

# Índice

<b>1. ACF, PACF y densidad espectral de más modelos lineales (AR)</b>	<b>3</b>
1.1. Procesos lineales causales . . . . .	3
1.2. Proceso autorregresivo AR( $p$ ) . . . . .	3
1.2.1. Demostración de que la PACF tiene cogrado $-p$ y grado $p$ . . . . .	4
1.3. Proceso autorregresivo AR(1) . . . . .	5
1.3.1. AR(1) con raíz positiva . . . . .	6
1.3.2. AR(1) con raíz negativa . . . . .	7
1.4. Proceso autorregresivo AR(2) . . . . .	7
1.4.1. AR(2) con dos parámetros positivos (+, +) . . . . .	8
1.4.2. AR(2) con parámetros de distinto signo (-, +) . . . . .	9
1.4.3. AR(2) con dos parámetros negativos (-, -) . . . . .	10
1.4.4. AR(2) con parámetros de distinto signo (+, -) . . . . .	11
1.4.5. AR(2) con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa . . . . .	12
1.4.6. AR(2) con un par de raíces complejas . . . . .	13
1.4.7. AR(2) con dos raíces reales y negativas . . . . .	14
1.4.8. AR(2) con dos raíces reales y positivas . . . . .	15
<b>2. (Resumen) características de procesos AR(<math>p</math>)</b>	<b>15</b>
<b>3. (Resumen) características de procesos MA(<math>q</math>)</b>	<b>16</b>
<b>4. Nota final</b>	<b>17</b>
<b>5. Las Ecuaciones de Yule-Walker para un AR(<math>p</math>) estacionario</b>	<b>17</b>

# Lección 5. ACF, PACF y densidad espectral de modelos AR

Marcos Bujosa

30 de noviembre de 2025

## Resumen

En esta lección analizaremos la ACF, la PACF y la densidad espectral de los procesos autorregresivos (AR). Estos procesos se caracterizan por tener infinitos coeficientes de autocorrelación no nulos (i.e, una ACF de grado infinito), pero una PACF de grado finito. Poseen una memoria relativamente larga, ya que el valor actual está correlado con todos los valores previos aunque, si el proceso es estacionario, los coeficientes disminuyen con suficiente rapidez para que la serie sea absolutamente sumable. Esta propiedad permite representar un proceso AR estacionario como un  $MA(\infty)$ , donde los pesos tienden a cero a medida que el retardo aumenta. También veremos que los coeficientes de autocorrelación satisfacen las ecuaciones de Yule-Walker.

- ([slides](#)) — ([html](#)) — ([pdf](#)) — ([mybinder](#))
  - programas análisis modelos arma: ([slides](#)) — ([html](#)) — ([mybinder](#))

## Carga de algunos módulos de python y creación de directorios auxiliares

---

```
# Para trabajar con los datos y dibujarlos necesitamos cargar algunos módulos de python
import numpy as np # linear algebra
import pandas as pd # data processing, CSV file I/O (e.g. pd.read_csv)
import matplotlib as mpl
# definimos parámetros para mejorar los gráficos
mpl.rcParams['text', usetex=False]
import matplotlib.pyplot as plt # data visualization
import dataframe_image as dfi # export tables as .png
```

---

- Directorio auxiliar para albergar las figuras de la lección: para publicar la lección como pdf o página web, necesito los gráficos como ficheros .png alojados algún directorio específico:

---

```
imagenes_leccion = "./img/lecc05" # directorio para las imágenes de la lección
import os
os.makedirs(imagenes_leccion, exist_ok=True) # crea el directorio si no existe
```

---

## Gráficos para las ACF, PACF y densidades espectrales teóricas

Cargamos las funciones auxiliares (véase la carpeta `src/`)

---

```
import warnings
warnings.filterwarnings("ignore", category=UserWarning)
%run -i ./src/analisis_armas.py
```

---

# 1. ACF, PACF y densidad espectral de más modelos lineales (AR)

## 1.1. Procesos lineales causales

Sea  $\mathbf{X} = \psi * \mathbf{U}$ , donde  $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$  y  $\psi \in \ell^2$  es una serie formal:

$$X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j U_{t-j}.$$

Sabemos que  $E(X_t) = 0$ ; y por la [lección 3](#) también sabemos que

- $\gamma = \sigma^2 \psi(z) * \psi(z^{-1})$  con grado igual al grado de  $\psi$ .

