

Índice

1. Identificación y diagnosis	2
1.1. Instrumentos de identificación	3
1.2. Instrumentos de diagnosis	4
2. Raíces unitarias	4
2.1. Notación: operadores retardo y diferencia y modelos ARIMA	4
2.1.1. Notación: ARIMA	4
2.2. Raíces unitarias en los polinomios AR y MA	5
2.3. Paseos aleatorios	5
3. Modelos ARIMA estacionales (SARIMA)	6
3.1. MA(1) estacional con raíz positiva	6
3.2. AR(1) estacional con raíz positiva	7
3.3. ARIMA $(0,0,1)x(0,0,1)$	9
3.4. ARIMA $(1,0,0)x(0,0,1)$	9
3.5. ARIMA $(1,0,0)x(1,0,0)$	10
3.6. ARIMA $(0,0,1)x(1,0,0)$	10
4. Resumen del análisis univariante de series temporales	11
4.1. Ideas principales respecto a la modelización univariante	11
4.2. Metodología	12

Lección 7. Modelos ARIMA y SARIMA. Identificación y diagnosis

Marcos Bujosa

8 de septiembre de 2025

Resumen

Repasaremos los instrumentos de identificación y diagnosis del análisis univariante. Extenderemos la notación para incorporar modelos con raíces unitarias y modelos estacionales. Finalmente resumiremos las ideas principales del análisis univariante.

- ([slides](#)) — ([html](#)) — ([pdf](#)) — ([mybinder](#))

Carga de algunos módulos de python y creación de directorios auxiliares

```
# Para trabajar con los datos y dibujarlos necesitamos cargar algunos módulos de python
import numpy as np # linear algebra
import pandas as pd # data processing, CSV file I/O (e.g. pd.read_csv)
import matplotlib as mpl
# definimos parámetros para mejorar los gráficos
mpl.rcParams['text', usetex=False]
import matplotlib.pyplot as plt    # data visualization
import dataframe_image as dfi    # export tables as .png
```

- Directorio auxiliar para albergar las figuras de la lección: para publicar la lección como pdf o página web, necesito los gráficos como ficheros .png alojados algún directorio específico:

```
imagenes_leccion = "./img/lecc07" # directorio para las imágenes de la lección
import os
os.makedirs(imagenes_leccion, exist_ok=True) # crea el directorio si no existe
```

Gráficos para las ACF, PACF y densidades espectrales teóricas

Cargamos las funciones auxiliares (véase la carpeta `src/`)

```
import warnings
warnings.filterwarnings("ignore", category=UserWarning)
%run -i ./src/analisis_armas.py
```

1. Identificación y diagnosis

- Combinando herramientas gráficas y estadísticas, se puede inferir un modelo para los datos.
- Este proceso de especificación empírica de un modelo es conocido como "*identificación*".

El proceso de identificación puede estructurarse como una secuencia de preguntas:

1. ¿Es la serie estacionaria?
2. ¿Tiene una media significativa?
3. ¿Es persistente la ACF? ¿sigue alguna pauta reconocible?
4. ¿Es persistente la PACF? ¿sigue alguna pauta reconocible?
 - La identificación se apoya en estadísticos muestrales (media, autocorrelaciones, etc.) cuya representatividad respecto del proceso estocástico subyacente depende de la estacionariedad y la ergodicidad.
 - Tras inducir la estacionariedad, especificamos un modelo tentativo decidiendo cuál de las funciones ACF o PACF es finita y cuál es persistente

	ACF finita	ACF persistente
PACF finita	<u>Ruido blanco</u> : retardos conjuntamente NO significativos	<u>AR</u> : orden indicado por la PACF
PACF persistente	<u>MA</u> : orden indicado por la ACF	<u>ARMA</u>

La parametrización de mayor orden en modelos ARMA con series económicas suele ser ARMA(2, 1)

1.1. Instrumentos de identificación

	Instrumento	Objetivo y observaciones
Transf. logarítmica	Gráficos rango-media y serie temporal.	Conseguir independizar la variabilidad de los datos de su nivel. Las series económicas necesitan esta transformación frecuentemente.
d , orden de diferenciación	Gráfico de la serie temporal. ACF (caída lenta y lineal). Contrastes de raíz unitaria (DF o ADF y KPSS).	Conseguir que los datos fluctúen en torno a una media estable. En series económicas, d suele ser 0, 1 ó 2.
Constante	Media de la serie transformada. Desviación típica de la media.	Si la media de la serie transformada es significativa, el modelo debe incluir un término constante.
p , orden AR.	Si PACF cae abruptamente en el retardo p y la ACF decae lentamente.	En series económicas p suele ser ≤ 2 .
q , orden MA.	Si ACF cae abruptamente en el retardo q y PACF decae lentamente.	En series económicas q suele ser ≤ 1 .

