

Índice

1. Funciones de autocovarianzas y de autocorrelación (ACF)	4
2. Función de autocorrelación parcial (PACF)	4
3. Densidad espectral	5
4. ACF, PACF y densidad espectral de algunos modelos lineales	6
4.1. Procesos lineales causales	6
4.2. Proceso de Ruido Blanco	7
4.3. Proceso de media móvil MA(q)	8
4.4. Proceso de media móvil MA(1)	9
4.4.1. MA(1) con raíz positiva	9
4.4.2. MA(1) con raíz negativa	10
4.5. Proceso de media móvil MA(2)	11
4.5.1. MA(2) con dos parámetros positivos (+, +)	11
4.5.2. MA(2) con parámetros de distinto signo (-, +)	12
4.5.3. MA(2) con dos parámetros negativos (-, -)	13
4.5.4. MA(2) con parámetros de distinto signo (+, -)	14
4.5.5. MA(2) con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa	15
4.5.6. MA(2) con un par de raíces complejas	15
4.5.7. MA(2) con dos raíces reales y negativas	16
4.5.8. MA(2) con dos raíces reales y positivas	17
5. (Resumen) características de procesos MA(q)	18

Lección 4. ACF, PACF y densidad espectral de modelos MA

Marcos Bujosa

7 de septiembre de 2025

Resumen

Veremos tres funciones que describen las características correspondientes a los momentos de segundo orden de los procesos lineales: la función de autocorrelación (ACF), la función de autocorrelación parcial (PACF) y la densidad espectral (estas tres funciones son transformaciones de la función de autocovarianzas del proceso). Veremos la estructura de estas funciones en procesos lineales genéricos. Primero para ruido blanco. Luego nos centraremos en los procesos de media móvil, o procesos MA; que caracterizan series con “memoria muy corta”. Estos procesos son funciones de un número finito, y generalmente pequeño, de las innovaciones pasadas. A diferencia de los modelos autorregresivos, los procesos MA solo están correlados con un reducido número de valores anteriores, lo que permite que su función de autocorrelación simple tenga únicamente unas pocas autocorrelaciones distintas de cero.

- ([slides](#)) — ([html](#)) — ([pdf](#)) — ([mybinder](#))
 - programas análisis modelos arma: ([slides](#)) — ([html](#)) — ([mybinder](#))

Carga de algunos módulos de python y creación de directorios auxiliares

```
# Para trabajar con los datos y dibujarlos necesitamos cargar algunos módulos de python
import numpy as np # linear algebra
import pandas as pd # data processing, CSV file I/O (e.g. pd.read_csv)
import matplotlib as mpl
# definimos parámetros para mejorar los gráficos
mpl.rcParams['text', usetex=False]
import matplotlib.pyplot as plt # data visualization
import dataframme_image as dfi # export tables as .png
```

- Directorio auxiliar para albergar las figuras de la lección: para publicar la lección como pdf o página web, necesito los gráficos como ficheros .png alojados algún directorio específico:

```
imagenes_leccion = "./img/lecc04" # directorio para las imágenes de la lección
import os
os.makedirs(imagenes_leccion, exist_ok=True) # crea el directorio si no existe
```

Gráficos para las ACF, PACF y densidades espectrales teóricas

Cargamos las funciones auxiliares (véase la carpeta `src/`)

```
import warnings
warnings.filterwarnings("ignore", category=UserWarning)
```

```
%run -i ./src/analisis_armas.py
```

1. Funciones de autocovarianzas y de autocorrelación (ACF)

Si un proceso estocástico es estacionario, la covarianza entre X_t y X_{t+k} no depende de t ; tan solo depende de la distancia temporal k entre ambas variables aleatorias: $Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma_k$.

- La secuencia $\gamma = (\gamma_k \mid k \in \mathbb{Z})$ se denomina *función de autocovarianzas*
- Dividiendo γ por γ_0 obtenemos la secuencia $\rho = (\rho_k \mid k \in \mathbb{Z})$ donde

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0},$$

que se denomina *función de autocorrelación* (ACF).

Veamos otras transformaciones de γ que subrayan diferentes características de la interdependencia temporal en un proceso estocástico.

2. Función de autocorrelación parcial (PACF)

Dado un conjunto de variables $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$, la *correlación condicional* $\rho_{X,Y|\mathbf{Z}}$ entre las variables X e Y es

$$\rho_{X,Y|\mathbf{Z}} = Corr(X - E(X \mid \mathbf{Z}), Y - E(Y \mid \mathbf{Z}))$$

El problema es que no siempre es fácil conocer las esperanzas condicionadas $E(X \mid \mathbf{Z})$ y $E(Y \mid \mathbf{Z})$.

