

# Índice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Funciones de autocovarianzas y de autocorrelación (ACF)</b>             | <b>3</b>  |
| <b>2. Función de autocorrelación parcial (PACF)</b>                           | <b>3</b>  |
| <b>3. Densidad espectral</b>  | <b>4</b>  |
| <b>4. ACF, PACF y densidad espectral de algunos modelos lineales</b>          | <b>5</b>  |
| 4.1. Procesos lineales causales . . . . .                                     | 5         |
| 4.2. Proceso de Ruido Blanco . . . . .  | 6         |
| 4.3. Proceso de media móvil MA( $q$ ) . . . . .                               | 7         |
| 4.4. Proceso de media móvil MA(1) . . . . .                                   | 8         |
| 4.4.1. MA(1) con raíz positiva . . . . .                                      | 9         |
| 4.4.2. MA(1) con raíz negativa . . . . .                                      | 9         |
| 4.5. Proceso de media móvil MA(2) . . . . .                                   | 10        |
| 4.5.1. MA(2) con dos parámetros positivos (+, +) . . . . .                    | 10        |
| 4.5.2. MA(2) con parámetros de distinto signo (-, +) . . . . .                | 12        |
| 4.5.3. MA(2) con dos parámetros negativos (-, -) . . . . .                    | 13        |
| 4.5.4. MA(2) con parámetros de distinto signo (+, -) . . . . .                | 14        |
| 4.5.5. MA(2) con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa . . . . . | 15        |
| 4.5.6. MA(2) con un par de raíces complejas . . . . .                         | 15        |
| 4.5.7. MA(2) con dos raíces reales y negativas . . . . .                      | 16        |
| 4.5.8. MA(2) con dos raíces reales y positivas . . . . .                      | 17        |
| <b>5. (Resumen) características de procesos MA(<math>q</math>)</b>            | <b>18</b> |

# Lección 4. ACF, PACF y densidad espectral de modelos MA

Marcos Bujosa

9 de octubre de 2025

## Resumen

Veremos tres funciones que caracterizan los momentos de segundo orden en procesos lineales: la función de autocorrelación (ACF), la función de autocorrelación parcial (PACF) y la densidad espectral. Las tres son transformaciones de la función de autocovarianzas. Primero, exploraremos estas funciones en procesos de ruido blanco y luego en procesos de media móvil (MA). Los procesos MA caracterizan series temporales con "memoria muy corta". Estos procesos dependen de un número finito y generalmente pequeño de innovaciones pasadas. A diferencia de los modelos autorregresivos, los procesos MA solo están correlados con unos pocos valores anteriores, lo que hace que su función de autocorrelación simple muestre pocas autocorrelaciones distintas de cero.

- ([slides](#)) — ([html](#)) — ([pdf](#)) — ([mybinder](#))
  - programas análisis modelos arma: ([slides](#)) — ([html](#)) — ([mybinder](#))

## Carga de algunos módulos de python y creación de directorios auxiliares

---

```
# Para trabajar con los datos y dibujarlos necesitamos cargar algunos módulos de python
import numpy as np # linear algebra
import pandas as pd # data processing, CSV file I/O (e.g. pd.read_csv)
import matplotlib as mpl
# definimos parámetros para mejorar los gráficos
mpl.rcParams['text', usetex=False]
import matplotlib.pyplot as plt # data visualization
import dataframe_image as dfi # export tables as .png
```

---

- Directorio auxiliar para albergar las figuras de la lección: para publicar la lección como pdf o página web, necesito los gráficos como ficheros .png alojados algún directorio específico:

---

```
imagenes_leccion = "./img/lecc04" # directorio para las imágenes de la lección
import os
os.makedirs(imagenes_leccion, exist_ok=True) # crea el directorio si no existe
```

---

## Gráficos para las ACF, PACF y densidades espectrales teóricas

Cargamos las funciones auxiliares (véase la carpeta `src/`)

---

```
%run -i ./src/analisis_armas.py
```

---

## 1. Funciones de autocovarianzas y de autocorrelación (ACF)

Si un proceso estocástico es estacionario, la covarianza entre  $X_t$  y  $X_{t+k}$  no depende de  $t$ ; tan solo depende de la distancia temporal  $k$  entre ambas variables aleatorias:  $Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma_k$ .

