

# Mortalidad y matrimonio en Inglaterra 1866–1911

## Los datos

Los datos de este ejercicio corresponden a la mortalidad anual y la proporción de matrimonios eclesiásticos en Inglaterra entre 1866 y 1911

**Fuente:** Ejercicio proporcionado por el Prof. Miguel Jerez

**Std\_mortality** Mortalidad anual por cada 1000 personas. Serie estandarizada.

**Proportion\_marriages** Proporción de matrimonios eclesiásticos anuales por cada 1000 personas.

**d\_Std\_mortality** Primera diferencia de Std\_mortality.

**d\_Proportion\_marriages** Primera diferencia de Proportion\_marriages.

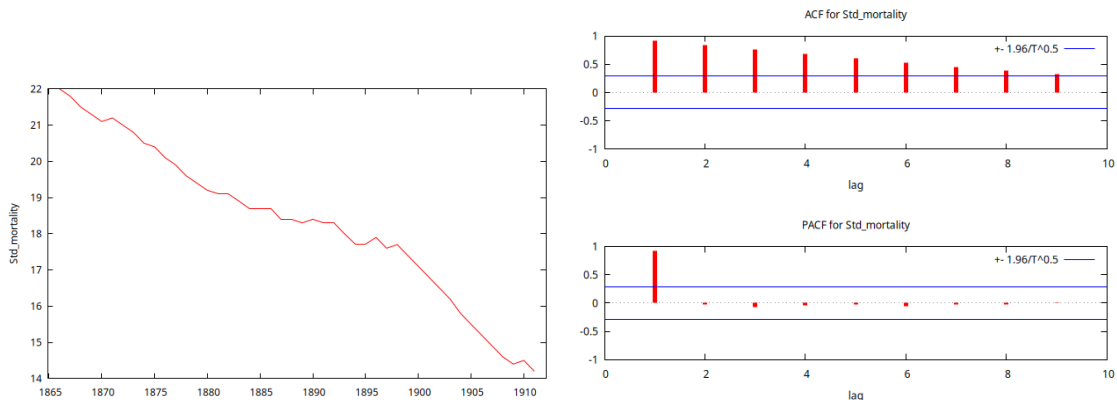
```
open ../../datos/mortality-marriages.gdt
```

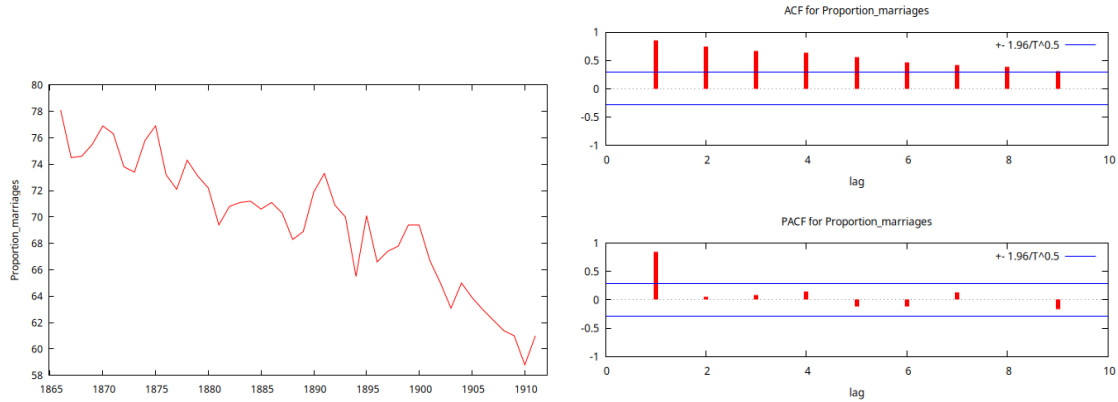
**Ficheros:** Versión del ejercicio en [pdf](#); [html](#).