Pero es sencillo restar de X y de Y los ajustes \hat{X} y \hat{Y} correspondientes a sus respectivas regresiones lineales sobre \mathbf{Z} . La correlación entre ambos residuos se denomina *correlación parcial* entre X e Y ; y mide la correlación entre ambas variables una vez “descontado” el efecto lineal de las variables \mathbf{Z} .

$$Corr((X - \hat{X}), (Y - \hat{Y}))$$

La *correlación parcial* entre dos variables X_t y X_{t+k} de un proceso estacionario \mathbf{X} mide su correlación una vez descontado el efecto de las variables $X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}$ que median entre ambas.

$$X_t, \overbrace{X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}}^{\text{variables medianas}}, X_{t+k}$$

Si denotamos con \widehat{X}_t y \widetilde{X}_{t+k} los ajustes de las respectivas regresiones de X_t y X_{t+k} sobre $X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}$; la *correlación parcial* π_k entre X_t y X_{t+k} es la correlación entre los residuos de sendas regresiones:

$$\pi_k = Corr((X_t - \widehat{X}_t), (X_{t+k} - \widetilde{X}_{t+k}))$$

En un proceso débilmente estacionario las correlaciones parciales solo dependen de la distancia k , lo que permite definir la siguiente secuencia.

La función de autocorrelación parcial (PACF) de un proceso estocástico estacionario \mathbf{X} es la siguiente secuencia $\boldsymbol{\pi}$ simétrica ($\pi_{-k} = \pi_k$):

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_k \mid k \in \mathbb{Z}) = \begin{cases} \pi_0 &= \rho_0 = 1 \\ \pi_1 &= \text{Corr}(X_t, X_{t-1}) = \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \\ \pi_k &= \text{Corr}\left((X_t - \widehat{X}_t), (X_{t-k} - \widetilde{X}_{t-k})\right) \end{cases},$$

donde \widehat{X}_t y \widetilde{X}_{t-k} son los ajustes de las respectivas regresiones de X_t y X_{t-k} sobre $X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}$; i.e., las proyecciones ortogonales sobre $\bar{s}p(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)})$.

La magnitud de la correlación parcial π_k **refleja la mejora en la predicción de \widehat{X}_t si en lugar de usar una combinación lineal con solo los $k-1$ primeros retardos, $\widehat{X}_t = \widehat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \widehat{\alpha}_j X_{t-j}$, empleamos k retardos** (i.e., un retardo más).

Así, la PACF nos ayudará a identificar el orden de procesos autoregresivos.

Hay una correspondencia uno-a-uno entre la función de autocovarianzas $\boldsymbol{\gamma}$ y la PACF $\boldsymbol{\pi}$.

Es decir, es posible reconstruir una de las secuencias a partir de la otra (por ejemplo resolviendo las **ecuaciones de Yule-Walker** recursivamente con el algoritmo **Levinson-Durbin**; véase *Pourahmadi, M. (2001, Capítulo 7)* o *Brockwell & Davis (1991, Capítulo 5)*)

Así, la PACF $\boldsymbol{\pi}$ puede verse como una reparametrización de la función de autocovarianzas $\boldsymbol{\gamma}$.

Veamos otra transformación de $\boldsymbol{\gamma}$ que también arrojará luz sobre las propiedades de un proceso estocástico.

3. Densidad espectral

Si \mathbf{X} es un proceso estocástico con función de autocovarianzas $\boldsymbol{\gamma} \in \ell^1$, es decir, con función de autocovarianzas absolutamente sumable,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k| < \infty,$$

entonces definimos la *densidad espectral* de \mathbf{X} como

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{-ik\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \geq 0} \gamma_k \cos(k\omega), \quad \omega \in [-\pi, \pi],$$

(donde w son las frecuencias de oscilación de la serie).

La *densidad espectral* $f(\omega)$ satisface las siguientes propiedades:

1. $f(\omega) = f(-\omega)$
2. $f(\omega) \geq 0$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega < \infty$

Es más, partiendo de la densidad espectral se pueden calcular las covarianzas

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{-ik\omega} d\omega; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Consecuentemente, para $k = 0$

$$\sigma^2 = \gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega.$$

Por tanto podemos interpretar la densidad espectral como una descomposición de la varianza en sumas de oscilaciones con distintas frecuencias (o períodos).

(Periodo = $\frac{1}{Frecuencia}$, donde la Frecuencia = Número de ciclos por unidad de tiempo).

La ACF, la PACF y la *densidad espectral* son funciones que dependen únicamente de los dos primeros momentos de la distribución.

Su estimación y posterior análisis son la herramienta fundamental para elegir un modelo ARMA para una serie temporal “estacionaria”.

Para entenderlo debemos ver cómo son estas funciones en algunos modelos lineales concretos.

4. ACF, PACF y densidad espectral de algunos modelos lineales

4.1. Procesos lineales causales

Sea $\mathbf{X} = \psi * \mathbf{U}$, donde $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y $\psi \in \ell^2$ es una serie formal:

$$X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j U_{t-j}.$$

Por la [lección anterior](#) sabemos que $E(X_t) = 0$ y que

- $\gamma = \sigma^2 \psi(z) * \psi(z^{-1})$

Es decir,

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+|k|} \cdot \psi_j.$$

Por otra parte, $\gamma_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$

Demostración: aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\gamma_k| \leq \sigma^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_{j+k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sigma^2 \left(\sum_{j=k}^{\infty} |\psi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y puesto que ψ es de cuadrado sumable, la cola $\sum_{j=k}^{\infty} |\psi_j|^2$ converge a cero cuando $k \rightarrow \infty$.

