

# Índice

<b>1. Ejemplos de algunas series e inversas de series</b>	<b>2</b>
1.1. Inversa con final e inversa con principio de un polinomio de grado uno . . . . .	2
1.1.1. Polinomio como <code>SerieConPrincipio</code> y su inversa . . . . .	2
1.1.2. Polinomio como <code>SerieConFinal</code> . . . . .	4
1.2. Otro ejemplo de serie y dos inversas . . . . .	6
<b>2. Implementación de series con principio y series con final</b>	<b>6</b>
2.1. Clase <code>SerieConPrincipio</code> : series con cogrado arbitrario en Python . . . . .	6
2.1.1. Importación de librerías . . . . .	7
2.1.2. Métodos generales para representar los objetos correctamente en Jupyter Notebook . . . . .	7
2.1.3. Declaración de la clase <code>SerieConPrincipio</code> . . . . .	7
2.1.4. Constructor . . . . .	8
2.1.5. Representaciones: texto y $\text{\LaTeX}$ . . . . .	8
2.1.6. Suma de series . . . . .	10
2.1.7. Producto: escalar y convolución . . . . .	10
2.1.8. Producto escalar desde la izquierda . . . . .	11
2.1.9. Inversa formal . . . . .	11
2.1.10. Gráfico de la serie . . . . .	11
2.1.11. Sustitución simbólica . . . . .	12
2.1.12. Ejemplo de uso . . . . .	12
2.2. Clase <code>SerieConFinal</code> : series con grado arbitrario en python . . . . .	13
2.3. Funciones auxiliares . . . . .	16

# Lección 1 — series con grado o cogrado arbitrarios

Marcos Bujosa

12 de diciembre de 2025

## 1. Ejemplos de algunas series e inversas de series

### 1.1. Inversa con final e inversa con principio de un polinomio de grado uno

Más abajo ([sección 2](#)) aparece una implementación en Python de las series con principio (con cogrado) y las series con final (con grado). Dicha implementación consiste en la definición de dos clases: la clase `SerieConPrincipio` y la clase `SerieConFinal`.

El siguiente bloque de código es para que este cuaderno electrónico (notebook) lea el [implementacion\\_series\\_formales.py](#) de python con la definición de ambas clases:

---

```
#import warnings
#warnings.filterwarnings("ignore", category=UserWarning)
%run -i implementacion_series_formales.py
```

---

Los ejemplos de más abajo usan un parámetro simbólico para mayor claridad. El bloque de código que puede ver a continuación define dicho parámetro simbólico  $a$ .

---

```
from sympy import symbols
a = symbols('a')
```

---

#### 1.1.1. Polinomio como `SerieConPrincipio` y su inversa

Definimos el polinomio  $1 - az$  como una `SerieConPrincipio` con cogrado 0:

---

```
p=SerieConPrincipio([1,-a],0)
p
```

---

Su inversa  $p^{-▷}$  (en el conjunto de series *con principio*) es:

---

```
número_coeficientes = 6
p.inversa(número_coeficientes)
```

---

(donde hemos indicado cuántos coeficientes queremos mostrar)

Fíjese que su inversa (*con principio*) tiene cogrado 0.

**Nota.** Al haber creado este polinomio como un elemento de la clase `SerieConPrincipio`, el procedimiento `.inversa()` genera la inversa como una serie con principio (con cogrado). A esta inversa la hemos denotado con  $p^{-▷}$  en la lección correspondiente.

Mediante gráficos podemos ver el comportamiento de los coeficientes para distintos valores del parámetro  $a$ . Para estos dibujos calcularemos 15 coeficientes y sustituiremos el parámetro  $a$  por un valor concreto en cada caso.

1. Para valores de  $a$  menores a 1 en valor absoluto (**raíz fuera del círculo unidad**)

---

```
valor = 0.8
p.inversa(15).subs((a,valor)).plot_serie(title='$a='+str(valor)+'$')
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

---

```
valor = -0.8
p.inversa(15).subs((a,valor)).plot_serie(title='$a='+str(valor)+'$')
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

*Para polinomios con raíces fuera del círculo unidad los coeficientes de la inversa (con principio  $p^{-\triangleright}$ ) se aproximan a 0 cuando los índices crecen.*

Éste es el caso en el que  $p^{-\triangleright} = p^{-1}$  (inversa absolutamente sumable).