- Datos: [mortality-marriages.gdt](#)
- Guión de gretl: [Examen-mortality-marriages.inp](#)

## Gráficos de las series y correlogramas

```
gnuplot Std_mortality --time-series --with-lines --output="mortality.png"
corrgram Std_mortality 9 --plot="mortalityACF-PACF.png"
gnuplot Proportion_marriages --time-series --with-lines --output="marriages.png"
corrgram Proportion_marriages 9 --plot="marriagesACF-PACF.png"
```





## Datos en nivel de la serie de mortalidad

### Estimación de un modelo univariante para la serie de mortalidad

```
arima 1 0 2 ; Std_mortality
```

Function evaluations: 289

Evaluations of gradient: 80

Model 1: ARMA, using observations 1866-1911 (T = 46)

Estimated using AS 197 (exact ML)

Dependent variable: Std\_mortality

Standard errors based on Hessian

	coefficient	std. error	z	p-value	
const	18.0782	3.69647	4.891	1.00e-06	***
phi_1	0.996455	0.00501938	198.5	0.0000	***
theta_1	0.401166	0.171108	2.345	0.0191	**
theta_2	0.345176	0.108887	3.170	0.0015	***

Mean dependent var	18.32174	S.D. dependent var	2.135615
Mean of innovations	-0.094657	S.D. of innovations	0.185241
R-squared	0.994379	Adjusted R-squared	0.994117
Log-likelihood	9.085184	Akaike criterion	-8.170368
Schwarz criterion	0.972839	Hannan-Quinn	-4.745268

		Real	Imaginary	Modulus	Frequency
AR					
Root	1	1.0036	0.0000	1.0036	0.0000
MA					
Root	1	-0.5811	-1.5998	1.7021	-0.3055
Root	2	-0.5811	1.5998	1.7021	0.3055

## Contraste de cointegración

```
coint 9 Std_mortality Proportion_marriages --test-down
```

Step 1: testing for a unit root in Std\_mortality

Augmented Dickey-Fuller test for Std\_mortality

testing down from 9 lags, criterion AIC

sample size 45

unit-root null hypothesis: a = 1

```

test with constant
including 0 lags of (1-L)Std_mortality
model: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + e
estimated value of (a - 1): 0.00678121
test statistic: tau_c(1) = 0.615887
asymptotic p-value 0.9902
1st-order autocorrelation coeff. for e: 0.085

```

Step 2: testing for a unit root in Proportion\_marriages

Augmented Dickey-Fuller test for Proportion\_marriages  
testing down from 9 lags, criterion AIC  
sample size 39  
unit-root null hypothesis: a = 1

```

test with constant
including 6 lags of (1-L)Proportion_marriages
model: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + ... + e
estimated value of (a - 1): 0.0831149
test statistic: tau_c(1) = 1.04236
asymptotic p-value 0.9971
1st-order autocorrelation coeff. for e: -0.068
lagged differences: F(6, 31) = 3.197 [0.0147]

```

Step 3: cointegrating regression

Cointegrating regression -  
OLS, using observations 1866-1911 (T = 46)  
Dependent variable: Std\_mortality

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	-10.8466	1.42447	-7.614	1.45e-09 ***
Proportion_marri~	0.418536	0.0203914	20.53	3.67e-24 ***
Mean dependent var	18.32174	S.D. dependent var	2.135615	
Sum squared resid	19.40865	S.E. of regression	0.664158	
R-squared	0.905434	Adjusted R-squared	0.903284	
Log-likelihood	-45.42395	Akaike criterion	94.84790	
Schwarz criterion	98.50518	Hannan-Quinn	96.21794	
rho	0.228283	Durbin-Watson	1.535570	

Step 4: testing for a unit root in uhat

Augmented Dickey-Fuller test for uhat  
testing down from 9 lags, criterion AIC  
sample size 45  
unit-root null hypothesis: a = 1

```

test without constant
including 0 lags of (1-L)uhat
model: (1-L)y = (a-1)*y(-1) + e
estimated value of (a - 1): -0.771717
test statistic: tau_c(2) = -5.22784
asymptotic p-value 5.236e-05
1st-order autocorrelation coeff. for e: 0.023

```

There is evidence for a cointegrating relationship if:  
(a) The unit-root hypothesis is not rejected for the individual variables, and  
(b) the unit-root hypothesis is rejected for the residuals (uhat) from the  
cointegrating regression.

## Regresión de la mortalidad sobre la proporción de matrimonios eclesiásticos

```
ols Std_mortality 0 Proportion_marriages
```

```
modtest --normality --quiet
modtest --white --quiet
modtest --autocorr 5 --quiet
```

Model 3: OLS, using observations 1866-1911 (T = 46)  
Dependent variable: Std\_mortality

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	-10.8466	1.42447	-7.614	1.45e-09 ***
Proportion_marri~	0.418536	0.0203914	20.53	3.67e-24 ***
Mean dependent var	18.32174	S.D. dependent var	2.135615	
Sum squared resid	19.40865	S.E. of regression	0.664158	
R-squared	0.905434	Adjusted R-squared	0.903284	
F(1, 44)	421.2815	P-value(F)	3.67e-24	
Log-likelihood	-45.42395	Akaike criterion	94.84790	
Schwarz criterion	98.50518	Hannan-Quinn	96.21794	
rho	0.228283	Durbin-Watson	1.535570	

