg-cdah+cdbg)\Big) \\ &= (aei-ecg-bdi+\frac{bdcg}{a})-(afh-fbg-cdh+\frac{cdbg}{a}) \\ &= aei+fbg+cdh-ecg-bdi-afh+\frac{bdcg}{a}-\frac{cdbg}{a} \\ &= aei+fbg+cdh-ecg-bdi-afh.\end{aligned}$$

- Caso $a=0$ y $b \neq 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ d & e & f & \\ g & h & i & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\overset{\tau}{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]} \\ [(-1)\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} b & a & c & \\ e & d & f & \\ h & g & i & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right] \text{(como el caso anterior)} \quad \Rightarrow \det \mathbf{A} = aei+fbg+cdh-ecg-bdi-afh.$$

- ... y de modo similar para el caso $a=0$, $b=0$ y $c \neq 0$.

Por tanto, siempre

$$\boxed{\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei+fbg+cdh-ecg-bdi-afh.}$$

4.7. No existen fórmulas sencillas para matrices de orden mayor a 3

A modo de ejemplo, tratemos de calcular el determinante de una matriz genérica de orden 4 (para abreviar, asumiremos que las componentes de la matriz son tales que todas las fraciones que aparecen en la derivación fracción están definidas, es decir, que todos los denominadores son distintos de cero).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & 0 \\ e & f & h & i & 0 \\ k & l & m & n & 0 \\ o & p & q & r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\overset{\tau}{[(1)\mathbf{5}]}]{\substack{\overset{\tau}{[(-\frac{b}{a})\mathbf{1+2}]} \\ [(-\frac{c}{a})\mathbf{1+3}] \\ [(-\frac{d}{a})\mathbf{1+4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f-\frac{be}{a} & h-\frac{ce}{a} & i-\frac{de}{a} & 0 \\ k & l-\frac{bk}{a} & m-\frac{ck}{a} & n-\frac{dk}{a} & 0 \\ o & p-\frac{bo}{a} & q-\frac{co}{a} & r-\frac{do}{a} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\overset{\tau}{[(1)\mathbf{5}]}]{\substack{\overset{\tau}{[(\frac{-ah+ce}{af-be})\mathbf{2+3}]} \\ [(\frac{-ai+de}{af-be})\mathbf{2+4}]}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f-\frac{be}{a} & 0 & 0 & 0 \\ k & l-\frac{bk}{a} & \frac{afm-ahl-bem+bhk+cel-cfk}{af-be} & \frac{afn-ail-ben+bik+del-dfk}{af-be} & 0 \\ o & p-\frac{bo}{a} & \frac{afq-ahp-beq+bho+cep-cfo}{af-be} & \frac{afr-aip-ber+bio+dep-dfo}{af-be} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\overset{\tau}{[(1)\mathbf{5}]}]{\overset{\tau}{[(\frac{-afn+ail+ben-bik-del+dfk}{afm-ahl-bem+bhk+cel-cfk})\mathbf{3+4}]}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f-\frac{be}{a} & 0 & 0 & 0 \\ k & l-\frac{bk}{a} & \frac{afm-ahl-bem+bhk+cel-cfk}{af-be} & 0 & 0 \\ o & p-\frac{bo}{a} & \frac{afq-ahp-beq+bho+cep-cfo}{af-be} & r+\frac{\left(-n+\frac{\left(i-\frac{de}{a}\right)\left(l-\frac{bk}{a}\right)}{f-\frac{be}{a}}+\frac{dk}{a}\right)\left(-q+\frac{\left(h-\frac{ce}{a}\right)\left(p-\frac{bo}{a}\right)}{f-\frac{be}{a}}+\frac{co}{a}\right)}{-m+\frac{\left(h-\frac{ce}{a}\right)\left(l-\frac{bk}{a}\right)}{f-\frac{be}{a}}+\frac{ck}{a}}-\frac{\left(i-\frac{de}{a}\right)\left(p-\frac{bo}{a}\right)}{f-\frac{be}{a}}-\frac{do}{a} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ahora multiplicando los elementos de la diagonal y simplificando las expresiones se llega a la expresión final:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & h & i \\ k & l & m & n \\ o & p & q & r \end{vmatrix}$$

$$= afmr - afnq - ahlr + ahnp + ailq - aimp - bemr + benq + bhkr - bhno - bikq + bimo$$
$$+ celr - cenp - cfkr + cfno + cikp - cilo - delq + demp + dfkq - dfmo - dhkp + dhlo.$$

Está claro que la esta fórmula no es ni sencilla ni fácil de recordar... *¡No puedo ni imaginar lo espantosa que tiene que ser la expresión para una matriz de orden 5 o mayor!* Es importante que sepa que:

No hay expresiones sencillas para calcular determinantes de orden mayor que 3

Pero afortunadamente hay otra forma de calcular determinantes de matrices de orden n empleando fórmulas para calcular el determinante de orden $n-1$. Esta descripción recursiva de la función determinante se llama expansión de Laplace. No obstante, con cualquier procedimiento el cálculo del determinante de una matriz genérica de orden elevado es computacionalmente intenso.

Para deducir la citada Expansión de Laplace, antes necesitamos enunciar una última propiedad de la función determinate, y definir los *menores* y los *cofactores*.

4.8. Desarrollo del determinante por cofactores (Expansión de Laplace).

4.8.1. Propiedad multilineal

(Lección 16) T-2 Propiedad multilineal

P-12 **Propiedad multilineal** P-12

$$\det\Big[\dots;(\beta\boldsymbol{b}+\psi\boldsymbol{c});\dots\Big] = \beta\det\Big[\dots;\boldsymbol{b};\dots\Big] + \psi\det\Big[\dots;\boldsymbol{c};\dots\Big]$$

170

Demostración. Puesto que se verifica la propiedad del producto **P-3**, nos basta con demostrar que $\det\Big[\dots;\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c};\dots\Big] = \det\Big[\dots;\boldsymbol{b};\dots\Big] + \det\Big[\dots;\boldsymbol{c};\dots\Big]$. Haremos la demostración para la primera columna. La demostración para el resto de columnas es similar.

Consideremos dos casos. Si $\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_{n-1}$ son linealmente dependientes, entonces la demostración es inmediata:

$$\det\Big[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big] = 0 = 0+0 = \det\Big[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big] + \det\Big[\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big].$$

En caso contrario, existe $\boldsymbol{x}$ tal que $\Big[\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big]$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Así,

$$\det\Big[\alpha\boldsymbol{x}+\psi_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+\psi_{n-1}\boldsymbol{y}_{n-1};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big] \overset{*}{=} \det\Big[\alpha\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big] \tag{4.6}$$
$$= \alpha\det\Big[\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big] \tag{4.7}$$

(*) ya que con una secuencia de transformaciones elementales se puede "simplificar" la primera columna. Ahora, si

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \alpha\boldsymbol{x}+\psi_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+\psi_{n-1}\boldsymbol{y}_{n-1} \\ \boldsymbol{b} &= \beta\boldsymbol{x}+\gamma_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+\gamma_{n-1}\boldsymbol{y}_{n-1} \end{aligned}$$

tendremos que

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (\alpha+\beta)\boldsymbol{x}+(\psi_1+\gamma_1)\boldsymbol{y}_1+\cdots+(\psi_{n-1}+\gamma_{n-1})\boldsymbol{y}_{n-1}$$

y consecuentente

$$
\begin{aligned}
\det\Big[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big] &= (\alpha+\beta)\det\Big[\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big] && \text{por (4.7)}\\
&= \alpha\det\Big[\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big]+\beta\det\Big[\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big] && \text{pues } \det\mathsf{A} \text{ es un número}\\
&= \det\Big[\alpha\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big]+\det\Big[\beta\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big] && \text{por } \mathbf{P\text{-}3}\\
&= \det\Big[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big]+\det\Big[\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{y}_1;\dots;\boldsymbol{y}_{n-1}\Big] && \text{por (4.6)}
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 26. Para $\mathbb{R}^2$

$$\begin{vmatrix} a+\alpha & c\\ b+\beta & d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c\\ b & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & c\\ \beta & d\end{vmatrix};$$

es decir

$$\begin{vmatrix} a & c\\ b & d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c\\ 0 & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & c\\ & d\end{vmatrix}.$$

4.8.2. Menores y cofactores

☞ En esta sección veremos como calcular los determinantes mediante formulas más sencillas. Fórmulas que expresan determinantes de matrices de orden n como sumas de determinantes de matrices de un orden más pequeño $(n-1)$.

Proposición 4.8.1. *Si* $\underset{n\times n}{\mathsf{A}}$ *tiene la forma* $\mathsf{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} & \underset{(n-1)\times(n-1)}{\mathsf{B}} & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\\ \hline a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & 1\end{array}\right]$, *entonces* $\boxed{\det(\mathsf{A})=\det(\mathsf{B}).}$

Demostración. Mediante operaciones elementales por columnas de *Tipo I*, podemos reducir A a

$$\mathsf{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} & \mathsf{B} & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\\ \hline a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\text{transformaciones } \textit{Tipo I}} \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathsf{B} & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1\end{array}\right] \equiv \begin{bmatrix}\mathsf{B} & \\ & 1\end{bmatrix}$$

Donde solo hemos empleado trasformaciones de *Tipo I*, así, por la Proposición 4.2.1 sabemos que

$$|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix}\mathsf{B} & \\ & 1\end{vmatrix} = |\mathsf{B}|\,. \tag{4.8}$$

□

Nueva notación y definición de menores y cofactores

Sea $\boldsymbol{q}=\big(q_1,\dots,q_n\big)$ de $\mathbb{R}^n$, si quitamos la $j$ésima componente, q_j, denotamos al nuevo vector de $\mathbb{R}^{(n-1)}$ como

$$\boldsymbol{q}^{\Rsh j} = \big(q_1,\dots,\ q_{j-1},\quad q_{j+1},\ \dots,q_n\big)\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

Análogamente, si A es de orden m por n, denotamos a la submatriz que resulta de quitar la $i$ésima fila con ${}^{i\Lsh}\mathsf{A}$, y a la submatriz que resulta de quitar la $j$ésima columna con $\mathsf{A}^{\Rsh j}$. Así, ${}^{i\Lsh}\mathsf{A}^{\Rsh j}$, es la submatriz de orden $m-1$ por $n-1$ que resulta de quitar la fila $i$ésima y la columna $j$ésima.

(Lección 16) T-3 menores y cofactores

Definición 59 (menores y cofactores)**.** *Denotamos a la submatriz resultante de eliminar la fila i y la columna j con*

$$ {}^{i\rceil}\mathbf{A}^{\lceil j}; $$

su determinante $\det\left({}^{i\rceil}\mathbf{A}^{\lceil j}\right)$, *se denomina* menor *de a_{ij}.*
Los menores con los signos alternados en función de si $(i+j)$ es par (en cuyo caso el signo no cambia) o impar (en cuyo caso se invierte el signo) se denominan cofactores*.*
Así pues,

$$ \operatorname{cof}_{ij}\left(\mathbf{A}\right) = (-1)^{i+j}\det\left({}^{i\rceil}\mathbf{A}^{\lceil j}\right) $$

es el cofactor *de a_{ij}.*

171

Ejemplo 27. Para $\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad$ tenemos

$$ {}^{1\rceil}\mathbf{A}^{\lceil 2} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \qquad {}^{3\rceil}\mathbf{A}^{\lceil 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} $$

así

$$ \operatorname{cof}_{12}\left(\mathbf{A}\right) = (-1)^{1+2}\det\left({}^{1\rceil}\mathbf{A}^{\lceil 2}\right) = (-1)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}. $$

y

$$ \operatorname{cof}_{33}\left(\mathbf{A}\right) = (-1)^{3+3}\det\left({}^{3\rceil}\mathbf{A}^{\lceil 3}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}. $$

4.8.3. Desarrollo del determinante por cofactores (Expansión de Laplace).

(Lección 16) T-4 Desarrollo del determinante por cofactores

Teorema 4.8.2 (**[Expansión de Laplace]**)**.** *Para cualquier matriz de orden n, $\det(\mathbf{A})$ se puede expresar como suma de los productos de los elementos de cualquier columna (fila) de $\mathbf{A}$ por sus correspondientes cofactores:*

$$ \det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}_{ij}\left(\mathbf{A}\right), \qquad \textit{expansión por la columna } j\textit{ésima} $$

o bien

$$ \det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}_{ij}\left(\mathbf{A}\right), \qquad \textit{expansión por la fila } i\textit{ésima} $$

173

Demostración. Probaremos la expansión por la columna $j$ésima. La expansión por filas es similar.. Primero movemos la columna $j$ésima a la última posición con una secuencia de intercambios:

$$ \left(\mathbf{A}\right)_{\underset{[j\rightleftharpoons(j+1)]}{\boldsymbol{\tau}},\ \underset{[(j+1)\rightleftharpoons(j+2)]}{\boldsymbol{\tau}},\ \cdots,\ \underset{[(n-1)\rightleftharpoons n]}{\boldsymbol{\tau}}} = \left[\mathbf{A}_{|1},\ldots,\ \mathbf{A}_{|j-1},\ \mathbf{A}_{|j+1},\ \ldots,\mathbf{A}_{|n}\middle|\mathbf{A}_{|j}\right]; = \left[\ \mathbf{A}^{\lceil j}\ \middle|\ \mathbf{A}_{|j}\right]. $$

Puesto que hay $n-j$ permutaciones en la sucesión, tenemos que

$$ \det\mathbf{A} \quad = \quad \det\left[\mathbf{A}_{|1},\ldots,\mathbf{A}_{|n}\right] \quad = \quad (-1)^{n-j}\cdot\det\left[\ \mathbf{A}^{\lceil j}\ \middle|\ \mathbf{A}_{|j}\right]. $$

Escribiendo $\mathbf{A}_{|j}$ como $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, y empleando la propiedad multilineal (***P-12***):

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{n-j} \left(\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^{\Rsh j} & \begin{matrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right] + \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^{\Rsh j} & \begin{matrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right] + \cdots + \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^{\Rsh j} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nj} \end{matrix} \end{array} \right] \right).$$

Si "hundimos" la primera fila de la primera matriz hasta la última posición mediante una sucesión de $(n-1)$ intercambios: $\underset{[1\rightleftharpoons 2]}{\boldsymbol{\tau}}, \underset{[2\rightleftharpoons 3]}{\boldsymbol{\tau}}, \ \cdots, \underset{[(n-1)\rightleftharpoons n]}{\boldsymbol{\tau}}$; y la segunda fila de la segunda matriz mediante $(n-2)$ intercambios: $\underset{[2\rightleftharpoons 3]}{\boldsymbol{\tau}}, \underset{[3\rightleftharpoons 4]}{\boldsymbol{\tau}}, \ \cdots, \underset{[(n-1)\rightleftharpoons n]}{\boldsymbol{\tau}}$; —y en general, "hundimos" la fila $i$ésima de la matriz $i$ésima con los $(n-i)$ intercambios:

$$\underset{[i\rightleftharpoons (i+1)]}{\boldsymbol{\tau}}, \underset{[(i+1)\rightleftharpoons (i+2)]}{\boldsymbol{\tau}}, \ \cdots, \underset{[(n-1)\rightleftharpoons n]}{\boldsymbol{\tau}}$$

obtenemos:

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{n-j} \left((-1)^{n-1} \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} {}^{1\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh j} & \mathbf{0} \\ \hline {}_{1|}\mathbf{A}^{\Rsh j} & a_{1j} \end{array} \right] + (-1)^{n-2} \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} {}^{2\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh j} & \mathbf{0} \\ \hline {}_{2|}\mathbf{A}^{\Rsh j} & a_{2j} \end{array} \right] + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + (-1) \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} {}^{(n-1)\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh j} & \mathbf{0} \\ \hline {}_{(n-1)|}\mathbf{A}^{\Rsh j} & a_{(n-1)j} \end{array} \right] + \det \left[\begin{array}{c|c} {}^{n\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh j} & \mathbf{0} \\ \hline {}_{n|}\mathbf{A}^{\Rsh j} & a_{nj} \end{array} \right] \right),$$

donde ${}_{i|}\mathbf{A}^{\Rsh j}$ es la fila $i$ésima de la submatriz $\mathbf{A}^{\Rsh j}$. Así, por la Proposición 4.8.1

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{n-j} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{n-i} \det \left({}^{i\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh j} \right);$$

y puesto que $(-1)^{n-j} \cdot (-1)^{n-i} = (-1)^{2n-(i+j)} = (-1)^{-(i+j)} = (-1)^{i+j}$, sustituyendo llegamos a

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \operatorname{cof}_{ij} \left(\mathbf{A}\right).}$$

□

A resolver en clase

EJERCICIO 38. Calcule el siguiente determinante:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 39. Calcule el determinante de la matriz genérica de orden 3, desarrollado por los cofactores de la segunda columna.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

4.9. Primera aplicación de los determinantes

4.9.1. Regla de Cramer para la resolución de un sistema de ecuaciones

Suponga el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde $|\mathbf{A}| \neq 0$. Sabemos que dicho sistema siempre tiene solución única, sea cual sea el vector $\boldsymbol{b}$. Dicha solución es

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b};$$

que verifica:

$$\boldsymbol{b} = (\mathbf{A}_{|1})x_1 + \cdots + (\mathbf{A}_{|j})x_j + \cdots + (\mathbf{A}_{|n})x_n, \tag{4.9}$$

donde los coeficiente x_i son los componentes[1] del vector solución $\boldsymbol{x}$.

Calculemos el determinante de una nueva matriz, idéntica a $\mathbf{A}$ excepto por que su $j$ésima columna $\mathbf{A}_{|j}$ ha sido sustituida por el vector $\boldsymbol{b}$:

$$\det\Big[\mathbf{A}_{|1};\ \mathbf{A}_{|2};\ \ldots\ \overbrace{\boldsymbol{b}}^{\text{pos. } j};\ \ldots\ \mathbf{A}_{|n}\Big].$$

Si nos fijamos en la Ecuación (4.9) es fácil constatar que para pasar de $\mathbf{A}$ a la nueva matriz, hemos multiplicado $\mathbf{A}_{|j}$ por x_j y le hemos sumado una combinación lineal del resto de columnas; por tanto:

$$\det\Big[\mathbf{A}_{|1};\ \ldots\ \overbrace{\boldsymbol{b}}^{\text{pos. } j};\ \ldots\ \mathbf{A}_{|n}\Big] = x_j \cdot \det(\mathbf{A}).$$

Despejando x_j encontramos la regla de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones determinados: *cada componente x_j de la solución $\boldsymbol{x}$ del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se puede calcular del siguiente modo*

$$x_j = \frac{\det\Big[\mathbf{A}_{|1};\ \ldots\ \overbrace{\boldsymbol{b}}^{\text{pos. } j};\ \ldots\ \mathbf{A}_{|n}\Big]}{\det(\mathbf{A})}.$$

(Lección 16) T-5 Regla de Cramer

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}; \qquad |\mathbf{A}| \neq 0$$

entonces

$$\boldsymbol{b} = (\mathbf{A}_{|1})x_1 + \cdots + (\mathbf{A}_{|j})x_j + \cdots + (\mathbf{A}_{|n})x_n.$$

$$\det\Big[\mathbf{A}_{|1};\ \ldots\ \overbrace{\boldsymbol{b}}^{\text{pos. } j};\ \ldots\ \mathbf{A}_{|n}\Big] = x_j \cdot \det(\mathbf{A}).$$

$$x_j = \frac{\det\Big[\mathbf{A}_{|1};\ \ldots\ \overbrace{\boldsymbol{b}}^{\text{pos. } j};\ \ldots\ \mathbf{A}_{|n}\Big]}{\det(\mathbf{A})}.$$

Problemas computacionales cuando $\det \mathbf{A} \simeq 0$ (ángulo pequeño entre los vectores) 174

4.10. Segunda aplicación de los determinantes

4.10.1. Cálculo de la inversa de una matriz

Definición 60. *Para* $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ *la matriz* $\mathbf{Adj(A)}$ *(la* matriz adjunta *de* $\mathbf{A}$*) se define como la transpuesta de la matriz*

[1]las coordenadas de $\boldsymbol{b}$ en la base formada por las columnas de $\mathbf{A}$

resultante de sustituir cada elemento a_{ij} *de* $\mathbf{A}$ *por su correspondiente cofactor* $\operatorname{cof}_{ij}(\mathbf{A})$*. Es decir,*

$$\mathbf{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \operatorname{cof}_{11}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{12}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{1n}(\mathbf{A}) \\ \operatorname{cof}_{21}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{22}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{2n}(\mathbf{A}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cof}_{n1}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{n2}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{nn}(\mathbf{A}) \end{bmatrix}^{\intercal}$$

¿Qué obtenemos si multiplicamos la matriz adjunta de $\mathbf{A}$ por la matriz $\mathbf{A}$?

(Lección 16) **T-6 Cálculo de la inversa de una matriz**

$$[\mathbf{Adj}(\mathbf{A})] \cdot \mathbf{A} =$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{cof}_{11}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{21}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{n1}(\mathbf{A}) \\ \operatorname{cof}_{12}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{22}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{n2}(\mathbf{A}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cof}_{1n}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{2n}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{nn}(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}$$

175

El primer elemento de la diagonal de la matriz resultante es el desarrollo de $|\mathbf{A}|$ por la primera columna de $\mathbf{A}$. El segundo elemento de la diagonal es el desarrollo de $|\mathbf{A}|$ por la segunda columna, etc. Y en general el componente $j$ésimo de la diagonal es la expansión por la columna $j$ésima:

$$a_{1j}\operatorname{cof}_{1j}(\mathbf{A}) + a_{2j}\operatorname{cof}_{2j}(\mathbf{A}) + a_{3j}\operatorname{cof}_{3j}(\mathbf{A}) + \cdots + a_{nj}\operatorname{cof}_{nj}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}_{ij}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$$

Así pues, la diagonal de la matriz resultante está compuesta por el valor del determinante de $\mathbf{A}$.

Los elementos fuera de la diagonal son determinantes de matrices con dos columnas iguales. Por ejemplo, el segundo elemento de la primera fila de $[\mathbf{Adj}(\mathbf{A})] \cdot \mathbf{A}$ es el desarrollo por la primera columna de

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{12}\operatorname{cof}_{11}(\mathbf{A}) + a_{22}\operatorname{cof}_{21}(\mathbf{A}) + a_{32}\operatorname{cof}_{31}(\mathbf{A}) + \cdots + a_{n2}\operatorname{cof}_{n1}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\operatorname{cof}_{i1}(\mathbf{A}) = 0,$$

donde la columna 2 aparece repetida en la primera posición, y por lo tanto el determinante es igual a cero.

Y el elemento $k$ésimo ($k \neq 1$) de la primera fila es

$$\begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{3k} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nk} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1k}\operatorname{cof}_{11}(\mathbf{A}) + a_{2k}\operatorname{cof}_{21}(\mathbf{A}) + a_{3k}\operatorname{cof}_{31}(\mathbf{A}) + \cdots + a_{nk}\operatorname{cof}_{n1}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\operatorname{cof}_{i1}(\mathbf{A}) = 0,$$

donde la columna $k$ésima aparece repetida en primera posición, y por lo tanto el determinante es igual a cero.

Se deduce entonces que $[\mathbf{Adj(A)}] \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I}$; y despejando $\mathbf{I}$ tenemos que:

$$\left[\frac{\mathbf{Adj(A)}}{|\mathbf{A}|}\right] \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I};$$

donde la primera matriz es necesariamente la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

Fin de la lección

Problemas de la Lección 16

(L-16) PROBLEMA 1. Complete las demostraciones (los EJERCICIOS) de esta lección.

(L-16) PROBLEMA 2. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{|1} & \mathbf{A}_{|2} & \mathbf{A}_{|3} \end{bmatrix}$ con $\det \mathbf{A} = 2$.

(a) Calcule $\det(2\mathbf{A})$ y $\det \mathbf{A}^{-1}$

(b) Calcule $\det\left(\begin{bmatrix} (3\mathbf{A}_{|1} + 2\mathbf{A}_{|2}) & \mathbf{A}_{|3} & \mathbf{A}_{|2} \end{bmatrix} \right)$

(L-16) PROBLEMA 3. El determinante de una matriz $\mathbf{A}$ de orden n por n es 12 (donde n es un múltiplo de dos). ¿Cuál es el determinante de $-\mathbf{A}^{\intercal}$? (Justifique su respuesta).
(*MIT Course 18.06 Quiz 2, Fall, 2008*)

(L-16) PROBLEMA 4. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*).

$|\mathbf{A}\mathbf{A}^{\intercal}| = |\mathbf{A}|^2$.

(L-16) PROBLEMA 5. Tenemos una matriz de orden 3×3, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$ con $\det \mathbf{A} = 3$. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

(a) (0.5 pts)

$$\begin{bmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ b-4 & 3 & 4 \\ c-6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) (0.5 pts)

$$\begin{bmatrix} 7a & 7 & 14 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(c) (1 pts)

$$(2\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}$$

(d) (0.5 pts)

$$\begin{bmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(L-16) PROBLEMA 6.

(a) Escalone la matriz $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) ¿Es $\mathbf{A}$ invertible?

(c) En caso afirmativo calcule $\left|\mathbf{A}^{-1}\right|$; en caso contrario calcule $|\mathbf{A}|$

(d) La matriz $\mathbf{C}$ es igual al producto de $\mathbf{A}$ con la *traspuesta* de la matriz $\mathbf{B}$, es decir

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{\intercal} \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

¿Cuánto vale el determinante de $\mathbf{C}$? ¿Es $\mathbf{C}$ invertible?

(L-16) PROBLEMA 7. Calcule el determinante de las siguientes matrices empleando la expansión de Laplace.

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(L-16) PROBLEMA 8. Calcule el siguiente determinante empleando la expansión de Laplace:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

(L-16) PROBLEMA 9. Calcule el siguiente determinante:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(L-16) PROBLEMA 10. Calcule el determinante de la siguiente matriz empleando la expansión de Laplace

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

(L-16) PROBLEMA 11. Suponga la matriz $\mathbf{A}_n$ de dimensiones n por n que tiene treses en su diagonal y doses inmediatamente debajo de la diagonal y en la posición $(1, n)$; por ejemplo, para $n = 4$:

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre, empleando los cofactores de la primera fila, el determinante de $\mathbf{A}_4$.

(b) Encuentre el determinante de $\mathbf{A}_n$ para $n > 4$.

(L-16) Problema 12. Si tiene una matriz por bloques

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

Demuestre que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|\,|\mathbf{C}|$.

Pista. $\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$

(L-16) Problema 13. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales, aplicando la regla de Cramer.

(a)

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & = & 2 \end{array}.$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}.$$

(ejercicio 13 del conjunto de problemas 4.4 de Strang (2007))

(L-16) Problema 14. Encuentre la inversa de las siguientes matrices empleando la matriz adjunta.

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ejercicio 18 del conjunto de problemas 4.4 de Strang (2007))

(L-16) Problema 15. Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{y el vector} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) Calcule los valores de a para los que $\mathbf{A}$ es invertible.
(b) (1^{pts}) Considere $a = 5$. Usando la regla de Cramer calcule la cuarta coordenada x_4 de la solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(c) (1^{pts}) Calcule $\mathbf{B}^{-1}$. Use dicha matriz para resolver el sistema $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Fin de los Problemas de la Lección 16

Parte IV

Autovalores y autovectores

Tema 5

Autovalores y autovectores

En este Tema 5 todas las matrices son cuadradas.

LECCIÓN 17: Autovalores y autovectores

5.1. Autovalores y autovectores

Considere la siguiente ecuación donde $\mathbf{A}$ es cuadrada y de orden n:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{5.1}$$

Definición 61 (Autovalor, autovector y espectro)**.** *Un autovalor de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es cualquier número λ tal que (5.1) tiene soluciones no nulas $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. En tal caso, a los vectores $\boldsymbol{x}$ se les llama autovectores de $\mathbf{A}$ correspondientes al autovalor λ. Al conjunto de autovalores de $\mathbf{A}$ se le denomina espectro de $\mathbf{A}$.*

Por ejemplo, es fácil ver que

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{son autovectores de} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 2\end{bmatrix}$$

correspondientes a los autovalores de $\mathbf{A}$, $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 1$ respectivamente (basta multiplicar $\mathbf{A}\boldsymbol{x}_i$ para comprobarlo).

EJERCICIO 40. Demuestre la siguiente proposición:

Proposición 5.1.1. *Una combinación lineal de autovectores correspondientes al autovalor λ es otro autovector correspondiente al mismo autovalor λ.*

El anterior resultado justifica la siguiente definición:

Definición 62 (Autoespacio)**.** *Sea $\mathbf{A}$ de orden n. Se denomina autoespacio correspondiente al autovalor λ de $\mathbf{A}$ al subespacio formado por los autovectores correspondientes al autovalor λ de $\mathbf{A}$ junto con el vector nulo.*

$$\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \right\}.$$

5.1.1. Cálculo de los autovalores y los autovectores

¿Cómo podemos encontrar los autovalores de una matriz? ¿Y qué podemos decir acerca de la existencia de autovalores de una matriz en general? Para responder, escribamos la Ecuación (5.1) de manera diferente

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\boldsymbol{x} &= \lambda\boldsymbol{x}\\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} &= \lambda\mathbf{I}\boldsymbol{x}\\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} - \lambda\mathbf{I}\boldsymbol{x} &= \mathbf{0}\\ \big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)\boldsymbol{x} &= \mathbf{0},\end{aligned} \tag{5.2}$$

es decir, el autoespacio correspondiente a λ es el espacio nulo de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$:

$$\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{A}) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right).$$

Como $\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{A})$ contiene vectores no nulos (los autovectores), $\mathcal{N}\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)$ también los contiene, es decir, la matriz cuadrada $\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)$ es singular, y por tanto:

$$\det\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big) = 0. \tag{5.3}$$

Así pues, el problema reside en encontrar los valores de λ para los que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ es singular (y por tanto $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$). Como veremos a continuación, al desarrollar el determinante se comprueba que existen $n+1$ coeficientes $p_0, \ldots, p_n$ de $\mathbb{R}$, tales que para todo λ

$$\det\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big) = p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_n\lambda^n.$$

$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$ es un polinomio en λ que denominamos *polinomio característico* de $\mathbf{A}$ y que denotamos con $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

En el ejemplo de más arriba:

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big) = \begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 6 - 7\lambda + \lambda^2 = 0.$$

Vamos a demostrar que efectivamente para cualquier matriz $\mathbf{A}$ cuadrada, $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$ siempre es un polinomio.

Demostración. Vamos a demostrarlo por inducción sobre el orden n.

El resultado es evidente para cualquier matriz de orden uno, pues: $\det\big(a_{11}-\lambda\big)=a_{11}-\lambda$. Supuesto que es cierto para cualquier matriz de orden $(n-1)$, veamos que también es cierto para cualquier matriz de orden n:

$$\det\big(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\big)=\det\left[\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1n}\\ & {}^{n\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner n}-\lambda\mathbf{I} & & :\\ & & & a_{(n-1)n}\\ \hline * & \dots & * & a_{nn}-\lambda\end{array}\right]$$

$$=\det\left[\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1n}\\ & {}^{n\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner n}-\lambda\mathbf{I} & & :\\ & & & a_{(n-1)n}\\ \hline * & \dots & * & a_{nn}\end{array}\right]-\lambda\det\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0\\ & {}^{n\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner n}-\lambda\mathbf{I} & & :\\ & & & 0\\ \hline * & \dots & * & 1\end{array}\right]$$

$$=\det\left[\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1n}\\ & {}^{n\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner n}-\lambda\mathbf{I} & & :\\ & & & a_{(n-1)n}\\ \hline * & \dots & * & a_{nn}\end{array}\right]-\lambda\det\Big({}^{n\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner n}-\lambda\mathbf{I}\Big), \tag{5.4}$$

donde ${}^{n\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner n}$ es la submatriz de $\mathbf{A}$ que resulta tras quitar la fila y columna $n$ésimas. Por hipótesis de inducción, $\det\big({}^{n\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner n}-\lambda\mathbf{I}\big)$ es un polinomio de grado $(n-1)$; por tanto, el término que resta en (5.4) es un polinomio de grado n.

Ahora se presentan dos casos. Si $a_{nn}\neq 0$, mediante transformaciones elementales de *Tipo I* se pueden anular todos los componentes de la última fila que están a la izquierda de a_{nn}. Entonces

$$\det\left[\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1n}\\ & {}^{n\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner n}-\lambda\mathbf{I} & & :\\ & & & a_{(n-1)n}\\ \hline * & \dots & * & a_{nn}\end{array}\right]=\det\left[\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1n}\\ & \mathbf{B}-\lambda\mathbf{I} & & :\\ & & & a_{(n-1)n}\\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{array}\right]=a_{nn}\cdot\det\big(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}\big),$$

que por hipótesis de inducción es un polinomio de grado $(n-1)$, por lo que la diferencia de polinomios en (5.4) es un polinomio de grado n. En el segundo caso $a_{nn}=0$, por tanto

$$\det\left[\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1n}\\ & {}^{n\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner n}-\lambda\mathbf{I} & & :\\ & & & a_{(n-1)n}\\ \hline * & \dots & * & 0\end{array}\right]=\det\left[\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1n}\\ & {}^{n\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner n}-\lambda\mathbf{I} & & :\\ & & & a_{(n-1)n}\\ \hline * & \dots & * & -1\end{array}\right]+\det\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0\\ & {}^{n\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner n}-\lambda\mathbf{I} & & :\\ & & & 0\\ \hline * & \dots & * & 1\end{array}\right].$$

Repitiendo el argumento de más arriba, constatamos que ambos determinantes son polinomios de grado $(n-1)$, por lo que su diferencia es un polinomio de grado menor o igual que $(n-1)$. Así que de nuevo la diferencia de polinomios en (5.4) es un polinomio de grado n. $\square$

Corolario 5.1.2. *Todo autovalor de* $\mathbf{A}$ *es raíz del polinomio característico* $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

Para el ejemplo de más arriba, puesto que $\det\big(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\big)=\lambda^2-7\lambda+6=0$; tenemos que

$$\lambda=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\frac{7\pm 5}{2}=\begin{cases}6\\1\end{cases}\qquad\Longrightarrow\quad \text{El } \textit{espectro} \text{ de } \mathbf{A} \text{ es } \{6,1\}.$$

El *Teorema Fundamental del Álgebra*[1] establece que un polinomio $P(\lambda)$ con coeficientes complejos[2] y de grado $n>0$ se puede factorizar como

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda)\;=\;p_0+p_1\lambda+\cdots+p_{n-1}\lambda^{n-1}+p_n\lambda^n\;=\;\alpha(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda),\quad \text{donde } \alpha,\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}.$$

y por tanto, *tiene como mínimo una raíz* y como máximo n raíces complejas distintas.

[1] cuya demostración está fuera del alcance de este curso

[2] El conjunto de números complejos se denota con $\mathbb{C}$.

☞ *A partir de ahora, y para poder hacer uso del* Teorema Fundamental del Álgebra*, asumiremos que tanto los vectores como las matrices están formadas por números complejos.*

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.1.3. *Los autovalores de una matriz* $\mathbf{A}$ *de orden* n *son las raíces del* Polinomio Característico $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$*. Por tanto,* $\mathbf{A}$ *tiene como mucho* n *autovalores distintos.*

Se denomina *multiplicidad* de una raíz al número de veces que aparece en la factorización del polinomio. Se extiende esta nomenclatura a los autovalores añadiendo la "coletilla" *algebraica*.

Definición 63 (Multiplicidad algebráica de un autovalor)**.** *Si* λ *es una raíz de* $P_{\mathbf{A}}$ *de multiplicidad* k *diremos que* λ *es un autovalor de* $\mathbf{A}$ *de* multiplicidad algebraica k*; que denotamos con* $\mu(\lambda) = k$.

Siguiendo con el ejemplo de más arriba, la multiplicidad algebraica tanto del autovalor $\lambda_1 = 6$ como de $\lambda_2 = 1$ es es uno; y los autoespacios de $\mathbf{A}$ correspondientes a 6 y a 1 son respectivamente los espacios nulos

$$\mathcal{N}(\mathbf{A} - 6\mathbf{I})\,; \qquad \text{y} \qquad \mathcal{N}(\mathbf{A} - 1\mathbf{I})\,;$$

por tanto los autovectores de $\mathbf{A}$ correspondientes a 6 y 1 son, respectivamente, las soluciones no nulas de los sistemas

$$\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}; \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix}4 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Definición 64 (Multiplicidad geométrica de un autovalor)**.** *La dimensión del autoespacio* $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ *se denomina* multiplicidad geométrica del autovalor λ*; que denotamos con* $\gamma(\lambda)$.

☞ El problema de encontrar los autovalores y autovectores de una matriz requiere los siguientes pasos:

1. Encontrar el polinomio característico $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)$.
2. Encontrar las raíces λ_i de la ecuación característica $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.
3. Resolver los sistemas homogéneos $\big(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}\big)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ para encontrar los autovectores.

La multiplicidad *algebraica* de λ es el número de veces que se repite la raíz λ en el polinomio característico $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

La multiplicidad *geométrica* de λ es la dimensión del correspondiente autoespacio $\mathcal{E}_{\lambda}(\mathbf{A})$.

Lección 17

(Lección 17) T-1 Esquema de la Lección 17

Matrices siempre cuadradas en este tema

Esquema de la *Lección 17*

- **Autovalores-autovectores** (eigen, característicos, propios)
- $\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = 0$ *ecuación característica*
- $\operatorname{Tr}(\mathbf{A})$, $\det \mathbf{A}$

176

(Lección 17) **T-2 Autovalores y autovectores**

Considere la ecuación

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

- *Autovalor* es cualquier λ para el que existen soluciones $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.
- Dichas soluciones no nulas $\boldsymbol{x}$ se llaman *autovectores*.
  - $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tales que $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ paralelo a (múltiplo de) $\boldsymbol{x}$

Si un autovalor λ es 0, ¿quienes son los correspondientes auto-vectores?

177

(Lección 17) **T-3 Un ejemplo: matriz de proyección**

- Proyección ortogonal
- ¿Qué vectores son autovectores?
  ¿qué vectores quedan en la misma dirección?
- ¿Cuanto valen sus autovalores?
- ¿Hay más autovectores? ¿Con qué autovalor?
- Dos autoespacios

178

(Lección 17) **T-4 Otro ejemplo: matriz permutación**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Un vector que no cambie tras la permutación? ...
- ¿Cuál es su autovalor?
- ¿Hay algún otro autovector con autovalor asociado $\lambda_2 = -1 \ldots$?

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_2$$

Nótese: $\operatorname{Tr}(\mathbf{A}) = 0 = \lambda_1 + \lambda_2$; $\quad \det \mathbf{A} = -1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

179

La *traza* de $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ es la suma de los elementos de su diagonal principal, es decir,

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

(Lección 17) T-5 ¿Cómo calcular los autovalores y los autovectores?

¿Cómo resolver

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \overbrace{\lambda}^{?}\ \overbrace{\boldsymbol{x}}^{?}\ ?$$

Reescribamos ...

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{x} =$$

idea Para que esto ocurra ¿cómo debe ser la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$?
¿Cuánto debe valer el determinante? $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| =$

180

(Lección 17) T-6 ¿Cómo calcular los autovalores y los autovectores?

1. Autovalores son los λ's tales que: $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| =$

(Polinomio característico)

2. ¿Cómo calcular los $\boldsymbol{x}$ tales que $\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

181

(Lección 17) T-7 Ejemplo (¡primero los autovalores!)

Buscamos determinante nulo (Polinomio característico)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

Nótese: $\operatorname{Tr}(\mathbf{A}) = 6 = \lambda_1 + \lambda_2$; $\qquad \det \mathbf{A} = 8 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

182

Recuérdese que si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces el valor x que resuelve dicha ecuación cuadrática es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_equation

(Lección 17) T-8 Ejemplo (después los autoespacios)

y ahora calculamos el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ ... para cada λ.

para $\lambda_1 = 4$

$$\big[\mathbf{A} - 4\mathbf{I}\big] = \begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in$$

para $\lambda_1 = 2$

$$\big[\mathbf{A} - 2\mathbf{I}\big] = \begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

¿Son esos dos los únicos autovectores?

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda\boldsymbol{x}_i; \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_i = \lambda\boldsymbol{x}_i.$$

183

(Lección 17) T-9 **Otro ejemplo: Matriz rotación 90º**

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Cuanto vale la suma de los autovalores?
- ¿Cuanto vale el determinante?

Dificultades: ¿Qué vector es paralelo a si mismo tras una rotación?
Además: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$ $(+) \cdot (-) = (+)$

$$\det(\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 =$$

184

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

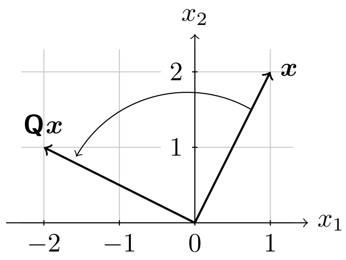


Figura 5.1: Rotación

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

De alguna manera estos vectores complejos mantienen la dirección tras la rotación. ¡No me preguntéis cómo!

Si la matriz es *simétrica* los autovalores son *reales* (y los autovectores son perpendiculares —ya lo veremos— **proposiciones** 5.8.1 y 5.8.5), pero si es *anti-simétrica* (como $\mathbf{Q}$) los autovalores son números *imaginarios*.

(Lección 17) T-10 Ejemplos aún peores

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) = 0 \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

- Autovectores
  - para λ_1:

$$(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1; \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - para λ_2:

185

Resumen:

1. Los autovalores λ son aquellos que hacen a la matriz $\left[\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}\right]$ singular, es decir las soluciones de la ecuación característica $\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = 0$.
2. Una matriz de orden $n \times n$ tiene n autovalores
3. La suma de los autovalores es igual a la suma de los elementos de la diagonal de la matriz (traza)
4. El producto de los autovalores es igual al determinante
5. Los autovectores asociados a un autovalor λ son los vectores no nulos del espacio nulo de la matriz $\left[\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}\right]$.

Fin de la lección

Problemas de la Lección 17

(L-17) Problema 1. Considere la matriz

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -3 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Los autovalores de A son -1, 1 y 2; y dos auto-vectores son

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Compruebe que estos vectores son efectivamente auto-vectores de A. ¿Cuales son sus correspondientes autovalores?

(b) Encuentre un tercer auto-vector correspondiente al tercer auto-valor.

(L-17) Problema 2. Encuentre los valores y vectores característicos de

(a)

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 12 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-17) PROBLEMA 3. Si $\mathbf{B}$ tiene autovalores 1, 2, 3, $\mathbf{C}$ tiene autovalores 4, 5, 6, y $\mathbf{D}$ tiene autovalores 7, 8, 9, ¿Qué autovalores tiene la matriz de orden 6 por 6 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$? donde $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ son matrices triangulares superiores.
(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-17) PROBLEMA 4. Encuentre los autovalores y autovectores de las siguientes matrices

(a)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-17) PROBLEMA 5. Los autovalores de $\mathbf{A}$ son iguales a los autovalores $\mathbf{A}^\intercal$. Esto se debe a que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ es igual a $\det(\mathbf{A}^\intercal - \lambda\mathbf{I})$.

(a) Lo anterior es cierto porque ____________

(b) Demuestre con un ejemplo que, sin embargo, los auto-vectores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\intercal$ no son los mismos.

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-17) PROBLEMA 6. Sea $\mathbf{B}$ y un autovector $\boldsymbol{x}$ con autovalor asociado λ, es decir $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$; sea también $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{B} + \alpha\mathbf{I}\end{bmatrix}$. Demuestre que $\boldsymbol{x}$ es también un autovector de $\mathbf{A}$, pero con el autovalor asociado $(\lambda + \alpha)$.

(L-17) PROBLEMA 7.

(a) Encuentre los autovalores y los auto-vectores de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Compruebe que la traza es igual a la suma de los autovalores, y que el determinante es igual a su producto.

(b) Si consideramos una nueva matriz, generada a partir de la anterior como
$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 7\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$
¿Cuáles son los autovalores y auto-vectores de la nueva matriz, y como están relacionados con los de $\mathbf{A}$?

(Strang, 2007, ejercicio 1 y 3 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-17) PROBLEMA 8. Suponga que λ es un auto-valor de $\mathbf{A}$, y que $\boldsymbol{x}$ es un auto-vector tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

(a) Demuestre que ese mismo $\boldsymbol{x}$ es un auto-vector de $\mathbf{B} = \mathbf{A} - 7\mathbf{I}$, y encuentre el correspondiente auto-valor de $\mathbf{B}$.

(b) Suponga que $\lambda \neq 0$ (y que $\mathbf{A}$ es invertible), demuestre que $\boldsymbol{x}$ también es un auto-vector de $\mathbf{A}^{-1}$, y encuentre el correspondiente auto-valor. ¿Qué relación tiene con λ?

(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-17) PROBLEMA 9. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensiones $n \times n$, y que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. ¿Qué posibles valores pueden tomar los autovalores de $\mathbf{A}$?

(L-17) PROBLEMA 10. Suponga la matriz $\underset{3\times3}{\mathbf{A}}$ con autovalores 1, 2 y 3. Si $\boldsymbol{v}_1$ es un auto-vector asociado al auto-valor 1, $\boldsymbol{v}_2$ al auto-valor 2 y $\boldsymbol{v}_3$ al auto-valor 3; entonces ¿cuanto es $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3)$?

(L-17) PROBLEMA 11. Proporcione un ejemplo que muestre que los auto-valores pueden cambiar cuando un múltiplo de una columna se resta de otra. ¿Por qué los pasos de eliminación no modifican los autovalores nulos?

(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-17) PROBLEMA 12. El polinomio característico de una matriz $\mathbf{A}$ se puede factorizar como

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda).$$

Demuestre, partiendo de esta factorización, que el determinante de $\mathbf{A}$ es igual al producto de sus valores propios (autovalores). Para ello haga una elección inteligente del valor de λ.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-17) PROBLEMA 13. Calcule los valores característicos (autovalores o valores propios) y los vectores característicos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^2$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^2$ tiene los mismos ________ que $\mathbf{A}$. Cuando los autovalores de $\mathbf{A}$ son λ_1 y λ_2, los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son ________.
(Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-17) PROBLEMA 14. Suponga que los valores característicos de $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ son 1, 2 y 4, ¿cuál es la traza de $\mathbf{A}^2$? ¿Cuál es el determinante de $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\intercal}$?
(Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-17) PROBLEMA 15. The equation $(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has no solution for some right-hand side $\boldsymbol{b}$. Give as much information as possible about the eigenvalues of the matrix $\mathbf{A}$ (the matrix $\mathbf{A}$ is diagonalizable). *MIT Course 18.06 Quiz 3. Spring, 2009*

(L-17) PROBLEMA 16. You are given the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

One of the eigenvalues is $\lambda = 1$. What are the eigenvalues of $\mathbf{A}$? [Hint: Very little calculation required! You should be able to see another eigenvalue by inspection of the form of $\mathbf{A}$, and the third by an easy calculation. You shouldn't need to compute $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ unless you really want to do it the hard way.] *MIT Course 18.06 Quiz 3. Spring, 2009*

Fin de los Problemas de la Lección 17

LECCIÓN 18: Matrices semejantes y diagonalización por bloques triangulares

En esta lección vamos a ver que toda matriz cuadrada se puede transformar en una matriz diagonal **por bloques triangulares**, y que cada submatriz en la diagonal (cada bloque) es triangular y con un autovalor en su diagonal. Además, veremos cuál es la condición necesaria para que los bloques sean de tamaño 1, es decir, para que la matriz sea *diagonalizable*.

Primero introduzcamos nueva notación relacionada con las matrices elementales y las operaciones con filas y columnas.

5.2. Transformación elemental “*espejo*” de otra transformación

Resulta que podemos obtener una misma matriz elemental tanto operando sobre las filas como sobre las columnas de la matriz identidad. En el caso de las matrices elementales *Tipo I* es muy sencillo. Por ejemplo, para $\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$

$${}_{\underset{[(\alpha)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&&\\&1&\alpha\\&&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}_{\underset{[(\alpha)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}.$$

En general, para una misma matriz elemental $\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}}$, la transformación elemental necesaria para crearla es distinta si actuamos sobre las filas, o sobre sus columnas, pues es necesario el *intercambio entre los índices* $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$.

$${}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}}$$

A falta de un mejor nombre, llamaremos a cada una el “*espejo*” de la otra:

Definición 65. *Llamaremos* “espejo” *de una transformación elemental* $\boldsymbol{\tau}$ *(que denotaremos con* $esp(\boldsymbol{\tau})$*) a aquella trasformación elemental que actuando por el otro lado de la matriz identidad arroja el mismo resultado; es decir*

$${}_{esp(\boldsymbol{\tau})}\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}} \qquad \text{ó} \qquad {}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I} = \mathbf{I}_{esp(\boldsymbol{\tau})}$$

El *espejo* de la transformación elemental $\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}$ es a la transformación que resulta de intercambiar los índices j y k, es decir,

$$esp\Big(\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}\Big) = \underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}.$$

Para las matrices elementales *Tipo II* (y para las matrices intercambio) el caso es mucho más sencillo. Como las matrices elementales *Tipo II* (y las matrices intercambio) son simétricas, ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$, resulta que tanto las trasformaciones elementales *Tipo II* (y los intercambios), son su propio *espejo*. Por ejemplo

$${}_{\underset{[(\alpha)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&&\\&\alpha&\\&&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}_{\underset{[(\alpha)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}.$$

Por otra parte, dada una sucesión de transformaciones elementales, su *espejo* es la sucesión de trasformaciones espejo:

$$esp\big(\boldsymbol{\tau}_1 \dots \boldsymbol{\tau}_k\big) = esp(\boldsymbol{\tau}_1)\dots esp(\boldsymbol{\tau}_k);$$

es decir

$${}_{esp(\boldsymbol{\tau}_1 \dots \boldsymbol{\tau}_k)}\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k}$$

Uso de la librería en Python

```
Tr = T((3,2,1)) & T((-2,3,2)) & T((7,1,3)) & T({2,3}) & T((20,1)) # Secuencia de transf.
A  = I(3) & Tr                            # Transformación de las columnas de la Identidad
B  = Tr.espejo() & I(3)           # Transformación espejo sobre las filas de la Identidad
A == B                            # Verificación de que A y B son iguales
```

Así, como la inversa de $\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}$ es $\underset{[(-\alpha)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}$; la matriz $\left({}_{\underset{[(-\alpha)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\right)$ es la inversa de $\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)$; y por otra parte, la matriz $\left({}_{\underset{[(\frac{1}{\alpha})\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\right)$ es la inversa de $\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)$.

Por tanto,

$$ {}_{\underset{[(-\alpha)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{I}; \qquad \text{y} \qquad {}_{\underset{[(\frac{1}{\alpha})\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{I}. $$

Y en general

$$ {}_{esp(\boldsymbol{\tau}^{-1})}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{I} \qquad \text{y} \qquad {}_{esp(\boldsymbol{\tau}_1^{-1}\ldots\boldsymbol{\tau}_k^{-1})}\mathbf{I}_{(\boldsymbol{\tau}_1\ldots\boldsymbol{\tau}_k)} = \mathbf{I}. $$

Uso de la librería en Python

```
Tr = T((3,2,1)) & T((-2,3,2)) & T((7,1,3)) & T({2,3}) & T((20,1))  # Sec. de transf.
(Tr**-1).espejo() & I(3) & Tr
```

En lo que queda de lección aplicaremos a matrices cuadradas transformaciones de la forma

$$ \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} \;=\; \left(\mathbf{I}_{(\boldsymbol{\tau}_1\ldots\boldsymbol{\tau}_k)}\right)^{-1}\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{(\boldsymbol{\tau}_1\ldots\boldsymbol{\tau}_k)}\right) \;=\; \left({}_{esp(\boldsymbol{\tau}_1^{-1}\ldots\boldsymbol{\tau}_k^{-1})}\mathbf{I}\right)\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{(\boldsymbol{\tau}_1\ldots\boldsymbol{\tau}_k)}\right) \;=\; {}_{esp(\boldsymbol{\tau}_1^{-1}\ldots\boldsymbol{\tau}_k^{-1})}\mathbf{A}_{(\boldsymbol{\tau}_1\ldots\boldsymbol{\tau}_k)}, $$

donde $\mathbf{S} = \mathbf{I}_{(\boldsymbol{\tau}_1\ldots\boldsymbol{\tau}_k)}$.

5.3. Diagonalización por bloques triangulares

5.3.1. Matrices semejantes

Definición 66. *Decimos que* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{C}$ *(del mismo orden) son* semejantes *si existe una matriz invertible* $\mathbf{S}$ *tal que*

$$ \mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{S}. $$

Propiedades compartidas por dos matrices semejantes

Las *matrices semejantes* comparten muchas propiedades; por ejemplo, *tienen el mismo determinante*:

$$ \det\mathbf{A} \;=\; \det\mathbf{S}^{-1}\cdot\det\mathbf{C}\cdot\det\mathbf{S} \;=\; \det\mathbf{C}\cdot\det\mathbf{S}\cdot\det\mathbf{S}^{-1} \;=\; \det\mathbf{C}. $$

Las matrices semejantes también tienen idéntico polinomio característico:

Proposición 5.3.1. *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{C}$ *son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración. Puesto que son similares, existe una matriz invertible $\mathbf{S}$ tal que $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, entonces

$$ \begin{aligned} P_{\mathbf{C}}(\lambda) = \det\left(\mathbf{C}-\lambda\mathbf{I}\right) &= \det\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}-\lambda\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\right) && \text{pues } \mathbf{C}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} \text{ y } \mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}=\mathbf{I} \\ &= \det\left(\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{S}\right) && \text{sacando factor común} \\ &= \det\left(\mathbf{S}^{-1}\right)\cdot\det\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)\cdot\det\left(\mathbf{S}\right) && \text{determinante de un producto de matrices} \\ &= \det\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right) = P_{\mathbf{A}}(\lambda) && \text{ya que } \det\left(\mathbf{S}^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(\mathbf{S}\right)}. \end{aligned} $$

□

Y puesto que cada raíz del polinomio característico es un autovalor de la matrices, y la multiplicidad de cada raíz es la multiplicidad *algebraica* de cada autovalor, concluimos que *dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores y con la misma multiplicidad algebraica.*

Pero además *los autovalores de dos matrices semejantes también tienen la misma multiplicidad geométrica.* Es fácil deducirlo. Sea $\mathbf{A}$ de orden n; sabemos que si $\mathbf{S}$ es invertible y del mismo orden, entonces $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\mathbf{S}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, y por tanto las formas escalonadas de las matrices $\mathbf{AS}$ y $\mathbf{A}$ tienen n columnas y el mismo número de pivotes, por tanto $\dim \mathcal{N}(\mathbf{AS}) = \dim \mathcal{N}(\mathbf{A})$. Por otra parte sabemos que si $\mathbf{S}$ es invertible, $\mathcal{N}(\mathbf{SA}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$. Combinando ambos resultados y teniendo en cuenta que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} - \lambda_i \mathbf{I} \quad = \quad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} - \lambda_i \mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} \quad = \quad \mathbf{S}^{-1}\Big(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}\Big)\mathbf{S},$$

tenemos que para cada autovalor λ_i de $\mathbf{A}$,

$$\dim \mathcal{N}\Big(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} - \lambda_i \mathbf{I}\Big) \quad = \quad \dim \mathcal{N}\Big(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}\Big).$$

Definición 67. *La* traza *de* $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ *es la suma de los elementos de su diagonal principal, es decir,*

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Pues bien, *dos matrices semejantes también tienen la misma traza.* Para demostrarlo comenzamos multiplicando $\mathbf{A}$ por la matriz elemental $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ por la derecha y por su inversa, $(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})^{-1}$, por la izquierda. Evidentemente la matriz resultante es similar a $\mathbf{A}$. Veamos que la traza no cambia...