2. Para valores de  $a$  iguales a 1 en valor absoluto (**raíz sobre el círculo unidad**)

---

```
valor = 1
p.inversa(15).subs((a,valor)).plot_serie(title='$a='+str(valor)+'$')
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

---

```
valor = -1
p.inversa(15).subs((a,valor)).plot_serie(title='$a='+str(valor)+'$')
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

*Para polinomios con raíces en el círculo unidad los coeficientes de la inversa mantienen patrones estables.*

3. Para valores de  $a$  mayores a 1 en valor absoluto (**raíz en el interior del círculo unidad**)

---

```
valor = 1.2
p.inversa(15).subs((a,valor)).plot_serie(title='$a='+str(valor)+'$')
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

---

```
valor = -1.2
p.inversa(15).subs((a,valor)).plot_serie(title='$a='+str(valor)+'$')
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

*Para polinomios con raíces dentro del círculo unidad los coeficientes de la inversa (con principio  $p^{-p}$ ) crecen exponencialmente cuando los índices crecen.*

Recuerde que **la inversa de un polinomio es una serie con infinitos términos**. Como esta implementación en Python solo calcula una cantidad finita de términos, el producto del polinomio por la serie calculada no es exactamente 1, aunque nos podemos aproximar a la inversa tanto como queramos (dentro de las capacidades del ordenador).

Si calculamos solo cinco términos de la inversa, se anulan todos los coeficientes excepto el quinto (y el 1 de la posición 0):

---

```
p * p.inversa()
```

---

Con solo cincuenta términos se anulan todos excepto el quincuagésimo (y el 1 de la posición 0):

---

```
p * p.inversa(50)
```

---

Con quinientos se anulan todos excepto el parámetro en la posición 500 (y el 1 de la posición 0):

---

```
p * p.inversa(500)
```

---

Fíjese que si  $a \neq 0$ , el producto `p*(p.inversa(500))` no calcula exactamente la serie 1 (la que tienen un 1 en la posición 0 y es nula en todas las demás posiciones). Nótese que la componente correspondiente a la posición 500 es distinta de cero (su magnitud es  $a^{500}$ ). Por tanto, `p.inversa(500)` no es realmente la inversa de `p`. Fíjese que la serie `p.inversa(500)` solo tiene 500 términos no nulos; sin embargo, la serie (con cogrado) que verdaderamente es inversa del polinomio `p` requiere de infinitos términos no nulos (algo que esta implementación en Python no calcula).

### 1.1.2. Polinomio como SerieConFinal

Ahora vamos a definir exactamente el mismo polinomio, pero en esta ocasión lo haremos como una `SerieConFinal` (con `grado` igual a 1).

---

```
p2=SerieConFinal([1,-a],1)
p2
```

---

Su inversa  $p^{\leftarrow}$  (en el conjunto de series *con final*) es:

---

```
p2.inversa()
```

---

Fíjese que como el grado del polinomio  $p_2$  es 1, el grado de  $p^{\leftarrow}$  es  $-1$ .

**Nota.** Al haber creado este polinomio como un elemento de la clase `SerieConFinal`, el procedimiento `.inversa()` genera la inversa como una serie con final (con grado). A esta inversa la hemos denotado con  $p^{\leftarrow}$  en la lección correspondiente.

Veamos con unos gráficos el comportamiento de los coeficientes de esta nueva inversa  $p^{\leftarrow}$  para distintos valores del parámetro  $a$ .

1. Para valores de  $a$  menores a 1 en valor absoluto (**raíz fuera del círculo unidad**)

---

```
valor = 0.9
p2.inversa(10).subs((a,valor)).plot_series(title='$a='+str(valor)+'$')
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

---

```
valor = -0.9
p2.inversa(10).subs((a,valor)).plot_series(title='$a='+str(valor)+'$')
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

*Para polinomios con raíces fuera del círculo unidad los coeficientes de la inversa (con final  $p^{\leftarrow}$ ) crecen exponencialmente cuando los índices decrecen.*

2. Para valores de  $a$  iguales a 1 en valor absoluto (**raíz sobre el círculo unidad**)

---

```
valor = 1
p2.inversa(10).subs((a,valor)).plot_series(title='$a='+str(valor)+'$')
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

---

```
valor = -1
p2.inversa(10).subs((a,valor)).plot_series(title='$a='+str(valor)+'$')
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

*Para polinomios con raíces en el círculo unidad los coeficientes de la inversa mantienen patrones estables.*

3. Para valores de  $a$  mayores a 1 en valor absoluto (**raíz en el interior del círculo unidad**)

---

```
valor = 1.2
p2.inversa(15).subs((a,valor)).plot_series(title='$a='+str(valor)+'$')
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

---

```
valor = -1.2
p2.inversa(15).subs((a,valor)).plot_serie(title='$a='+str(valor)+'$')
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

*Para valores de  $a$  mayores a 1 en valor absoluto los coeficientes de la inversa (con final  $p^{\leftarrow}$ ) se aproximan a 0 cuando los índices decrecen.*

Este es el caso en el que  $p^{\leftarrow} = p^{-1}$  (inversa absolutamente sumable).