A partir de γ obtenemos las otras tres funciones:

$$\text{ACF: } \rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma$$

$$\text{Dens. espectral: } f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \geq 0} \gamma_k \cos(k\omega); \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

$$\text{PACF: } \pi \in \ell^2, \quad \text{i.e., } \pi_k \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

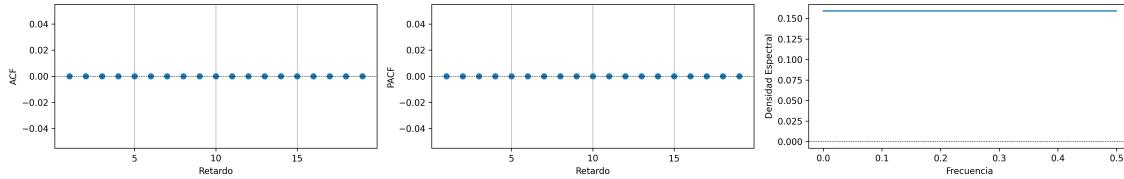
(Cuando $\pi \in \ell^2$ se dice que el proceso es *no-determinista*.)

4.2. Proceso de Ruido Blanco

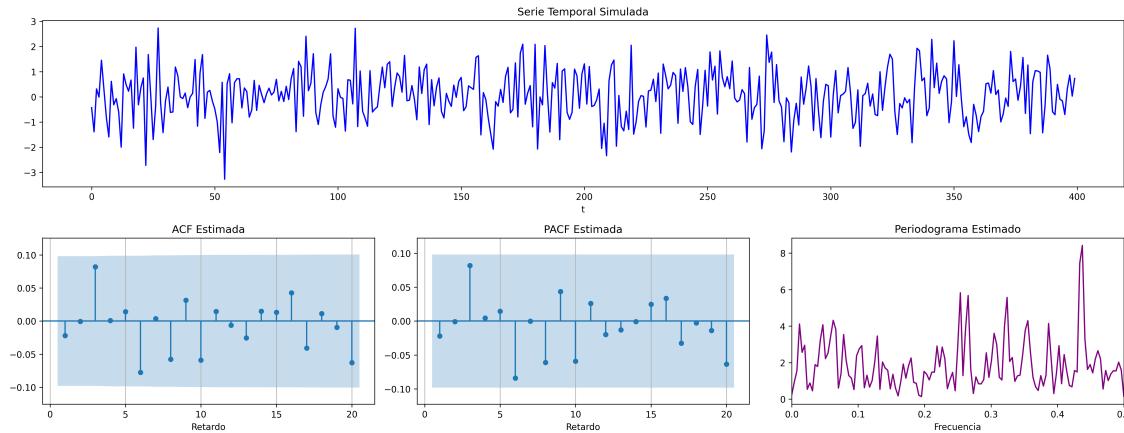
Sea $X = 1 * U$, donde $U \sim WN(0, \sigma^2)$; es decir $X_t = U_t$ para $t \in \mathbb{Z}$. Entonces

- $\gamma = \sigma^2(1z^0 * 1z^0) = \sigma^2 z^0 = (\dots, 0, 0, \sigma^2, 0, 0, \dots)$
- $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1}{\sigma^2} \gamma = 1z^0 = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$
- $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \geq 0} \gamma_k \cos(k\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cos(0\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}; \quad \omega \in [-\pi, \pi]$
- $\pi = 1z^0 = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1,]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, 1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACFwhitenoise.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/SimulWhitenoise.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



En la luz blanca todos los colores (frecuencias) aparecen por igual (por eso se ve blanco). El ruido blanco es el pilar sobre el que construimos los demás procesos (débilmente) estacionarios.

4.3. Proceso de media móvil MA(q)

Sea $\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U}$, con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y donde $\boldsymbol{\theta}$ es un polinomio de orden $q > 0$, con $\theta_0 = 1$ y con todas sus raíces fuera del círculo unidad ($\boldsymbol{\theta}^{-\triangleright} \in \ell^1$), es decir

$$X_t = \sum_{j=1}^q \theta_j U_{t-j} + U_t.$$

Este requisito no es necesario para que el proceso sea estacionario, pero por conveniencia se usan modelos MA que puedan tener una representación AR(∞) causal (es decir, usando observaciones del pasado “para construir” el presente):

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\boldsymbol{\theta}} * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$$

donde $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\theta}^{-\triangleright} = \boldsymbol{\theta}^{-1} \in \ell^1$. Entonces se dice que el modelo MA es “invertible”. Cualquier modelo MA sin raíces en el círculo unidad se puede reparametrizar para obtener un modelo invertible con la misma función de autocovarianzas “ $\boldsymbol{\gamma}$ ” (Véase Sección 2.6 de Fuller (1996)) y, consecuentemente, las mismas ACF, PACF y densidad espectral que el modelo original. Para tener una asociación uno a uno entre ACFs y procesos estocásticos, siempre asumiremos que las raíces de los polinomios MA, $\boldsymbol{\theta}$, son mayores que uno en valor absoluto.