Proposición 5.3.2. *Si* $\mathbf{A} = (\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})^{-1}\,\mathbf{B}\,(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})$, *es decir, si* $\mathbf{A} = {}_{esp(\boldsymbol{\tau}^{-1})}\mathbf{B}_{\boldsymbol{\tau}}$, *entonces* $\operatorname{Tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{Tr}(\mathbf{B})$.

Demostración. Veamos que la traza no cambia ni con transformaciones *Tipo I* ni con transformaciones *Tipo II*:

Si $\boldsymbol{\tau}$ es de Tipo II y $\boldsymbol{\tau}$ multiplica por α a la columna $\boldsymbol{i}$ésima, entonces $esp(\boldsymbol{\tau}^{-1})$ dividirá por α la fila $\boldsymbol{i}$ésima. Por tanto, el $\boldsymbol{i}$ésimo componente de la diagonal no cambiará. Veámoslo:

$$\mathbf{A}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)_{|j} \quad = \quad \Big(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)_{|j} \quad = \quad \alpha\big(\mathbf{A}_{|j}\big);$$

pero al aplicar la inversa también tenemos

$${}_{j|}\Big({}_{\underset{[(\frac{1}{\alpha})\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\Big)\mathbf{A} \quad = \quad {}_{j|}\Big({}_{\underset{[(\frac{1}{\alpha})\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{A}\Big) \quad = \quad \frac{1}{\alpha}\big({}_{j|}\mathbf{A}\big);$$

Como la primera operación multiplica la componente ${}_{j|}\mathbf{A}_{|j}$ por α y la segunda la divide por α, la diagonal no cambia; y por tanto tampoco cambia la traza.

Si $\boldsymbol{\tau}$ es de Tipo I y $\boldsymbol{\tau}$ suma α veces la columna $\boldsymbol{i}$ésima a la $\boldsymbol{j}$ésima, y a la correspondiente matriz elemental la denominamos $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ entonces su inversa es $\mathbf{E}^{-1} = {}_{\underset{[(-\alpha)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}$ y

$$\big(\mathbf{AE}\big)_{|j} = \alpha\big(\mathbf{A}_{|i}\big) + \mathbf{A}_{|j} \quad \Rightarrow \quad {}_{j|}\big(\mathbf{AE}\big)_{|j} = \alpha\big({}_{j|}\mathbf{A}_{|i}\big) + {}_{j|}\mathbf{A}_{|j}$$

pero

$${}_{i|}\big(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\big) = -\alpha\big({}_{j|}\mathbf{A}\big) + {}_{i|}\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad {}_{i|}\big(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\big)_{|i} = -\alpha\big({}_{j|}\mathbf{A}_{|i}\big) + {}_{i|}\mathbf{A}_{|i}$$

Así pues, estas transformaciones cambian los elementos $\boldsymbol{j}$ésimo e $\boldsymbol{i}$ésimo de la diagonal, a uno se le suma $\alpha\,{}_{j|}\mathbf{A}_{|i}$ y al otro se le resta $\alpha\,{}_{j|}\mathbf{A}_{|i}$. Por tanto (aunque cambia la diagonal) la traza no cambia.

□

...y puesto que las matrices invertibles son producto de matrices elementales, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.3.3. *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son semejantes, entonces tienen la misma traza.*

Uso de la librería en Python

```
A  = Matrix([[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]])
Tr = T((5,2)) & T((-2,3,1))
(Tr**-1).espejo() & Matrix(A) & Tr              # No cambia la traza
```

☞ Y ahora veamos el resultado más importante de la lección: que dada $\mathbf{A}$ y conocidos sus autovalores, siempre es posible transformar $\mathbf{A}$ en una matriz diagonal por bloques triangulares similar a $\mathbf{A}$ y cuya diagonal contiene todos los autovalores de $\mathbf{A}$.

De propina deduciremos que la suma de los autovalores es la traza y su producto es el determinante.

Nota 4. *¡Recuerde que para obtener matrices semejantes hay que operar tanto con las filas como con las columnas! (... hay que multiplicar por la derecha con una matriz y por la izquierda con la inversa de dicha matriz).*

5.3.2. Diagonalización por bloques triangulares

Teorema 5.3.4. *Para toda matriz cuadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existe una matriz invertible $\mathbf{S}$ tal que*

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_k}} & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_2}} & \\ & & & \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_1}} \end{bmatrix} \quad \text{donde } \mathbf{T}_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ * & \lambda_i & & \\ * & * & \ddots & \\ * & * & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} \text{ es triangular y de orden igual a la multiplicidad}$$

algebraica de λ_i, y donde $\{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$ es el conjunto[3] de autovalores de $\mathbf{A}$.

☞ Antes de demostrar este importante teorema, vamos a ver algunos resultados previos que nos ayudarán a entender los pasos del algoritmo de diagonalización por bloques.

Lema 5.3.5 (De paso inicial)**.** *Si $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es de la forma*

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C} & \\ \hline \ast & \mathbf{L} \end{array}\right]$$

donde $\mathbf{C}$ (de orden m) es singular y $\mathbf{L}$ es una triangular inferior sin ceros en la diagonal principal, entonces existe una matriz invertible $\mathbf{S}$ tal que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{C}' & & \\ \hline \ast & 0 & \\ \hline & & \mathbf{L} \end{array}\right], \quad \text{donde } \mathbf{C}' \text{ es de orden } (m-1).$$

Y si $\mathbf{A}$ es simplemente singular, entonces $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}' & \\ \hline \ast & 0 \end{array}\right]$, donde $\mathbf{C}'$ es de orden $(m-1)$.

Demostración. Etapa 1 [*Anulando la última columna de $\mathbf{C}$ (su columna $m$ésima)*]. Como $\mathbf{C}$ (de orden m) es singular, podemos anular su última columna por eliminación Gaussiana usando una sucesión de transformaciones elementales, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{R}$, que involucran únicamente a las m primeras columnas de $\mathbf{A}$. Por tanto, al aplicar las correspondientes trasformaciones inversas *"espejo"* a las filas, ${}_{esp(\boldsymbol{\tau}_1^{-1}\dots\boldsymbol{\tau}_k^{-1})}\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1}$, únicamente modificaremos las primeras m filas de $\mathbf{A}$ (todas ellas con un cero en la posición $m$ésima). Así obtenemos una matriz de la forma

$${}_{esp(\boldsymbol{\tau}_1^{-1}\dots\boldsymbol{\tau}_k^{-1})}\mathbf{A}_{(\boldsymbol{\tau}_1\dots\boldsymbol{\tau}_k)} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c|cccc} \underset{m\times(m-1)}{\ast} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & & & & \\ \hline & d_{m+1} & \beta_{m+1} & & & \\ & d_{m+2} & * & \beta_{m+2} & & \\ \ast & \vdots & * & * & \ddots & \\ & d_n & * & * & \cdots & \beta_n \end{array}\right]$$

Etapa 2 [*Anulando el resto de coeficientes de la columna $m$ésima de $\mathbf{A}$ (los que quedan a la izquierda de $\mathbf{L}$)*]. Gracias a que las componentes β_j de la diagonal principal de $\mathbf{L}$ son pivotes, mediante una sucesión de trasformaciones

[3] Asumimos que en $\{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$ no hay elementos repetidos.

elementales $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_{(k+1)}\cdots\boldsymbol{\tau}_p}$, $\Big($del tipo $\mathbf{I}_{[(\alpha_j)\boldsymbol{j+m}]}^{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{P}$, con $j > m\Big)$, se pueden anular las componentes $d_{m+1},\dots,d_n$ de la columna $m$ésima. Al aplicar la sucesión de las correspondientes transformaciones inversas "*espejo*", ${}_{esp(\boldsymbol{\tau}_{k+1}^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_p^{-1})}\mathbf{I} = \mathbf{P}^{-1}$, $\Big($del tipo ${}^{\boldsymbol{\tau}}_{[(-\alpha_j)\boldsymbol{m+j}]}\mathbf{I}$, con $j > m\Big)$, solo varían las columnas correspondientes a los asteriscos "$\ast$", ya que la fila $m$ésima contiene únicamente ceros a partir de la posición m; resultando la matriz

$$ {}_{esp(\boldsymbol{\tau}_1^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_k^{-1},\boldsymbol{\tau}_{(k+1)}^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_p^{-1})}\mathbf{A}_{(\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k,\boldsymbol{\tau}_{k+1}\cdots\boldsymbol{\tau}_p)} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}^{-1})\mathbf{A}(\mathbf{RP}) = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{C}' & & \\ \hline & 0 & \\ \ast & & \\ \cline{2-3} & & \mathbf{L} \end{array}\right], \quad \text{donde } \mathbf{P} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_{(k+1)}\cdots\boldsymbol{\tau}_p}. $$

Llamando $\mathbf{S}$ a la matriz $\mathbf{RP} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p}$ hemos terminado la demostración del primer caso.

Demostrar el caso en que $\mathbf{A}$ es simplemente singular es más sencillo... basta con aplicar la *Etapa 1*. □

Lema 5.3.6 (Paso de continuación)**.** *Si* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *es de la forma*

$$ \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{C} & & \\ \hline \ast & \mathbf{T} & \\ \hline \ast & & \mathbf{L} \end{array}\right]. $$

donde $\mathbf{C}$ *(de orden* k*) es singular, donde* $\mathbf{L}$ *(de orden* $n-m$*) es una triangular inferior sin ceros en la diagonal principal y donde* $\mathbf{T}$ *es triangular inferior con la diagonal principal llena de ceros, entonces existe* $\mathbf{S}$ *(invertible) tal que*

$$ \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{C}' & & \\ \hline \ast & \mathbf{T}' & \\ \hline \ast & & \mathbf{L} \end{array}\right], $$

donde $\mathbf{C}'$ *es de orden* $(k-1)$ *y* $\mathbf{T}'$ *es triangular inferior con la diagonal principal llena de ceros.*

Y si $\mathbf{A}$ *es simplemente de la forma* $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C} & \\ \hline \ast & \mathbf{T} \end{array}\right]$, *entonces* $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}' & \\ \hline \ast & \mathbf{T}' \end{array}\right]$, *donde* $\mathbf{C}'$ *es de orden* $k-1$ *y* $\mathbf{T}'$ *es triangular inferior con la diagonal principal llena de ceros.*

Demostración. Etapa 1 [*Anulando la última columna de* $\mathbf{C}$ (*su columna* k*ésima*)]. Aplicando la eliminación Gaussiana como en la *Etapa 1* del lema anterior obtenemos una matriz de la forma

$$ \left[\begin{array}{c|c|c|cccc} & 0 & & & & & \\ \underset{k\times(k-1)}{\ast} & \vdots & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ \hline \ast & \ast & \mathbf{T} & & & & \\ \hline & d_{m+1} & & \beta_{m+1} & & & \\ & d_{m+2} & & \ast & \beta_{m+2} & & \\ \ast & \vdots & & \ast & \ast & \ddots & \\ & d_n & & \ast & \ast & \cdots & \beta_n \end{array}\right], \quad \text{donde } \mathbf{T}' = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline \ast & \mathbf{T} \end{array}\right]. $$

Etapa 2 [*Anulando coeficientes de la columna* k*ésima que están a la izquierda de* $\mathbf{L}$]. hacemos lo mismo que en la *Etapa 2* del lema anterior quedando una matriz de la forma

$$ \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{C}' & & & \\ \hline & 0 & & \\ \cline{2-4} \ast & \ast & \mathbf{T} & \\ \cline{2-4} & 0 & & \mathbf{L} \end{array}\right], \quad \text{donde } \mathbf{T}' = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline \ast & \mathbf{T} \end{array}\right]. $$

Y si $\mathbf{A}$ es simplemente de la forma $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}' & \\ \hline \ast & \mathbf{L} \end{array}\right]$, entonces basta aplicar el *Etapa 1*. □

Antes de pasar al siguiente corolario, recuérdese que para una *matriz triangular por bloques* (véase el EJERCICIO 37 en la página 216)

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right] \qquad \text{se verifica que} \qquad |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{D}|\,;$$

por tanto, el polinomio característico de la matriz triangular por bloques $\mathbf{A}$ es igual al producto de los polinomios característicos de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{D}$; es decir $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = P_{\mathbf{B}}(\lambda) \cdot P_{\mathbf{D}}(\lambda)$, o expresado con determinantes:

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right) = \det\left(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}\right) \cdot \det\left(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I}\right).$$

☞ Usaremos este resultado sobre polinomios característicos en la última parte de la demostración del siguiente corolario, que nos indica como iniciar el algoritmo de diagonalización para generar un primer bloque:

Corolario 5.3.7. *Si* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y* λ_1 *es un autovalor de* $\mathbf{A}$*, entonces existe* $\mathbf{S}$ *invertible tal que*

$$\textit{o bien} \qquad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C'} & \\ \hline \ast & \mathbf{T}_{\lambda_1} \end{array}\right]; \qquad \textit{o bien} \qquad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{T}_{\lambda_1};$$

donde $\mathbf{T}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ \ast & \lambda_1 & & \\ \ast & \ast & \ddots & \\ \ast & \ast & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix}$ *es de orden igual a la multiplicidad* algebraica *de* λ_1.

Demostración. Como $\left(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}\right)$ es singular, aplicando el Lema *de paso inicial* e iterando el Lema *de paso de continuación* mientras sea posible (mientras la submatriz de la esquina superior izquierda sea singular), llegamos a

$$\left(\mathbf{S}_k^{-1}\cdots\mathbf{S}_1^{-1}\right)\cdot\left(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}\right)\cdot\left(\mathbf{S}_1\cdots\mathbf{S}_k\right) = \begin{cases} \left[\mathbf{T}\right] & \text{si hemos podido continuar hasta el final} \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C'} & \\ \hline \ast & \mathbf{T} \end{array}\right] & \text{si hemos topado un una submatriz } \mathbf{C'} \text{ no singular,} \end{cases} \tag{5.5}$$

donde en ambos casos $\mathbf{T}$ es triangular inferior de orden k, con la diagonal llena de ceros (donde k es el número de *pasos* que hemos dado). Como para cualquier $\mathbf{S}$ invertible se verifica que $\mathbf{S}^{-1}\left(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}\right)\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} - \lambda_1\mathbf{I}$, sumando $\left(\lambda_1\mathbf{I}\right)$ en (5.5) tenemos

$$\left(\mathbf{S}_k^{-1}\cdots\mathbf{S}_1^{-1}\right)\cdot\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{S}_1\cdots\mathbf{S}_k\right) = \begin{cases} \left[\mathbf{T} + \lambda_1\mathbf{I}\right] \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C'} + \lambda_1\mathbf{I} & \\ \hline \ast & \mathbf{T} + \lambda_1\mathbf{I} \end{array}\right] \end{cases} ; \quad \text{donde } \mathbf{T}_{\lambda_1} = \left[\mathbf{T} + \lambda_1\mathbf{I}\right].$$

En el primer caso $k = n$ y el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$ coincide con el polinomio característico de $\mathbf{T}_{\lambda_1}$, que es $(\lambda_1 - \lambda)^n$, donde n es el orden tanto de la matriz $\mathbf{T}$ como de $\mathbf{A}$.

En el segundo caso, el polinomio característico de $\mathbf{A}$ es igual al producto de los polinomios característicos de las dos submatrices, es decir, $\left(P_{\left(\mathbf{C'}+\lambda_1\mathbf{I}\right)}(\lambda)\right)\cdot(\lambda_1 - \lambda)^k$. Ahora bien, como λ_1 no es un autovalor[4] de $\left(\mathbf{C'} + \lambda_1\mathbf{I}\right)$, entonces $\boxed{k \text{ es la multiplicidad del autovalor } \lambda_1}$. □

☞ ...el último corolario nos dice cómo continuar el algoritmo para seguir generando el resto de bloques en la diagonal (nótese que es casi idéntico al anterior) ...

[4]si fuera autovalor, entonces $\mathbf{C'}$ sería singular.

Corolario 5.3.8. *Si* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *de la forma* $\left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{C} & & & \\ \hline & \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_r}} & & \\ \ast & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_1}} \end{array}\right]$, *donde* $\mathbf{T}_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ \ast & \lambda_i & & \\ \ast & \ast & \ddots & \\ \ast & \ast & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$ *es de orden igual a la multiplicidad* algebraica *del autovalor* λ_i *y donde* λ_{r+1} *es un autovalor*[5] *de* $\mathbf{C}$, *entonces existe* $\mathbf{S}$ *invertible tal que*

$$\text{o bien} \qquad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{C}' & & & \\ \hline & \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_{r+1}}} & & \\ \ast & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_1}} \end{array}\right], \qquad \text{o bien} \qquad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{T}_{\lambda_{r+1}} & & & \\ \hline & \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_r}} & & \\ \ast & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_1}} \end{array}\right],$$

donde $\mathbf{T}_{\lambda_{r+1}} = \begin{bmatrix} \lambda_{r+1} & & & \\ \ast & \lambda_{r+1} & & \\ \ast & \ast & \ddots & \\ \ast & \ast & \cdots & \lambda_{r+1} \end{bmatrix}$ *es de orden igual a la multiplicidad* algebraica *del autovalor* λ_{r+1}.

Demostración. Como $\left(\mathbf{C} - \lambda_{r+1}\mathbf{I}\right)$ es singular, repitiendo los mismos pasos de la anterior demostración llegamos a

$$\left(\mathbf{S}_k^{-1}\cdots\mathbf{S}_1^{-1}\right)\cdot\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{S}_1\cdots\mathbf{S}_k\right) = \begin{cases} \left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{T}_{\lambda_{r+1}} & & & \\ \hline & \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_r}} & & \\ \ast & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_1}} \end{array}\right] & \text{si hemos podido continuar hasta el final} \\[2em] \left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{C}' + \lambda_{r+1}\mathbf{I} & & & \\ \hline & \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_{r+1}}} & & \\ \ast & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{T}_{\lambda_1}} \end{array}\right] & \text{si hemos topado un una submatriz } \mathbf{C}' \text{ no singular,} \end{cases}$$

donde en ambos casos $\mathbf{T}_{\lambda_{r+1}}$ es triangular inferior de orden k, con λ_{r+1} en la diagonal principal y donde k es el número de *pasos* que hemos dado.

En el primer caso el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$ es el producto de los polinomios característicos

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = P_{\mathbf{T}_{\lambda_1}}(\lambda)\cdots P_{\mathbf{T}_{\lambda_r}}(\lambda)\cdot P_{\mathbf{T}_{\lambda_{r+1}}}(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{\mu(\lambda_1)}\cdots(\lambda_r-\lambda)^{\mu(\lambda_r)}\cdot(\lambda_{r+1}-\lambda)^k,$$

donde $\mu(\lambda_i)$ es la multiplicidad *algebraica* del autovalor λ_i.

En el segundo caso, el polinomio característico de $\mathbf{A}$ es

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \left(P_{\left(\mathbf{C}'+\lambda_{r+1}\mathbf{I}\right)}(\lambda)\right)\cdot(\lambda_1-\lambda)^{\mu(\lambda_1)}\cdots(\lambda_r-\lambda)^{\mu(\lambda_r)}\cdot(\lambda_{r+1}-\lambda)^k.$$

Ahora bien, como λ_{r+1} no es un autovalor de $\left(\mathbf{C}'+\lambda_{r+1}\mathbf{I}\right)$, entonces $\boxed{k \text{ es la multiplicidad del autovalor } \lambda_{r+1}}$. □

Ya solo resta demostrar el Teorema 5.3.4, pero. . .

Demostración del Teorema 5.3.4. Ya no hay nada que demostrar. Basta aplicar el primer corolario e iterar el segundo hasta finalizar la generación de bloques. □

Ejemplo 28. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ con autovalores 1, 1 y 0. Vamos a diagonalizar por bloques triangulares.

[5] por tanto también es un autovalor de $\mathbf{A}$ distinto de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$

$$
\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]
\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)}
\left[\begin{array}{ccc}1&-1&0\\0&0&0\\0&-2&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}}
\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\ \hline 1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}]{}
\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\ \hline 1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{array}\right]
\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)}
\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\ \hline 1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{array}\right]
=\left[\begin{array}{c}\mathbf{D}\\ \hline \mathbf{S}\end{array}\right]
$$

Así pues,

$$
\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S};
$$

Por lo que hemos llegado a una matriz diagonal.

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([[1,-1,0],[0,0,0],[0,-2,1]]); L=[1,1,0];
Diagonaliza(A, L , 1)
```

Ejemplo 29. Sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&0&3\\3&-2&-9\\-1&2&6\end{bmatrix}$ con autovalores 1, 1 y 0. Vamos a diagonalizar por bloques.

$$
\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]
\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)}
\left[\begin{array}{ccc}-3&0&3\\3&-3&-9\\-1&2&5\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}
\left[\begin{array}{ccc}-3&0&0\\3&-3&0\\-1&2&0\\ \hline 1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]\\ [(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{}
\left[\begin{array}{ccc}-2&-2&0\\1&1&0\\-1&2&0\\ \hline 1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)}
\left[\begin{array}{ccc}-1&-2&0\\1&2&0\\-1&2&1\\ \hline 1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)}
\left[\begin{array}{ccc}-2&-2&0\\1&1&0\\ \hline -1&2&0\\ \hline 1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}
\left[\begin{array}{ccc}-2&0&0\\1&0&0\\ \hline -1&3&0\\ \hline 1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{}
\left[\begin{array}{ccc}-1&0&0\\1&0&0\\ \hline -1&3&0\\ \hline 1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)}
\left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\1&1&0\\-1&3&1\\ \hline 1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)}
\left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\ \hline 1&1&0\\-1&3&1\\ \hline 1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(4)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}}
\left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\ \hline 0&1&0\\0&3&1\\ \hline 6&-1&1\\-9&1&-2\\4&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{}
\left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\ \hline 0&1&0\\0&3&1\\ \hline 6&-1&1\\-9&1&-2\\4&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)}
\left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\0&1&0\\0&3&1\\ \hline 6&-1&1\\-9&1&-2\\4&0&1\end{array}\right]
=\left[\begin{array}{c}\mathbf{C}\\ \hline \mathbf{S}\end{array}\right]
$$

Así pues,

$$
\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-1&1\\-9&1&-2\\4&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2&0&3\\3&-2&-9\\-1&2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&-1&1\\-9&1&-2\\4&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}.
$$

Por lo que hemos llegado a una matriz diagonal por bloques triangulares.

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([[-2,0,3],[3,-2,-9],[-1,2,6]]); L=[1,1,0];
C = Diagonaliza (A, L, 1) # Matriz diagonal por bloques triangulares
S = C.S                   # C = (S**-1) * A * S  (La matriz S se guarda como un atributo de C)
(S**-1) * A * S           # Comprobación
```

Como se ha visto, el algoritmo es un poco pesado para ser calculado con "papel y lápiz"... ¡pero para eso se inventaron los ordenadores!

Ejemplo 30. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ con autovalores 2 (doble) y 1 (doble). Diagonalicemos por bloques:

Uso de la librería en Python

```
A  = Matrix([[3,0,-1,1],[3,2,-2,2],[1,-2,2,0],[-3,-2,3,-1]]); L=[1,1,2,2];
C = Diagonaliza (A, L)     # Añada como tercer argumento un 1 si quiere ver los pasos
C.S                        # La matriz S se guarda como atributo S
```

$$\text{Así pues,}\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}.$$

5.3.3. Autovalores, determinante y traza

Como matrices semejantes tienen el mismo determinante, traza y autovalores (con la misma multiplicidad aritmética y geométrica); y puesto que por el Teorema 5.3.4 sabemos que para toda matriz cuadrada podemos encontrar otra similar a ella, que es diagonal por bloques *con sus autovalores en la diagonal principal*, se deduce que:

Corolario 5.3.9. *La suma de los autovalores de* $\mathbf{A}$ *es igual a la traza de* $\mathbf{A}$*.*

Corolario 5.3.10. *El producto de los autovalores de* $\mathbf{A}$ *es igual al determinante de* $\mathbf{A}$*.*

5.3.4. Autovectores

Hemos visto que para toda matriz $\mathbf{A}$ cuadrada, existe una matriz $\mathbf{S}$ invertible tal que

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

es diagonal por bloques triangulares, y donde cada bloque triangular tiene repetido el mismo autovalor λ_i en su diagonal principal. Fijémonos ahora en aquellas columnas de $\mathbf{C}$ en la que aparezca un autovalor λ_i con únicamente ceros por debajo, es decir, $\mathbf{C}_{|j} = \lambda_i \mathbf{I}_{|j}$ (por ejemplo, las columnas $\mathbf{C}_{|2}$ y $\mathbf{C}_{|4}$ del último ejemplo). Puesto que $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, tenemos que

$$\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{C} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{A}\mathbf{S}_{|j} = \mathbf{S}\mathbf{C}_{|j},$$

y como para dichas columnas $\mathbf{C}_{|j} = \lambda_i \mathbf{I}_{|j}$, tenemos que $\mathbf{S}\mathbf{C}_{|j} = \lambda_i \mathbf{S}\mathbf{I}_{|j} = \lambda_i \mathbf{S}_{|j}$ y por tanto

$$\mathbf{A}(\mathbf{S}_{|j}) = \lambda_i(\mathbf{S}_{|j}).$$

Corolario 5.3.11. *Si* $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ *es diagonal por bloques triangulares y* $\mathbf{C}_{|j}$ *tan solo tiene ceros por debajo del autovalor* λ_i*, entonces* $\mathbf{S}_{|j}$ *es un autovector asociado al autovalor* λ_i*.*

Así, usando nuestra librería de Python con el último ejemplo, llegamos a $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{S} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$, y deducimos que $\begin{pmatrix} 0, & 0, & -1, & -1 \end{pmatrix}$ es un autovector para $\lambda = 2$; y $\begin{pmatrix} -2, & -2, & -2, & 2 \end{pmatrix}$ lo es para $\lambda = 1$.

Nótese que tras diagonalizar por bloques triangulares

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] \xrightarrow[esp(\boldsymbol{\tau}_1^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_p^{-1})]{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p} \left[\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{S}}\right] \qquad \text{donde} \quad \mathbf{S} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p},$$

puesto que $\mathbf{S}$ es invertible, necesariamente *los autovectores correspondientes a autovalores distintos son linealmente independientes.*

5.4. Matrices diagonalizables

Definición 68 (Matriz diagonalizable)**.** *Se dice que* $\mathbf{A}$ *(de orden* n*) es* diagonalizable *si existe una matriz* $\mathbf{S}$ *tal que* $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ *es diagonal.*

Ejemplo 31*.*

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] \xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{1}] \\ [(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{S}}\right]$$

$$\mathbf{AS}_{|1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \mathbf{A}_{|1} \qquad \mathbf{AS}_{|2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \mathbf{A}_{|2}$$

$$\mathbf{AS}_{|3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{A}_{|3}.$$

Cuando la matriz es diagonalizable, todas las columnas de $\mathbf{S}$ son autovectores (linealmente independientes), y por tanto, la multiplicidad *algebraica* de cada autovalor (el número de veces que aparece cada λ_i en la diagonal) necesariamente coincide con la multiplicidad *geométrica* (el número de autovectores linealmente independientes asociados a dicho autovalor).

Corolario 5.4.1. *Si para cada autovalor* λ_i *de* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden, la matriz es diagonalizable (es decir, los bloques de la diagonalización por bloques son diagonales).*

Por tanto:

Corolario 5.4.2. *Si todos los autovalores* $\mathbf{A}$ *son distintos entre si, entonces* $\mathbf{A}$ *es diagonalizable.*

Demostración. Si la multiplicidad algebraica de cada autovalor es uno, entonces al diagonalizar por bloques, cada bloque resultará de orden 1. $\square$

si $\mathbf{A}$ es diagonalizable e invertible tenemos que

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{SDS}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{SD}^{-1}\mathbf{S}^{-1}.$$

Además, si seguimos el siguiente convenio

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{(1-1)} = \mathbf{A}^1\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{I};$$

entonces, para toda $\mathbf{A}$ diagonalizable e invertible y todo numero entero n: $\quad \mathbf{A}^n = \mathbf{SD}^n\mathbf{S}^{-1}$.

Lección 18

(Lección 18) T-1 Esquema de la Lección 18

Esquema de la *Lección 18*

- Matrices semejantes: $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$
- Diagonalizando una matriz por bloques triangulares
- Matrices diagonalizables

187

(Lección 18) T-2 Matrices semejantes

$\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ son semejantes si existe $\mathbf{S}$ invertible tal que

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ son semejantes:

- Mismo determinante: $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{C}$
- Mismo polinomio característico: $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = |\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}|$
- Mismos autovalores y con las mismas multiplicidades *algebraica* y *geométrica*.
- La misma traza.

$$ {}_{\underset{[(-\alpha)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}} \qquad \text{y} \qquad {}_{\underset{\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)\boldsymbol{j}\right]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}} $$

188

(Lección 18) T-3 Diagonalizando por bloques una matriz

$$\text{Sea} \qquad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c||c} \mathbf{C} & \\ \hline \boldsymbol{*} & \mathbf{L} \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

donde $\mathbf{C}$ (de orden m) es *singular* y $\mathbf{L}$ es una *triangular inferior de rango completo*, entonces existe una matriz invertible $\mathbf{R}$ tal que

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c||cccc} \underset{m\times(m-1)}{\boldsymbol{*}} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & & & & \\ \hline & d_{m+1} & \beta_{m+1} & & & \\ & d_{m+2} & * & \beta_{m+2} & & \\ \boldsymbol{*} & \vdots & * & * & \ddots & \\ & d_n & * & * & \cdots & \beta_n \end{array}\right]$$

$$\left(\cdots \underset{[(-\alpha_j)\boldsymbol{m}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}} \cdots\right)\mathbf{A}\left(\cdots \underset{[(\alpha_j)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{m}]}{\boldsymbol{\tau}} \cdots\right); \qquad \boldsymbol{j} = 1, \ldots, m-1.$$

189

(Lección 18) T-4 **Diagonalizando por bloques una matriz**

$$\text{Sea} \qquad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c||c} \mathbf{C} & \\ \hline \ast & \mathbf{L} \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

donde $\mathbf{C}$ (de orden m) es singular y $\mathbf{L}$ es una triangular inferior de rango completo, entonces existe $\mathbf{S} = \mathbf{RP}$ (invertible) tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{ARP} = \left[\begin{array}{c|c||cccc} \underset{m\times(m-1)}{\ast} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & & & & \\ \hline & 0 & \beta_{m+1} & & & \\ & 0 & * & \beta_{m+2} & & \\ \ast & \vdots & * & * & \ddots & \\ & 0 & * & * & \cdots & \beta_n \end{array}\right]$$

$$\Big(\cdots\underset{[(-\alpha_j)\boldsymbol{m}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\cdots\Big)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{AR}\Big(\cdots\underset{[(\alpha_j)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{m}]}{\boldsymbol{\tau}}\cdots\Big); \qquad \boldsymbol{j} = m+1,\dots,n.$$

190

Ejemplo 32. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$ con autovalores 0, 1 y 1.

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] \xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{ccc}1&-1&0\\0&0&0\\0&-2&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\underset{[(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\ \hline 1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{array}\right] \xrightarrow[\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}}]{} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\ \hline 1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{array}\right] \xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\ \hline 1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{C}\\ \hline \mathbf{S}\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

191

Ejemplo 33. Sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&0&3\\3&-2&-9\\-1&2&6\end{bmatrix}$ con autovalores *1*, *1* y *0*.

$$\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)}\left[\begin{array}{ccc}-3&0&3\\3&-3&-9\\-1&2&5\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc}-3&0&0\\3&-3&0\\-1&2&0\\\hline 1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]\\[(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}-2&-2&0\\1&1&0\\-1&2&0\\\hline 1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)}\left[\begin{array}{ccc}-1&-2&0\\1&2&0\\-1&2&1\\\hline 1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)}\left[\begin{array}{ccc}-2&-2&0\\1&1&0\\\hline -1&2&0\\\hline 1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc}-2&0&0\\1&0&0\\\hline -1&3&0\\\hline 1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}-1&0&0\\1&0&0\\\hline -1&3&0\\\hline 1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)}\left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\1&1&0\\-1&3&1\\\hline 1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)}\left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\\hline 1&1&0\\-1&3&1\\\hline 1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\[(4)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}}\left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\\hline 0&1&0\\0&3&1\\\hline 6&-1&1\\-9&1&-2\\4&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\\hline 0&1&0\\0&3&1\\\hline 6&-1&1\\-9&1&-2\\4&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)}\left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\0&1&0\\0&3&1\\\hline 6&-1&1\\-9&1&-2\\4&0&1\end{array}\right]$$

192

Así pues, $\mathbf{C}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}: \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}\mathbf{S}=\mathbf{C}\mathbf{S}$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-1&1\\-9&1&-2\\4&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2&0&3\\3&-2&-9\\-1&2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&-1&1\\-9&1&-2\\4&0&1\end{bmatrix}$$

Consecuencias

- $\sum\lambda_i=\operatorname{Tr}(\mathbf{A})$ y $\prod\lambda_i=\det\mathbf{A}$
- Como: $\mathbf{AS}_{|j}=\mathbf{SC}_{|j}$, para j tal que $\mathbf{C}_{|j}=\lambda_i\mathbf{I}_{|j}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{S}_{|j})=\lambda_i(\mathbf{S}_{|j}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S}_{|j}\text{ es un autovector.}$$

193

(Lección 18) T-8 Matrices diagonalizables

- Matrices semejantes tienen mismos autovalores (y multiplicidades)
- La matriz es diagonalizable si y solo si las multiplicidades *algebraicas* son iguales a las *geométricas* para cada autovalor
- Si no hay autovalores repetidos entonces $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ es diagonalizable

194

(Lección 18) T-9 **Potencias de una matriz diagonalizable**

Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ entonces $\mathbf{A}^2\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\mathbf{A}\boldsymbol{x} =$

- ¿Qué relación hay entre los autovectores de $\mathbf{A}$ y los de $\mathbf{A}^2$?

- ¿Qué relación hay entre los autovalores de $\mathbf{A}$ y los de $\mathbf{A}^2$?

dicho en forma matricial (cuando $\mathbf{A}$ es diagonalizable, $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$)...

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{D}^2\mathbf{S}^{-1}$$

En general para, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0 \ldots$ $\mathbf{A}^n =$

¿y si $\mathbf{A}$ es además invertible? 195

Fin de la lección

Problemas de la Lección 18

(L-18) Problema 1. Factorice las siguientes matrices en $\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$;

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 15 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-18) Problema 2. ¿Cuáles de las siguientes matrices no se pueden diagonalizar?

(a)

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-18) Problema 3. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ encuentre $\mathbf{A}^{100}$ diagonalizando $\mathbf{A}$.

(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-18) Problema 4. Si los autovalores de $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ son 1, 1 y 2, ¿de cuáles de las siguientes afirmaciones se tiene certeza de que son verdaderas?

(a) $\mathbf{A}$ es invertible.
(b) $\mathbf{A}$ es diagonalizable.
(c) $\mathbf{A}$ no es diagonalizable

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-18) PROBLEMA 5. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Determine si la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable. En caso de que lo sea, encuentre una matriz diagonal $\mathbf{D}$ y una matriz $\mathbf{S}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.

(b) (0.5^{pts}) Calcule $\left(\mathbf{A}^6\right)\boldsymbol{v}$, donde $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) (0.5^{pts}) Use los valores obtenidos en el primer apartado para justificar que $\mathbf{A}$ es regular (invertible).

(d) (0.5^{pts}) ¿Qué relación hay entre los autovalores y los autovectores de $\mathbf{A}$ y los de $\mathbf{A}^{-1}$?

(L-18) PROBLEMA 6. Si $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$; entonces $\mathbf{A}^3 = (\quad)(\quad)(\quad)$ y $\mathbf{A}^{-1} = (\quad)(\quad)(\quad)$.
(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-18) PROBLEMA 7. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre los autovalores de $\mathbf{A}$

(b) Encuentre los auto-vectores de $\mathbf{A}$

(c) Diagonalice $\mathbf{A}$: escríbalo como $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.

(L-18) PROBLEMA 8. ¿Falso o verdadero? Si los autovalores de $\mathbf{A}$ son 2, 2 y 3 entonces con toda seguridad la matriz es

(a) Invertible

(b) Diagonalizable

(c) No diagonalizable.

(L-18) PROBLEMA 9. Sean las matrices

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 8 & \\ & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -5 & \end{bmatrix}$$

(a) Complete dichas matrices de modo que en los tres casos $\det \mathbf{A}_i = 25$. Así, la traza es en todos los casos igual a 10, y por tanto para las tres matrices el único auto-valor $\lambda = 5$ está repetido dos veces ($\lambda^2 = 25$ y $\lambda + \lambda = 10$ implica $\lambda = 5$).

(b) Encuentre un vector característico con $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x}$. Estas tres matrices no son diagonalizable porque no hay un segundo auto-vector linealmente independiente del primero.

(Strang, 2007, ejercicio 27 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-18) PROBLEMA 10. Factorice las siguientes matrices en $\mathbf{S}\ \mathbf{D}\ \mathbf{S}^{-1}$

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 1 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-18) PROBLEMA 11. Encuentre la matriz $\mathbf{A}$ cuyos autovalores son 1 y 4, cuyos autovectores son $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente.
(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-18) PROBLEMA 12. Si los elementos diagonales de una matriz triangular superior de orden 3×3 son 1, 2 y 7, ¿puede saber si la matriz es diagonalizable? ¿Quién es $\mathbf{D}$?
(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-18) PROBLEMA 13.

(a) Encuentre los autovalores y auto-vectores de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Explique por qué (o por qué no) la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

(L-18) Problema 14. Sea $\mathbf{A}$ una matriz 3×3. Asuma que sus autovalores son 1 y 0, que una base de los autovectores asociados a $\lambda = 1$ son $[1, 0, 1]$ y $[0, 0, 1]$; mientras que los asociados a $\lambda = 0$ son paralelos a $[1, 1, 2]$.

(a) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable? En caso afirmativo escriba la matriz diagonal $\mathbf{D}$ y la matriz $\mathbf{S}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$.

(b) Encuentre $\mathbf{A}$.

(L-18) Problema 15. Sea $\mathbf{A}$ una matriz 2×2 tal que $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un autovector de $\mathbf{A}$ con autovalor 2, y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es otro autovector de $\mathbf{A}$ con autovalor -2. Si $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, calcule $\left(\mathbf{A}^3\right)\boldsymbol{v}$.

Fin de los Problemas de la Lección 18

LECCIÓN 19: Matrices simétricas: diagonalización e introducción a las formas cuadráticas

5.5. Método de Gram-Schmidt

Definición 69. *Decimos que un sistema de vectores es ortogonal, si cada uno de los vectores es ortogonal al resto.*

Proposición 5.5.1. *Un sistema ortogonal sin vectores nulos es linealmente independiente.*

Demostración. Si $\mathbf{0} = a_1\boldsymbol{z}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{z}_n$ entonces para cada j

$$0 \;=\; \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{z}_j \;=\; \Big(a_1\boldsymbol{z}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{z}_n\Big)\cdot\boldsymbol{z}_j \;=\; a_j\boldsymbol{z}_i\cdot\boldsymbol{z}_j$$

como $\boldsymbol{z}_j\cdot\boldsymbol{z}_j \neq 0$, entonces, necesariamente $a_j = 0$ para $j = 1,\ldots,n$. □

Teorema 5.5.2 (Método de Gram-Schmidt)**.** *Dado un sistema de vectores, existe una sucesión de transformaciones elementales "de izquierda a derecha" que transforman el sistema en otro equivalente*[6] *ortogonal.*

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre el número de vectores del sistema.

Si el sistema contiene un único vector no hay nada que hacer. Veamos que si el resultado es cierto para sistemas de n vectores, entonces también es cierto para sistemas de $n+1$ vectores.

Sea el sistema $\big[\boldsymbol{y}_1;\;\ldots\;\boldsymbol{y}_n;\;\boldsymbol{y}_{(n+1)}\big]$, aplicando la hipótesis de inducción, existe una sucesión, $\boldsymbol{\tau}_1,\ldots,\boldsymbol{\tau}_k$, de transformaciones elementales de "izquierda a derecha" que transforman el sub-sistema formado por los n primeros vectores en otro sistema $\big[\boldsymbol{z}_1;\;\ldots\;\boldsymbol{z}_n\big]$ que es equivalente, pero además es ortogonal; por tanto, aplicando las transformaciones elementales sobre el sistema completo tenemos

$$\big[\boldsymbol{y}_1;\;\ldots\;\boldsymbol{y}_n;\;\boldsymbol{y}_{(n+1)}\big]_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \big[\boldsymbol{z}_1;\;\ldots\;\boldsymbol{z}_n;\;\boldsymbol{y}_{(n+1)}\big].$$

Y por último, mediante una segunda sucesión de transformaciones elementales "de izquierda a derecha", $\boldsymbol{\tau}_{(k+1)},\ \ldots,\ \boldsymbol{\tau}_p$, podemos transformar el último vector en $\boldsymbol{z}_{(n+1)} = \boldsymbol{y}_{(n+1)} - a_1\boldsymbol{z}_1 - a_2\boldsymbol{z}_2\cdots - a_n\boldsymbol{z}_n$. Pues bien, hagámoslo de manera que el nuevo vector $\boldsymbol{z}_{(n+1)}$ sea ortogonal a todos los vectores $\boldsymbol{z}_j$ que le anteceden, es decir, de manera que

$$\boldsymbol{z}_{(n+1)}\cdot\boldsymbol{z}_j \;=\; 0, \qquad \text{para } j = 1,\ldots,n.$$

Para cada $j = 1,\ldots,n$ tenemos dos casos posibles.

- Si $\boldsymbol{z}_j$ es cero, entonces $\boldsymbol{z}_j$ y $\boldsymbol{z}_{(n+1)}$ ya son ortogonales (y no hay nada que hacer).
- Si $\boldsymbol{z}_j \neq \mathbf{0}$, entonces

$$0 \;=\; \boldsymbol{z}_{(n+1)}\cdot\boldsymbol{z}_j \;=\; \Big(\boldsymbol{y}_{(n+1)} - \widehat{a_1}\,\boldsymbol{z}_1 - \cdots - \widehat{a_n}\,\boldsymbol{z}_n\Big)\cdot\boldsymbol{z}_j \;=\; \big(\boldsymbol{y}_{(n+1)}\cdot\boldsymbol{z}_j\big) - \widehat{a_j}\,\big(\boldsymbol{z}_j\cdot\boldsymbol{z}_j\big) \;\Leftrightarrow\; \widehat{a_j} \;=\; \frac{\boldsymbol{y}_{(n+1)}\cdot\boldsymbol{z}_j}{\boldsymbol{z}_j\cdot\boldsymbol{z}_j}.$$

Por tanto, la segunda sucesión de transformaciones elementales realiza la siguiente transformación.

$$\boldsymbol{z}_{(n+1)} = \boldsymbol{y}_{(n+1)} - \sum_{\boldsymbol{z}_j\neq\mathbf{0}}\widehat{a_j}\,\boldsymbol{z}_j, \qquad \text{donde} \quad \widehat{a_j} \;=\; \frac{\boldsymbol{y}_{(n+1)}\cdot\boldsymbol{z}_j}{\boldsymbol{z}_j\cdot\boldsymbol{z}_j},$$

de manera que tras las dos sucesiones de transformaciones tenemos que

$$\big[\boldsymbol{y}_1;\;\ldots\;\boldsymbol{y}_n;\;\boldsymbol{y}_{(n+1)}\big] \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_1,\ldots\boldsymbol{\tau}_k} \big[\boldsymbol{z}_1;\;\ldots\;\boldsymbol{z}_n;\;\boldsymbol{y}_{(n+1)}\big] \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_{(k+1)},\ldots\boldsymbol{\tau}_p} \big[\boldsymbol{z}_1;\;\ldots\;\boldsymbol{z}_n;\;\boldsymbol{z}_{(n+1)}\big]$$

es un sistema equivalente y ortogonal. □

Corolario 5.5.3. *Cualquier sistema ortogonal de vectores de $\mathbb{R}^n$ no nulos se puede extender hasta formar una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$.*

[6] decimos que dos sistemas son equivalentes si generan el mismo espacio

Demostración. Sea $\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1; & \dots & \boldsymbol{z}_r \end{bmatrix}$ un sistema ortogonal de vectores de $\mathbb{R}^n$ y sea $\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1; & \dots & \boldsymbol{y}_m \end{bmatrix}$ un sistema generador de $\mathbb{R}^n$. Entonces aplicando Gram-Schmidt sobre el sistema ampliado

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1; & \dots & \boldsymbol{z}_r; & \boldsymbol{y}_1; & \dots & \boldsymbol{y}_m \end{bmatrix}$$

comenzando sobre el vector $(r+1)$ésimo, obtenemos un nuevo sistema equivalente al ampliado y ortogonal[7]

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1; & \dots & \boldsymbol{z}_r; & \boldsymbol{z}_{r+1}; & \dots & \boldsymbol{z}_{r+m} \end{bmatrix}.$$

Por ser un sistema equivalente al anterior, es un sistema generador de $\mathbb{R}^n$. Si de este sistema quitamos los vectores nulos, seguirá siendo generador y ortogonal, pero además será un sistema linealmente independiente. □

5.6. Matrices ortogonales

Definición 70. *Un sistema de vectores es ortonormal si es ortogonal y cada vector es de norma uno.*

En la demostración del Teorema espectral que enunciaremos más adelante, usaremos el siguiente resultado.

EJERCICIO 41. Demuestre el siguiente corolario:

Corolario 5.6.1. *Dado un vector $\boldsymbol{q}$ de $\mathbb{R}^n$ de norma uno, existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ cuyo último vector es $\boldsymbol{q}$.*

Definición 71 (Vectores ortonormales)**.** *Los vectores $\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_k$ de $\mathbb{R}^n$ son* ortonormales *si son perpendiculares entre si y de norma uno, es decir, si*

$$(\boldsymbol{q}_i)\cdot(\boldsymbol{q}_j) = \begin{cases} 0 & \textit{cuando } i \neq j \quad (\textit{vectores} \text{ ortogonales}) \\ 1 & \textit{cuando } i = j \quad (\textit{vectores} \text{ unitarios: } \|\boldsymbol{q}_1\| = 1) \end{cases}$$

Habitualmente denotamos con $\mathbf{Q}$ las matrices cuyas columnas son *orto-normales.*

EJERCICIO 42. Demuestre la siguiente proposición:

Proposición 5.6.2. *Las columnas de $\underset{m\times n}{\mathbf{Q}}$ son orto-normales si y solo si $\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{Q} = \underset{n\times n}{\mathbf{I}}$*

Nótese que cuando $m > n = r$ entonces $\underset{n\times n}{\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{Q}} = \underset{n\times n}{\mathbf{I}} \neq \underset{m\times m}{\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\intercal}$. Por ejemplo, si $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ entonces

$$\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underset{2\times 2}{\mathbf{I}}; \quad \text{pero} \quad \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \underset{3\times 3}{\mathbf{I}}.$$

Definición 72. *Decimos que $\mathbf{Q}$ es ortogonal si es cuadrada y sus columnas son ortonormales.*

Corolario 5.6.3. *Cuando $\mathbf{Q}$ es ortogonal, $\mathbf{Q}^\intercal = \mathbf{Q}^{-1}$.*

Nótese por tanto que las columnas de una matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ de orden n forman una base de $\mathbb{R}^n$.

EJERCICIO 43. Demuestre las siguientes proposiciones:

(a)

Proposición 5.6.4. *El producto de matrices ortogonales es ortogonal.*

(b)

Proposición 5.6.5. *Si $\mathbf{A}$ es simétrica y $\mathbf{Q}$ es ortogonal, entonces $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ es simétrica.*

[7] En realidad se puede empezar desde la posición 1, pues los vectores $\boldsymbol{y}_i$ ya son ortogonales entre si, y por tanto el método no los modifica.

5.7. Nota sobre la conjugación de números complejos

Un número complejo se expresa de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales, y donde i es la solución de la ecuación $x^2 = -1$ (es decir, $i^2 = -1$).

Puesto que ningún número real satisface dicha ecuación, a i se le denomina *número imaginario*. Para el número complejo $a+bi$, denominamos *parte real* a "a" y *parte imaginaria* a "b".

- Para un número complejo $a+bi$, su conjugado es: $\overline{a+bi} = a - bi$ (es decir, se cambia el signo de la parte imaginaria).
- Un número complejo es real si y solo si es igual a su conjugado: $\overline{x} = x$.
- El producto del número $a+bi$ por su conjugado es $(a+bi)\cdot(\overline{a+bi}) = a^2+b^2$.
- El conjugado de una suma es la suma de los conjugados: $\overline{x+y} = \overline{x}+\overline{y}$.
- El conjugado de un producto es el producto de los conjugados: $\overline{x\cdot y} = \overline{x}\cdot\overline{y}$.

5.8. Diagonalización de matrices simétricas

Proposición 5.8.1. *Los autovalores λ de una matriz real y simétrica son reales.*

Demostración. Suponga $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ (con $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$); y donde tanto λ como $\boldsymbol{x}$ son complejos. Entonces multiplicando $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ por el conjugado $\overline{\boldsymbol{x}}$, tenemos

$$\overline{\boldsymbol{x}}\,\mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \overline{\boldsymbol{x}}\cdot\lambda\boldsymbol{x} \;=\; \lambda\big(\overline{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{x}\big),$$

donde $\overline{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{x} \neq 0$ por ser $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$. Puesto que el conjugado de $\mathbf{A}$ es $\mathbf{A}$, por ser una matriz real; tomando el conjugado de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, tenemos $\mathbf{A}\,\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}$. Como $\mathbf{A}$ es simétrica, para cualquier $\boldsymbol{y}$ tenemos que $\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}$, en particular $\mathbf{A}\,\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}}\,\mathbf{A} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}$. Y multiplicando por $\boldsymbol{x}$ a ambos lados tenemos

$$\overline{\boldsymbol{x}}\,\mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{x} \;=\; \overline{\lambda}\,\big(\overline{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{x}\big).$$

Como en las dos ecuaciones de más arriba los lados izquierdos son idénticos, necesariamente los lados derechos son iguales; por tanto

$$\overline{\lambda} = \lambda,$$

algo que sólo es posible si la parte imaginaria es cero. Por tanto los autovalores son reales. □

Además, como los autovectores provienen de resolver la ecuación real $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, necesariamente son reales; por tanto, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.8.2. *Los autovectores $\boldsymbol{x}$ de una matriz real y simétrica son reales.*

Teorema 5.8.3. *Si $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ es real y simétrica, entonces existe una matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ tal que $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ es diagonal.*

Demostración. Vamos a demostrarlo describiendo el algoritmo que construye dicha base, y que consta de dos etapas.

Paso inicial. Sea $\boldsymbol{q}_n$ un autovector de $\mathbf{A}$ correspondiente al autovalor λ_n y de norma 1. Aplicando el Corolario 5.6.1 extendemos el sistema formado por dicho autovector hasta obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1 & \cdots & \boldsymbol{q}_n\end{bmatrix}.$$

Por tanto $\mathbf{Q}_n$ es ortogonal, y $\mathbf{Q}_n^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_n$ es simétrica y de la forma $\mathbf{Q}_n^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} & & & 0\\ & \underset{(n-1)\times(n-1)}{\mathbf{A}'} & & 0\\ & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$, ya que

$$\Big(\mathbf{Q}_n^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_n\Big)_{|n} = \Big(\mathbf{Q}_n^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{Q}_n\Big)_{|n} = \mathbf{Q}_n^{\intercal}\mathbf{A}\boldsymbol{q}_n = \lambda_n\cdot\mathbf{Q}_n^{\intercal}\boldsymbol{q}_n = \lambda_n\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_n\\ \boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{q}_n\\ \vdots\\ \boldsymbol{q}_n\cdot\boldsymbol{q}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \lambda_n\cdot\mathbf{I}_{|n}.$$

Paso de continuación. Supongamos que tras $n-k$ pasos tenemos

$$\mathbf{Q}_{k+1}^{-1}\cdots\mathbf{Q}_{n}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}_{n}\cdots\mathbf{Q}_{k+1}=\left[\begin{array}{c|ccc}\underset{k\times k}{\mathbf{A}'} & & & \\ \hline & \lambda_{k+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{array}\right], \tag{5.6}$$

como $\mathbf{A}'$ es simétrica, tomamos un autovector $\boldsymbol{x}_k\in\mathbb{R}^k$ de $\mathbf{A}'$ correspondiente al autovalor λ_k y de norma 1. Aplicando el Corolario 5.6.1 formamos una base ortonormal $\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1, & \cdots, & \boldsymbol{x}_k\end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^k$. Ahora, si consideramos la matriz por bloques

$$\mathbf{Q}_k=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{R} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \underset{(n-k)\times(n-k)}{\mathbf{I}}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1, & \dots, & \boldsymbol{y}_n\end{bmatrix},$$

entonces $\mathbf{Q}_k$ es ortogonal y sus últimas columnas $\boldsymbol{y}_k,\dots,\boldsymbol{y}_n$ son autovectores de la matriz de la Ecuación (5.6); es decir, llamando $\mathbf{B}$ a la matriz de dicha ecuación tenemos que

$$\mathbf{B}\boldsymbol{y}_j=\lambda_j\boldsymbol{y}_j;\quad \text{para}\quad j=k,\dots,n.$$

Consecuentemente, multiplicando (5.6) por $\mathbf{Q}_k^{-1}$ y por $\mathbf{Q}_k$ tenemos

$$\mathbf{Q}_k^{-1}\cdot\left(\mathbf{Q}_{k+1}^{-1}\cdots\mathbf{Q}_{n}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}_{n}\cdots\mathbf{Q}_{k+1}\right)\cdot\mathbf{Q}_k\;=\;\mathbf{Q}_k^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_k\;=\left[\begin{array}{c|ccc}\underset{k-1\times k-1}{\mathbf{A}''} & & & \\ \hline & \lambda_{k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{array}\right],$$

ya que, $$\left(\mathbf{Q}_k^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_k\right)_{|j}=\mathbf{Q}_k^{\intercal}\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_k\right)_{|j}=\mathbf{Q}_k^{\intercal}\left(\mathbf{B}\boldsymbol{y}_j\right)=\mathbf{Q}_k^{\intercal}\left(\lambda_j\boldsymbol{y}_j\right)=\lambda_j\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\cdot\boldsymbol{y}_j\\ \boldsymbol{y}_2\cdot\boldsymbol{y}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}_n\cdot\boldsymbol{y}_j\end{pmatrix}=\lambda_j\left(\mathbf{I}_{|j}\right).$$

Así, el producto de matrices $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_n\cdots\mathbf{Q}_1$ es ortogonal y $\mathbf{D}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ es diagonal con los autovalores $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ de $\mathbf{A}$ correspondientes a las columnas de $\mathbf{Q}$ en su diagonal principal. □

Definición 73. $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ *es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ tal que $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ es diagonal.*

Como consecuencia del teorema anterior tenemos el siguiente e importante corolario que se conoce por Teorema Espectral:

Corolario 5.8.4 (Teorema espectral)**.** *Si $\mathbf{A}$ (de orden n) es real y simétrica, entonces existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de $\mathbf{A}$.*

Para finalizar, demostramos un último resultado acerca de la diagonalización de matrices simétricas:

Proposición 5.8.5. *Los autovectores correspondientes a autovalores distintos, de una matriz simétrica, son ortogonales entre si*

Demostración. Considere dos autovectores, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, correspondientes a autovalores distintos: $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{y}=\lambda_2\boldsymbol{y}$. Entonces

$$\lambda_1\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\;=\;\mathbf{A}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\;=\;\boldsymbol{x}\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y}\;=\;\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{y}\;=\;\lambda_2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}).$$

Puesto que $\lambda_1\neq\lambda_2$ necesariamente:

$$\lambda_1(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})-\lambda_2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})=0\quad\Longrightarrow\quad(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0\quad\Longrightarrow\quad\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0.$$

□

EJERCICIO 44. Demuestre la siguiente proposición:

Proposición 5.8.6. *Si una matriz es diagonalizable ortogonalmente, entonces es simétrica.*

Para finalizar, la demostración del Teorema 5.8.3 nos describe el algoritmo para diagonalizar $\mathbf{A}$ ortogonalmente y obtener una matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ de autovectores; pero, como toda matriz simétrica es diagonalizable, también podemos obtener una matriz $\mathbf{Q}$ aplicando el algoritmo descrito en la demostración del Teorema 5.3.4 de diagonalización por bloques triangulares: primero aplicamos la diagonalización por semejanza

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] \xrightarrow[esp(\boldsymbol{\tau}_1^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_p^{-1})]{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p} \left[\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{S}}\right] \qquad \text{donde} \quad \mathbf{S} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p},$$

y a continuación aplicamos Gram-Schmidt sobre las columnas de $\mathbf{S}$ para asegurarnos que las columnas de $\mathbf{S}$ que corresponden a autovalores repetidos son perpendiculares; finalmente normalizamos todas las columnas para obtener una matriz $\mathbf{Q}$.