Es decir,

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+|k|} \cdot \psi_j.$$

Además,  $\gamma_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$

A partir de  $\gamma$  obtenemos las otras tres funciones:

**ACF:**  $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma$

**Dens. espectral:**  $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \geq 0} \gamma_k \cos(k\omega); \quad \omega \in [-\pi, \pi]$

**PACF:**  $\pi \in \ell^2$ , i.e.,  $\pi_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$

(Cuando  $\pi \in \ell^2$  se dice que el proceso es *no-determinista*.)

## 1.2. Proceso autorregresivo AR( $p$ )

Sea

$$\phi * \mathbf{X} = \mathbf{U},$$

con  $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$  y donde  $\phi$  es un polinomio de grado  $p > 0$  con  $\phi_0 = 1$ . Entonces

$$(\phi * \mathbf{X})_t = \phi(\mathbf{B}) X_t = (1 + \phi_1 \mathbf{B} + \phi_2 \mathbf{B}^2 + \cdots + \phi_p \mathbf{B}^p) X_t = U_t$$

Y por tanto

$$X_t = U_t - \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j}.$$

Si todas las raíces del polinomio  $\phi$  (de grado  $p$ ) están fuera del círculo unidad, es decir, si *el polinomio AR es “invertible”* ( $\phi^{-\triangleright} = \phi^{-1} \in \ell^1$ ) entonces  $\mathbf{X}$  tiene una representación como **proceso lineal causal MA( $\infty$ )**:

$$\phi * \mathbf{X} = \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{X} = \frac{1}{\phi} * \mathbf{U} \Rightarrow X_t = U_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j U_{t-j};$$

donde  $\phi^{-1} = \psi = (1, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$  tiene grado  $\infty$ .

Por tanto  $E(X_t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{Z}$  y

$$\gamma = \sigma^2 \frac{1}{\phi(z)} * \frac{1}{\phi(z^{-1})} = \sigma^2 \sum_{j,k=0}^{\infty} (\psi_{j+k} \psi_j) z^j \quad (\text{grado } \infty) \quad (\text{Ec. de Yule-Walker})$$

$$\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{\phi(e^{-i\omega}) \cdot \phi(e^{i\omega})} = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \gamma_h \cos(h\omega); \quad \text{donde } \omega \in [-\pi, \pi].$$

(suma infinita de cosenos)

Pero la PACF,  $\pi$ , es una secuencia con grado  $p$  y cogrado  $-p$  ([demo en los apuntes](#)).

- Los procesos AR tienen infinitos coeficientes *no nulos* de autocorrelación.
- Presentan una **memoria relativamente larga**.
  - el valor en  $t$  está correlado con todos los valores previos.
- Los coeficientes de correlación disminuyen suficientemente rápido.
  - por ello todo AR estacionario tiene representación como proceso lineal causal —MA( $\infty$ ).
- Los coeficientes de autocorrelación verifican las Ecuaciones de [Yule-Walker](#).

