# Índice

# Lección 2. Conceptos algebraicos

Marcos Bujosa

17 de septiembre de 2025

**Resumen**

Hoy veremos conceptos algebraicos usados en la modelización ARIMA de series temporales.

- (slides) — (html) — (pdf) — (mybinder)
  - implementacion series formales: (slides) — (html) — (mybinder)

## 1. Secuencias o sucesiones de números

### 1.1. El espacio vectorial de las secuencias infinitas $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot\right)$

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ de secuencias infinitas de números reales:

$$\boldsymbol{x} \quad = \quad (\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots) \quad = \quad (x_t \mid t \in \mathbb{Z}).$$

Podemos sumar secuencias, o multiplicarlas por escalares. Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ y $a \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_t + y_t \mid t \in \mathbb{Z})$$

$$a \cdot \boldsymbol{x} = (a \cdot x_t \mid t \in \mathbb{Z})$$

El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, con la suma elemento a elemento $(+)$ y el producto por escalares $(\cdot)$, constituye un **espacio vectorial**.

#### 1.1.1. Notación mediante funciones generatrices

Como estas secuencias son infinitas en ambas direcciones, no hay un primer elemento.

Por esta razón, se utilizan subíndices que indiquen la posición de sus elementos genéricos:

$$\boldsymbol{x} \quad = \quad (\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots) \quad = \quad (x_t \mid t \in \mathbb{Z}).$$

Pero cuando escribimos una secuencia numérica concreta, por ejemplo

$$\boldsymbol{a} = (\ldots,\ 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 2,\ 0, \ldots),$$

no tenemos indicación de la posición *absoluta* de cada número.

En este ejemplo, conocemos la posición relativa del 4 (que aparece inmediatamente después del 1 y precede al 9); sin embargo, esta notación no nos permite determinar si el 4 ocupa el índice cero, cien o menos mil quinientos millones. Al escribir una secuencia específica de números, la notación resulta ser poco precisa.

**Las *funciones generatrices* resuelven esta imprecisión**. En ellas, los elementos se separan con el símbolo "+" y la posición es indicada como potencia del símbolo "$z$".

$$\boldsymbol{a}(z) \;=\; \cdots + 0z^{-2} + 1z^{-1} + 4z^{0} + 9z + 2z^{2} + 0z^{3} + \cdots .$$

Así, podemos denotar una secuencia $\boldsymbol{x}$ de manera muy compacta del siguiente modo:

$$\boldsymbol{x}(z) \quad = \quad \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t z^t.$$

Nótese que **esta expresión no es una suma**; solo es un modo de expresar una secuencia. Dicha expresión se denomina *función generatriz.*

La sucesión $\mathbf{0} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} 0z^t$ se denomina *sucesión nula.*

Además, denotaremos con $\mathbf{1}$ la secuencia constante uno: $(\ldots, 1, 1, 1, \ldots) = \sum_{t\in\mathbb{Z}} 1z^t$.

### 1.1.2. Características de algunas secuencias

En una sucesión $\boldsymbol{c}$ no nula llamamos:

**Grado** al menor índice entero que verifica la propiedad:

$$j > grado(\boldsymbol{c}) \Rightarrow c_j = 0.$$

**Cogrado** al mayor índice entero que verifica la propiedad:

$$j < cogrado(\boldsymbol{c}) \Rightarrow c_j = 0.$$

Para $\mathbf{0}$ diremos que: $grado(\mathbf{0}) = -\infty$ y $cogrado(\mathbf{0}) = \infty$. Una sucesión $\boldsymbol{c}$ es:

**Absolutamente sumable ($\ell^1$)** si $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |c_t| < \infty$ (véase Cor. 13).

**De cuadrado sumable ($\ell^2$)** si $\sum_{t=-\infty}^{\infty} c_t^2 < \infty$.

Toda sucesión absolutamente sumable también es de cuadrado sumable, $\ell^1 \subset \ell^2$ (Prop. 14).

### 1.1.3. Algunos subespacios vectoriales de $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$

Los siguientes tipos de subconjuntos de secuencias (con la suma y producto por escalares indicados más arriba) resultan ser subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ .

**Secuencias con final** aquellas con grado (a partir de cierto índice son cero):

$$\boldsymbol{a}(z) = (\ldots,\ a_{p-3},\ a_{p-2},\ a_{p-1},\ a_p,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots) = \sum_{t=-\infty}^{p} a_t z^t; \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

**Secuencias con principio** tienen cogrado (antes de cierto índice son cero):

$$\boldsymbol{a}(z) = (\ldots,\ 0,\ 0,\ 0,\ a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3},\ldots) = \sum_{t=k}^{\infty} a_t z^t; \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

**Series formales** aquellas con cogrado $\geq 0$:

$$\boldsymbol{a}(z) = (\ldots,\ 0,\ 0,\ 0,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots) = \sum_{t=k}^{\infty} a_t z^t; \qquad k \geq 0.$$

Los **polinomios** son series formales con grado finito: $\sum_{t=k}^{p} a_t z^t; \qquad k \geq 0.$

- Por ejemplo $2z - 4z^2$ es un polinomio de grado 2 y cogrado 1.

# 2. Producto convolución

Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ sucesiones con principio (con cogrado). Su producto convolución es la sucesión cuyo elemento $t$-ésimo es:

$$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_t = \sum_{r+s=t} a_r b_s; \qquad r, s, t \in \mathbb{Z}.$$

El cogrado de $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ es la suma de los respectivos cogrados. (Prop. 15)

La convolución también está definida entre sucesiones

- con final (con grado); y el grado es la suma de los respectivos grados (Prop. 16).
- absolutamente sumables ($\ell^1$); $\sum_{t\in\mathbb{Z}} |a_t| < \infty$ (Prop. 17).

# 3. Anillos conmutativos y cuerpos

## 3.1. Anillos conmutativos

**Anillo conmutativo** es un conjunto $\mathsf{S}$ equipado con dos operaciones binarias (suma, $+$, y producto, $*$) que satisfacen tres conjuntos de axiomas (*familiares para usted*).

En cuanto a la suma:

- $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ para todo $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ en $\mathsf{S}$ (i.e. $+$ es asociativa).
- $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ para todo $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ en $\mathsf{S}$ (i.e. $+$ es conmutativa).
- Existe un elemento $\mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{a}+\mathbf{0} = \boldsymbol{a}$ para todo $\boldsymbol{a} \in \mathsf{S}$.
- Para cada $\boldsymbol{a} \in \mathsf{S}$ existe $-\boldsymbol{a} \in \mathsf{S}$ tal que $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.

En cuanto al producto:

- $(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})*\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}*(\boldsymbol{b}*\boldsymbol{c})$ para todo $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ en $\mathsf{S}$ (i.e. $*$ es asociativo).
- $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}*\boldsymbol{a}$ para todo $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ en $\mathsf{S}$ (i.e. $*$ es conmutativo).

- Existe un elemento 1 tal que $\boldsymbol{a} * 1 = \boldsymbol{a}$ para todo $\boldsymbol{a} \in \mathsf{S}$.

El elemento 1 es la secuencia cuyos elementos son cero excepto un 1 en la posición cero:

$$1 \;=\; 1z^0 \;=\; (\ldots, 0, 0, \boxed{1}, 0, 0, \ldots).$$

El producto es distributivo respecto de la suma: Para todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ en $\mathsf{S}$:

- $\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{c})$.
- $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) * \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{c} * \boldsymbol{a})$.

### 3.2. Cuerpos

**Cuerpo** es un anillo conmutativo tal que:

- Para cada $\boldsymbol{a} \in \mathsf{S}$ no nulo ($\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$), existe $\boldsymbol{b} \in \mathsf{S}$ tal que $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = 1$.

  (*Todo elemento no nulo del conjunto tiene una inversa en dicho conjunto*).