Test for null hypothesis of normal distribution:  
Chi-square(2) = 0.260 with p-value 0.87796

White's test for heteroskedasticity

Test statistic:  $TR^2 = 1.729996$ ,  
with p-value =  $P(\text{Chi-square}(2) > 1.729996) = 0.421052$

Breusch-Godfrey test for autocorrelation up to order 5

Test statistic: LMF = 1.947454,  
with p-value =  $P(F(5,39) > 1.94745) = 0.108$

Alternative statistic:  $TR^2 = 9.190388$ ,  
with p-value =  $P(\text{Chi-square}(5) > 9.19039) = 0.102$

Ljung-Box  $Q' = 9.05845$ ,  
with p-value =  $P(\text{Chi-square}(5) > 9.05845) = 0.107$

## Regresión en primeras diferencias

```
diff Std_mortality Proportion_marriages
ols d_Std_mortality 0 d_Proportion_marriages
modtest --normality --quiet
modtest --white --quiet
modtest --autocorr 5 --quiet
```

Model 4: OLS, using observations 1867-1911 (T = 45)  
Dependent variable: d\_Std\_mortality

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	-0.172792	0.0230316	-7.502	2.43e-09 ***
d_Proportion_mar~	0.00142536	0.0117781	0.1210	0.9042
Mean dependent var	-0.173333	S.D. dependent var	0.149848	
Sum squared resid	0.987664	S.E. of regression	0.151555	
R-squared	0.000340	Adjusted R-squared	-0.022907	
F(1, 43)	0.014645	P-value(F)	0.904241	
Log-likelihood	22.07697	Akaike criterion	-40.15393	
Schwarz criterion	-36.54061	Hannan-Quinn	-38.80692	
rho	0.089193	Durbin-Watson	1.806988	

Test for null hypothesis of normal distribution:  
Chi-square(2) = 14.808 with p-value 0.00061

White's test for heteroskedasticity

Test statistic:  $TR^2 = 2.149006$ ,  
with p-value =  $P(\text{Chi-square}(2) > 2.149006) = 0.341467$

Breusch-Godfrey test for autocorrelation up to order 5

Test statistic: LMF = 0.589588,  
with p-value =  $P(F(5,38) > 0.589588) = 0.708$

Alternative statistic:  $TR^2 = 3.239657$ ,  
with p-value =  $P(\text{Chi-square}(5) > 3.23966) = 0.663$

Ljung-Box  $Q' = 4.0454$ ,  
with p-value =  $P(\text{Chi-square}(5) > 4.0454) = 0.543$

## Preguntas

### Pregunta 1

Discuta de todas las formas posibles si la serie temporal de mortalidad (**Std\_mortality**) es estacionaria en media (i.e., la realización de un proceso estocástico estacionario), usando para ello los resultados de los apartados [Datos en nivel de la serie de mortalidad](#) y .

([Respuesta 1](#))

### Pregunta 2

Discuta si las series de mortalidad y proporción de matrimonios eclesiásticos están cointegradas a partir de los resultados del apartado .

([Respuesta 2](#))

### Pregunta 3

Sin embargo, ¿qué sugieren los resultados de las secciones [Regresión de la mortalidad sobre la proporción de matrimonios eclesiásticos](#) y [Regresión en primeras diferencias](#) respecto a la relación entre **Std\_mortality** y **Proportion\_marriages**?

([Respuesta 3](#))

### Pregunta 4

Los listados en [Regresión de la mortalidad sobre la proporción de matrimonios eclesiásticos](#) y [Regresión en primeras diferencias](#) muestran los principales resultados obtenidos al estimar por MCO dos modelos de regresión que relacionan las dos variables consideradas en este ejercicio. Resuma y comente los resultados de estimación y diagnosis que le parezcan más relevantes. Si detecta alguna desviación del cumplimiento de las hipótesis habituales, discuta sus consecuencias sobre las propiedades del estimador MCO y sugiera una forma de tratarla.

([Respuesta 4](#))

### Pregunta 5

Interprete la pendiente de la regresión cointegrante estimada en la Etapa 3 del .