### 1.2.1. Demostración de que la PACF tiene cogrado $-p$ y grado $p$

- Sea  $\mathbf{X}$  un proceso causal AR( $p$ ):  $X_t = \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + U_t$  donde  $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ .
- La proyección de  $X_{k+1}$  sobre el espacio  $\bar{s}p(X_2 : X_k)$  generado por  $X_2, \dots, X_k$  (con  $k > p$ ) es:

$$\widehat{X_{k+1}} = P_{\bar{s}p(X_2 : X_k)}(X_{k+1}) = \sum_{j=1}^p \phi_j X_{k+1-j}$$

- De su representación MA( $\infty$ ):  $Y \in \bar{s}p(X_2 : X_k) \Rightarrow Y \in \bar{s}p(U_j \mid j \leq k)$ , pues

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j U_{t-j} \Rightarrow \bar{s}p(X_2 : X_k) \subset \bar{s}p(U_j \mid j \leq k) \perp U_{k+1}$$

- Si  $Y \in \bar{s}p(X_2 : X_k)$  entonces  $Cov((X_{k+1} - \widehat{X_{k+1}}), Y) = Cov(U_{k+1}, Y) = 0$
- Denotemos con  $\widetilde{X}_1$  a la proyección  $P_{\bar{s}p(X_2 : X_k)}(X_1)$  de  $X_1$  sobre  $\bar{s}p(X_2 : X_k)$
- Ahora es fácil ver que  $\pi_k = 0$  para  $k > p$ , pues

$$\begin{aligned} \pi_k &= Corr((X_{k+1} - \widehat{X_{k+1}}), (X_1 - \widetilde{X}_1)) \\ &= Corr(U_{k+1}, (X_1 - \widetilde{X}_1)) = 0 \end{aligned}$$

ya que  $U_{k+1} \perp (X_1 - \widetilde{X}_1) \in \bar{s}p(U_j \mid j \leq k)$ .

### 1.3. Proceso autorregresivo AR(1)

Sea  $(1 - \phi z) * \mathbf{X} = \mathbf{U}$ , con  $|\phi| < 1$  y con  $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ , es decir

$$X_t = \phi X_{t-1} + U_t.$$

Como

$$(1 - az) * (1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 + \dots) = 1,$$

ahora hay que calcular infinitos términos en

$$\gamma = \sigma^2 (1 - \phi z)^{-1} * (1 - \phi z^{-1})^{-1}.$$

Hay varias formas de hacer los cálculos. Una es vía los productos convolución; puesto que

$$(1 - a^2 z)^{-1} = (1 + a^2 z + a^4 z^2 + a^6 z^3 + \dots) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} a^{2|h|} z^h$$

(para verlo basta sustituir  $a^2$  por  $b$ ), tenemos que  $(1 - az)^{-1} * (1 - az^{-1})^{-1}$  es:

$$\begin{aligned} & (\dots, 0, 0, 0, 1, a, a^2, a^3, \dots) \\ * & (\dots, a^3, a^2, a, 1, 0, 0, 0, \dots) \\ = & (\dots, \frac{a^3}{1+a^2}, \frac{a^2}{1+a^2}, \frac{a}{1+a^2}, \frac{1}{1+a^2}, \frac{a}{1+a^2}, \frac{a^2}{1+a^2}, \frac{a^3}{1+a^2}, \dots) \end{aligned}$$

(donde además hemos sustituido  $z$  por 1, pues cada término es una suma).

Es decir  $(1 - az)^{-1} * (1 - az^{-1})^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a^{|k|}}{1-a^2} z^k$ ; y por tanto

$$\gamma = \sigma^2 (1 - \phi z)^{-1} * (1 - \phi z^{-1})^{-1} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi^{|k|} z^k$$

Pero también podemos usar las Ecuaciones de Yule-Walker. En este caso (donde el único parámetro es  $\phi_1 = \phi$ ), en cuanto a la ACF tenemos que:

$$\rho_k = \phi \rho_{k-1} \quad k > 0$$

y como  $\rho_0 = 1$

$$\rho_k = \phi^k \quad k \geq 0$$

Y en cuanto a la varianza, dado que  $\rho_1 = \phi$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \rho_1 \phi} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}.$$

Por tanto, la función de autocovarianzas es

$$\gamma = \gamma_0 \cdot \rho = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi^{|k|} z^k$$