Entonces se dice que $\boldsymbol{b}$ es el inverso de $\boldsymbol{a}$; y que $\boldsymbol{a}$ es el inverso de $\boldsymbol{b}$.

## 4. Clasificación de subconjuntos de sucesiones

**Son anillos el conjunto de** series formales (cogrado $\geq 0$), polinomios y $\ell^1$ (Prop 18).

(*En estos conjuntos las operaciones funcionan como usted está acostumbrado*).

Pero estas sucesiones o *no tienen inversa; o* sus inversas *son de otro tipo* (p.e. generalmente las inversas de polinomios no son polinomios).

**Son cuerpos el conjunto de** secuencias con principio (cuerpo de fracciones de series formales: Prop 19), las secuencias con final (la demo es similar) y las fracciones de polinomios.

Con $\boldsymbol{a}^{-\triangleright} \equiv \frac{1}{\boldsymbol{a}}{\triangleright}$ denotamos la inversa de $\boldsymbol{a}$ con principio (con cogrado).

Con $\boldsymbol{a}^{\blacktriangleleft-} \equiv {\blacktriangleleft}\frac{1}{\boldsymbol{a}}$ denotamos la inversa de $\boldsymbol{a}$ con final (con grado).

## 5. Inversas

### 5.1. Inversas de secuencias con principio

Supongamos que $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y que $k = \mathit{cogrado}(\boldsymbol{a})$. Definimos $\boldsymbol{b}$ del siguiente modo:

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < -k \\ \frac{1}{a_k} & \text{si } j = -k \\ \frac{-1}{a_k} \sum_{r=-k}^{j-1} b_r a_{j+k-r} & \text{si } j > -k \end{cases}.$$

Por construcción, $\mathit{cogrado}(\boldsymbol{b}) = -k$; y en consecuencia $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_j = 0$ si $j < 0$. Obviamente, $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_0 = 1$; y además $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_j = 0$ si $j > 0$.

Es así ya que

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_j &= \sum_{r+s=j} a_r b_s = \sum_{r=-k}^{j-k} a_{j-r} b_r \\
&= \sum_{r=-k}^{j-k-1} a_{j-r} b_r + a_k b_{j-k} \\
&= \sum_{r=-k}^{j-k-1} a_{j-r} b_r + a_k \Big( \frac{-1}{a_k} \sum_{r=-k}^{j-k-1} b_r a_{j-k+k-r} \Big) \\
&= \sum_{r=-k}^{j-k-1} a_{j-r} b_r - \sum_{r=-k}^{j-k-1} b_r a_{j-r} = 0.
\end{aligned}
$$

**Ejemplo**: Para el polinomio $1 - az$,

$$
(1-az)^{-\triangleright} = \text{inversa con principio de } (1-az) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < 0 \\ 1 & \text{si } j = 0 \\ a^j & \text{si } j > 0 \end{cases};
$$

es decir,

$$
(1-az)^{-\triangleright} = (\ldots, 0, \ \boxed{1}, \ a, \ a^2, \ a^3, \ldots) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j;
$$

(donde la posición $j = 0$ está recuadrada).

Comprobación:

$$
\begin{aligned}
(1-az) \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j &= \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j - az \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j - \sum_{j=1}^{\infty} a^j z^j \\
&= a^0 z^0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a^j - a^j) z^j \\
&= 1 z^0 + \sum_{j=1}^{\infty} 0 z^j = 1.
\end{aligned}
$$

## 5.2. Inversas de secuencias con final

Supongamos que $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y que $p = grado(\boldsymbol{a})$. Definimos $\boldsymbol{b}$ del siguiente modo:

$$
b_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j > -p \\ \frac{1}{a_p} & \text{si } j = -p \\ \frac{-1}{a_p} \sum_{r=j-1}^{-p} b_r a_{j+p-r} & \text{si } j < -p \end{cases} \quad \Rightarrow \quad grado(\boldsymbol{b}) = -p.
$$

**Ejemplo**: Para el polinomio $1 - az$,

$$(1-az)^{\blacktriangleleft-} = \text{inversa con final de } (1-az) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > -1 \\ \frac{-1}{a} & \text{si } j = -1 \\ \frac{-1}{a^j} & \text{si } j < -1 \end{cases};$$

es decir,

$$(1-az)^{\blacktriangleleft-} = (\dots,\ \frac{-1}{a^3},\ \frac{-1}{a^2},\ \frac{-1}{a},\boxed{0},\dots) = \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j.$$

Comprobación:

$$\begin{aligned}
(1-az)\sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j &= \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j + (-az)\sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j \\
&= \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j + \sum_{j=-\infty}^{0} a^j z^j \\
&= \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j + \sum_{j=-\infty}^{-1} a^j z^j + a^0 z^0 \\
&= \sum_{j=-\infty}^{-1} (a^j - a^j) z^j + 1z^0 = 1.
\end{aligned}$$

## 5.3. Más sobre inversas

Si definimos la función *reverso* entre secuencias $R : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ tal que $R(a_j) = a_{-j}$:

$$R(\boldsymbol{a}(z)) = \boldsymbol{a}(z^{-1});$$

se puede demostrar que para toda secuencia con final $\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a}^{\blacktriangleleft-} = R\left( \left(R(\boldsymbol{a})\right)^{-\triangleright} \right).$$

Por otra parte, si alguna inversa resulta ser absolutamente sumable (si pertenece a $\ell^1$), este hecho se indica denotando dicha inversa con $\boldsymbol{a}^{-1} \equiv \frac{1}{\boldsymbol{a}}$.

## 5.4. Inversas de polinomios

Todo polinomio:

**por tener cogrado** tiene una inversa con cogrado (con principio).

**por tener grado** tiene una inversa con grado (con final).

Para el polinomio $1 - az$ estas inversas son:

$$(1-az)^{-\triangleright} = \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j \quad = \quad (\ldots, 0, \boxed{1}, \; a, \; a^2, \; a^3, \ldots).$$

$$(1-az)^{\blacktriangleleft -} = \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j \quad = \quad (\ldots, \; \tfrac{-1}{a^3}, \; \tfrac{-1}{a^2}, \; \tfrac{-1}{a}, \boxed{0}, \ldots).$$

Es evidente que si $|a| \neq 1$ una de las inversas está en $\ell^1$ y la otra no.

Pero si $|a| = 1$ ninguna de las inversas pertenece a $\ell^1$ (ninguna es sumable).

Si alguna inversa es absolutamente sumable, se denota con $\boldsymbol{a}^{-1} \equiv \frac{1}{\boldsymbol{a}}$.

(Implementación en Python —enlace al Notebook).

Además, por el Teorema fundamental del Álgebra también sabemos que:

> *Todo polinomio univariante no nulo con coeficientes reales puede factorizarse como*
>
> $$c \cdot \boldsymbol{p}_1 * \cdots * \boldsymbol{p}_k,$$
>
> *donde $c$ es un número real y cada $\boldsymbol{p}_i$ es un polinomio mónico (i.e., el coeficiente de $z^0$ es 1) de grado a lo sumo dos con coeficientes reales. Más aún, se puede suponer que los factores de grado dos no tienen ninguna raíz real.*

Podemos factorizar un polinomio $\boldsymbol{a}$ sin raíces de módulo 1 como: $\quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}$,

- donde $\boldsymbol{b}$ es un polinomio con las raíces de módulo menor que 1, y
- donde $\boldsymbol{c}$ es un polinomio con las raíces de módulo mayor que 1

Como los polinomios $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, y las inversas $\boldsymbol{b}^{\blacktriangleleft -}$ y $\boldsymbol{c}^{-\triangleright}$, pertenecen al anillo $\ell^1$,

$$\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b}^{\blacktriangleleft -} * \boldsymbol{c}^{-\triangleright}) = (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) * (\boldsymbol{b}^{\blacktriangleleft -} * \boldsymbol{c}^{-\triangleright}) = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{b}^{\blacktriangleleft -} * \boldsymbol{c} * \boldsymbol{c}^{-\triangleright} = 1 * 1 = 1.$$

La secuencia $(\boldsymbol{b}^{\blacktriangleleft -} * \boldsymbol{c}^{-\triangleright})$ es la inversa de $\boldsymbol{a}$ en $\ell^1$.