Lección 19

(Lección 19) T-1 Esquema de la Lección 19

Esquema de la *Lección 19*

- Matrices simétricas $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\intercal}$
  - Autovalores y autovectores
- Introd. formas cuadráticas y matrices definidas positivas

196

(Lección 19) T-2 Matrices simétricas $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\intercal}$

¿que hay de especial en $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ cuando $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ es simétrica?

1. Los autovalores son REALES
2. n autovectores *pueden elegirse* PERPENDICULARES

(¡siempre diagonalizable!)

Caso diagonalizable usual:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$$

Caso simétrico:
Puedo elegir autovectores orto*normales* (columnas de $\mathbf{Q}$)

$$(\text{Si } \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\intercal}) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\intercal} \qquad \text{Teorema espectral}$$

Diagonalizable *ortogonalmente*.

197

(Lección 19) T-3 **Autoespacios ortogonales en las matrices simétricas**

Los autovectores (correspondientes a autovalores distintos) de una matriz simétrica son ortogonales.

Demostración. Suponga dos autovectores, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, correspondientes a autovalores distintos: $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \lambda_2\boldsymbol{y}$. Entonces

$$\lambda_1\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \;=\; \mathbf{A}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \;=\; \boldsymbol{x}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} \;=\; \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{y} \;=\; \lambda_2\big(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\big).$$

Puesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ necesariamente:

$$\lambda_1(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) - \lambda_2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \big(\lambda_1-\lambda_2\big)\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0.$$

□

198

(Lección 19) T-4 **Formas cuadráticas**

Forma cuadrática:

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}; \quad \text{con} \quad \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$$

Como además: $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^{\mathsf{T}}$ (con $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{QQ}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$). Así

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{QDQ}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = (\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x})\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}) \text{ (suma ponderada de cuadrados)}$$

Forma cuadrática definida positiva:

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0 \quad \forall\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \lambda_i > 0, \quad 1\leq i\leq n.$$

entonces también decimos que $\mathbf{A}$ es definida positiva.

199

(Lección 19) T-5 **Matrices definidas positivas**

Significado:

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0 \qquad (\text{excepto para } \boldsymbol{x} = \mathbf{0})$$

Algunas propiedades

Suponga $\mathbf{A}$ simétrica definida positiva: ¿lo es también $\mathbf{A}^{-1}$?

$\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^{-1} = \mathbf{QDQ}^{\mathsf{T}}$

Suponga $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ simétricas definidas positivas: ¿lo es $\mathbf{A}+\mathbf{B}$?

por tanto la respuesta es…

200

(Lección 19) T-6 **Producto de matrices $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$**

Supongamos $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ rectangular. ¿Es $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ definida positiva?

$$\boldsymbol{x}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})\boldsymbol{x} =$$

Sólo puede ser 0 si $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es $\mathbf{0}$

¿Cómo garantizar que $\mathbf{A}\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ cuando $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$?

201

(Lección 19) **T-7 Matrices simétricas: signo de los autovalores**

¿Son todos los λ_i positivos? ¿Son todos negativos?

Calcular autovalores de $\underset{5\times 5}{\mathbf{A}}$ es imposible en general

Buenas noticias: Signo de los pivotes de la forma escalonada coincide con el de los λ_i

(si no hemos cambiado el signo del determinante con transformaciones *Tipo II*)

$$\text{núm. pivotes positivos} = \text{núm. autovalores positivos}$$

202

(Lección 19) **T-8 Matrices simétricas definidas positivas**

- Todos los autovalores son:
- Todos los pivotes son:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Pivotes:

¿Signo de los autovalores?

$$\lambda^2 - 8\lambda + 11 = 0 \rightarrow \qquad \lambda = 4 \pm \sqrt{5} > 0$$

203

Resumen (para matrices simétricas):

1. Matrices simétricas tienen *autovalores reales* y *autovectores* que se pueden elegir *perpendiculares*
2. $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^\intercal$ con $\mathbf{Q}$ ortogonal
3. $\mathbf{A}$ es simétricas si y solo si es *ortogonalmente* diagonalizable.
4. El signo de los autovalores coincide con el de los pivotes[8]

Fin de la lección

Problemas de la Lección 19

(L-19) PROBLEMA 1. Escriba las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ en la forma $\mathbf{QDQ}^\intercal$ del teorema espectral.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-19) PROBLEMA 2. Encuentre los autovalores y los autovectores unitarios (de longitud igual a uno) de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2003, ejercicio 3 del conjunto de problemas 6.4.)

[8] de la forma escalonada y si no se ha cambiado el signo del determinante con trasformaciones elementales de *Tipo II*

(L-19) PROBLEMA 3. Encuentre una matriz ortonornal $\mathbf{Q}$ que diagonalize la siguiente matriz simétrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2003, ejercicio 5 del conjunto de problemas 6.4.)

(L-19) PROBLEMA 4. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica de 3 por 3 con autovalores 0, 1 y 2.

(a) ¿Qué propiedades pueden garantizarse para los autovectores unitarios $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ correspondientes a los respectivos autovalores 0, 1 y 2?

(b) En términos de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, describa el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$, el espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ y el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

(c) Encuentre un vector $\boldsymbol{x}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$. ¿Es único?

(d) ¿Qué condiciones debemos imponer sobre $\boldsymbol{b}$ para que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenga solución?

(e) Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son las columnas de $\mathbf{S}$, y $\boldsymbol{v}$ es ortogonal a $\boldsymbol{w}$; escriba las matrices $\mathbf{S}^{-1}$ y $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$.

(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-19) PROBLEMA 5. Escriba un hecho destacado sobre los valores característicos de cada uno de estos tipos de matrices:

(a) Una matriz simétrica real.

(b) Una matriz diagonalizable tal que $\mathbf{A}^n \to \mathbf{0}$ cuando $n \to \infty$.

(c) Una matriz no diagonalizable

(d) Una matriz singular

(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-19) PROBLEMA 6. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre los valores característicos de $\mathbf{A}$ (recuerde que $i^2 = -1$).

(b) Encuentre los valores característicos de $\mathbf{B}$ (en este caso quizá le resulte más sencillo encontrar primero los autovectores, y deducir entonces los autovalores).

(c) De los siguientes tipos de matrices: ortogonales, invertibles, permutación, hermíticas, de rango 1. diagonalizables, de Markov ¿a qué tipos pertenece $\mathbf{A}$?

(d) ¿y $\mathbf{B}$?

(Strang, 2007, ejercicio 14 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-19) PROBLEMA 7. Si $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$ entonces los autovalores de $\mathbf{A}$ deben ser ________. De un ejemplo tal que $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Ahora bien, si $\mathbf{A}$ es además simétrica, demuestre que entonces $\mathbf{A}^3$ es necesariamente $\mathbf{0}$.

(L-19) PROBLEMA 8. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Demuestre que $\mathbf{A}$ no es diagonalizable cuando $a = 3$.

(b) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable cuando $a = 2$? (explique su respuesta). En caso afirmativo calcule una matriz diagonal de autovalores $\mathbf{D}$ y una de autovectores $\mathbf{S}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.

(c) ¿Es $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ diagonalizable para cualquier valor de a? ¿Es posible encontrar una base ortonormal de autovectores de $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$?

(d) Encuentre todos los valores de a para los cuales existe $\mathbf{A}^{-1}$ y además la matriz es diagonalizable.

(L-19) PROBLEMA 9. Sea la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(a) Exprese $\mathbf{B}$ en la forma $\mathbf{B} = \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\intercal$ del teorema espectral.
(b) ¿Es $\mathbf{B}$ diagonalizable? Si no lo es, diga las razones; y en caso contrario genere una matriz $\mathbf{S}$ que diagonalice a $\mathbf{B}$.

Fin de los Problemas de la Lección 19

LECCIÓN 20: Matrices definidas positivas

5.9. Formas cuadráticas y matrices definidas positivas

Un polinomio es una expresión que contiene variables y coeficientes, y en la que únicamente están involucradas las operaciones de suma, resta, producto y exponentes no negativos de las variables. Un ejemplo de polinomio en x es $x^2 - 4x + 7$. Y un ejemplo de polinomio en tres variables es $x^3 + 2xyz^2 - yz + 1$.

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de sus monomios (o términos individuales) con coeficientes no nulos. El grado de cada término es la suma de los exponentes de las variables que aparecen en él, y por tanto nunca es negativo. Así, para los ejemplos anteriores, el grado del polinomio $x^2 - 4x^1 + 7x^0$ es dos; y el grado del polinomio $x^3 + 2x^1y^1z^2 - y^1z^1 + 1$ es cuatro $(1 + 1 + 2)$.

Definición 74. *Una forma cuadrática es un polinomio en el que todos sus términos son de grado dos.*

Por ejemplo, $4x^2 + 2xy - 3y^2$ es una forma cuadrática en las variables x e y.

5.9.1. Formas cuadráticas reales

Toda matriz $\mathbf{A}$ simétrica y de orden n define una forma cuadrática $q_{\mathbf{A}}$ en n variables mediante la siguiente formula:

$$q_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}.$$

Recíprocamente, dada una forma cuadrática en n variables, sus coeficientes se pueden arreglar en una matriz simétrica de orden n. Volviendo al ejemplo de más arriba

$$4x^2 + 2xy - 3y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y con la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & \\ -2 & 4 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$ formamos la forma cuadrática

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \\ -2 & 3 & \\ & & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 - 4xy + 3y^2 + 5z^2.$$

5.9.2. Matrices definidas positivas

Definición 75. *Una matriz simétrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es* definida positiva *si para todo vector $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^n$,* $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$.

Como consecuencia de la definición tenemos que

Proposición 5.9.1. *Si $\underset{m \times n}{\mathbf{A}}$ tiene rango n, entonces $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ es definida positiva.*

Demostración. Por una parte,

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (\mathbf{A}\boldsymbol{x}) \cdot (\mathbf{A}\boldsymbol{x}) = \|\mathbf{A}\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0.$$

Pero como $\mathbf{A}$ es de rango completo por columnas, si $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$; y por tanto $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \|\mathbf{A}\boldsymbol{x}\|^2 > 0$. □

Hay una estrecha relación entre los signos de los autovalores de la matriz y el signo de la forma cuadrática asociada.

Proposición 5.9.2. *Una matriz real y simétrica de orden n es definida positiva si y sólo si, son positivos todos sus autovalores.*

Demostración. La demostración se basa en la misma idea de la última demostración junto al hecho de que toda matriz real y simétrica es diagonalizable ortogonalmente de la forma $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$, donde $\mathbf{D}$ tiene los autovalores de $\mathbf{A}$ en la diagonal principal, y donde las columnas de $\mathbf{Q}$ son autovectores correspondientes a dichos autovalores...

Puesto que $\mathbf{A}$ es real y simétrica, tenemos que $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}$ con $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\intercal$; y por tanto

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\intercal\boldsymbol{x} = (\mathbf{Q}^\intercal\boldsymbol{x})\mathbf{D}(\mathbf{Q}^\intercal\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\mathbf{D}\boldsymbol{y}, \qquad (\text{donde} \quad \boldsymbol{y} = \mathbf{Q}^\intercal\boldsymbol{x}).$$

De esta expresión es evidente que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es es una suma ponderada de cuadrados:

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\mathbf{D}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1, & \cdots, & y_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(y_j^2\right)$$

donde las ponderaciones λ_j son los autovalores de $\mathbf{A}$. Como $\mathbf{Q}$ es invertible, $\boldsymbol{y} = \mathbf{Q}^{\intercal}\boldsymbol{x}$ es distinto de cero siempre que $\boldsymbol{x}$ también lo sea. Por tanto, si los autovalores son positivos entonces la suma $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(y_j^2\right)$ es positiva.

Por otra parte, la forma cuadrática nunca puede ser positiva si algún autovalor λ_j es negativo o cero; para verlo basta elegir $\boldsymbol{y} = \mathbf{I}_{|j}$ para ver que $\boldsymbol{y}\mathbf{D}\boldsymbol{y} = {}_{j|}\mathbf{I}\mathbf{D}\mathbf{I}_{|j} = {}_{j|}\mathbf{D}_{|j} = \lambda_j$. □

Ejercicio 45. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son definidas positivas, entonces la suma $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ también es definida positiva.
(b) Si $\mathbf{A}$ es simétrica y definida positiva, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ también es definida positiva.

5.10. Diagonalización de matrices simétricas por congruencia

☞ Podemos diagonalizar cualquier matriz por congruencia (mediante eliminación Gaussiana de filas y columnas). En general, la matriz obtenida con este procedimiento no contiene los autovalores de la matriz original en su diagonal, pero permite expresar cualquier forma cuadrática como sumas y/0 restas de términos al cuadrado. Así podremos comprobar si una matriz es definida positiva sin necesidad de calcular sus autovalores (bastará comprobar que la expresión solo contiene sumas de cuadrados).

Este resultado tiene importancia práctica. No es posible encontrar las raíces de un polinomio cualquiera (tan solo está asegurado para polinomios de grado menor o igual a 4). Pero al menos, la diagonalización por congruencia nos revelará *los signos* de los autovalores de *cualquier matriz simétrica*. Este resultado se llama *Ley de inercia*[a].

[a] Aunque este año no incluiré su demostración, pues nos hemos dejado algunas cosas importantes por el camino que necesito para la demostración.

Definición 76. *Dos matrices* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{C}$ *son congruentes si existe una matriz* $\mathbf{B}$ *invertible tal que*

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B}.$$

En esta lección vamos a ver que, dada una matriz simétrica $\mathbf{A}$ siempre es posible encontrar una matriz diagonal que es congruente con $\mathbf{A}$ mediante transformaciones elementales de sus filas y columnas. La demostración que veremos más abajo describe los pasos a seguir para diagonalizar por congruencia (paso de inicio y paso de continuación). Pero antes de exponer la demostración, veamos un ejemplo de diagonalización por congruencia. El método consiste en tratar de escalonar una matriz, pero aplicaremos a las filas todas las operaciones que hayamos aplicado a las columnas.

Ejemplo 34. Vamos a diagonalizar la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ mediante eliminación, pero cada operación sobre las columnas, la repetiremos también sobre las filas:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(3)\mathbf{3}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Fíjese que aunque la matriz obtenida es diagonal, ni 6 ni 12 son autovalores de la matriz original (este método NO nos dice quienes son los autovalores). Pero como los tres componentes de la diagonal son positivos, sabemos que $\mathbf{A}$ es definida positiva.

Y si en la diagonal tenemos un cero ¿qué podemos hacer?... Podemos sumar a la primera columna otra columna (aunque en un ejemplo posterior veremos que hay que hacerlo con cuidado, puesto no siempre funciona).

Ejemplo 35. Considere $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. La primera componente de la primera fila es un cero, así que no tenemos un pivote con el que anular todo lo que queda a la derecha de la diagonal. Como la segunda columna si tiene un pivote en la primera fila, podemos sumar la segunda columna a la primera columna y lograr tener un pivote donde nos interesa (pero *recuerde que cada operación sobre las columnas se repite sobre las filas*):

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\2&1&0\end{bmatrix} \xrightarrow[\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}]{} \begin{bmatrix}2&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}2&0&0\\1&-1&0\\2&0&-2\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

Un tercer ejemplo nos indica que debemos andar con cuidado cuando encontramos un cero en la diagonal.

Ejemplo 36*.* Considere la matriz, $\begin{bmatrix}0&1\\1&a\end{bmatrix}$ que tiene un cero en donde querríamos tener un pivote con el que eliminar todo lo que queda a su derecha (y por debajo).

Primer intento: podemos intentar la estrategia del ejemplo anterior, y sumar la segunda columna a la primera (y repetir la operación con las filas):

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&a\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}1&1+a\\1&a\end{bmatrix} \xrightarrow[\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}]{} \begin{bmatrix}2+a&1+a\\1+a&a\end{bmatrix}$$

y ahora con el pivote $(2+a)$ podemos anular todo lo que está a su derecha (y por debajo), pero… ¿cómo sabemos que es un pivote? si $a=-2$, estamos como al principio… (en el anterior ejemplo la estrategia funcionó porque sumamos un vector que tenía un cero en la diagonal,… este tenía el número a que puede hacer fallar el algoritmo)

Segundo intento: para que la estrategia anterior no falle, debemos asegurarnos de que el vector que sumamos a la primera columna tiene un cero en la componente situada en la diagonal. Como en este caso no hay un vector así, sencillamente intercambiamos filas y columnas para colocar el cero de la primera posición de la diagonal en otro lugar.

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&-2\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}]{} \begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix}$$

Ahora ya podemos eliminar todo lo que queda a la derecha y por debajo del *pivote* sin problemas.

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&-2\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}]{} \begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}-2&0\\1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix}-2&0\\0&2\end{bmatrix}$$

Vayamos con la demostración de los pasos para diagonalizar por congruencia:

Proposición 5.10.1 (Paso de inicio)**.** *Dada una matriz* $\mathbf{A}$*, simétrica y de orden* n*, existe una matriz no singular* $\mathbf{B}$ *tal que* $\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B}$ *es una matriz simétrica de la forma*

$$\left[\begin{array}{c|c} * & \\ \hline & \underset{(n-1)\times(n-1)}{\mathbf{A}'} \end{array}\right].$$

Demostración. Tenemos tres casos:

Caso trivial. Si $\mathbf{A}$ ya tiene la forma de más arriba, es decir, si a la derecha y por debajo de a_{11} son todo ceros, entonces basta que $\mathbf{B}$ sea la matriz identidad.

En caso contrario hay dos posibilidades: que a_{11} sea cero, o que no lo sea.

Caso 1 ($a_{11}\neq 0$). Cuando a_{11} es un pivote se pueden anular los componentes situados a su derecha por eliminación, y aplicando las mismas operaciones sobre las filas llegamos a la siguiente matriz congruente con $\mathbf{A}$:

$${}_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \\ \hline & \underset{(n-1)\times(n-1)}{\mathbf{A}'} \end{array}\right]; \quad \text{donde} \quad \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{B}.$$

Caso 2 ($a_{11}=0$). En este caso hay dos posibilidades: que algún otro elemento de la diagonal principal sea distinto de cero, o que todos los elementos de la diagonal sean cero.

- Si el elemento a_{jj} (con $j > 1$) es distinto de cero; intercambiamos la primera columna con la $j$ésima, de manera que ahora el elemento no nulo se encuentra en la posición $(j, 1)$ y a continuación se intercambia la fila $j$ésima por la primera, con lo que el componente no nulo finalmente termina por situarse en la posición $(1, 1)$. Con lo que hemos llegado al Caso 1.
- Si todos los elementos de la diagonal principal son nulos —y puesto que algún elemento a_{1j} es distinto de cero (pues no estamos en el Caso Trivial)— sumamos $\mathbf{A}_{|j}$ a la primera columna, y por tanto, también sumamos ${}_{j|}\mathbf{A}$ a la primera fila. Entonces tendremos que

$$\underset{[(1)\boldsymbol{j}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}\underset{[(1)\boldsymbol{j}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 2a_{1j} & * & \dots & * \\ \hline * & & & \\ \vdots & & \underset{(n-1)\times(n-1)}{\mathbf{A}'} & \\ * & & & \end{array}\right];$$

así que de nuevo hemos llegado al Caso 1.

□

Proposición 5.10.2 (Paso de continuación)**.** *Dada una matriz simétrica de orden n de la forma* $\left[\begin{array}{ccc|c} * & & & \\ & \ddots & & \\ & & * & \\ \hline & & & \underset{k\times k}{\mathbf{A}'} \end{array}\right]$, *existe una matriz no singular $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{B}$ es una matriz simétrica de la forma*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & & & \\ & \ddots & & \\ & & * & \\ \hline & & & \underset{(k-1)\times(k-1)}{\mathbf{A}''} \end{array}\right].$$

Demostración. La demostración es como la del *Paso de Inicio*, pero trabajando con las filas y columnas de la submatriz $\mathbf{A}'$. □

De la combinación de las dos proposiciones anteriores llegamos al siguiente corolario:

Corolario 5.10.3. *Para toda matriz simétrica de orden n, existe una matriz invertible $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{B}$ es diagonal.*

Ejemplo 37. Diagonalice por congruencia la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Piense en qué pasos debe sumar una columna (y una fila) para generar un pivote en la diagonal, y cuando debe intercambiar columnas (y filas).

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([[0,1,0,0],[1,0,1,1],[0,1,0,1],[0,1,1,1]])
D = DiagonalizaC(A,1)
```

5.11. Algunos tipos de formas cuadráticas

☞ Ahora usaremos el signo de los pivotes de la matriz diagonalizada por congruencia (y su rango) para decidir el signo de las formas cuadráticas.

Decimos que una forma cuadrática (y su correspondiente matriz de orden n) es

- Definida positiva si para cualquier $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ no nulo se verifica que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$.

- Semi-definida positiva si para cualquier $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ no nulo se verifica que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \geq 0$.
- Definida negativa si para cualquier $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ no nulo se verifica que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} < 0$.
- Semi-definida negativa si para cualquier $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ no nulo se verifica que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq 0$.
- Indefinida si no es ni semi-definida positiva ni semi-definida negativa.

Nótese que si $\mathbf{A}$ es (*semi-*) definida positiva, entonces $(-\mathbf{A})$ es (*semi-*) definida negativa.

EJERCICIO 46. Demuestre que si $\mathbf{A}$ es definida positiva, entonces todos los elementos de la diagonal deben ser positivos (y si es semidefinida positiva todos los elementos de la diagonal deben ser no negativos).

5.12. Completar el cuadrado para clasificar las formas cuadráticas

Se denomina *"completar el cuadrado"* a expresar una forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ como sumas (y/o restas) de términos al cuadrado. Pues bien, la diagonalización por congruencia nos permite encontrar muchas formas distintas de completar el cuadrado. Basta darse cuenta de que dada $\mathbf{A}$ (simétrica), para toda $\mathbf{B}$ invertible tal que $\mathbf{B}^{\intercal}\,\mathbf{A}\mathbf{B}$ es diagonal, tenemos que

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A} = \left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\intercal} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^{-1}$$

y por tanto, denotando con $\boldsymbol{y}$ al vector $\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x}$, la forma cuadrática se puede expresar como

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\mathbf{D}\boldsymbol{y} = \sum d_{jj}\,(y_j)^2;$$

es decir, como una suma de los cuadrados de los elementos del vector $\boldsymbol{y} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x}$ ponderados por los elementos de la diagonal de $\mathbf{D}$. Así, si todos los pivotes de $\mathbf{D}$ son positivos la correspondiente forma cuadrática es definida positiva. Por tanto, hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 5.12.1. *Una matriz real y simétrica de orden n es definida positiva si y sólo si, es congruente con una matriz diagonal cuyos pivotes son todos mayores que cero.*

Es lo que ocurría con la matriz del Ejemplo 34 en la página 270. Vamos repetir su diagonalización, pero ahora realizando solo transformaciones *Tipo I* (así minimizamos el número de operaciones, con lo que facilitamos pensar quien es la inversa de $\mathbf{B}$; y además no modificamos su determinante, por lo que el producto de los sucesivos pivotes de $\mathbf{D}$ calcula los sucesivos *menores* de la matriz):

$$\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(\frac{1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}2&0&0\\-1&\frac{3}{2}&-1\\0&-1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(\frac{1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac{3}{2}&-1\\0&-1&2\end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(\frac{2}{3})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&-1&\frac{4}{3}\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(\frac{2}{3})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}.$$

Así, la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ se puede re-escribir como suma de cuadrados:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\0&-2/3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&3/2&\\&&4/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1/2&0\\0&1&-2/3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &&= \boldsymbol{x}\left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\intercal}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x}\\
&= \begin{pmatrix}(x-1/2y) & (y-2/3z) & z\end{pmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&3/2&\\&&4/3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}(x-1/2y)\\(y-2/3z)\\z\end{pmatrix} &&= \left(\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x}\right)\cdot\mathbf{D}\cdot\left(\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x}\right)\\
&= 2\cdot(x-1/2y)^2 \;+\; 3/2\cdot(y-2/3z)^2 \;+\; 4/3\cdot(z)^2 &&= \sum {}_{j|}\mathbf{D}_{|j}\cdot\left(y_j\right)^2 \quad (\text{con } \boldsymbol{y} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es una suma de tres términos al cuadrado, cada uno de ellos multiplicado por un pivote de $\mathbf{D}$; como todos los pivotes son positivos, la forma cuadrática es evidentemente definida positiva. Algo que también podemos verificar en este caso si calculamos los tres autovalores, pues la ecuación característica de $\mathbf{A}$ es

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&0\\-1&2-\lambda&-1\\0&-1&2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 - 2(2-\lambda) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}\lambda = 2\\ (2-\lambda)^2 - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 2\begin{cases}\lambda = 2+\sqrt{2}\\ \lambda = 2-\sqrt{2}\end{cases}\end{cases}.$$

De manera similar, como la matriz diagonal del Ejemplo 35 en la página 270 tiene dos pivotes negativos y uno positivo, deducimos que la correspondiente forma cuadrática es indefinida (y de hecho, los correspondientes autovalores son -1 (doble) y 2).

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([[0,1,0,0],[1,0,1,1],[0,1,0,1],[0,1,1,1]])
D = DiagonalizaC(A,1)
B = D.B
~B*A*B                    # D es congruente con A
```

☞ **Nota 5.** *El Teorema Espectral muestra una forma muy especial de completar el cuadrado de una forma cuadrática; pues la diagonalización*

$$\mathsf{D} = \mathsf{Q}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{Q} = \mathsf{Q}^{\intercal}\mathsf{A}\mathsf{Q},$$

lo es simultáneamente por semejanza y por congruencia.

Corolario 5.12.2. *Si una matriz real y simétrica de orden n es congruente con una matriz diagonal cuyos pivotes son todos mayores que cero, entonces sus autovalores también son mayores que cero.*

Lección 20

(Lección 20) T-1 Esquema de la Lección 20

Esquema de la *Lección 20*

- Matrices (semi-) definidas positivas, (semi-) definidas negativas
- Diagonalización por congruencia
- Completando el cuadrado
- Elipsoides en $\mathbb{R}^n$

205

(Lección 20) T-2 Formas cuadráticas

- Definida positiva: $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{x} > 0.$
- Semi-definida positiva: $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{x} \geq 0.$
- Definida negativa: $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{x} < 0.$
- Semi-definida negativa: $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{x} \leq 0.$
- Indefinida: ni semi-definida positiva ni semi-definida negativa.

206

(Lección 20) **T-3** Completar el cuadrado

$$2x^2 + 12xy + 20y^2$$

$$\begin{bmatrix}2&6\\6&20\end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\tau}{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}2&0\\6&2\end{bmatrix} \xrightarrow[\overset{\tau}{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix};$$

por tanto tenemos que:

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix} = \mathbf{D} = \mathbf{E}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{E} = \begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&6\\6&20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}$$

así $\mathbf{A} = \left(\mathbf{E}^{-1}\right)^{\intercal}\mathbf{D}\mathbf{E}^{-1}$ y por tanto

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(x+3y) & y\end{pmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}(x+3y)\\y\end{pmatrix} = 2(x+3y)^2 + 2y^2\end{aligned}$$

207

(Lección 20) **T-4** Matrices congruentes

$\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ son congruentes si existe $\mathbf{B}$ invertible tal que $\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B}}$

Diagonalización por congruencia
Para toda $\mathbf{A}$ (simétrica) existe $\mathbf{B}$ *(invertible)* tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B} \qquad \text{es diagonal}$$

Teorema Espectral: ¡Diagonalización por semejanza y congruencia!

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{Q}.$$

Toda forma cuadrática se puede expresar como suma de cuadrados

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{x}\left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\intercal}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{y}\mathbf{D}\boldsymbol{y}; \qquad \text{donde} \qquad \boldsymbol{y} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

(Véase ejemplo anterior)

208

(Lección 20) **T-5** Clasificación de formas cuadráticas

$$\boxed{\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \lesseqqgtr 0; \quad \text{para todo } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}}$$

Métodos
Mirar el signo de

1. Elem. diag.: $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B}$ (Eliminación gaussiana) ☺
2. Autovalores: $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ (Diagonalización ortogonal) ☹
3. Menores principales: (Sylvester) ☹ ☹

209

Ejemplo 38. ¿Qué número debo poner para que la matriz $\mathbf{A}$ sea singular?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & \end{bmatrix}$$

Semidefinida positiva.

- Elem. diag. $\mathbf{D} = \mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{B}$:
- Autovalores:
- Menores principales:
- Para la forma cuadrática

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + \quad y^2$$

¿Existe $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 0$?

Ejemplo 39.

$$\text{Si} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + \quad y^2$$

Indefinida.

- ¿Hay números x y y que hagan $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ negativa?
- ¿Pasa por el origen?
- Si $y = 0$ y $x = 1$, ¿es positiva? (¿y si $x = -1$?)
- Si $x = 0$ y $y = 1$, ¿es positiva? (¿y si $y = -1$?)
- ¿Es siempre positiva?

$(0, 0)$ **punto de silla**: mínimo en unas direcciones, y máximo en otras.

$$\lambda_1 = -2, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_1 = 11, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 40.

$$\text{Si} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + 20y^2$$

Definida positiva.

Pruebas de que $\mathbf{A}$ es definida positiva

- ¿Son positivos los elem. de la diag de $\mathbf{D} = \mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{B}$?
- ¿Son los menores principales positivos?
- ¿Son los autovalores positivos?

$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$ para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$

- ¿cómo son las primeras derivadas en el origen?
- ¿cómo son las segundas derivadas en el origen?

Segundas derivadas En Análisis (o cálculo) univariante

$$\text{mín } f(x) \text{ cuando } \begin{cases} \frac{d\,f(x)}{dx} = 0 \\ \\ \frac{d^2\,f(x)}{dx^2} > 0 \end{cases}$$

En álgebra y cálculo multivariante

$$\text{mín } f(x_1,\ldots,x_n) \text{ cuando } \begin{cases} \text{vector primeras derivadas es nulo} \\ \\ \text{matriz de segundas derivadas es definida positiva} \end{cases}$$

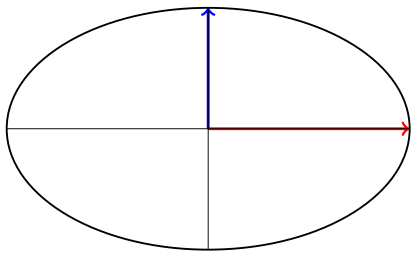
(**Lección 20**) **T-6 Completando el cuadrado**

Si podemos expresar $f(x,y) = 2x^2 + 12xy + 20y^2$ como suma de cuadrados, sabremos que $f(x,y)$ es siempre positiva. Completemos el cuadrado!

$$2x^2 + 12xy + 20y^2 = 2(x + \quad y)^2 +$$

- $f(x,y) = 2x^2 + 12xy + 7y^2$
- $f(x,y) = 2x^2 + 12xy + 18y^2$
- $f(x,y) = 2x^2 + 12xy + 200y^2$ (gráfico)

Si definida positiva: $f(x,y) = a$; $a > 0$: elipse



213

De hecho los números que aparecen en la suma de cuadrados, también aparecen en el proceso de eliminación. Los números que multiplican a los cuadrados son los pivotes (por eso pivotes positivos "dan" **sumas** de cuadrados)

(**Lección 20**) **T-7 Ejemplo 3 por 3**

$$\text{¿Es } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ definida positiva?}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{\tau}[(\frac{1}{2})\mathbf{1+2}]]{\boldsymbol{\tau}[(\frac{1}{2})\mathbf{1+2}]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{\tau}[(\frac{2}{3})\mathbf{2+3}]]{\boldsymbol{\tau}[(\frac{2}{3})\mathbf{2+3}]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz > 0$$

$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 1$: (elipsoide) Ejes en la dirección de los autovectores $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^\intercal \boldsymbol{\lambda} \mathbf{Q}$

214

Si $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{\underset{[(\frac{1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(\frac{2}{3})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$, es decir, si

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(\frac{2}{3})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\underset{[(\frac{1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}1&-1/2&1/3\\0&1&-2/3\\0&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{B} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix}1&-1/2&0\\0&1&-2/3\\0&0&1\end{bmatrix},$$

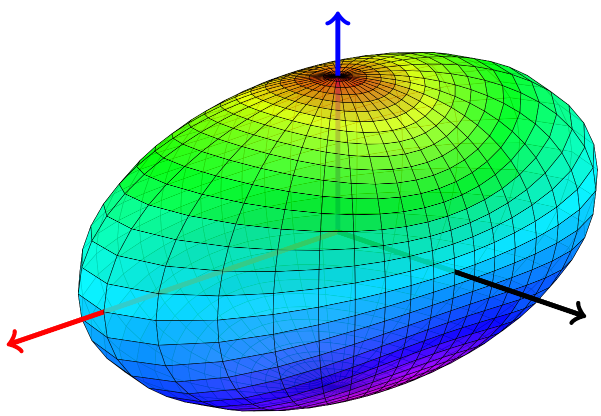
tenemos que la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\0&-2/3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&3/2&\\&&4/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1/2&0\\0&1&-2/3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} && =\boldsymbol{x}\left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x}\\
&= \begin{pmatrix}(x-1/2y) & (y-2/3z) & z\end{pmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&3/2&\\&&4/3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}(x-1/2y)\\(y-2/3z)\\z\end{pmatrix} && =\left(\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x}\right)\cdot\mathbf{D}\cdot\left(\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x}\right)\\
&=2\cdot(x-1/2y)^2 \;+\; 3/2\cdot(y-2/3z)^2 \;+\; 4/3\cdot(z)^2 && =\sum_{j|}\mathbf{D}_{|j}\cdot\left(y_j\right)^2 \quad (\text{con } \boldsymbol{y}=\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x});
\end{aligned}$$

es una suma de tres términos al cuadrado, cada uno de ellos multiplicado por uno de los pivotes de $\mathbf{D}$; como todos los pivotes son positivos, la forma cuadrática es evidentemente definida positiva.

(Lección 20) T-8 **Matrices definidas positivas y elipsoides: ejemplo 3 por 3**

- La región ($\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = a$) es un (elipsoide).
- Los autovectores son los ejes principales $\mathbf{Q}$.
- Longitud de los ejes determinada por los autovalores



215

(Lección 20) T-9 Otro ejemplo 3 por 3

$$¿\text{Es } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ definida positiva?}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\overset{\tau}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\overset{\tau}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\overset{\tau}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]} \\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\substack{\overset{\tau}{[(\frac{-1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{2}]} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriz indefinida

216

(Lección 20) T-10 Aclaración test de los menores

Test de los menores (Criterio de Sylvester)

Definida positiva si todos los menores principales[a] *son positivos*

- Sólo funciona si la matriz es definida positiva.
  - Ejemplos de fallo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \quad (a < 1, \quad \text{por ejemplo } a = -2)$$

217

[a]quitando las últimas $n-k$ filas y columnas $(n = 0, \ldots, n-1)$

El criterio de los menores de Sylvester indica que si todos los menores principales son positivos, entonces la matriz es definida positiva.

Pero el criterio falla si algunos de los menores es cero, y no nos da pistas sobre el signo de los autovalores. Así ocurre en los dos ejemplos de la transparencia anterior. La ecuación característica del primer ejemplo es $\lambda(1+\lambda) = 0$ cuyas raíces son 0 y -1, pero los menores principales son ambos cero (pese a que la matriz es semidefinida negativa). Y en el segundo ejemplo, como uno de los autovalores es cero (con multiplicidad 1) y como la traza suma cero, los otros dos autovalores son uno positivo y el otro negativo; por tanto la matriz es indefinida, sin embargo ¡los tres menores principales son cero!

Existe una verificación por menores para matrices semidefinidas positivas, pero es más complicada (y si la matriz es negativa, hay una complicación más con la alternancia de los signos de los menores). Por ello, es mucho más práctico completar el cuadrado mediante la diagonalización por congruencia: $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B}$.

Fin de la lección

Problemas de la Lección 20

(L-20) PROBLEMA 1. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas, y escriba las formas cuadráticas $f = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ correspondientes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

(e) El determinante del apartado (b) es cero; ¿a lo largo de que recta se verifica que en todos sus puntos $f(x,y)=0$?

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-20) PROBLEMA 2. ¿Cuál es la forma cuadrática $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ para cada una de las siguientes matrices? Complete el cuadrado con la finalidad de escribir f como una suma de uno o dos cuadrados $d_1(\quad)^2 + d_2(\quad)^2$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 15 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-20) PROBLEMA 3. ¿Cuales de la siguientes matrices tienen dos autovalores positivos? Pruebe $a > 0$ y $ac > b^2$ (determinante mayor que cero); no calcule los autovalores. $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} < 0$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 14 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-20) PROBLEMA 4. Demuestre que $f(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2$ no tiene un mínimo en $(0,0)$ a pesar de que todos sus coeficientes son positivos. Escriba $f(x,y)$ como una diferencia de cuadrados y encuentre un punto (x,y) donde $f(x,y)$ sea negativa.
(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-20) PROBLEMA 5. Demuestre a partir de los valores característicos que si $\mathbf{A}$ es definida positiva, entonces también lo son $\mathbf{A}^2$ y $\mathbf{A}^{-1}$.
(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-20) PROBLEMA 6. Sean las formas cuadráticas

$$\begin{aligned} q_1(x,y,z) &= x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy. \\ q_2(x,y,z) &= -x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy - 2axz. \end{aligned}$$

(a) Demuestre que $q_1(x,y,z)$ es semi-definida positiva.
(b) Halle, si existiese, un valor de a de manera que $q_2(x,y,z)$ sea definida negativa.

(L-20) PROBLEMA 7. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas o no.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2$

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-20) PROBLEMA 8. Clasifique la forma cuadrática (ie., definida positiva, negativa, semidefinida, no definida, etc.)

$$q(x, y, z) = x^2 + 6xy + y^2 + az^2;$$

en función del parámetro a.

(L-20) PROBLEMA 9. Si $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$ es definida positiva, pruebe que $\mathbf{A}^{-1}$ es definida positiva.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-20) PROBLEMA 10. Si una matriz simétrica de 2 por 2 satisface $a > 0$, y $ac > b^2$, demuestre que sus autovalores son reales y positivos (definida positiva). Emplee la ecuación característica y el hecho de que el producto de los autovalores es igual al determinante.
(Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-20) PROBLEMA 11. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas, definidas negativas, semi-definidas, o indefinidas.
(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) $\mathbf{C} = -\mathbf{B}$
(d) $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}$

(L-20) PROBLEMA 12. Una matriz definida positiva no puede tener un cero (o incluso peor; un número negativo) en su diagonal principal. Demuestre que esta matriz no cumple $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$, para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{no es positiva cuando} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 21 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-20) PROBLEMA 13. Demuestre que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son definidas positivas entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ también es definida positiva. Para esta demostración los pivotes y los valores característicos no son convenientes. Es mejor emplear $\boldsymbol{x}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\boldsymbol{x} > 0$
(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-20) PROBLEMA 14. Factorice las siguientes matrices simétricas en la forma $\dot{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{L}}^{\mathsf{T}}$.
(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(L-20) PROBLEMA 15. La forma cuadrática $f(x,y) = 3(x+2y)^2 + 4y^2$ es definida positiva. Encuentre la matriz $\mathbf{A}$, factorícela en $\mathbf{LDL^T}$, y relacione los elementos en $\mathbf{D}$ y $\mathbf{L}$ con 3, 2 y 4 en f.
(Strang, 2007, ejercicio 9 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-20) PROBLEMA 16. Considere las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se pide:

(a) (0.5^{pts}) Calcule los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) Prueba que si $a = 2$ la matriz $\mathbf{A}$ NO es diagonalizable.
(c) (1^{pts}) Para la matriz $\mathbf{B}$, encuentre una matriz diagonal $\mathbf{D}$ y una matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{B} = \mathbf{PDP^T}$.
(d) (0.5^{pts}) Obtenga la expresión polinómica de la forma cuadrática asociada a la matriz $\mathbf{B}$ y pruebe que es definida positiva.

Versión de un ejercicio proporcionado por Mercedes Vazquez

(L-20) PROBLEMA 17. Dada la matriz $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & 3/5 \\ b & 4/5 \end{smallmatrix}\right)$, calcule valores (si existen) de a y b para los cuales

(a) (0.5^{pts}) La matriz $\mathbf{A}$ es orto-normal.
(b) (0.5^{pts}) Las columnas de la matriz $\mathbf{A}$ son independientes.
(c) (0.5^{pts}) $\lambda = 0$ es un autovalor de $\mathbf{A}$.
(d) (0.5^{pts}) $\mathbf{A}$ es simétrica y definida negativa.

(L-20) PROBLEMA 18.

(a) Obtenga la matriz $\mathbf{Q}$ asociada a la forma cuadrática $q(x,y,z) = x^2 + 2xy + ay^2 + 8z^2$ y clasifique la matriz $\mathbf{Q}$ (es decir, diga en que casos la matriz es no definida, definida o semidefinida, de manera positiva o negativa) para el caso en el que a es igual a uno ($a = 1$).
(b) Clasifíque la matriz $\mathbf{Q}$ cuando $a \neq 1$.

Fin de los Problemas de la Lección 20

5.13. Ejercicios de repaso

EJERCICIO 47. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que $\mathbf{A}$ es invertible si y sólo si $a \neq 0$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Es la matriz $\mathbf{A}$ definida positiva cuando $a = 1$? Justifique su respuesta.
(c) (1^{pts}) Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ cuando $a = 2$.
(d) (0.5^{pts}) ¿Cuantas variables pueden ser tomadas como exógenas (o libres) en el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ cuando $a = 0$? ¿Cuales?

EJERCICIO 48. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o veracidad de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

(a) Si $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces $\mathbf{A}^2$ también lo es.
(b) Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ entonces $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})$ donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.
(c) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$, entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es compatible determinado.
(d) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$, entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ puede ser incompatible.
(e) Si una matriz es ortogonal (columnas perpendiculares y de norma uno) entonces su inversa también es ortogonal.

(f) Si 1 es el único autovalor de una matriz $\mathbf{A}$ de orden 2×2, entonces $\mathbf{A}$ necesariamente tiene que ser la matriz identidad $\mathbf{I}$.

EJERCICIO 49. complete los blancos, o responda **V**erdadero/**F**also.

(a) Cualquier sistema generador de un espacio vectorial contiene una base del espacio (V/F)

______________.

(b) Que los vectores $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_n$ sean linealmente independientes significa que

____.

(c) El conjunto que sólo contiene el vector $\mathbf{0}$ es un conjunto linealmente independiente. (V/F)

______________.

(d) Una matriz cuadrada de orden n por n es diagonalizable cuando:

____.

(e) Si $\boldsymbol{u} = (1, 2, -1, 1)$, entonces $||\boldsymbol{u}|| =$ ____________.

(f) Si $\boldsymbol{u} = (1, 2, -1, 1)$ y $\boldsymbol{v} = (-2, 1, 0, 0)$, entonces $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} =$ ____________.

EJERCICIO 50. En las preguntas siguientes $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices $n \times n$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (incluya una breve explicación, o un contra ejemplo que justifique su respuesta):

(a) Si $\mathbf{A}$ no es cero entonces $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

(b) Si $\det(\mathbf{AB}) \neq 0$ entonces $\mathbf{A}$ es invertible.

(c) Si intercambio las dos primeras filas de $\mathbf{A}$ sus autovalores cambian.

(d) Si $\mathbf{A}$ es real y simétrica, entonces sus autovalores son reales **(aquí no es necesaria una justificación)**.

(e) Si la forma reducida de echelon de $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})$ es la matriz identidad, entonces 5 no es un autovalor de $\mathbf{A}$.

(f) Sea $\boldsymbol{b}$ un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Si el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, entonces $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

(g) Sea $\mathbf{C}$ de orden 3×5. El rango de $\mathbf{C}$ puede ser 4.

(h) Sea $\mathbf{C}$ de orden $n \times m$, y $\boldsymbol{b}$ un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, entonces $\text{rango}\,(\mathbf{C}) < n$.

(i) Toda matriz diagonalizable es invertible.

(j) Si $\mathbf{A}$ es invertible, entonces su forma reducida de echelon es la matriz identidad.

EJERCICIO 51. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix};\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix};\quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los autovalores de $\mathbf{B}$ son 0 y 2. Use esta información para responder a las siguientes cuestiones. Para cada matriz debe dar una explicación. Puede haber más de una matriz que cumpla la condición:

(a) ¿Qué matrices son invertibles?

(b) ¿Qué matrices tienen un autovalor repetido?

(c) ¿Qué matrices tienen rango menor a tres?

(d) ¿Qué matrices son diagonalizables?

(e) ¿Para qué matrices diagonalizables podemos encontrar tres autovectores ortogonales entre si?

EJERCICIO 52. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule los autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$.

(b) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?

(c) ¿Es posible encontrar una matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{\mathsf{T}}$, siendo $\mathbf{D}$ una matriz diagonal?

(d) Calcule $\left|\mathbf{A}^{-1}\right|$.

EJERCICIO 53. Sea $\mathbf{A}$ una matriz 3×3 y sean $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$ sus autovalores. Sean $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1)^{\mathsf{T}}$ y $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 1)^{\mathsf{T}}$ los autovectores asociados a λ_1 y λ_2.

(a) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?
(b) ¿Podría ser $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 0, -1)^\intercal$ un autovector asociado al autovalor $\lambda_3 = -1$.
(c) Calcule $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$.

EJERCICIO 54.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre un sistema lineal homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ cuyas soluciones sean

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \text{tales que} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \right\}$$

(b) (0.5^{pts}) Si el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$ es $p(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 - 24\lambda^3 + 28\lambda^2 - 3\lambda + 10$, encuentre el rango de $\mathbf{A}$.

EJERCICIO 55. Suponga una matriz cuadrada e *invertible* $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$.

(a) ¿Cuáles son sus espacios columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$? (no responda con la definición, diga qué conjunto de vectores compone cada espacio).
(b) Suponga que $\mathbf{A}$ puede ser factorizada en $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 0 & u_{13} \end{bmatrix}$$

Describa el primer paso de eliminación en la reducción de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{U}$. ¿porqué sabe que $\mathbf{U}$ es también una matriz invertible? ¿Cuanto vale el determinante de $\mathbf{A}$?
(c) Encuentre una matriz particular de dimensiones 3×3 e invertible $\mathbf{A}$ que no pueda ser factorizada en la forma $\mathbf{LU}$ (sin permutar previamente las filas). ¿Qué factorización es todavía posible en su ejemplo? (no es necesario que realice la factorización). ¿Cómo sabe que su matriz $\mathbf{A}$ es invertible?

Apéndice A

Resumen de los temas por lecciones

A.1. Resumen del Tema 1

El tema consta de cinco lecciones que resumimos a continuación.

Lección 1. En la primera lección solo se establece la notación para vectores, matrices, y operadores selectores junto con algunas reglas de reescritura. Por ejemplo, estas dos reglas de reescritura

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\big(\lambda\boldsymbol{b}\big)_{|i} = \lambda\big(\boldsymbol{b}_{|i}\big)}$$

definen la suma de vectores y su producto por escalares. Jugando con estas reglas se deducen las propiedades de la suma de vectores y producto por escalares que permitirán definir el *espacio vectorial* $\mathbb{R}^n$ en el Tema 2. Las reglas

$$\boxed{(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\big(\lambda\mathbf{B}\big)_{|j} = \lambda\big(\mathbf{B}_{|j}\big)}$$

definen la suma de matrices y su producto por escalares (operando con las columnas). Como esta reglas son esencialmente iguales a las anteriores, se obtienen propiedades análogas, lo que permitirá definir el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n\times m}$. ¡El juego con las reglas de reescritura, independientemente del significado que tengan los símbolos $\boldsymbol{a}$ o $\mathbf{A}$ da lugar a las mismas propiedades! Con la transposición de una matriz

$$\boxed{\big(\mathbf{A}^{\intercal}\big)_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}}$$

mostraremos que las operaciones con matrices también se pueden definir como operaciones entre filas ${}_{i|}\mathbf{A}$ (y también entre componentes ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$). Teniendo en cuenta que $\boxed{\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\lambda}$ y que $\boxed{\lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda}$, y jugando con la notación se deducen una serie de reglas de reescritura que se usarán en las siguientes lecciones: [1]

Reglas distributivas

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} &= \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i} \\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} &= \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} {}_{i|}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= {}_{i|}\boldsymbol{a} + {}_{i|}\boldsymbol{b} \\ {}_{i|}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= {}_{i|}\mathbf{A} + {}_{i|}\mathbf{B} \end{aligned}$$

Reglas asociativas (desplazando el paréntesis)

$$\begin{aligned} (\lambda\boldsymbol{b})_{|i} &= \lambda(\boldsymbol{b}_{|i}) \\ (\lambda\mathbf{A})_{|j} &= \lambda(\mathbf{A}_{|j}) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} {}_{i|}(\boldsymbol{b}\lambda) &= ({}_{i|}\boldsymbol{b})\lambda \\ {}_{i|}(\mathbf{A}\lambda) &= ({}_{i|}\mathbf{A})\lambda \end{aligned}$$

[1] De hecho, la librería de Python solo se implementan las reglas recuadradas. . . y entonces ¡todo lo demás funciona automáticamente!

Intercambio entre el escalar y el operador

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{b}\lambda)_{|i} &= (\boldsymbol{b}_{|i})\lambda \\ (\mathsf{A}\lambda)_{|j} &= (\mathsf{A}_{|j})\lambda \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} {}_{i|}(\lambda\boldsymbol{b}) &= \lambda({}_{i|}\boldsymbol{b}) \\ {}_{i|}(\lambda\mathsf{A}) &= \lambda({}_{i|}\mathsf{A}) \end{aligned}$$

Lección 2. Comienza con el *producto punto* (o producto escalar usual) de dos vectores de $\mathbb{R}^n$ y sus propiedades.[2]

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \textstyle\sum_i a_i b_i}$$

El uso del producto punto nos dota de una notación muy compacta (sin sumatorios).

La Lección 2 trata de *combinaciones lineales* de vectores de $\mathbb{R}^n$ y su notación matricial $\mathsf{A}\boldsymbol{b}$ (combinación de las columnas de A) y $\boldsymbol{a}\mathsf{B}$ (combinación de las filas de B).

$$\boxed{\mathsf{A}\boldsymbol{b} = \textstyle\sum_j (\mathsf{A}_{|j})b_j} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\boldsymbol{a}\mathsf{B} = (\mathsf{B}^{\intercal})\boldsymbol{a}}$$

Usando las reglas de reescritura de la lección anterior, se deducen nuevas reglas para el producto de una matriz por un vector a su derecha $\mathsf{A}\boldsymbol{b}$:

Propiedades de linealidad

- $\mathsf{A}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \mathsf{A}\boldsymbol{b}+\mathsf{A}\boldsymbol{c}$
- $\mathsf{A}(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\mathsf{A}\boldsymbol{b})$

Otras propiedades

- $\mathsf{A}(\lambda\boldsymbol{b}) = (\lambda\mathsf{A})\boldsymbol{b}$
- $(\mathsf{A}+\mathsf{B})\boldsymbol{c} = \mathsf{A}\boldsymbol{c}+\mathsf{B}\boldsymbol{c}$
- $\mathsf{A}(\mathsf{B}\boldsymbol{c}) = \left[\mathsf{A}(\mathsf{B}_{|1}),\quad \dots,\quad \mathsf{A}(\mathsf{B}_{|n})\right]\boldsymbol{c}$

y propiedades análogas para el producto de un vector por una matriz $\boldsymbol{a}\mathsf{B}$.

Adicionalmente, y solo en las transparencias de la clase correspondiente a esta lección, se adelanta la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones $\mathsf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ ... ¿qué combinaciones lineales de las columnas ($\mathsf{A}\boldsymbol{x}$) son iguales al vector del lado derecho $\boldsymbol{b}$?

Lección 3. Trata sobre el *producto de matrices*.

$$\boxed{(\mathsf{AB})_{|j} = \mathsf{A}(\mathsf{B}_{|j})}$$

(*cada columna de* AB *es una combinación de las columnas de* A). Jugando con la definición y con las reglas de reescritura de las lecciones anteriores se deducen las siguientes propiedades

- $\mathsf{A}(\mathsf{B}\boldsymbol{c}) = (\mathsf{AB})\boldsymbol{c}$
- $\mathsf{A}(\mathsf{BC}) = (\mathsf{AB})\mathsf{C}$
- $(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mathsf{C} = \mathsf{AC}+\mathsf{BC}$
- $\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C}) = \mathsf{AB}+\mathsf{AC}$
- $\mathsf{A}(\lambda\mathsf{B}) = \lambda(\mathsf{AB})$
- $\mathsf{A}(\lambda\mathsf{B}) = (\lambda\mathsf{A})\mathsf{B}$
- $\mathsf{IA} = \mathsf{A}$
- $\mathsf{AI} = \mathsf{A}$

Y continuado con el mismo juego de manipulación de símbolos, se deducen nuevas interpretaciones del producto

$${}_{i|}(\mathsf{AB}) = ({}_{i|}\mathsf{A})\mathsf{B} \qquad \text{y} \qquad {}_{i|}(\mathsf{AB})_{|j} = ({}_{i|}\mathsf{A})\cdot(\mathsf{B}_{|j})$$

[2] Como en este material se hace una marcada distinción entre vectores y matrices, aquí carece de sentido “transponer un vector”. Así evitamos el frecuente abuso de notación del que hacen uso otros textos.

es decir, las filas de $\mathbf{AB}$ son combinaciones lineales de las filas de $\mathbf{B}$, y los elementos de $\mathbf{AB}$ son productos punto de las filas de $\mathbf{A}$ con las columnas de $\mathbf{B}$. Aquí se evidencian las bondades de la notación. Una expresión como

$$_{i|}\mathbf{AB}_{|j}$$

se puede interpretar como el elemento de la fila i, y columna j de $\mathbf{AB}$, como el elemento $i$ésimo de la combinación de las columnas $\mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|j}\big)$, como el elemento $j$ésimo de una combinación de las filas $\big({}_{i|}\mathbf{A}\big)\mathbf{B}$, o como el producto escalar de la fila ${}_{i|}\mathbf{A}$ con la columna $\mathbf{B}_{|j}$. Todas estas interpretaciones son correctas, y todas ellas están sugeridas en la expresión, ${}_{i|}\mathbf{AB}_{|j}$. Es destacable la potencia computacional de la notación (véase la demostración de $(\mathbf{AB})^\intercal = \mathbf{B}^\intercal\big(\mathbf{A}^\intercal\big)$ así como su implementación en la librería de Python).