Así pues, si  $(1 - \phi z) * \mathbf{X} = \mathbf{U}$ , con  $|\phi| < 1$  y con  $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ , es decir, si

$$X_t = \phi X_{t-1} + U_t$$

como  $|\phi| < 1$  tenemos que  $\mathbf{X} = (1 - \phi z)^{-1} * \mathbf{U}$ . Por tanto:

$$\gamma = \sigma^2 (1 - \phi z)^{-1} * (1 - \phi z^{-1})^{-1} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi^{|k|} z^k \quad (\text{grado } \infty).$$

$$\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1 + \phi^2}{\sigma^2} \gamma = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi^{|j|} z^j \Rightarrow \rho_k = \phi^k \text{ para } k \geq 0.$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \gamma_h \cos(h\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 + \phi^2 - 2\phi \cos(\omega)} \quad (\text{compárese con MA}(1)).$$

$$\pi = (\dots, 0, 0, \phi, 1, \phi, 0, 0, \dots) \quad (\text{grado } 1).$$

### 1.3.1. AR(1) con raíz positiva

$$\phi(z) = 1 - 0.9z \Rightarrow X_t = 0.9X_{t-1} + U_t \quad (\phi > 0)$$

---

```
ar_params = [1, -0.9]
ma_params = [1,]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('~/img/lecc05/ACF-AR1p.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---

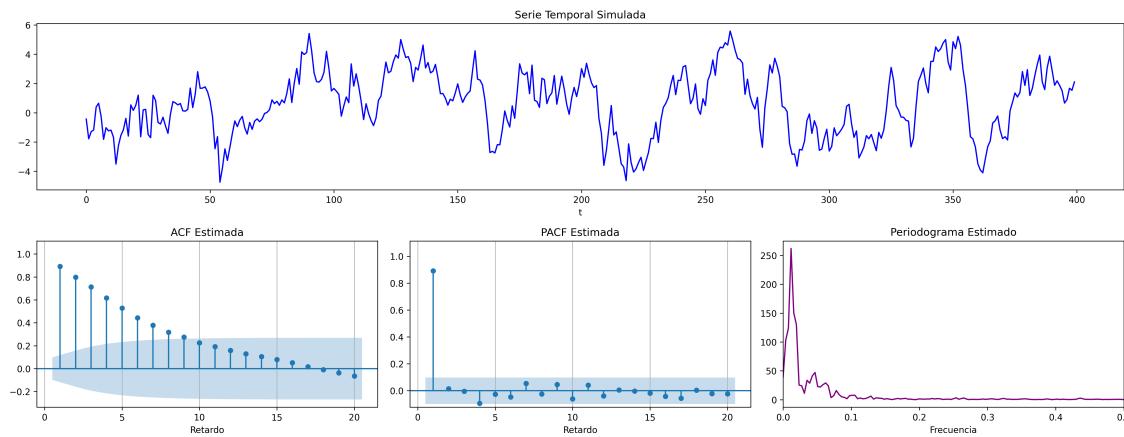


P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.	
0	1.111111	0.0	1.111111	0.0	Inf	1

---

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('~/img/lecc05/Sim-AR1p.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



### 1.3.2. AR(1) con raíz negativa

$$\phi(z) = 1 + 0.9z \Rightarrow X_t = -0.9X_{t-1} + U_t \quad (\phi < 0)$$

```
ar_params = [1, 0.9]
ma_params = [1,]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc05/ACF-AR1n.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
0	-1.111111	0.0	1.111111	0.5	2.0

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc05/Sim-AR1n.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



### 1.4. Proceso autorregresivo AR(2)

Sea  $(1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2) * \mathbf{X} = \mathbf{U}$ , con  $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$  y con

$$\phi_1 + \phi_2 < 1; \quad \phi_2 - \phi_1 < 1; \quad |\phi_2| < 1; \quad (\text{i.e., estacionario})$$

es decir

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + U_t.$$

Entonces

$$\gamma = \sigma^2 \left( \frac{1}{\phi(z)} * \frac{1}{\phi(z^{-1})} \right) \quad (\text{grado } \infty)$$