Dicha inversa (generalmente con grado y cogrado no finitos) se denota con $\boldsymbol{a}^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{a}}$.

(*y no existe si* $\boldsymbol{a}$ *tiene alguna raíz de módulo* 1).

En los manuales de *series temporales* se dice que un polinomio $\boldsymbol{a}$ **es invertible** cuando

$$\text{(la inversa con principio)} \;\; \boldsymbol{a}^{-\triangleright} = \boldsymbol{a}^{-1} \;\; \text{(la inversa absolutamente sumable).}$$

(y solo es posible *si sus raíces están fuera del círculo unidad*).

**Hay infinitas inversas**. Si una secuencia tiene dos inversas, entonces tiene infinitas.

Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{d}$ secuencias tales que $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = 1$ y $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{d} = 1$; y sean $\beta$ y $\delta$ dos escalares tales que $\beta + \delta = 1$. Entonces

$$\boldsymbol{a} * (\beta \boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{d}) = \beta(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) + \delta(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{d}) = \beta 1 + \delta 1 = (\beta + \delta) 1 = 1$$

Así, para cualesquiera $\beta$ y $\delta$ tales que $\beta + \delta = 1$, sabemos que $(\beta \boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{d})$ es otra inversa de $\boldsymbol{a}$.

### 5.5. Cuerpo de fracciones de polinomios

El *cuerpo de fracciones de polinomios*:

$$\{\boldsymbol{p} * \boldsymbol{q}^{-\triangleright} \mid \boldsymbol{p} \text{ y } \boldsymbol{q} \text{ son polinomios y } \boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}\}$$

es un subcuerpo del cuerpo de las sucesiones con principio (i.e., con cogrado finito).

*Toda fracción de sucesiones con grado y cogrado finitos (con principio y final) pertenece al cuerpo de fracciones de polinomios*, pues toda sucesión con grado $-k$ y cogrado es de la forma $\boldsymbol{p} * (z^k)^{-\triangleright}$, donde $\boldsymbol{p}$ es un polinomio.

Cuando las raíces del polinomio $\boldsymbol{q}$ están fuera del circulo unidad (i.e., $\boldsymbol{q}^{-\triangleright} = \boldsymbol{q}^{-1}$) es habitual denotar la secuencia $\boldsymbol{p} * \boldsymbol{q}^{-\triangleright}$ así $\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$. Es decir:

$$(\boldsymbol{p} * \boldsymbol{q}^{-\triangleright})(z) = \frac{\boldsymbol{p}(z)}{\boldsymbol{q}(z)}.$$

Este conjunto de sucesiones es uno de los pilares en la modelización ARIMA.

## 6. Operador retardo $\mathsf{B}$ y secuencias sumables.

En Series Temporales es habitual el uso del operador de retardo $\mathsf{B}$ en la notación:

$$\mathsf{B}x_t = x_{t-1}, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z}.$$

Aplicando el operador $\mathsf{B}$ repetidamente tenemos

$$\mathsf{B}^k x_t = x_{t-k}, \quad \text{para } t, z \in \mathbb{Z}.$$

Así, si la secuencia $\boldsymbol{x}(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t z^t$ es absolutamente sumable, entonces la expresión

$$\boldsymbol{x}(\mathsf{B}) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t \mathsf{B}^t \; = \; \cdots + x_{-2} + x_{-1} + x_0 + x_1 + \cdots$$

tiene sentido como suma (donde hemos sustituido $z$ por $\mathsf{B}$).

### 6.1. El operador retardo y el producto convolución

#### 6.1.1. Secuencias en el operador retardo $\boldsymbol{a}(\mathsf{B})$ actuando sobre secuencias

Así, para el polinomio $\boldsymbol{a}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$, y la secuencia $\boldsymbol{y}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(\mathsf{B})y_t &= (a_0 + a_1\mathsf{B} + a_2\mathsf{B}^2 + a_3\mathsf{B}^3)y_t \\
&= a_0 y_t + a_1\mathsf{B}^1 y_t + a_2\mathsf{B}^2 y_t + a_3\mathsf{B}^3 y_t \\
&= a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} \\
&= \sum_{r=0}^{3} a_r y_{t-r} \\
&= (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{y})_t.
\end{aligned}$$

Y en general, si $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{y}$ son secuencias absolutamente sumables, entonces

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(\mathsf{B})y_t &= (\cdots + a_{-2}\mathsf{B}^{-2} + a_{-1}\mathsf{B}^{-1} + a_0 + a_1\mathsf{B} + a_2\mathsf{B}^2 + \cdots)y_t\\ &= \cdots + a_{-2}y_{t+2} + a_{-1}y_{t+1} + a_0y_t + a_1y_{t-1} + a_2y_{t-2} + \cdots\\ &= (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{y})_t.\end{aligned}$$

### 6.1.2. El operador retardo y el producto convolución de una secuencia $\boldsymbol{x}$ por $z$

Del mismo modo que denotamos con 1 la secuencia

$$1 = (\ldots, 0, 0, \boxed{1}, 0, 0, \ldots) = 1z^0,$$

denotamos con $z$ la secuencia

$$z = (\ldots, 0, 0, \boxed{0}, 1, 0, \ldots) = 1z^1,$$

y con $z^{-1}$ la secuencia

$$z^{-1} = (\ldots, 0, 1, \boxed{0}, 0, 0, \ldots) = 1z^{-1}.$$

Evidentemente

$$z^2 = z * z = (\ldots, 0, 0, \boxed{0}, 0, 1, \ldots) = 1z^2.$$

De modo que

$$\boldsymbol{x} * z^k = \sum_{t\in\mathbb{Z}} x_t z^{t+k} = (\mathsf{B}^k x_t \mid t \in \mathbb{Z});$$

es decir, multiplicar por $z^k$ es sumar $k$ a todos los exponentes de la función generatriz.

## 7. Convolución de una serie formal con el "*reverso*"de otra

Por último, si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son series sumables, y la función *reverso* entre secuencias $R : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ es aquella función tal que $R(b_j) = b_{-j}$; es decir:

$$R\big(\boldsymbol{b}(z)\big) = \boldsymbol{b}(z^{-1});$$

donde $R(\boldsymbol{b})$ es sumable por serlo $\boldsymbol{b}$. Tenemos que $\boldsymbol{a}(z) * \boldsymbol{b}(z^{-1})$ es la siguiente secuencia sumable:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(z) * \boldsymbol{b}(z^{-1}) =&(a_0z^0 + a_1z^1 + a_2z^2 + \cdots)(\cdots + b_2z^{-2} + b_1z^{-1} + b_0z^0)\\ =&\Big(\ldots, \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j+2}b_j,\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j-1}b_j,\ \boxed{\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_jb_j},\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j+1}b_j,\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j+2}b_j, \ldots\Big)\\ =&\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j+k}b_j \mid k \in \mathbb{Z}\Big).\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\Big(\boldsymbol{a}(z) * \boldsymbol{b}(z^{-1})\Big)_k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j+k}b_j. \tag{1}$$

# 8. Resultados preliminares sobre series sumables

Los manuales de series temporales que conozco no presentan un tratamiento sistemático de las secuencias de números; pese a ser una herramienta fundamental en la modelización ARIMA. Esta sección tiene por objeto servir de referencia donde encontrar la demostración formal de un conjunto de resultados que son aplicados en los manuales de series temporales.

## 8.1. Introducción y motivación del enfoque elegido

En el capítulo primero de *Mathematics for the Physical Sciences*, Laurent Schwartz ofrece una introducción al concepto de **serie sumable** que se aleja del tratamiento habitualmente encontrado en cursos introductorios de cálculo o análisis.