## 1.2. Otro ejemplo de serie y dos inversas

---

```
lista = [1, -.1, -.75]
s_cp = SerieConPrincipio(lista, -1)
s_cp
```

---



---

```
s_cp.inversa(30).plot_serie(title='inversa con principio de ' + s_cp.latex())
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

---

```
s_cf=SerieConFinal(lista, 1)
s_cf
```

---



---

```
s_cf.inversa(30).plot_serie(title='inversa con final de ' + s_cf.latex())
```

---

<Figure size 900x300 with 1 Axes>

## 2. Implementación de series con principio y series con final

### 2.1. Clase SerieConPrincipio: series con cogrado arbitrario en Python

Este documento implementa en Python una clase llamada **SerieConPrincipio** que representa series formales con índice inicial (con cogrado) arbitrario y otra llamada **SerieConFinal** que representa series con índice final (con grado) arbitrario. Ello nos permitirá trabajar con series que comienzan, por ejemplo, en  $z^{-2}$  o  $z^3$ ; y poder operar con ellas como si fueran polinomios infinitos, incluyendo suma, producto y cálculo de inversas.

### 2.1.1. Importación de librerías

Estas series podrán contener números racionales exactos (usando la clase `Fraction`) o flotantes, así como parámetros simbólicos. Por ello necesitamos `latex` y `Rational` de `sympy` para la representación como funciones generatrices en formato  $LATEX$ , y `Fraction` para mantener exactitud. Con `sympy` podremos sustituir los parámetros simbólicos por valores concretos y con `matplotlib.pyplot` podremos representar gráficamente una parte de estas series.

---

```
from sympy import latex, Rational
from fractions import Fraction
import sympy
from sympy import Add
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, display_png, Latex
import tempfile
from os.path import join
```

---

### 2.1.2. Métodos generales para representar los objetos correctamente en Jupyter Notebook

---

```
def html(TeX):
    """ Plantilla HTML para insertar comandos LaTeX """
    return "<p style='text-align:center;'>$" + TeX + "$</p>"

def latex(a):
    """Método latex general"""
    try:
        return a.latex()
    except:
        return sympy.latex(a)

def pinta(data):
    """Muestra en Jupyter la representación latex de data"""
    display(Latex('$$'+latex(data)+'$$'))
    #display(Math(latex(data)))
```

---

### 2.1.3. Declaración de la clase `SerieConPrincipio`

Declaramos la clase `SerieConPrincipio` y la documentamos:

---

```
class SerieConPrincipio:
    """
    Clase para representar series con un índice inicial arbitrario.

    Atributos:
    - coeficientes (list): Lista de coeficientes de la serie, sin ceros iniciales.
    - cogrado (int): Índice del primer coeficiente no nulo de la serie.
    - usa_float (bool): Indica si la serie opera con números flotantes.
    - final (bool): Indica si el final de la serie se representa con una elipsis.

    Métodos:
    - __repr__: Representa la serie como un par (cogrado, lista de coeficientes).
    - _repr_latex_: Representa la serie en formato LaTeX.
    - __add__: Suma dos SerieConPrincipio.
    - __mul__: Producto por un escalar o producto convolución entre SerieConPrincipio.
```

---

```
- __rmul__: Producto por un escalar desde la izquierda.
- inversa: Calcula la SerieConPrincipio inversa.
"""
```

---

#### 2.1.4. Constructor

El constructor elimina ceros iniciales y ajusta el índice inicial (cogrado).

---

```
def __init__(self, coeficientes, cogrado=0, final=False, RepEscalera=False):
    primeros_no_nulos = next((i for i, c in enumerate(coeficientes) if c != 0), None)
    if primeros_no_nulos is None:
        self.coeficientes = []
        self.cogrado = 0
    else:
        self.coeficientes = coeficientes[primeros_no_nulos:]
        self.cogrado = cogrado + primeros_no_nulos

    self.final = final
    self.usa_float = any(isinstance(c, float) for c in self.coeficientes if not hasattr(c, 'is_number'))
    self.coeficientes = [
        float(c) if self.usa_float and isinstance(c, (int, float)) else Fraction(c) if isinstance(c, (int, float)) else c
        for c in self.coeficientes
    ]
    self.RepEscalera=RepEscalera
```

---

#### 2.1.5. Representaciones: texto y $\text{\LaTeX}$

Métodos para mostrar la serie como par ordenado (cogrado, lista de coeficientes) o en formato  $\text{\LaTeX}$ . En los cuadernos electrónicos de Jupyter (Notebooks) se usa por defecto la representación  $\text{\LaTeX}$  como función generatriz. Y si la serie se ha calculado como una inversa, la representación termina con una elipsis ( $\dots$ ) para recordar que la serie debería tener infinitos términos. Esta implementación no calcula infinitos términos, con `print(serie)` vemos su cogrado y una lista con los coeficientes que realmente se han calculado (por defecto son 5 si no se indica un número concreto).

---

```
def __repr__(self):
    """
    Representa la serie como un par (cogrado, lista de coeficientes).