1.2. Instrumentos de diagnosis

	Instrumento	Possible diagnóstico
d , orden de diferenciación	Proximidad a 1 de alguna raíz de los polinomios AR o MA.	Conviene diferenciar si la raíz es AR; o quitar una diferencia si es MA (<i>salvo si hay tendencia determinista</i>).
d , orden de diferenciación	Gráfico de los residuos.	Si muestra rachas largas de residuos positivos o negativos, puede ser necesaria una diferencia adicional.
Constante	Media de los residuos.	Si es significativa: añadir una constante.
Constante	Constante estimada.	Si NO es significativa: el modelo mejorará quitando el término constante.
p y q ,	Contrastes de significación de los parámetros estimados.	Pueden sugerir eliminar parámetros irrelevantes.
p y q ,	ACF/PACF residuos. Test Q de Ljung-Box.	Indican posibles pautas de autocorrelación no modelizadas.
p y q ,	Correlaciones elevadas entre los parámetros estimados.	Puede ser síntoma de sobreparametrización.

Una vez superadas las pruebas de diagnostico, aún se puede aplicar un análisis exploratorio; consistente en añadir parámetros AR y/o MA para comprobar si resultan significativos y mejoran el modelo.

2. Raíces unitarias

2.1. Notación: operadores retardo y diferencia y modelos ARIMA

El operador diferencia ∇ se define a partir del operador retardo como $\nabla = (1 - \mathbf{B})$:

$$\nabla Y_t = (1 - \mathbf{B})Y_t = Y_t - Y_{t-1}.$$

El operador diferencia estacional es $\nabla_s = (1 - \mathbf{B}^S)$:

$$\nabla_s Y_t = (1 - \mathbf{B}^S)Y_t = Y_t - Y_{t-S}.$$

2.1.1. Notación: ARIMA

Extendemos la notación a procesos con raíces autorregresivas unitarias con “ARIMA(p, d, q)”; donde d indica el número de diferencias que la serie necesita para ser $I(0)$,

$$\phi_p * \nabla^d * \mathbf{Y} = \theta_q * \mathbf{U};$$

es decir

$$\phi_p(\mathbf{B})\nabla^d Y_t = \theta_q(\mathbf{B})U_t; \quad t \in \mathbb{Z}.$$

2.2. Raíces unitarias en los polinomios AR y MA

Cuando un polinomio tiene alguna raíz igual a uno se dice que tiene “raíces unitarias”.

Si el polinomio AR estimado tiene alguna raíz “próxima a uno” es síntoma de infradiferenciación.

Si el polinomio MA estimado tiene alguna raíz “próxima a uno” es síntoma de sobrediferenciación.

Ejemplos:

Modelo expresado con raíces unitarias en ϕ o θ

$$\begin{aligned} (1 - 1,5B + ,5B^2)Y_t &= U_t \\ (1 - ,5B + 0,7B^2)\nabla^2 Y_t &= (1 - B)U_t \\ \nabla Y_t &= \beta + (1 - B)U_t \end{aligned}$$

Modelo equivalente sin raíces unitarias en ϕ o θ

$$\begin{aligned} (1 - 0,5B)\nabla Y_t &= U_t \\ (1 - ,5B + 0,7B^2)\nabla Y_t &= U_t \\ Y_t &= \beta t + U_t \quad (\text{no estacionario!}) \end{aligned}$$