### Lo usual es interpretar las series como sumas ordenadas

La mayoría de manuales presentan una serie infinita como una suma *ordenada*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n,$$

donde los términos están indexados por los números naturales y se suman uno tras otro. El foco está puesto en la convergencia del límite de las sumas parciales, es decir, en el *ordenamiento natural* de los términos; de manera que lo que se hace es considerar la sucesión de sumas parciales:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n,$$

y se dice que la serie converge a $S$ si

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S.$$

Como el conjunto de índices $\mathbb{N}$ es **ordenado**, tiene sentido ir sumando los términos “uno tras otro”.

### La propuesta de Schwartz: independencia del orden

Lo que propone Schwartz es una *generalización* del concepto de suma infinita: considera familias de números indexadas por cualquier conjunto (no necesariamente los naturales), y define la suma de cada familia como un *límite uniforme sobre los subconjuntos finitos.* Veamos cómo.

Consideremos que el conjunto de índices, en lugar de ser $\mathbb{N}$, es un conjunto arbitrario $I$ sin un orden natural. En este contexto surge la cuestión de cómo sumar cuando ya no se pueden recorrer los elementos uno por uno (pues no hay un orden para hacerlo). Schwartz lo logra definiendo la suma como un *límite sobre subconjuntos finitos de $I$*. Es decir:

- Considera todos los subconjuntos finitos $K \subset I$.
- Para cada uno de ellos, calcula la suma finita $S_K = \sum_{i\in K} u_i$.
- Y dice que la familia $\{u_i \mid i \in I\}$ es *sumable con suma $S$* si existe un subconjunto finito $K$ que contiene los elementos necesarios de $I$ para que $S_K$ *esté próximo a $S$* dentro de un margen arbitrario $\varepsilon > 0$.

Para formalizar esta idea, se introduce el concepto de *límite uniforme sobre subconjuntos finitos*, que significa lo siguiente:

> Para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que para **todo subconjunto finito** $K \supset J$, se cumple:
> $$\left| \sum_{i \in K} u_i - S \right| < \varepsilon.$$

**Intuición:** Existe un subconjunto finito de índices $J \subset I$ tal que, una vez sumados los elementos correspondientes a $J$, la suma parcial ya se encuentra suficientemente cerca del valor total $S$. A partir de ese punto, cualquier conjunto $K$ que contenga a $J$ (y sea también finito) produce una suma cuya distancia al valor límite $S$ es inferior a $\varepsilon$.

Este límite se denomina *uniforme* porque *el mismo* $J$ sirve para *todos* los $K$ que lo contienen. Es decir, no se trata de una convergencia punto a punto como en secuencias, sino de una condición *uniforme* sobre un universo más grande (todos los subconjuntos finitos que contienen $J$). Esto recuerda a la *convergencia uniforme* en análisis, donde no basta con que la función converja punto a punto, sino que se quiere un control simultáneo sobre toda una familia.

Por tanto, cuando decimos que la suma de una familia $\{u_i \mid i \in I\}$ es el *límite uniforme sobre los subconjuntos finitos*, estamos diciendo que:

- No importa el orden de los índices.
- No se necesita un índice numerable.
- Lo que importa es que se puede *aproximar el valor total* $S$ usando *cualquier subconjunto finito suficientemente grande*.

El enfoque de Schwartz, aunque más abstracto, nos permite considerar **estructuras matemáticas flexibles** aplicables en contextos donde la noción de suma debe extenderse más allá de lo habitual, como los procesos ARIMA (no estacionarios). Por ello, he preferido presentar este enfoque en lugar del tradicional.

—

El contenido de la siguiente subsección está sacado íntegramente del capítulo 1 del libro de Laurent Schwartz *Mathematics for the Physical Sciences* , y demuestra una serie de resultados que son necesarios en la exposición de esta lección.

### 8.2. Series sumables

La idea de sumabilidad es una extensión de la idea de convergencia absoluta al caso en que los términos de la serie dependen de un conjunto cualquiera de índices, y por tanto los términos de la serie no están ordenados. Los términos de la serie pueden ser números reales o complejos; por simplicidad, se supondrán reales.

**Definición 1** (Serie sumable)**.** *Si $I$ es un conjunto de índices cualquiera, y $\{u_i \mid i \in I\}$ es una familia de números complejos definida por el conjunto de índices $I$, se dice que la serie $\sum_{i \in I} u_i$ es sumable y su suma es $S$, y se escribe:*

$$\sum_{i \in I} u_i = S \tag{2}$$

*si, cualquiera que sea $\epsilon > 0$, existe un subconjunto finito de índices $J \subset I$ tal que, para todo subconjunto finito de índices $K \subset J$ se tiene:*

$$|S - S_K| \leq \epsilon \tag{3}$$

*con*

$$S_K = \sum_{i \in K} u_i. \tag{4}$$

**Nota** *Cualquiera que sea el conjunto de índices $I$, si todos los $u_i$ son nulos, $\sum_{i \in I} u_i$ es sumable y la suma $S$ es nula.*

### 8.2.1. Propiedades de las series sumables

**Proposición 2** (Unicidad de la suma). *Si $\sum_{i \in I} u_i = S$ y $\sum_{i \in I} u_i = S'$, entonces $S = S'$.*

*Demostración.* Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $J_1 \subset I$ tal que $K \supset J_1$ implica $|S - S_K| \leq \varepsilon$ y también $J_2 \subset I$ tal que $K \supset J_2$ implica $|S' - S_K| \leq \varepsilon$. Entonces, si $K = J_1 \cup J_2$, tenemos tanto $|S - S_K| \leq \varepsilon$ como $|S' - S_K| \leq \varepsilon$. Así, $|S - S'| \leq 2\varepsilon$ y, como $\varepsilon$ es arbitrario, se concluye que $S = S'$. □

**Proposición 3.** *Si $\sum_{i \in I} u_i$ y $\sum_{i \in I} v_i$ son dos series sumables, cuyas sumas son $S$ y $T$ respectivamente, entonces la serie $\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i)$, donde $\lambda$ y $\mu$ son constantes, es sumable y tiene por suma $\lambda S + \mu T$.*

*Demostración.* Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito de índices $J_1 \subset I$ tal que, para cualquier conjunto finito de índices $K_1 \supset J_1$,

$$|S - S_{K_1}| \leq \frac{\varepsilon}{(|\lambda| + |\mu|)}.$$

También existe un conjunto finito de índices $J_2 \subset I$ tal que, para cualquier conjunto finito de índices $K_2 \supset J_2$,

$$|T - T_{K_2}| \leq \frac{\varepsilon}{(|\lambda| + |\mu|)}.$$

Se deduce que, para cualquier conjunto finito de índices $K \supset J_1 \cup J_2$,

$$|\lambda S - \lambda S_K| \leq \frac{|\lambda|\varepsilon}{(|\lambda| + |\mu|)} \qquad \text{y} \qquad |\mu T - \mu T_K| \leq \frac{|\mu|\varepsilon}{(|\lambda| + |\mu|)},$$

y por lo tanto $|(\lambda S + \mu T) - (\lambda S_K + \mu T_K)| \leq \varepsilon$. □

**Proposición 4** (Series de términos positivos). *Si todos los $u_i \geq 0$, entonces*

$$\sum_{i \in I} u_i$$

*es sumable si y sólo si todas las sumas parciales $S_K$, correspondientes a subconjuntos finitos $K$ de $I$, están acotadas por un número fijo $M > 0$; en este caso*[1]

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{K finito} (S_K).$$

[1] sup significa supremo o cota superior mínima. ínf significa ínfimo o cota inferior máxima.