([Respuesta 5](#))

### Pregunta 6

Indique cuáles de las siguientes expresiones representan el modelo de la sección [Estimación de un modelo univariante para la serie de mortalidad](#), con un redondeo a tres decimales.

1.  $(1 - 0,997 B) (X_t - 18,078) = (1 + 0,401 B + 0,345 B^2) \hat{U}_t$
2.  $(1 - 0,997 B) (X_t - 18,078) = (1 - 0,401 B - 0,345 B^2) \hat{U}_t$
3.  $(1 + 0,997 B) (X_t - 18,078) = (1 + 0,401 B + 0,345 B^2) \hat{U}_t$
4.  $X_t = 18,078 + \frac{1+0,401B+0,345B^2}{1-0,997B} \hat{U}_t$
5.  $X_t = -18,078 + \frac{1+0,401B+0,345B^2}{1-0,997B} \hat{U}_t$
6.  $X_t = 18,078 + \frac{1-0,401B-0,345B^2}{1-0,997B} \hat{U}_t$
7.  $X_t = 18,078 + \frac{1+0,401B+0,345B^2}{1+0,997B} \hat{U}_t$
8.  $\frac{1-0,997B}{1+0,401B+0,345B^2} (X_t - 18,078) = \hat{U}_t$
9.  $\frac{1-0,997B}{1+0,401B+0,345B^2} X_t = 18,078 + \hat{U}_t$
10.  $\frac{1-0,997B}{1-0,401B-0,345B^2} (X_t - 18,078) = \hat{U}_t$

([Respuesta 6](#))

### Pregunta 7

A la luz de la [Estimación de un modelo univariante para la serie de mortalidad](#), si tuviera que clasificar el proceso estocástico subyacente del que la serie temporal es una realización ¿diría que es invertible? ¿O que no lo es? ¿Diría que es estacionario? ¿O que no lo es? Explique su respuesta.

([Respuesta 7](#))

### Pregunta 8

¿Cuáles de los modelos de más arriba considera aceptables? ¿O qué mejoras sugeriría para ellos?

([Respuesta 8](#))

# Respuestas

## Respuesta 1

La serie temporal `Std_mortality` NO es estacionaria en media, como se aprecia en las secciones:

- [Gráficos de las series y correlogramas](#).
  - El gráfico de la serie muestra una tendencia decreciente.
  - La FAC muestra mucha persistencia, los coeficientes decrecen a un ritmo aproximadamente lineal; y el primer coeficiente de la PACF está próximo a uno.
- [Estimación de un modelo univariante para la serie de mortalidad](#): El modelo univariante estimado tiene una raíz AR aproximadamente igual a 1.
- : El test ADF calculado en la Etapa 1 no rechaza la hipótesis (raíz unitaria) con un p-valor de 0.9902

([Pregunta 1](#))

## Respuesta 2

Las conclusiones de las distintas etapas del test de cointegración son los siguientes:

**Etapla 1** El test ADF no rechaza que la serie de mortalidad sea  $I(1)$ . (valor p asintótico 0,9902)

**Etapla 2** El test ADF no rechaza que la serie de proporción de matrimonios eclesiásticos sea  $I(1)$ . (valor p asintótico 0,9971)

**Etapla 3** La regresión (cointegrante) de mortalidad sobre la proporción de matrimonios eclesiásticos es significativa (parámetros significativos y elevado  $R^2$  (0,905434)).

**Etapla 4** El test ADF rechaza contundentemente que los residuos de la regresión cointegrante sean  $I(1)$ . (valor p asintótico 5,236e-05)

Consecuentemente, el test indica que ambas series están cointegradas (*pero, como sugiere tanto el sentido común como la [Regresión en primeras diferencias](#) la relación es espuria*, véase la pregunta 3).

([Pregunta 2](#))

## Respuesta 3

Aunque el modelo de [Regresión de la mortalidad sobre la proporción de matrimonios eclesiásticos](#) muestra un buen ajuste (un elevado  $R^2$ ) y los parámetros estimados son muy significativos, la relación entre ambas variables se desvanece al diferenciar los datos para lograr la estacionariedad. Ello sugiere, al igual que el sentido común, que la relación es espuria.

([Pregunta 3](#))

## Respuesta 4

**Modelo de regresión MCO para datos en nivel** ([Regresión de la mortalidad sobre la proporción de matrimonios eclesiásticos](#)): Todos los coeficientes son muy significativos. El ajuste del modelo, medido por el valor del  $R^2$  es muy elevado. Los contrastes sobre los residuos no rechazan (ni al 1 %, ni al 5 % ni al 10 % de significación) las hipótesis nulas de normalidad, homoscedasticidad y ausencia de autocorrelación. Es decir, de la salida de Gretl no se puede inferir que haya ningún problema con este modelo.