    Retorna:
    - str: Representación de la serie como un par.
    """
    return f"({self.cogrado}, {self.coeficientes})"

def latex(self):
    """
    Representa la serie en formato LaTeX.

    Retorna:
    - str: Representación en formato LaTeX.
    """

    if not self.coeficientes:
        return "$0$"

    terminos = []
```



```

for i, coef in enumerate(self.coeficientes):
    indice = self.cogrado + i
    if coef != 0:
        coef_sympy = Rational(coef.numerator, coef.denominator) if isinstance(coef, Fraction) else coef
        coef_latex = r"\left(" + latex(coef_sympy) + r"\right)" if isinstance(coef_sympy, Add) else latex(coef_sympy)
        if coef_sympy == -1 and indice != 0:
            coef_latex = "-"
        if coef_sympy == 1 and indice != 0:
            coef_latex = ""
        if indice == 0:
            terminos.append(f"{coef_latex}")
        elif indice == 1:
            terminos.append(f"{coef_latex}z")
        else:
            terminos.append(f"{coef_latex}z^{{{indice}}}") # Aseguramos que el exponente esté entre llaves
cadena = r' + \cdots' if self.final else ''
#return '$' + " + ".join(terminos).replace("+ -", "- ") + cadena + '$'
return " + ".join(terminos).replace("+ -", "- ") + cadena

def _repr_latex_(self):
    """
    Representa la serie en formato LaTeX.

    Retorna:
    - str: Representación en formato LaTeX para notebooks de Jupyter.
    """
    return '$$'+self.latex()+ '$$'

def _repr_html_(self):
    """ Construye la representación para el entorno jupyter notebook """
    if self.RepEscalera:
        return html(self.escalera())
    else:
        return html(self.latex())

#def _repr_png_(self):
#    """ Representación png para el entorno jupyter en Emacs """
#    try:
#        expr = '$'+self.latex()+ '$'
#        workdir = tempfile.mkdtemp()
#        with open(join(workdir, 'borrame.png'), 'wb') as outputfile:
#            sympy.preview(expr, viewer='BytesIO', outputbuffer=outputfile)
#        return open(join(workdir, 'borrame.png'), 'rb').read()
#    except:
#        return '$'+self.latex()+ '$'

def coeficientesEscalera(self):
    coeficientes = list(self.coeficientes) # Creamos una copia de la lista de coeficientes

    if self.cogrado > 0:
        coeficientes = [0]*self.cogrado + coeficientes
        origen = 0
    else: # len(self.coeficientes) + self.cogrado > 0:
        coeficientes = coeficientes + [0]*(1 - self.cogrado - len(self.coeficientes))
        origen = -self.cogrado

    return coeficientes, origen

def escalera(self):
    coeficientes, origen = self.coeficientesEscalera()
    celdas = [r'\cdots 0'] + [r'\color{blue}{\{ ' + str(c) + '\}}' if i == origen else f"{str(c)}" for i, c in enumerate(coeficientes)]
    size = len(celdas)-1
    contenido = ' & '.join(celdas)
    latex_representation = "\\begin{array}{c} " + "c|"*size + "c\\n\\hline\\n"
    latex_representation += f"{contenido} \\\\\\hline"

```

```
latex_representation += r"\end{array}"
return '$' + latex_representation + '$'
```

---

### 2.1.6. Suma de series

La suma ajusta los índices y suma término a término.

---

```
def __add__(self, otra):
    """
    Suma dos series.

    Parámetros:
    - otra (SerieConPrincipio): Otra serie.

    Retorna:
    - SerieConPrincipio: La serie resultante de la suma.
    """
    cogrado = min(self.cogrado, otra.cogrado)
    indice_final = max(
        self.cogrado + len(self.coeficientes),
        otra.cogrado + len(otra.coeficientes),
    )
    coeficientes = []
    for i in range(cogrado, indice_final):
        coef1 = self.coeficientes[i - self.cogrado] if self.cogrado <= i < self.cogrado + len(self.coeficientes) else 0
        coef2 = otra.coeficientes[i - otra.cogrado] if otra.cogrado <= i < otra.cogrado + len(otra.coeficientes) else 0
        coeficientes.append(coef1 + coef2)
    return SerieConPrincipio(coeficientes, cogrado)
```

---

### 2.1.7. Producto: escalar y convolución

El método `__mul__` permite tanto el producto escalar como el producto de Cauchy entre dos series.

---

```
def __mul__(self, escalar_o_otra):
    """
    Producto por un escalar o producto convolución entre series.