- La secuencia  $\gamma = (\gamma_k \mid k \in \mathbb{Z})$  se denomina *función de autocovarianzas*
- Dividiendo  $\gamma$  por  $\gamma_0$  obtenemos la secuencia  $\rho = (\rho_k \mid k \in \mathbb{Z})$  donde

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0},$$

que se denomina *función de autocorrelación* (ACF).

Veamos otras transformaciones de  $\gamma$  que subrayan diferentes características de la interdependencia temporal en un proceso estocástico.

## 2. Función de autocorrelación parcial (PACF)

Dado un conjunto de variables  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$ , la *correlación condicional*  $\rho_{X,Y|\mathbf{Z}}$  entre las variables  $X$  e  $Y$  es

$$\rho_{X,Y|\mathbf{Z}} = Corr(X - E(X \mid \mathbf{Z}), Y - E(Y \mid \mathbf{Z}))$$

El problema es que no siempre es fácil conocer las esperanzas condicionadas  $E(X \mid \mathbf{Z})$  y  $E(Y \mid \mathbf{Z})$ .

Pero es sencillo restar de  $X$  y de  $Y$  los ajustes  $\hat{X}$  y  $\hat{Y}$  correspondientes a sus respectivas regresiones lineales sobre  $\mathbf{Z}$ . La correlación entre ambos residuos se denomina *correlación parcial* entre  $X$  e  $Y$ ; y mide la correlación entre ambas variables una vez “descontado” el efecto lineal de las variables  $\mathbf{Z}$ .

$$Corr((X - \hat{X}), (Y - \hat{Y}))$$

La *correlación parcial* entre dos variables  $X_t$  y  $X_{t+k}$  de un proceso estacionario  $\mathbf{X}$  mide su correlación una vez descontado el efecto de las variables  $X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}$  que median entre ambas.

$$X_t, \overbrace{X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}}^{\text{variables medianas}}, X_{t+k}$$

Si denotamos con  $\widehat{X}_t$  y  $\widetilde{X}_{t+k}$  los ajustes de las respectivas regresiones de  $X_t$  y  $X_{t+k}$  sobre  $X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}$ ; la *correlación parcial*  $\pi_k$  entre  $X_t$  y  $X_{t+k}$  es la correlación entre los residuos de sendas regresiones:

$$\pi_k = Corr((X_t - \widehat{X}_t), (X_{t+k} - \widetilde{X}_{t+k}))$$

En un proceso débilmente estacionario las correlaciones parciales solo dependen de la distancia  $k$ , lo que permite definir la siguiente secuencia.

**La función de autocorrelación parcial (PACF)** de un proceso estocástico estacionario  $\mathbf{X}$  es la siguiente secuencia  $\boldsymbol{\pi}$  simétrica ( $\pi_{-k} = \pi_k$ ):

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_k \mid k \in \mathbb{Z}) = \begin{cases} \pi_0 &= \rho_0 = 1 \\ \pi_1 &= \text{Corr}(X_t, X_{t-1}) = \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \\ \pi_k &= \text{Corr}\left((X_t - \widehat{X}_t), (X_{t-k} - \widetilde{X}_{t-k})\right) \end{cases},$$

donde  $\widehat{X}_t$  y  $\widetilde{X}_{t-k}$  son los ajustes de las respectivas regresiones de  $X_t$  y  $X_{t-k}$  sobre  $X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}$ ; i.e., las proyecciones ortogonales sobre  $\bar{s}p(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)})$ .

La magnitud de la correlación parcial  $\pi_k$  **refleja la mejora en la predicción de  $\widehat{X}_t$**  si en lugar de usar una combinación lineal con solo los  $k-1$  primeros retardos,  $\widehat{X}_t = \widehat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \widehat{\alpha}_j X_{t-j}$ , **empleamos  $k$  retardos** (i.e., un retardo más).

Así, la PACF nos ayudará a identificar el orden de procesos autoregresivos.