Entonces $E(X_t) = 0$ y

$$\boldsymbol{\gamma} = \sigma^2 \boldsymbol{\theta}(z) * \boldsymbol{\theta}(z^{-1}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^q \theta_{j+k} \theta_j z^k \text{ (grado } q; \text{ cogrado } -q\text{)} \quad (\text{Lecc. 02})$$

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\gamma_0} \boldsymbol{\gamma}$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \boldsymbol{\theta}(e^{-i\omega}) \cdot \boldsymbol{\theta}(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^q \gamma_h \cos(h\omega); \quad \omega \in [-\pi, \pi] \text{ (q cosenos +1)}$$

$\boldsymbol{\pi}$ con grado ∞ y cogrado $-\infty$. Su magnitud decrece paulatinamente cuando $k \rightarrow \infty$

Un proceso MA es siempre estacionario.

Tipos de representación del proceso

Como suma ponderada finita (número finito de parámetros)

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad X_t = \boldsymbol{\theta}(\mathbb{B}) U_t$$

Como suma ponderada infinita (solo existe si es invertible):

$$\frac{1}{\boldsymbol{\theta}} * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\boldsymbol{\theta}}(\mathbb{B}) X_t = U_t$$

Para ser invertible raíces θ fuera del círculo unidad ($\theta^{-\triangleright} = \theta^{-1} \in \ell^1$)

Los procesos MA se caracterizan por su “memoria muy corta”. Estos procesos dependen de un número finito, generalmente pequeño, de innovaciones pasadas. A diferencia de los modelos autorregresivos, los procesos MA solo presentan correlación con un número limitado de valores anteriores, lo que permite que su función de autocorrelación simple tenga solo unas pocas autocorrelaciones diferentes de cero..

4.4. Proceso de media móvil MA(1)

Sea $X = (1 - \theta z) * U$ con $|\theta| < 1$ y con $U \sim WN(0, \sigma^2)$, es decir

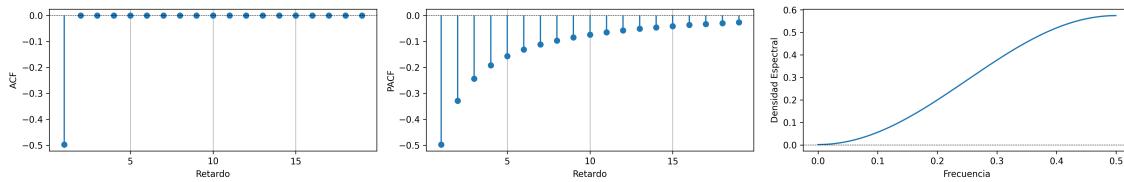
$$X_t = U_t - \theta U_{t-1}.$$

- $\gamma = \sigma^2(1 - \theta z) * (1 - \theta z^{-1}) = \sigma^2(\dots, 0, -\theta, \color{blue}{(1 + \theta^2)}, -\theta, 0, \dots)$
- $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1}{\sigma^2(1+\theta^2)} \gamma = (\dots, 0, \frac{-\theta}{1+\theta^2}, \color{blue}{1}, \frac{-\theta}{1+\theta^2}, 0, \dots)$
- $f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \theta(e^{-i\omega}) \cdot \theta(e^{i\omega}) = \frac{\sigma^2}{2\pi} ((1 + \theta^2) - 2\theta \cos(\omega)); \quad \omega \in [-\pi, \pi]$
- $\pi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{-\theta^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(k+1)}} z^k$

4.4.1. MA(1) con raíz positiva

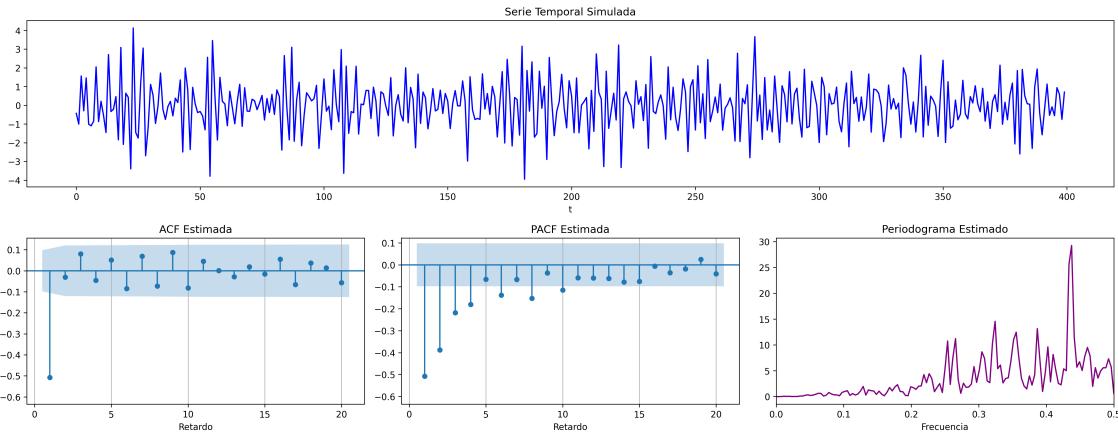
$$\theta(z) = 1 - 0.9z \quad \Rightarrow \quad X_t = (1 - 0.9B)U_t \quad (\theta > 0)$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, -0.9]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA1p.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
0	1.111111	0.0	1.111111	0.0	Inf