(de Ec. Yule-Walker:  $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2}$  y resolvemos  $\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2}$  recursivamente)

$$\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma \quad (\text{Verifica Ec. Yule-Walker: } \rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2})$$

(con  $\rho_0 = 1$  iniciamos el cálculo de  $\phi(\mathbf{B})\rho_k = 0$  recursivamente)

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1+\phi_1^2+\phi_2^2-2\phi_1(1+\phi_2)\cos(\omega)-2\phi_2\cos(2\omega)}$$

$$\pi = (\dots, 0, \phi_2, \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, 1, \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, \phi_2, 0, \dots)$$



Figura 1: El interior del triángulo es la región paramétrica donde un AR(2) es estacionario. Por debajo de la parábola las raíces son complejas. El signo del parámetro  $\phi_1$  determina el signo del primer retardo de la PACF y  $\phi_2$  el signo del segundo. Las regiones 1, 2, 3, y 4 determinan cómo decae la ACF.

---

```
RegionParametrica('AR').savefig('./img/lecc05/AR2roots.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---

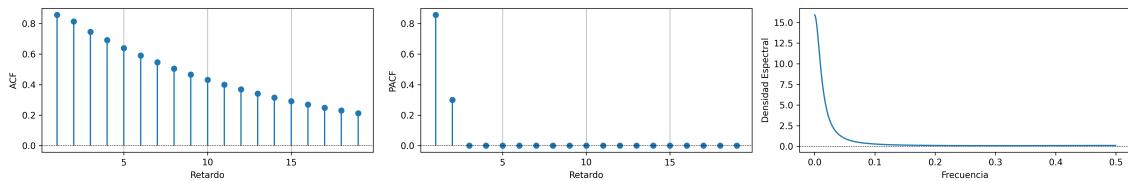
#### 1.4.1. AR(2) con dos parámetros positivos (+, +)

$$\phi(z) = 1 - 0,6z - 0,3z^2 \Rightarrow (1 - 0,6\mathbf{B} - 0,3\mathbf{B}^2)X_t = U_t \quad (\phi_1 > 0 \text{ y } \phi_2 > 0)$$

---

```
ar_params = [1, -0.6, -0.3]
ma_params = [1,]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc05/ACF-AR2pp.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
<b>1</b> 1.081666	0.0	3.081666	0.0	Inf	1
<b>0</b> -3.081666	0.0	3.081666	0.5	2.0	1

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2025)
fig.savefig('./img/lecc05/Sim-AR2pp.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



#### 1.4.2. AR(2) con parámetros de distinto signo (-, +)

$$\phi(z) = 1 + 0.6z - 0.3z^2 \Rightarrow (1 + 0.6B - 0.3B^2)X_t = U_t \quad (\phi_1 < 0 \text{ y } \phi_2 > 0)$$

```
ar_params = [1, +0.6, -0.3]
ma_params = [1,]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc05/ACF-AR2np.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
<b>1</b> 3.081666	0.0	3.081666	0.0	Inf	1
<b>0</b> -1.081666	0.0	1.081666	0.5	2.0	1

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2025)
fig.savefig('./img/lecc05/Sim-AR2np.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



### 1.4.3. AR(2) con dos parámetros negativos ( $-, -$ )

$$\phi(z) = 1 + 0,9z + 0,9z^2 \Rightarrow (1 + 0,9\mathbb{B} + 0,9\mathbb{B}^2)X_t = U_t \quad (\phi_1 < 0 \text{ y } \phi_2 < 0)$$

```
ar_params = [1, +0.9, +0.9]
ma_params = [1,]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc05/ACF-AR2nn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



	P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Período	Multip.
<b>0</b>	-0.5	-0.927961	1.054093	0.328657	3.042687	1
<b>1</b>	-0.5	0.927961	1.054093	0.328657	3.042687	1