Hay una correspondencia uno-a-uno entre la función de autocovarianzas  $\boldsymbol{\gamma}$  y la PACF  $\boldsymbol{\pi}$ .

Es decir, es posible reconstruir una de las secuencias a partir de la otra (por ejemplo resolviendo las **ecuaciones de Yule-Walker** recursivamente con el algoritmo **Levinson-Durbin**; véase *Pourahmadi, M. (2001, Capítulo 7)* o *Brockwell & Davis (1991, Capítulo 5)*)

Así, la PACF  $\boldsymbol{\pi}$  puede verse como una reparametrización de la función de autocovarianzas  $\boldsymbol{\gamma}$ .

Veamos otra transformación de  $\boldsymbol{\gamma}$  que también arrojará luz sobre las propiedades de un proceso estocástico.

### 3. Densidad espectral

Si  $\mathbf{X}$  es un proceso estocástico con función de autocovarianzas  $\boldsymbol{\gamma} \in \ell^1$ , es decir, con función de autocovarianzas absolutamente sumable,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k| < \infty,$$

entonces definimos la *densidad espectral* de  $\mathbf{X}$  como

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{-ik\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \geq 0} \gamma_k \cos(k\omega), \quad \omega \in [-\pi, \pi],$$

(donde  $w$  son las frecuencias de oscilación de la serie).

La *densidad espectral*  $f(\omega)$  satisface las siguientes propiedades:

1.  $f(\omega) = f(-\omega)$
2.  $f(\omega) \geq 0$
3.  $\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega < \infty$

Es más, partiendo de la densidad espectral se pueden calcular las covarianzas

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{-ik\omega} d\omega; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Consecuentemente, para  $k = 0$

$$\sigma^2 = \gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega.$$

Por tanto podemos interpretar la densidad espectral como una descomposición de la varianza en sumas de oscilaciones con distintas frecuencias (o períodos).

(Período =  $\frac{1}{Frecuencia}$ , donde la Frecuencia = Ciclos por unidad de tiempo).

- La ACF, la PACF y la *densidad espectral* son funciones que dependen únicamente de los segundos momentos de la distribución.
- Su estimación y posterior análisis son la herramienta fundamental para elegir un modelo ARMA para una serie temporal “estacionaria”.
- Para entenderlo debemos ver cómo son estas funciones en algunos modelos lineales concretos.

Comenzaremos por los *procesos lineales causales* genéricos; de los cuales se derivan los modelos estacionarios que veremos en el curso. Hoy los procesos de ruido blanco y los procesos de medias móviles MA( $q$ ).

En la lección próxima: los procesos autorregresivos AR( $p$ ) y los procesos ARMA( $p, q$ ).

## 4. ACF, PACF y densidad espectral de algunos modelos lineales

Comencemos con el caso general:

### 4.1. Procesos lineales causales

Sea  $\mathbf{X} = \psi * \mathbf{U}$ , donde  $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$  y  $\psi \in \ell^2$  es una serie formal:

$$X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j U_{t-j}.$$

Por la [lección anterior](#) sabemos que  $E(X_t) = 0$  y que

$$\blacksquare \quad \gamma = \sigma^2 \psi(z) * \psi(z^{-1})$$

Es decir,

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+|k|} \cdot \psi_j.$$

Y como  $\psi$  es serie formal de cuadrado sumable,  $\gamma_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$

*Demostración:* aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\gamma_k| \leq \sigma^2 \left( \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_{j+k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sigma^2 \left( \sum_{j=k}^{\infty} |\psi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y puesto que  $\psi$  es de cuadrado sumable, la cola  $\sum_{j=k}^{\infty} |\psi_j|^2$  converge a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Fíjese que en particular,

$$\gamma_0 = \text{Var}(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2;$$

donde la suma es convergente dado que  $\psi$  es de cuadrado sumable.

A partir de  $\gamma$  obtenemos las otras tres funciones:

**ACF:**  $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma$

**Dens. espectral:**  $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \geq 0} \gamma_k \cos(k\omega); \quad \omega \in [-\pi, \pi]$

**PACF:**  $\pi \in \ell^2$ , i.e.,  $\pi_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$

(Cuando  $\pi \in \ell^2$  se dice que el proceso es *no-determinista*.)