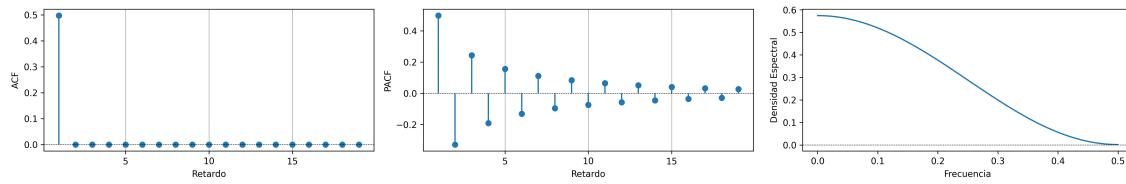
```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA1p.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



4.4.2. MA(1) con raíz negativa

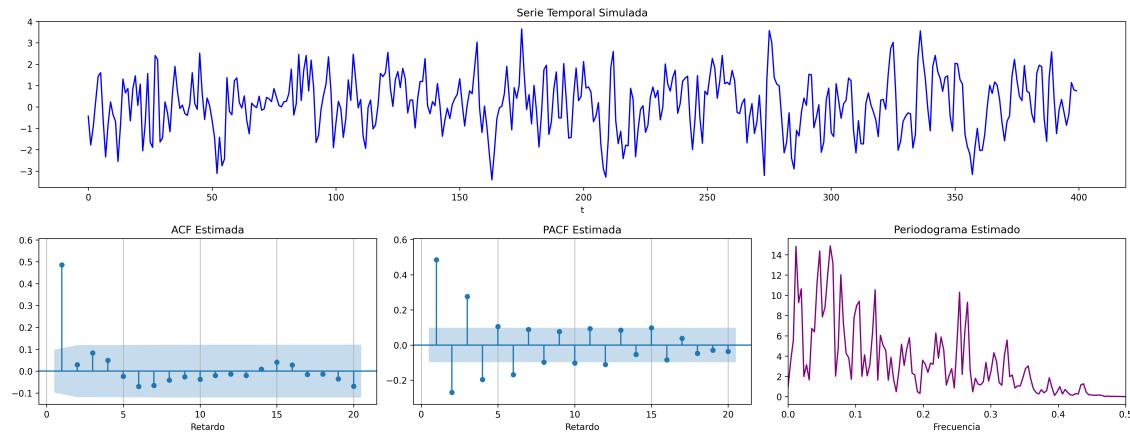
$$\theta(z) = 1 + 0.9z \Rightarrow X_t = (1 + 0.9B)U_t \quad (\theta < 0)$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, 0.9]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA1n.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Período	Multip.
0	-1.111111	0.0	1.111111	0.5	2.0

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA1n.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



4.5. Proceso de media móvil MA(2)

Sea $\mathbf{X} = (1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2) * \mathbf{U}$, con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y con

$$\theta_1 + \theta_2 < 1; \quad \theta_2 - \theta_1 < 1; \quad |\theta_2| < 1; \quad (\text{i.e., invertible})$$

es decir $X_t = U_t - \theta_1 U_{t-1} - \theta_2 U_{t-2}$.

- $\gamma = \sigma^2(1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2) * (1 - \theta_1 z^{-1} - \theta_2 z^{-2})$
- $\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2); \quad \gamma_1 = \sigma^2(-\theta_1(1 - \theta_2)); \quad \gamma_2 = \sigma^2(-\theta_2)$
- $\gamma_3 = \gamma_4 = \dots = 0$ (y es simétrica)
- $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1}{\sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)} \gamma$
- $f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left((1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) - 2\theta_1(1 + \theta_2) \cos(\omega) - 2\theta_2 \cos(2\omega) \right)$
- π tiene una expresión complicada, pero su magnitud decrece paulatinamente.

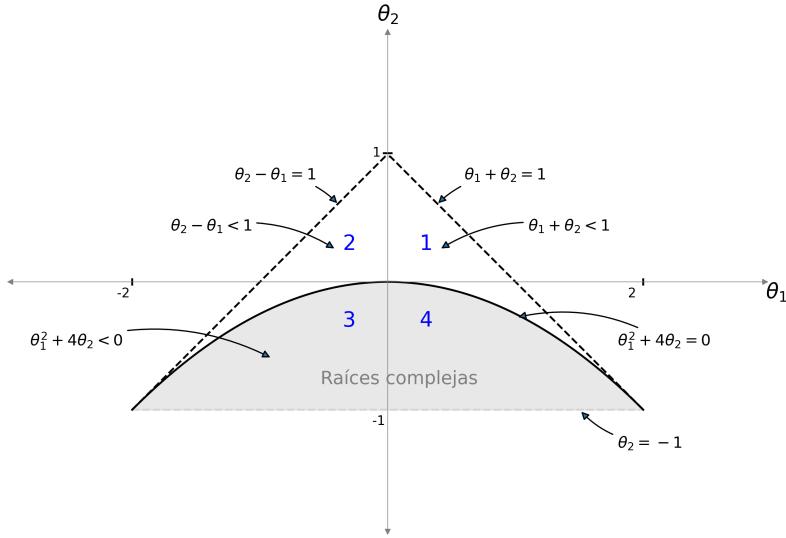


Figura 1: El interior del triángulo es la región paramétrica donde un MA(2) es invertible. Por debajo de la parábola las raíces son complejas. El signo del parámetro θ_1 determina el signo del primer retardo de la ACF y θ_2 el signo del segundo. Las regiones 1, 2, 3, y 4 determinan cómo decae la PACF.

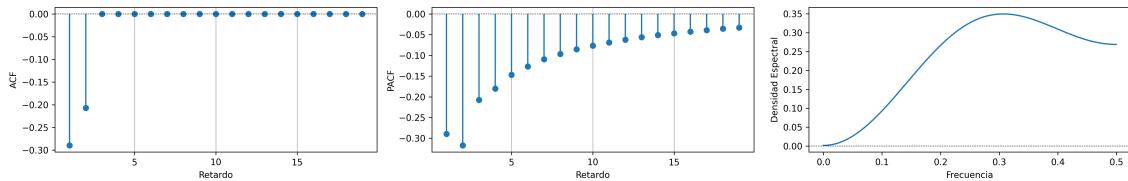
4.5.1. MA(2) con dos parámetros positivos (+, +)

$$\theta(z) = 1 - 0.6z - 0.3z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 0.6B - 0.3B^2)U_t; \quad (\theta_1 > 0 \text{ y } \theta_2 > 0)$$