Lección 4 Trata sobre las *transformaciones elementales*, y su uso en el *método de eliminación*.
Aquí solo consideramos dos tipos de transformaciones elementales:

- $\boxed{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}} \text{ suma } \lambda \text{ veces el vector } i\text{ésimo al } j\text{ésimo.}}$
- $\boxed{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}} \text{ multiplica por } \alpha \text{ el vector } i\text{ésimo.}}$

Llamamos *matriz elemental* a la matriz resultante de aplicar una única transformación elemental sobre las columnas (o bien sobre las filas) de una matriz identidad

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}} \qquad \text{o} \qquad {}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}$$

Dada la transformación elemental, $\boldsymbol{\tau}$, las dos matrices elementales de más arriba son una la transpuesta de la otra. Por tanto, la transpuesta de una matriz elemental es otra matriz elemental. Aplicar una transformación elemental a una matriz es equivalente a multiplicarla por la correspondiente matriz elemental, es decir

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{A}\,(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}) \qquad \text{y} \qquad {}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A} = ({}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I})\,\mathbf{A}.$$

Para describir la aplicación de la secuencia $\boldsymbol{\tau}_1 \dots \boldsymbol{\tau}_k$ de k trasformaciones elementales de las *columnas* de $\mathbf{A}$ usamos el esquema. [3]

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_1} \big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1}\big) \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_2} \big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2}\big) \cdots \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_k} \big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\big) \quad \text{o agregando varios pasos} \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\tau}_p}} \big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p}\big) \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}_{p+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\tau}_k}} \big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\big).$$

Cuando se aplica la sucesión $\boldsymbol{\tau}_1 \dots \boldsymbol{\tau}_k$ de k transformaciones elementales sobre las *columnas*, o bien la sucesión $\boldsymbol{\tau}_k \dots \boldsymbol{\tau}_1$ de k transformaciones elementales sobre las *filas* (nótese el distinto orden en las sucesiones) se obtienen relaciones similares a las que encontramos al aplicar una única transformación:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\,\big(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\big) \qquad \text{y} \qquad {}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{A} = \big({}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I}\big)\,\mathbf{A}.$$

Es posible realizar un *intercambio* de posición entre dos vectores mediante una sucesión de transformaciones elementales:

- $\boxed{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}} \text{ intercambia de posición los vectores } i\text{ésimo y } j\text{ésimo.}}$

Llamamos matriz de intercambio a la matriz resultante de aplicar un único intercambio entre dos columnas (o bien dos filas) de una matriz identidad.

$$\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}} \qquad \text{o} \qquad {}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}$$

[3] De manera análoga, para describir una secuencia de trasformaciones elementales de las *filas* de $\mathbf{A}$ (donde $\boldsymbol{\tau}_1$ es la primera que se aplica, luego $\boldsymbol{\tau}_1, \dots$ y por último $\boldsymbol{\tau}_k$) se debe usar el siguiente esquema

$$\mathbf{A} \underset{\boldsymbol{\tau}_1}{\longrightarrow} \big({}_{\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{A}\big) \underset{\boldsymbol{\tau}_2}{\longrightarrow} \big({}_{\boldsymbol{\tau}_2\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{A}\big) \cdots \underset{\boldsymbol{\tau}_k}{\longrightarrow} \big({}_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{A}\big) \quad \text{o agregando varios pasos} \quad \mathbf{A} \underset{\substack{\boldsymbol{\tau}_p\\ \vdots\\ \boldsymbol{\tau}_1}}{\longrightarrow} \big({}_{\boldsymbol{\tau}_p\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{A}\big) \underset{\substack{\boldsymbol{\tau}_k\\ \vdots\\ \boldsymbol{\tau}_{p+1}}}{\longrightarrow} \big({}_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{A}\big);$$

donde la secuencia $\boldsymbol{\tau}_k \dots \boldsymbol{\tau}_1$ es la transpuesta de la secuencia $\boldsymbol{\tau}_1 \dots \boldsymbol{\tau}_k$, es decir, $\big(\boldsymbol{\tau}_1 \dots \boldsymbol{\tau}_k\big)^\intercal = \boldsymbol{\tau}_k \dots \boldsymbol{\tau}_1$, pues al actuar por la izquierda, las primeras transformaciones que se aplican son la que están más a la derecha de la secuencia. Por tanto ${}_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{I}$ es la transpuesta de $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ (cuando ambas tienen el mismo orden).

Las matrices intercambio son simétricas (por lo que estas dos de arriba son iguales si tienen el mismo orden). Aplicar un intercambio a una matriz es equivalente a multiplicarla por la correspondiente matriz de intercambio, es decir

$$\mathbf{A}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) \qquad \text{y} \qquad {}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{A} = \left({}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\right)\mathbf{A}.$$

La aplicación de una sucesión de intercambios da lugar a un reordenamiento de los vectores. Denominamos *matriz permutación* a la matriz que resulta tras una sucesión de intercambios en las columnas (o en las filas) de la matriz identidad. De nuevo tenemos que

$$\mathbf{A}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) \qquad \text{y} \qquad {}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{A} = \left({}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\right)\mathbf{A}$$

(la flecha circular denota un reordenamiento de las columnas (o de las filas) de la matriz).

Mediante una sucesión de transformaciones elementales es posible pre-escalonar cualquier matriz. La demostración de este importante teorema describe la implementación del método en Python. A este procedimiento se le llama *Método de eliminación*. Hay dos extensiones más: la *eliminación Gaussiana* que escalona la matriz reordenando las columnas y la eliminación *Gauss-Jordan*, que reduce la matriz escalonada.

Lección 5. Trata sobre la *inversión de las transformaciones elementales* y la *inversión de matrices* (cuando es posible) aplicando el Método de eliminación Gauss-Jordan.

Definimos la inversa de $\mathbf{A}$ de orden n (por tanto *cuadrada*) como aquella matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Y demostramos que, si existe $\mathbf{B}$, es única y la denotamos por $\mathbf{A}^{-1}$. A continuación se demuestra que:

- Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen inversa, entonces $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)$.
- Si $\mathbf{B}$ es invertible, entonces $\mathbf{AB}$ es invertible si y solo si $\mathbf{A}$ es invertible.
- Si $\mathbf{A}$ es invertible, entonces $\mathbf{AB}$ es invertible si y solo si $\mathbf{B}$ es invertible.
- Si $\mathbf{A}$ es invertible, entonces $\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\intercal}$.
- Si $\mathbf{A}$ tiene alguna columna (o fila) nula entonces no tiene inversa.

Todas *las transformaciones elementales* se pueden deshacer (todas *son invertibles*), lo que implica que *todas las matrices elementales son invertibles*. En la segunda parte de lección relacionamos la invertibilidad de una matriz con las transformaciones elementales, pues cualquier matriz de la forma $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ es invertible por ser producto de matrices elementales:

$$\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1}}\right) = \mathbf{E}_1\cdots\mathbf{E}_k\cdot\mathbf{E}_k^{-1}\cdots\mathbf{E}_1^{-1} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k\cdot\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1}} = \mathbf{I}.$$

Siguiendo esta idea, se demuestra que

- Si $\mathbf{A}$ es producto de matrices elementales, entonces es invertible.
- Si $\mathbf{A}$ tiene columnas que son combinación lineal del resto, entonces no es invertible.
- $\mathbf{A}$ es invertible si y solo si sus formas escalonadas $\mathbf{L}$ son invertibles.

A continuación se demuestra que toda matriz cuadrada $\mathbf{L}$ escalonada y sin columnas nulas se puede transformar en la matriz identidad mediante transformaciones elementales (de nuevo la demostración indica los pasos para implementar el algoritmo en Python). Esto da lugar a un corolario que establece que las siguientes propiedades son equivalentes

1. El resultado de escalonar $\mathbf{A}$ no tiene columnas nulas.
2. $\mathbf{A}$ es producto de matrices elementales.
3. $\mathbf{A}$ tiene inversa.

A continuación se demuestra que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son cuadradas y del mismo orden, y $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son una la inversa de la otra.

En la lección anterior vimos que el Método de eliminación permite encontrar una forma pre-escalonada de toda matriz (Teorema 1.13.2 en la página 69)

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p} = \mathbf{K},$$

y, si $\mathbf{K}$ no tiene columnas nulas, se puede continuar con las transformaciones elementales hasta transformar $\mathbf{K}$ en $\mathbf{I}$ (Teorema 1.15.12 en la página 81)

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\tau}_{(p+1)}\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{I}.$$

Por tanto, la sucesión de k transformaciones elementales $\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_p\ ,\ \boldsymbol{\tau}_{(p+1)} \cdots \boldsymbol{\tau}_k$ transforma $\mathbf{A}$ en $\mathbf{I}$, es decir,

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \mathbf{I};$$

así, si $\mathbf{L}$ no tiene columnas nulas, entonces $\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}$. Por otra parte, $\mathbf{A}^{-1}$ no existe cuando $\mathbf{L}$ tiene columnas nulas.

La lección finaliza proponiendo un método para encontrar la inversa a la vez que se transforma $\mathbf{A}$ en $\mathbf{I}$, y dando una definición de *rango* de una matriz (el número de columnas no nulas de cualquiera de sus formas escalonadas).

Aquí finaliza el primer tema del curso.

Bibliografía

Arvesú Carballo, J., Marcellán Español, F., and Sánchez Ruiz, J. (2005). *Problemas resueltos de Álgebra Lineal.* Thomson Learning, Madrid. España. ISBN 84-9732-284-3.

Cullen, C. G. (1972). *Matrices and Linear Transformations.* Dover publications, Inc., New York, USA., second ed.

Hefferon, J. (2008). *Linear Algebra.* Jim Hefferon, Colchester, Vermont USA. This text is Free. URL ftp://joshua.smcvt.edu/pub/hefferon/book/book.pdf

Lang, S. (1986). *Introduction to Linear Algebra.* Springer-Verlag, second ed.

Larson, R., Edwars, B. H., and Falvo, D. C. (2004). *Álgebra lineal.* Ediciones Pirámide, Madrid. España, fifth ed. ISBN 84-368-1878-4. Titulo de la obra original: Elementary Linear Algebra. Houghton Miffin Company.

Lay, D. C. (2007). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* Pearson Educación, Inc., third ed.

Poole, D. (2004). *Álgebra lineal. Una introducción moderna.* Thomson Learning, Mexico D.F. ISBN 970-686-272-2.

Ramanathan, R. (2002). *Introductory Econometrics with applications.* South-Western, Mason, Ohio, fifth ed. ISBN 0-03-034186-8.

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones.* Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Mostraremos ambas estrategias en cada caso. En el caso de la segunda, en verde aparecen las operaciones entre números reales.

1. Estrategia 1:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ \vdots\\ a_m+b_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1+a_1\\ \vdots\\ b_m+a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

   Estrategia 2: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i}=\boldsymbol{a}_{|i}+\boldsymbol{b}_{|i}=\boldsymbol{b}_{|i}+\boldsymbol{a}_{|i}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})_{|i}.$

2. Estrategia 1:

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1+c_1\\ \vdots\\ b_m+c_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1+c_1\\ \vdots\\ a_m+b_m+c_m\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ \vdots\\ a_m+b_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}.$$

   Estrategia 2:

$$\Big(\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\Big)_{|i}=\boldsymbol{a}_{|i}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})_{|i}=\boldsymbol{a}_{|i}+\Big(\boldsymbol{b}_{|i}+\boldsymbol{c}_{|i}\Big)=\Big(\boldsymbol{a}_{|i}+\boldsymbol{b}_{|i}\Big)+\boldsymbol{c}_{|i}$$
$$=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i}+\boldsymbol{c}_{|i}=\Big((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}\Big)_{|i}.$$

3. Estrategia 1:

$$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+a_1\\ \vdots\\ 0+a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}.$$

   Estrategia 2: $\big(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}\big)_{|i}=\boldsymbol{0}_{|i}+\boldsymbol{a}_{|i}=0+\boldsymbol{a}_{|i}=\boldsymbol{a}_{|i}.$

4. Estrategia 1:

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_1\\ \vdots\\ -a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-a_1\\ \vdots\\ a_m-a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

   Estrategia 2: $\Big(\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})\Big)_{|i}=\boldsymbol{a}_{|i}+(-\boldsymbol{a})_{|i}=0=\boldsymbol{0}_{|i}.$

5. Estrategia 1:

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}\lambda(a_1+b_1)\\ \vdots\\ \lambda(a_m+b_m)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1+\lambda b_1\\ \vdots\\ \lambda a_m+\lambda b_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\ \vdots\\ \lambda a_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda b_1\\ \vdots\\ \lambda b_m\end{pmatrix}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

   Estrategia 2: $\Big(\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\Big)_{|i}=\lambda\Big((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i}\Big)=\lambda\Big(\boldsymbol{a}_{|i}+\boldsymbol{b}_{|i}\Big)=\lambda(\boldsymbol{a}_{|i})+\lambda(\boldsymbol{b}_{|i})=(\lambda\boldsymbol{a})_{|i}+(\lambda\boldsymbol{b})_{|i}=(\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})_{|i}.$

6. Estrategia 1:

$$(\lambda+\eta)\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}(\lambda+\eta)a_1\\ \vdots\\ (\lambda+\eta)a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1+\eta a_1\\ \vdots\\ \lambda a_m+\eta a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\ \vdots\\ \lambda a_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\eta b_1\\ \vdots\\ \eta b_m\end{pmatrix}=\lambda\boldsymbol{a}+\eta\boldsymbol{a}.$$

   Estrategia 2: $\Big((\lambda+\eta)\boldsymbol{a}\Big)_{|i}=(\lambda+\eta)(\boldsymbol{a}_{|i})=\lambda(\boldsymbol{a}_{|i})+\eta(\boldsymbol{a}_{|i})=(\lambda\boldsymbol{a})_{|i}+(\eta\boldsymbol{a})_{|i}=(\lambda\boldsymbol{a}+\eta\boldsymbol{a})_{|i}.$

7. Estrategia 1:

$$\lambda(\eta\boldsymbol{a}) = \lambda \begin{pmatrix} \eta a_1 \\ \vdots \\ \eta a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\eta a_1 \\ \vdots \\ \lambda\eta a_m \end{pmatrix} = \lambda\eta \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (\lambda\eta)\boldsymbol{a}.$$

Estrategia 2: $\Big(\lambda(\eta\boldsymbol{a})\Big)_{|i} = \lambda\Big((\eta\boldsymbol{a})_{|i}\Big) = \lambda\Big(\eta\big(\boldsymbol{a}_{|i}\big)\Big) = (\lambda\eta)\big(\boldsymbol{a}_{|i}\big) = \big((\lambda\eta)\boldsymbol{a}\big)_{|i}.$

8. Estrategia 1:

$$1\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1\cdot a_1 \\ \vdots \\ 1\cdot a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}.$$

Estrategia 2: $(1\boldsymbol{a})_{|i} = 1\big(\boldsymbol{a}_{|i}\big) = \boldsymbol{a}_{|i}.$

$\square$

Ejercicio 2(a) $\quad {}_{k|}(\mathbf{A}^\intercal)_{|j} = {}_{k|}\Big((\mathbf{A}^\intercal)_{|j}\Big) = {}_{k|}\big({}_{j|}\mathbf{A}\big) = \big({}_{j|}\mathbf{A}\big)_{|k} = {}_{j|}\mathbf{A}_{|k}.$

$\square$

Ejercicio 2(b) $\quad {}_{j|}\Big((\mathbf{A}^\intercal)^\intercal\Big)_{|k} = {}_{k|}(\mathbf{A}^\intercal)_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}_{|k}.$

$\square$

Ejercicio 2(c) $\quad \mathbf{A}_{|i} = \Big((\mathbf{A}^\intercal)^\intercal\Big)_{|i} = {}_{i|}\big(\mathbf{A}^\intercal\big).$

$\square$

Ejercicio 3. Las demostraciones son prácticamente idénticas a las vistas en el caso de los vectores:

1. $\big(\mathbf{A}+\mathbf{B}\big)_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j} = \mathbf{B}_{|j} + \mathbf{A}_{|j} = \big(\mathbf{B}+\mathbf{A}\big)_{|j}.$
2. $\Big((\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}\Big)_{|j} = \big(\mathbf{A}+\mathbf{B}\big)_{|j} + \mathbf{C}_{|j} = \big(\mathbf{A}_{|j}+\mathbf{B}_{|j}\big) + \mathbf{C}_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \big(\mathbf{B}_{|j}+\mathbf{C}_{|j}\big) = \mathbf{A}_{|j} + \big(\mathbf{B}+\mathbf{C}\big)_{|j} = \Big(\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})\Big)_{|j}.$
3. $\big(\mathbf{0}+\mathbf{A}\big)_{|j} = \mathbf{0}_{|j} + \mathbf{A}_{|j} = \mathbf{0} + \mathbf{A}_{|j} = \mathbf{A}_{|j}.$
4. $\big(\mathbf{A}+(-\mathbf{A})\big)_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \big(-\mathbf{A}\big)_{|j} = \mathbf{A}_{|j} - \mathbf{A}_{|j} = \mathbf{0} = \mathbf{0}_{|j}.$
5. $\Big(\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})\Big)_{|j} = \lambda\Big((\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j}\Big) = \lambda\big(\mathbf{A}_{|j}+\mathbf{B}_{|j}\big) = \lambda\big(\mathbf{A}_{|j}\big) + \lambda\big(\mathbf{B}_{|j}\big) = \big(\lambda\mathbf{A}\big)_{|j} + \big(\lambda\mathbf{B}\big)_{|j} = \big(\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}\big)_{|j}.$
6. $\Big((\lambda+\eta)\mathbf{A}\Big)_{|j} = (\lambda+\eta)\big(\mathbf{A}_{|j}\big) = \lambda\big(\mathbf{A}_{|j}\big) + \eta\big(\mathbf{A}_{|j}\big) = \big(\lambda\mathbf{A}\big)_{|j} + \big(\eta\mathbf{A}\big)_{|j} = \big(\lambda\mathbf{A}+\eta\mathbf{A}\big)_{|j}.$
7. $\Big(\lambda(\eta\mathbf{A})\Big)_{|j} = \lambda\Big((\eta\mathbf{A})_{|j}\Big) = \lambda\Big(\eta\big(\mathbf{A}_{|j}\big)\Big) = (\lambda\eta)\big(\mathbf{A}_{|j}\big) = \big((\lambda\eta)\mathbf{A}\big)_{|j}.$
8. $\big(1\mathbf{A}\big)_{|j} = 1\big(\mathbf{A}_{|j}\big) = \mathbf{A}_{|j}.$

$\square$

Ejercicio 4. Comenzamos por la suma.

$${}_{i|}(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = {}_{i|}\Big((\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j}\Big) = {}_{i|}\Big(\mathbf{A}_{|j}+\mathbf{B}_{|j}\Big) = {}_{i|}\mathbf{A}_{|j} + {}_{i|}\mathbf{B}_{|j}.$$

Y ahora el producto.

$${}_{i|}(\lambda\mathbf{A})_{|j} = {}_{i|}\Big((\lambda\mathbf{A})_{|j}\Big) = {}_{i|}\Big(\lambda\big(\mathbf{A}_{|j}\big)\Big) = \lambda\Big({}_{i|}\big(\mathbf{A}_{|j}\big)\Big) = \lambda\Big({}_{i|}\mathbf{A}_{|j}\Big).$$

$\square$

Ejercicio 5(a) $\quad \Big((\lambda\mathbf{A})^\intercal\Big)_{|j} = {}_{j|}(\lambda\mathbf{A}) = \lambda\Big({}_{j|}\mathbf{A}\Big) = \lambda\Big((\mathbf{A}^\intercal)_{|j}\Big) = \Big(\lambda(\mathbf{A}^\intercal)\Big)_{|j}.$

$\square$

Ejercicio 5(b) $\quad \big((\mathbf{A}+\mathbf{B})^\intercal\big)_{|j} = {}_{j|}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = {}_{j|}\mathbf{A} + {}_{j|}\mathbf{B} = \big(\mathbf{A}^\intercal\big)_{|j} + \big(\mathbf{B}^\intercal\big)_{|j} = \big(\mathbf{A}^\intercal+\mathbf{B}^\intercal\big)_{|j}.$

$\square$

Ejercicio 6. Comenzamos con la suma

$$_{i|}\big(\mathsf{A}+\mathsf{B}\big) = \big((\mathsf{A}+\mathsf{B})^{\intercal}\big)_{|i} = (\mathsf{A}^{\intercal}+\mathsf{B}^{\intercal})_{|i} = \big(\mathsf{A}^{\intercal}\big)_{|i} + \big(\mathsf{B}^{\intercal}\big)_{|i} = {}_{i|}\mathsf{A} + {}_{i|}\mathsf{B}$$

Y continuamos con el producto:

$$_{i|}\big(\mathsf{A}\lambda\big) = \big((\mathsf{A}\lambda)^{\intercal}\big)_{|i} = \big((\mathsf{A}^{\intercal})\lambda\big)_{|i} = \Big(\big(\mathsf{A}^{\intercal}\big)_{|i}\Big)\lambda = \big({}_{i|}\mathsf{A}\big)\lambda.$$

□

(L-1) Problema 1(a)

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

□

(L-1) Problema 1(b)

$$\begin{bmatrix}1&-1&3\\-1&2&0\\3&0&1\end{bmatrix}$$

□

(L-1) Problema 1(c)

$$\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

□

(L-1) Problema 1(d)

$$\begin{bmatrix}0&1&3\\-1&0&0\\-3&0&0\end{bmatrix}$$

□

Ejercicio 7(a) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \;=\; x_1y_1+\cdots+x_ny_n \;=\; y_1x_1+\cdots+y_nx_n \;=\; \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$

□

Ejercicio 7(b)

- $(a\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} \;=\; ax_1y_1+\cdots+ax_ny_n \;=\; a\big(x_1y_1+\cdots+x_ny_n\big) \;=\; a(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}).$
- $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} \;=\; (x_1+y_1)z_1+\cdots+(x_n+y_n)z_n \;=\; x_1z_1+\cdots+x_nz_n \;+\; y_1z_1+\cdots+y_nz_n \;=\; \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}.$

□

Ejercicio 7(c) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \;=\; x_1^2+\cdots+x_n^2 \;\geq 0.$

□

Ejercicio 7(d) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \;=\; x_1^2+\cdots+x_n^2 \;=0 \iff x_i=0$ para $i=1:n.$

□

Ejercicio 8. $2\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2-4\\2-4+2\\-4+2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$

□

Ejercicio 9.

$$\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

□

Ejercicio 10(a)

$$_{i|}\big(\mathsf{A}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\big) = \big({}_{i|}\mathsf{A}\big)\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \big({}_{i|}\mathsf{A}\big)\cdot\boldsymbol{b}+\big({}_{i|}\mathsf{A}\big)\cdot\boldsymbol{c} = {}_{i|}\big(\mathsf{A}\boldsymbol{b}\big)+{}_{i|}\big(\mathsf{A}\boldsymbol{c}\big) = {}_{i|}\big(\mathsf{A}\boldsymbol{b}+\mathsf{A}\boldsymbol{c}\big).$$

$\square$

Ejercicio 10(b)

$${}_{i|}\big(\mathsf{A}(\lambda\boldsymbol{b})\big) = \big({}_{i|}\mathsf{A}\big)\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda\Big(\big({}_{i|}\mathsf{A}\big)\cdot\boldsymbol{b}\Big) = \lambda\Big({}_{i|}\big(\mathsf{A}\boldsymbol{b}\big)\Big) = {}_{i|}\big(\lambda(\mathsf{A}\boldsymbol{b})\big).$$

$\square$

Ejercicio 11.

$${}_{i|}\big(\mathsf{A}(\lambda\boldsymbol{b})\big) \;=\; \big({}_{i|}\mathsf{A}\big)\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) \;=\; \lambda\Big(\big({}_{i|}\mathsf{A}\big)\cdot\boldsymbol{b}\Big) \;=\; \Big(\lambda\big({}_{i|}\mathsf{A}\big)\Big)\cdot\boldsymbol{b} \;=\; \Big({}_{i|}\big(\lambda\mathsf{A}\big)\Big)\cdot\boldsymbol{b} \;=\; {}_{i|}\big((\lambda\mathsf{A})\boldsymbol{b}\big)$$

$\square$

Ejercicio 12.

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}(\mathsf{B}\boldsymbol{c}) =& \mathsf{A}\Big(\big(\mathsf{B}_{|1}\big)c_1+\cdots+\big(\mathsf{B}_{|n}\big)c_n\Big) && \text{por la Definición 23 de producto}\\
=& \mathsf{A}\big(\mathsf{B}_{|1}\big)c_1+\cdots+\mathsf{A}\big(\mathsf{B}_{|n}\big)c_n && \text{Proposición 1.6.1}\\
=& \Big[\mathsf{A}\big(\mathsf{B}_{|1}\big),\quad\ldots,\quad\mathsf{A}\big(\mathsf{B}_{|n}\big)\Big]\,\boldsymbol{c} && \text{por la Definición 23 de producto.}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 13.

$${}_{i|}\big((\mathsf{A}+\mathsf{B})\boldsymbol{c}\big) = \big({}_{i|}(\mathsf{A}+\mathsf{B})\big)\cdot\boldsymbol{c} = \big({}_{i|}\mathsf{A}+{}_{i|}\mathsf{B}\big)\cdot\boldsymbol{c} = \big({}_{i|}\mathsf{A}\big)\cdot\boldsymbol{c}+\big({}_{i|}\mathsf{B}\big)\cdot\boldsymbol{c} = {}_{i|}\big(\mathsf{A}\boldsymbol{c}\big)+{}_{i|}\big(\mathsf{B}\boldsymbol{c}\big) = {}_{i|}\big(\mathsf{A}\boldsymbol{c}+\mathsf{B}\boldsymbol{c}\big).$$

$\square$

Ejercicio 14(a) $\boldsymbol{a}\mathsf{I} = \big(\mathsf{I}^{\intercal}\big)\boldsymbol{a} = \mathsf{I}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}.$

$\square$

Ejercicio 14(b) $\big({}_{i|}\mathsf{I}\big)\mathsf{A} = \big(\mathsf{A}^{\intercal}\big)\big({}_{i|}\mathsf{I}\big) = \big(\mathsf{A}^{\intercal}\big)\big(\mathsf{I}_{|i}\big) = \big(\mathsf{A}^{\intercal}\big)_{|i} = {}_{i|}\mathsf{A}.$

$\square$

Ejercicio 14(c) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\mathsf{C} = \big(\mathsf{C}^{\intercal}\big)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \underset{(*)}{=} \big(\mathsf{C}^{\intercal}\big)\boldsymbol{a}+\big(\mathsf{C}^{\intercal}\big)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\mathsf{C}+\boldsymbol{b}\mathsf{C}.$

$\square$

Ejercicio 14(d) $(\lambda\boldsymbol{a})\mathsf{B} = \big(\mathsf{B}^{\intercal}\big)(\lambda\boldsymbol{a}) \underset{(*)}{=} \lambda\Big(\big(\mathsf{B}^{\intercal}\big)\boldsymbol{a}\Big) = \lambda(\boldsymbol{a}\mathsf{B})$

$\square$

Ejercicio 14(e) $\boldsymbol{a}(\lambda\mathsf{B}) = \big((\lambda\mathsf{B})^{\intercal}\big)\boldsymbol{a} = \Big(\lambda\big(\mathsf{B}^{\intercal}\big)\Big)\boldsymbol{a} \underset{(*)}{=} \big(\mathsf{B}^{\intercal}\big)(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\boldsymbol{a})\mathsf{B}.$

$\square$

Ejercicio 14(f) $\boldsymbol{a}(\mathsf{B}+\mathsf{C}) = (\mathsf{B}+\mathsf{C})^{\intercal}\boldsymbol{a} = \Big(\big(\mathsf{B}^{\intercal}\big)+\big(\mathsf{C}^{\intercal}\big)\Big)\boldsymbol{a} \underset{(*)}{=} \big(\mathsf{B}^{\intercal}\big)\boldsymbol{a}+\big(\mathsf{C}^{\intercal}\big)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\mathsf{B}+\boldsymbol{a}\mathsf{C}.$

$\square$

(L-2) Problema 1(a)

$$1\begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\7\\9\end{pmatrix}$$

$\square$

(L-2) Problema 1(b)

$$0\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$$

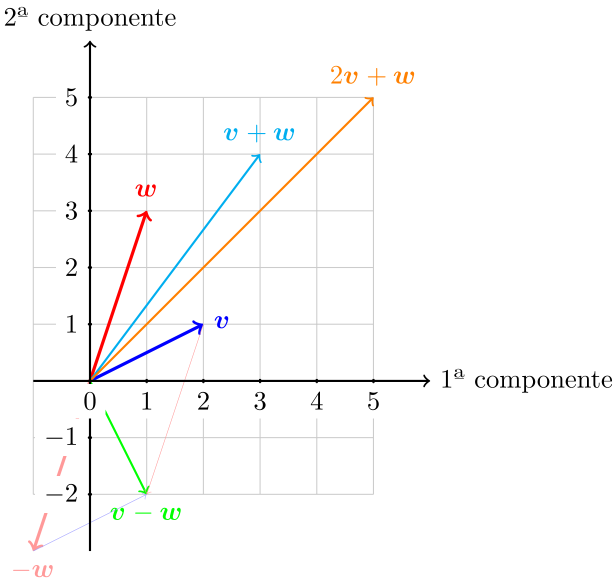
$\square$

(L-2) Problema 1(c)

$$1/2\begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}+1/3\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$$

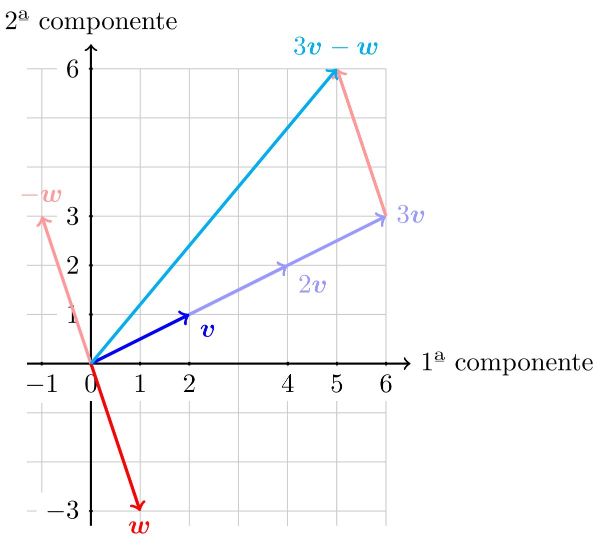
$\square$

(L-2) Problema 2. $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix};\quad 2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$



□

(L-2) Problema 3.



□

(L-2) Problema 4. Para $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ el sistema no tiene solución.

Cuando $\boldsymbol{b} = 0\mathbf{A}_{|1} + 0\mathbf{A}_{|2} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Hay muchas posibilidades. . .

Si $\boldsymbol{b} = 2\mathbf{A}_{|1} + 0\mathbf{A}_{|2} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ entonces $x = 2$ y $y = 0$. Si $\boldsymbol{b} = 0\mathbf{A}_{|1} + 1\mathbf{A}_{|2} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ entonces $x = 0$ y $y = 1$. Si $\boldsymbol{b} = 3\mathbf{A}_{|1} + 1\mathbf{A}_{|2} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$ entonces $x = 3$ y $y = 1$.

De hecho, hay INFINITAS posibilidades más!. . . Elija valores para x e y y calcule el vector

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{b};$$

con ese $\boldsymbol{b}$ obtendrá un sistema con solución (x, y).

□

(L-2) Problema 5.

$$\begin{bmatrix}3 & -6 & 0\\0 & 2 & -2\\1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Cualquier vector de la forma $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2c\\c\\c\end{pmatrix}$ para cualquier valor de c es solución del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Por tanto hay infinitas soluciones.

□

(L-2) Problema 6. Puesto que $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son soluciones, sabemos que $\mathbf{A}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{b}$; por tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\left(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\right) &= \tfrac{1}{2}\mathbf{A}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) && \text{por Proposición 1.6.2}\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{A}\boldsymbol{v}+\mathbf{A}\boldsymbol{w}) && \text{por Proposición 1.6.1}\\ &= \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}) && \text{porque } \boldsymbol{v} \text{ y } \boldsymbol{w} \text{ son soluciones}\\ &= \tfrac{1}{2}(2\boldsymbol{b}) \quad = \quad \boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

Por tanto $\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ es solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

Sin embargo, si no dividimos por 2 tenemos que $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ es solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{b}$; que es un sistema distinto, ya que $\boldsymbol{b}\neq 2\boldsymbol{b}$.

□

(L-2) Problema 7(a) Si $\mathbf{A}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{b}$ entonces, si $c+d\neq 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(c\boldsymbol{v}) &= c\boldsymbol{b}\\ \mathbf{A}(d\boldsymbol{w}) &= d\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

sumando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(c\boldsymbol{v})+\mathbf{A}(d\boldsymbol{w}) &= (c+d)\boldsymbol{b}\\ \mathbf{A}(c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}) &= (c+d)\boldsymbol{b}\\ \mathbf{A}\left(\frac{c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}}{c+d}\right) &= \boldsymbol{b};\end{aligned}$$

entonces cualquier combinación de soluciones del tipo $\frac{c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}}{c+d}$ también es solución. Por ejemplo $c=3$ y $d=-2$

$$\mathbf{A}\left(\frac{3\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{w}}{1}\right)=\mathbf{A}3\boldsymbol{v}-\mathbf{A}2\boldsymbol{w}=3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

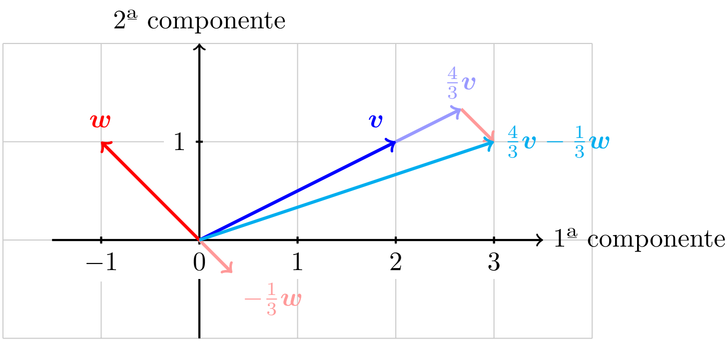
y $c=1$ y $d=3$

$$\mathbf{A}\left(\frac{\boldsymbol{v}+3\boldsymbol{w}}{4}\right)=\mathbf{A}\boldsymbol{v}\frac{1}{4}+\mathbf{A}\boldsymbol{w}\frac{3}{4}=\boldsymbol{b}$$

El Ejercicio 6 en la página 46 es un ejemplo donde $c=1$ y $d=1$.

□

(L-2) Problema 8. $x=1+\frac{1}{3}$; $y=-\frac{1}{3}$



□

Ejercicio 15(a) Recordando la Proposición 1.6.4 en la página 38 (*) y usando la Definición 25 de producto:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\boldsymbol{c}) \underset{(*)}{=} \left[\mathbf{A}\left(\mathbf{B}_{|1}\right), \quad \dots, \quad \mathbf{A}\left(\mathbf{B}_{|n}\right)\right] \boldsymbol{c} = (\mathbf{AB})\boldsymbol{c}.$$

□

Ejercicio 15(b) Aplicando repetidamente la definición de producto y una vez (∗) la proposición anterior tenemos:

$$\Big(\mathbf{A}(\mathbf{BC})\Big)_{|j} = \mathbf{A}\Big((\mathbf{BC})_{|j}\Big) = \mathbf{A}\Big(\mathbf{B}(\mathbf{C}_{|j})\Big) \underset{(*)}{=} \Big(\mathbf{AB}\Big)(\mathbf{C}_{|j}) = \Big((\mathbf{AB})\mathbf{C}\Big)_{|j}, \quad j = 1:n.$$

□

Ejercicio 16(a) Usando la Definición 25 de producto matricial y recordando que $\big(\mathbf{A}+\mathbf{B}\big)\boldsymbol{c} = \mathbf{A}\boldsymbol{c} + \mathbf{B}\boldsymbol{c}$:

$$\Big((\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}\Big)_{|j} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{C}_{|j}) = \mathbf{A}(\mathbf{C}_{|j}) + \mathbf{B}(\mathbf{C}_{|j}) = (\mathbf{AC})_{|j} + (\mathbf{BC})_{|j} = \Big(\mathbf{AC}+\mathbf{BC}\Big)_{|j}, \quad j = 1:n.$$

□

Ejercicio 16(b) Usando la Definición 25 de producto matricial y la propiedad de linealidad: $\mathbf{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \mathbf{A}\boldsymbol{u} + \mathbf{A}\boldsymbol{v}$:

$$\Big(\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})\Big)_{|j} = \mathbf{A}\Big((\mathbf{B}+\mathbf{C})_{|j}\Big) = \mathbf{A}\Big((\mathbf{B}_{|j})+(\mathbf{C}_{|j})\Big) = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})+\mathbf{A}(\mathbf{C}_{|j}) = (\mathbf{AB})_{|j}+(\mathbf{AC})_{|j} = \Big(\mathbf{AB}+\mathbf{AC}\Big)_{|j}, \quad j = 1:n.$$

□

Ejercicio 16(c)

$$\Big(\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})\Big)_{|j} = \mathbf{A}\Big((\lambda\mathbf{B})_{|j}\Big) = \mathbf{A}\Big(\lambda(\mathbf{B}_{|j})\Big) \begin{cases} = (\lambda\mathbf{A})(\mathbf{B}_{|j}) = \Big((\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}\Big)_{|j} \\ \\ = \lambda\Big(\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})\Big) = \lambda\Big((\mathbf{AB})_{|j}\Big) = \Big(\lambda(\mathbf{AB})\Big)_{|j} \end{cases}, \quad j = 1:n.$$

□

Ejercicio 16(d) $(\mathbf{IA})_{|j} = \mathbf{I}(\mathbf{A}_{|j}) = \mathbf{A}_{|j}, \quad j = 1:n.$

□

Ejercicio 16(e) $(\mathbf{AI})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{|j}) = \mathbf{A}_{|j}, \quad j = 1:n.$

□

Ejercicio 17. $((\mathbf{AB})^{\intercal})_{|j} = {}_{j|}(\mathbf{AB}) = ({}_{j|}\mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{B}^{\intercal})({}_{j|}\mathbf{A}) = (\mathbf{B}^{\intercal})\Big((\mathbf{A}^{\intercal})_{|j}\Big) = \Big((\mathbf{B}^{\intercal})(\mathbf{A}^{\intercal})\Big)_{|j}.$

□

(L-3) Problema 1. $\mathbf{EF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{FE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ ac+b & c & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{E}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2b & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

□

(L-3) Problema 2(a) Verdadero. Si $\mathbf{B}_{|1} = \mathbf{B}_{|3}$ entonces $\big(\mathbf{AB}\big)_{|1} = \mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|1}\big) = \mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|3}\big) = \big(\mathbf{AB}\big)_{|3}.$

□

(L-3) Problema 2(b) Falso. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$

□

(L-3) Problema 2(c) Verdadero. Si ${}_{1|}\mathbf{A} = {}_{3|}\mathbf{A}$ entonces ${}_{1|}\big(\mathbf{AB}\big) = \big({}_{1|}\mathbf{A}\big)\mathbf{B} = \big({}_{3|}\mathbf{A}\big)\mathbf{B} = {}_{3|}\big(\mathbf{AB}\big).$

□

(L-3) Problema 2(d) Falso. $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{ABAB}$ y $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 = \mathbf{AABB}$. Por ejemplo si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;
entonces $(\mathbf{AB})^2 = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 8 \\ 12 & 20 & 12 \\ 24 & 36 & 24 \end{bmatrix} \neq \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 12 & 20 & 12 \\ 36 & 54 & 36 \end{bmatrix}.$

$\square$

(L-3) Problema 3(a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 54$.

En el tema sobre ortogonalidad veremos que la operación $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ calcula el cuadrado de la longitud del vector $\boldsymbol{a}$. Por tanto la longitud del vector $\boldsymbol{a}$ es $\sqrt{54} \simeq 7.35$

$\square$

(L-3) Problema 3(b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

En el tema sobre ortogonalidad veremos que cuando $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ se dice que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son ortogonales (perpendiculares) entre si.

$\square$

(L-3) Problema 3(c) $[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{b}]^\intercal = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -6 & -10 & -2 \\ 21 & 35 & 7 \end{bmatrix}$

$\square$

(L-3) Problema 4.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

(L-3) Problema 5. Por ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \\ 28 & 10 & 2 \end{bmatrix}.$$

Es triangular inferior debido a que la primera fila de $\mathbf{A}$ es de la forma ${}_{1|}\mathbf{A} = (a_{11}, 0, 0)$ y la primera fila de $\mathbf{B}$ es de la forma ${}_{1|}\mathbf{B} = (b_{11}, 0, 0)$, así que la primera fila de $\mathbf{AB}$ es

$$\left({}_{1|}\mathbf{A}\right)\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & 0 \end{pmatrix} \mathbf{B} = a_{11} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \end{pmatrix} \mathbf{B} = a_{11}\left({}_{1|}\mathbf{B}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}, & 0, & 0 \end{pmatrix};$$

y la tercera columna de $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{33} \end{pmatrix}$ y la tercera columna de $\mathbf{B}$ es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{33} \end{pmatrix}$; y por tanto la tercera columna de $\mathbf{AB}$ es

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{B}_{|3}\right) = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} b_{33} = \left(\mathbf{A}_{|3}\right) b_{33} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{33}b_{33} \end{pmatrix}.$$

$\square$

(L-3) Problema 6(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\square$

(L-3) Problema 6(b) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$\square$

(L-3) Problema 6(c) $\begin{bmatrix} 14 & -1 \\ 8 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\square$

(L-3) Problema 6(d) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$

$\square$

(L-3) Problema 6(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -10 \end{bmatrix}$

$\square$

(L-3) Problema 6(f) $\begin{bmatrix} -2 & 27 & 15 \\ -2 & 15 & 9 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

$\square$

(L-3) Problema 6(g) $\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$\square$

(L-3) Problema 6(h) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

□

(L-3) Problema 6(i) $\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 25 & -9 \\ 25 & -11 \end{bmatrix}$

□

Ejercicio 18(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

□

Ejercicio 18(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

□

Ejercicio 18(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

□

Ejercicio 18(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

□

Ejercicio 19. a) $\underset{[(-7)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$ transforma $\mathsf{A}_{|3}$, restándole siete veces $\mathsf{A}_{|1}$, es decir: $\left(\mathsf{A}_{\underset{[(-7)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|3} = -7\mathsf{A}_{|1} + \mathsf{A}_{|3}$.

b) $\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}$ transforma la cuarta columna de A, sumándole la primera columna: $\left(\mathsf{A}_{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|4} = \mathsf{A}_{|1} + \mathsf{A}_{|4}$.

c) $\underset{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}$ transforma la primera columna de A, sumándole tres veces la segunda: $\left(\mathsf{A}_{\underset{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|1} = 3\mathsf{A}_{|2} + \mathsf{A}_{|1}$.

d) $\underset{[(-10)\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$ transforma la tercera columna de A, multiplicándola por -10, es decir: $\left(\mathsf{A}_{\underset{[(-10)\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)_{|3} = -10\mathsf{A}_{|3}$.

□

Ejercicio 20(a) $\mathsf{A}_{\underset{[(3)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathsf{A}\left(\mathsf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$

□

Ejercicio 20(b) $\mathsf{A}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathsf{A}\left(\mathsf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$

□

Ejercicio 21. Sea $\mathsf{E} = \mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$. Por una parte,

$$(\lambda\mathsf{A})_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = (\lambda\mathsf{A})\mathsf{E} = \lambda(\mathsf{A}\mathsf{E}) = \lambda(\mathsf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}),$$

y por otra

$$(\mathsf{A}+\mathsf{B})_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = (\mathsf{A}+\mathsf{B})\mathsf{E} = \mathsf{A}\mathsf{E} + \mathsf{B}\mathsf{E} = \mathsf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} + \mathsf{B}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}.$$

□

Ejercicio 22(a) Una posible sucesión de transformaciones elementales por columnas es:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\textit{Tipo I}]{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\textit{Tipo I}]{\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\textit{Tipo I}]{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\textit{Tipo II}]{\underset{[(-1)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

es decir, $\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\mathbf{I}_{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}$.

$\square$

Ejercicio 22(b) Hay muchas combinaciones posibles, por ejemplo: $\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(1)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}$.

$\square$

(L-4) Problema 1(a)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&4&-2\\1&6&2\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&0&-2\\1&2&2\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&4\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&1&-2\end{bmatrix}=\mathbf{L}$$

por tanto

$$\mathbf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\begin{bmatrix}1&-4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix};\quad\mathbf{I}_{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix};\quad\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\square$

(L-4) Problema 1(b)

$$\mathbf{E}=\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)=\begin{bmatrix}1&-4&10\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix};\qquad\mathbf{AE}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&1&-2\end{bmatrix}=\mathbf{L}.$$

$\square$

(L-4) Problema 2. Restando 2 veces la primera columna a la segunda y cuatro a la última, y después sumando dos veces la segunda a la tercera

$$\mathbf{A}\;=\;\begin{bmatrix}1&2&4\\-1&-3&-2\\0&1&c\end{bmatrix}\xrightarrow{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&0&4\\-1&-1&-2\\0&1&c\end{bmatrix}\xrightarrow{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&-1&2\\0&1&c\end{bmatrix}\xrightarrow{\underset{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&-1&0\\0&1&c+2\end{bmatrix}\;=\;\mathbf{L}$$

Habrá sólo dos pivotes si la última columna de $\mathbf{L}$ estuviera compuesta únicamente por ceros, es decir si $c=-2$.

$\square$

(L-4) Problema 3(a)

$$\mathbf{E}=\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$$

$\square$

(L-4) Problema 3(b)

$$\mathbf{N}=\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$$

La razón por la que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{N}$ son iguales es que las operaciones que realizan son equivalentes: en el primer caso restamos de la segunda columna la primera, y luego colocamos el resultado en la columna de la derecha. En el segundo caso movemos la segunda columna a la derecha, y ahí realizamos la resta.

$\square$

(L-4) Problema 4.

$$\begin{bmatrix}2&2&0\\1&4&9\\1&3&9\end{bmatrix}\xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}2&0&0\\1&3&9\\1&2&9\end{bmatrix}\xrightarrow{\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}2&0&0\\1&3&0\\1&2&3\end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\qquad\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}][(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} = \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix} = \mathsf{E}.$$

□

(L-4) Problema 5.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo I}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo I}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo I}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo II}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

□

(L-4) Problema 6(a)

$$\mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} = \begin{bmatrix}1&-5&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

□

(L-4) Problema 6(b)

$$\mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-7\\0&0&1\end{bmatrix}$$

□

(L-4) Problema 6(c)

$$\mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}} = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}; \qquad \mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

La matriz que realiza todos los cambios a la vez será

$$\mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\quad\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}][\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} = \mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\circlearrowleft]}}$$

El producto de matrices intercambio es siempre una matriz cuyas columnas son como las de la matriz identidad, pero en general reordenadas en una disposición distinta; a dichas matrices la llamamos *matrices permutación* y las denotamos con: $\mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\circlearrowleft]}}$.

□

(L-4) Problema 7(a)

$$\mathsf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\qquad\boldsymbol{\tau}\\ [(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}][(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} = \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-5&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-7\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-5&35\\0&1&-7\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-5&35\end{bmatrix}.$$

□

(L-4) Problema 7(b)

$$\mathsf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\qquad\boldsymbol{\tau}\\ [(-7)\mathbf{1}+\mathbf{2}][(-5)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} = \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-7\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-5&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-5&0\\0&1&-7\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-5&0\end{bmatrix}.$$

□

(L-4) Problema 7(c) Entonces la columna 3 no se ve afectada por la columna 1.

□

(L-4) Problema 8. Por una parte

$$\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\mathsf{M} = \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow {}_{1|}\mathsf{M} = \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix};$$

y por otra
$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{M} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow {}_{2|}\mathbf{M} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz es $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$.

□

(L-4) Problema 9. Si multiplicamos $\mathbf{A}\big(\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}\big)$ permutan las columnas de $\mathbf{A}$, pero si multiplicamos $\big({}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}\mathbf{I}\big)\mathbf{A}$ son sus filas las que permutan. Por ejemplo en

$$\big({}_{\underset{[1\rightleftharpoons 2]}{\tau}}\mathbf{I}\big)\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & b\\C & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C & d\\A & b\end{bmatrix}. \qquad \mathbf{A}\big(\mathbf{I}_{\underset{[1\rightleftharpoons 2]}{\tau}}\big) = \begin{bmatrix}A & b\\C & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b & A\\d & C\end{bmatrix}.$$

□

Ejercicio 23(a) Por una parte $\mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{I}$, y por otra $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{IB} = \mathbf{I}$.

□

Ejercicio 23(b) Basta aplicar iterativamente la proposición anterior:

$$(\mathbf{A}_1\cdots\mathbf{A}_k)^{-1} = (\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^{-1}\mathbf{A}_1^{-1} = (\mathbf{A}_3\cdots\mathbf{A}_k)^{-1}\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1} = \cdots = (\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{A}_k)^{-1}\mathbf{A}_{k-2}^{-1}\cdots\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1}\cdots\mathbf{A}_1^{-1}.$$

□

Ejercicio 23(c) Si $\mathbf{A}$ es invertible, entonces $\mathbf{AB}$ es invertible (Proposición 1.15.2 en la página 79).
Supongamos que $\mathbf{AB}$ es invertible. Entonces sabemos que existe $\mathbf{C}$ tal que

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{I}, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{I}.$$

De la primera igualdad tenemos que $\mathbf{A}$ es invertible por la derecha, pues

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{I}.$$

Solo nos falta comprobar que también es invertible por la izquierda, es decir, que $(\mathbf{BC})\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Para ello nos fijamos en la segunda igualdad, y multiplicando por $\mathbf{B}$ por la izquierda y por $\mathbf{B}^{-1}$ por la derecha (a ambos lados de la ecuación) tenemos

$$\mathbf{BC}(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{BIB}^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad (\mathbf{BC})\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

□

Ejercicio 23(d) Si $\mathbf{B}$ es invertible, entonces $\mathbf{AB}$ es invertible (Proposición 1.15.2 en la página 79).
Supongamos que $\mathbf{AB}$ es invertible. Entonces sabemos que existe $\mathbf{C}$ tal que

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{I}, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{I}.$$

De la segunda igualdad tenemos que $\mathbf{B}$ es invertible por la izquierda, pues

$$(\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

Solo nos falta comprobar que también es invertible por la derecha, es decir, que $\mathbf{B}(\mathbf{CA}) = \mathbf{I}$. Para ello nos fijamos en la primera igualdad y multiplicando por $\mathbf{A}^{-1}$ por la izquierda y por $\mathbf{A}$ por la derecha (a ambos lados de la ecuación) tenemos

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{CA} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{IA}, \qquad \Rightarrow \qquad (\mathbf{BC})\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

□

Ejercicio 23(e) Aplicando la pista tenemos por un lado: $\mathbf{A}^{\intercal}(\mathbf{A}^{-1})^{\intercal} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^{\intercal} = (\mathbf{I})^{\intercal} = \mathbf{I}$ y por el otro $(\mathbf{A}^{-1})^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal} = (\mathbf{AA}^{-1})^{\intercal} = (\mathbf{I})^{\intercal} = \mathbf{I}$. Es decir, $(\mathbf{A}^{-1})^{\intercal} = (\mathbf{A}^{\intercal})^{-1}$.

□

Ejercicio 23(f) Sea $\mathbf{A}$ de orden n una matriz cuya $i$ésima columna es nula.

$$\mathbf{A}_{|j} = \mathbf{0}$$

Si asumimos que existe $\mathbf{A}^{-1}$ llegamos a una contradicción. Para verlo multipliquemos la ecuación por $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_{|j}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{0}) \qquad \Rightarrow \qquad \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)_{|j} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{I}_{|j} = \mathbf{0}.$$

Pero sabemos que $\mathbf{I}_{|i}$ (la columna $i$ésima de $\mathbf{I}$) no es $\mathbf{0}$, así que hemos llegado a una contradicción. Por tanto $\mathbf{A}^{-1}$ no puede existir: así, $\mathbf{A}$ *es singular* (no tiene inversa) *si tiene alguna columna nula* .

Para las filas, basta repetir lo anterior con $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ pues, si ${}_{i|}\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)_{|i} = \mathbf{0}$, llegamos a la misma contradicción.

□

Ejercicio 24(a) Es consecuencia directa de que las matrices elementales son invertibles y de la Proposición 1.15.3

□

Ejercicio 24(b) Si para alguna columna $\mathbf{A}_{|j}$ existen números $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1},\ \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$\mathbf{A}_{|j} \;=\; \overbrace{\lambda_1\mathbf{A}_{|1} + \cdots + \ \lambda_{j-1}\mathbf{A}_{|j-1}}^{\text{índices de 1 a } (j-1)} \;+\; \overbrace{\lambda_{j+1}\mathbf{A}_{|j+1} \ + \cdots + \lambda_n\mathbf{A}_{|n}}^{\text{índices de } (j+1) \text{ a } n} \;=\; \sum_{\substack{1\leq p\leq n\\ p\neq j}} \lambda_p\mathbf{A}_{|p},$$

y consecuentemente, mediante $(n-1)$ transformaciones elementales $\underset{[(-\lambda_p)\boldsymbol{p}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}$ (con $p = 1 : n$ excepto $p \neq j$) es posible trasformar la columna $\mathbf{A}_{|j}$ en un vector de ceros, es decir, hay transformaciones elementales tales que $\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)_{|j} = \mathbf{0}$. Por consiguiente, la matriz $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ no es invertible. Y puesto que $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)$, donde $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ es invertible, entonces la matriz $\mathbf{A}$ tampoco es invertible (por la Proposición 1.15.4 en la página 79).

Para las filas, basta transponer $\mathbf{A}$ y repetir el argumento con las columnas de $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

□

Ejercicio 24(c) Sean k trasformaciones elementales $\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k$ tales que $\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \mathbf{K}$ es (pre)escalonada. Entonces, puesto que $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ es invertible, $\mathbf{A}$ es invertible si y solo si $\mathbf{K}$ es invertible (Proposición 1.15.4 en la página 79).

□

Ejercicio 25(a) Si $\mathbf{B}$ no es invertible, al menos la última columna de cualquiera de sus formas escalonadas es nula. Consecuentemente si $\mathbf{E}$ es invertible y tal que $\mathbf{BE}$ es escalonada, entonces la última columna de $\mathbf{ABE}$ es nula. Y por tanto $\mathbf{ABE}$ no es invertible, pero como $\mathbf{E}$ es invertible, $\mathbf{AB}$ no puede ser invertible.

□

Ejercicio 25(b) Como $\mathbf{A}$ no es invertible su transpuesta tampoco lo es. Por tanto $\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ no es invertible (por prop. anterior). Pero como $\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = (\mathbf{AB})^{\mathsf{T}}$ no es invertible, entonces su transpuesta $\mathbf{AB}$ tampoco es invertible.