## 4.2. Proceso de Ruido Blanco

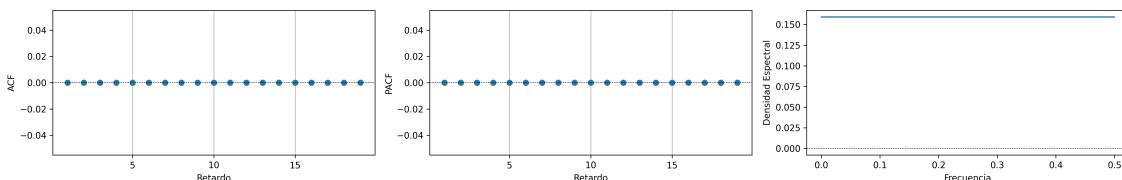
Sea  $\mathbf{X} = 1 * \mathbf{U}$ , donde  $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ ; es decir  $X_t = U_t$  para  $t \in \mathbb{Z}$ . Entonces

- $\gamma = \sigma^2(1z^0 * 1z^0) = \sigma^2 z^0 = (\dots, 0, 0, \sigma^2, 0, 0, \dots)$
- $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1}{\sigma^2} \gamma = 1z^0 = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$
- $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \geq 0} \gamma_k \cos(k\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cos(0\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}; \quad \omega \in [-\pi, \pi]$
- $\pi = 1z^0 = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$