```

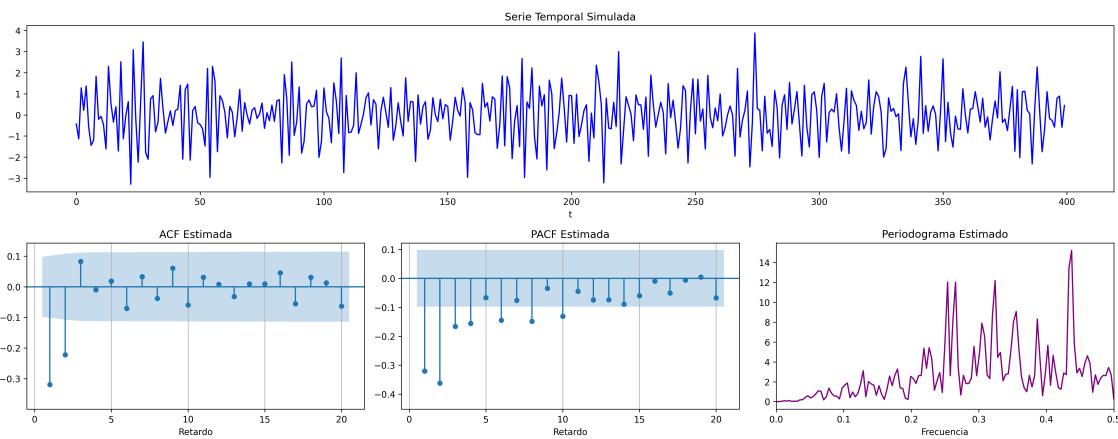
ar_params = [1,]
ma_params = [1, -0.6, -0.3]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('~/img/lecc04/ACF-MA2thpp.png', dpi=300, bbox_inches='tight')

```



	P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Período	Multip.
1	1.081666	0.0	1.081666	0.0	Inf	1
0	-3.081666	0.0	3.081666	0.5	2.0	1

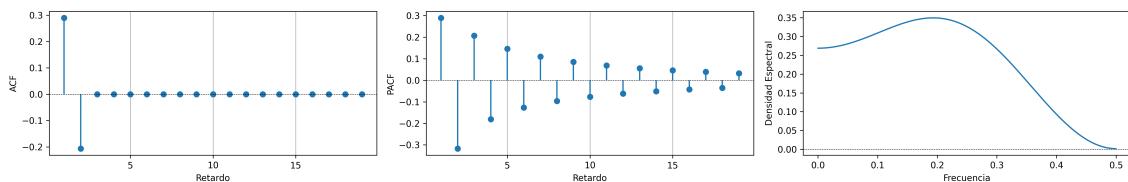
```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2thpp.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



4.5.2. MA(2) con parámetros de distinto signo (-, +)

$$\theta(z) = 1 + 0,6z - 0,3z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 0,6B - 0,3B^2)U_t \quad (\theta_1 < 0 \text{ y } \theta_2 > 0)$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, +0.6, -0.3]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2thnp.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



	P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Período	Multip.
1	3.081666	0.0	3.081666	0.0	Inf	1
0	-1.081666	0.0	1.081666	0.5	2.0	1