*Demostración.* Comenzamos asumiendo que la serie es sumable. Entonces, para $\varepsilon = 1$, por ejemplo, corresponde un subconjunto finito $J \subset I$ tal que, para todo $K \supset J$ finito,

$$S_K \leq S + 1.$$

Si $K$ es cualquier conjunto finito de índices, entonces poniendo $K_1 = J \cup K$, tenemos

$$S_K \leq S_{K_1} \leq S + 1$$

de modo que todas las sumas $S_K$ están acotadas. Recíprocamente, supongamos que todos los $S_K$ están acotados por $B$ como su supremo. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que

$$B - \varepsilon \leq S_J \leq B.$$

Para todo $K \supset J$ finito,

$$B - \varepsilon \leq S_K \leq B,$$

de modo que $\sum_{i \in I} u_i$ es sumable con suma $B$. □

**Teorema 5** (Criterio de Cauchy)**.** *$\sum_{i \in I} u_i$ es sumable si y sólo si los $u_i$ satisfacen el criterio de Cauchy:*

> *Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que, para cualquier subconjunto finito de índices $K$ disjunto de $J$,[2] se tiene $|S_K| \leq \varepsilon$.*

**Teorema 6** (Consecuencia del criterio de Cauchy)**.** *Si la serie $\sum_{i \in I} u_i$ es sumable, entonces toda serie parcial*

$$\sum_{i \in J} u_i,$$

*donde $J$ es cualquier subconjunto de $I$, es sumable.*

*Si $J$ es un subconjunto finito de $I$ tal que, para cada conjunto finito $K \supset J$,*

$$|S - S_K| \leq \varepsilon,$$

*entonces la misma desigualdad es válida para cualquier $K$ infinito tal que $K \supset J$.*

*Si $J_1, J_2, \ldots, J_n \subset I$ son subconjuntos mutuamente disjuntos y si $J = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_n$, entonces*

$$S_J = S_{J_1} + S_{J_2} + \cdots + S_{J_n}$$

*siempre que uno de los dos lados tenga sentido.*

**Teorema 7** (Corolario al criterio de Cauchy)**.** *Para que $\sum_{i \in I} u_i$ sea sumable es necesario y suficiente que $\sum_{i \in I} |u_i|$ sea sumable; además,*

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|. \tag{5}$$

*Si $\sum_{i \in I} v_i$ es una serie sumable de términos positivos y si*

$$|u_i| \leq v_i,$$

[2] Es decir, tal que $K \cap J = \varnothing$.

*entonces la serie* $\sum_{i\in I} u_i$ *es sumable y*

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leq \sum_{i\in I} v_i. \tag{6}$$

*Demostración de los Teoremas 5, 6 y 7.*

1. El criterio de Cauchy se satisface si $\sum_{i\in I} u_i$ es sumable. Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $J \subset I$ tal que si $K$ es finito y no tiene ningún elemento en común con $J$, entonces
$$|S_J - S| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |S_{J\cup K} - S| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$
y por lo tanto
$$|S_{J\cup K} - S_J| \leq \varepsilon.$$
Sin embargo,
$$S_{J\cup K} - S_J = S_K$$
así que
$$|S_K| \leq \varepsilon.$$

2. Si el criterio de Cauchy es satisfecho por una serie, entonces es evidente *a fortiori* que es satisfecho por cualquier serie parcial. En particular, esto incluye las series parciales formadas por los $u_i \geq 0$ o las series parciales formadas por los $u_i \leq 0$.

3. Una serie de términos $\geq 0$ (o de términos $\leq 0$) es sumable si satisface el criterio de Cauchy. De hecho, se puede ver de inmediato que sus sumas parciales están acotadas y la sumabilidad entonces se deduce del Teorema 3.

   Combinando 2 y 3, se sigue inmediatamente que si una serie satisface el criterio de Cauchy, entonces la serie de sus términos positivos y la serie de sus términos $\leq 0$ son ambas sumables. Definamos, para cualquier número real $x$,
$$x^+ = x \quad \text{si } x \geq 0, \qquad x^+ = 0 \quad \text{si } x \leq 0,$$
$$x^- = -x \quad \text{si } x \leq 0, \qquad x^- = 0 \quad \text{si } x \geq 0,$$
así que
$$x^+ \geq 0, \qquad x^- \geq 0, \qquad x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-.$$
Entonces, los resultados recién obtenidos pueden expresarse diciendo que, si $\sum_{i\in I} u_i$ satisface el criterio de Cauchy, $\sum_{i\in I} u_i^+$ y $\sum_{i\in I} u_i^-$ son ambas sumables. Se sigue por la Proposición 3 que su diferencia $\sum_{i\in I} u_i$ es sumable. Junto con 1., esto prueba el Teorema 5. También se sigue que la suma $\sum_{i\in I} |u_i|$ es sumable y que la desigualdad (5) se satisface.

   Recíprocamente, si $\sum_{i\in I} |u_i|$ es sumable, entonces las sumas parciales están acotadas y por lo tanto $\sum_{i\in I} u_i^+$, $\sum_{i\in I} u_i^-$ y su diferencia $\sum_{i\in I} u_i$ son sumables, lo cual prueba la primera parte del Teorema 7; la segunda parte es entonces obvia, pues si $\sum_{i\in I} v_i$ es sumable, sus sumas parciales están acotadas y por lo tanto, *a fortiori*, también las de $\sum_{i\in I} u_i$. La desigualdad (6) se deduce entonces de (5).

4. Aún queda por demostrar el Teorema 6. Si la serie $\sum_{i \in I} u_i$ es sumable, satisface el criterio de Cauchy y, *a fortiori*, las series parciales también lo hacen (ver 2.) y son por tanto sumables. Sea $J$ un conjunto de índices tal que, para cada $K_1 \supset J$ finito,

   $$|S - S_{K_1}| \leq \varepsilon.$$

   Entonces, si $K$ es un conjunto infinito de índices que contiene a $J$, existe para cualquier $\eta > 0$ un conjunto finito de índices $K_1$ tal que $J \subset K_1 \subset K$, tal que

   $$|S_K - S_{K_1}| \leq \eta$$

   (definición de sumabilidad de $\sum_{i \in K} u_i$). Entonces

   $$|S_K - S_{K_1}| \leq \eta, \qquad |S - S_{K_1}| \leq \varepsilon,$$

   y por lo tanto

   $$|S - S_K| \leq \varepsilon + \eta.$$

   Así, como $\eta$ es arbitrario,

   $$|S - S_K| \leq \varepsilon$$

   (con $K$ infinito).

   Finalmente, la parte del Teorema 6 que trata con una descomposición

   $$J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_n$$

   es ahora obvia.

*Nota.* Sea $k$ un elemento de $I$ tal que $k \notin J$. Aplicando el criterio de Cauchy al conjunto $K = \{k\}$, tenemos $|S_k| = |u_k| \leq \varepsilon$. Por lo tanto:

> *Si $\sum_{i \in I} u_i$ es sumable, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito $J$ de $I$ tal que, para cada $k \notin J$, $|u_k| \leq \varepsilon$.*

Esto puede expresarse diciendo que:

> *Si $\sum_{i \in I} u_i$ es sumable, el término general $u_i$ tiende a cero.* Esta idea es, por tanto, independiente del orden de los términos.