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc05/Sim-AR2nn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



#### 1.4.4. AR(2) con parámetros de distinto signo (+, -)

$$\phi(z) = 1 - 1,1z + 0,9z^2 \Rightarrow (1 - 1,1B + 0,9B^2)X_t = U_t \quad (\phi_1 > 0 \text{ y } \phi_2 < 0)$$

```
ar_params = [1, -1.1, +0.9]
ma_params = [1,]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc05/ACF-AR2pn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



	P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
<b>0</b>	0.611111	-0.858868	1.054093	0.151575	6.597397	1
<b>1</b>	0.611111	0.858868	1.054093	0.151575	6.597397	1

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc05/Sim-AR2pn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



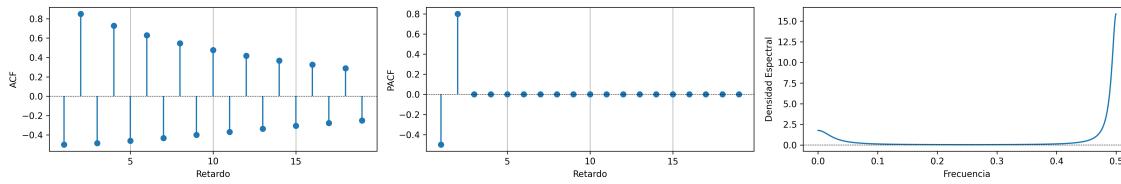
#### 1.4.5. AR(2) con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa

$$\phi(z) = 1 + 0,1z - 0,8z^2 \Rightarrow (1 + ,1B - ,8B^2)X_t = U_t \text{ (raíces reales: +, -)}$$

---

```
ar_params = [1, 0.1, -0.8]
ma_params = [1,]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc05/ACF-AR2RojoVioleta.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



P.	real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Período	Multip.
<b>1</b>	1.18228	0.0	1.18228	0.0	Inf	1
<b>0</b>	-1.05728	0.0	1.05728	0.5	2.0	1

---

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc05/Sim-AR2RojoVioleta.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



#### 1.4.6. AR(2) con un par de raíces complejas

$$\phi(z) = 1 - 0.1z + 0.8z^2 \Rightarrow (1 - ,1B + ,8B^2)X_t = U_t \text{ (par de r. complejas)}$$

```
ar_params = [1, -0.1, +0.8]
ma_params = [1,]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc05/ACF-ARverde.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



	P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Período	Multip.
<b>0</b>	0.0625	-1.116286	1.118034	0.241098	4.147685	1
<b>1</b>	0.0625	1.116286	1.118034	0.241098	4.147685	1

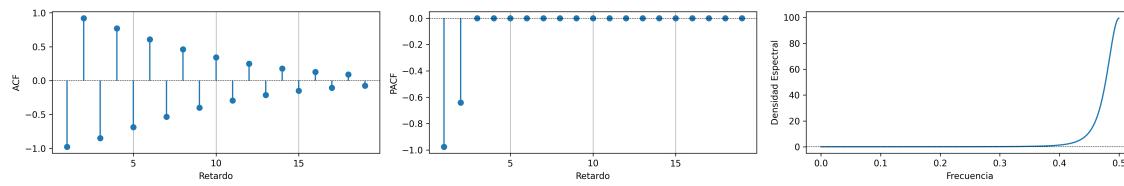
```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc05/Sim-ARverde.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



#### 1.4.7. AR(2) con dos raíces reales y negativas

$$\phi(z) = 1 + 1.6z + ,64z^2 \Rightarrow (1 + 1.6B + ,64B^2)X_t = U_t \text{ (raíces reales: -,-)}$$

```
ar_params = [1, 1.6, +0.64]
ma_params = [1,]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc05/ACF-AR2violeta.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
0	-1.25	0.0	1.25	0.5	2

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc05/Sim-AR2violeta.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



#### 1.4.8. AR(2) con dos raíces reales y positivas

$$\phi(z) = 1 - 1.6z + ,64z^2 \Rightarrow (1 - 1.6B + ,64B^2)X_t = U_t \text{ (raíces reales: +, +)}$$