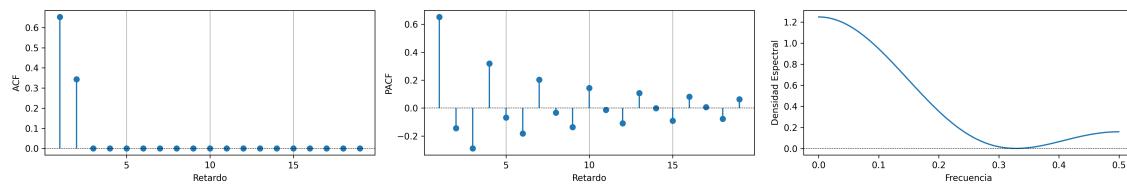
```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2thnp.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



4.5.3. MA(2) con dos parámetros negativos (-, -)

$$\theta(z) = 1 + 0.9z + 0.9z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 0.9B + 0.9B^2)U_t; (\theta_1 < 0 \text{ y } \theta_2 < 0)$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, +0.9, 0.9]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2thnn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



	P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Período	Multip.
0	-0.5	-0.927961	1.054093	0.328657	3.042687	1
1	-0.5	0.927961	1.054093	0.328657	3.042687	1

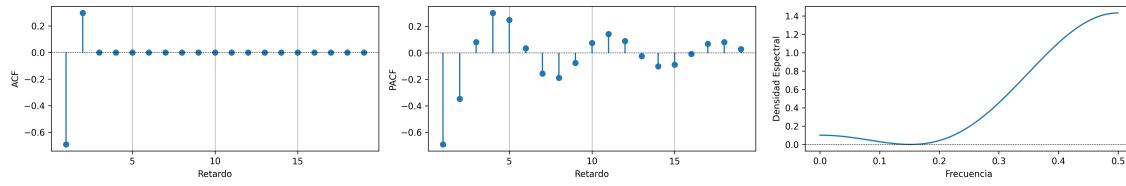
```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2thnn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



4.5.4. MA(2) con parámetros de distinto signo (+, -)

$$\theta(z) = 1 - 1,1z + 0,9z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 1,1B + 0,9B^2)U_t \quad (\theta_1 > 0 \text{ y } \theta_2 < 0)$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, -1.1, 0.9]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2thpn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



	P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Período	Multip.
0	0.611111	-0.858868	1.054093	0.151575	6.597397	1
1	0.611111	0.858868	1.054093	0.151575	6.597397	1

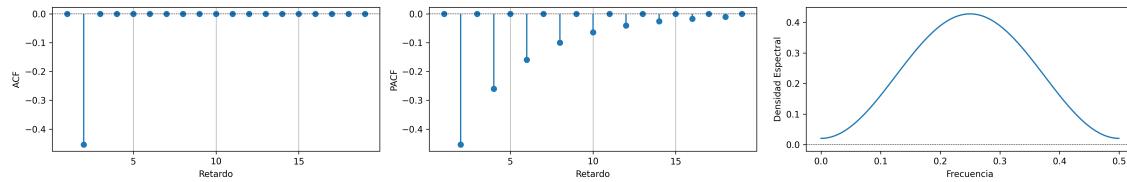
```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2thpn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



4.5.5. MA(2) con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa

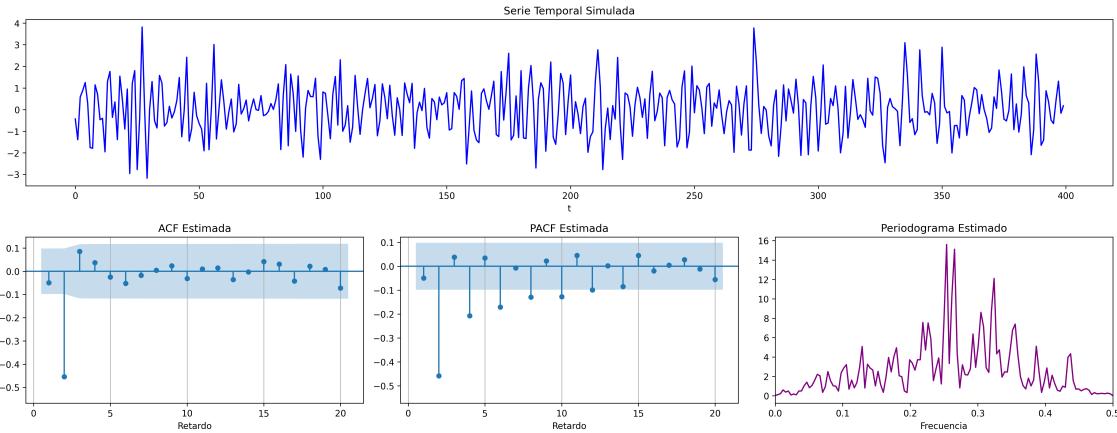
$$\theta(z) = 1 - 0,64z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 0,64B^2)U_t \text{ (raíces reales: +, -)}$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, 0, -0.64]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2pn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
1	1.25	0.0	1.25	0.0	Inf
0	-1.25	0.0	1.25	0.5	2.0

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2pn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



4.5.6. MA(2) con un par de raíces complejas

$$\theta(z) = 1 + 0,64z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 0,64B^2)U_t \text{ (par de raíces complejas)}$$

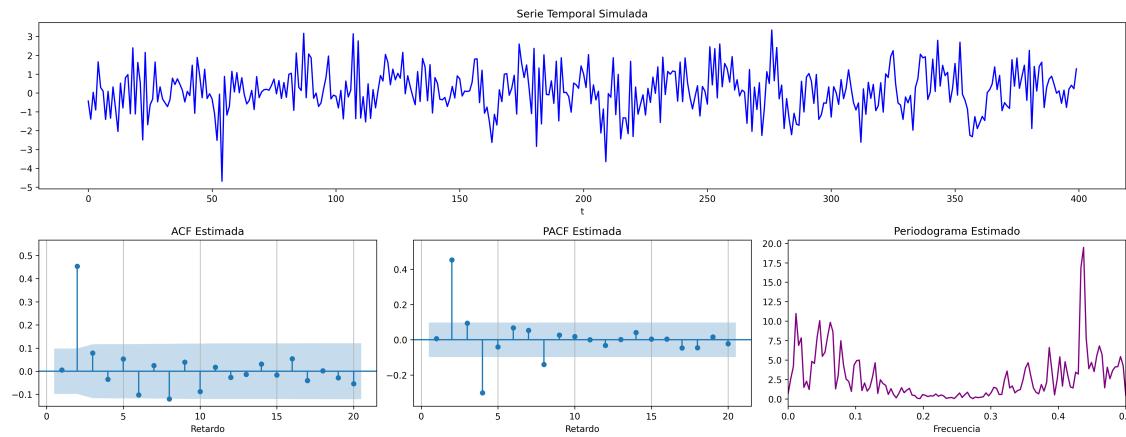
```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, 0, 0.64]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2np.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
---------	----------	--------	------------	---------	---------