□

**Teorema 8.** *Si $J_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) es una sucesión de subconjuntos finitos o infinitos de $I$ tal que, para cualquier subconjunto finito $J \subset I$, el subconjunto $J_n$ contiene a $J$ para todo $n$ suficientemente grande, y si*

$$\sum_{i \in I} u_i$$

*es sumable con suma $S$, entonces $S_{J_n}$ converge a $S$ cuando $n \to \infty$.*

*Demostración.* Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que, para todo subconjunto finito o infinito $K \supset J$,

$$|S - S_K| \leq \varepsilon.$$

Por hipótesis, existe un número $n_0$ tal que para $n \geq n_0$, $J_n$ contiene a $J$. Así, para $n \geq n_0$,

$$|S - S_{J_n}| \leq \varepsilon.$$

$\square$

**Teorema 9** (Sumabilidad y convergencia absoluta)**.** *Si el conjunto de índices $I$ es el conjunto $\mathbb{N}$ de los enteros positivos y el cero, entonces la serie $\sum_{i \in I} u_i$ es sumable si y solo si es absolutamente convergente, y la suma tal como se define en la teoría de series sumables es idéntica a la suma tal como se define en la teoría de series convergentes.*

*Demostración.* Supongamos que $\sum_{i \in I} u_i$ es sumable. Entonces $\sum_{i \in I} |u_i|$ también es sumable. Denotando por $J_n$ el subconjunto de enteros $0, 1, 2, \ldots, n$, el Teorema 8 aplicado a $\sum_{i \in I} |u_i|$ muestra que los números

$$\sum_{0 \leq v \leq n} |u_v|$$

tienden a un límite cuando $n \to \infty$, de modo que la serie es absolutamente convergente.

El mismo Teorema 8 aplicado a $\sum_{i \in I} u_i$ da

$$\lim_{n \to \infty} S_{J_n} = S,$$

mostrando que las sumas tal como se definen en las dos teorías son las mismas. ($S_{J_n}$ denota la suma en la teoría de series convergentes.)

Recíprocamente, supongamos que la serie es absolutamente convergente. Entonces las sumas parciales

$$\sum_{0 \leq v \leq n} |u_v|$$

están acotadas, y se sigue inmediatamente que todas las sumas parciales $S_J$ (con $J \subset I$ finito) relativas a la serie $\sum_{i \in I} |u_i|$ están acotadas. Así, la serie $\sum_{i \in I} |u_i|$ es sumable y se deduce que $\sum_{i \in I} u_i$ es sumable. $\square$

**Teorema 10** (Suma por paquetes o asociatividad)**.** *Supongamos que el conjunto de índices $I$ es la unión de una familia de subconjuntos mutuamente disjuntos*[3] *$I_\alpha$ ($\alpha \in A$):*

$$I = \bigcup_{\alpha \in I} I_\alpha.$$

*Entonces, si la serie $\sum\limits_{i \in I} u_i$ es sumable, cada una de las series $\sum\limits_{i \in I_\alpha} u_i$ es sumable, con suma $\sigma_\alpha$, la serie $\sum\limits_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ es sumable y*

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha = \sum_{\alpha \in A} \left( \sum_{i \in I_\alpha} u_i \right).$$

[3] Esto también puede expresarse del siguiente modo: $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$ siempre que $\alpha \neq \beta$.

*Demostración.* Por el Teorema 6, cada serie $\sum\limits_{i\in I_\alpha} u_i$ es sumable. Dado que $\sum\limits_{i\in I} u_i$ es sumable, existe, para cualquier $\varepsilon > 0$, un conjunto finito de índices $J \subset I$ tal que para cualquier conjunto finito o infinito de índices $K$ que contenga a $J$,

$$|S - S_K| \leq \varepsilon.$$

Sea $B$ el subconjunto finito de $A$ que consiste en todos los índices $\alpha \in A$ tales que $I_\alpha \cap J \neq \emptyset$. Entonces, para cualquier subconjunto finito $C$ de $A$ que contenga a $B$, $\bigcup\limits_{\alpha\in C} I_\alpha$ es un subconjunto $K$ de $I$ que contiene a $J$. Por lo tanto,

$$\left| S - \sum_{i\in \bigcup\limits_{\alpha\in C} I_\alpha} u_i \right| \leq \varepsilon.$$

Sin embargo, por la última parte del Teorema 6, dado que $C$ es finito,

$$\sum_{i\in\bigcup_{\alpha\in C} I_\alpha} u_i = \sum_{\alpha\in C} \sigma_\alpha.$$

Por lo tanto,

$$\left| S - \sum_{\alpha\in C} \sigma_\alpha \right| \leq \varepsilon$$

de modo que $\sum\limits_{\alpha\in A} \sigma_\alpha$ es sumable con la suma $S$. $\square$

**Nota** *El recíproco no es cierto.* Puede ocurrir que cada serie $\sum_{i\in I_\alpha} u_i$ sea sumable con suma $\sigma_\alpha$, y $\sum_{\alpha\in A} \sigma_\alpha$ sea sumable pero $\sum_{i\in I} u_i$ no sea sumable. En este caso, si $B$ es otro conjunto de índices y $\{I_\beta \mid \beta \in B\}$ otra partición de $I$ en subconjuntos, ninguno de los cuales tiene un elemento común, es posible que ambas expresiones

$$\sum_{\alpha\in A} \left( \sum_{i\in I_\alpha} u_i \right), \quad \sum_{\beta\in B} \left( \sum_{i\in I_\beta} u_i \right)$$

estén definidan pero no sean iguales.

**Ejemplo.** $A$ es el conjunto de los enteros $n \geq 0$. Para cada $\alpha = n$, $I_\alpha$ consta de dos elementos, $n$ y $-n$ (excepto para $n = 0$ donde solo hay un elemento). $I = \bigcup\limits_{\alpha} I_\alpha$ es, por lo tanto, el conjunto de todos los enteros positivos y negativos. Para cada entero $i \in I$, sea $u_i = i$. Entonces $\sum_{i\in I} u_i$ no es sumable ya que

$$\sum_{i\geq 0} u_i = 0 + 1 + 2 + \cdots = +\infty.$$

Pero

$$\sum_{i\in I_\alpha} u_i = \alpha - \alpha = 0 = \sigma_\alpha.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{\alpha\in A}\sigma_\alpha=\sum_{\alpha\in A}0=0.$$

Cada serie $\sum\limits_{i\in I_\alpha} u_i$ es, por consiguiente, sumable con suma 0; de ahí que $\sum\limits_{\alpha\in A}\sigma_\alpha=\sum_{\alpha\in A}0=0$ sea sumable aunque $\sum\limits_{i\in I} u_i$ no lo sea.

**Teorema 11** (Caso particular en el que el recíproco del Teorema 10 es válido)**.** *Si todos los $u_i\geq 0$ y si acordamos designar $+\infty$ como la suma de una serie divergente de términos $\geq 0$, entonces siempre es cierto que*

$$\sum_{i\in I}u_i=\sum_{x\in A}\left(\sum_{i\in I_x}u_i\right),$$

*siendo el valor de ambos lados finito o $+\infty$.*

*Demostración.* Lo siguiente es el recíproco parcial al Teorema 10: si $u_i\geq 0$, $\sum_{i\in I}u_i$ es sumable con suma $\sigma$, y si $\sum_{x\in A}\sigma_x$ es sumable, entonces $\sum_{i\in I}u_i$ es sumable. Para ello, sea $\sigma_x=\sum_{i\in I_x}u_i$. Poniendo $\sum_{x\in A}\sigma_x=\sigma$, toda suma finita $\sum_{x\in C}\sigma_x$ está acotada superiormente por $\sigma$. Sea $J$ cualquier subconjunto finito de $I$, y $C$ el conjunto (finito) de elementos $x$ de $A$ tales que $I_x\cap J\neq\emptyset$. Dado que $C$ es finito, la última parte del Teorema 6 da

$$\sum_{i\in\bigcup_{x\in C}I_x}u_i=\sum_{x\in C}\sigma_x.$$

Pero $S_J\leq\sum_{i\in\bigcup_{x\in C}I_x}u_i$ y $\sum_{x\in C}\sigma_x\leq\sigma$, de modo que $S_J\leq\sigma$. Así, todas las sumas $S_J$ están acotadas superiormente por $\sigma$ y, por la Proposición 4, $\sum_{i\in I}u_i$ es sumable. □

**Corolario 12** (de Teorema 10)**.** *Si las series*

$$\sum_{i\in I}u_i\quad y\quad\sum_{j\in J}v_j$$

*son sumables, con las sumas respectivas $U$ y $V$, entonces la serie producto*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}u_iv_j$$

*es sumable con la suma*

$$W=UV.$$

*Demostración.* Ya que la suma por paquetes da

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}u_iv_j=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}u_iv_j\right)=\sum_{i\in I}\left(u_i\sum_{j\in J}v_j\right)=\sum_{i\in I}(u_iV)=V\sum_{i\in I}u_i=VU,$$

lo cual muestra que si la suma por paquetes puede realizarse, entonces la serie $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J}u_iv_j$ tiene de hecho la suma $UV$. Pero para que la suma por paquetes sea legítima, primero es necesario saber que la serie $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J}u_iv_j$ es sumable.