---

```
ar_params = [1]
ma_params = [1]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, 1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACFwhitenoise.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---




---

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/SimulWhitenoise.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



Los procesos de ruido blanco son los más simples. Carecen de correlación serial, lo que significa que el valor tomado en un momento determinado no aporta información útil para predecir valores futuros. Si los residuos de un modelo ajustado a una serie temporal no son *ruido blanco*, significa que queda correlación serial no captada por el modelo, por lo que dicho modelo es mejorable.

El nombre de *ruido blanco* se debe a que su función de densidad espectral es constante, indicando que, al descomponer la varianza en sumas de oscilaciones de diferentes frecuencias, todas las frecuencias tienen la misma relevancia o intensidad. Esta es una circunstancia análoga al fenómeno físico de la luz blanca, que contiene todos los colores (oscilaciones de la onda electromagnética en cada frecuencia) con idéntica intensidad. Al observar la luz *blanca*, percibimos todas esas oscilaciones simultáneamente, lo que nos da la percepción de color *blanco*. Sin embargo, al pasarla por un prisma, podemos descomponerla y ver los colores por separado (*la densidad espectral es como un prisma, pues nos deja ver la intensidad de las distintas oscilaciones por separado*).

### 4.3. Proceso de media móvil MA( $q$ )

Sea  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U}$ , con  $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$  y donde  $\boldsymbol{\theta}$  es un polinomio de orden  $q > 0$ , con  $\theta_0 = 1$  y con todas sus raíces fuera del círculo unidad ( $\boldsymbol{\theta}^{-\triangleright} \in \ell^1$ ):

$$X_t = \sum_{j=1}^q \theta_j U_{t-j} + U_t.$$

*El requisito sobre las raíces no es necesario para que el proceso sea estacionario, pero por conveniencia se usan modelos MA que tengan representación AR( $\infty$ ) causal:*

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\boldsymbol{\theta}} * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$$

donde  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\theta}^{-\triangleright} = \boldsymbol{\theta}^{-1} \in \ell^1$ . Entonces se dice que el modelo MA es “invertible”.

Cualquier modelo MA sin raíces en el círculo unitario puede reparametrizarse en un nuevo modelo con idéntica función de autocovarianzas  $\boldsymbol{\gamma}$  (véase la Sección 2.6 de Fuller (1996)). Por tanto, el nuevo modelo exhibirá las mismas ACF, PACF y densidad

espectral que el modelo original. Para garantizarnos una correspondencia uno a uno entre ACFs y procesos estocásticos, siempre asumiremos que las raíces del polinomio  $\theta$  son mayores que uno en valor absoluto.

Entonces  $E(X_t) = 0$  y

$$\gamma = \sigma^2 \theta(z) * \theta(z^{-1}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^q \theta_{j+k} \theta_j z^k \text{ (grado } q; \text{ cogrado } -q\text{)} \quad (\text{Lecc. 02})$$

$$\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \theta(e^{-i\omega}) \cdot \theta(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^q \gamma_h \cos(h\omega); \quad \omega \in [-\pi, \pi] \quad (q \text{ cosenos} + 1)$$

$\pi$  con grado  $\infty$  y cogrado  $-\infty$ . Su magnitud decrece paulatinamente cuando  $k \rightarrow \infty$

Un proceso MA es siempre estacionario.

### Tipos de representación del proceso

**Como suma ponderada finita** MA( $q$ ) (número finito de parámetros)

$$\mathbf{X} = \theta * \mathbf{U} \Rightarrow X_t = \theta(\mathbf{B}) U_t$$

**Como suma ponderada infinita** AR( $\infty$ ) (solo existe si es invertible):

$$\frac{1}{\theta} * \mathbf{X} = \mathbf{U} \Rightarrow \frac{1}{\theta}(\mathbf{B}) X_t = U_t$$

Para ser invertible raíces  $\theta$  fuera del círculo unidad ( $\theta^{-\triangleright} = \theta^{-1} \in \ell^1$ )

Los procesos MA se caracterizan por su “memoria muy corta”. Estos procesos dependen de un número finito, generalmente pequeño, de innovaciones pasadas.

A diferencia de los modelos autorregresivos, los procesos MA solo presentan correlación con un número limitado de valores anteriores, lo que permite que su función de autocorrelación simple tenga solo unas pocas autocorrelaciones diferentes de cero.

#### 4.4. Proceso de media móvil MA(1)

Sea  $\mathbf{X} = (1 - \theta z) * \mathbf{U}$  con  $|\theta| < 1$  y con  $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ , es decir

$$X_t = U_t - \theta U_{t-1}.$$

- $\gamma = \sigma^2 (1 - \theta z) * (1 - \theta z^{-1}) = \sigma^2 (\dots, 0, -\theta, (1 + \theta^2), -\theta, 0, \dots)$

- $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1}{\sigma^2(1+\theta^2)} \gamma = (\dots, 0, \frac{-\theta}{1+\theta^2}, 1, \frac{-\theta}{1+\theta^2}, 0, \dots)$

- $f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \theta(e^{-i\omega}) \cdot \theta(e^{i\omega}) = \frac{\sigma^2}{2\pi} ((1 + \theta^2) - 2\theta \cos(\omega)); \quad \omega \in [-\pi, \pi]$

- $\pi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{-\theta^k (1 - \theta^2)}{1 - \theta^{2(k+1)}} z^k$

#### 4.4.1. MA(1) con raíz positiva

$$\theta(z) = 1 - 0.9z \Rightarrow X_t = (1 - 0.9B)U_t \quad (\theta > 0)$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, -0.9]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA1p.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



| P. | real     | Imag. | Módulo   | Frecuencia | Periodo | Multip. |
|----|----------|-------|----------|------------|---------|---------|
| 0  | 1.111111 | 0.0   | 1.111111 | 0.0        | Inf     | 1       |

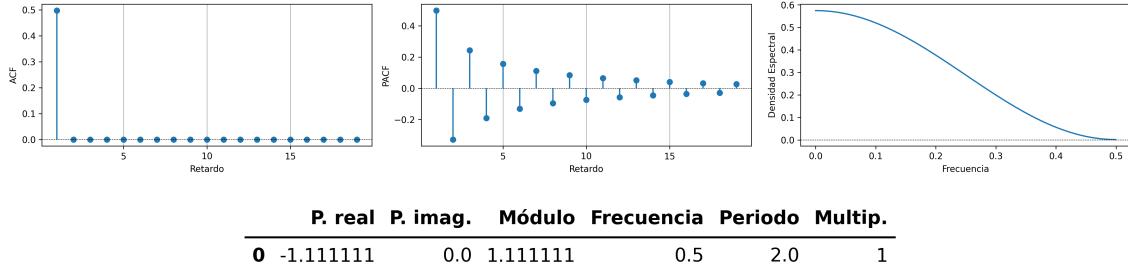
```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA1p.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