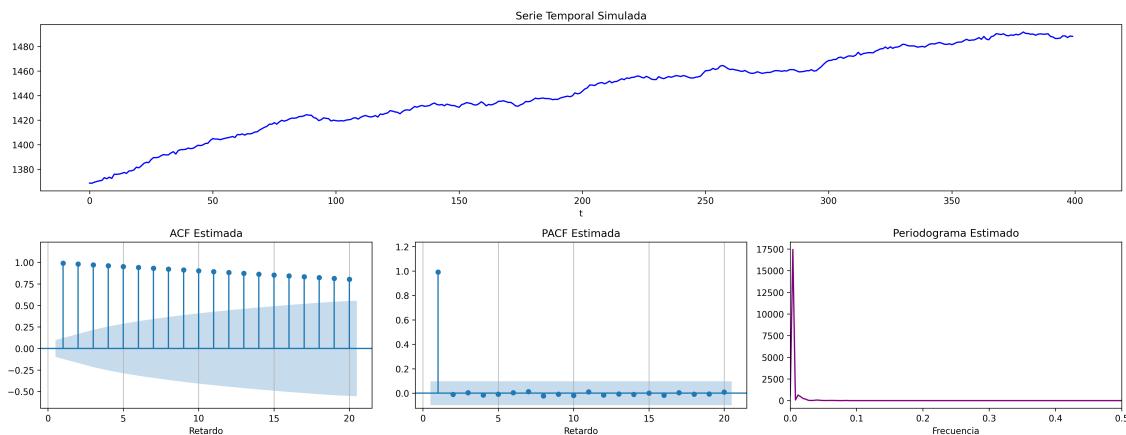
2.3. Paseos aleatorios

Un paseo aleatorio representa una variable cuyos incrementos son ruido blanco:

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + U_t.$$

Cuando $\mu \neq 0$ se denomina *paseo aleatorio con deriva*: $\nabla Y_t = \mu + U_t$.

```
fig = plot_paseo_aleatorio_analysis(trend="t", pendiente=0.25, n=400, semilla=2025)
fig.savefig('./img/lecc07/ACF-RWcd.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



El proceso tiene mayor inercia cuanto mayor es $|\mu|$. El signo de μ determina el signo de la pendiente global.

Cuando $\mu = 0$ se denomina sencillamente *paseo aleatorio*: $\nabla Y_t = U_t$

```
fig = plot_paseo_aleatorio_analysis(n=400, semilla=2026)
fig.savefig('./img/lecc07/ACF-RW.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



3. Modelos ARIMA estacionales (SARIMA)

El período estacional S es el número mínimo de observaciones necesarias para recorrer un ciclo estacional completo. Por ejemplo, $S = 12$ para datos mensuales, $S = 4$ para datos trimestrales, $S = 24$ para datos horarios, etc.

Describiremos comportamientos estacionales con modelos ARIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_S$

$$\phi_p(\mathbf{B})\Phi_P(\mathbf{B}^S)\nabla^d\nabla_S^D Y_t = \theta_q(\mathbf{B})\Theta_Q(\mathbf{B}^S)U_t; \quad t \in \mathbb{Z}$$

donde

$$\begin{aligned}\Phi_P(\mathbf{B}^S) &= 1 - \Phi_1 \mathbf{B}^{1 \cdot S} - \Phi_2 \mathbf{B}^{2 \cdot S} - \dots - \Phi_P \mathbf{B}^{P \cdot S} \\ \Theta_Q(\mathbf{B}^S) &= 1 - \Theta_1 \mathbf{B}^{1 \cdot S} - \Theta_2 \mathbf{B}^{2 \cdot S} - \dots - \Theta_Q \mathbf{B}^{Q \cdot S} \\ \nabla_S^D &= (1 - \mathbf{B}^S)^D\end{aligned}$$

Es decir, el modelo consta de polinomios autorregresivos y de media móvil tanto regulares (en minúsculas) como estacionales (en mayúsculas).

Veamos un ejemplo de un modelo MA(1) estacional y otro de un modelo AR(1) estacional...

3.1. MA(1) estacional con raíz positiva

$$\text{MA}(1) \text{ estacional: } \Theta = 1 - 0.9z^{12} \Rightarrow X_t = (1 - 0.9\mathbf{B}^{12})U_t$$

```
SMA1 = [1, -0.9]
fig = plot_arma_seasonal_parametric_diagnostics(seasonal_ma_params=SMA1, s=12)
fig.savefig('img/lecc07/ACF-SMA1p.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



	P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
11	1.008819	0.000000	1.008819	0.000000	Inf	1
9	0.873663	-0.504409	1.008819	0.083333	12.0	1
10	0.873663	0.504409	1.008819	0.083333	12.0	1
7	0.504409	-0.873663	1.008819	0.166667	6.0	1
8	0.504409	0.873663	1.008819	0.166667	6.0	1
5	0.000000	-1.008819	1.008819	0.250000	4.0	1
6	0.000000	1.008819	1.008819	0.250000	4.0	1
3	-0.504409	-0.873663	1.008819	0.333333	3.0	1
4	-0.504409	0.873663	1.008819	0.333333	3.0	1
1	-0.873663	-0.504409	1.008819	0.416667	2.4	1
2	-0.873663	0.504409	1.008819	0.416667	2.4	1
0	-1.008819	0.000000	1.008819	0.500000	2.0	1