□

Ejercicio 25(c) Como $\mathbf{I}$ es invertible, por la primera proposición de más arriba $\mathbf{B}$ tiene que ser invertible, y por la segunda, $\mathbf{A}$ tiene que ser invertible, es decir, existe $\mathbf{A}^{-1}$. Multiplicando ambos lados por $\mathbf{A}^{-1}$ obtenemos el resultado deseado:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

□

Ejercicio 26. Una permutación $\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}$ es el producto de k matrices intercambio, $\mathbf{I}_{\underset{[\cdot\rightleftharpoons\cdot]}{\boldsymbol{\tau}}}$, es decir, una sucesión de k intercambios entre las columnas de la matriz identidad, $\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}} = \Big(\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{h}\rightleftharpoons\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{j}\rightleftharpoons\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)\cdots\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{p}\rightleftharpoons\boldsymbol{q}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)$, por lo que su transpuesta es $\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)^{\mathsf{T}} = \Big({}_{\underset{[\boldsymbol{p}\rightleftharpoons\boldsymbol{q}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\Big)\cdots\Big({}_{\underset{[\boldsymbol{j}\rightleftharpoons\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\Big)\Big({}_{\underset{[\boldsymbol{h}\rightleftharpoons\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\Big)$; donde cada matriz intercambio es simétrica, $\Big({}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\Big) = \Big(\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)$ y su cuadrado es la matriz identidad (si se intercambian las mismas columnas dos veces, se vuelve al punto de partida), $\Big({}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big) = \mathbf{I}$. Así

$$\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)^{\mathsf{T}}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big) = \Big({}_{\underset{[\boldsymbol{p}\rightleftharpoons\boldsymbol{q}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\Big)\cdots\overbrace{\Big({}_{\underset{[\boldsymbol{j}\rightleftharpoons\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\Big)\underbrace{\Big({}_{\underset{[\boldsymbol{h}\rightleftharpoons\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{h}\rightleftharpoons\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)}_{\mathbf{I}}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{j}\rightleftharpoons\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)}^{\mathbf{I}}\cdots\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{p}\rightleftharpoons\boldsymbol{q}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big) = \mathbf{I}.$$

□

(L-5) Problema 1(a)

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{A_1}\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline 1&0&0\\-1&1&-1\\0&0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathsf{I}\\ \hline (\mathsf{A_1})^{-1}\end{array}\right]$$

Por tanto $(\mathsf{A_1})^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$

□

(L-5) Problema 1(b)

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{A_2}\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc}2&0&0\\-1&3&-1\\0&-2&2\\ \hline 1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(3)\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}2&0&0\\-1&3&0\\0&-2&4\\ \hline 1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc}2&0&0\\-1&6&0\\0&0&4\\ \hline 1&3&1\\0&6&2\\0&3&3\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(6)\mathbf{1}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc}12&0&0\\0&6&0\\0&0&4\\ \hline 9&3&1\\6&6&2\\3&3&3\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{1}{3})\mathbf{1}]\\ [(\frac{2}{3})\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\\ \hline 3&2&1\\2&4&2\\1&2&3\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{1}{4})\mathbf{1}]\\ [(\frac{1}{4})\mathbf{2}]\\ [(\frac{1}{4})\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{c}\mathsf{I}\\ \hline \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&2\\1&2&3\end{bmatrix}\end{array}\right]$$

Por tanto $(\mathsf{A_2})^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&2\\1&2&3\end{bmatrix}$

□

(L-5) Problema 1(c)

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{A_3}\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\ \hline 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline 0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathsf{I}\\ \hline (\mathsf{A_3})^{-1}\end{array}\right]$$

Por tanto $(\mathsf{A_3})^{-1} = \begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

□

(L-5) Problema 2(a)

$$\begin{aligned}\mathsf{AB} &= \mathsf{AC}\\ \mathsf{A}^{-1}\mathsf{AB} &= \mathsf{A}^{-1}\mathsf{AC}\\ \mathsf{IB} &= \mathsf{IC}\\ \mathsf{B} &= \mathsf{C}.\end{aligned}$$

□

(L-5) Problema 2(b)

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\5&5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\2&2\end{bmatrix}$$

□

(L-5) Problema 3.

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(\frac{-b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc} a & 0 \\ c & d-\frac{bc}{a} \\ \hline 1 & -b/a \\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} a & 0 \\ c & \frac{ad-bc}{a} \\ \hline 1 & -b/a \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(\frac{a}{ad-bc})\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc} a & 0 \\ c & 1 \\ \hline 1 & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[{[(-c)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1+\frac{bc}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-ac}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-ac}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \xrightarrow[{[(\frac{1}{a})\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

es decir

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

La condición necesaria es que $ad \neq bc$.

□

(L-5) Problema 4.

$$\left[\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -4 & 1 \\ 6 & 18 & -5 \\ -1 & -3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{A}^{-1} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[{\substack{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(-6)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 10 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{B}^{-1} \end{array}\right]$$

□

(L-5) Problema 5(a)

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

(L-5) Problema 5(b) Cuando restamos la primera y segunda columna de la tercera, obtenemos una columna de ceros (y por tanto sin pivote)

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

□

(L-5) Problema 6(a)

$$\begin{bmatrix}\mathsf{A_1}\\ \hline \mathsf{I}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\begin{subarray}{c}[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{4}]\\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]\end{subarray}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\\ \hline 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[\begin{subarray}{c}[(1/2)\mathbf{2}]\\ [(1/3)\mathbf{3}]\\ [(1/4)\mathbf{4}]\end{subarray}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\ \hline 0&0&0&1/4\\0&0&1/3&0\\0&1/2&0&0\\1&0&0&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathsf{I}\\ \hline (\mathsf{A_1})^{-1}\end{bmatrix}$$

□

(L-5) Problema 6(b)

$$\begin{bmatrix}\mathsf{A_2}\\ \hline \mathsf{I}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\-1/2&1&0&0\\0&-2/3&1&0\\0&0&-3/4&1\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\begin{subarray}{c}[(3/4)\mathbf{4}+\mathbf{3}]\\ [(2/3)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\ [(1/2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\end{subarray}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\ \hline 1&0&0&0\\1/2&1&0&0\\1/3&2/3&1&0\\1/4&1/2&3/4&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathsf{I}\\ \hline \mathsf{A_2}^{-1}\end{bmatrix}$$

□

(L-5) Problema 6(c) Basta repetir para cada bloque los pasos dados en el Ejercicio 3:

$$\left[\begin{array}{cccc}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\begin{subarray}{c}[(-b/a)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(\frac{a}{ad-bc})\mathbf{2}]\\ [(-c)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(\frac{1}{a})\mathbf{2}]\end{subarray}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\\ \hline \frac{d}{ad-bc}&\frac{-b}{ad-bc}&0&0\\ \frac{-c}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\begin{subarray}{c}[(-b/a)\mathbf{3}+\mathbf{4}]\\ [(\frac{a}{ad-bc})\mathbf{4}]\\ [(-c)\mathbf{4}+\mathbf{3}]\\ [(\frac{1}{a})\mathbf{4}]\end{subarray}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\ \hline \frac{d}{ad-bc}&\frac{-b}{ad-bc}&0&0\\ \frac{-c}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}&0&0\\0&0&\frac{d}{ad-bc}&\frac{-b}{ad-bc}\\0&0&\frac{-c}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathsf{I}\\ \hline (\mathsf{A_3})^{-1}\end{bmatrix}$$

□

(L-5) Problema 7.

$$\left[\begin{array}{ccc}a&b&b\\a&a&b\\a&a&a\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\begin{subarray}{c}[(\frac{-b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(\frac{-b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{3}]\end{subarray}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}a&0&0\\a&a-b&0\\a&a-b&a-b\\ \hline 1&\frac{-b}{a}&\frac{-b}{a}\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\begin{subarray}{c}[(\frac{1}{a})\mathbf{1}]\\ [(\frac{1}{a-b})\mathbf{2}]\\ [(\frac{1}{a-b})\mathbf{3}]\end{subarray}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\ \hline \frac{1}{a}&\frac{-b/a}{a-b}&\frac{-b/a}{a-b}\\0&\frac{1}{a-b}&0\\0&0&\frac{1}{a-b}\end{array}\right]\xrightarrow[\begin{subarray}{c}[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\end{subarray}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline \frac{1}{a-b}&0&\frac{-b/a}{a-b}\\ \frac{-1}{a-b}&\frac{1}{a-b}&0\\0&\frac{-1}{a-b}&\frac{1}{a-b}\end{array}\right]$$

Es decir $\quad \mathsf{A}^{-1}=\frac{1}{a-b}\begin{bmatrix}1&0&-b/a\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$

No hay inversa para los valores $a=b$, es decir cuando el denominador $(a-b)$ es cero (en tal caso todas las filas de la matriz original A son iguales, y sólo hay un pivote).

Tampoco hay inversa si $a=0$, pues el primer elemento de la tercera columna tampoco estaría determinado (en este caso habría una fila y una columna de ceros en la matriz original A).

□

(L-5) Problema 8. Puesto que E es elemental

$$\mathsf{E}^2=\begin{bmatrix}1&0\\12&1\end{bmatrix};\qquad \mathsf{E}^8=\begin{bmatrix}1&0\\48&1\end{bmatrix};\qquad \mathsf{E}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\-6&1\end{bmatrix};\qquad \mathsf{E}^n=\begin{bmatrix}1&0\\n\cdot 6&1\end{bmatrix}$$

$\square$

(L-5) Problema 9.

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Es la matriz traspuesta $\mathsf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}{}^{\mathsf{T}}$.

$\square$

(L-5) Problema 10(a) Sabemos que $\mathsf{A}\cdot\mathsf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\mathsf{I}$, por tanto $\mathsf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\mathsf{A}^{-1}$:

$$\mathsf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\begin{bmatrix}1&-4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-3\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\mathsf{A}^{-1}$$

$\square$

(L-5) Problema 10(b) Puesto que $\left(\mathsf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{-1}=\mathsf{A}$ entonces $\mathsf{A}=\mathsf{I}_{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(4)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}$.

$$\mathsf{I}_{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(4)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&3\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\mathsf{A}$$

$$\text{comprobación:}\quad\begin{bmatrix}1&-1&-3\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&3\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\square$

(L-5) Problema 11(a) Recuerde que ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathsf{I}$ es la transpuesta de $\mathsf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$.
Sabemos que $\mathsf{A}_{\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-4)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\mathsf{I}$, por tanto $\mathsf{A}^{-1}=\mathsf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-4)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}$:

$$\mathsf{I}_{\underset{\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-3)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\ [(-4)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}{\boldsymbol{\tau}}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\-3&0&1\end{bmatrix}=\mathsf{A}^{-1}$$

$\square$

(L-5) Problema 11(b) Puesto que $\left(\mathsf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-4)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{-1}=\mathsf{I}_{\underset{[(4)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(3)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$.

$$\mathsf{I}_{\underset{\substack{[(4)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(3)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}{\boldsymbol{\tau}}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&1\\3&0&1\end{bmatrix}=\mathsf{A}$$

$$\text{comprobación:}\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&1\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\-3&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\square$

(L-5) Problema 12(a) La primera es una matriz elemental, cuya inversa es

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-c\\0&0&1\end{bmatrix}$$

la segunda es una matriz permutación, por lo que su inversa es igual a su traspuesta.

$\square$

(L-5) Problema 12(b)

$$\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\a&b&c&d\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\left[\left(\frac{1}{d}\right)\mathbf{4}\right]]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\a&b&c&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\frac{1}{d}\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-c)\mathbf{4}+\mathbf{3}]\\[(-b)\mathbf{4}+\mathbf{2}]\\[(-a)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{-a}{d}&\frac{-b}{d}&\frac{-c}{d}&\frac{1}{d}\end{array}\right]$$

□

(L-5) Problema 13(a) Es cierto; por una parte

$$\mathbf{AB}=\mathbf{I}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}.$$

Y por otra

$$\mathbf{CA}=\mathbf{I}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{C}=\mathbf{A}^{-1}.$$

Por tanto $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son iguales.

□

(L-5) Problema 13(b) Es falso

$$(\mathbf{AB})^2=(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})=\mathbf{ABAB}$$

que en general es distinto de

$$\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2=\mathbf{AABB}.$$

Ejemplo:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix};\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}.\qquad\mathbf{ABAB}=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix};\quad\mathbf{AABB}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

□

(L-5) Problema 14(a) Busquemos el número de pivotes que aparecen tras la eliminación

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}0&1&0&2\\1&a&0&2a\\a&0&1&0\\1&0&a&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}0&1&0&0\\1&a&0&0\\a&0&1&0\\1&0&a&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\a&1&0&0\\0&a&1&0\\0&1&a&1\\\hline 0&1&0&0\\1&0&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\\hline\mathbf{E}\end{array}\right]$$

Esta matriz es de rango 4 sea cual sea el valor de a; por lo tanto es invertible.

□

(L-5) Problema 14(b)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\\hline\mathbf{E}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\\hline 0&1&0&0\\1&0&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{4}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline 0&1&0&0\\1&2&0&-2\\0&0&1&0\\0&-1&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\\hline\mathbf{A}^{-1}\end{array}\right]$$

□

(L-5) Problema 15.

$$\begin{bmatrix} 1&1&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&-2\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&-2\\ \hline 1&-1&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-2\\ \hline 1&-1&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(\frac{-1}{2})\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\ \hline 1&-1&0&1\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&0\\0&0&0&-1/2 \end{bmatrix} = \left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{A}^{-1}}\right]$$

□

(L-5) Problema 16.

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \begin{bmatrix} 1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1&0&0\\1&1&-1\\0&1&1\\ \hline 1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}} \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\-1&1&2\\ \hline 1&0&-1\\-1&1&1\\0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(\frac{1}{2})\mathbf{3}]}\\ {[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}} \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline 1/2&1/2&-1/2\\-1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&1/2 \end{bmatrix} = \left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{A}^{-1}}\right]$$

$$\left[\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{I}}\right] = \begin{bmatrix} 1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}} \begin{bmatrix} 1&0&0\\1&-3&3\\-2&3&-3\\ \hline 1&-1&2\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1&0&0\\1&-3&0\\-2&3&0\\ \hline 1&-1&1\\0&1&1\\0&0&1 \end{bmatrix} = \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right]$$

La matriz $\mathbf{B}$ es singular (no tiene inversa).

□

(L-5) Problema 17. Puesto que todas las potencias de la matriz $\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}$ son matrices permutación, y sólo hay un número finito de ellas; la sucesión de potencias $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)$, $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^2$, $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^3$, $\ldots$, $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^r$, $\ldots$ se debe repetir en algún punto. Así pues, para algún m y algún n debe ocurrir que, $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^m = \left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^n$. Y puesto que las matrices permutación tienes inversa, en particular existe $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{-n}$. Pre-multiplicando por dicha matriz obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^m &= \left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^n \\ \left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{-n}\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^m &= \left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{-n}\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^n \\ \left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{m-n} &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Es decir, la potencia $(m-n)$-ésima de $\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}$ es la matriz identidad.

□

(L-5) Problema 18. Supongamos que la primera columna es $\begin{pmatrix} a, & a, & a \end{pmatrix}$, la segunda es $\begin{pmatrix} b, & b, & b \end{pmatrix}$ y la tercera $\begin{pmatrix} c, & c, & c \end{pmatrix}$; entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a&b&c\\a&b&c\\a&b&c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} a\\a\\a \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b\\b\\b \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c\\c\\c \end{pmatrix} \\ &= ax_1 \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} + bx_2 \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} + cx_3 \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} = (ax_1 + bx_2 + cx_3) \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si aplicamos la eliminación gaussiana tenemos

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \xrightarrow[\left[\left(-\frac{b}{a}\right)\mathbf{1}+\mathbf{2}\right]]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ a & 0 & c \\ a & 0 & c \end{bmatrix} \xrightarrow[\left[\left(-\frac{c}{a}\right)\mathbf{1}+\mathbf{2}\right]]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

es decir sólo un pivote.

□

(L-6) Problema 1(a) Todos los puntos (vectores) del cuadrante positivo del plano $\mathbb{R}^2$, es decir $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. La suma de dos puntos permanece en el cuadrante positivo, pero el producto de cualquiera de ellos por un número negativo "se sale" fuera del cuadrante positivo. ¿Vale con cualquier cuadrante?

□

(L-6) Problema 1(b) Tomemos la unión de dos rectas que pasen por el origen, por ejemplo $\{(x, y) : x = y\}$ y $\{(x, y) : x = -y\}$. Este conjunto es cerrado bajo el producto por un escalar (si tomamos un punto en una de las rectas y lo multiplicamos por un escalar, el nuevo punto está en la recta). Sin embargo, si sumamos los puntos, cada uno perteneciente a una de las rectas, la suma no pertenece a ninguna de las dos rectas. Por ejemplo de $(1, 1)$ y $(1, -1)$, tenemos $(2, 0)$, que no pertenece a ninguna de las rectas. ¿Y si tomamos el primer y tercer cuadrantes juntos?

□

(L-6) Problema 2(a) No es subespacio. La suma de vectores $(1, 1) + (2, 4) = (3, 5)$ no pertenece al conjunto; por tanto este subconjunto no es cerrado para la suma.

□

(L-6) Problema 2(b) Es subespacio.

□

(L-6) Problema 2(c) Es subespacio.

□

(L-6) Problema 2(d) No es subespacio. No es cerrado bajo el producto por un escalar: considere $\frac{1}{2} \cdot (1, 1)$.

□

(L-6) Problema 2(e) No es subespacio. No es cerrado bajo la suma: considere $(1, 0) + (0, 1)$.

□

(L-6) Problema 2(f) Es subespacio.

□

(L-6) Problema 3. $\mathbb{R}^2$ contiene sólo los vectores con dos componentes; y $\mathbb{R}^3$ contiene sólo los vectores con tres componentes. Por tanto vectores con dos componentes no pertenecen a $\mathbb{R}^3$.

□

(L-6) Problema 4. Los vectores $(1, 0, -2)$ y $(0, 1, -4)$ pertenecen a P, pero su suma, $(1, 1, -6)$, no está en P, ya que $1 - 1 - (-6) = 6 \neq 3$.

□

(L-6) Problema 5. Supongamos que el conjunto de soluciones a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ constituye un sub-espacio vectorial. Entonces, para cualquier par de soluciones $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$, tendremos que su suma es solución $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{b}$ pero también $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \mathbf{A}\boldsymbol{x_1} + \mathbf{A}\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}$, por lo que $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}$ que contradice el supuesto de que $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$.

Concluimos por tanto que el conjunto de soluciones a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ NO constituye un sub-espacio vectorial (salvo cuando $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.

□

(L-6) Problema 6(a) Todos los múltiplos de $\mathbf{A}$ de la forma

$$c\mathbf{A}$$

forman un subespacio de matrices 2 por 2 que no contiene a $\mathbf{B}$.

También el conjunto de matrices de la forma:

$$\left\{\mathbf{M} \quad \text{tales que} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.\right\}$$

□

(L-6) Problema 6(b) Todos los múltiplos de $\mathbf{B}$ de la forma

$$c\mathbf{B}$$

forman un subespacio de matrices 2 por 2 que no contiene a $\mathbf{A}$.

También el conjunto de matrices de la forma:

$$\left\{ \mathbf{M} \quad \text{tales que} \quad \begin{bmatrix} 0 & f \\ g & h \end{bmatrix}, \quad f, g, h \in \mathbb{R}. \right\}$$

□

(L-6) Problema 6(c) No. Un subespacio debe ser cerrado para las combinaciones lineales de sus elementos, por tanto si contiene a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, entonces debe contener $\frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{3}\mathbf{B}$, pero dicha combinación es la matriz identidad. Por tanto, un subespacio que contenga a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, necesariamente contiene la matriz identidad $\underset{2\times 2}{\mathbf{I}}$.

□

(L-6) Problema 7(a) Es subespacio, puesto que cualquier combinación lineal

$$c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11}+db_{11} & ca_{12}+db_{12} & \dots & ca_{1m}+db_{1m} \\ ca_{12}+db_{12} & ca_{22}+db_{22} & \dots & ca_{2m}+db_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{1m}+db_{1m} & ca_{2m}+db_{2m} & \dots & ca_{mm}+db_{mm} \end{bmatrix}$$

es también una matriz simétrica.

□

(L-6) Problema 7(b) No es subespacio. No es cerrado bajo la suma: es fácil encontrar ejemplos de matrices no simétricas cuya suma es una matriz simétrica. Por ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

De hecho, siempre ocurre que la suma $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\intercal}$ es una matriz simétrica sea cual sea la matriz cuadrada $\mathbf{A}$.

□

(L-6) Problema 7(c) Es subespacio, puesto que cualquier combinación lineal

$$c\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1m} \\ a_{12} & 0 & \dots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & -b_{12} & \dots & -b_{1m} \\ b_{12} & 0 & \dots & -b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -ca_{12}-db_{12} & \dots & -ca_{1m}-db_{1m} \\ ca_{12}+db_{12} & 0 & \dots & -ca_{2m}-db_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{1m}+db_{1m} & ca_{2m}+db_{2m} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

es también una matriz anti-simétrica.

□

(L-6) Problema 8(a) Una recta. Un plano.

□

(L-6) Problema 8(b) Un punto. Una recta.

□

(L-6) Problema 8(c) Tenemos que comprobar que $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ y que $c\boldsymbol{x} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$.

Puesto que $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ pertenecen a $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, ambos pertenecen a $\mathcal{S}$ y ambos pertenecen a $\mathcal{T}$. Así pues,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathcal{S} &\quad \text{pues } \mathcal{S} \text{ es un subespacio y } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{S} \\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathcal{T} &\quad \text{pues } \mathcal{T} \text{ es un subespacio y } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

por tanto la suma pertenece a la intersección (pertenece simultáneamente a ambos subespacios). Por otra parte:. Además

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{x} \in \mathcal{S} &\quad \text{pues } \mathcal{S} \text{ es un subespacio y } \boldsymbol{x} \in \mathcal{S} \\ c\boldsymbol{x} \in \mathcal{T} &\quad \text{pues } \mathcal{T} \text{ es un subespacio y } \boldsymbol{x} \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

por tanto $c\boldsymbol{x}$ pertenece a la intersección (pertenece simultáneamente a ambos subespacios).

$\square$

(L-6) Problema 9(a) Si, puesto que cualquier combinación lineal de vectores con la primera componente nula, es un vector con la primera componente nula.

$\square$

(L-6) Problema 9(b) No. Sea $\boldsymbol{v}$ uno de esos vectores, el vector $2\boldsymbol{v}$ tiene la primera componente igual a 2; y por lo tanto no pertenece al citado plano. El vector nulo $\mathbf{0}$ tampoco pertenece.

$\square$

(L-6) Problema 9(c) No. Suponga los vectores $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$, pertenecen al primer y segundo planos respectivamente; pero la suma está fuera de la unión.

$\square$

(L-6) Problema 9(d) Si, la suma de dos vectores nulos es un vector nulo, y el vector nulo multiplicado por cuaquier número es el vector nulo

$\square$

(L-6) Problema 9(e) Si. Por construcción es espacio vectorial.

$\square$

(L-6) Problema 9(f) Si, puesto que cualquier combinación lineal de vectores con dicha característica, hereda la propiedad. Veámoslo:

Sea

$$\boldsymbol{v} = a\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_1 + cd_1 \\ ab_2 + cd_2 \\ ab_3 + cd_3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$(ab_3 + cd_3) - (ab_2 + cd_2) + 3(ab_1 + cd_1) = a(b_3 - b_2 + 3b_1) + c(d_3 - d_2 + 3d_1) = a \cdot 0 + c \cdot 0 = 0.$$

Otra forma de verlo es que es un plano que pasa por el origen (el punto $(0, 0, 0)$ cumple la condición).

$\square$

(L-6) Problema 10(a)

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) = (y_1 + x_1 + 1, y_2 + x_2 + 1) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2) = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$

2. $$\begin{aligned}\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (x_1, x_2) + (y_1 + z_1 + 1, y_2 + z_2 + 1) = (x_1 + y_1 + z_1 + 2, x_2 + y_2 + z_2 + 2) = \\ = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) + (z_1 + z_2) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}\end{aligned}$$

3. La regla no se rompe, aunque el nuevo vector $\mathbf{0}$ resulta ser: $\mathbf{0} = (-1, -1)$ en lugar del usual $(0, 0)$; ya que
$$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = (x_1, x_2) + (-1, -1) = (x_1 - 1 + 1, x_2 - 1 + 1) = (x_1, x_2) = \boldsymbol{x}.$$

4. Tampoco se rompe, aunque si $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ entonces $-\boldsymbol{x}$ tiene que ser $-\boldsymbol{x} = (-x_1 - 2, x_2 - 2)$ ya que
$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (x_1, x_2) + (-x_1 - 2, x_2 - 2) = (-1, -1) = \mathbf{0}.$$
recuérdese que en la regla 3 implica en este caso $\mathbf{0} = (-1, -1)$.

5. $1\boldsymbol{x} = 1(x_1, x_2) = (1x_1, 1x_2) = \boldsymbol{x}$

6. $(ab)\boldsymbol{x} = (ab) \cdot (x_1, x_2) = (abx_1, abx_2) = a(bx_1, bx_2) = a(b\boldsymbol{x})$.

7. La regla $a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$ **se rompe**... por ejemplo
$$2\Big[(1, 1) + (1, 1)\Big] = 2(3, 3) = (6, 6) \neq 2(1, 1) + 2(1, 1) = (2, 2) + (2, 2) = (5, 5).$$

8. La regla $(a+b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$ **también se rompe**… por ejemplo

$$[2+2]\cdot(1,1) = 4(1,1) = (4,4) \neq 2(1,1) + 2(1,1) = (2,2) + (2,2) = (5,5).$$

□

(L-6) Problema 10(b)

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = xy = yx = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$.
2. $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = x(yz) = (xy)z = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$.
3. Si $\mathbf{0} = 1$; entonces $\boldsymbol{x}+\mathbf{0} = x1 = x = \boldsymbol{x}$; por tanto $\mathbf{0} = 1$.
4. Si $-\boldsymbol{x} = 1/x$; entonces $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = x/x = 1 = \mathbf{0}$.
5. $1\boldsymbol{x} = x^1 = x = \boldsymbol{x}$.
6. $(ab)\boldsymbol{x} = x^{(ab)} = (x^b)^a = (b\boldsymbol{x})^a = a(b\boldsymbol{x})$.
7. $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (xy)^a = x^a \cdot y^a = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$.
8. $(a+b)\boldsymbol{x} = (x)^{a+b} = x^a \cdot x^b = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$.

□

(L-6) Problema 10(c)

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (x_1+y_2, x_2+y_1) \neq (y_1+x_2, y_2+x_1) = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$. No se cumple. Por ejemplo
$(-1,1)+(2,3) = (-1+3, 1+2) = (2,3) \neq (3,2) = (2+1, 3-1) = (2,3)+(-1,1)$
2. $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$. No se cumple. Por ejemplo
$(0,0)+\big[(-1,1)+(2,3)\big] = (0,0)+(2,3) = (3,2) \neq (4,1) = (1,-1)+(2,3) = \big[(0,0)+(-1,1)\big]+(2,3)$
3. $\boldsymbol{x}+\mathbf{0} = (x_1,x_2)+(0,0) = (x_1+0, x_2+0) = \boldsymbol{x}$;
4. Si $-\boldsymbol{x} = (-x_2, -x_1)$; entonces $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = (x_1,x_2)+(-x_2,-x_1) = (0,0) = \mathbf{0}$.
5. $1\boldsymbol{x} = 1(x_1,x_2) = \boldsymbol{x}$.
6. $(ab)\boldsymbol{x} = (abx_1, abx_2) = a(bx_1, bx_2) = a(b\boldsymbol{x})$.
7. $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a\big[(x_1+y_2, x_2+y_1)\big] = (ax_1, ax_2) + (ay_1, ay_2) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$.
8. No se cumple: $(a+b)\boldsymbol{x} = \big((a+b)x_1, (a+b)x_2\big) = (ax_1+bx_1, ax_2+bx_2) \neq (ax_1+bx_2, ax_2+bx_1) = (ax_1,ax_2) + (bx_1,bx_2) = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$.

□

Ejercicio 27. Si matriz L es de la forma $\mathsf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ *_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & *_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & *_r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$; ¿cómo debe ser $\boldsymbol{x}$ para que $\mathsf{L}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

Puesto que el primer pivote $*_1 \neq 0$, necesariamente la primera columna tiene que estar multiplicada por cero; pero entonces, como el segundo pivote $*_2 \neq 0$, necesariamente la segunda columna debe estar multiplicada por cero; pero entonces, como el tercer… y razonando sucesivamente, es evidente que $x_i = 0$ para $i = 1, \ldots, r$.

□

(L-7) Problema 1(a)

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -6 \\ -1 & 1 & -1 & 6 \\ \hline 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-6)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right]$$

Dos pivotes, por lo tanto rango $(\mathbf{A}) = 2$. El espacio nulo,

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \text{existe } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\},$$

es un plano en $\mathbb{R}^4$.

□

(L-7) Problema 1(b)

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 5 \\ 2 & -5 & -5 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dos pivotes, por lo tanto rango $(\mathbf{F}) = 2$. Es una recta en $\mathbb{R}^3$.

$$\text{El espacio nulo,} \quad \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \text{existe } c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

□

(L-7) Problema 1(c)

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 15 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Tres pivotes, por lo tanto rango $(\mathbf{G}) = 3$.

$$\text{El espacio nulo,} \quad \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{es un punto en } \mathbb{R}^3.$$

□

(L-7) Problema 1(d)

$$\left[\frac{\mathbf{H}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{rr} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 2 & -5 \\ -1 & 0 \\ \hline 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right]$$

Dos pivotes, por lo tanto rango $(\mathbf{H}) = 2$; no hay columnas nulas.

$$\text{El espacio nulo,} \quad \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{es un punto en } \mathbb{R}^2.$$

$\square$

(L-7) Problema 2(a)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ \hline 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(4)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\text{Por tanto } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \text{existe } c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{es una recta en } \mathbb{R}^3.$$

$\square$

(L-7) Problema 2(b) Todas las columnas de la matriz $\mathbf{F}$ son columnas pivote, por tanto la única solución a $\mathbf{F}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial, por tanto $\mathcal{N}\left(\mathbf{F}\right) = \{\mathbf{0}\}$. Un punto en $\mathbb{R}^2$.

$\square$

(L-7) Problema 2(c)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ \hline 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau \\ [(3)\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\text{Por tanto} \quad \mathcal{N}\left(\mathbf{G}\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \text{existe } c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{es una recta en } \mathbb{R}^3.$$

$\square$

(L-7) Problema 3.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\tau \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto el rango es 2. x_1 y x_2 son variables pivote.
Las soluciones especiales son

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así pues, La solución completa es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \text{existe } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b \\ -a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(L-7) Problema 4(a)

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right]$$

Rango 1. Variable pivote x_1. La solución completa es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{existe } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b-c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(L-7) Problema 4(b)

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right]$$

Rango 2. Variables pivote x_1 y x_2. La solución completa es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{existe } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(L-7) Problema 4(c)

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right]$$

Rango 1. Variable pivote x_1. La solución completa es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{existe } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(L-7) Problema 5(a) Puesto que $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{A}$ tiene 3 columnas.

$\square$

(L-7) Problema 5(b) Cualquier número mayor mayor o igual a uno.

$\square$

(L-7) Problema 5(c) Tres columnas y dos soluciones especiales (2 columnas libres) implican rango 1 (una columna pivote).

$\square$

(L-7) Problema 6(a)

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\ \hline 1&-1&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\ \hline 1&-1&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathsf{R}\\ \hline \mathsf{E}\end{array}\right]$$

$\square$

(L-7) Problema 6(b)

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{B}\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}1&2&1\\2&2&2\\1&0&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-2&0\\1&-2&0\\ \hline 1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-2&0\\-1&-2&0\\ \hline -1&-2&-1\\1&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\-1&1&0\\ \hline -1&1&-1\\1&-1/2&0\\0&-0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathsf{R}\\ \hline \mathsf{E}\end{array}\right]$$

$\square$

(L-7) Problema 6(c)

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{C}\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc}1&2&1&2&1\\2&1&2&1&2\\0&1&0&1&0\\ \hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{ccccc}1&0&0&0&0\\2&-3&0&-3&0\\0&1&0&1&0\\ \hline 1&-2&-1&-2&-1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccccc}1&0&0&0&0\\2&-3&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ \hline 1&-2&-1&0&-1\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1/3)\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccccc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\2/3&-1/3&0&0&0\\ \hline -1/3&2/3&-1&0&-1\\2/3&-1/3&0&-1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathsf{R}\\ \hline \mathsf{E}\end{array}\right]$$

$\square$

(L-7) Problema 6(d)

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{C}\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}1&2&3\\2&3&4\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-1&-2\\ \hline 1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&-2\\ \hline -2&-2&-3\\0&1&0\\1&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\ \hline -2&2&1\\0&-1&-2\\1&-0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathsf{R}\\ \hline \mathsf{E}\end{array}\right]$$

$\square$

(L-7) Problema 7(a) La matriz identidad.

$\square$

(L-7) Problema 7(b)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline 1&0&0\\-1&1&-1\\0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right].\text{ Por tanto } \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

□

(L-7) Problema 8(a) Puesto que $\mathbf{R}$ sólo tiene dos pivotes, sabemos que la tercera columna es combinación lineal de las dos primeras (es decir, es una columna "libre").

□

(L-7) Problema 8(b) Basta con mirar los pasos de eliminación para las dos primeras columnas

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&a\\1&1\\b&8\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\begin{bmatrix}1&0\\2&\color{blue}{a-4}\\1&-1\\b&8-2b\end{bmatrix}\xrightarrow[\color{blue}{a=4}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}\begin{bmatrix}1&0\\2&\color{blue}{0}\\0&-1\\\color{red}{8-b}&8-2b\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}]}}\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&1\\\color{red}{3}&2\end{bmatrix}$$

Y puesto que $8-b=3$, necesariamente $b=5$.

□

(L-7) Problema 8(c) Puesto que sólo hay una columna libre y $\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ entonces

$$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}))=1;\qquad \mathcal{N}(\mathbf{A})=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \text{existe } c\in\mathbb{R}\text{tal que } \boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Puesto que no hay columnas libres, $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}))=0$; es decir, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ sólo contiene al vector nulo $\mathbf{0}$.

□

(L-7) Problema 9(a) La matriz identidad $\mathbf{I}$.

□

(L-7) Problema 9(b)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\ \hline 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline 0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{A}^{-1}\end{array}\right]$$

□

(L-8) Problema 1(a) Verdadero

□

(L-8) Problema 1(b) Falso

□

(L-8) Problema 1(c) Verdadero

□

(L-8) Problema 1(d) Falso

□

(L-8) Problema 2.

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([[1,3,1,2],[2,6,4,8],[0,0,2,4]])
b = Vector([1,3,1])
SEL(A,b,1)
```

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

□

(L-8) Problema 3.

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([ [1,2,-1,-2,1], [1,2,0,0,3], [2,4,1,2,9] ])
b = Vector( [0,-1,-4] )
SEL(A,b,1)
```

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

□

(L-8) Problema 4. Para expresar la solución completa del sistema necesitamos una solución particular a la que sumar cualquier combinación de los vectores del espacio nulo (soluciones del sistema homogéneo).

Para obtener una solución particular podríamos aplicar la eliminación gaussiana pero en este caso una solución inmediata es asignar el valor uno a x_3 y x_4; y cero a las demás; es decir, sumar las columnas 3 y 4 de la matriz de coeficientes. Por tanto una solución particular inmediata es

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular el espacio nulo haremos primero la eliminación pero solo de izquierda a derecha, (así veremos cuál es la variable libre):

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Así pues, la solución completa al sistema es el conjunto de vectores

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(L-8) Problema 5(a)

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 & \text{-}b_1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & \text{-}b_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{2+4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & \text{-}b_1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \text{-}b_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(b_1)\mathbf{2+5}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2b_1 - b_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto la forma escalonada reducida por columnas es

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

(L-8) Problema 5(b) las variables x_1, x_3 y x_4 son libres.

$\square$

(L-8) Problema 5(c)

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

(L-8) Problema 5(d) El sistema es consistente cuando $b_2 = 2b_1$. En tal caso, se anula la última columna de la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{E} & \boldsymbol{x}_p \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right].$$

$\square$

(L-8) Problema 5(e) En tal caso ($b_2 = 2b_1$) una solución particular es

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que la solución completa es: cualquier vector $\boldsymbol{x}$ de la forma

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \begin{pmatrix} a \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b_1 - 3d \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(L-8) Problema 6.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \text{-}b_1 \\ 1 & 2 & \text{-}b_2 \\ 0 & 0 & \text{-}b_3 \\ 3 & 6 & \text{-}b_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1+2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \text{-}b_1 \\ 1 & 0 & \text{-}b_2 \\ 0 & 0 & \text{-}b_3 \\ 3 & 0 & \text{-}b_4 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(b_2)\mathbf{1+3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \text{-}b_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{-}b_3 \\ 3 & 0 & 3b_2\text{-}b_4 \\ \hline 1 & -2 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto la forma escalonada reducida es

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

y la variable x_2 es libre. La solución especial es $\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. El sistema es consistente cuando $b_1 = 0$, $b_3 = 0$ y $b_4 = 3b_2$. En tal caso la eliminación nos da

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{E} & \boldsymbol{x}_p \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right],$$

y por tanto una solución particular es $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Así pues, la solución general es: cualquier vector $\boldsymbol{x}$ que se pueda expresar como

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

□

(L-8) Problema 7.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & -\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & -b_2 \\ 2 & 3 & -b_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(b_2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2b_1 + 3b_2 - b_3 \\ \hline 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

por tanto la condición es $b_3 - 2b_1 - 3b_2 = 0$; es decir,

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; b_3 - 2b_1 - 3b_2 = 0 \right\}.$$

El rango de $\mathbf{A}$ es 2. Un posible vector $\boldsymbol{b}$ con la solución particular asociada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

El espacio nulo contiene únicamente al vector $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (no hay columnas libres).

□

(L-8) Problema 8. Debemos resolver el sistema

$$c \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 20 \\ 75 \\ 36 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 40 \\ 135 \\ 64 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 40 \\ 30 & 75 & 135 \\ 12 & 36 & 64 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ t \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 760 \\ 2595 \\ 1224 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix};$$

Es decir, 4 coches, 6 trenes y 15 aviones a la semana.

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([ [10, 20, 40], [30, 75, 135], [12, 36, 64] ])
b = Vector( [760, 2595, 1224] )
SEL(A,b,1)
```

□

(L-8) Problema 9(a)

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & -\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 10 & -14 \\ 3 & 1 & c & -20 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(6)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & c-12 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-4)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c-14 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{E} & \boldsymbol{x}_p \\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right]$$

Vamos a operar con la matriz ampliada $\left[\mathbf{A}| -\boldsymbol{b}\right]$, para que los cálculos nos sirvan para el apartado siguiente. Por tanto, $\mathbf{A}$ tendrá menos de 3 pivotes (y por tanto no será invertible) si $c = 14$.

□

(L-8) Problema 9(b) Cuando $c = 14$, las dos primeras variables x_1 y x_2 son pivote, y la tercera es libre. Puesto que solo hay una columna libre, sólo necesitamos una solución del sistema homogéneo para obtener una base del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Así pues

$$\text{Sol.} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

□

(L-8) Problema 9(c) Este sistema (con $c = 14$) tiene un espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ de dimensión uno (infinitas soluciones). Así pues, sus filas representan tres planos en $\mathbb{R}^3$ que se cortan en una sola recta. Visto por columnas, y puesto que sólo dos de ellas son pivote —y la tercera es libre— el sistema tiene infinitas soluciones, ya que hay infinitas combinaciones de las tres columnas que general el vector del lado derecho $\boldsymbol{b}$.

□

(L-8) Problema 10. Pongamos las dos primeras columnas en $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & a_{13} \\ 1 & 3 & a_{23} \\ 5 & 1 & a_{33}\end{bmatrix}$$

La tercera columna la podemos deducir a partir de la solución del sistema homogéneo ya que el enunciado nos dice que si tomamos una vez la primera columnas más otra vez la segunda y le restamos el doble de la tercera, el resultado es un vector de ceros, por tanto la tercera columna debe ser la mitad de lo que sumen las dos primeras (con el signo cambiado):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

□

(L-8) Problema 11(a) Para todo $\boldsymbol{b}$ el sistema siempre tiene solución (tres pivotes en $\mathbb{R}^3$).

□

(L-8) Problema 11(b) Tiene solución sólo si la tercera componente de $\boldsymbol{b}$ es nula, es decir si $b_3 = 0$.

□

(L-8) Problema 12.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & -b_1 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & -b_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -b_2 \\ \hline 1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_2 \\ \hline 7 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{5}] \\ [(b_2)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 7 & -2 & 0 & -3 & -3b_2+7b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & b_2-2b_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Puesto que el rango de $\mathbf{A}$ es dos, el sistema siempre tiene solución.

La solución completa es el conjunto de vectores $\boldsymbol{x}$ de la forma

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, a, b \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3b_2+7b_1 \\ 0 \\ 0 \\ b_2-2b_1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(L-8) Problema 13(a) $\mathbf{B}$ es de orden 3 por 4; por tanto los vectores de $\mathcal{N}(\mathbf{B})$ pertenecen a $\mathbb{R}^4$.

Por otra parte, puesto que la segunda matriz del producto (llamemosla $\mathbf{E}$) es de rango completo, sabemos que es producto de matrices elementales y por tanto invertible.

Si llamamos a la matriz del producto del enunciado $\mathbf{L}$, tenemos que

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{L}$$

Por tanto, las columnas nulas de $\mathbf{L}$ son combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{B}$, y las columnas de $\mathbf{E}^{-1}$ nos indican qué combinaciones son. Como $\mathbf{L}$ tiene dos pivotes, el rango de $\mathbf{B}$ es dos.

Para encontrar las soluciones del espacio nulo basta con invertir $\mathbf{E}$ y tomar sus dos últimas columnas (las que transforman las columnas de $\mathbf{B}$ en columnas de ceros. Así pues,

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{E}^{-1} \end{array}\right]$$

El espacio nulo es

$$\mathcal{N}(\mathbf{B}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, a, b \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = a \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(L-8) Problema 13(b) A la vista de la primera columna de las matrices que intervienen en el producto, sabemos que la primera columna de $\mathbf{B}$ es precisamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, una solución particular es

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Y dado que conocemos el espacio nulo de $\mathbf{B}$, la solución completa es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, a, b \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

□

(L-8) Problema 14(a)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & -b_1\\ 2 & 8 & 4 & -b_2\\ -1 & -4 & -2 & -b_3\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -b_1\\ 2 & 0 & 0 & -b_2\\ -1 & 0 & 0 & -b_3\\ \hline 1 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2b_1-b_2\\ -1 & 0 & -0 & -b_1-b_3\\ \hline 1 & -4 & -2 & b_1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La condición es que $\boldsymbol{b}$ sea combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$, y para ello en este caso debe ocurrir $b_2 = 2b_1$ y $b_3 = -b_1$. Nótese que en este caso todas las columnas son múltiplos de la primera (sólo hay un pivote); por tanto el conjunto de soluciones son los múltiplos del primer vector columna. Por tanto, el espacio columna es una recta en $\mathbb{R}^3$ □

(L-8) Problema 14(b)

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & -b_1\\ 2 & 9 & -b_2\\ -1 & -4 & -b_3\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\tau} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -b_1\\ 0 & 1 & -b_2\\ -1 & 0 & -b_3\\ \hline 9 & -4 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -b_1-b_3\\ \hline 9 & -4 & 9b_1-4b_2\\ -2 & 1 & b_2\\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La condición es que $\boldsymbol{b}$ sea combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$, y para ello en este caso debe ocurrir $b_1 = -b_3$. Nótese que en este caso la segunda columna no es un múltiplo de la primera (hay dos pivotes); el conjunto de soluciones son las combinaciones lineales de dos vectores que no apuntan en la misma dirección, por tanto es un plano en $\mathbb{R}^3$. □

(L-8) Problema 15. Puesto que las soluciones pertenecen a $\mathbb{R}^3$, la matriz $\mathbf{A}$ tiene dimensiones $n \times 3$. Los vectores del espacio nulo tienen una única componente distinta de cero, es decir, c_1 veces la segunda columna de $\mathbf{A}$ es el vector cero, por tanto, la segunda columna de $\mathbf{A}$ es una columna de ceros. Por el mismo motivo, la tercera columna también está compuesta por ceros. Por último, la solución particular resulta ser la primera fila de $\mathbf{A}$.

Resumiendo, supongamos un $\boldsymbol{b}$ genérico

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0\\ b_2 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ b_n & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

□

(L-8) Problema 16(a) El sistema a resolver es

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r\\ a\\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44\\ 24\\ 33 \end{pmatrix}, \quad \text{cuya solución es :} \quad v = 2;\; a = 9;\; r = -12.$$

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([ [1,6,1], [0,2,3], [1,5,0] ])
b = Vector( [44,24,33] )
SEL(A,b,1)
```

$\square$

(L-8) Problema 16(b) ¡Los botes de pintura roja tienen un precio negativo! (el tendero te da 12 euros por cada bote que te llevas)

$\square$

(L-8) Problema 16(c) La solución es generar nuevos vectores del lado "derecho" con el importe corregido. Un nuevo lado derecho con un importe corregido para Ana (sigue dando precios negativos), un lado derecho con cuatro euros más para Belén (que arroja resultados positivos para todos los precios). Y otro alterando la factura de Carlos (que también genera precios negativos). ¡Ojo! Se debe modificar un importe, y sólo uno cada vez.

$\square$

(L-8) Problema 16(d) Se pueden resolver los tres sistemas del apartado anterior de una sola vez siguiendo las instrucciones. Partimos de la matriz ampliada (y aprovechamos los pasos dados en el primer apartado)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&6&1&-48&-44&-44\\ 0&2&3&-24&-28&-24\\ 1&5&0&-33&-33&-37\\ \hline 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&-48&-44&-44\\ 0&1&0&-24&-28&-24\\ 0&0&1&-33&-33&-37\\ \hline -15&5&16&0&0&0\\ 3&-1&-3&0&0&0\\ -2&1&2&0&0&0\\ \hline 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(48)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(24)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(33)\mathbf{3}+\mathbf{4}]\\ [(44)\mathbf{1}+\mathbf{5}]\\ [(28)\mathbf{2}+\mathbf{5}]\\ [(33)\mathbf{3}+\mathbf{5}]\\ [(44)\mathbf{1}+\mathbf{6}]\\ [(24)\mathbf{2}+\mathbf{6}]\\ [(37)\mathbf{3}+\mathbf{6}]}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ \hline -15&5&16&-72&8&52\\ 3&-1&-3&21&5&-3\\ -2&1&2&-6&6&10\\ \hline 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

como se puede ver, sólo al alterar el importe de la factura de Belén (de 24 a 28 euros), se encuentran tres precios positivos

$$r = 8; \quad a = 5; \qquad v = 6$$

Moraleja: con el método de eliminación Gauss-Jordan se pueden resolver varios sistemas de ecuaciones a la vez; siempre y cuando compartan la misma matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

$\square$

(L-8) Problema 17(a) Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución, ello significa que existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que

$$x_1\mathbf{A}_{|1} + x_2\mathbf{A}_{|2} + \cdots + x_n\mathbf{A}_{|n} = \boldsymbol{b}$$

pero entonces, $\boldsymbol{b}$ es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$, y por lo tanto $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

$\square$

(L-8) Problema 17(b) Puesto que $\mathbf{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ y que $\mathbf{A}\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$ sumando ambas ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}\boldsymbol{x}_0 + \mathbf{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} + \mathbf{0} \\ &\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{b} && \text{sacando } \mathbf{A} \text{ como factor común.} \end{aligned}$$

Por tanto el vector $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}$ también es solución del sistema.

$\square$

(L-8) Problema 17(c) Dado el resultado del apartado anterior, basta con demostrar que si hay dependencia lineal entre las columnas de $\mathbf{A}$, el sistema homogéneo tiene soluciones distintas de la trivial ($\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$).

Si hay dependencia lineal entre las columnas significa que al menos una de ellas se puede expresar como combinación lineal de las demás. Supongamos sin pérdida de generalidad que es la primera; entonces

$$\mathbf{A}_{|1} = z_2\mathbf{A}_{|2} + z_3\mathbf{A}_{|3} + \cdots + z_m\mathbf{A}_{|m}$$

pasando la expresión de la derecha al lado izquierdo de la igualdad tenemos:

$$\mathbf{A}_{|1} - z_2\mathbf{A}_{|2} - z_3\mathbf{A}_{|3} - \cdots - z_m\mathbf{A}_{|m} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{|1} & \mathbf{A}_{|2} & \cdots & \mathbf{A}_{|m}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -z_2\\ \vdots\\ -z_m\end{pmatrix} = \mathbf{0};$$

por tanto el vector $\begin{pmatrix}1 & -z_2 & \cdots & -z_m\end{pmatrix}$ y cualquier múltiplo de este son solución al sistema de ecuaciones homogéneo (pertenecen a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$). Este resultado unido al anterior demuestran que el sistema tiene más de una solución (de hecho tiene infinitas, ya que hay infinitos vectores en el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$).

□

(L-8) Problema 18. Fíjese que la primera columna más tres veces la tercera da $\boldsymbol{b}$. Lleguemos a ese resultado aplicando el método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -6\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 1 & -3\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(6)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\ [(-3)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -1 & -4\\ -3 & 3 & 1 & 3\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -3 & -1 & 1 & 6\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -1 & 0\\ -3 & 3 & 1 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -3 & -1 & 1 & 3\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

□

(L-8) Problema 19(a)

$$\begin{cases} x = 2y\\ x + y = 39 \end{cases} \qquad \text{por tanto} \qquad \begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 39\end{pmatrix}$$

Aplicando el método de eliminación

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & -39\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -39\\ \hline 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(13)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ \hline 1 & 2 & 26\\ 0 & 1 & 13\\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto $x = 26$ e $y = 13$.

□

(L-8) Problema 19(b) Puesto que ambos puntos están en la recta, ambos verifican la ecuación, es decir, sustituyendo x e y:

$$\begin{cases} 5 = 2m + c\\ 7 = 3m + c \end{cases} \qquad \text{por tanto} \qquad \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}m\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 7\end{pmatrix}$$

Aplicando mediante eliminación

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -5\\ 3 & 1 & -7\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(5)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ \hline 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 5\\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ \hline 1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, $c = 1$ y $m = 2$.

□

(L-8) Problema 20. El sistema es

$$\begin{aligned} a + b + c &= 4\\ a + 2b + 4c &= 8\\ a + 3b + 9c &= 14 \end{aligned}$$

por eliminación gaussiana tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 4 & -8\\ 1 & 3 & 9 & -14\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & -4\\ 1 & 2 & 8 & -10\\ \hline 1 & -1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(4)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2 & -2\\ \hline 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0\\ \hline 1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right];$$

así $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$. Por tanto, la parábola es $y = 2 + x + x^2$.

□

(L-8) Problema 21. Asuma que $c = 0$, de manera que $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0+c\end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \text{-}\boldsymbol{b}\\ \hline \mathsf{I} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 0-c\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0-c\\ \hline 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1-c\\ \hline 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{L} & -\boldsymbol{c}\\ \hline \mathsf{E} & \boldsymbol{x}\\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]$$

no hay un tercer pivote en L que permita eliminar la tercera componente de $\boldsymbol{c}$. La solución es que $c = -1$, es decir, sustituir el 0 por un -1 en $\boldsymbol{b}$.

Entonces una solución posible es $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$; pero hay otras, por ejemplo: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

□

(L-8) Problema 22. Aplicando la sustitución hacia atrás (de la última ecuación hacia arriba)

$$\begin{aligned} w =& b_3\\ v =& b_2 - w = b_2 - b_3\\ u =& b_1 + v - w = b_1 + (b_2 - b_3) - b_3 = b_1 + b_2 - 2b_3 \end{aligned}$$

Por tanto b_3 veces la tercera columna, más $b_2 - b_3$ veces la segunda, más $b_1 + b_2 - 2b_3$ veces la primera es igual a $\boldsymbol{b}$.

Comprobación:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}b_1+b_2-2b_3\\ b_2-b_3\\ b_3\end{pmatrix} = (b_1{+}b_2{-}2b_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (b_2{-}b_3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(b_1+b_2-2b_3)-(b_2-b_3)+b3\\ (b_2-b_3)+b_3\\ b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

□

(L-8) Problema 23. Fijémonos en la matriz de coeficientes A

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}2 & 4\\ b & 8\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}2 & 0\\ b & 8-2b\end{bmatrix} = \mathsf{L}$$

Si b fuera 4, entonces $8 - 2b$ sería cero. En tal caso sólo hay un pivote, pues la segunda columna sería el doble de la primera. Así el sistema quedaría como

$$\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\g\end{pmatrix}$$

es decir

$$x\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\g\end{pmatrix}$$

Este sistema nos pide buscar una combinación lineal de las columnas de A que sea igual a $\begin{pmatrix}16\\g\end{pmatrix}$.

Pero como la segunda columna es el doble de la primera (están alineadas), el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A es una recta. Sólo si el vector del lado derecho está en dicha recta (sólo si el vector del lado derecho es un múltiplo de la primera columna) el sistema tendrá solución. Esto sólo ocurre cuando $g = 32$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Dos soluciones inmediatas son

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{ó} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 4. \end{cases}$$

Pero podemos encontrar infinidad de soluciones alternativas.

□

(L-8) Problema 24(a) Puesto que hay una única solución, las columnas de A deben ser linealmente independientes (rango 2). Además la solución nos dice que la segunda columna es igual al "lado derecho del sistema". Por tanto , cualquier matriz de la forma

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 2 \\ c & 3 \end{bmatrix}$$

donde los vectores $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sean linealmente independientes vale; por ejemplo

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

□

(L-8) Problema 24(b) No existe la matriz B: el lado derecho nos dice que tenemos dos ecuaciones; pero la solución $\boldsymbol{x}$ nos dice que hay tres incógnitas... en tal caso o no hay solución, o hay infinitas. Pero el enunciado dice que la solución es única y eso es imposible.

□

(L-8) Problema 25. El vector del lado derecho es de orden 2, es decir sólo, el sistema tiene sólo dos ecuaciones (A tiene dos filas). La solución $\boldsymbol{x}$ es de orden 2, por tanto, el sistema tiene sólo dos incógnitas (A tiene sólo dos columnas). La solución particular nos indica que la primera columna de A es $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Por otra parte, la solución al sistema homogéneo es un múltiplo de la segunda columna; es decir, la segunda columna es necesariamente un vector nulo. Por tanto

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(L-8) Problema 26. libre
no es
infinitas

□

(L-8) Problema 27(a) No siempre tiene solución; por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que el rango de la matriz de coeficientes A es uno, pero el rango de la matriz ampliada $[\mathsf{A}|\boldsymbol{b}]$ es dos.

□

(L-8) Problema 27(b) Puesto que el sistema tiene más variables que ecuaciones, cuando el sistema tiene solución, ésta nunca puede ser única.

□

(L-8) Problema 27(c) Que $\boldsymbol{b}$ sea combinación lineal de las columnas de A; es decir, que la matriz de coeficientes A, y la matriz ampliada $[\mathsf{A}|\boldsymbol{b}]$ tengan el mismo rango.

□

(L-8) Problema 27(d) Puesto que el $\boldsymbol{b}$ tiene tres componentes (pertenece a $\mathbb{R}^3$), la condición es que el rango de A sea tres.