No obstante, el teorema es verdadero cuando todos los $u_i$ y $v_j$ son $\geq 0$, ya que la suma por paquetes es entonces siempre legítima, por el Teorema 11. Si los $u_i$ y $v_j$ pueden tomar cualquier signo, es necesario considerar $|u_i|$ y $|v_j|$. Por el Teorema 7, $\sum\limits_{i\in I} |u_i|$ y $\sum\limits_{j\in J} |v_j|$ son sumables de modo que $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} |u_i v_j|$ es sumable con la suma $\left(\sum\limits_{i\in I} |u_i|\right)\left(\sum\limits_{j\in J} |v_j|\right)$. Por lo tanto, $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j$ también es sumable. □

# 9. Demostraciones de algunos resultados sobre series en general

## 9.1. Sumabilidad y convergencia absoluta

El capítulo 1 del libro de Laurent Schwartz contempla el caso en que los índices son el conjunto de enteros positivos $\mathbb{N}$. Pero el resultado de la sumabilidad y convergencia absoluta se puede extender al conjunto de enteros $\mathbb{Z}$.

**Corolario 13** (del Teorema 9)**.** *Si el conjunto de índices $I$ es el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros, entonces la serie $\sum_{i\in I} u_i$ es sumable si y solo si es absolutamente convergente, y la suma tal como se define en la teoría de series sumables es idéntica a la suma tal como se define en la teoría de series convergentes.*

*Demostración.* La demostración es exactamente igual a la del Teorema 9, pero aplicada a la suma de dos series: una con los índices negativos y la otra con los índices mayores o iguales a cero, pues:

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} u_i = \sum_{i<0} u_i + \sum_{i\geq 0} u_i.$$

□

## 9.2. Relación entre series absolutamente sumables y series de cuadrado sumable

**Proposición 14.** *Una sucesión absolutamente sumable siempre es de cuadrado sumable, $\ell^1 \subset \ell^2$.*

*Demostración.* Como $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} a_i$ es sumable, también lo es $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} a_i a_j$. Ahora bien, como $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = (I_{\neq} \cup I_{=})$, donde $I_{\neq} = \{(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid i \neq j\}$ y $I_{=} = \{(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid i = j\}$ e $I_{\neq} \cap I_{=} = \emptyset$, sabemos que son sumables $\sum\limits_{(i,j)\in I_{\neq}} a_i a_j$ y $\sum\limits_{(i,j)\in I_{=}} a_i a_j$. Pero esto último es $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2$ y consiguientemente $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i^2|$ es sumable (Teorema 7). □

## 9.3. Convolución de series con principio. Convolución de series con final

**Proposición 15.** *Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ sucesiones con principio (con cogrado). Su producto convolución es la sucesión cuyo elemento $t$-ésimo es:*

$$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_t = \sum_{r+s=t} a_r b_s; \qquad r, s, t \in \mathbb{Z}$$

*Además, el cogrado de $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ es la suma de los respectivos cogrados.*

*Demostración.* Si $\boldsymbol{a}$ o $\boldsymbol{b}$ son nulas, el resultado es trivial. Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos sucesiones con principio y sea $\gamma_a = cogrado(\boldsymbol{a})$ y $\gamma_b = cogrado(\boldsymbol{b})$.

1. El conjunto de índices $I_j = \{(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid r+s=j \ \text{ y } \ a_j b_j \neq 0\}$ es finito pues
$$\begin{aligned} I_j &\subset \{(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid r+s=j \ \text{ y } \ r \geq \gamma_a, \ s \geq \gamma_b\} \\ &\subset \{(\gamma_a, \ \gamma_b+\alpha), \ (\gamma_a+1, \ \gamma_b+\alpha-1), \ldots, \ (\gamma_a+\alpha, \ \gamma_b)\}, \end{aligned}$$
donde $\alpha = j - \gamma_a - \gamma_b$.

   Por consiguiente, la suma $\sum_{r+s=j} a_r b_s$ está definida para todo $j$.

2. Si $j < \gamma_a + \gamma_b$, entonces $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_j = 0$, ya que en este caso $r < \gamma_a$ ó $s < \gamma_b$. Si $j = \gamma_a + \gamma_b$, entonces $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_j = a_{\gamma_a} b_{\gamma_b} \neq 0$.

□

**Proposición 16.** *Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ sucesiones con final (con grado). Su producto convolución es la sucesión cuyo elemento $t$-ésimo es:*
$$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_t = \sum_{r+s=t} a_r b_s; \qquad r, s, t \in \mathbb{Z}$$

*Además, el grado de $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ es la suma de los respectivos grados.*

*Demostración.* Similar a la de las sucesiones con principio □

## 9.4. Convolución de series absolutamente sumables.

**Proposición 17.** *Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ sucesiones de $\ell^1$. Su producto convolución*
$$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_t = \sum_{r+s=t} a_r b_s; \qquad r, s, t \in \mathbb{Z}$$
*está bien definido, y es una la sucesión absolutamente sumable (es decir, $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} \in \ell^1$).*

*Demostración.* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in l_1$ implica que $\sum\limits_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} a_i b_j$ es sumable (Colorario 12). Por tanto, si definimos $I_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x+y=n\}$ tenemos que
$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \text{y si } n \neq n' \quad \text{entonces} \quad I_n \cap I_{n'} = \emptyset.$$

Por el Teorema 10:
$$\text{Para todo } n \in \mathbb{Z} \sum_{(i,j) \in I_n} a_i b_j = \sum_{i+j=n} a_i b_j \text{ es sumable,}$$
luego $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ está definido. Y de nuevo por el Teorema 10 también es sumable
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{(i,j) \in I_n} a_i b_j \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_n,$$
luego $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} \in \ell^1$. □

## 9.5. El conjunto de series absolutamente sumables es un anillo conmutativo.

**Proposición 18.** *La terna* $(\ell^1, +, *)$ *es un anillo conmutativo.*

*Demostración.* Sabemos que: por el Colorario 12 es sumable $\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} a_i b_j$, por el Colorario 12 es sumable $\sum_{(i,j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} a_i b_j c_k$ y por el Teorema 10 es sumable $\sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$. Si llamamos $I_r = \{(i,j,k) \mid i+j+k=n \quad \text{y} \quad i=r\}$ tenemos que $\bigcup_{r\in\mathbb{Z}} I_r = \{(i,j,k) \mid i+j+k=n\}$ y $r \neq r'$ implica que $I_r \cap I_{r'} = \emptyset$, luego

$$\sum_{i+r+s=n} a_i b_r c_s = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \sum_{(i,j,k)\in I_r} a_i b_j c_k = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j+k=n-i} a_i b_j c_k$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i \sum_{j+k=n-i} b_j c_k = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i (\boldsymbol{c} * \boldsymbol{c})_{n-i} = [\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{c} * \boldsymbol{c})]_n.$$

De manera análoga se ve que $\sum_{i+r+s=n} a_i b_r c_s = [(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{c}) * \boldsymbol{c}]_n$.