```
fig = plot_sarima_analysis(seasonal_ma_params=SMA1, s=12, seed=2025)
fig.savefig('./img/lecc07/Sim-SMA1p.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



3.2. AR(1) estacional con raíz positiva

$$\text{AR}(1) \text{ estacional: } \Phi = 1 - 0.9z^{12} \Rightarrow (1 - 0.9B^{12})X_t = U_t$$

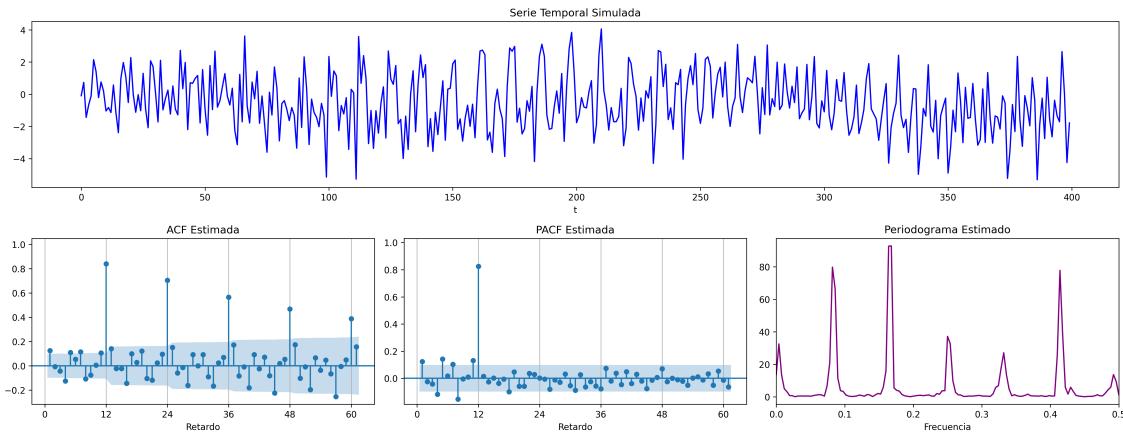
```
SAR1 = [1, -0.9]
fig = plot_arma_seasonal_parametric_diagnostics(seasonal_ar_params=SAR1, s=12)
fig.savefig('./img/lecc07/ACF-SAR1p.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



	P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
11	1.008819	0.000000	1.008819	0.000000	Inf	1
9	0.873663	-0.504409	1.008819	0.083333	12.0	1
10	0.873663	0.504409	1.008819	0.083333	12.0	1
7	0.504409	-0.873663	1.008819	0.166667	6.0	1
8	0.504409	0.873663	1.008819	0.166667	6.0	1
5	0.000000	-1.008819	1.008819	0.250000	4.0	1
6	0.000000	1.008819	1.008819	0.250000	4.0	1
3	-0.504409	-0.873663	1.008819	0.333333	3.0	1
4	-0.504409	0.873663	1.008819	0.333333	3.0	1
1	-0.873663	-0.504409	1.008819	0.416667	2.4	1
2	-0.873663	0.504409	1.008819	0.416667	2.4	1
0	-1.008819	0.000000	1.008819	0.500000	2.0	1

Evidentemente las raíces son iguales a las del caso anterior (aunque ahora corresponden al polinomio autorregresivo).

```
fig = plot_sarima_analysis(seasonal_ar_params=SAR1, s=12, seed=2025)
fig.savefig('./img/lecc07/Sim-SAR1p.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



Con estos dos ejemplos hemos podido apreciar que:

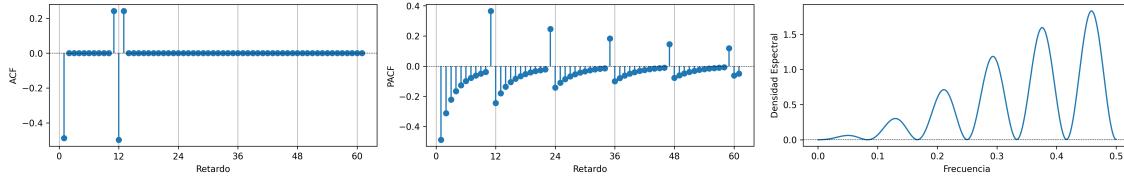
- las pautas de autocorrelación son análogas a las de los MA(1) y AR(2), pero ahora los retardos significativos corresponden a los retardos estacionales, es decir, a múltiplos del período estacional S .
- En estos ejemplos, en los que $S = 12$, los retardos estacionales son: 12, 24, 36, 48, 60,...
- las correlaciones correspondientes a los retardos regulares (es decir, todos menos los estacionales) son no significativas en general.

Veamos ahora un par de ejemplos de modelos estacionales multiplicativos (i.e., con parte regular y parte estacional).

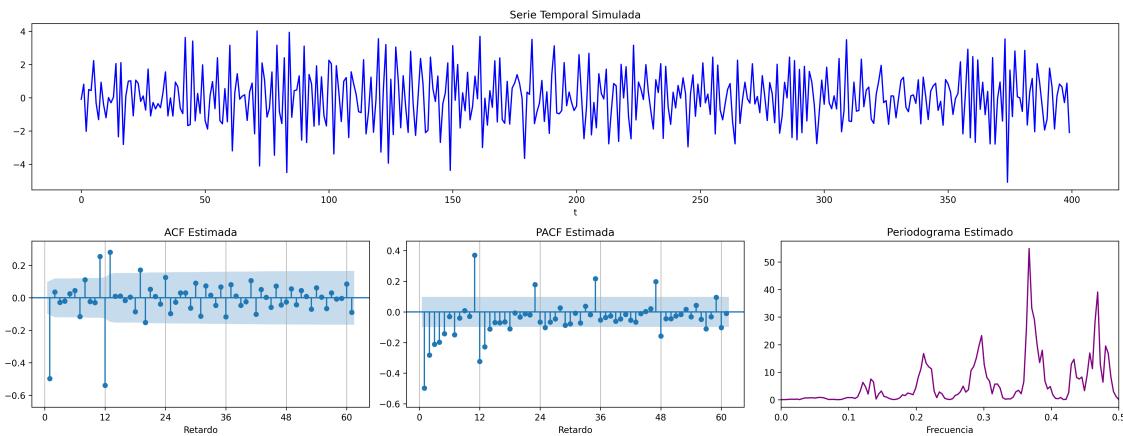
3.3. ARIMA (0,0,1)x(0,0,1)

$$\text{ARIMA}(0, 0, 1) \times (0, 0, 1)_{12}: \quad X_t = (1 - 0.9B)(1 - 0.9B^{12})U_t$$

```
MA1 = [1, -0.8]
SMA1 = [1, -0.9]
fig = plot_arma_seasonal_parametric_diagnostics(ma_params=MA1, seasonal_ma_params=SMA1, s=12)
fig.savefig('./img/lecc07/ACF-MA1SMA1.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



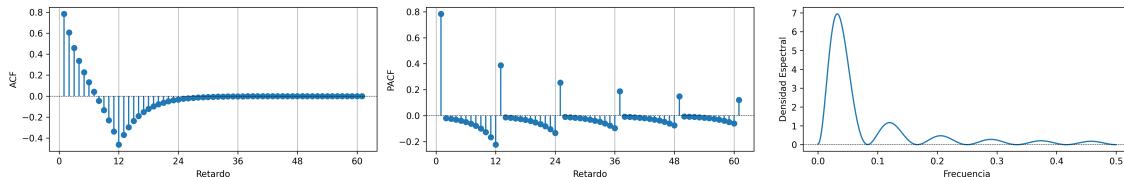
```
fig = plot_sarima_analysis(ma_params=MA1, seasonal_ma_params=SMA1, s=12, seed=2025)
fig.savefig('./img/lecc07/Sim-MA1SMA1.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