```
ar_params = [1, -1.6, +0.64]
ma_params = [1,]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc05/ACF-AR2rojo.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



P. real	P. imag.	Módulo	Frecuencia	Periodo	Multip.
0	1.25	0.0	1.25	0.0	Inf 2

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc05/Sim-AR2rojo.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



## 2. (Resumen) características de procesos AR( $p$ )

Siempre invertible. (i.e., posee representación AR).

Para ser estacionario raíces de  $\phi$  fuera del círculo unidad ( $\phi^{-\rightarrow} = \phi^{-1} \in \ell^1$ )

### Tipos de representación del proceso

Como suma ponderada finita (número finito de parámetros)

$$\phi * \mathbf{X} = \mathbf{U} \Rightarrow \phi(B)X_t = U_t$$

**Como suma ponderada infinita** (solo si es estacionario)

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\phi} * \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad X_t = \frac{1}{\phi}(B)U_t$$

**Comportamiento de las funciones asociadas a los segundo momentos**

**ACF ( $\rho$ ):** Grado ( $\infty$ ) y cogrado ( $-\infty$ ); combinación de exponenciales y/o sinusoidales amortiguadas.

**PACF ( $\pi$ ):** Grado ( $p$ ) y cogrado ( $-p$ )

**Densidad espectral** proporcional al inverso de la densidad espectral de  $\mathbf{X} = \phi * \mathbf{U}$

### 3. (Resumen) características de procesos MA( $q$ )

Siempre estacionario.

Para ser invertible raíces  $\boldsymbol{\theta}$  fuera del círculo unidad ( $\boldsymbol{\theta}^{-\triangleright} = \boldsymbol{\theta}^{-1} \in \ell^1$ )

**Tipos de representación del proceso**

**Como suma ponderada finita** (número finito de parámetros)

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad X_t = \boldsymbol{\theta}(B)U_t$$

**Como suma ponderada infinita** (solo existe si es invertible):

$$\frac{1}{\boldsymbol{\theta}} * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\boldsymbol{\theta}}(B)X_t = U_t$$

**Comportamiento de las funciones asociadas a los segundos momentos**

**ACF ( $\rho$ ):** Grado ( $q$ ) y cogrado ( $-q$ )

**PACF ( $\pi$ ):** Grado ( $\infty$ ) y cogrado ( $-\infty$ ); combinación de exponenciales y/o sinusoidales amortiguadas.

**Densidad espectral** Suma de  $q$  cosenos más una constante.

## 4. Nota final

Se puede demostrar que

- si un proceso tiene una ACF  $\rho$  con cogrado  $-q$  y grado  $q$ , es un proceso MA( $q$ )
- si un proceso tiene una PACF  $\pi$  con cogrado  $-p$  y grado  $p$ , es un proceso AR( $p$ )

Véase *Pourahmadi M. (2001)*.

Consecuentemente, que la ACF o la PACF se corten “bruscamente” nos indica que el modelo es AR o MA (además de su grado).

Desgraciadamente para los modelos ARMA (qué veremos más adelante) tanto la ACF como la PACF tienen infinitos términos no nulos, por lo que su identificación no es tan sencilla.