**Modelo para datos en primeras diferencias** ([Regresión en primeras diferencias](#)): El único coeficiente significativo es el término constante. El ajuste del modelo, medido por el valor del  $R^2$ , es prácticamente nulo. Los contrastes residuales rechazan la hipótesis nula de normalidad, aunque no rechazan las de homoscedasticidad y ausencia de autocorrelación.

Si las perturbaciones no tienen distribución normal las estimaciones no serán eficientes en el sentido máximo-verosímil (aunque sí en el de Gauss-Markov) y la distribución de los estadísticos habituales será distinta de la teórica bajo el supuesto de normalidad de las perturbaciones (por ejemplo, los estadísticos de la  $t$  no tendrán exactamente una distribución  $t$  de student).

No obstante, dado que la relación entre variables es espuria, ninguno de estos modelos de regresión es válido como explicación de la tasa de mortalidad.

(Pregunta 4)

## Respuesta 5

La pendiente de la regresión estimada en la Etapa 3 (que es la misma que la de la sección de la regresión en niveles) indica que un aumento de un uno por mil en la proporción de matrimonios eclesíásticos da lugar a un aumento de un 0.419 por mil en la mortalidad esperada (pero, dado que la relación es espuria, interpretar este resultado carece de sentido).

(Pregunta 5)

## Respuesta 6

Recuerde que signo de los parámetros MA en las salidas de Gretl tienen el signo cambiado respecto a convenio habitual en los manuales de series temporales, es decir, para los polinomios AR  $(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$ , tenemos que **phi\_j** es " $\phi_j$ " (es decir, al escribir el modelo el signo del parámetro **phi\_j** aparece con un menos delante); pero para los MA  $(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_p B^p)$  tenemos que **theta\_j** es " $-\theta_j$ " (es decir, al escribir no cambiamos el signo de parámetro **theta\_j** pues ya lleva el " $-$ " incorporado). Además, **const** es la estimación del valor esperado  $\mu$  del proceso  $X$ , es decir, que  $(X_t - \mu \mid t \in \mathbb{Z})$  es un proceso ARMA de media cero.

Por tanto, las expresiones correctas son:

**Expresión 1** modelo ARMA(1, 2):  $\phi(B)(X_t - \mu) = \theta(B)U_t$

**Expresión 4** su representación MA( $\infty$ ):  $(X_t - \mu) = \frac{\theta}{\phi}(B)U_t \rightarrow X_t = \mu + \frac{\theta}{\phi}(B)U_t$

**Expresión 8** su representación AR( $\infty$ ):  $\frac{\phi}{\theta}(B)(X_t - \mu) = U_t$

¡Ojo, la cuarta expresión solo es posible porque  $\phi_1$  no es exactamente 1! Si fuera 1, el polinomio autorregresivo  $1 - B$  no tendría una inversa sumable y, por tanto, ni el proceso sería estacionario, ni habría una representación del proceso como media móvil infinita como la Expresión 4.

(Pregunta 6)

## Respuesta 7

La raíz AR estimada está muy próxima a 1, por lo que cabe pensar que la serie proviene de un proceso estocástico NO estacionario. Sin embargo, las raíces del polinomio MA tienen un módulo claramente mayor que uno, por lo que el modelo tiene claramente una representación AR( $\infty$ ), es decir, es invertible.

(Pregunta 7)

## Respuesta 8

¿Cuáles de los modelos de más arriba considera aceptables? ¿O qué mejoras sugeriría para ellos?

**En cuanto al modelo univariante** Probablemente debería incorporar una diferencia ordinaria, en lugar de un término AR(1).

**En cuanto a los modelos de regresión** En el modelo de las serie en diferencias hay, probablemente, un problema de autocorrelación dado el elevado valor del estadístico Durbin-Watson (es próximo a 2),



por lo que quizá debería ser estimado por mínimos cuadrados generalizados asumiendo un modelo autorregresivo  $AR(1)$  para el error.

No obstante, el modelo en diferencias (y el sentido común) sugiere que la relación entre ambas variables es espuria. Consecuentemente, ninguna de las dos regresiones (en niveles o en diferencias) arrojará un modelo aceptable ni siquiera con las mejoras sugeridas.

(Pregunta 8)