3.4. ARIMA (1,0,0)x(0,0,1)

$$\text{ARIMA}(1, 0, 0) \times (0, 0, 1)_{12}: \quad (1 - 0.9B)X_t = (1 - 0.9B^{12})U_t$$

```
AR1 = [1, -0.8]
SMA1 = [1, -0.9]
fig = plot_arma_seasonal_parametric_diagnostics(ar_params=AR1, seasonal_ma_params=SMA1, s=12)
fig.savefig('./img/lecc07/ACF-AR1SMA1.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



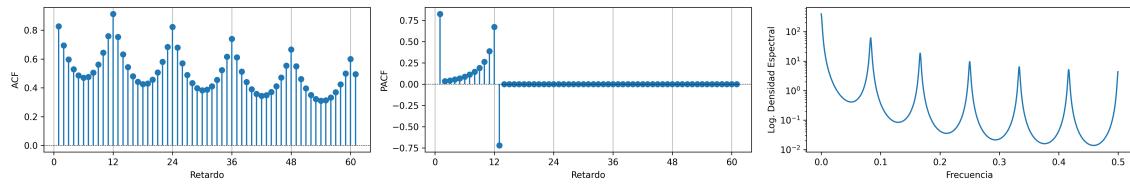
```
fig = plot_sarima_analysis(ar_params=AR1, seasonal_ma_params=SMA1, s=12, seed=2025)
fig.savefig('./img/lecc07/Sim-AR1SMA1.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



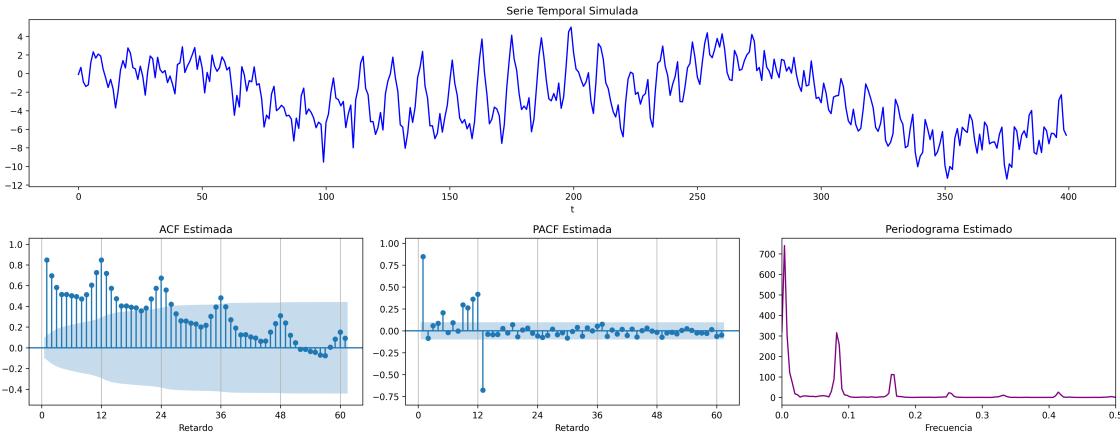
3.5. ARIMA (1,0,0)x(1,0,0)

$$\text{ARIMA}(1,0,0) \times (1,0,0)_{12}: \quad (1 - 0.9B)(1 - 0.9B^{12})X_t = U_t$$

```
AR1 = [1, -0.8]
SAR1 = [1, -0.9]
fig = plot_arima_seasonal_parametric_diagnostics(ar_params=AR1, seasonal_ar_params=SAR1, s=12, logs=True)
fig.savefig('./img/lecc07/ACF-AR1SAR1.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



```
fig = plot_sarima_analysis(ar_params=AR1, seasonal_ar_params=SAR1, s=12, seed=2025)
fig.savefig('./img/lecc07/Sim-AR1SAR1.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



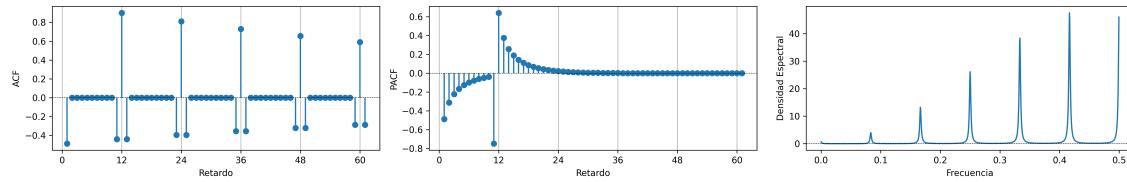
3.6. ARIMA (0,0,1)x(1,0,0)