□

(L-8) Problema 28(a) El rango es 4 (hay cuatro pivotes en la forma escalonada reducida de A).

□

(L-8) Problema 28(b)

$$\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^7 \;\middle|\; \exists\, a,b,c\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

(ecuación paramétrica)

□

(L-8) Problema 28(c) Si $a = x_2,\ b = x_4$ y $c = x_6$:

$$\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^7 \;\middle|\; \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_6\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2-2x_4+x_6\\x_2\\-x_4-x_6\\x_4\\0\\x_6\\0\end{pmatrix} \right\}$$

es decir, el subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^7$ que satisface el sistema $\begin{cases} x_1 = x_2-2x_4+x_6 \\ x_3 = -x_4-x_6 \\ x_5 = 0 \\ x_7 = 0 \end{cases}$, lo que nos permite expresar de nuevo el mismo conjunto con una ecuación cartesiana

$$\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^7 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1&-1&0&2&0&-1&0\\0&0&1&1&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \right\}$$

(ecuación cartesiana)

□

(L-8) Problema 28(d) No, puesto que $\mathcal{C}(\mathsf{A}) = \mathbb{R}^4$ entonces $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución para cualquier vector $\boldsymbol{b}$ en $\mathbb{R}^4$.

□

(L-8) Problema 28(e)

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\\0\end{pmatrix}$$

□

(L-8) Problema 28(f)

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^7 \;\middle|\; \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + a \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + c \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

□

(L-8) Problema 29(a) El espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ contiene infinitos vectores, es decir, su dimensión es mayor o igual a uno. Lo sabemos ya que el sistema puede tener infinitas soluciones (una particular mas cualquiera de las del espacio nulo).

□

(L-8) Problema 29(b) El espacio $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ no puede ser todo $\mathbb{R}^m$, pues en ese caso el sistema *siempre* tendría solución, contrariamente a lo que dice el enunciado.

□

(L-8) Problema 29(c) Puesto que el sistema puede no tener solución, no todas las filas son pivote (es posible encontrar ecuaciones (0=1)), es decir, que el rango r es menor que el número de filas m.

$$r < m$$

Por otra parte, cuando hay solución, hay infinitas; es decir, el espacio nulo contiene infinitos vectores, por tanto hay columnas libres, es decir, no todas las columnas son pivote.

$$r < n.$$

□

(L-8) Problema 29(d) No es posible. Si $\boldsymbol{x}_p$ es solución para el lado derecho $\boldsymbol{b}$, también lo es $\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n$ para todo vector $\boldsymbol{x}_n$ del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

□

(L-8) Problema 30(a)

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 9 & 3 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\tau \\ [(2)\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hemos encontrado dos soluciones especiales

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\0\end{pmatrix}; \boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\end{pmatrix};$$

El espacio nulo es el conjunto de vectores que son combinación lineal de $\boldsymbol{x}_a$ y de $\boldsymbol{x}_b$; es decir

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\text{los vectores } \boldsymbol{z} \text{ tales que } \boldsymbol{z} = c_a\boldsymbol{x}_a + c_b\boldsymbol{x}_b \text{ para cuales quiera números } c_a, c_b.\}$$

□

(L-8) Problema 30(b) Una solución particular inmediata es el vector

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

(la última columna multiplicada por -1). Así pues, la solución general es cualquier vector $\boldsymbol{x}$ que se pueda expresar como

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z},$$

donde $\boldsymbol{z}$ es un vector del espacio nulo descrito en el apartado anterior. De forma más explícita

$$\text{Conjunto de vectores: } \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(L-8) Problema 30(c) Cuando una matriz $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ tiene rango igual a m, la dimensión del espacio columna es m, es decir, $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^m$; y puesto que $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ el sistema siempre tiene solución, sea cual sea el vector $\underset{m\times 1}{\boldsymbol{b}}$.

El número de soluciones especiales (la dimensión del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$) es igual al número de columnas libres, es decir, igual a $n - m$ (nótese que sabemos que $n > m$ ya que el rango de matriz es m, si n fuera menor, el rango no podría ser m).

□

(L-8) Problema 31. Apliquemos el método de Gauss

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & c & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & c & -2 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}] \\ [(1/5)\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & c/5 & 1 & c/5-2 \\ \hline 1 & -2/5 & -1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

El sistema siempre tiene una única solución, sea cual sea el valor de c

□

(L-8) Problema 32(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & m & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -2m \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & m-4 & -3 \\ -1 & 1 & 5 & -2m \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(-m+4)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & m+1 & -2m \\ \hline 3 & -1 & m-6 & 0 \\ 2 & -1 & m-4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & m+1 & -2(m+1) \\ \hline 3 & -1 & m-6 & 0 \\ 2 & -1 & m-4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & m+1 & 0 \\ \hline 3 & -1 & m-6 & 2(m-6) \\ 2 & -1 & m-4 & 2(m-4)-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

□

(L-8) Problema 32(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -1 & -7 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Una solución particular es $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$, y las soluciones al sistema homogéneo son los múltiplos del vector $\boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix}-7\\-5\\1\end{pmatrix}$. Por tanto, la solución completa al sistema son todos los vectores que se pueden escribir como $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + a\boldsymbol{x}_n$ para cualquier número real a.

□

(L-8) Problema 32(c) El conjunto de puntos que son solución al sistema del apartado anterior es una recta en $\mathbb{R}^3$.

No es posible que el conjunto de soluciones sea un plano en ningún caso; para que fuera posible sería necesario que la matriz de coeficientes del sistema fuera de rango 1. Pero en este caso el rango es 2 para $m = -1$ o rango 3 cuando $m \neq -1$. En este último caso (rango 3), el conjunto de soluciones es un punto en $\mathbb{R}^3$.

□

(L-8) Problema 32(d) En este caso tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ \hline 3 & -1 & -5 & -10\\ 2 & -1 & -3 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto la solución en este caso es

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-10\\-7\\2\end{pmatrix}.$$

□

(L-8) Problema 33(a)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ \hline 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ \hline 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Falso. Puesto que las soluciones son los múltiplos de

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix};$$

el conjunto de soluciones es toda la recta que contiene al vector $\boldsymbol{x}_0$; es decir $c\boldsymbol{x}_0$ para todo c. Esta es la descripción de una recta, no de un plano.

□

(L-8) Problema 33(b) Verdadero. Véase el primer apartado.

□

(L-8) Problema 33(c) Falso. Véase el primer apartado.

□

(L-8) Problema 33(d) Verdadero. El conjunto de vectores $c\boldsymbol{x}_0$ para todo c es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\boldsymbol{x}_0$; y por tanto es un subespacio.

□

(L-8) Problema 33(e) Verdadero. Efectivamente, el conjunto de soluciones del sistema homogéneo es la definición de espacio nulo de $\mathbf{A}$.

□

(L-8) Problema 33(f) Falso. El espacio columna es el conjunto de combinaciones lineales de los vectores columna de $\mathbf{A}$, y no un conjunto de soluciones.

□

(L-8) Problema 34(f)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -b_1 \\ 4 & 1 & -b_2 \\ 2 & -1 & -b_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-4)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(b_2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -b_2-b_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & b_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 6b_1-b_2-b_3 \\ \hline 1 & 0 & b_1 \\ -4 & 1 & b_2-4b_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Cualquier vector en $\mathbb{R}^3$ que satisfaga $6b_1 - b_2 - b_3 = 0$.

□

(L-8) Problema 35(a)

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix( [ [0,3,3,0], [4,3,0,0], [0,0,2,2] ] )
b = Vector( [39, 44, 22] )
SEL(A,b,1)
```

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 & -39 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & -44 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -22 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 3 & -3 & 19/2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Puesto que el rango es tres (igual al número de filas) siempre hay solución al sistema; pero como hay columnas libres, el sistema tiene infinitas soluciones. (Nota: no es necesario llegar a la forma escalonada reducida, con llegar a la forma pre-escalonada $\mathbf{K}$, es suficiente para ver que hay tres pivotes y una columna libre. Con los pasos anteriores hemos obtenido una solución particular, pero tampoco esto es necesario para responder a la pregunta; bastaba trabajar con la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ y mirar su rango.). □

(L-8) Problema 35(b) En este caso el sistema se reduce a

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ i \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 44 \\ 22 \end{pmatrix}$$

donde en este caso i hace referencia al precio tanto de la entrada infantil como a la de tercera edad (que son iguales).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & -39 \\ 3 & 4 & 0 & -44 \\ 0 & 2 & 2 & -22 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(13)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -22 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(5)\mathbf{2}+\mathbf{4}] \\ [(6)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto los precios son 8 para adultos, 5 para infantiles (y tercera edad) y 6 la tarifa reducida.

□

(L-8) Problema 36(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & -7 & -7 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -2 & -6 & -6 \\ \hline 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{4}] \\ [(-3)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tanto la matriz de coeficientes, cómo la matriz ampliada tienen rango 2.

□

(L-8) Problema 36(b) Una solución particular es

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Solución al sistema homogéneo es el conjunto de combinaciones lineales de los vectores

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Así pues, la solución al sistema propuesto es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, a, b \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

□

(L-8) Problema 36(c) Es un **plano** paralelo al generado por las combinaciones lineales de $\boldsymbol{x}_a$ y $\boldsymbol{x}_b$ (que es la solución del sistema homogéneo) pero que pasa por el punto $\boldsymbol{x}_p = (-4, 0, -3, 0)^\intercal$ (que es uno de los infinitos vectores que resuelven el sistema completo).

□

(L-8) Problema 37(a) En este caso necesitamos que $\mathbf{A}$ tenga rango 3; por tanto, por eliminación gausiana tenemos que

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1-a & 2-a \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & -a & -a \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & -a & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y por tanto, si $a \neq 0$ el rango de la matriz es 3.

□

(L-8) Problema 37(b) Para aquellos que hacen a la matriz de rango 2; es decir. . . y visto lo visto. . . para $a = 0$.

□

(L-8) Problema 38(a)

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathsf{A} & -\boldsymbol{b}\\ \hline \mathsf{I} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&2&2&-2\\2&7&6&8&-7\\3&9&6&7&-7\\ \hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&1&2&4&-3\\3&0&0&1&-1\\ \hline 1&-3&-2&-2&2\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-4)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(3)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\\3&0&0&1&-1\\ \hline 1&-3&4&10&-7\\0&1&-2&-4&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{4}+\mathbf{5}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\\3&0&0&1&0\\ \hline 1&-3&4&10&3\\0&1&-2&-4&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\mathsf{L} & \mathbf{0}\\ \hline \mathsf{E} & \boldsymbol{x}_p\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right]$$

La solución es el subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, a\in\mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Dicho conjunto de soluciones es una recta, pero puesto que no pasa por el origen de coordenadas (no contiene a $\mathbf{0}$), no es espacio vectorial. Es decir, es una recta en la dirección del vector del espacio nulo $\boldsymbol{x}_a$, que pasa por el punto $\boldsymbol{x}_p$, pero no por el origen.

□

(L-8) Problema 38(b) Puesto que hay tres columnas pivote (tres columnas linealmente independientes), el espacio columna es todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

Si en lugar de un 7 hubiera un 6, en el segundo paso de eliminación generaríamos una fila de ceros, y por tanto habría sólo dos pivotes y $\mathcal{C}(\mathsf{A})$ sería tan sólo un plano dentro de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathsf{M} & -\boldsymbol{b}\\ \hline \mathsf{I} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&2&2&-2\\2&7&6&8&-7\\3&9&6&6&-7\\ \hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&1&2&4&-3\\3&0&0&0&-1\\ \hline 1&-3&-2&-2&2\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-4)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(3)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\\3&0&0&0&-1\\ \hline 1&-3&4&10&-7\\0&1&-2&-4&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

□

(L-8) Problema 38(c) La primera parte es sencilla, basta elegir como lado derecho $\boldsymbol{b}$ cualquiera de las columnas de M. La segunda parte también es fácil empleando lo que sabemos. Si mantenemos el vector derecho $\boldsymbol{b}$ del enunciado, el sistema no tiene solución.

□

(L-8) Problema 39.

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([[1,3,2,4,-3], [2,6,0,-1,-2], [0,0,6,2,-1], [1,3,-1,4,2]])
b = Vector([-7,0,12,-6])
SEL(A,b,1)
```

$$\text{Conjunto de vectores:}\ \left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5 \ \middle|\ \exists \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\-2\\2\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}$$

□

Ejercicio 28(a)

$$\mathsf{Z}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\mathsf{Z}_{|k}(b_k+c_k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((\mathsf{Z}_{|k})b_k \ + \ (\mathsf{Z}_{|k})c_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(\mathsf{Z}_{|k})b_k \ + \sum_{k=1}^{n}(\mathsf{Z}_{|k})c_k = \mathsf{Z}\boldsymbol{b}+\mathsf{Z}\boldsymbol{c}.$$

□

Ejercicio 28(b)

$$\mathsf{Z}(\lambda\boldsymbol{b}) = \sum_{k=1}^{n}(\mathsf{Z}_{|k})\lambda b_k = \lambda\sum_{k=1}^{n}(\mathsf{Z}_{|k})b_k = \lambda(\mathsf{Z}\boldsymbol{b}).$$

□

Ejercicio 29(a)

$$\mathsf{Z}(\mathbf{B}\boldsymbol{c}) = \mathsf{Z}\left(\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{B}_{|k})c_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\mathsf{Z}(\mathbf{B}_{|k})c_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((\mathsf{Z}\mathbf{B})_{|k}\right)c_k = \left[\mathsf{Z}(\mathbf{B}_{|1});\dots;\mathsf{Z}(\mathbf{B}_{|n})\right]\boldsymbol{c} = (\mathsf{Z}\mathbf{B})\boldsymbol{c}.$$

□

Ejercicio 29(b) Puesto que $\mathbf{C}_{|j}$ es un vector de $\mathbb{R}^q$, aplicando las definiciones de producto de sistema por matriz, y matriz por matriz junto con la proposición anterior, tenemos:

$$\left(\mathsf{Z}(\mathbf{BC})\right)_{|j} = \mathsf{Z}(\mathbf{BC})_{|j} = \mathsf{Z}\left(\mathbf{B}(\mathbf{C}_{|j})\right) \underset{(\text{Prop. } 2.5.3)}{=} \left(\mathsf{Z}\mathbf{B}\right)(\mathbf{C}_{|j}) = \left((\mathsf{Z}\mathbf{B})\mathbf{C}\right)_{|j}, \qquad \forall j=\{1,\dots,n\}.$$

□

Ejercicio 30. Por una parte, si z_i es combinación lineal del resto de vectores de Z, entonces

$$\begin{aligned}
\vec{z}_i &= a_1\vec{z}_1+\cdots+a_{i-1}\vec{z}_{i-1} \qquad\qquad + a_{i+1}\vec{z}_{i+1}+\cdots+a_n\vec{z}_n \qquad \Rightarrow\\
\vec{0} &= a_1\vec{z}_1+\cdots+a_{i-1}\vec{z}_{i-1} + (-1)\vec{z}_i + a_{i+1}\vec{z}_{i+1}+\cdots+a_n\vec{z}_n \qquad \Rightarrow\\
\vec{0} &= \mathsf{Z}\boldsymbol{a} \quad (\text{con } a_i=-1).
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $\vec{0}=\mathsf{Z}\boldsymbol{a}$, con $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, entonces existe un $i\in 1,\dots,n$ tal que $a_i\neq 0$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= a_1\vec{z}_1+\cdots+a_{i-1}\vec{z}_{i-1} + a_i\vec{z}_i + a_{i+1}\vec{z}_{i+1}+\cdots+a_n\vec{z}_n \qquad \Rightarrow\\
-a_i\vec{z}_i &= a_1\vec{z}_1+\cdots+a_{i-1}\vec{z}_{i-1} \qquad\qquad + a_{i+1}\vec{z}_{i+1}+\cdots+a_n\vec{z}_n \qquad \Rightarrow\\
\vec{z}_i &= \frac{-1}{a_i}\left(a_1\vec{z}_1+\cdots+a_{i-1}\vec{z}_{i-1} + a_{i+1}\vec{z}_{i+1}+\cdots+a_n\vec{z}_n\right).
\end{aligned}$$

□

(L-9) Problema 1.

$$\left[\begin{array}{cccc}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}
\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&-1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\\hline 1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}}
\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\\hline 1&-1&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]
\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}}
\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\\hline 1&-1&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

Por tanto solo hay tres variables pivote, es decir, no son linealmente independientes, de hecho, si sumamos la primera y tercera columnas, y restamos la segunda obtenemos la cuarta columna.

Por otra parte, ampliando la matriz $\mathbf{A}$ con (-) el vector del lado derecho $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, tenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

donde no es posible anular el vector del lado derecho, es decir el sistema no es resoluble. Por tanto al menos un vector de $\mathbb{R}^4$ no es combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$. Así pues, las columnas de $\mathbf{A}$ no generan el espacio $\mathbb{R}^4$.

□

(L-9) Problema 2(a) *podrían no generar* (si no hubiera 4 linealmente independientes).

□

(L-9) Problema 2(b) *no son* independientes (¡hay más de cuatro!).

□

(L-9) Problema 2(c) *podría no tener* solución (si $\boldsymbol{b}$ no es combinación de las columnas de $\mathbf{A}$).

□

(L-9) Problema 2(d) *No tiene* una única solución. Los dos únicos casos posibles son que no haya solución (si $\boldsymbol{b}$ no es combinación de las columnas de $\mathbf{A}$) o que tenga infinitas, ya que como mínimo hay dos columnas libres.

□

(L-9) Problema 3(a) La matriz $\mathbf{B}$ debe tener orden 3×2. Además, la solución completa contiene un único vector (solución única), así que es la solución particular, es decir el espacio nulo solo contiene el vector "cero". Por lo tanto, sabemos que el rango debe ser 2, es decir las dos columnas deben ser linealmente independientes. Una posibilidad es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

pero vale cualquier matriz de la forma

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ 4 & c \end{bmatrix}$$

siempre y cuando la segunda columna sea linealmente independiente de la primera.

□

(L-9) Problema 3(b) No existe tal matriz:

Por una parte, la matriz $\mathbf{B}$ debe ser de orden 2×3. y por lo tanto, al menos una de las columnas debe ser libre. Entonces la solución completa debe incluir una solución particular, más cualquier vector del espacio nulo; que como mínimo es un espacio vectorial de dimensión 1 (3-rango $(\mathbf{C})$).

Pero por otra parte, la solución completa del enunciado contiene un único vector (solución única), que es la solución particular, es decir, que según esto el espacio nulo solo contiene el vector "cero" (espacio vectorial de dimensión cero).

Ambas situaciones son incompatibles, por lo que las condiciones del enunciado son imposibles.

□

(L-9) Problema 4. Un sistema de vectores es linealmente independiente si $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$ si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ (no hay columnas libres).

Veamos el primer caso:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

tiene como única solución $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Por tanto son linealmente independientes.

Pero

$$\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&1&3\\0&0&1&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

tiene infinitas soluciones; por ejemplo $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}$. Por tanto $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2-4\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{x}_4=\mathbf{0}$, y este sistema de vectores es linealmente dependiente.

□

(L-9) Problema 5. Si $\mathsf{A}^{\intercal}=2\mathsf{A}$, entonces también $\mathsf{A}=2\mathsf{A}^{\intercal}=2(2\mathsf{A})=4\mathsf{A}$ por lo que necesariamente $\mathsf{A}=\mathbf{0}$; y, por supuesto, las filas de una matriz nula son dependientes.

□

(L-9) Problema 6(a) **No.** dos vectores no pueden generar todo $\mathbb{R}^3$.

□

(L-9) Problema 6(b) **Si.** Puesto que podemos encontrar tres pivotes, el sistema $\mathsf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ siempre tiene solución sea cual sea el vector $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&3\\0&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathsf{R}$$

□

(L-9) Problema 6(c) **No.** Solo dos de los vectores son linealmente independientes (dos pivotes), y no pueden generar todo $\mathbb{R}^3$.

□

(L-9) Problema 6(d) **Si.** Tres de los vectores son linealmente independientes (tres pivotes) por tanto generan $\mathbb{R}^3$.

□

(L-9) Problema 7(a) **Dependientes.** Buscamos encontrar si existe la combinación

$$a\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix}$$

Si generamos una matriz con los vectores en forma de columna, y la reducimos a la forma escalonada R, observamos que

$$\left[\begin{array}{cc|c}-1&2&-4\\2&1&-7\\3&-1&-3\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cc|c}-1&0&-4\\2&5&-7\\3&5&-3\\\hline 1&2&0\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{cc|c}-1&0&0\\2&5&-15\\3&5&-15\\\hline 1&2&-4\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{cc|c}-1&0&0\\2&5&0\\3&5&0\\\hline 1&2&2\\0&1&3\\\hline 0&0&1\end{array}\right]$$

por tanto $2(-1,2,3)\;+\;3(2,1,-1)\;=\;(4,7,3)$. ¡Tres vectores y solo dos pivotes!

□

(L-9) Problema 7(b) **Independientes.** Si generamos una matriz con los vectores en forma de columna, y la reducimos a la forma de escalonada reducida R, observamos que no tiene columnas libres.

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\\0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\mathsf{R}$$

□

(L-9) Problema 7(c) **Dependientes.** Si generamos una matriz con los vectores en forma de columna, y la reducimos a la forma de echelon $\mathbf{R}$, observamos que tiene una columna libre.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -8 \\ 2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(8)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 18 \\ \hline 1 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(18)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -28 \\ 0 & 1 & 18 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

por tanto $18(2,\,3) \;-\; 28(1,\,2) \;=\; (8,\,-2)$.

□

(L-9) Problema 7(d) **Dependientes.** Claramente el cuarto vector (polinomio) es suma de los tres primeros. Pero lo podemos resolver como en los casos anteriores: Para ello generamos vectores con los coeficientes de los polinomios. De esta manera, si generamos una matriz con los vectores en forma de columna, y la reducimos a la forma de echelon $\mathbf{R}$, observamos que tiene una columna libre.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(2)\mathbf{4}] \\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(\frac{1}{2})\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

por tanto el último vector es igual a la mitad de la suma del resto de vectores.

□

(L-9) Problema 8. Esto quiere decir que el espacio nulo es de dimensión cero, por tanto no hay columnas libres, es decir, todas las columnas son pivote. Como hay n columnas, hay n pivotes. Así pues, el rango es n, y las columnas son linealmente INDEPENDIENTES.

□

(L-9) Problema 9. Si las columnas fueran linealmente independientes entonces, mediante operaciones elementales en las columnas, no sería posible hacer una columna de ceros. Es decir, todas las columnas de cualquier forma (pre)escalonada deberían ser columnas pivote. Pero cada pivote se sitúa en una fila distinta, por tanto, si la matriz sólo tiene 4 filas, el máximo número de pivotes es 4, así que las 6 columnas no pueden ser todas columnas pivote.

□

(L-9) Problema 10(a) Since the nullspace is spanned by the given three vectors, we may simply take $\mathbf{B}$ to consist of the three vectors as columns, i.e.,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}$ need not be square.

□

(L-9) Problema 10(b) For example, we may simply add a zero column to $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Or, we could interchange two columns. Or we could multiply one of the columns by -1. For example:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Or we could replace one of the columns by a linear combination of that column with the other two columns (any invertible column operation). Or we could replace $\mathbf{B}$ by $-\mathbf{B}$ or $2\mathbf{B}$. There are many possible solutions. In any case, the solution shouldn't require any significant calculation!

□

(L-9) Problema 10(c) Since any solution $\boldsymbol{x}$ to the equation $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ is of the form $\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{n}$ for some vector $\boldsymbol{n}$ in the nullspace, the vector $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p$ must lie in the nullspace $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Thus, we want to look at:

$$\boldsymbol{x}_Z - \boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

To determine whether a vector $\boldsymbol{y}$ lies in the nullspace $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, we can just check whether it is in the column space of $\mathbf{B}$, i.e. check whether $\mathbf{B}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ has a solution. As we learned in class, we can check this just by doing elimination:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -a \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & -a-4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -a-4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

We can get a solution if and only if $a = -4$. So Zarkon is correct.

□

(L-9) Problema 11. $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^9$.

□

(L-9) Problema 12. Si a una matriz $\mathbf{A}$ se le "añade" una nueva columna extra $\boldsymbol{b}$, entonces el espacio columna se vuelve más grande, a no ser que el vector $\boldsymbol{b}$ ya esté en $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

Caso en que se hace más grande

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad [\mathbf{A}\ \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En este caso $\mathcal{C}([\mathbf{A}\ \boldsymbol{b}])$ es más grande que $\mathcal{C}(\mathbf{A})$; y el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución por NO pertenecer $\boldsymbol{b}$ al espacio columna de $\mathbf{A}$ (es decir, porque $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}(\mathbf{A})$). Nótese que en este caso ninguna combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$ puede ser igual a $\boldsymbol{b}$. Nótese que el rango de $\mathbf{A}$ es 1, pero el de la matriz ampliada $[\mathbf{A} \mid -\boldsymbol{b}]$ es 2, así que el método de Gauss visto en clase fallaría.

Caso en el que es igual de grande

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad [\mathbf{A}\ \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

En este caso $\mathcal{C}([\mathbf{A}\ \boldsymbol{b}]) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$; y el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución por pertenecer $\boldsymbol{b}$ al espacio columna de $\mathbf{A}$ (es decir, porque $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$).

□

(L-9) Problema 13. Puesto que todo vector $\boldsymbol{a}$ en $\mathcal{V}$, se puede expresar como $x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$; es decir como

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{V}\boldsymbol{x}, \qquad \text{donde} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix},$$

el espacio vectorial $\mathcal{V}$ resulta ser el espacio columna de la matriz $\mathbf{V}$, es decir $\mathcal{C}(\mathbf{V})$.

Por otra parte, sabemos que sumar combinaciones lineales de columnas a otras columnas no altera el espacio columna, $\mathcal{C}(\mathbf{V})$; y puesto que $\boldsymbol{v}_n$ es combinación lineal del resto de vectores, tenemos

$$\boldsymbol{v}_n = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{v}_{n-1}.$$

Sabiendo esto, podemos reducir la matriz $\mathbf{V}$ a una nueva matriz con la última columna compuesta por ceros (sin alterar el espacio columna) del siguiente modo:

$$\left[\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ \hline & \mathbf{I} & \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & 0 \\ \hline & & \mathbf{E} & & \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{E}}\right]$$

donde la última columna de $\mathbf{E}$ es $\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$. Pero $\mathcal{V} = \mathcal{C}(\mathbf{V}) = \mathcal{C}(\mathbf{W})$; donde el espacio columna de $\mathbf{W}$ está generado por las combinaciones lineales de las columnas no nulas de la matriz, por tanto está generado por los $n-1$ primeros vectores columna.

Si los vectores $\boldsymbol{v}_j$ pertenecen a $\mathbb{R}^m$ con $m < n$, el razonamiento es el mismo pero $\mathbf{W}$ tiene menos filas y si $m < n-1$ la matriz $\mathbf{W}$ tendrá más columnas de ceros al final.

Si los vectores $\boldsymbol{v}_j$ pertenecen a $\mathbb{R}^m$ con $m > n$, el razonamiento tampoco cambia, $\mathbf{W}$ tiene más filas, pero la última columna seguirá siendo nula.

$\square$

(L-9) Problema 14(a)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & -b \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -c \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 & -d \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(a)\mathbf{1}+\mathbf{6}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & a-b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-c \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 2a-d \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(b-a)\mathbf{3}+\mathbf{6}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}] \\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-c \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2b-d \\ \hline 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto las columnas 1 y 3 son linealmente independientes y una base es

$$\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right] \quad \text{ó también} \quad \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right]$$

$\square$

(L-9) Problema 14(b) Por ejemplo las tres soluciones especiales

$$\left[\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$\square$

(L-9) Problema 14(c) $c - a = 0$ y $d - 2b = 0$.

$\square$

(L-9) Problema 14(d)

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

.

□

(L-9) Problema 15(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La variable libre es y. La solución completa es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad = \quad \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

(L-9) Problema 15(b) Una base es

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad \text{y también} \quad \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

□

(L-9) Problema 16(a) **No.** El espacio P_3 tiene dimensión 4, y tan sólo hay tres vectores en este conjunto.

□

(L-9) Problema 16(b) **No.** De nuevo no hay vectores suficientes para generar un espacio de dimensión 4.

□

(L-9) Problema 16(c) **Si.** Estos cuatro vectores son linealmente independientes (cuatro pivotes).

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}] \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}] \\ [\mathbf{3}\rightleftharpoons\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathsf{R}$$

□

(L-9) Problema 16(d) **No.** El cuarto vector es la combinación de los tres primeros, por lo que no hay suficientes vectores linealmente independientes para generar un espacio de dimensión 4 (sólo tres pivotes)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(L-9) Problema 17(a) Si $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ son linealmente dependientes, entonces existe un número a tal que

$$\boldsymbol{u}_1 = a\boldsymbol{u}_2;$$

es decir, que componente a componente $u_{1i} = a \cdot u_{2i}$. Puesto que las terceras componentes son iguales, dicho número debería ser $a = 1$, pero entonces la primera componente de $\boldsymbol{u}_1$ también debería ser una vez la primera componente de $\boldsymbol{u}_2$. Puesto que no es así, el primer vector no es un múltiplo del segundo. Así pues no existe tal número a y, por tanto, estos vectores son linealmente *independientes*.

Otra forma de verlo es comprobar que el rango de la matriz $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}$ es dos.

□

(L-9) Problema 17(b) La respuesta es sí. Si escribiéramos los vectores en forma de columna, esta pregunta sería equivalente a preguntar si $\boldsymbol{v}$ (en forma de columna) pertenece al espacio columna de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

es decir, a preguntar si el sistema

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tiene solución. Puesto que 3 veces la primera columna menos la segunda da el resultado deseado, $\boldsymbol{v} = (2, 1, 2)$ pertenece al espacio generado por $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$.

Otra forma de verlo es comprobar que la matriz

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{v} \end{bmatrix}$$

también tiene rango 2, es decir, que al añadir el vector $\boldsymbol{v}$, el rango de la nueva matriz sigue siendo 2 (como el rango de la matriz $\mathbf{M}$ del primer apartado).

□

(L-9) Problema 17(c) Debemos encontrar un tercer vector linealmente independiente de $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$. Si escribimos de nuevo los vectores en columna, buscamos un vector $\boldsymbol{b}$ que no pertenezca al espacio columna de $\mathbf{A}$. Por tanto queremos un $\boldsymbol{b}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tenga solución.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -b_1 \\ 0 & -1 & -b_2 \\ 1 & 0 & -b_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-b_2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & b_1 - b_3 \\ \hline 1 & 0 & b1 \\ 0 & 1 & -b2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, si $b_1 \neq b_3$ el sistema no tiene solución, es decir, $\boldsymbol{b}$ no es combinación lineal de los otros dos, y por tanto tenemos tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes, es decir, una base de $\mathbb{R}^3$.

□

(L-9) Problema 18(a) Si. Dos vectores son dependientes si uno es un múltiplo del otro; pero en este caso no es así. Por tanto son linealmente independientes.

□

(L-9) Problema 18(b) No, los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_3$ y $\boldsymbol{v}_4$ no son linealmente independientes. Por ejemplo $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_4$.

□

(L-9) Problema 18(c) No, los vectores no son base de dicho sub-espacio.

Los vectores son linealmente independientes, pero no generan el plano descrito en el enunciado ya que $\boldsymbol{v}_3$ no está en dicho plano (no satisface la ecuación $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0$).

□

(L-9) Problema 18(d) Lo resolveremos por eliminación

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -q \\ 4 & 2 & 12 & -3 \\ 6 & 2 & 10 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(q)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 16 & 4q-3 \\ 6 & 2 & 16 & 6q-1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-4q+3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-8)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 4q+4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2q \\ 0 & 1 & -8 & -4q+3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Los cuatro vectores generan todo $\mathbb{R}^3$ si $q \neq -1$ (tres pivotes). Pero si $q = -1$, los cuatro vectores solo generan un subespacio de dimensión $r = 2$ (dos pivotes), es decir, generan un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

□

(L-9) Problema 19(a)

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\qquad \mathsf{A}=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

□

(L-9) Problema 19(b) Son el número de pivotes y el número de columnas libres respectivamente:

$$\dim(\mathcal{C}(\mathsf{A}))=1;\qquad \dim(\mathcal{N}(\mathsf{A}))=1.$$

□

Ejercicio 31. La matriz L es de la forma

$$\mathsf{L}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\ *_1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\ :&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\ :&*_2&\cdots&0&0&\cdots&0\\ :&:&&0&0&\cdots&0\\ :&:&\cdots&*_r&0&\cdots&0\\ :&:&\cdots&:&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

y puesto que el último pivote $*_r\neq 0$, necesariamente la última fila con pivote tiene que estar multiplicada por cero ($x_r=0$); pero entonces, como el penúltimo pivote $*_{r-1}\neq 0$, necesariamente la penúltima fila con pivote debe estar multiplicada por cero ($x_{r-1}=0$); pero entonces, como $*_{r-2}\neq 0$, necesariamente ...y razonando sucesivamente, es evidente que $x_i=0$ para $i=1,\ldots,r$.

Para ver que cada fila sin pivote es combinación lineal de las filas con pivote que la preceden, basta aplicar la eliminación sobre las filas de L para anular todas las filas sin pivote[4].

□

(L-10) Problema 1(a)

$$\left[\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{I}}\right]=\left[\begin{array}{cccc}0&1&4&0\\0&2&8&0\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-4)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}0&1&0&0\\0&2&0&0\\\hline 1&0&0&0\\0&1&-4&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\frac{\mathsf{L}}{\mathsf{E}}\right]$$

Observando su forma escalonada L podemos ver que sólo la segunda columna es pivote, por tanto:

$$\mathcal{C}(\mathsf{A})=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\exists\, c\in\mathbb{R}\text{ tal que }\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\};\quad \boxed{\dim\mathcal{C}(\mathsf{A})=1.\quad\text{Base de }\mathcal{C}(\mathsf{A})\text{: }\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right].}$$

Observando las columnas de E bajo las columnas nulas de L podemos ver que $\boxed{\dim\mathcal{N}(\mathsf{A})=3}$ y

$$\mathcal{N}(\mathsf{A})=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\exists\,\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3\text{ tal que }\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{a}\right\}.\quad \boxed{\text{Base de }\mathcal{N}(\mathsf{A})\text{: }\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\-4\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};\right].}$$

Observando su forma reducida L podemos ver que sólo la primera fila es pivote, por tanto: $\boxed{\dim\mathcal{C}\left(\mathsf{A}^{\intercal}\right)=1}$ y

$$\mathcal{C}(\mathsf{A}^{\intercal})=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\exists\, c\in\mathbb{R}\text{ tal que }\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}0,&1,&4,&0\end{pmatrix}\right\}.\quad\boxed{\text{Base de }\mathcal{C}\left(\mathsf{A}^{\intercal}\right)\text{: }\left[(0,\ 1,\ 4,\ 0)\right].}$$

Puesto que

$$\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\mathsf{L}=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

[4] aplicar la eliminación con las filas es equivalente a aplicar transformaciones elementales *"de izquierda a derecha"* sobre el sistema de vectores $\left[{}_{1|}\mathsf{L},\ldots,{}_{m|}\mathsf{L}\right]$.

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix} \right\}; \quad \boxed{\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = 1. \quad \text{Base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\text{: } \left[(-2,\ 1)\right]}$$

□

(L-10) Problema 1(b) Por una parte, $\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\intercal}) = 1 + 1 = 2 = m$.
Por la otra. $\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}^{\intercal}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = 1 + 3 = 4 = n$

□

(L-10) Problema 1(c)

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-4)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sólo la segunda columna es pivote, por tanto:

$$\mathcal{C}(\mathbf{U}) = \mathcal{C}(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\}; \quad \boxed{\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}) = 1. \quad \text{Base de } \mathcal{C}(\mathbf{A})\text{: } \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right].}$$

$\mathcal{N}(\mathbf{U})$ es idéntico a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$:

$$\mathcal{N}(\mathbf{U}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{a} \right\}. \quad \boxed{\text{Base de } \mathcal{N}(\mathbf{A})\text{: } \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\-4\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};\right].}$$

$\mathcal{C}\left(\mathbf{U}^{\intercal}\right)$ es idéntico a $\mathcal{C}(\mathbf{A}^{\intercal})$:

$$\mathcal{C}(\mathbf{U}^{\intercal}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}0 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix} \right\}. \quad \boxed{\text{Base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\text{: } \left[(0,\ 1,\ 4,\ 0)\right].}$$

Sólo hay una fila libre, la segunda; fijando la variable libre $x_2 = 1$ tenemos

$$\mathcal{N}(\mathbf{U}^{\intercal}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \right\}; \quad \boxed{\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = 1. \quad \text{Base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\text{: } \left[(0,\ 1)\right]}$$

□

(L-10) Problema 1(d) Por una parte, $\dim \mathcal{C}(\mathbf{U}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{U}^{\intercal}) = 1 + 1 = 2 = m$.
Por la otra. $\dim \mathcal{C}(\mathbf{U}^{\intercal}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{U}) = 1 + 3 = 4 = n$

□

(L-10) Problema 2. El espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ es el subconjunto de combinaciones lineales de las dos últimas columnas

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{a} \right\}$$

es decir todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ con la tercera componente igual a cero (subespacio de dimensión 2).

El espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ está compuesto por los múltiplos del vector

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

es decir todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ con la segunda y tercera componentes iguales a cero (subespacio de dimensión 1).

El espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ son todos los vectores de la forma

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es decir todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ con la primera componente igual a cero (subespacio de dimensión 2).

El espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ está compuesto por los múltiplos del vector

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists c\in\mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

es decir todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ con la primera y segunda componentes iguales a cero (subespacio de dimensión 1). $\square$

(L-10) Problema 3(a) Dimensión de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es 5. La dimensión del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es $9-5=4$; y la dimensión del espacio fila por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es $7-5=2$. Todas suman $16=m+n$.

$\square$

(L-10) Problema 3(b) $\mathcal{C}(\mathbf{A})=\mathbb{R}^3$; $\quad \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=\{\mathbf{0}\}$.

$\square$

(L-10) Problema 4. **No.** piense en dos matrices n por n invertibles cualesquiera; ambas tiene los mismos cuatro subespacios.

$\square$

(L-10) Problema 5. Puesto que $\mathbf{L}$ tiene dos pivotes, **los espacios fila y columna de ambas matrices tienen dimensión 2**. En ambas matrices sólo hay dos filas pivote, y sólo hay dos columnas pivote.

Debe notarse, no obstante, que los espacios columna de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{L}$ son exactamente el mismo, ya que las operaciones elementales entre columnas para pasar de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{L}$ no alteran el espacio columna; pero los espacios fila son distintos. De hecho, el espacio fila de $\mathbf{L}$ no puede contener vectores con la tercera y/o cuarta componente distintas de cero, y sin embargo, las algunas filas de $\mathbf{A}$ tienen la tercera o cuarta componente distintas de cero. Por tanto, las filas de $\mathbf{A}$ no pueden pertenecer a $\mathcal{C}\left(\mathbf{L}^\intercal\right)$.

$$\mathcal{C}(\mathbf{A})=\mathcal{C}(\mathbf{L})=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\text{existe } a,b\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad \boxed{\text{Base de } \mathcal{C}(\mathbf{A}) \text{ y } \mathcal{C}(\mathbf{L}):\ \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right].}$$

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\text{existe } a,b\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad \boxed{\text{Base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right):\ \left[\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right].}$$

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{L}^\intercal\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\text{existe } a,b\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad \boxed{\text{Base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{L}^\intercal\right):\ \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right].}$$

Hay dos columnas libres, así que la dimensión del espacio nulo de ambas matrices es 2.

$$\mathcal{N}(\mathbf{A})=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\text{existe } a,b\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad \boxed{\text{Base de } \mathcal{N}(\mathbf{A}):\ \left[\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right].}$$

$$\mathcal{N}(\mathbf{L})=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\text{existe } a,b\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad \boxed{\text{Base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right):\ \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right].}$$

Tan sólo hay una fila libre, así pues, la dimensión del espacio nulo por la izquierda es uno y es el mismo para ambas matrices.

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=\mathcal{N}\left(\mathbf{L}^\intercal\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\text{existe } a\in\mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}\right\} \qquad \boxed{\text{Base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \text{ y } \mathcal{N}\left(\mathbf{L}^\intercal\right):\ \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right].}$$

$\square$

(L-10) Problema 6(a) Dimensión 3:

$$\mathcal{V} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

es decir

$$\mathcal{V} = \mathcal{N}(\mathbf{A})\,; \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

□

(L-10) Problema 6(b) El único vector del espacio nulo es el vector $\mathbf{0}$, por tanto dimensión 0.

□

(L-10) Problema 6(c) Dimensión 16.

□

(L-10) Problema 7. Una base del espacio fila es

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

Una base del espacio columna es

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right]$$

La respuesta anterior significa que la matriz $\mathbf{A}$ de 3 por 3 tiene tan sólo rango 2; y por tanto no es invertible.

□

(L-10) Problema 8(a) No. El conjunto de soluciones no puede ser un subespacio puesto que no contiene el vector nulo ($\mathbf{0}$ no es solución a dicho sistema).

□

(L-10) Problema 8(b) Si. Este conjunto es el espacio nulo por la izquierda de la matriz cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$.

$$\boldsymbol{x} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

□

(L-10) Problema 8(c) No. Este conjunto no contiene la matrix nula $\mathbf{0}$; así que no puede ser sub-espacio vectorial.

□

(L-10) Problema 8(d) Si, puesto que si los espacios nulos de $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ contienen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces el espacio nulo de cualquier combinación lineal de ambas matrices también contiene a dicho vector:

$$(a\mathbf{A}_1 + b\mathbf{A}_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a\mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

□

(L-10) Problema 9. Si empleamos el método de eliminación gaussiana, encontramos que sólo hay dos pivotes, que corresponden con las dos primeras columnas y las dos primeras filas. Así que sabemos que tanto el espacio columna y el espacio fila tienen dimensión dos. Por tanto, tomemos las dos primeras columnas y las dos primeras filas, puesto que son linealmente independientes.

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\exists\, c,d\in\mathbb{R}\text{ tales que }\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\right\}$$
$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\exists\, c,d\in\mathbb{R}\text{ tales que }\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1&3&5&-2\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}2&-1&3&-4\end{pmatrix}\right\}.$$

□

(L-10) Problema 10(a) $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\mathbf{0}$.

□

(L-10) Problema 10(b) $\dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=1$.

□

(L-10) Problema 10(c) $\boldsymbol{x}_p=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$

□

(L-10) Problema 10(d) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}_p=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$

□

(L-10) Problema 10(e)

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\a&b&c&d\end{bmatrix},$$

donde la última fila de $\mathbf{R}$ no se puede deducir de los datos del enunciado.

□

(L-10) Problema 11(a) Falso. Por ejemplo para la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$; $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es el sub-espacio de vectores de $\mathbb{R}^3$ con la última componente igual a cero; mientras que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es el sub-espacio de vectores de $\mathbb{R}^3$ con la primera componente nula.

□

(L-10) Problema 11(b) Verdadero.

□

(L-10) Problema 11(c) Falso. Suponga don matrices invertibles, por ejemplo

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix};\qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$$

$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\mathcal{C}\left(\mathbf{I}\right)=\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=\mathcal{C}\left(\mathbf{I}^\intercal\right)=\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\mathcal{N}\left(\mathbf{I}\right)=\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=\mathcal{N}\left(\mathbf{I}^\intercal\right)=\{\mathbf{0}\}$.

□

(L-10) Problema 11(d) Verdadero. Sea cual sea el vector $\boldsymbol{b}$, las n columnas (vectores de $\mathbb{R}^n$) son linealmente independientes, por tanto son una base de $\mathbb{R}^n$, puesto que el lado derecho $\boldsymbol{b}$ pertenece a $\mathbb{R}^n$, siempre existe una única combinación lineal de las columnas igual a $\boldsymbol{b}$ (por ser estas una base de $\mathbb{R}^n$). Dicha combinación es *"la"* solución $\boldsymbol{x}$ al sistema de ecuaciones.

Otra forma de verlo es la siguiente: si las n columnas son linealmente independientes, $\mathbf{A}$ es de rango completo y por lo tanto invertible; entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{b}\\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{x}&=\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x}&=\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

Por tanto sabemos que para cualquier $\boldsymbol{b}$, el vector $\mathbf{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}$ es la solución.

$\square$

(L-10) Problema 12(a) Puesto que cualquier combinación del espacio columna $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es un múltiplo de $\begin{pmatrix}-2, & 1\end{pmatrix}$, dicho espacio es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1 (una recta en $\mathbb{R}^2$); por tanto el rango de $\mathbf{A}$ es $r = 1$ (una sola columna pivote, y consecuentemente sólo una fila pivote).

Además, sabemos que las dimensiones de $\mathbf{A}$ son $m = 2$ y $n = 4$ es decir: $\underset{2\times 4}{\mathbf{A}}$.

$\square$

(L-10) Problema 12(b) Número de columnas libres, es decir, el número de columnas menos el número de columnas pivote: $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 4 - r = 4 - 1 = 3$.

$\square$

(L-10) Problema 12(c) $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = r = 1$.

$\square$

(L-10) Problema 12(d) El número de filas libres; por tanto $m - r = 2 - 1 = 1$.

$\square$

(L-10) Problema 12(e) Sabemos que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}; \qquad \text{y que} \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\9\end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$-3\mathbf{A}\boldsymbol{v} + \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}18\\-9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-18\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Es decir

$$-3\mathbf{A}\boldsymbol{v} + \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{A}(-3\boldsymbol{v}) + \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{A}(-3\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}.$$

Así pues, una solución al sistema homogéneo es:

$$\boldsymbol{x} = -3\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-9\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\-8\\-1.\end{pmatrix}$$

También es solución cualquier múltiplo de dicho vector $\boldsymbol{x}$.

$\square$

(L-10) Problema 13(a)

rango $\left(\mathbf{A}\right)$ =número de pivotes= 3.

dim($\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$)=dim($\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$)=rango $\left(\mathbf{A}\right)$ =3.

dim($\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$)=número de columnas libres = 5-3=2.

$\square$

(L-10) Problema 13(b) Las filas primera, segunda y cuarta de $\mathbf{A}$ constituyen una base del espacio fila de $\mathbf{A}$ (es decir, las filas pivote de $\mathbf{A}$).

$\square$

(L-10) Problema 13(c) Las columnas pivote de $\mathbf{R}$ (también las columnas pivote de $\mathbf{A}$.

$\square$

(L-10) Problema 13(d) Las columnas tercera y cuarta de $\mathbf{E}$.

$\square$

(L-10) Problema 13(e) $3\mathbf{A}_{|1} - 2\mathbf{A}_{|2} = \mathbf{A}_{|3}$. Nótese que la tercera columna de $\mathbf{E}$ nos indica una posible combinación (no es la única, pero si sería la única si nos limitáramos a emplear únicamente las dos primeras columnas).

$\square$

(L-10) Problema 14. Puesto que las soluciones tienen cuatro componentes, la matriz $\mathbf{A}$ debe tener cuatro columnas. Puesto que el espacio nulo está formado por las combinaciones de sólo dos vectores, sabemos que dos variables son libre, y por tanto las otras dos son pivote (rango 2). Así pues, el espacio fila es de dimensión 2 y ortogonal a los vectores dados.

Calculemos una posible matriz mediante eliminación gaussiana.

$$\left[\begin{array}{cccc}2&2&1&0\\3&1&0&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&2&2&0\\0&1&3&1\\\hline 0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline 0&0&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\0&1&\mathbf{-3}&\mathbf{-1}\\1&-2&\mathbf{4}&\mathbf{2}\\0&0&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{array}\right]$$

Así hemos obtenido una base del espacio fila; por lo que una matriz que cumple el requisito del enunciado es:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-3&4&0\\0&-1&2&1\end{bmatrix}.$$

La comprobación es muy sencilla…

$$\begin{bmatrix}1&-3&4&0\\0&-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\2&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Pero esta no es la única matriz posible. Si multiplicamos $\mathbf{A}$ por la izquierda manteniendo el rango (si el número de variables libres no cambia) lograremos una nueva matriz. Así pues, cualquier matriz que se pueda obtener mediante transformaciones elementales por filas de $\mathbf{A}$ (operaciones sobre las filas que mantengan el rango de la matriz) también es válida

$$\underset{2\times 2}{\mathbf{E}}\;\underset{2\times 4}{\mathbf{A}}\begin{bmatrix}2&3\\2&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathbf{E0}=\mathbf{0};$$

donde rango$\,(\mathbf{EA})=2$.

□

(L-10) Problema 15. Mediante eliminación gaussiana por columnas de derecha a izquierda tenemos

$$\left[\begin{array}{cccc}4&3&2&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{\substack{[(-2)\mathbf{4}+\mathbf{3}]\\[(-3)\mathbf{4}+\mathbf{2}]\\[(-4)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}0&0&0&1\\\hline \mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&0\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&0\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&0\\\mathbf{-4}&\mathbf{-3}&\mathbf{-2}&1\end{array}\right]$$

Entonces:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&-4\\0&1&0&-3\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$$

Pero cualquier matriz que se pueda obtener mediante transformaciones elementales por filas de $\mathbf{A}$ (operaciones sobre las filas que mantengan el rango de la matriz) también es válida.

□

(L-10) Problema 16(a) Suponga que el producto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es la matriz nula: $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$. Entonces el espacio *nulo* de la matriz $\mathbf{A}$ contiene el espacio *columna* de la matriz $\mathbf{B}$. También el espacio *nulo por la izquierda* de la matriz $\mathbf{B}$ contiene el espacio *fila* de la matriz $\mathbf{A}$.

□

(L-10) Problema 16(b) La dimensión del espacio nulo de $\mathbf{A}$ es $n-r=7-r$. La dimensión del espacio columna de $\mathbf{B}$ es s. Puesto que el primero contiene al segundo, $7-r\geq s$, es decir $r+s\leq 7$.

□

(L-10) Problema 17(a) 4. Hay cuatro pivotes en la forma escalonada reducida de $\mathbf{A}$.

□

(L-10) Problema 17(b)
$\dim(\mathcal{C}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)) = \text{rango}(A) = 4$
$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n - \text{rango}(A) = 8 - 4 = 4$
$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)) = m - \text{rango}(A) = 4 - 4 = 0$

□

(L-10) Problema 17(c) El sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene infinitas soluciones, sea cual sea el vector $\underset{4\times 1}{\boldsymbol{b}}$. Por una parte, no hay ninguna fila de ceros en la forma escalonada reducida, y por lo tanto el espacio columna es todo $\mathbb{R}^4$ (cualquier vector de $\mathbb{R}^4$ es combinación de las columnas de $\mathbf{A}$ y por tanto el sistema siempre tiene solución). Por otra parte, el espacio nulo tiene infinitos elementos (hay columnas libres).

□

(L-10) Problema 17(d) Si, la matriz $\mathbf{R}$ (la forma escalonada reducida de $\mathbf{A}$) tiene pivotes en todas sus filas; por tanto, éstas son linealmente independientes.

□

(L-10) Problema 17(e) Columnas 2,4, 5 y 7 de $\mathbf{E}$.

□

(L-10) Problema 17(f) Hemos visto que $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)) = 0$. Por tanto, el único vector del espacio nulo es el vector nulo; por tanto no es posible encontrar ningún vector linealmente independiente y no se puede encontrar ninguna base del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$.

□

(L-10) Problema 18(a) Puesto que las tres columnas son pivote (no hay columnas libres), necesariamente $\mathcal{N}(\mathbf{R}) = \{\mathbf{0}\}$.

$$\mathcal{N}(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$$

□

(L-10) Problema 18(b) $\mathbf{B}$ ya está en su forma escalonada reducida por columnas. Por tanto el rango de $\mathbf{B}$ sigue siendo 3.

□

(L-10) Problema 18(c)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{las 5 primeras}]{\text{restando a las 5 últimas columnas.}} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{a las primeras}]{\text{sumando las últimas.}} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{últimas por -1}]{\text{multiplicando las.}} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

□

(L-10) Problema 18(d) Es el doble del rango de $\mathbf{R}$, por tanto: rango 6.

□

(L-10) Problema 18(e) Debe ser igual al número de filas nulas de $\underset{10\times 6}{\mathbf{C}}$ (es decir, las columnas nulas de $\mathbf{C}^\intercal$); puesto que las seis columnas $\mathbf{C}$ son pivote (rango 6), sólo 6 de sus filas son pivote, y el resto son libres, por tanto, dimensión $10 - 6 = 4$.

□

(L-10) Problema 19(a) Pensemos primero en las dimensiones de $\mathbf{A}$ y en el rango de $\mathbf{A}$ ... Puesto que el "lado derecho" es un vector de orden 3, la matriz $\mathbf{A}$ tiene tres filas, además, la solución al sistema es también un vector con tres componentes (por tanto una combinación de las tres columnas de $\mathbf{A}$); así pues, $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden 3 por 3.

La solución completa está formada por vectores de un espacio nulo de dimensión 2 (dos columnas libres). Entonces, $\text{rango}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$. Se deduce de todo esto que sólo hay una fila pivote, y las otras dos son libres, por tanto $\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) = 1$.

□

(L-10) Problema 19(b) La solución particular nos dice que 2 veces la primera columna de $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix} 2\\4\\2 \end{pmatrix}$, por tanto, la primera columna de $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix} 1\\2\\1 \end{pmatrix}$.

Sabemos además, que rango $(A) = 1$, y por tanto el resto de columnas son múltiplos de la primera. El primer vector de la base del espacio nulo nos indica que la primera columna más la segunda en es vector nulo, por tanto, la segunda columna de $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$. Por último, es segundo vector de la base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ no indica que la tercera columna es un vector nulo. Así pues,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\2 & -2 & 0\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

□

(L-10) Problema 19(c) Para aquellos $\boldsymbol{b}$ que pertenezcan al espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$; por tanto, para los múltiplos de la primera columna de $\mathbf{A}$.

□

(L-10) Problema 20(a) **Falso.** Ejemplo: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

□

(L-10) Problema 20(b) **Falso.** Ejemplo: $\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ En este caso el espacio columna es el conjunto de vectores de orden 2 con la segunda componente nula; mientras que el espacio fila es el conjunto de vectores de orden 2 con la primera componente nula.

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, c\in\mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, c\in\mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

□

(L-10) Problema 20(c) **Verdadero.** Es el número de pivotes de la matriz; y hay tres casos
dimensión 2 si la matriz es invertible
dimensión 0 si la matriz es nula
dimensión 1 en el resto de casos

□

(L-10) Problema 20(d) **Falso** si hay columnas linealmente dependientes.

□

(L-10) Problema 21(a) Falso.

□

(L-10) Problema 21(b) Verdadero.

□

(L-10) Problema 21(c) Entonces las dos afirmaciones anteriores son falsas en general.

□

(L-11) Problema 1(a) Es el espacio vectorial $\mathcal{M}_3$ de todas las matrices 3 por 3 ya que cualquier matriz se puede expresar como suma de una matriz simétrica más una matriz triangular.

□

(L-11) Problema 1(b) Es la intersección de ambos, es decir, el conjunto de todas las matrices 3 por 3 diagonales.

□

(L-11) Problema 2(a) **Falso.** Por ejemplo

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

La matriz identidad es invertible, las otras dos no lo son.

□

(L-11) Problema 2(b) **True.** For $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ to have no solution we must have a row of 0's in the reduced row echelon form. Hence, the number of pivots will be less than the number of rows, and so the matrix $\mathbf{A}$ does not have full rank.