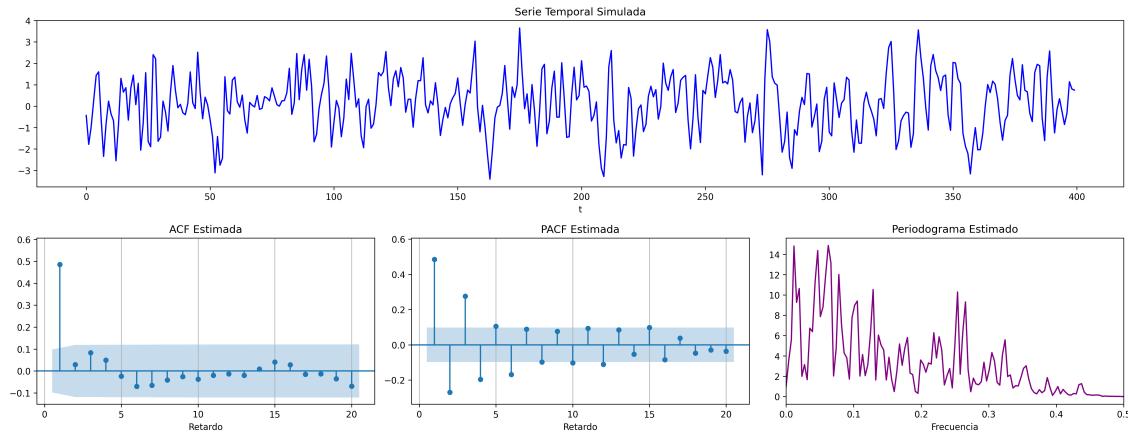
#### 4.4.2. MA(1) con raíz negativa

$$\theta(z) = 1 + 0.9z \Rightarrow X_t = (1 + 0.9B)U_t \quad (\theta < 0)$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, 0.9]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA1n.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA1n.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



## 4.5. Proceso de media móvil MA(2)

Sea  $\mathbf{X} = (1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2) * \mathbf{U}$ , con  $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$  y con

$$\theta_1 + \theta_2 < 1; \quad \theta_2 - \theta_1 < 1; \quad |\theta_2| < 1; \quad (\text{i.e., invertible})$$

es decir  $X_t = U_t - \theta_1 U_{t-1} - \theta_2 U_{t-2}$ .

- $\gamma = \sigma^2(1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2) * (1 - \theta_1 z^{-1} - \theta_2 z^{-2})$
- $\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2); \quad \gamma_1 = \sigma^2(-\theta_1(1 - \theta_2)); \quad \gamma_2 = \sigma^2(-\theta_2)$
- $\gamma_3 = \gamma_4 = \dots = 0$  (y es simétrica)
- $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1}{\sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)} \gamma$
- $f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left( (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) - 2\theta_1(1 + \theta_2) \cos(\omega) - 2\theta_2 \cos(2\omega) \right)$
- $\pi$  tiene una expresión complicada, pero su magnitud decrece paulatinamente.

### 4.5.1. MA(2) con dos parámetros positivos (+, +)

$$\theta(z) = 1 - 0.6z - 0.3z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 0.6B - 0.3B^2)U_t; \quad (\theta_1 > 0 \text{ y } \theta_2 > 0)$$