	<b>ACF finita</b>	<b>ACF persistente</b>
<b>PACF finita</b>	Ruido blanco: retardos conjuntamente NO significativos. ACF $\approx$ PACF	<u>AR</u> : orden indicado por la PACF
<b>PACF persistente</b>	<u>MA</u> : orden indicado por la ACF	<u>ARMA</u>

## 5. Las Ecuaciones de Yule-Walker para un AR( $p$ ) estacionario

Sea un AR( $p$ ) estacionario:  $\phi(\mathbf{B})X_t = U_t$  donde  $\phi(z) = 1 - \phi_1 z^1 - \cdots - \phi_p z^p$ . Multiplicando por  $X_{t-k}$  y tomando esperanzas:

$$E[(\phi(\mathbf{B})X_t) \cdot X_{t-k}] = E[U_t \cdot X_{t-k}]$$

Estas ecuaciones se denominan *Ecuaciones de Yule-Walker* y permiten calcular las autocovarianzas y autocorrelaciones de manera iterativa.

Por una parte (lado izquierdo):

Si  $\mathbf{X}$  es un proceso (débilmente) estacionario con  $E(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$  y  $\phi$  es una serie formal absolutamente sumable; entonces para  $t, k \in \mathbb{Z}$

$$E[(\phi(\mathbf{B})X_t) \cdot X_{t-k}] = \phi(\mathbf{B})E(X_t \cdot X_{t-k}) = \phi(\mathbf{B})\gamma_k \quad (1)$$

que no depende de  $t$ , por ser  $\mathbf{X}$  es un proceso (débilmente) estacionario.

Por otra parte (lado derecho):

Si  $\mathbf{X}$  tiene representación  $\mathbf{X} = \psi * \mathbf{U}$  donde  $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$  y  $\psi \in \ell^2$  es una serie formal con  $\psi_0 = 1$ ; es decir, si es un proceso lineal causal

$$X_t = U_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j U_{t-j},$$

entonces para  $t, k \in \mathbb{Z}$

$$E[U_t \cdot X_{t-k}] = E[U_t \left( U_{t-k} + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j U_{t-k-j} \right)] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{cuando } k = 0 \\ 0 & \text{cuando } k \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Usemos las ecuaciones (1) y (2) para calcular autocovarianzas y autocorrelaciones de manera iterativa:

Sea un AR( $p$ ) estacionario:  $\phi(\mathbf{B})X_t = U_t$  donde  $\phi(z) = 1 - \phi_1z^1 - \cdots - \phi_pz^p$ . Multiplicando por  $X_{t-k}$  y tomando esperanzas:

$$E\left[\left(\phi(\mathbf{B})X_t\right) \cdot X_{t-k}\right] = E[U_t \cdot X_{t-k}]$$

**para**  $k = 0$ : (por 1 y 2)

$$\boxed{\phi(\mathbf{B})\gamma_0 = \sigma^2} \Rightarrow \gamma_0 - \phi_1\gamma_1 - \cdots - \phi_p\gamma_p = \sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 = \gamma_0 - \sum_{j=1}^p \phi_j\gamma_j.$$

Dividiendo por  $\gamma_0$  (y recordando que  $\rho_0 = 1$ ):

$$\phi(\mathbf{B})\rho_0 = \frac{\sigma^2}{\gamma_0} \Rightarrow \boxed{\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{\phi(\mathbf{B})\rho_0}} \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \sum_{j=1}^p \phi_j\rho_j}.$$

**para**  $k > 0$ : (por 1 y 2)

$$\boxed{\phi(\mathbf{B})\gamma_k = 0} \Rightarrow \gamma_k - \phi_1\gamma_{k-1} - \cdots - \phi_p\gamma_{k-p} = 0 \Rightarrow \gamma_k = \sum_{j=1}^p \phi_j\gamma_{k-j}.$$

Dividiendo por  $\gamma_0$ :

$$\boxed{\phi(\mathbf{B})\rho_k = 0} \Rightarrow \rho_k - \phi_1\rho_{k-1} - \cdots - \phi_p\rho_{k-p} = 0 \Rightarrow \rho_k = \sum_{j=1}^p \phi_j\rho_{k-j}.$$

En resumen, la estructura autorregresiva del proceso impone que las autocovarianzas (y las autocorrelaciones) verifiquen las ecuaciones de Yule-Walker.