□

(L-11) Problema 2(c) **False.** Suppose $\mathbf{AB}$ is invertible, and consider $\mathbf{C} = (\mathbf{AB})^{-1}\,\mathbf{A}$. Then $\mathbf{CB} = (\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, so $\mathbf{C}$ is an inverse for $\mathbf{B}$.

Otra demostración alternativa: existe una matriz de rango completo $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{BE} = \mathbf{L}$, donde $\mathbf{L}$ es su forma escalonada. Como $\mathbf{B}$ es singular, $\mathbf{L}$ tiene una columna de ceros, entonces $\big(\mathbf{AB}\big)\mathbf{E} = \mathbf{AL} = \mathbf{M}$ tiene necesariamente una columna de ceros como $\mathbf{L}$ y por tanto $\mathbf{AB}$ es singular.

□

(L-11) Problema 2(d) **False.** Consider the permutation matrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Then

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}.$$

□

(L-11) Problema 3(a) Es un sub-espacio de $\mathbb{R}^7$ de dimensión:
cero si los tres son vectores nulos;
uno si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son múltiplos de $\boldsymbol{u}$;
dos si como máximo se pueden elegir dos vectores linealmente independientes;
o tres si los tres vectores son linealmente independientes.

□

(L-11) Problema 3(b) También es únicamente por el vector nulo $\mathbf{0}$.

□

(L-11) Problema 3(c) No. Por ejemplo las matrices 5 por 5 identidad ($\mathbf{I}$) y la matriz opuesta a la identidad ($-\mathbf{I}$) son de rango completo, y por tanto son invertibles, pero su suma es la matriz nula, que no es invertible. Por tanto, dicho subconjunto no es cerrado para la suma, es decir, no es un subespacio vectorial.

$$\mathbf{I} + (-\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad \text{que no es invertible.}$$

□

(L-11) Problema 3(d) Falso. Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

(L-11) Problema 3(e) El espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

□

(L-11) Problema 3(f) El espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ y el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

□

(L-11) Problema 3(g) Si está en el espacio nulo, implica que sumar a la primera columna dos veces la segunda y tres veces la tercera nos da un vector de ceros.

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Que es algo incompatible si el vector $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$ es una fila,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}!$$

□

(L-11) Problema 4(a) Es espacio vectorial ya que

$$\begin{bmatrix}a & b\\0 & b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c & d\\0 & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c & b+d\\0 & b+d\end{bmatrix} \text{ pertecene al conjunto; y}$$

$$c\begin{bmatrix}a & b\\0 & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ca & cd\\0 & cd\end{bmatrix} \text{ también pertecene al conjunto.}$$

□

(L-11) Problema 4(b) No es espacio vectorial. Sean $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ dos funciones de dicho conjunto, entonces la suma evaluada en cero es $g(0)+h(0)=4$, y por tanto no pertenece al conjunto.

□

(L-11) Problema 5. {Todos los monomios (vectores) de la forma: $a_n x^n$ para $n=0,1,2...$}

□

(L-11) Problema 6(a) **Tres.** Puesto que las esquinas superior-derecha e inferior-izquierda deben ser iguales, sólo tres variables pueden variar.

□

(L-11) Problema 6(b) **Tres.** Puesto que podemos re-escribir las matrices como

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & -a\end{bmatrix},$$

está claro que el espacio es de dimensión tres como en el caso anterior.

□

(L-11) Problema 6(c) **Dos.** Puesto que sólo x e y pueden variar.

□

(L-12) Problema 1. Puesto que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)\perp\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, tan sólo necesitamos encontrar el complemento ortogonal del espacio generado por $\begin{pmatrix}1, & 3, & -1\end{pmatrix}$, o lo que es lo mismo, el espacio nulo de $\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}1 & 3 & -1\\\hline 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\\hline 1 & -3 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\\hline\mathbf{E}\end{array}\right]$$

Por tanto, el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $\begin{pmatrix}1, & 3, & -1\end{pmatrix}$ es

$$\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}.$$

□

(L-12) Problema 2(a) Encontremos primero un vector paralelo a la recta:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

Así que una representación paramétrica es

$$\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\exists a\in\mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

□

(L-12) Problema 2(b) Buscamos multiplicar $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_P+a\boldsymbol{v}$ por un vector perpendicular a $\boldsymbol{v}$. Lo haremos mediante la eliminación gaussiana:

$$\left[\begin{array}{cc}x_1 & x_2\\\hline 1 & 2\\\hline\hline -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cc}{\color{blue}x_1+2x_2} & x_2\\\hline {\color{blue}5} & 2\\\hline\hline {\color{red}0} & 1\end{array}\right]$$

y por tanto la recta es $\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=(5)\right\}$.

□

(L-12) Problema 3(a) Encontremos primero un vector en la misma direción que la recta

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-7\\-4\end{pmatrix}.$$

Así que una representación paramétrica es

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_P+a\boldsymbol{v}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}3\\-7\\-4\end{pmatrix}.$$

□

(L-12) Problema 3(b) Necesitamos "eliminar" la parte de los parámetros $(a\boldsymbol{v})$ de la expresión que $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_P+a\boldsymbol{v}$:

$$\left[\begin{array}{ccc} x & y & z\\ \hline 1 & -3 & 1\\ \hline\hline 3 & -7 & -4\end{array}\right]\xrightarrow[{[(3)\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(3)\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{ccc} x & 3y & 3z\\ \hline 1 & -9 & 3\\ \hline\hline 3 & -21 & -12\end{array}\right]\xrightarrow[{[(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(7)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{ccc} x & 7x+3y & 4x+3z\\ \hline 1 & -2 & 7\\ \hline\hline 3 & 0 & 0\end{array}\right]$$

y por tanto podemos definir dos planos, cuya intersección es la recta

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}7 & 3 & 0\\4 & 0 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}\right\}.$$

□

(L-12) Problema 4. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^n a_i^2=0 \iff \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. Por tanto, la respuesta es si, el vector $\boldsymbol{0}$.

□

(L-12) Problema 5(a) Puesto que es paralela a la recta $2x-3y=5$, el vector director es común, es decir, necesitamos encontrar un vector $\boldsymbol{v}$ del espacio nulo de la matriz de coeficientes del sistema; por ejemplo:

$$\left[\begin{array}{cc} 2 & -3\\ \hline 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(2)\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(6)\mathbf{1}]}}}\left[\begin{array}{cc} 6 & -6\\ \hline 3 & 0\\ 0 & 2\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}}\left[\begin{array}{cc} 6 & 0\\ \hline 3 & 3\\ 0 & 2\end{array}\right]$$

por tanto $\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists a\in\mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$

□

(L-12) Problema 5(b) Basta sustituir (x,y) por el punto requerido $(1,1)$ para obtener el "vector" del lado derecho $\boldsymbol{b}$.

$$2x-3y=2\cdot1-3\cdot1=-1\quad\Rightarrow\quad 2x-3y=-1.$$

Por tanto

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(-1)\right\}$$

□

(L-12) Problema 6(a) $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

□

(L-12) Problema 6(b) $\sqrt{5}$

□

(L-12) Problema 6(c) $\sqrt{18}$

□

(L-12) Problema 6(d) 0

□

(L-12) Problema 6(e) $\sqrt{3}$

□

(L-12) Problema 7. $\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = 4+1+0+16+4 = 25$ así que tomamos $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\cdot\boldsymbol{v} = (\frac{2}{5},\ \frac{-1}{5},\ 0,\ \frac{4}{5},\ \frac{-2}{5})$. □

(L-12) Problema 8. Se calcula $(k)(4)+(1)(3)=0$ para obtener $k=-3/4$.

□

(L-12) Problema 9(a) $\begin{bmatrix}1&2&a\\2&-3&b\\-3&5&c\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$;

Así pues, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&2&-3\\2&-3&1\\-3&5&-2\end{bmatrix}$.

□

(L-12) Problema 9(b) Imposible, $\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$ no es ortogonal a $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

□

(L-12) Problema 9(c) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, y $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ pertence a $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$. Es imposible: estos vectores no son perpendiculares.

□

(L-12) Problema 9(d) Se pide que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{0}$. Por ejemplo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}$, o $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$.

□

(L-12) Problema 9(e) $\begin{pmatrix}1,&1,&1\end{pmatrix}$ debe pertencer simultánemante al espacio nulo, $\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$; y al espacio fila, $\begin{pmatrix}1,&1,&1\end{pmatrix}\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1,&1,&1\end{pmatrix}$, ...no existe tal matriz.

□

(L-12) Problema 10. Si $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$, las columnas $\mathbf{B}$ están contenidas en el *espacio nulo* de $\mathbf{A}$. Las filas de $\mathbf{A}$ están en el *espacio nulo por la izquierda de* $\mathbf{B}$.

Si rango=2, los espacios fila y columna de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen dimensión 2 ($\mathbf{A}$ tiene dos filas linealmente independientes y $\mathbf{B}$ tiene dos columnas linealmente independientes). Pero entonces $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{B}^\intercal\right)$ tienen dimensión 1 (una sola columna libre para $\mathbf{A}$ y una sola fila libre para $\mathbf{B}$).

Esto nos lleva ana contradicción: no es posible que dos filas linealmente independientes pertenezcan a $\mathcal{N}\left(\mathbf{B}^\intercal\right)$ que tiene dimensión 1. Del mismo modo, no es posible que dos columnas linealmente independientes pertenezcan a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ que tiene dimensión 1.

Para que esto fuera posible los cuatro subespacios deberían tener dimensión 2 (dos vectores linealmente independientes en cada espacio), pero esto es imposible para una matriz de orden 3 por 3.

□

(L-12) Problema 11. No. Por ejemplo:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 1 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$, pero $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{w}$.

□

(L-12) Problema 12(a) Por una parte $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{b}\in\mathcal{C}(\mathbf{A})$ por otra parte $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}=\mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{y}\perp\in\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ tiene solución y $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{y}$ es perpendicular a $\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{b} = \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{b} = 0.$$

□

(L-12) Problema 12(b) Si $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ entonces $\boldsymbol{y}\mathbf{A} = \boldsymbol{c}$, además $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; entonces $\boldsymbol{x}$ es perpendicular a $\boldsymbol{c}$. $\boldsymbol{c}$ pertenece al espacio fila, y por tanto es perpendicular a $\boldsymbol{x}$ que pertenece al espacio nulo. Otra forma de verlo:

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\cdot\mathbf{0} = 0.$$

□

(L-12) Problema 13. Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son perpendiculares, entonces

$$\|(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\|^2 = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} + 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$$

(la tercera igualdad es cierta debido a que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$).

□

(L-12) Problema 14(a) $\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}0&1\\1&1\\2&0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$

□

(L-12) Problema 14(b)

$$\left[\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline\hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} x & y-x & z \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} x & y-x & z-2y+2x \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Por tanto: $\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}2 & -2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}-1\end{pmatrix}\right\}$

□

(L-12) Problema 15(a) Puesto que nos piden un plano en $\mathbb{R}^3$, en este caso necesitamos encontrar dos vectores ortogonales a $(3, 1, 1)$. Por ejemplo, $\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Por tanto,

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\-3&-1\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}.$$

□

(L-12) Problema 15(b) En este caso ya conocemos, por el enunciado, un vector ortogonal a la parte paramétrica; así pues:

$$\begin{bmatrix}3&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}3&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{s}; \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}3&1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}3&1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = (10);$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix}3&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = (10)\right\}.$$

□

(L-12) Problema 16(a)

Uso de la librería en Python

```
A = Matrix([ [1,2,0,1,1], [0,0,2,3,1], [0,0,1,4,2], [0,0,0,1,1] ])
b = Vector( [1,0,1,2] )
SEL (A, b, 1)
```

La solución completa es:

$$\text{Conjunto de vectores: } \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

□

(L-12) Problema 16(b) Puesto que la matriz de coeficientes tiene cinco columnas, el sistema tiene cinco incognitas, así pues, los vectores que pertenecen al conjunto de soluciones tienen cinco componentes (un número por columna). Así pues, el conjunto de soluciones es un subconjunto de $\mathbb{R}^5$; Y en este caso, dicho conjunto es una recta, ya que la dimensión de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es uno. Así pues, un vector director es cualquier múltiplo (excepto el vector nulo $\mathbf{0}$) de la solución especial que hemos encontrado: $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}-2, & 1, & 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$. Y uno de los puntos por donde pasa la recta es la solución particular que obtuvimos al resolver el sistema: $\boldsymbol{s}= \begin{pmatrix}-1, & 0, & 1, & -2, & 4\end{pmatrix}$

□

(L-12) Problema 16(c) Primero un razonamiento largo...

Está claro que el vector director $\boldsymbol{n}$ (la solución al sistema homogeneo) cumple la siguiente relación:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{n} = \mathbf{0};$$

lo cual significa que los vectores fila de $\mathbf{A}$ son perpendiculares a $\boldsymbol{n}$. Así que, al menos, las filas de $\mathbf{A}$ son perpendiculares a $\boldsymbol{n}$.

Pero. . . ¿hay más vectores perpendiculares? Veamos si cualquier combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$ es un nuevo vector perpendicular a $\boldsymbol{n}$.

Sea $\boldsymbol{z}$ un vector de $\mathbb{R}^4$, entonces $\boldsymbol{z}\mathbf{A}$ es un nuevo vector de $\mathbb{R}^5$ generado como combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$ (donde los elementos z_i de $\boldsymbol{z}$ son los coeficientes de dicha combinación). Por tanto, para todo $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^4$, el producto $\boldsymbol{z}\mathbf{A}$ es una combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$. Comprobar que las combinaciones $\boldsymbol{z}\mathbf{A}$ son siempre perpendiculares al vector director $\boldsymbol{n}$ es muy sencillo, ya que si $\mathbf{A}\boldsymbol{n} = \mathbf{0}$ entonces, para el producto de cualquier combinación lineal de filas $\boldsymbol{z}\mathbf{A}$ con el vector director $\boldsymbol{n}$ siempre resultará que

$$\boldsymbol{z}\mathbf{A}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{z} \cdot \mathbf{0} = 0.$$

¿Hemos encontrado todos los vectores perpendiculares a $\boldsymbol{n}$? o ¿hay algún vector en $\mathbb{R}^5$ que sea perpendicular a $\boldsymbol{n}$, pero que no sea combinación de las filas de $\mathbf{A}$?

Para contestar a estas dos preguntas primero vamos a comprobar que el conjunto de vectores perpendiculares a $\boldsymbol{n}$ son un espacio vectorial; es decir, que dicho conjunto es cerrado para la suma y el producto por un escalar (o de manera más abreviada, que es cerrado para las combinaciones lineales). Veámoslo:

Sean $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ dos vectores perpendiculares a $\boldsymbol{n}$, es decir, dos vectores tales que $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ y que $\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{n} = 0$; y sea $\mathbf{B}$ la matriz $\begin{bmatrix}\boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{bmatrix}$. Así, una combinación de los vectores $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ es el producto

$$\mathbf{B}\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{y} + c_2\boldsymbol{z}$$

para cualquier vector $\boldsymbol{c}$ de $\mathbb{R}^2$. Ahora vamos a comprobar que todas las posibles combinaciones de dos vectores perpendiculares al vector $\boldsymbol{n}$ son también perpendiculares a dicho vector director (que dicho conjunto es cerrado).

$$\boldsymbol{n}\mathbf{B}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{n}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{bmatrix}\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{z})\end{bmatrix}\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{c} = 0, \qquad \text{para todo } \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2.$$

Así pues, el conjunto de vectores perpendiculares a $\boldsymbol{n}$ es un subespacio vectorial. ¿De que dimensión?

Tanto los vectores fila de $\mathbf{A}$ como el vector director $\boldsymbol{n}$ tienen cinco componentes, es decir, pertenencen a $\mathbb{R}^5$, que es un espacio vectorial de dimensión cinco. Puesto que $\mathbf{A}$ tiene rango 4, sus cuatro filas son linealmente independientes, y constituyen una base del espacio generado por las filas de $\mathbf{A}$; que es un subespacio de dimensión 4 y que llamamos espacio fila de $\mathbf{A}$. Por supuesto, la recta generada por el único vector director $\boldsymbol{n}$ es de dimensión 1.

Así pues, la suma del espacio fila de $\mathbf{A}$ (dimensión 4) mas la recta generada por $\boldsymbol{n}$ (la *recta perpendicular*) (dimensión 1) tiene necesáriamente dimensión 5, es decir, la suma de los dos subespacios es todo el espacio $\mathbb{R}^5$. Eso significa que cualquier vector de $\mathbb{R}^5$, o está en la recta generada por $\boldsymbol{n}$, o está en el espacio fila de $\mathbf{A}$, o es suma de dos componentes (uno en el espacio fila y el otro en la recta); y por lo tanto, todo vector perpendicular a $\boldsymbol{n}$ necesariamente pertenece al espacio filas de $\mathbf{A}$.

Ya podemos contestar a todas las preguntas: el conjunto de vectores perpendiculares es el espacio fila de $\mathbf{A}$*, que es de dimensión 4; y como* $\mathbf{A}$ *tiene rango 4, sus cuatro filas son linealmente independientes, así que constituyen una base del subespacio de vectores perpendiculares a* $\boldsymbol{n}$*.*

Y ahora un razonamiento más corto... en el que sólo es necesario resolver el sistema de ecuaciones "apropiado"... del que en este caso particular, y dado lo que ya sabemos del primer apartado... ya conocemos su solución...

Antes hemos recordado que en cualquier sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, los vectores solución $\boldsymbol{x}$ son los vectores ortogonales a las filas de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ ... pero entonces... para contestar a este apartado ¡basta con poner como coeficientes del sistema homogéneo los elementos de vector director $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}-2, & 1, & 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, y resolver! Es decir, la pregunta se puede contestar solucionando el sistema

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = (0).$$

El conjunto de vectores solución a este sistema es el conjunto de vectores ortogonales pedidos en el enunciado, y puesto que la matriz de coeficientes tiene rango uno, y hay cinco incógnitas, *la dimensión del conjunto solución es cuatro.*

Probar que dicho conjunto es un subespacio vectorial es fácil: si $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ son soluciones al sistema $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, entonces la combinación lineal $a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{z}$ también es solucion puesto que

$$\mathbf{B}(a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{z}) = a\mathbf{B}\boldsymbol{y} + b\mathbf{B}\boldsymbol{z} = a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Observando el primer apartado de este problema podemos ver que *las cuatro filas del sistema de ecuaciones original* $\mathbf{A}\boldsymbol{n} = \mathbf{0}$ (primer apartado del problema) son perpendiculares al vector director, y son independientes, por lo que *forman la base del subespacio pedido en el enunicado.*

... y por último la manera más corta que se me ocurre... por ¡eliminación Gaussiana!...

$$\left[\begin{array}{c}[\boldsymbol{n}]^{\intercal}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc}-2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\substack{\tau\\ [(2)\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccccc}-2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]$$

Las cuatro últimas columnas de la matriz $\mathbf{E}$ (allí donde hay columnas de ceros en $\mathbf{L}$ —que es la forma escalonada reducida de $[\boldsymbol{n}]^{\intercal}$) son vectores perpendiculares a $\boldsymbol{n}$; y es evidente que son cuatro, y que son linealmente independientes, así que son una base del subespacio perpendicular a $\boldsymbol{n}$.

□

(L-12) Problema 17. Podemos tomar como fila de la matriz $\mathbf{A}$ una combinación lineal de una base del espacio nulo por la izquierda de la matriz $\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$. Así pues,

$$\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 4\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ \hline 1 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

y entonces

$$\underset{1\times 3}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

cumple el requisito. Una matriz 3 por 3 con el mismo espacio nulo es, por ejemplo

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

□

(L-12) Problema 18(a) Any column of $\mathbf{A}$ is orthogonal to the two special solutions given in the problem. That is,

$$\left[\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{4}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau \\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(-6)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad \text{so} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

□

(L-12) Problema 18(b) $\mathbf{R}$ has two pivots, and therefore $\mathbf{A}$ has two pivots and $r(\mathbf{A}) = 2$. Two independent rows in $\mathbb{R}^2$ span $\mathbb{R}^2$, so $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = \mathbb{R}^2$.

□

(L-12) Problema 18(c) Since rows 1 and 3 are pivot rows, then $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}3, & 0, & 6, & 0\end{pmatrix}$ is a particular solution, so the complete solution is any vector of the form

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + a\boldsymbol{s}_1 + b\boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix}3, & 0, & 6, & 0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}3, & 1, & 0, & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}6, & 0, & 2, & 1\end{pmatrix}.$$

□

(L-12) Problema 18(d) It is easy to see that

$$2\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

If you dont see that, we can always use gaussian elimination

$$\left[\begin{array}{ccc} -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

□

(L-13) Problema 1(a)

$$\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^\intercal[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^\intercal\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{4}{13}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \frac{4}{13}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14/13\\21/13\end{pmatrix}$$

$$[\boldsymbol{a}]^\intercal\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}14/13\\21/13\end{pmatrix} = 3\left(\frac{14}{13}\right) - 2\left(\frac{21}{13}\right) = 0$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}9 & -6\\-6 & 4\end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^2 = \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{13}\begin{bmatrix}117 & -78\\-78 & 52\end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}9 & -6\\-6 & 4\end{bmatrix} = \mathbf{P};$$

$$\mathbf{P}\boldsymbol{b} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}9 & -6\\-6 & 4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{4}{13}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.$$

□

(L-13) Problema 1(b)

$$\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^\intercal[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^\intercal\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}3 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{6}{9}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix}3 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 3\cdot 0 - 0\cdot 1 = 0$$

$$\mathsf{P} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}9 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}; \quad \mathsf{P}^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \mathsf{P};$$

$$\mathsf{P}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

□

(L-13) Problema 1(c)

$$[\boldsymbol{a}]\Big([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\Big)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} - \frac{-1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}7\\8\\23\end{pmatrix}$$

$$[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{e} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}7\\8\\23\end{pmatrix} = \frac{0}{6} = 0.$$

$$\mathsf{P} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 4 & -2\\-1 & -2 & 1\end{bmatrix} \quad \mathsf{P}^2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6 & 12 & -6\\12 & 24 & -12\\-6 & -12 & 6\end{bmatrix} = \mathsf{P};$$

$$\mathsf{P}\boldsymbol{b} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 4 & -2\\-1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

□

(L-13) Problema 1(d)

$$[\boldsymbol{a}]\Big([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\Big)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}3\\3\\12\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3 & 3 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\\12\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}3 & 3 & 12\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0.$$

$$\mathsf{P} = \frac{1}{162}\begin{bmatrix}9 & 9 & 36\\9 & 9 & 36\\36 & 36 & 144\end{bmatrix} \quad \mathsf{P}^2 = \frac{1}{162}\cdot\frac{1}{162}\begin{bmatrix}1458 & 1458 & 5832\\1458 & 1458 & 5832\\5832 & 5832 & 23328\end{bmatrix} = \mathsf{P};$$

$$\mathsf{P}\boldsymbol{b} = \frac{1}{162}\begin{bmatrix}9 & 9 & 36\\9 & 9 & 36\\36 & 36 & 144\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}.$$

□

(L-13) Problema 2(a)

$$[\boldsymbol{a}]\Big([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\Big)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{b} \;=\; \begin{bmatrix}-3\\1\\-3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-3 & 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\1\\-3\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}-3 & 1 & -3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} \;=\; \frac{-19}{-19}\begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix}$$

□

(L-13) Problema 2(b) La recta es el conjunto de soluciónes a $3x - y = 0$:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc}3 & -1\\ \hline 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc}3 & -3\\ \hline 1 & 0\\ 0 & 3\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc}3 & 0\\ \hline 1 & 1\\ 0 & 3\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right];$$

así que debemos proyectar sobre la recta

$$\text{La recta}: \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \exists c \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix};\right\}.$$

$$[\boldsymbol{a}]\Big([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\Big)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-4\\-12\end{pmatrix} = \frac{-2}{5}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.$$

□

(L-13) Problema 3.

$$[\boldsymbol{a}]\Big([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\Big)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

□

(L-13) Problema 4(a) $\boldsymbol{p}_1 = (1,0)$ y $\boldsymbol{p}_2 = (0.6, 1.2)$. Entonces $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \neq \boldsymbol{b}$.

□

(L-13) Problema 4(b) Puesto que $\mathbf{A}$ es invertible, la matrix proyección $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{I}$ proyecta sobre todo el espacio $\mathbb{R}^2$.

□

(L-13) Problema 5(a) $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ y por tanto $(\mathbf{I} - \mathbf{P})^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{P})(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{I} - \mathbf{I}\mathbf{P} + \mathbf{P}^2 = \mathbf{I} - \mathbf{P}$.
Cuando $\mathbf{P}$ proyecta sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$, $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ proyecta sobre el *espacio nulo por la izquierda* de $\mathbf{A}$.

□

(L-13) Problema 5(b) $\mathbf{P}^{\intercal} = \mathbf{P}$ y por tanto $(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{\intercal} = (\mathbf{I}^{\intercal} - \mathbf{P}^{\intercal}) = \mathbf{I} - \mathbf{P}$.

□

(L-13) Problema 6(a)

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\-2 & 4 & 4\\-2 & 4 & 4\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{P}_1 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}4 & 4 & -2\\4 & 4 & -2\\-2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 =$ matriz cero debido a que $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$.

□

(L-13) Problema 6(b) $\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{9}(1,-2,-2)$, $\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{9}(4,4,-2)$, $\boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{9}(4,-2,4)$. Entonces $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 = (1,0,0) = \boldsymbol{b}$. Nótese que $\boldsymbol{a}_3 \perp \boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_3 \perp \boldsymbol{a}_2$.

□

(L-13) Problema 6(c)

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\-2 & 4 & 4\\-2 & 4 & 4\end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix}4 & 4 & -2\\4 & 4 & -2\\-2 & -2 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix}4 & -2 & 4\\-2 & 1 & -2\\4 & -2 & 4\end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

□

(L-13) Problema 7(a) $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{b} = (2,3,0)$ y $\boldsymbol{e} = (0,0,4)$.

□

(L-13) Problema 7(b) $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{b} = (4,4,6)$ y $\boldsymbol{e} = (0,0,0)$.

□

(L-13) Problema 7(c)

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ proyección sobre el plano } xy. \qquad \mathbf{P}_{,,} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

(L-14) Problema 1(a) Para los vectores $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{x}$, la matriz $\mathbf{A}$ viene dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$$

La ecuaciones normales son $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\beta} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$, o

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 112 \end{pmatrix}$$

cuya solución es $\widehat{\alpha} = 1$, $\widehat{\beta} = 4$.

□

(L-14) Problema 1(b) Los cuatro valores ajustados con $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ vienen dados por

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Así, el vector de errores $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$ viene dado por

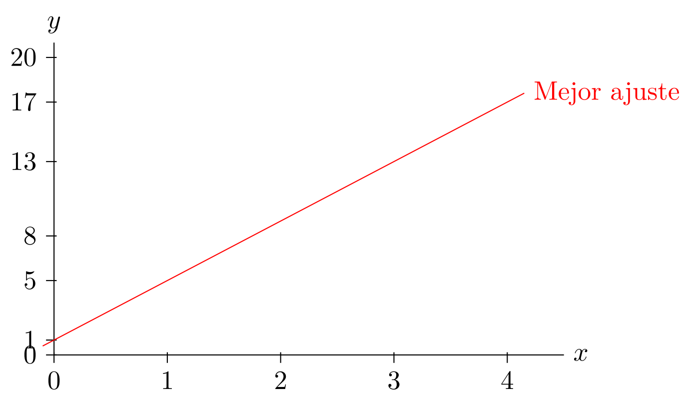
$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

□

(L-14) Problema 1(c) Es el menor valor posible para un ajuste lineal: $\|\boldsymbol{e}\|^2 = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e} = (-1)^2 + 3^2 + (-5)^2 + 3^2 = 44$.

□

(L-14) Problema 1(d)



□

(L-14) Problema 1(e) Si los nuevos valores cambian a los dados en el enunciado, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\alpha+0\beta =&1\\ \alpha+1\beta =&5\\ \alpha+3\beta =&13\\ \alpha+4\beta =&17\end{aligned}$$

Cuya solución es $\alpha = 1$ y $\beta = 4$.

□

(L-14) Problema 1(f)

$$\boldsymbol{e}\mathbf{A} = \begin{pmatrix}-1, & 3, & -5, & 3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}.$$

□

(L-14) Problema 1(g) La distancia mínima viene dada por $\|\boldsymbol{e}\| = \sqrt{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}} = \sqrt{44}$.

□

(L-14) Problema 2(a) Las ecuaciones son

$$\begin{aligned}\alpha-\beta =&7\\ \alpha+\beta =&7\\ \alpha+2\beta =&21\end{aligned}$$

Que se puede escribir como

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\ 7\\ 21\end{pmatrix}$$

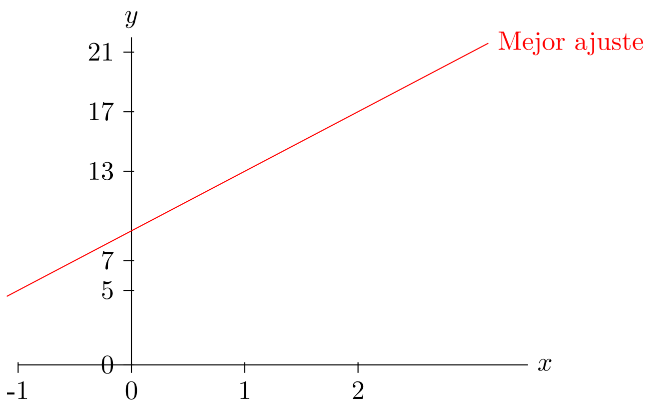
La solución de mínimos cuadrados se obtiene de $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$ que es este caso es

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}\\ \widehat{\beta}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 7\\ 21\end{pmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}\\ \widehat{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}35\\ 42\end{pmatrix}$$

que arroja los siguientes valores $\widehat{\alpha} = 9$, $\widehat{\beta} = 4$. Así que el mejor ajuste lineal es $\widehat{y} = 9 + 4x$.



□

(L-14) Problema 2(b)

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

que nos da los valores del mejor ajuste lineal. El vector de error $\boldsymbol{e}$ es

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La matrix $\mathbf{P}$ proyecta sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$, y $\boldsymbol{e}$ es en el espacio nulo por la izquierda, así que es ortogonal a $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

□

(L-14) Problema 3(a) The three data points lie on the same line when $b_3 = 7$. This line is $-2 + 3t$. If $b_3 = 9$, the least squares method will NOT choose this line. (A quick way to see this is from the fact that the line chosen by least squares will give the average of the given b's at the time equal to the average of the given t's; in this case, the best fit line would take the value $(1 + 3 + 9)/3 = 13/3$ at $t = (1 + 2 + 3)/3 = 2$, whereas our line gives 4 at $t = 2$.)

□

(L-14) Problema 3(b) The linear system for $\boldsymbol{x} = (C, D)$ would be the following:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

We compute the projection matrix $\mathbf{P}$ onto the column space of $\mathbf{A}$ using the projection matrix formula:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} =& \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ =& \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

(L-14) Problema 3(c) The column space of $\mathbf{P}$ is the space consisting of all the vectors $\mathbf{P}\boldsymbol{b}$, i.e. all the projections of vectors in $\mathbb{R}^3$ onto the column space of $\mathbf{A}$, which is precisely the column space of $\mathbf{A}$. Thus the rank of $\mathbf{P}$ is equal to the rank of $\mathbf{A}$, which is 2.

□

(L-14) Problema 3(d) The equation for the best least squares solution $\widehat{\boldsymbol{x}}$ is $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}$, where $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Writing out this system, we get

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

The solution to this system is $\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, so the best fit line is the horizontal line $b = 2$.

□

Ejercicio 32. El vector cero $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^n$ es múltiplo de cualquier otro vector $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$, pues $\mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{x}$; y por tanto, por la propiedad P-3 el determinante de $\mathbf{A}$ es cero:

$$\det\left[\mathbf{A}_{|1} \ldots; \mathbf{0}; \ldots; \mathbf{A}_{|n}\right] = \det\left[\mathbf{A}_{|1} \ldots; 0\boldsymbol{x}; \ldots; \mathbf{A}_{|n}\right] = 0 \cdot \det\left[\mathbf{A}_{|1} \ldots; \boldsymbol{x}; \ldots; \mathbf{A}_{|n}\right] = 0$$

□

Ejercicio 33. Cuando $\alpha = 0$, resulta que $\mathbf{A}_{\underset{[(0)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{A}$, por lo que el resultado es inmediato. Cuando $\alpha \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \det\left[\mathbf{A}_{|1};\ \dots\ \mathbf{A}_{|j};\ \dots\ \mathbf{A}_{|k};\ \dots\ \mathbf{A}_{|n}\right]; & \\
&= \frac{1}{\alpha}\det\left[\mathbf{A}_{|1};\ \dots\ \mathbf{A}_{|j};\ \dots\ \alpha\mathbf{A}_{|k};\ \dots\ \mathbf{A}_{|n}\right]; & \text{por } \mathbf{P\text{-}3}\\
&= \frac{1}{\alpha}\det\left[\mathbf{A}_{|1};\ \dots\ (\alpha\mathbf{A}_{|k}+\mathbf{A}_{|j});\ \dots\ \alpha\mathbf{A}_{|k};\ \dots\ \mathbf{A}_{|n}\right]; & \text{por } \mathbf{P\text{-}2}\\
&= \det\left[\mathbf{A}_{|1};\ \dots\ (\alpha\mathbf{A}_{|k}+\mathbf{A}_{|j});\ \dots\ \mathbf{A}_{|k};\ \dots\ \mathbf{A}_{|n}\right]; & \text{por } \mathbf{P\text{-}3}.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 34(a) Puesto queSince $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)\cdots\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right),$ aplicando repetidamente (4.1) tenemos

$$\begin{aligned}
\det\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) &= \left|\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)\cdots\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right)\right|\\
&= \left|\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)\cdots\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_{(k-1)}}\right)\right|\cdot\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right|\\
&= \left|\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)\cdots\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_{(k-2)}}\right)\right|\cdot\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_{(k-1)}}\right|\cdot\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right|\\
&\ \ \vdots\\
&= |\mathbf{A}|\cdot\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right|\cdots\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right|.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 34(b)

$$|\mathbf{B}| = \det\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right|\cdots\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right|.$$

y como los determinantes de las matrices elementales son distintos de cero, necesariamente $|\mathbf{B}| \neq 0$.

□

Ejercicio 34(c) Si $\mathbf{B}$ es de rango completo entonces es producto de k matrices elementales; por tanto $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$. Así

$$\det(\mathbf{AB}) = \det\left(\mathbf{A}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \det\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = |\mathbf{A}|\cdot\left(\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right|\cdots\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right|\right) = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$$

□

Ejercicio 35(a) Puesto que ambas son matrices elementales del mismo tipo, $\det\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}\right) = \det\left({}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}\right)$.

□

Ejercicio 35(b) Puesto que $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)\cdots\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right)$, su determinante es el producto de los determinantes $\det\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_i}\right)$

$$|\mathbf{B}| = \det\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)\cdots\det\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \prod_{i=1}^{k}\det\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_i}\right).$$

Pero también sabemos que $\mathbf{B}^{\mathsf{T}} = {}_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{I} = \left({}_{\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I}\right)\cdots\left({}_{\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{I}\right)$, por lo que su determinante es

$$\left|\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\right| = \prod_{i=1}^{k}\det\left({}_{\boldsymbol{\tau}_i}\mathbf{I}\right) = \prod_{i=1}^{k}\det\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_i}\right) = |\mathbf{B}|.$$

□

(L-15) Problema 2. Puesto que $\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, sabemos que

$$1 = |\mathbf{I}| = |\mathbf{A}|\left|\mathbf{A}^{-1}\right|;$$

de donde se deduce que $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

□

(L-15) Problema 3(a) $\left|\mathbf{AB}^2\right| = 2\cdot(-2)^2 = 8$.
$\left|(\mathbf{AB})^{-1}\right| = \frac{1}{|\mathbf{AB}|} = \frac{1}{-4}$.

□

(L-15) Problema 3(b) No hay información suficiente para saber el rango de $\mathsf{A}+\mathsf{B}$; Al decir que no hay información suficiente, quiero decir que podemos encontrar 2 ejemplos de pares de matrices $(\mathsf{A}_1,\mathsf{B}_1)$ y $(\mathsf{A}_1,\mathsf{B}_1)$ que satisfacen las hipótesis, es decir, $\det \mathsf{A}_1 = 2 = \det \mathsf{B}_1$ y $\det \mathsf{A}_2 = 2 = \det \mathsf{B}_2$; y sin embargo $\operatorname{rango}(\mathsf{A}_1+\mathsf{B}_1) \neq \operatorname{rango}(\mathsf{A}_2+\mathsf{B}_2)$.

Por otra parte, puesto que $|\mathsf{AB}| = -4 \neq 0$, sabemos que $\underset{3\times3}{\mathsf{AB}}$ es una matriz de rango completo, es decir, su rango es 3.

□

(L-15) Problema 4(a)

$$[\mathsf{A}_1] = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = [\mathsf{I}]$$

Por tanto $\det \mathsf{A}_1 = 1$.

□

(L-15) Problema 4(b)

$$\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}2&0&0\\-1&3&-1\\0&-2&2\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(3)\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}2&0&0\\-1&3&0\\0&-2&4\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(3)\mathbf{1}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix}6&0&0\\0&3&0\\-2&-2&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{1}]\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]\\ [(2)\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}12&0&0\\0&6&0\\0&0&4\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{1}{12})\mathbf{1}]\\ [(\frac{1}{6})\mathbf{2}]\\ [(\frac{1}{4})\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Por tanto $\det \mathsf{A}_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 6\cdot 4 = 4$

□

(L-15) Problema 4(c)

$$\mathsf{A}_3 = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = [\mathsf{I}]$$

Por tanto $|A_3| = -1$

□

(L-15) Problema 5. Todas las transformaciones aplicadas son *Tipo I*, así que $\mathsf{AE} = \mathsf{I} \Rightarrow \det(\mathsf{A})\cdot 1 = 1$.

□

(L-15) Problema 6(a) La primera es una matriz elemental, cuyo determinante es 1.

La segunda es una matriz permutación que intercambia dos vectores, por lo que su determinante es -1.

□

(L-15) Problema 6(b)

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\a&b&c&d\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{1}{d})\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\a&b&c&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-c)\mathbf{4}+\mathbf{3}]\\ [(-b)\mathbf{4}+\mathbf{2}]\\ [(-a)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Así pues, el determinante es d.

□

Ejercicio 36(a) Como la matriz de orden n es de rango completo, los n elementos de la diagonal principal son pivotes (i.e., distintos de cero).

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix}*_1&&&\\ \vdots&*_2&&\\ \vdots&\vdots&\ddots&\\ \vdots&\vdots&\vdots&*_n\end{bmatrix}$$

donde $*_j$ son números distintos de cero.

Dividiendo cada columna $j$ésima por su pivote $*_j$ para normalizar los pivotes (y compensando dichas transformaciones multiplicado la última fila por cada pivote); y aplicando, en una segunda fase, la eliminación de izquierda a derecha con transformaciones de Tipo I para anular todo lo que queda a la izquierda de los pivotes (ahora basta multiplicar la última fila por 1), llegamos a:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} *_1 & & & & \\ \vdots & *_2 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & *_n & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(*_1)(\mathbf{n+1})]\\ \vdots \\ [(*_n)(\mathbf{n+1})]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{1}{*_1})\mathbf{1}]\\ \vdots\\ [(\frac{1}{*_n})\mathbf{n}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ \vdots & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \\ \hline & & & & *_1 \cdot *_2 \cdots *_n \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)(\mathbf{n+1})]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}_1 \dots \boldsymbol{\tau}_q\\ \text{(de Tipo I)}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & *_1 \cdot *_2 \cdots *_n \end{array}\right]$$

por tanto, si la matriz es triangular inferior es de rango completo, su determinante es igual al producto de sus pivotes; es decir, al producto de los elementos de la diagonal.

$$\det(\mathbf{L}) = \text{ producto de los elementos de la diagonal}$$

□

Ejercicio 36(b) Una matriz de orden n y triangular solo puede ser de rango completo si los n elementos de la diagonal son distintos de cero. Por tanto, si la matriz tringular es singular, necesariamente tiene algún cero en su diagonal principal. Como su determinante es cero, por ser singular, su determinatne es igual al producto de los elementos de la diagonal (donde uno de ellos es cero).

□

Ejercicio 36(c)

$$\det(\mathbf{U}) = \det\left(\mathbf{U}^{\intercal}\right) = \text{ producto de los elementos de la diagonal}$$

por ser $\mathbf{U}^{\intercal}$ triangular inferior.

□

Ejercicio 37(a) Puesto queSince $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ entonces $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{I} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \left|\mathbf{A}\right| \cdot \left|\mathbf{B}\right|.$

□

Ejercicio 37(b) Puesto queSince

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

y puesto que mediante una sucesión $\boldsymbol{\tau}_1, \dots \boldsymbol{\tau}_k$ de transformaciones elementales *Tipo I* es posible la transformación $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_1,\dots\boldsymbol{\tau}_k} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ tenemos que $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{I} \end{vmatrix}$; y por tanto

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{I} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \left|\mathbf{A}\right| \cdot \left|\mathbf{B}\right|.$$

□

Ejercicio 38. Desarrollando por la segunda columna tenemos

$$\det \mathbf{A} \quad = \quad -0\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad = \quad 0 + 17 - 0 + 3 \times 4 \quad = \quad 29$$

□

Ejercicio 39.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =& -b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ =& -b(-fg + id) + e(-cg + ia) - h(-cd + fa) \\ =& bfg - bdi - ecg + eia + hcd - hfa && \text{desarrollando términos} \\ =& a(ei - hf) - d(bi - hc) + g(bf - ec) && \text{reordenando} \\ =& aei + bfg + dhc - gec - dbi - hfa && \text{reordenando.} \end{aligned}$$

(esta fórmula se denomina regla de Sarrus)

$\square$

(L-16) Problema 2(a) $\det\big(2\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}\big) = 2^3 \cdot \det \mathbf{A} = 16.$ $\quad\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} = 1/2.$

$\square$

(L-16) Problema 2(b)

$$\det\left(\left[(3\mathbf{A}_{|1}+2\mathbf{A}_{|2})\quad \mathbf{A}_{|3}\quad \mathbf{A}_{|2}\right]\right) = \det\left(\left[3\mathbf{A}_{|1}\quad \mathbf{A}_{|3}\quad \mathbf{A}_{|2}\right]\right) = 3\det\left(\left[\mathbf{A}_{|1}\quad \mathbf{A}_{|3}\quad \mathbf{A}_{|2}\right]\right) = -3\det\mathbf{A} = -6.$$

$\square$

(L-16) Problema 3.

$$\det(-\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \det(-\mathbf{A}) = (-1)^n\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})$$

puesto que n es un número par.

$\square$

(L-16) Problema 4. Es cierto ya que

$$|\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}^{\mathsf{T}}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^2\,.$$

$\square$

(L-16) Problema 5(a)

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & 2\\ b-4 & 3 & 4\\ c-6 & 5 & 6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 2\\ b & 3 & 4\\ c & 5 & 6\end{vmatrix} = 3$$

$\square$

(L-16) Problema 5(b)

$$\begin{vmatrix} 7a & 7 & 14\\ b & 3 & 4\\ c & 5 & 6\end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} a & 1 & 2\\ b & 3 & 4\\ c & 5 & 6\end{vmatrix} = 7\times 3 = 21$$

$\square$

(L-16) Problema 5(c)

$$\left|(2\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right| = \frac{1}{\det 2\mathbf{A}}\det\mathbf{A} = \frac{1}{2^3\det\mathbf{A}}\det\mathbf{A} = \frac{1}{8}.$$

$\square$

(L-16) Problema 5(d)

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & 2\\ b & 3 & 4\\ c & 5 & 6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 2\\ b & 3 & 4\\ c & 5 & 6\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6\end{vmatrix} = 3+4 = 7$$

$\square$

(L-16) Problema 6(a)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}2&4&4\\3&5&6\\1&2&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}2&0&0\\3&-1&0\\1&0&-2\\\hline 1&-2&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\\hline\dot{\mathbf{E}}\end{array}\right]$$

$\square$

(L-16) Problema 6(b) Puesto que $\mathbf{L}$ tiene tres pivotes, $\mathbf{A}$ es invertible.

$\square$

(L-16) Problema 6(c)

$$\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{\text{producto de los pivotes de } \dot{\mathbf{L}}} = \frac{1}{2(-1)(-2)} = \frac{1}{4}.$$

□

(L-16) Problema 6(d)

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}\mathbf{B}^\intercal| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}^\intercal| = 4 \cdot 0 = 0;$$

ya que $\mathbf{B}$ tiene dos filas iguales. Por tanto $\mathbf{C}$ no es invertible.

□

(L-16) Problema 7(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-4) \cdot 2 = 11$$

□

(L-16) Problema 7(b) Desarrollando el determinante por la primera fila tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0 = -8$$

□

(L-16) Problema 7(c) Lo más rápido es desarrollar el determinante por la segunda columna, puesto que todos sus elementos son nulos excepto uno. Entonces obtenemos un *menor* idéntico al del apartado anterior:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 0 + 0 = -8$$

□

(L-16) Problema 8.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-2) \cdot (2) = 12$$

□

(L-16) Problema 9.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Resultado que se podía anticipar a simple vista, pues se puede apreciar que la primera columna es combinación lineal del resto.

□

(L-16) Problema 10. Desarrollando el determinante por la primera columna tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} - 0 + 0 - \cdots 0$$

desarrollando de nuevo por la primera columna de lo que queda

$$= 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & n \end{vmatrix} - 0 + 0 - \cdots 0$$

y repitiendo la misma estrategia llegamos a

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)\cdot\begin{vmatrix}(n-1) & (n-1)\\ 0 & n\end{vmatrix}=n!.$$

□

(L-16) Problema 11(a)

$$|\mathbf{A}_4|=\begin{vmatrix}3&0&0&2\\2&3&0&0\\0&2&3&0\\0&0&2&3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}3&0&0\\2&3&0\\0&2&3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&3&0\\0&2&3\\0&0&2\end{vmatrix}=3\cdot 27-2\cdot 8=65$$

□

(L-16) Problema 11(b) En general $|\mathbf{A}_n|=3^n+(-1)^{n-1}2^n$.

□

(L-16) Problema 12. Repitiendo la técnica del ejercicio anterior de desarrollar los determinantes por cada columna (comenzando por la última para la primera matriz, y comenzando por la primera columna para la segunda matriz) tenemos

$$\begin{vmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{I}\end{vmatrix}=|\mathbf{B}|$$
$$\begin{vmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{C}\end{vmatrix}=|\mathbf{C}|.$$

Por tanto

$$\det\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{C}\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{I}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{C}\end{vmatrix}=\det\mathbf{B}\det\mathbf{C}.$$

□

(L-16) Problema 13(a) Por una parte,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&5\\1&4\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{bmatrix},$$

por otra,

$$\det(\mathbf{A})=3;\qquad\begin{vmatrix}\mathbf{1}&5\\\mathbf{2}&4\end{vmatrix}=-6;\qquad\begin{vmatrix}2&\mathbf{1}\\1&\mathbf{2}\end{vmatrix}=3.$$

Por tanto

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{1}&5\\\mathbf{2}&4\end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})}=\frac{-6}{3}=-2;\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}2&\mathbf{1}\\1&\mathbf{2}\end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})}=\frac{3}{3}=1.$$

□

(L-16) Problema 13(b) Por una parte,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{bmatrix},$$

por otra,

$$\det(\mathbf{A})=4;\qquad\begin{vmatrix}\mathbf{1}&1&0\\\mathbf{0}&2&1\\\mathbf{0}&1&2\end{vmatrix}=3;\qquad\begin{vmatrix}2&\mathbf{1}&0\\1&\mathbf{0}&1\\0&\mathbf{0}&2\end{vmatrix}=-2;\qquad\begin{vmatrix}2&1&\mathbf{1}\\1&2&\mathbf{0}\\0&1&\mathbf{0}\end{vmatrix}=1.$$

Por tanto, $x_1=\frac{3}{4}$; $x_2=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$; $x_3=\frac{1}{4}$.

□

(L-16) Problema 14(a) $\quad \mathbf{Adj(A)} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -0 & 1 & -0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \det(\mathbf{A}) = 3;$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{Adj(A)}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

□

(L-16) Problema 14(b) $\quad \mathbf{Adj(B)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \det(\mathbf{B}) = 4$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{\mathbf{Adj(B)}}{|\mathbf{B}|} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nótese que la inversa de una matriz simétrica es simétrica.

□

(L-16) Problema 15(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & a-6 \end{bmatrix}$$

El parámetro a debe ser distinto de 6 para que la matriz sea de rango completo (algo que se podía ver directamente comparando las filas de $\mathbf{A}$).

□

(L-16) Problema 15(b) Por una parte

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\cdot(-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1.$$

Y por otra

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $x_4 = \frac{0}{-1} = 0$.

□

(L-16) Problema 15(c)

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[\mathbf{3}\rightleftharpoons\mathbf{4}]}]{\substack{\tau \\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{4}]}]{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Por tanto $\quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y la solución a $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es (multiplicando por $\mathbf{B}^{-1}$ a ambos lados):

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Ejercicio 40. Sea λ un autovalor de $\mathbf{A}$ y sean $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ dos autovectores correspondientes al autovalor λ, es decir, tales que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y}$; entonces

$$\mathbf{A}\big(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}\big) = a\mathbf{A}\boldsymbol{x} + b\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \lambda a\boldsymbol{x} + \lambda b\boldsymbol{y} = \lambda\big(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}\big).$$

$\square$

(L-17) Problema 1(a)

$$\begin{bmatrix}-3 & 4 & -4\\ -3 & 5 & -3\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Por tanto el auto-valor correspondiente a $\boldsymbol{v}$ es -1. Por otra parte

$$\begin{bmatrix}-3 & 4 & -4\\ -3 & 5 & -3\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Por tanto el auto-valor correspondiente a $\boldsymbol{w}$ es 1.

$\square$

(L-17) Problema 1(b) Necesitamos encontrar un elemento del espacio nulo de $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$, en otras palabras, una solución a

$$\begin{bmatrix}-5 & 4 & -4\\ -3 & 3 & -3\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Podemos resolver esto mediante eliminación gaussiana por filas, o sencillamente observar que la tercera columna es -1 veces la segunda, por lo que es inmediato saber que uno de los auto-vectores debe ser:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\square$

(L-17) Problema 2(a) Los autovalores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix}$$

son la solución a la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) - 16 = 0; \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 5;\ \lambda_2 = -5.$$

También podemos emplear el sistema

$$\begin{cases}\lambda_1 \cdot \lambda_2 = & \det\mathbf{A} = -25\\ \lambda_1 + \lambda_2 = & \operatorname{Tr}\mathbf{A} = 0\end{cases}$$

con idéntico resultado.

Para $\lambda_1 = 5$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}3-5 & 4\\ 4 & -3-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 4\\ 4 & -8\end{bmatrix}$$

son los múltiplos de $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Por tanto, los autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_1$

Para $\lambda_2 = -5$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}3+5 & 4\\ 4 & -3+5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

son los múltiplos de $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Por tanto, los autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_2$

□

(L-17) Problema 2(b) Los autovalores de la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

son la solución a la ecuación característica

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 - b^2) = 0.$$

Por tanto

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2 - b^2)}}{2} = a \pm b.$$

Para $\lambda_1 = a + b$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{B} - \lambda_1\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -b & b \\ b & -b \end{bmatrix}$$

son los múltiplos de $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, los autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_1$.

Para $\lambda_2 = a - b$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{B} - \lambda_2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} b & b \\ b & b \end{bmatrix}$$

son los múltiplos de $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, los autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_2$.

□

(L-17) Problema 3. Los números de la diagonal de $\mathbf{A}$: 1, 2, 3, 7, 8, y 9.

□

(L-17) Problema 4(a) Puesto que es una matriz triangular, los elementos de su diagonal son sus auto-vectores. Para $\lambda_1 = 3$ necesitamos calcular una base del espacio nulo de $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$.

$$\left[\frac{\mathbf{A} - 0\mathbf{I}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(\frac{-1}{2})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \quad \text{Autovectores: los múltiplos no nulos de} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 1$ necesitamos calcular una base del espacio nulo de $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$.

$$\left[\frac{\mathbf{A} - \mathbf{I}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \quad \text{Autovectores: los múltiplos no nulos de} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_3 = 0$ necesitamos calcular una base del espacio nulo de $(\mathbf{A} - 0\mathbf{I})$.

$$\left[\frac{\mathbf{A} - 0\mathbf{I}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(3)\mathbf{2}] \\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(3)\mathbf{3}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right]$$

Los autovectores son los múltiplos no nulos de $\begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}$.

Además $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 3+1+0 = 4 = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{A})$ y también $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3 = 3\cdot 1\cdot 0 = 0 = |\mathbf{A}|$.

□

(L-17) Problema 4(b) La ecuación característica es

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 2 & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = (\lambda^2)(2-\lambda)-4(2-\lambda)=0$$

De la anterior expresión se puede ver que $\lambda_1 = 2$ es un autovalor.

Dividiendo la ecuación característica por $(2-\lambda)$ también tenemos $\lambda^2 = 4$; por tanto $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -2$

Para $\lambda = 2$ necesitamos calcular una base del espacio nulo de

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

Obtenemos dos autovectores independientes asociados a los dos primeros autovalores $\lambda = 2$ (una base del espacio nulo de $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$):

Autovectores: todas las combinaciones lineales no nulas de $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Para $\lambda_3 = -2$ necesitamos calcular una base del espacio nulo de

$$(\mathbf{A}+2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Los correspondientes autovectores son los múltiplos no nulos de $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Además $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 2+2-2 = 2 = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{A})$ y también $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3 = 2\cdot 2\cdot(-2) = -8 = |\mathbf{A}|$.

□

(L-17) Problema 5(a) trasponer una matriz no afecta al determinante y en este caso

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\intercal} = \det(\mathbf{A}^{\intercal}-\lambda\mathbf{I})$$

□

(L-17) Problema 5(b) Los autovalores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

son la solución a la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 0 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0;$$

que son iguales a los elementos de su diagonal (nótese que los auto-valores de una matriz triangular superior (o inferior) son siempre los elementos de la diagonal).

Para $\lambda_1 = 1$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}1-1 & 2\\ 0 & 3-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

son los múltiplos del auto-vector $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 3$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

son los múltiplos del auto-vector $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sin embargo, para la matriz $\mathbf{A}^\intercal$

$$\mathbf{A}^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

con los mismos autovalores (misma diagonal), tenemos que

Para $\lambda_1 = 1$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{A}^\intercal - \lambda \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

son los múltiplos del auto-vector $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 3$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{A}^\intercal - \lambda \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

son los múltiplos del auto-vector $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto los auto-vectores de $\mathbf{A}$ y de $\mathbf{A}^\intercal$ son distintos.

$\square$

(L-17) Problema 6.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{x} &= \big[\mathbf{B} + \alpha \mathbf{I}\big]\,\boldsymbol{x} \\ &= \mathbf{B}\boldsymbol{x} + \alpha \mathbf{I}\boldsymbol{x} \\ &= \lambda \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{x} \\ &= (\lambda + \alpha)\boldsymbol{x}; \end{aligned}$$

por tanto $\boldsymbol{x}$ también es autovector de $\mathbf{A}$, pero con autovalor asociado $(\lambda + \alpha)$.