$$\text{ARIMA}(0,0,1) \times (1,0,0)_{12}: \quad (1 - 0.9B^{12})X_t = (1 - 0.9B)U_t$$

```

MA1 = [1, -0.8]
SAR1 = [1, -0.9]
fig = plot_arima_seasonal_parametric_diagnostics(ma_params=MA1, seasonal_ar_params=SAR1, s=12)
fig.savefig('./img/lecc07/ACF-MA1SAR1.png', dpi=300, bbox_inches='tight')

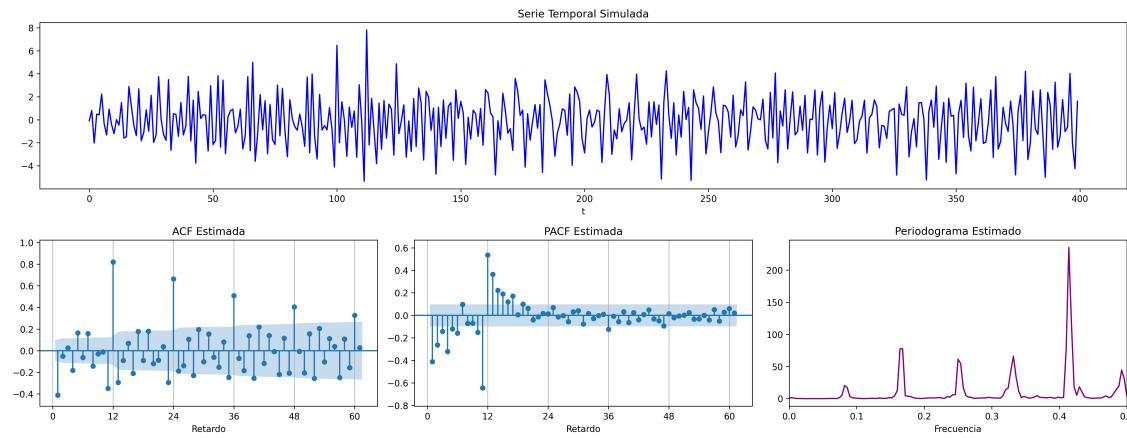
```



```

fig = plot_sarima_analysis(ma_params=MA1, seasonal_ar_params=SAR1, s=12, seed=2025)
fig.savefig('./img/lecc07/Sim-MA1SAR1.png', dpi=300, bbox_inches='tight')

```



En estos cuatro ejemplos hemos podido apreciar que

- en el entorno de los retardos estacionales surgen una serie de coeficientes significativos (satélites) que proceden de la interacción entre las estructuras regular y estacional
- Estos satélites son útiles para identificar en qué retardos estacionales hay autocorrelaciones no nulas, pero no requieren una parametrización especial.

4. Resumen del análisis univariante de series temporales

4.1. Ideas principales respecto a la modelización univariante

- Es una modelización sin variables exógenas
- Modelizan la interdependencia temporal con polinomios de órdenes reducidos.
- Está especialmente indicada para hacer predicción.
- Parte de dos supuestos sobre el proceso estocástico subyacente:
 1. es débilmente estacionario

2. tiene representación como proceso lineal: $Y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} a_j U_{t-j}$; con $\mu \in \mathbb{R}$, $a \in \ell^2$ y $U \sim WN(0, \sigma^2)$

- Utiliza múltiples instrumentos: (a) gráficos (b) función de autocorrelación (c) función de autocorrelación parcial, (d) estadístico Q de Ljung-Box, etc...
- Si la serie original no "parece" débilmente estacionaria, se induce esta propiedad mediante las transformaciones adecuadas

	ACF finita	ACF persistente
PACF finita	Ruido blanco: retardos conjuntamente NO significativos	<u>AR</u> : orden indicado por la PACF
PACF persistente	<u>MA</u> : orden indicado por la ACF	<u>ARMA</u>

4.2. Metodología

Tres fases:

Identificación Se elige una especificación provisional para el proceso estocástico subyacente en función de las características medibles de los datos ("dejar que los datos hablen")

Estimación suele requerir métodos iterativos (*Gretl se encarga de esto*)

Diagnóstico de la calidad estadística del modelo ajustado. Algunos controles estándar son:

- Significatividad de los parámetros estimados
- Estacionariedad y homocedasticidad de los residuos
- ¿Existe un patrón de autocorrelación residual que podría ser modelado? ¿O hemos logrado que los residuos sean **ruido blanco**?

Si la diagnosis no es satisfactoria, se vuelve a la primera fase.

Si la diagnosis es satisfactoria... ¡hemos logrado un modelo aceptable!... que podremos usar para realizar pronósticos.