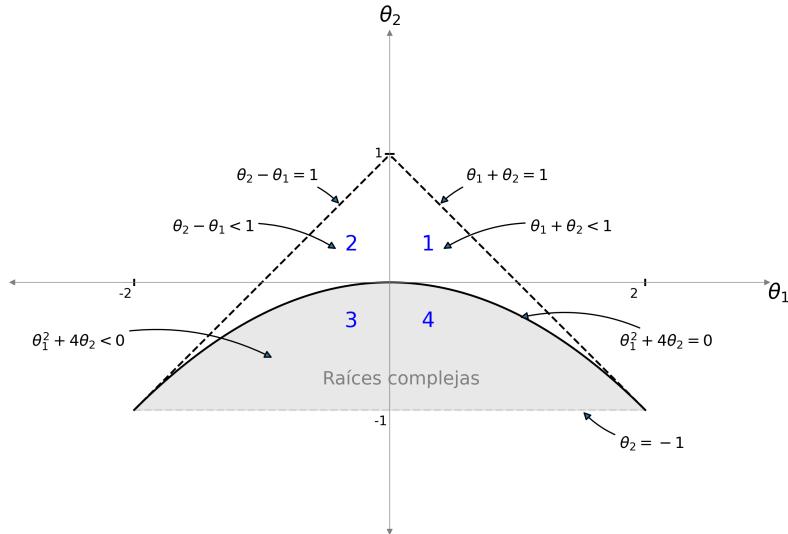
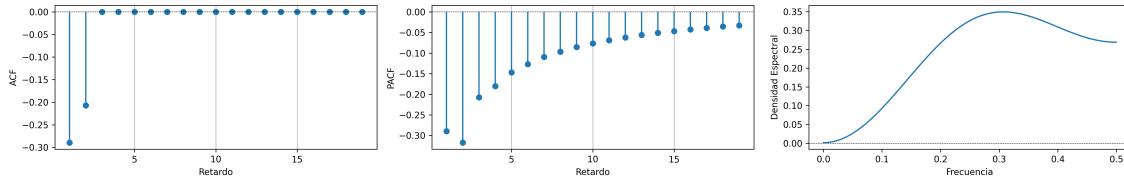


Figura 1: El interior del triángulo es la región paramétrica donde un MA(2) es invertible. Por debajo de la parábola las raíces son complejas. El signo del parámetro  $\theta_1$  determina el signo del primer retardo de la ACF y  $\theta_2$  el signo del segundo. Las regiones 1, 2, 3, y 4 determinan cómo decae la PACF. Las cuatro subsecciones sobre modelos MA(2) muestran, por orden, ejemplos de estas 4 regiones.

---

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, -0.6, -0.3]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2thpp.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



|          | P. real   | P. imag. | Módulo   | Frecuencia | Periodo | Multip. |
|----------|-----------|----------|----------|------------|---------|---------|
| <b>1</b> | 1.081666  | 0.0      | 1.081666 | 0.0        | Inf     | 1       |
| <b>0</b> | -3.081666 | 0.0      | 3.081666 | 0.5        | 2.0     | 1       |

---

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2thpp.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



#### 4.5.2. MA(2) con parámetros de distinto signo (-, +)

$$\theta(z) = 1 + 0,6z - 0,3z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 0,6B - 0,3B^2)U_t \quad (\theta_1 < 0 \text{ y } \theta_2 > 0)$$

---

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, +0.6, -0.3]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2thnp.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



| P. real  | P. imag.  | Módulo | Frecuencia | Período | Multip. |
|----------|-----------|--------|------------|---------|---------|
| <b>1</b> | 3.081666  | 0.0    | 3.081666   | 0.0     | Inf     |
| <b>0</b> | -1.081666 | 0.0    | 1.081666   | 0.5     | 2.0     |

---

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2thnp.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



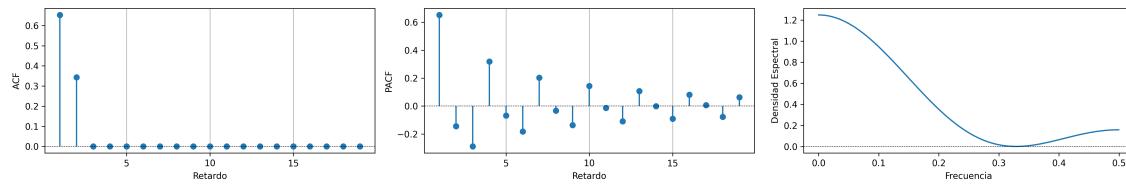
#### 4.5.3. MA(2) con dos parámetros negativos $(-, -)$

$$\theta(z) = 1 + 0.9z + 0.9z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 0.9B + 0.9B^2)U_t; (\theta_1 < 0 \text{ y } \theta_2 < 0)$$