$\square$

(L-17) Problema 7(a) Primero calculemos los autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0; \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 & = 2 \\ \lambda_2 & = 3 \end{cases}$$

Y ahora los auto-vectores.

Para $\lambda_1 = 2$ buscamos una base del espacio nulo de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Puesto que las dos columnas son iguales, los autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 3$ buscamos una base del espacio nulo de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1-3 & -1 \\ 2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que la primera columna es el doble de la segunda, los correspondientes autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Por último, el determinante de $\mathbf{A}$ es 6 que es igual a 2×3 y la traza es 5 que es igual a $2 + 3$.

$\square$

(L-17) Problema 7(b) Calculemos los autovalores:

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & -1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)(-3-\lambda)+2 = \lambda^2+9\lambda+20 = 0; \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = -5 \\ \lambda_2 & = -4 \end{cases}.$$

Y ahora los auto-vectores.

Para $\lambda_1 = -5$ buscamos una base del espacio nulo de la matriz

$$\begin{bmatrix} -6-(-5) & -1 \\ 2 & -3-(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Al igual que en el apartado anterior, los correspondientes autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = -4$ buscamos una base del espacio nulo de la matriz

$$\begin{bmatrix} -6-(-4) & -1 \\ 2 & -3-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De manera idéntica al apartado (a), los correspondientes autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Así pues, tras restar 7 veces la matriz identidad ($\mathbf{B} = \mathbf{A}$-7$\mathbf{I}$), los autovalores son los de la matriz original menos 7; es decir, $\lambda_1 = 2-7 = -5$ y $\lambda_2 = 3-7 = -4$; y los auto-vectores son idénticos a los de la matriz original $\mathbf{A}$.

□

(L-17) Problema 8(a) Sea un vector $\boldsymbol{x}$ tal que verifica $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$; entonces

$$\mathbf{B}\boldsymbol{x} = (\mathbf{A}-7\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} - 7\boldsymbol{x} = (\lambda-7)\boldsymbol{x}$$

por tanto $\boldsymbol{x}$ también es auto-vector de $\mathbf{B}$ con un auto-valor asociado igual a $(\lambda-7)$.

□

(L-17) Problema 8(b)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{x} =& \lambda\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x} =& \lambda(\mathbf{A}^{-1})\boldsymbol{x} \\ \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x} =& (\mathbf{A}^{-1})\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

La última igualdad $(\mathbf{A}^{-1})\boldsymbol{x} = (1/\lambda)\boldsymbol{x}$ implica que $\boldsymbol{x}$ es también auto-vector de $\mathbf{A}^{-1}$ con un auto-vector asociado igual a $1/\lambda$ para el caso de $\mathbf{A}^{-1}$.

□

(L-17) Problema 9. Si λ es un auto-valor de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Entonces

$$\mathbf{A}^2\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}.$$

Pero, puesto que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ entonces

$$\mathbf{A}^2\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x},$$

por tanto

$$\lambda^2 = \lambda.$$

Los dos únicos valores posibles son, o bien 0, o bien 1.

□

(L-17) Problema 10.

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3) = \mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 + \mathbf{A}\boldsymbol{v}_2 - \mathbf{A}\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3.$$

□

(L-17) Problema 11. La ecuación característica de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es $(1-\lambda)^2 - 1 = 0$. Por tanto la matriz tiene autovalores $\lambda = 0$ y $\lambda = 2$.

Sin embargo, la ecuación característica de su forma de escalonada es

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es $(1-\lambda)(-\lambda) = 0$. Por tanto los nuevos autovalores son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Los autovalores nulos no cambian. Hay tantos cómo el número de columnas menos el rango de la matriz (es decir, tantos como numero de columnas libres); y ni el número de columnas ni el rango de la matriz cambia al aplicar transformaciones elementales. Por tanto el número de autovalores nulos se mantiene tras aplicar el método de eliminación.

□

(L-17) Problema 12. Basta con igualar λ a cero.

□

(L-17) Problema 13. Para $\mathbf{A}$, la suma de λ_1 y λ_2 es -1 (la traza) y el producto es -6 (el determinante), por tanto $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 2$

Para $\lambda_1 = -3$; una base del espacio nulo de $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Sus múltiplos no nulos son los correspondientes autovectores.

Y para $\lambda_2 = 2$; una base del espacio nulo de $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sus múltiplos no nulos son los correspondientes autovectores.

Por otra parte, para $\mathbf{A}^2$, la suma de λ_1 y λ_2 es 13 (la traza) y el producto es 36 (el determinante), por tanto $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_2 = 4$

Para $\lambda_1 = 9$; una base del espacio nulo de $(\mathbf{A} - 9\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Sus múltiplos no nulos son los correspondientes autovectores.

Y para $\lambda_2 = 4$; una base del espacio nulo de $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sus múltiplos no nulos son los correspondientes autovectores.

$\mathbf{A}^2$ tiene los mismos **autovectores** que $\mathbf{A}$. Si los autovalores de $\mathbf{A}$ son λ_1 y λ_2, los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son **el cuadrado de los anteriores** (λ_1^2 y λ_2^2).

□

(L-17) Problema 14. Los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son el cuadrado de los autovalores de $\mathbf{A}$, por lo que

$$\operatorname{Tr}\left(\mathbf{A}^2\right) = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$$

Razonando de la misma manera

$$\left|(\mathbf{A}^{-1})^{\intercal}\right| = \det \mathbf{A}^{-1} = (1^{-1})(2^{-1})(4^{-1}) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

□

(L-17) Problema 15. The condition says that $(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I})$ is singular. But we know that, if $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ are eigenvalues of $\mathbf{A}$, then the eigenvalues of $(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I})$ are $\lambda_1^2 - 4, \lambda_1^2 - 4, \ldots, \lambda_n^2 - 4$. The condition $(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I})$ being singular says that one of $\lambda_i^2 - 4$ is zero, and hence $\lambda_i = 2$ or $\lambda_i = -2$. That is to say $\mathbf{A}$ has an eigenvalue 2 or -2.

□

(L-17) Problema 16. First, the last two columns of $\mathbf{A}$ are the same. Hence $\mathbf{A}$ is singular and it must have an eigenvalue $\lambda_1 = 0$. Also, we observe that $\mathbf{A}$ is a Markov matrix. This means that $\lambda_2 = 1$ is an eigenvalue of $\mathbf{A}$. Finally, we know the trace of $\mathbf{A}$ is the sum of its three eigenvalues. So, $\operatorname{Tr}(\mathbf{A}) = 0.5 + 0.5 + 0.3 = 1.3$ and the last eigenvalue is $\lambda_3 = 1.3 - 1 - 0 = 0.3$.

□

(L-18) Problema 1(a) Del PROBLEMA 5 en la página 240 (L-19) ya hemos calculado los autovalores y los autovectores. Por lo que sabemos que

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculemos la inversa de $\mathbf{S}$:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{S}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}1&1\\0&1\\ \hline 1&0\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\ \hline 1&-1\\0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{S}^{-1}\end{array}\right]$$

Por tanto

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\mathbf{SDS}^{-1}.$$

O aplicando el algoritmo de diagonalización por bloques (que en este caso sabemos que arrojará una matriz diagonal, puesto que los autovalores no se repiten)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]\xrightarrow[3\mathbf{I}]{(-)}\left[\begin{array}{cc}-2&2\\0&0\\ \hline 1&0\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cc}-2&0\\0&0\\ \hline 1&1\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{}\left[\begin{array}{cc}-2&0\\0&0\\ \hline 1&1\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow[3\mathbf{I}]{(+)}\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&3\\ \hline 1&1\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)}\left[\begin{array}{cc}0&0\\0&2\\ \hline 1&1\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)}\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&3\\ \hline 1&1\\0&1\end{array}\right]$$

(L-18) Problema 1(b) Primero resolvemos su ecuación característica $\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})=0$ para encontrar los autovalores

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\2&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)-2=\lambda^2-3\lambda=0;\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda_1&=0\\ \lambda_2&=3\end{cases}$$

(¿porqué podíamos saber que uno de los autovalores era cero entes de resolver la ecuación característica?)

- para $\lambda_1=0$, el espacio nulo de la matriz $(\mathbf{B}-0\mathbf{I})=\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$ son los múltiplos del auto-vector

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

- para $\lambda_2=3$, el espacio nulo de la matriz $(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})=\begin{bmatrix}-2&1\\2&-1\end{bmatrix}$ son los múltiplos del auto-vector

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

O aplicando el algoritmo de diagonalización por bloques (que en este caso sabemos que arrojará una matriz diagonal, puesto que los autovalores no se repiten)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)}\left[\begin{array}{cc}1&1\\2&2\\ \hline 1&0\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cc}1&0\\2&0\\ \hline 1&-1\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{}\left[\begin{array}{cc}3&0\\2&0\\ \hline 1&-1\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)}\left[\begin{array}{cc}3&0\\2&0\\ \hline 1&-1\\0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[3\mathbf{I}]{(-)}\left[\begin{array}{cc}0&0\\ \hline 2&-3\\ \hline 1&-1\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(3)\mathbf{1}]\\ [(2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}\left[\begin{array}{cc}0&0\\ \hline 0&-3\\ \hline 1&-1\\2&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{\tau\\ [(1/3)\mathbf{1}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{}\left[\begin{array}{cc}0&0\\ \hline 0&-3\\ \hline 1&-1\\2&1\end{array}\right]\xrightarrow[3\mathbf{I}]{(+)}\left[\begin{array}{cc}3&0\\0&0\\ \hline 1&-1\\2&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{D}\\ \hline \mathbf{S}\end{array}\right]$$

Así pues:

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\end{bmatrix};\qquad\mathbf{D}=\begin{bmatrix}3&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Calculemos la inversa de $\mathbf{S}$:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{S}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}1&-1\\2&1\\ \hline 1&0\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cc}1&0\\2&3\\ \hline 1&1\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(3)\mathbf{1}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}\left[\begin{array}{cc}3&0\\0&3\\ \hline 1&1\\-2&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(\frac{1}{3})\mathbf{1}]\\ [(\frac{1}{3})\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\ \hline \frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{-2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{S}^{-1}\end{array}\right]$$

Por tanto

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3\end{bmatrix} = \mathbf{SDS}^{-1}.$$

□

(L-18) Problema 2(a)

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = 0\\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Esta matriz sólo se puede diagonalizar si el espacio nulo de $(\mathbf{A}_1 - 0\mathbf{I}) = \mathbf{A}_1$ tiene dimensión 2. $\mathbf{A}_1$ sólo tiene una columna libre $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = 1$; por tanto esta matriz no se puede diagonalizar.

□

(L-18) Problema 2(b) Esta matriz no tiene autovalores repetidos; por tanto se puede diagonalizar.

□

(L-18) Problema 2(c) El autovalor $\lambda = 2$ está repetido; por tanto, para que la matriz sea diagonalizable es necesario que espacio nulo de $\mathbf{A}_3 - 2\mathbf{I}$ tenga dimensión 2 (dos autovectores independientes), pero sólo tiene dimensión 1. No se puede diagonalizar.

□

(L-18) Problema 3. Ecuación característica: $(4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0; \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 5; \quad \lambda_2 = 1.$

$$\lambda_1 = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -3\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

O de manera alternativa:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{cc}3 & 3\\ 1 & 1\\ \hline 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{cc}3 & 0\\ 1 & 0\\ \hline 1 & -1\\ 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}]{} \left[\begin{array}{cc}4 & 0\\ 1 & 0\\ \hline 1 & -1\\ 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{cc}5 & 0\\ 1 & 1\\ \hline 1 & -1\\ 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[5\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ \hline 1 & -4\\ \hline 1 & -1\\ 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\underset{\substack{[(4)\mathbf{1}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ \hline 0 & -4\\ \hline 3 & -1\\ 1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{\underset{\substack{[(1/4)\mathbf{1}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}{\boldsymbol{\tau}}}]{} \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ \hline 0 & -4\\ \hline 3 & -1\\ 1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[5\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{cc}5 & 0\\ 0 & 1\\ \hline 3 & -1\\ 1 & 1\end{array}\right]$$

Así pues,

$$\mathbf{A}^{100} = \mathbf{SD}^{100}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5^{100} & \\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}5\cdot 5^{100} & 1\\ 5^{100} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\cdot 5^{100} - 1 & 3\cdot 5^{100} + 3\\ 5^{100} + 1 & 5^{100} - 3\end{bmatrix}$$

□

(L-18) Problema 4(a) Si, puesto que no tiene un autovalor igual a cero; de hecho su determinante es $|\mathbf{A}| = 1 \times 1 \times 2 = 2 \neq 0$.

□

(L-18) Problema 4(b) No lo podemos saber, depende de cuantos autovectores linealmente independientes podamos encontrar.

□

(L-18) Problema 4(c) No lo podemos saber, depende de cuantos autovectores linealmente independientes podamos encontrar.

□

(L-18) Problema 5(a) Puesto que la matriz es triangular, los autovalores son los elementos de la diagonal principal ($\lambda = 4$ y $\lambda = 2$, ambos con multiplicidad algebráica igual a 2). Entonces, para que la matriz sea diagonalizable, es neceario que el rango de la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ sea dos en ambos casos. Veamos si efectivamente es así:

$$\operatorname{rango}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \operatorname{rango}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 2; \quad \operatorname{rango}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \operatorname{rango}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Por tanto ya sabemos que $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

Observando la matriz $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})$, es fácil ver que dos autovectores asociados a $\lambda = 4$ son $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; y observando la matriz $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$, que dos autovectores asociados a $\lambda = 2$ son $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Así pues, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$; y $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

□

(L-18) Problema 5(b) Puesto que hemos visto que $\boldsymbol{v}$ es un autovector de $\mathbf{A}$ asociado al autovalor $\lambda = 2$, sabemos que $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}$, y por tanto:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A}^6\right)\boldsymbol{v} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{v} \\ &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\lambda\boldsymbol{v} \\ &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\lambda^2\boldsymbol{v} \\ &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\lambda^3\boldsymbol{v} \\ &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\lambda^4\boldsymbol{v} \\ &= \mathbf{A}\cdot\lambda^5\boldsymbol{v} \\ &= \lambda^6\boldsymbol{v} = 2^6\boldsymbol{v} = 64\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

(L-18) Problema 5(c) Puesto que ningún autovalor es cero, la matriz es de rango completo, es decir, invertible.

□

(L-18) Problema 5(d) Puesto que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$, entonces

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}\right)^{-1} = \left(\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \left(\mathbf{S}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}^{-1};$$

es decir, los autovectores $\mathbf{S}$ son los mismos, pero los autovalores $\mathbf{D}^{-1}$, son los inversos de los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$.

□

(L-18) Problema 6.

$$\mathbf{A}^3 = (\mathbf{S})(\mathbf{D}^3)(\mathbf{S}^{-1}); \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{S})(\mathbf{D}^{-1})(\mathbf{S}^{-1}).$$

□

(L-18) Problema 7(a) Debemos resolver la ecuación característica

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

Así $\lambda = 1,\ 2$ (por ser una matriz triangular).

□

(L-18) Problema 7(b) Para encontrar los auto-vectores correspondientes a λ, debemos encontrar el espacio nulo de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Hay dos casos:

- $\lambda = 1$. Aquí debemos resolver $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Así, un auto-vector es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\lambda = 2$. Aquí tenemos que resolver $\begin{bmatrix}-1 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. En este caso un auto-vector es $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

□

(L-18) Problema 7(c) De los apartados anteriores concluimos que:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}.$$

Por ser $\mathbf{S}$ una matriz elemental, sabemos que su inversa es:

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{SDS}^{-1}.$$

Pero también podiamos haberlo hecho así

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right] \xrightarrow[2\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{cc}-1 & 0\\-1 & 0\\\hline 1 & 0\\0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[2\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{cc}1 & 0\\-1 & 2\\\hline 1 & 0\\0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\\hline -1 & 1\\\hline 1 & 0\\0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\\hline 0 & 1\\\hline 1 & 0\\1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}]{} \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\\hline 0 & 1\\\hline 1 & 0\\1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{cc}1 & 0\\0 & 2\\\hline 1 & 0\\1 & 1\end{array}\right]$$

□

(L-18) Problema 8(a) **Verdadero**. Puesto que ninguno de los autovalores es nulo, el determinante (que es igual al producto de los autovalores) es necesariamente distinto de cero, y por tanto la matriz es invertible.

□

(L-18) Problema 8(b) **Falso**. Si no hay autovalores repetidos, sabemos que necesariamente la matriz es diagonalizable, pues existen suficientes auto-vectores linealmente independientes, como para generar una matriz $\mathbf{S}$ invertible. Puesto que el auto-valor 2 está repetido, no podemos saber si existen suficientes auto-vectores linealmente independientes.

□

(L-18) Problema 8(c) **Falso**. No lo podemos saber. Necesitamos conocer si hay tres auto-vectores linealmente independientes (lo sabríamos si no hubiera autovalores repetidos).

□

(L-18) Problema 9(a)

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}8 & a\\b & 2\end{bmatrix}, \quad a = \frac{-9}{b}; \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix}9 & 4\\-4 & 1\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix}10 & 5\\-5 & 0\end{bmatrix}$$

□

(L-18) Problema 9(b) El espacio nulo de la matriz $(\mathbf{A}_1 - 5\mathbf{I})$; es decir, de $\begin{bmatrix}3 & 3\\-3 & -3\end{bmatrix}$; es el conjunto de vectores múltiplos de $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, y el es mismo que el espacio nulo de las matrices $(\mathbf{A}_2 - 5\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}4 & 4\\-4 & -4\end{bmatrix}$ y $(\mathbf{A}_2 - 5\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}5 & 5\\-5 & -5\end{bmatrix}$. Por tanto, en los tres casos no podemos encontrar dos auto-vectores linealmente independientes, y en consecuencia estas matrices no son diagonalizables.

□

(L-18) Problema 10(a) $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1}.$

□

(L-18) Problema 10(b) $\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}^{-1}.$

□

(L-18) Problema 11.

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & 18\\-3 & 10\end{bmatrix}$$

Comprobación: Traza = 5; determinante = 4.

$\square$

(L-18) Problema 12. Sabemos que es diagonalizable, puesto que no tiene autovalores repetidos. La matriz de autovalores D es una matriz diagonal; con los valores 1, 2 y 7 es su diagonal principal (en cualquier orden).

$\square$

(L-18) Problema 13(a) Los tres autovalores son iguales a 1 (son los elementos de la diagonal, por ser A triangular).

Los auto-vectores para el único auto-valor (triple) $\lambda = 1$ se calculan partiendo de la matriz $[\mathsf{A} - 1\mathsf{I}]$:

$$\mathsf{A} - 1\mathsf{I} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\-2 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

que tiene sólo dos columnas libres; por tanto debemos encontrar dos soluciones especiales (cuyas combinaciones lineales son el espacio nulo de la matriz anterior y que constituyen los auto-vectores asociados al auto-valor $\lambda = 1$):

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$\square$

(L-18) Problema 13(b) La matriz no es diagonalizable ya que como máximo podemos encontrar 2 auto-vectores linealmente independientes (para que lo fuera necesitaríamos encontrar 3).

$\square$

(L-18) Problema 14(a) Es diagonalizable, puesto que tiene tres auto-vectores linealmente independientes. Así pues:

$$\mathsf{S} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}; \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}.$$

$\square$

(L-18) Problema 14(b)

$$\mathsf{A} = \mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$\square$

(L-18) Problema 15.

$$\left(\mathsf{A}^3\right)\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}2 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & \\ & -2\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}2 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}2 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^3 & \\ & -2^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 32\\0 & -8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-24\\8\end{pmatrix}.$$

$\square$

Ejercicio 41. Extendemos el sistema $\left[\boldsymbol{q}\right]$ hasta formar una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$

$$\left[\boldsymbol{q}\right] \longrightarrow \left[\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{z}_1;\ \dots\ \boldsymbol{z}_{(n-1)}\right];$$

y luego colocamos $\boldsymbol{q}$ en la última posición y normalizamos todos los vectores; obteniendo la siguiente base ortonormal de $\mathbb{R}^n$:

$$\left[\frac{1}{\|\boldsymbol{z}_1\|}(\boldsymbol{z}_1);\ \dots\ \frac{1}{\|\boldsymbol{z}_{(n-1)}\|}(\boldsymbol{z}_{(n-1)});\ \boldsymbol{q}\right].$$

□

Ejercicio 42. ${}_{i|}\mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{Q}_{|j} = \left(\mathbf{Q}_{|i}\right) \cdot \left(\mathbf{Q}_{|j}\right) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } i = j \\ 0 & \text{cuando } i \neq j \end{cases},$ es decir $\mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \underset{n\times n}{\mathbf{I}}.$

□

Ejercicio 43(a) $\left(\mathbf{QR}\right)^{\intercal} = \mathbf{R}^{\intercal}\left(\mathbf{Q}^{\intercal}\right) = \mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{Q}^{-1}\right) = (\mathbf{QR})^{-1}.$

□

Ejercicio 43(b) $\left(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}\right)^{\intercal} = \mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{A}\left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^{\intercal} = \mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{A}\left(\mathbf{Q}^{\intercal}\right)^{\intercal} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}.$

□

Ejercicio 44. Si $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \mathbf{D}$ es diagonal, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^{\intercal}$. Por tanto, $\mathbf{A}^{\intercal} = \left(\mathbf{QDQ}^{\intercal}\right)^{\intercal} = \mathbf{QDQ}^{\intercal} = \mathbf{A}.$

□

(L-19) Problema 1(a) Ecuación característica:

$$0 = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - \lambda,$$

por tanto $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$

- $\lambda_1 = 0$
$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{0}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$
  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda_1 = 1$
$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{I}\right) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$
  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Por tanto
$$\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^{\intercal} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

□

(L-19) Problema 1(b) Ecuación característica:

$$0 = |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 1,$$

por tanto $\lambda = \pm 1$

- $\lambda_1 = 1$
$$\left(\mathbf{B} - \mathbf{I}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2 = -1$
$$\left(\mathbf{B} + \mathbf{I}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por tanto

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

□

(L-19) Problema 1(c) Ecuación característica:

$$0 = |\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}| = (3-\lambda)(-3-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 25,$$

por tanto $\lambda = \pm 5$

- $\lambda_1 = 5$

$$(\mathbf{C} - 5\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}-2 & 4\\4 & -8\end{bmatrix}$$

  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

- $\lambda_1 = -5$

$$(\mathbf{C} + 5\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}8 & 4\\4 & -2\end{bmatrix}$$

  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Por tanto

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & \\ & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

□

(L-19) Problema 2. Ecuación característica:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\1 & -\lambda & 0\\1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lambda = 0\\ -\lambda^2 + \lambda + 2 \;\Rightarrow\; \begin{cases}\lambda = 2\\ \lambda = -1\end{cases}\end{cases}$$

$\lambda = 0$, 2, -1; con autovectores unitarios

$$\boldsymbol{x}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

puesto que

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A} - 0\mathbf{I}\\\hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\\hline 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1\\\hline 1 & -1 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\1 & -1 & 0\\\hline 1 & -1 & \mathbf{0}\\0 & 1 & \mathbf{-1}\\0 & 0 & \mathbf{1}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A} - 2\mathbf{I}\\\hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}-1 & 1 & 1\\1 & -2 & 0\\1 & 0 & -2\\\hline 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}-1 & 0 & 0\\1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1\\\hline 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}-1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\1 & 1 & 0\\\hline 1 & 1 & \mathbf{2}\\0 & 1 & \mathbf{1}\\0 & 0 & \mathbf{1}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A} + 1\mathbf{I}\\\hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}2 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\\hline 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(2)\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}2 & 0 & 0\\1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\\\hline 1 & -1 & -1\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}2 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\\hline 1 & -1 & \mathbf{-2}\\0 & 2 & \mathbf{2}\\0 & 0 & \mathbf{2}\end{array}\right]$$

□

(L-19) Problema 3. Por ejemplo, $\lambda = 0,\ -3,\ 3$;

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

(L-19) Problema 4(a) Que se son ortogonales (perpendiculares).

□

(L-19) Problema 4(b) El espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ está generado por $\boldsymbol{u}$, es decir, son todos los múltiplos de $\boldsymbol{u}$; y puesto que la matriz es simétrica, el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es idéntico a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Los espacios fila y columna también son iguales entre si ($\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$), y están generados por todas las combinaciones lineales de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right).$$

□

(L-19) Problema 4(c) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}$, puesto que

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}) = \mathbf{A}\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\mathbf{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}(2\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w};$$

pero esta solución no es única, podemos añadir cualquier múltiplo de $\boldsymbol{u}$ (vector del espacio nulo) a $\boldsymbol{x}$.

□

(L-19) Problema 4(d) Puesto que $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ y $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es perpendicular a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$, necesitamos que $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} = 0$.

□

(L-19) Problema 4(e) $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^\intercal$;

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

□

(L-19) Problema 5(a) Autovalores reales.

□

(L-19) Problema 5(b) Todos los autovalores son menores que uno en valor absoluto.

□

(L-19) Problema 5(c) Tiene autovalores repetidos

□

(L-19) Problema 5(d) Tiene al menos un autovalor igual a cero.

□

(L-19) Problema 6(a) La ecuación característica es $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda^4 - 1 = 0$$

por tanto $\lambda = \pm 1$ y $\lambda = \pm i$; es decir cuatro autovalores distintos.

□

(L-19) Problema 6(b) La matriz tiene un espacio nulo de dimensión 3. Busquemos, por tanto, tres autovectores que sean base del espacio nulo de $\mathbf{B}$ (autovalor igual a cero):

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Además,

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Por tanto, hay un triple autovalor igual a 0, y otro autovalor igual a 1. Y puesto que hemos encontrado cuatro autovectores linealmente independientes, esta matriz es diagonalizable.

□

(L-19) Problema 6(c) Ortogonal, invertible, permutación, diagonalizable y Markov

□

(L-19) Problema 6(d) Hermítica, de rango uno, diagonalizable y Markov

□

(L-19) Problema 7. Si $\mathbf{A}^3=\mathbf{0}$ entonces para todos los autovalores $\lambda^3=0$, es decir $\lambda=0$ como en

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}.$$

Si $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces es diagonalizable, y por el Teorema espectral, se puede factorizar como

$$\mathbf{A}^3=\mathbf{Q}\mathbf{D}^3\mathbf{Q}^\intercal=\mathbf{Q}\mathbf{0}\mathbf{Q}^\intercal=\mathbf{0}.$$

□

(L-19) Problema 8(a) Los autovalores de

$$\begin{bmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

son los elementos de la diagonal; $\lambda=3$ (con multiplicidad 2) y $\lambda=2$. Pero el rango de

$$\mathbf{A}-3\lambda=\begin{bmatrix}3-3&1&1\\0&3-3&1\\0&0&2-3\end{bmatrix}$$

es 2; por tanto la matriz no es diagonalizable.

□

(L-19) Problema 8(b) Los autovalores de

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

son los elementos de la diagonal; $\lambda=3$ y $\lambda=2$ (con multiplicidad 2). El rango de

$$\mathbf{A}-2\lambda=\begin{bmatrix}2-2&1&1\\0&3-2&1\\0&0&2-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

es 1; por tanto la matriz es diagonalizable.

Dos autovectores independientes correspondientes al autovalor $\lambda=2$ son $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Por otra parte

$$\mathbf{A}-3\lambda=\begin{bmatrix}2-3&1&1\\0&3-3&1\\0&0&2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&0&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

Un autovector correspondiente al autovalor $\lambda=3$ es $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Así pues

$$\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathsf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

son matrices tales que $\mathsf{A} = \mathsf{SDS}^{-1}$.

□

(L-19) Problema 8(c) Sea como sea A, la matriz $\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}$ siempre es simétrica; y por tanto es diagonalizable, y es posible encontrar una base ortonormal de autovectores de $\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}$.

□

(L-19) Problema 8(d) Basta con encontrar los valores de a que hacen la matriz de rango completo; es decir, cualquier valor de a distinto de cero ($a \neq 0$) (para que la matriz sea invertible) y simultáneamente distinto de tres ($a \neq 3$) (para que la matriz sea diagonalizable).

□

(L-19) Problema 9(a) Ecuación característica:

$$0 = |\mathsf{B} - \lambda\mathsf{I}| = \lambda^2 - 1,$$

por tanto $\lambda = \pm 1$

- $\lambda_1 = 1$

$$\left(\mathsf{B} - \mathsf{I}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda_1 = -1$

$$\left(\mathsf{B} + \mathsf{I}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por tanto

$$\mathsf{B} = \mathsf{QDQ}^\intercal = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

□

(L-19) Problema 9(b) Puesto que los dos autovalores son distintos los dos autovectores encontrados son linealmente independientes, y la matriz es diagonalizable. Una matriz S que diagonaliza B es

$$\mathsf{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

ya que $\mathsf{BS} = \mathsf{SD}$, donde

$$\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Puesto que la matriz S es invertible, ya que ambos auto-vectores son linealmente independientes, podemos diagonalizar B del siguiente modo:

$$\mathsf{S}^{-1}\mathsf{BS} = \mathsf{D};$$

donde la matriz diagonal contiene los autovalores de B.

□

Ejercicio 45(a) $\boldsymbol{x}(\mathsf{A} + \mathsf{B})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\mathsf{A} + \boldsymbol{x}\mathsf{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\mathsf{B}\boldsymbol{x} > 0$; por ser la suma de dos números positivos.

□

Ejercicio 45(b) A es invertible y, como es simétrica, es ortogonalmente diagonalizable $\mathsf{A} = \mathsf{QDQ}^{-1} = \mathsf{QDQ}^\intercal$; así

$$\mathsf{A}^{-1} = \left(\mathsf{QDQ}^{-1}\right)^{-1} = \left(\mathsf{Q}^{-1}\right)^{-1}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{Q}^{-1} = \mathsf{QD}^{-1}\mathsf{Q}^\intercal;$$

y como los autovalores de $\mathbf{A}$ son positivos, sus inversos (los autovalores de $\mathbf{A}^{-1}$ que se encuentran en la diagonal de $\mathbf{D}^{-1}$) también lo son.

□

Ejercicio 46. Si $\mathbf{A}$ es definida positiva, entonces para cualquier $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ no nulo se verifica que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$. En particular, si $\boldsymbol{x}$ es la columna $j$ésima de la matriz identidad, tenemos

$$_{j|}\mathbf{IAI}_{|j} = {_{j|}\mathbf{A}_{|j}} > 0.$$

La demostración es análoga para el caso semidefinido.

□

(L-20) Problema 1(a) No. $\begin{bmatrix}1&3\\3&5\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}1&0\\3&-4\end{bmatrix} \xrightarrow[{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}]{} \begin{bmatrix}1&0\\0&-4\end{bmatrix}.$ $\quad f(x,y) = x^2 + 6xy + 5y^2.$

□

(L-20) Problema 1(b) No. $\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix} \xrightarrow[{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}]{} \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}.$ $\quad f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2.$

□

(L-20) Problema 1(c) Sí. $\begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}2&0\\3&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{2}]}}]{} \begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}.$ $\quad f(x,y) = 2x^2 + 6xy + 5y^2.$

□

(L-20) Problema 1(d) No, hay componentes negativos en la diagonal. $\begin{bmatrix}-1&2\\2&-8\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}-1&0\\2&-4\end{bmatrix} \xrightarrow[{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}]{}$ $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-4\end{bmatrix}.$ $\quad f(x,y) = -x^2 + 4xy - 8y^2.$

□

(L-20) Problema 1(e) A lo largo de la recta $y = x$ la función $f(x,y) = (y-x)^2$ es igual a cero. Nótese que el vector (1,1) es un autovector asociado al autovalor cero.

□

(L-20) Problema 2(a) $\begin{bmatrix}1&2\\2&9\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}1&0\\2&5\end{bmatrix} \xrightarrow[{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}]{} \begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}.$ Es decir

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B}.$$

Así, $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\intercal}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y & y\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x+2y\\y\end{pmatrix}.$

Por tanto, $f(x,y) = x^2 + 4\,x\,y + 9\,y^2 = (x+2y)^2 + 5(y)^2$.

□

(L-20) Problema 2(b) $\begin{bmatrix}1&3\\3&9\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix} \xrightarrow[{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}]{} \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}.$ $\quad f(x,y) = x^2 + 6\,x\,y + 9\,y^2 = (x+3y)^2 + 0(y)^2.$

□

(L-20) Problema 3(a) Esta no, puesto que el determinante de $\mathbf{A}$ es negativo.

□

(L-20) Problema 3(b) Esta no, puesto que $a = -1$.

□

(L-20) Problema 3(c) Esta no, puesto que es singular ($\det \mathbf{C} = 0$).

□

(L-20) Problema 3(d) $\mathbf{D}$ es la única que tiene dos autovalores positivos ya que $a = 1$ y $\det \mathbf{A} = 1$.

$\square$

(L-20) Problema 4. $\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}1&0\\2&-1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$

$$f(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2 = (x+2y)^2 - y^2.$$

Para los valores $x = 2$ e $y = -1$, es decir, en el punto $(2, -1)$:

$$f(2, -1) = -1.$$

$\square$

(L-20) Problema 5. Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^2\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda^2\boldsymbol{x}$.

Si $\mathbf{A}$ tiene autovalores λ_i positivos entonces los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son λ_i^2 y los de $\mathbf{A}^{-1}$ son $1/\lambda_i$, y por tanto también positivos.

$\square$

(L-20) Problema 6(a) La matriz asociada es

$$\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&4&0\\0&0&5\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&0&0\\0&0&5\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&5\end{bmatrix}.$$

Cuya diagonal está formada por dos números positivos y un cero.

$\square$

(L-20) Problema 6(b) La matriz asociada es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1&1&-a\\1&4&0\\-a&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-a)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}-1&0&0\\1&5&-a\\-a&-a&a^2+1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau\\ [(-a)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&5&-a\\0&-a&a^2+1\end{bmatrix}\cdots$$

Hay un 5 (positivo) en la diagonal, por tanto es imposible que sea definida negativa.

$\square$

(L-20) Problema 7(a) No es definida positiva, ya que el vector $\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}^{\intercal}$ está en su espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, por lo que uno de los autovalores es cero. De hecho, al diagonalizar por congruencia vemos que es semidefinida positiva

$$\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(2)\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}2&0&0\\-1&3&-3\\-1&-3&3\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(2)\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix}2&0&0\\0&6&-6\\0&-6&6\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&-6&0\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{} \begin{bmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\square$

(L-20) Problema 7(b) Es definida positiva

$$\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(2)\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}2&0&0\\-1&3&1\\-1&1&3\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(2)\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix}2&0&0\\0&6&2\\0&2&6\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(3)\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&2&16\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(3)\mathbf{3}]}]{} \begin{bmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&48\end{bmatrix}$$

¡Por tanto, aquí el criterio de Sylvester funciona!... $\det(2) = 2$; $\quad \begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix} = 3$; $\quad \det(\mathbf{B}) = 4$.

$\square$

(L-20) Problema 7(c) Los autovalores de $\mathbf{C}$ son el cuadrado de los de la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

así, si esta matriz es de rango completo, entonces $\mathbf{C}$ es definida positivo. Pero veámoslo mediante diagonalización por congruencia:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{3}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}.$$

Puesto que no hay pivotes nulos, no hay autovalores nulos, así pues el cuadrado de dichos autovalores siempre es positivo, por lo que $\mathbf{C}$ es definida positiva.

□

(L-20) Problema 8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix};$$

la forma cuadrática no es definida (sea cual sea el valor de a).

□

(L-20) Problema 9. $\mathbf{A}$ es simétrica y por lo tanto diagonalizable:

$$\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1};$$

y sabemos que en este caso

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{SD}^n\mathbf{S}^{-1};$$

Así pues, como $\mathbf{A}$ es definida positiva, sus autovalores son positivos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ y entonces $\lambda_1^{-1} > 0$ y $\lambda_2^{-1} > 0$ que son los autovalores de $\mathbf{A}^{-1}$.

□

(L-20) Problema 10. La ecuación característica es:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0;$$

cuyas soluciones son

$$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2}$$

pero

$$(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + 4b^2 = a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2 = (a-c)^2 + (2b)^2$$

que es una suma de cuadrados, y por lo tanto, lo que hay dentro de la raíz cuadrada es mayor o igual a cero. Así pues, los **autovalores son reales** (no hay raíces cuadradas de números negativos).

Por otra parte, si $a > 0$ y $ac > b^2$ necesariamente $c \geq 0$. Así que sabemos que $(a+c) > 0$ y por tanto

$$\lambda_1 = \frac{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + (2b)^2}}{2} > 0$$

Además, puesto que $ac > b^2$, sabemos que $\det \mathsf{A} = ac - b^2 > 0$; pero, puesto que $\lambda_1\lambda_2 = \det \mathsf{A} > 0$ y $\lambda_1 > 0$, necesariamente $\lambda_2 > 0$.

□

(L-20) Problema 11(a) Miremos los signos de los pivotes

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&4\\3&4&9\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\overset{\tau}{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&-2&0\end{bmatrix} \xrightarrow[{\substack{\overset{\tau}{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}]{} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\tau}{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&-4\end{bmatrix} \xrightarrow[\overset{\tau}{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$$

Puesto que hay tanto pivotes positivos como negativos, la matriz **es indefinida.**

□

(L-20) Problema 11(b)

$$\begin{bmatrix}1&2&0&0\\2&6&-2&0\\0&-2&5&-2\\0&0&-2&3\end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\tau}{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&2&-2&0\\0&-2&5&-2\\0&0&-2&3\end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\tau}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&2&0&0\\0&-2&3&-2\\0&0&-2&3\end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\tau}{[(\frac{2}{3})\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-2&\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

Puesto que aplicando eliminación usando *solo* transformaciones *Tipo I* hemos llegado a una matriz triangular cuyos pivotes son positivos $\rightarrow$ **Definida positiva.**

□

(L-20) Problema 11(c) Puesto que B es Definida positiva, $-\mathsf{B}$ es **Definida negativa**.

□

(L-20) Problema 11(d) Puesto que A tiene dos pivotes positivos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ y uno negativo $\lambda_3 < 0$; los pivotes de D —que son los inversos de los de A— conservan los signos. Por tanto es: **indefinida.**

(ejercicio 14 del conjunto de problemas 6.2 del libro de texto)

□

(L-20) Problema 12. $\begin{pmatrix}0 & a & 0\end{pmatrix}$, con $a \neq 0$

□

(L-20) Problema 13. $\boldsymbol{x}(\mathsf{A}+\mathsf{B})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\mathsf{A}+\boldsymbol{x}\mathsf{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\mathsf{B}\boldsymbol{x} > 0,$ ya que A y B son definidas positivas.

□

(L-20) Problema 14(a)

$$\begin{bmatrix}\mathsf{A}\\\hline\mathsf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\overset{\tau}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&2&3\\1&2&5&9\\1&3&9&19\\\hline 1&-1&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\overset{\tau}{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}\\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&3\\1&3&3&10\\\hline 1&-1&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\tau}{[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\\\hline 1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathsf{L}\\\hline\mathsf{E}\end{bmatrix}$$

Así pues, las trasformaciones de Gauss son

$$\mathsf{G}_{1\triangleright} = \begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}; \quad \mathsf{G}_{2\triangleright} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}; \quad \mathsf{G}_{3\triangleright} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{bmatrix};$$

$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{G}}_{1\triangleright}\ \dot{\mathbf{G}}_{2\triangleright}\ \dot{\mathbf{G}}_{3\triangleright}$. La matriz $\dot{\mathbf{U}}$ es $\dot{\mathbf{E}}^{-1}$, es decir: $\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{E}}^{-1} = (\dot{\mathbf{G}}_{1\triangleright}\dot{\mathbf{G}}_{2\triangleright}\dot{\mathbf{G}}_{3\triangleright})^{-1} = \dot{\mathbf{G}}_{3\triangleright}^{-1}\dot{\mathbf{G}}_{2\triangleright}^{-1}\dot{\mathbf{G}}_{1\triangleright}^{-1}$, y la factorización $\dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&2&1&\\1&3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&2&3\\&&1&3\\&&&1\end{bmatrix} = \dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}$$

que resulta ser $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{L}}^{\mathsf{T}}$ por ser $\mathbf{A}$ simética.

□

(L-20) Problema 14(b)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\ {[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&1&2&2\\1&1&2&3\\\hline 1&-1&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&2\\\hline 1&-1&0&0\\0&1&-1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\\\hline 1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{L}\\\hline\dot{\mathbf{E}}\end{bmatrix}$$

Así pues, las trasformaciones de Gauss son

$$\dot{\mathbf{G}}_{1\triangleright} = \begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};\quad \dot{\mathbf{G}}_{2\triangleright} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};\quad \dot{\mathbf{G}}_{3\triangleright} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix};$$

$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{G}}_{1\triangleright}\ \dot{\mathbf{G}}_{2\triangleright}\ \dot{\mathbf{G}}_{3\triangleright}$. La matriz $\dot{\mathbf{U}}$ es $\dot{\mathbf{E}}^{-1}$, es decir: $\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{E}}^{-1} = \dot{\mathbf{G}}_{3\triangleright}^{-1}\dot{\mathbf{G}}_{2\triangleright}^{-1}\dot{\mathbf{G}}_{1\triangleright}^{-1}$, y la factorización $\dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&1&1&\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&1&1\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix} = \dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}$$

que resulta ser $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{U}}^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}$ por ser $\mathbf{A}$ simética.

□

(L-20) Problema 15.

$$\begin{bmatrix}3&6\\6&16\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}} \begin{bmatrix}3&0\\6&4\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}$$

por tanto

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3&6\\6&16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

Los coeficientes de los cuadrados son los pivotes en $\mathbf{D}$, y los coeficientes dentro de los cuadrados son las columnas de $\mathbf{L}$.

□

(L-20) Problema 16(a)

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix}2-\lambda&1&0&0\\1&2-\lambda&0&0\\0&0&a-\lambda&0\\0&0&a&a-\lambda\end{vmatrix} = (a-\lambda)^2\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto el autovalor $\lambda = a$ está repetido (multiplicidad 2); los otros dos autovalores salen de

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0; \qquad \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

Por tanto los dos autovalores que faltan son 1 y 3.

□

(L-20) Problema 16(b) Cuando $\lambda = a = 2$, la matriz

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

es de rango 3 (de manera inmediata se puede ver que hay tres columnas pivote). Así pues, en este caso el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es de dimensión 1 (cuatro columnas menos el rango); y por tanto NO es posible encontrar dos autovectores linealmente independientes para el autovalor repetido $\lambda = 2$, y consecuentemente la matriz NO ES DIAGONALIZABLE.

□

(L-20) Problema 16(c)

$$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\Big((2-\lambda)^2 - 1\Big) = 0$$

Un autovalor es $\lambda = 1$. Los otros dos son las raíces de

$$\Big((2-\lambda)^2 - 1\Big) = 4 + \lambda^2 - 4\lambda - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

que son $\lambda = 3$ y $\lambda = 1$. Por tanto, $\boxed{\mathbf{D} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right].}$

- Para $\lambda = 3$

$$\mathbf{A} - 3\lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

  por tanto el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un autovector correspondiente a $\lambda = 3$. Como su norma es $\sqrt{2}$, el vector $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovector de norma 1 correspondiente a $\lambda = 3$.

- Para $\lambda = 1$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

  por tanto el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un autovector de norma 1 correspondiente a $\lambda = 1$; y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un autovector correspondiente a $\lambda = 3$ de norma es $\sqrt{2}$, así pues un segundo autovector normalizado es $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Es inmediato comprobar que estos tres autovectores de norma uno son ortogonales entre si. Por tanto una posible matriz orto-normal $\mathbf{P}$ es:

$$\boxed{\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

□

(L-20) Problema 16(d) La forma cuadrática

$$f(x,y,z) = \boldsymbol{x}\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy,$$

sabemos que es definida positiva, ya que hemos visto que los tres autovalores de $\mathbf{B}$ son positivos (3, 1, y 1).

□

(L-20) Problema 17(a) Hay dos posibilidades:

- $a = -4/5$ y $b = 3/5$
- $a = 4/5$ y $b = -3/5$.

□

(L-20) Problema 17(b) Cualesquiera valores de a y b que formen un vector que no sea múltiplo de la segunda columna de $\mathbf{A}$; por ejemplo, $a = 1$ y $b = 0$.

□

(L-20) Problema 17(c) Justo lo contrario del apartado anterior; necesitamos que la matriz sea singular, por tanto necesitamos que la primera columna sea un múltiplo de la segunda; por ejemplo: $a = 3$ y $b = 4$.

□

(L-20) Problema 17(d) Por ser simétrica necesariamente $b = 3/5$. Además necesitamos que $a < 0$ y que $\det \mathbf{A} > 0$; es decir $a \cdot 4/5 - (3/5)^2 > 0$, o

$$a \cdot 4/5 > (3/5)^2$$

que no es posible si además a tiene que ser negativa. Por tanto NO EXISTEN TALES VALORES a Y b.

□

(L-20) Problema 18(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Si $a = 1$ la matriz $\mathbf{Q}$ es semidefinida positiva.

□

(L-20) Problema 18(b)

- Si $a > 1$ la matriz $\mathbf{Q}$ es definida positiva.
- Si $a < 1$ la matriz $\mathbf{Q}$ es indefinida.

□

Ejercicio 47(a)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a;$$

por lo que el determinante $|\mathbf{A}|$ es distinto de cero si y sólo si $a \neq 0$.

□

Ejercicio 47(b) No, ya que:

$$|1| = 1; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

cuando todos deberían ser positivos. Por tanto la matriz es no definida.

□

Ejercicio 47(c)

$$\left[\begin{array}{cccc} 1&1&0&1\\ 1&2&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&0&0&0\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&-1&0&-2\\ \hline 1&-1&0&-2\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(1)\mathbf{4}+\mathbf{1}]\\ [(2)\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{4}+\mathbf{2}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&-2\\ \hline 0&0&0&-2\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0\\ 1&-1&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(\frac{1}{2})\mathbf{2}]\\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ \hline 0&0&0&1\\ 0&\frac{1}{2}&0&\frac{-1}{2}\\ 0&0&1&0\\ 1&\frac{-1}{2}&0&\frac{-1}{2} \end{array}\right]$$

Así pues,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 0&1/2&0&-1/2\\ 0&0&1&0\\ 1&-1/2&0&-1/2 \end{bmatrix}$$

□

Ejercicio 47(d) De los pasos tomados en el primer apartado es sencillo ver que, cuando $a = 0$, el rango de $\mathbf{A}$ es tres; y por tanto hay tres variables endógenas (o variables pivote). Así pues, tan sólo una variable puede ser exógena (o libre).

Puesto que cuando $a = 0$ las columnas segunda y cuarta son iguales (y por tanto dependientes), podemos tomar como variable libre (o exógena), o bien la segunda, o bien la cuarta.

□

Ejercicio 48(a) *Es verdadero.* Si $\mathbf{A}$ es simétrica, estonces $\mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{A}$, por tanto

$$\left(\mathbf{A}^2\right)^{\intercal} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}\right)^{\intercal} = \mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal} = \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)^2 = \mathbf{A}^2,$$

es decir, que $\mathbf{A}^2$ también es simétrica.

□

Ejercicio 48(b) *Es verdadero.* Veamoslo:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^2 = (\mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{A}+\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{A}+\mathbf{A} = \mathbf{I}-\mathbf{A}$$

A las matrices con esta propiedad se las denomina *"matrices idempotentes"*.

□

Ejercicio 48(c) *Es falso.* El determinate de una matriz es igual al producto de sus autovaloes; si uno de ellos es cero, necesariamente la matriz es singular. En tal caso sus columnas son linealmente dependientes y es posible encontrar una solución distinta a la trivial ($\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$) para dicho sistema homogeneo; así que hay más de una solución y el sistema es necesariamente *indeterminado.*

□

Ejercicio 48(d) *Verdadero.* Por el mismo motivo de antes, $\underset{m\times m}{\mathbf{A}}$ es singular, lo que quiere decir que el subespacio generado por las columnas de $\mathbf{A}$ (*que llamaremos espacio columna de* $\mathbf{A}$, $\mathcal{C}(\mathbf{A})$) es de dimensión menor que m, pero eso quiere decir que existen vectores de $\mathbb{R}^m$ que no pertenencen a $\mathcal{C}(\mathbf{A})$. Si $\boldsymbol{b}$ fuera uno de ellos, entonces no existiría una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$ igual a $\boldsymbol{b}$, es decir, que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ será incompatible para dicho $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}(\mathbf{A})$.

□

Ejercicio 48(e) *Verdadero.* Si $\mathbf{Q}$ es ortogonal, entonces $\mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$; lo que quiere decir que su inversa es su traspuesta ($\mathbf{Q}^{\intercal} = \mathbf{Q}^{-1}$), y por tanto $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\intercal}$; pero entonces $\mathbf{Q}^{-1}$ también tiene columnas perpendiculares (puesto que $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\intercal} = \mathbf{I}$ sólo tiene ceros fuera de la diagonal) que son de norma uno (ya que $\mathbf{Q}\ \mathbf{Q}^{\intercal}$ sólo tiene unos en la diagonal).

□

Ejercicio 48(f) *Falso.* La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1&1\\ 0&1 \end{bmatrix}$$

tiene como único autovalor $\lambda = 1$, pero $\mathbf{A}$ no es la matriz identidad.

□

Ejercicio 49(a) Verdadero.

□

Ejercicio 49(b) $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ si y sólo si todos los coeficientes a_j son iguales a cero.
Es decir, si la única solución a $\left[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\right]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ es un vector de ceros (es decir, si $\mathcal{N}\left(\left[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\right]\right)$ es $\{\boldsymbol{0}\}$.

□

Ejercicio 49(c) Falso, ya que $a_1\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ incluso para $a_1 \neq 0$.

□

Ejercicio 49(d) podemos encontrar n autovectores linealmente independientes.

□

Ejercicio 49(e) $\sqrt{7}$

□

Ejercicio 49(f) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$

□

Ejercicio 50(a) Falso. $\left|\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right| = 0$

□

Ejercicio 50(b) Verdadero $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \neq 0 \Rightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0 \neq \det(\mathbf{B})$

□

Ejercicio 50(c) Verdadero. El determinante cambia de signo, y el producto de los autovalores es igual al determinante.

□

Ejercicio 50(d) Verdadero

□

Ejercicio 50(e) Verdadero. En tal caso $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})$ es de rango completo, y $\dim\mathcal{N}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) = 0$, por tanto no hay autovectores asociados al autovalor 5.

□

Ejercicio 50(f) Falso. $\left(\begin{smallmatrix}-1&1\\-1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$ no tiene solución y $|\mathbf{A}| = 0$.

□

Ejercicio 50(g) Falso. Como máximo puede tener tres pivotes.

□

Ejercicio 50(h) Verdadero. $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ pero $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}(\mathbf{C})$; por tanto no todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ están en $\mathcal{C}(\mathbf{C})$. Es decir, $\operatorname{rango}(\mathbf{C}) = \dim\mathcal{C}(\mathbf{C}) < n = \dim\mathbb{R}^n$.

□

Ejercicio 50(i) Falso. Si algún autovalor es igual a cero, la matriz no es invertible. Por ejemplo una matriz nula y cuadrada.

□

Ejercicio 50(j) Verdadero. Si es invertible tiene rango completo —n pivotes iguales a uno con ceros por encima y por debajo... es decir la identidad).

□

Ejercicio 51(a) $\mathbf{A}$ y $\mathbf{D}$ por tener tres pivotes (para $\mathbf{A}$ se ve directamente, y para $\mathbf{D}$ tras el primer paso de eliminación).

□

Ejercicio 51(b) Sólo $\mathbf{B}$ (puesto que sólo tiene dos autovalores 0 y 2, necesariamente alguno esta repetido).

□

Ejercicio 51(c) $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ por ser no invertibles (ambas tienen un autovalor igual a cero)

□

Ejercicio 51(d) $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ por tener autovalores distintos (además $\mathbf{D}$ es simétrica).
Para $\mathbf{B}$, el autovalor $\lambda = 2$ está repetido:

$$(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

sólo una columna libre, y por tanto sólo podemos encontrar una dirección asociada al autovalor repetido $\lambda = 2$. Es decir, *la matriz* $\mathbf{B}$ *no es diagonalizable.*

□

Ejercicio 51(e) Para la matriz simétrica $\mathbf{D}$.

□

Ejercicio 52(a) Por ser la matriz triangular los autovalores coinciden con los números que aparecen en la diagonal principal; es decir, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda = 1$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tres autovectores independientes son

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = 2$

$$(\mathbf{A} - 2\lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Un autovector es

$$\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Ejercicio 52(b) Puesto que hemos encontrado 4 autovectores independientes, la matriz es diagonalizable.

□

Ejercicio 52(c) La factorización $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^\intercal$ implica que la matriz $\mathbf{A}$ debe ser simétrica. puesto que en este caso la matriz del enunciado no es simétrica, no es posible encontrar tal factorización.

□

Ejercicio 52(d)

$$\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{\text{producto de los autovalores de } \mathbf{A}} = \frac{1}{2}.$$

□

Ejercicio 53(a) Si, puesto que sus autovalores no están repetidos.

□

Ejercicio 53(b) No, $\boldsymbol{v}_3$ es múltiplo de $\boldsymbol{v}_1$, por lo que es un autovector asociado a λ_1.

□

Ejercicio 53(c)

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 - \mathbf{A}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 - \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

□

Ejercicio 54(a) Los dos primeros vectores de la solución son el mismo, así que la dimensión del conjunto de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es dos; y el número de columnas de $\mathbf{A}$ debe ser cuatro, por lo que el rango de la matriz es 2.

El último vector de la solución nos indica que la última columna de $\mathbf{A}$ es una columna de ceros; y el primero que la primera columna de $\mathbf{A}$ es el vector opuesto a la tercera columna de $\mathbf{A}$. Así pues, una posible solución es:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x - z & = 0\\ y & = 0\end{cases}.$$

Pero ésta no es la única respuesta posible (por ejemplo, puede haber más de dos filas (ecuaciones) en el sistema). El requisito es que el rango de $\underset{m\times 4}{\mathbf{A}}$ sea 2, que la última columna sea nula, y la primera, el vector opuesto de la tercera.

□

Ejercicio 54(b) Puesto que el polinomio característico de $\mathbf{A}$ es de grado 5, sabemos que la matriz es de orden 5 ($\underset{5\times 5}{\mathbf{A}}$). Y puesto que 0 no es una raíz de $p(\cdot)$, entonces 0 no es un autovalor de $\mathbf{A}$, así pues, $\mathbf{A}$ es invertible y su rango es 5.

□

Ejercicio 55(a) Puesto que la matriz es invertible, el rango es 3; y el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ es todo $\mathbb{R}^3$. Por ello no hay columnas libres, es decir, el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ sólo contiene el vector cero $\mathbf{0}$.

□

Ejercicio 55(b) Puesto que $\mathbf{L}$ es $\mathbf{E}^{-1}$ (la inversa del producto de matrices elementales necesarias para triangularizar $\mathbf{A}$), el 5 en la primera posición de la segunda fila de $\mathbf{L}$ nos dice que el primer paso fue *"restar a la segunda fila cinco veces la primera"*.

Puesto que $\mathbf{U}$ tiene tres pivotes, es de rango completo; y por tanto es invertible.

El determinante es $\det(\mathbf{A}) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33}$.

□

Ejercicio 55(c) La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

no puede ser triangularizada sin permutar las filas previamente.

Sin embargo, permutando la primera fila con la tercera, la matriz ya es triangular. De hecho toda matriz invertible admite la siguiente factorización:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}.$$

La matriz $\mathbf{A}$ es invertible ya que una vez se han permutado las filas, aparecen tres pivotes; es decir, la matriz es de rango completo.

□