0	0.0	-1.25	1.25	0.25	4.0	1
1	0.0	1.25	1.25	0.25	4.0	1

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2np.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



4.5.7. MA(2) con dos raíces reales y negativas

$$\theta(z) = 1 + 1.6z + 0.64z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 1.6B + 0.64B^2)U_t \text{ (r. reales: - , -)}$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, 1.6, 0.64]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2rojo.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
---------	----------	--------	------------	---------	---------

0	-1.25	0.0	1.25	0.5	2.0	2
----------	-------	-----	------	-----	-----	---

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2rojo.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



4.5.8. MA(2) con dos raíces reales y positivas

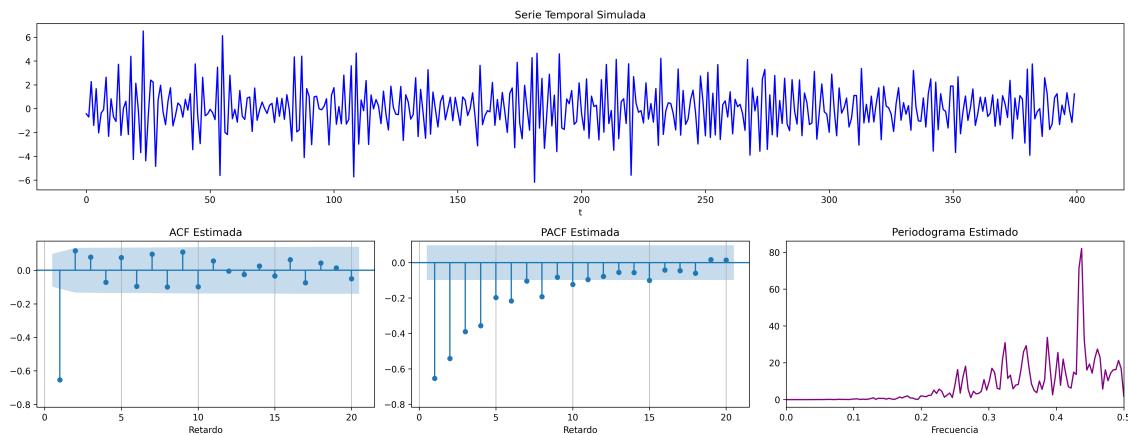
$$\theta(z) = 1 - 1,6z + 0,64z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 1,6B + 0,64B^2)U_t \text{ (r. reales: +, +)}$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, -1.6, 0.64]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2violeta.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
0	1.25	0.0	0.0	Inf	2

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2violeta.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



5. (Resumen) características de procesos MA(q)

Siempre estacionario.

Para ser invertible raíces θ fuera del círculo unidad ($\theta^{-\triangleright} = \theta^{-1} \in \ell^1$)

Tipos de representación del proceso

Como suma ponderada finita (número finito de parámetros)

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad X_t = \boldsymbol{\theta}(\mathbb{B})U_t$$

Como suma ponderada infinita (solo existe si es invertible):

$$\frac{1}{\theta} * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\theta}(\mathbb{B})X_t = U_t$$

Comportamiento de las funciones asociadas a los segundos momentos

ACF (ρ): Grado (q) y cogrado ($-q$)

PACF (π): Grado (∞) y cogrado ($-\infty$): Combinación de exponenciales y/o sinusoidales amortiguadas.

Densidad espectral Suma de dos cosenos más una constante.