    Parámetros:
    - escalar_o_otra (float | SerieConPrincipio): Escalar o otra serie.

    Retorna:
    - SerieConPrincipio: La serie resultante del producto.
    """
    if isinstance(escalar_o_otra, (int, float, Fraction)):
        coeficientes = [coef * escalar_o_otra for coef in self.coeficientes]
        return SerieConPrincipio(coeficientes, self.cogrado)
    elif isinstance(escalar_o_otra, SerieConPrincipio):
        cogrado = self.cogrado + escalar_o_otra.cogrado
        coeficientes = [0.0 if self.usa_float else Fraction(0)] * (len(self.coeficientes) + len(escalar_o_otra.coeficientes) - 1)
        for i, coef1 in enumerate(self.coeficientes):
            for j, coef2 in enumerate(escalar_o_otra.coeficientes):
                coeficientes[i + j] += coef1 * coef2
        return SerieConPrincipio(coeficientes, cogrado)
    else:
        raise TypeError("El operador * solo admite un escalar o otra SerieConPrincipio.")
```

---

### 2.1.8. Producto escalar desde la izquierda

---

```
def __rmul__(self, escalar):  
    """  
    Producto por un escalar desde la izquierda.  
  
    Parámetros:  
    - escalar (float): Escalar para multiplicar la serie.  
  
    Retorna:  
    - SerieConPrincipio: La serie resultante del producto.  
    """  
    return self.__mul__(escalar)
```

---

### 2.1.9. Inversa formal

Usamos recursión sobre la fórmula clásica de inversa de series:  $b_j = -\frac{1}{a_0} \sum_{r=1}^j a_{j-r} b_r$

---

```
def inversa(self, num_terminos=5):  
    """  
    Calcula la inversa de la serie.  
  
    Parámetros:  
    - num_terminos (int): Número de términos de la inversa a calcular.  
  
    Retorna:  
    - SerieConPrincipio: La serie inversa.  
    """  
    if not self.coeficientes or self.coeficientes[0] == 0:  
        raise ValueError("La primera componente no nula debe ser distinta de cero.")  
  
    b = [0.0 if self.usa_float else 0] * num_terminos  
    a0 = self.coeficientes[0]  
  
    if self.usa_float:  
        b[0] = 1.0 / a0  
    else:  
        try:  
            if isinstance(a0, (int, Fraction)):  
                b[0] = Fraction(1, a0)  
            else:  
                b[0] = 1 / a0  
        except Exception as e:  
            raise ValueError(f"No se pudo calcular el inverso del término inicial {a0}: {e}")  
  
    for j in range(1, num_terminos):  
        suma = sum(  
            b[r] * self.coeficientes[j - r]  
            for r in range(j)  
            if j - r < len(self.coeficientes)  
        )  
        b[j] = -b[0] * suma  
  
    return SerieConPrincipio(b, -self.cogrado, final=True)
```

---

### 2.1.10. Gráfico de la serie

---

```
def plot_serie(self, indices_previos_al_cogrado=3, title="Serie con principio (con cogrado)":  
    """
```

---

```

Dibuja la serie como un gráfico de barras.
"""
indices_nulos = range(self.cogrado - indices_previos_al_cogrado, self.cogrado)
valores_nulos = [0] * indices_previos_al_cogrado # Coeficientes nulos

indices = range(self.cogrado, self.cogrado + len(self.coeficientes))
valores = self.coeficientes

# Combina valores nulos y de la serie
all_indices = list(indices_nulos) + list(indices)
all_valores = valores_nulos + valores

fig = plt.figure(figsize=(9, 3))
plt.stem(all_indices, all_valores)
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.8)

# Etiquetas para los índices
etiquetas = [str(int(idx)) for idx in all_indices]
plt.xticks(all_indices, etiquetas) # Establecer etiquetas en el eje X

# Personalizar las etiquetas
for i, idx in enumerate(all_indices):
    xtick_label = plt.gca().get_xticklabels()[i] # Obtener la etiqueta actual
    if idx == self.cogrado:
        xtick_label.set_color('red') # Cambiar color a rojo
        xtick_label.set_weight('bold') # Cambiar a negrita
    elif idx < self.cogrado:
        xtick_label.set_color('#D3D3D3') # Cambiar color a gris claro

plt.xlabel("Índice")
plt.ylabel("Valor")
plt.title(title)
plt.tight_layout()
plt.close(fig)
return fig

```

---

### 2.1.11. Sustitución simbólica

```

def subs(self, reglasDeSustitucion=[]):
    """ Sustitución de variables simbólicas """

    def CreaLista(t):
        """Devuelve t si t es una lista; si no devuelve la lista [t]"""
        return t if isinstance(t, list) else [t]

    def sustitucion(elemento, regla_de_sustitucion):
        return sympy.S(elemento).subs(CreaLista(regla_de_sustitucion))

    coeficientes = [sustitucion(elemento, reglasDeSustitucion) for elemento in self.coeficientes]
    return SerieConPrincipio(coeficientes, self.cogrado)

```

---

### 2.1.12. Ejemplo de uso

Creamos una serie desde  $z^2$ , otra desde  $z^0$ , y calculamos su suma, producto e inversa (truncada).