Además, por la Proposición 3

$$\sum_{i+j=n} a_i b_j + \sum_{i+j=n} a_i c_j = \sum_{i+j=n} (a_i b_j + a_i c_j) = \sum_{i+j=n} a_i (b+c)_j.$$

El resto de propiedades son triviales. □

## 9.6. El conjunto de series con principio es un cuerpo

El conjunto de series con principio se denota con $\mathbb{C}((z))$

**Proposición 19.** *El conjunto de series con principio* $\mathbb{C}((z))$ *(con las operaciones suma y producto convolución) tiene estructura de cuerpo (se denomina cuerpo de fracciones de series formales).*

*Demostración.*

1. Evidentemente $(\mathbb{C}((z)), +)$ es un grupo conmutativo.[4]

2. $*$ es asociativa: $\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c}$

$$[\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c})]_j = \sum_{r+s=j} a_r (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c})_s = \sum_{r+s=j} a_r \sum_{t+u=s} b_t c_u$$

$$= \sum_{r+s=j} \sum_{t+u=s} a_r b_t c_u = \sum_{r+s=j} \sum_{t+u=s} a_r b_t c_u = \sum_{r+t+u=j} a_r b_t c_u$$

   y análogamente $[(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c}]_j = \sum_{r+t+u=j} a_r b_t c_u$.

3. $*$ es distributiva respecto a $+$: $\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} * \boldsymbol{c}$

$$[\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})]_j = \sum_{r+s=j} a_r (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})_s = \sum_{r+s=j} a_r b_s + a_r c_s$$

$$= \sum_{r+s=j} a_r b_s + \sum_{r+s=j} a_r c_s = (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_j + (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{c})_j$$

[4] Véase *Abelian group* en Wikipedia.

4. $*$ es conmutativa: $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{a}$

$$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_j = \sum_{r+s=j} a_r b_s = \sum_{r+s=j} b_s a_r = (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{a})_j$$

5. $*$ tiene elemento neutro: $\boldsymbol{a} * \mathbf{1} = \boldsymbol{a}$

$$(\boldsymbol{a} * \mathbf{1})_j = \sum_{r+s=j} a_r 1_s = a_j 1_0 + \sum_{r+s=j s\neq 0} a_r 1_s = a_j$$

   puesto que $\forall s \neq 0$, $1_s = 0$.

6. **Todo elemento no nulo tiene inverso en $\mathbb{C}((z))$:**

   Supongamos que $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ y que $k = \text{cogrado}(\boldsymbol{a})$. Definimos $\boldsymbol{b}$ del siguiente modo:

   **Para** $j < -k$**:** $b_j = 0$

   **Para** $j = -k$**:** $b_j = 1$

   **Para** $j > -k$**:** $b_j = -\frac{1}{a_k} \sum_{r=-k}^{j-1} b_r a_{j+k-r}$

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < -k \frac{1}{a_k} \\ \text{si } j = -k - \frac{1}{a_k} \sum_{r=-k}^{j-1} b_r a_{j+k-r} & \text{si } j > -k \end{cases}$$

   Por construcción, $\text{cogrado}(\boldsymbol{b}) = -k$ y en consecuencia si $j < 0$, $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_j = 0$.

   Obviamente también $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_0 = 1$, y si $j > 0$:

$$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_j = \sum_{r+s=j} a_r b_s = \sum_{r=k}^{j+k} a_r b_{j-r} = \sum_{r=-k}^{j-k} a_{j-r} b_r = \sum_{r=-k}^{j-k-1} a_{j-r} b_r + a_k b_{j-k}$$

$$= \sum_{r=-k}^{j-k-1} a_{j-r} b_r + \frac{1}{a_k} \sum_{r=-k}^{j-k-1} b_r a_{j-k+k-r} = 0$$

   Por consiguiente $\boldsymbol{b}$ es inverso de $\boldsymbol{a}$.

$\square$

## 9.7. El conjunto de fracciones de polinomios $\mathbb{C}(z)$ es un cuerpo

El *cuerpo de fracciones de polinomios* es, de todos los cuerpos $\mathbb{K}$ contenidos en $\mathbb{C}((z))$, el menor cuerpo[5] que contiene al anillo de los polinomios $\mathbb{C}[z]$.

**Proposición 20.** *Si $R$ es un subanillo de $(A, +, \cdot)$ tal que:*

1. *$(A, +, \cdot)$ es conmutativo y unitario.*

[5] Aunque esta definición no coincide con la usual, podemos ver que es equivalente utilizando el Colorario 4.6. del Captulo III de Hungerford (1974); en el que se establece que si un cuerpo $E$ contiene a un dominio de integridad $R$ entonces existe otro cuerpo $F$ isomorfo al cuerpo de fracciones de $R$ de modo que $R \subset F \subset E$. A partir de esto, como en nuestra definición no permite intercalar un cuerpo entre $\mathbb{C}[z]$ y $\mathbb{C}(z)$, necesariamente $\mathbb{C}(z)$ es isomorfo al cuerpo de fracciones de los polinomios.

2. $R \neq \{0\}$.
3. $\forall q \in R - \{0\}, \exists q^{-1} \in A$,

*entonces el siguiente conjunto es el cuerpo de fracciones de R:*

$$K_R = \{p \cdot q^{-1} \mid p, q \in R \text{ y } q \neq 0\}.$$

*Demostración.*

1. $0 \in K_R$ y $1 \in K_R$ Tomemos $q$ no nulo de $R$, entonces, $0 = 0 \cdot q^{-1}$, y $1 = q \cdot q^{-1}$.
2. Si $a, b \in K_R$, entonces $a + b \in K_R$ y $a \cdot b \in K_R$. Sea $a = \frac{p}{q}$ y $b = \frac{r}{s}$, entonces,

   $$a+b = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = p \cdot q^{-1} + r \cdot s^{-1} = p \cdot q^{-1} \cdot s \cdot s^{-1} + r \cdot s^{-1} \cdot q \cdot q^{-1} = (p \cdot s + r \cdot q) \cdot (q \cdot s)^{-1} \in K_R,$$

   puesto que $(p \cdot s + r \cdot q) \in R$ y $0 \neq (q \cdot s) \in R$. Además,

   $$a \cdot b = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = p \cdot q^{-1} \cdot r \cdot s^{-1} = (p \cdot r) \cdot (q \cdot s)^{-1} \in K_R,$$

   pues $(p \cdot r) \in R$ y $0 \neq (q \cdot s) \in R$.
3. Si $a \in K_R$ entonces $-a \in K_R$. Ya que $a = \frac{p}{q} \Rightarrow -a = (-p) \cdot q^{-1}$, donde $-p \in R$ y $q^{-1} \in R$.
4. Si $a \neq 0 \in K_R$ entonces $a^{-1} \in K_R$. Puesto que $a = p \cdot q^{-1} \Rightarrow a^{-1} = p^{-1} \cdot (q^{-1})^{-1} = q \cdot p^{-1}$, donde $q \in R$ y $p^{-1} \in R$. Por lo tanto, hemos visto que $K_R$ es un cuerpo.
5. Si $R \subset K \subset A$ y $K$ es un cuerpo, necesariamente $K = K_R$. Supongamos que $a \in K$, entonces existen $p$ y $q$ en $R$ tales que $a = p \cdot q^{-1}$. Como $K$ contiene a $R$ y $K$ es cuerpo, necesariamente $a = p \cdot q^{-1} \in K_R$.

$\square$

**Corolario 21.** *El* cuerpo de fracciones de polinomios

$$\mathbb{C}(z) = \left\{\boldsymbol{p} * \boldsymbol{q}^{-\triangleright} \mid \boldsymbol{p} \text{ y } \boldsymbol{q} \text{ son polinomios y } \boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}\right\};$$

*es un subcuerpo del cuerpo de las series sucesiones con principio (i.e., con cogrado finito).*

# Referencias


[1] Thomas W. Hungerford. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1974. doi: 10.1007/978-1-4612-6101-8. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-6101-8.

[2] Laurent. Schwartz. *Mathematics for the Physical Sciences*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2008. ISBN 9780486466620.