```

s1 = SerieConPrincipio([1, 2, 3], 2) # 1 z^2 + 2 z^3 + 3 z^4
s2 = SerieConPrincipio([1, -1], 0)   # 1 - z

```

```

print("Serie 1:", s1)
print("Serie 2:", s2)
print("Suma:", s1 + s2)
print("Producto:", s1 * s2)
print("Inversa de s2 (hasta z^5):", s2.inversa(6))

```

---

## 2.2. Clase SerieConFinal: series con grado arbitrario en python

---

```

class SerieConFinal:
    """
    Clase para representar series con un índice final arbitrario (grado).

    Atributos:
    - coeficientes (list): Lista de coeficientes sin ceros finales.
    - grado (int): Índice del último coeficiente no nulo.
    - usa_float (bool): Indica si la serie opera con números flotantes.
    - principio (bool): Indica si el principio de la serie se representa con una elipsis.

    Métodos:
    - __repr__: Representa la serie como un par (grado, lista de coeficientes).
    - _repr_latex_: Representa la serie en formato LaTeX.
    - __add__: Suma de series con final.
    - __mul__: Producto por escalar o convolución.
    - __rmul__: Producto por escalar desde la izquierda.
    - inversa: Calcula la inversa generando coeficientes hacia índices negativos.
    """

    def __init__(self, coeficientes, grado=0, principio=False, RepEscalera=False):
        # Eliminar ceros finales
        ultimos_no_nulos = next((i for i in reversed(range(len(coeficientes))) if coeficientes[i] != 0), None)
        if ultimos_no_nulos is None: # Serie nula
            self.coeficientes = []
            self.grado = 0
        else:
            self.coeficientes = coeficientes[:ultimos_no_nulos+1]
            self.grado = grado - (len(coeficientes) - ultimos_no_nulos - 1)

        self.principio = principio
        self.usa_float = any(isinstance(c, float) for c in self.coeficientes if not hasattr(c, 'is_number'))
        self.coeficientes = [
            float(c) if self.usa_float and isinstance(c, (int, float)) else Fraction(c) if isinstance(c, (int, float)) else c
            for c in self.coeficientes
        ]
        self.RepEscalera=RepEscalera

    def __repr__(self):
        return f"({self.grado}, {self.coeficientes})"

    def latex(self):
        if not self.coeficientes:
            return "$0$"
        terminos = []
        for i, coef in enumerate(self.coeficientes):
            indice = self.grado - (len(self.coeficientes) - 1 - i)
            if coef != 0:
                coef_sympy = Rational(coef.numerator, coef.denominator) if isinstance(coef, Fraction) else coef
                coef_latex = r"\left(" + latex(coef_sympy) + r"\right)" if isinstance(coef_sympy, Add) else latex(coef_sympy)
                if coef_sympy == -1 and indice != 0:
                    coef_latex = "-"
                if coef_sympy == 1 and indice != 0:
                    coef_latex = ""
                if indice == 0:
                    terminos.append(f"{coef_latex}")

```

```

        elif indice == 1:
            terminos.append(f"{coef_latex}z")
        else:
            terminos.append(f"{coef_latex}z^{{{indice}}}")

cadena = r'\cdots + ' if self.principio else ''
representacion = cadena + " + ".join(terminos).replace("+ -", "- ")
return representacion.replace("+ -", "- ")
#return '$' + representacion.replace("+ -", "- ") + '$'
#return '$' + " + ".join(terminos).replace("+ -", "- ") + cadena + '$'

def _repr_latex_(self):
    return '$'+self.latex()+'$'

def _repr_html_(self):
    """ Construye la representación para el entorno jupyter notebook """
    """ Construye la representación para el entorno jupyter notebook """
    if self.RepEscalera:
        return html(self.escalera())
    else:
        return html(self.latex())

# def _repr_png_(self):
#     """ Representación png para el entorno jupyter en Emacs """
#     try:
#         expr = '$'+self.latex()+'$'
#         workdir = tempfile.mkdtemp()
#         with open(join(workdir, 'borrame.png'), 'wb') as outputfile:
#             sympy.preview(expr, viewer='BytesIO', outputbuffer=outputfile)
#         return open(join(workdir, 'borrame.png'), 'rb').read()
#     except:
#         return '$'+self.latex()+'$'

def coeficientesEscalera(self):
    coeficientes = list(self.coeficientes) # Creamos una copia de la lista de coeficientes

    if self.grado + 1 > len(self.coeficientes):
        coeficientes = [0]*(self.grado + 1 - len(self.coeficientes)) + coeficientes
        origen = 0
    elif len(self.coeficientes) > self.grado:
        coeficientes = coeficientes + [0]*(-self.grado)
        origen = len(coeficientes) - max(self.grado,0) - 1

    return coeficientes, origen

def escalera(self):
    coeficientes, origen = self.coeficientesEscalera()
    celdas = [r'\cdots'] + [r'\color{blue}{\{'+ str(c) + '\}}' if i == origen else f"{str(c)}" for i,c in enumerate(coefi
    size = len(celdas)-1
    contenido = ' & '.join(celdas)
    latex_representation = "\\begin{array}{c} "+ "c"*size + "c\\n\\hline\\n"
    latex_representation += f"{contenido} \\\\hline"
    latex_representation += r"\end{array}"
    return '$' + latex_representation + '$'

def __add__(self, otra):
    grado = max(self.grado, otra.grado)
    inicio = min(self.grado - len(self.coeficientes) + 1, otra.grado - len(otra.coeficientes) + 1)
    coeficientes = []
    for i in range(inicio, grado + 1):
        coef1 = self.coeficientes[i - (self.grado - len(self.coeficientes) + 1)] if self.grado - len(self.coeficientes) + 1
        coef2 = otra.coeficientes[i - (otra.grado - len(otra.coeficientes) + 1)] if otra.grado - len(otra.coeficientes) + 1

```

```

        coeficientes.append(coef1 + coef2)
    return SerieConFinal(coeficientes, grado)

def __mul__(self, escalar_o_otra):
    if isinstance(escalar_o_otra, (int, float, Fraction)):
        coeficientes = [coef * escalar_o_otra for coef in self.coeficientes]
        return SerieConFinal(coeficientes, self.grado)
    elif isinstance(escalar_o_otra, SerieConFinal):
        grado = self.grado + escalar_o_otra.grado
        coeficientes = [0.0 if self.usa_float else Fraction(0)] * (len(self.coeficientes) + len(escalar_o_otra.coeficientes))
        for i, coef1 in enumerate(self.coeficientes):
            for j, coef2 in enumerate(escalar_o_otra.coeficientes):
                coeficientes[i + j] += coef1 * coef2
        return SerieConFinal(coeficientes, grado)
    else:
        raise TypeError("El operador * solo admite un escalar o otra SerieConFinal.")

def __rmul__(self, escalar):
    return self.__mul__(escalar)

def inversa(self, num_terminos=5):
    """
    Calcula la inversa de la serie como otra SerieConFinal.
    """
    if not self.coeficientes or self.coeficientes[-1] == 0:
        raise ValueError("La última componente no nula debe ser distinta de cero.")

    a = self.coeficientes[::-1] # Trabajamos como si fuera una SerieConPrincipio
    b = [0.0 if self.usa_float else 0] * num_terminos
    a0 = a[0]

    if self.usa_float:
        b[0] = 1.0 / a0
    else:
        try:
            if isinstance(a0, (int, Fraction)):
                b[0] = Fraction(1, a0)
            else:
                b[0] = 1 / a0
        except Exception as e:
            raise ValueError(f"No se pudo calcular el inverso del coeficiente constante {a0}: {e}")

    for j in range(1, num_terminos):
        suma = sum(b[k] * a[j - k] for k in range(j) if j - k < len(a))
        b[j] = -b[0] * suma

    # El resultado es otra SerieConFinal con coeficientes en orden inverso
    return SerieConFinal(b[::-1], -self.grado, principio=True)

def plot_serie(self, indices_posteriores_al_grado=3, title="Serie con final (con grado)":
    """
    Dibuja la serie como un gráfico de barras, extendiéndola con ceros.
    """
    # Calcular los índices para el eje X
    longitud_lista = len(self.coeficientes)
    indices = []

    for i in range(longitud_lista):
        indice_mapeado = self.grado - (longitud_lista - 1 - i)
        indices.append(indice_mapeado)

    # Añadir índices nulos después de self.grado
    for i in range(1, indices_posteriores_al_grado + 1):

```

```

        indices.append(self.grado + i)

    # Crear la lista de valores
    valores = self.coeficientes + [0] * indices_posteriores_al_grado # Añadir ceros

    fig = plt.figure(figsize=(9, 3))
    plt.stem(indices, valores)
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.8)
    plt.xticks(indices, [str(int(idx)) for idx in indices]) # Etiquetas enteras
    plt.xlabel("Índice")
    plt.ylabel("Valor")
    plt.title(title)
    # Crear etiquetas
    etiquetas = [str(int(idx)) for idx in indices]
    plt.xticks(indices, etiquetas) # Establecer etiquetas posiciones iniciales
    # Personalizar la etiqueta del índice self.grado
    for i, etiqueta in enumerate(etiquetas):
        if indices[i] == self.grado:
            etiq_actual, = plt.gca().get_xticklabels()[i], # Obtener la etiqueta actual
            etiq_actual.set_color('red') # Cambiar a azul
            etiq_actual.set_weight('bold') # Cambiar a negrita
        elif indices[i] > self.grado:
            etiq_actual, = plt.gca().get_xticklabels()[i], # Obtener la etiqueta actual
            etiq_actual.set_color('#D3D3D3') # Cambiar a gris claro
            etiq_actual.set_fontstyle('italic') # Cambiar a cursiva

    plt.tight_layout()
    plt.close(fig)
    return fig

def subs(self, reglasDeSustitucion=[]):
    """ Sustitución de variables simbólicas """

    def CreaLista(t):
        """Devuelve t si t es una lista; si no devuelve la lista [t]"""
        return t if isinstance(t, list) else [t]

    def sustitucion(elemento, regla_de_sustitucion):
        return sympy.S(elemento).subs(CreaLista(regla_de_sustitucion))

    coeficientes = [sustitucion(elemento, reglasDeSustitucion) for elemento in self.coeficientes]
    return SerieConFinal(coeficientes, self.grado)

```

---

## 2.3. Funciones auxiliares

---

```

def EscalerasConvolucion(sequencia1,sequencia2):
    serie1, origen1 = sequencia1.coeficientesEscalera()
    serie2, origen2 = sequencia2.coeficientesEscalera()

    negativos1 = [str(c) for c in serie1[:origen1]]
    negativos2 = [str(c) for c in serie2[:origen2]]
    negativos = max(len(negativos1), len(negativos2))
    lista1neg = ['0']*(negativos-len(negativos1)) + negativos1 # añadimos ceros si no hay suficientes coeficientes a la izquierda
    lista2neg = ['0']*(negativos-len(negativos2)) + negativos2 # añadimos ceros si no hay suficientes coeficientes a la izquierda
    cabeceraNeg = [r'z^{-' + str(i+1) + r'}' for i in reversed(range(len(lista1neg)))]

    lista1origen = [r'\color{blue}{\{' + str(serie1[origen1]) + '\}}'] # destacamos el coeficiente situado en el origen
    lista2origen = [r'\color{blue}{\{' + str(serie2[origen2]) + '\}}'] # destacamos el coeficiente situado en el origen
    cabeceraOrigen = [r'\color{blue}{z^0}']

    positivos1 = [str(c) for c in serie1[origen1+1:]]
    positivos2 = [str(c) for c in serie2[origen2+1:]]

```



```

positivos = max(len(positivos1), len(positivos2))
lista1pos = positivos1 + ['0']*(positivos-len(positivos1))
lista2pos = positivos2 + ['0']*(positivos-len(positivos2))
cabeceraPos = [r'z^{'+str(i+1)+'r'}' for i,_ in enumerate(lista1pos)]

coeficientes1 = lista1neg + lista1origen + lista1pos
coeficientes2 = lista2neg + lista2origen + lista2pos
cabecera = cabeceraNeg + cabeceraOrigen + cabeceraPos

# Consigue el tamaño para la alineación de las columnas
size = len(coeficientes1)-1
contenidoCabecera = ' & '.join(cabecera)
contenidoCoeficientes1 = ' & '.join(coeficientes1)
contenidoCoeficientes2 = ' & '.join(coeficientes2)

# Comenzamos a escribir la matriz en LaTeX
latex_matrix = "\\begin{array}{c} " + "c|"*size + "c}"
latex_matrix += "\n\\hline\n"
#latex_matrix += f"{contenidoCabecera}\\\\\n\\hline\n{contenidoCoeficientes1}\\\\\n\\hline\n{contenidoCoeficientes2}"
latex_matrix += f"{contenidoCabecera} \\\\n"
latex_matrix += r"\hline\hline" + "\n"
latex_matrix += f"{contenidoCoeficientes1} \\\\n"
latex_matrix += r"\hline" + "\n"
latex_matrix += f"{contenidoCoeficientes2} \\\\n"
latex_matrix += r"\hline" + "\n"
latex_matrix += "\\end{array}"

# Mostramos la matriz en el notebook de Jupyter
#display(Math(r'\['+latex_matrix+r'\]'))
#return Latex(r'\['+latex_matrix+r'\]')
return latex_matrix

```

---