---

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, +0.9, 0.9]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2thnn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



|          | P. real | P. imag.  | Módulo   | Frecuencia | Período  | Multip. |
|----------|---------|-----------|----------|------------|----------|---------|
| <b>0</b> | -0.5    | -0.927961 | 1.054093 | 0.328657   | 3.042687 | 1       |
| <b>1</b> | -0.5    | 0.927961  | 1.054093 | 0.328657   | 3.042687 | 1       |

---

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2thnn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

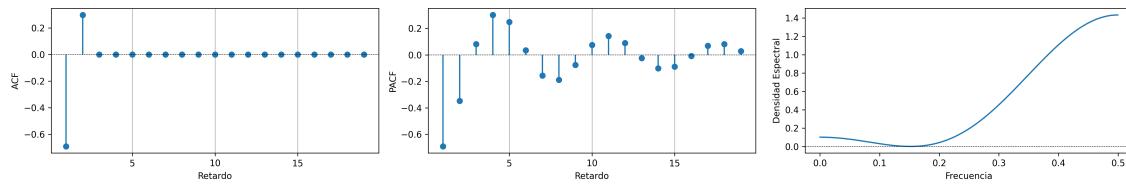
---



#### 4.5.4. MA(2) con parámetros de distinto signo (+, -)

$$\theta(z) = 1 - 1,1z + 0,9z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 1,1B + 0,9B^2)U_t \quad (\theta_1 > 0 \text{ y } \theta_2 < 0)$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, -1.1, 0.9]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2thpn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



|   | P. real  | P. imag.  | Módulo   | Frecuencia | Período  | Multip. |
|---|----------|-----------|----------|------------|----------|---------|
| 0 | 0.611111 | -0.858868 | 1.054093 | 0.151575   | 6.597397 | 1       |
| 1 | 0.611111 | 0.858868  | 1.054093 | 0.151575   | 6.597397 | 1       |

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2thpn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



#### 4.5.5. MA(2) con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa

$$\theta(z) = 1 - 0,64z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 0,64B^2)U_t \text{ (raíces reales: +, -)}$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, 0, -0.64]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2pn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



| P. real  | P. imag. | Módulo | Frecuencia | Periodo | Multip. |
|----------|----------|--------|------------|---------|---------|
| <b>1</b> | 1.25     | 0.0    | 1.25       | 0.0     | Inf     |
| <b>0</b> | -1.25    | 0.0    | 1.25       | 0.5     | 2.0     |

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2pn.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



#### 4.5.6. MA(2) con un par de raíces complejas

$$\theta(z) = 1 + 0,64z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 0,64B^2)U_t \text{ (par de raíces complejas)}$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, 0, 0.64]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2np.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



| P. real | P. imag. | Módulo | Frecuencia | Periodo | Multip. |
|---------|----------|--------|------------|---------|---------|
|---------|----------|--------|------------|---------|---------|

|          |     |       |      |      |     |   |
|----------|-----|-------|------|------|-----|---|
| <b>0</b> | 0.0 | -1.25 | 1.25 | 0.25 | 4.0 | 1 |
| <b>1</b> | 0.0 | 1.25  | 1.25 | 0.25 | 4.0 | 1 |

---

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2np.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



#### 4.5.7. MA(2) con dos raíces reales y negativas

$$\theta(z) = 1 + 1.6z + 0.64z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 1.6B + 0.64B^2)U_t \text{ (r. reales: - , -)}$$

---

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, 1.6, 0.64]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2rojo.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



| P. real | P. imag. | Módulo | Frecuencia | Periodo | Multip. |
|---------|----------|--------|------------|---------|---------|
|---------|----------|--------|------------|---------|---------|

|          |       |     |      |     |     |   |
|----------|-------|-----|------|-----|-----|---|
| <b>0</b> | -1.25 | 0.0 | 1.25 | 0.5 | 2.0 | 2 |
|----------|-------|-----|------|-----|-----|---|

---

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2rojo.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

---



#### 4.5.8. MA(2) con dos raíces reales y positivas

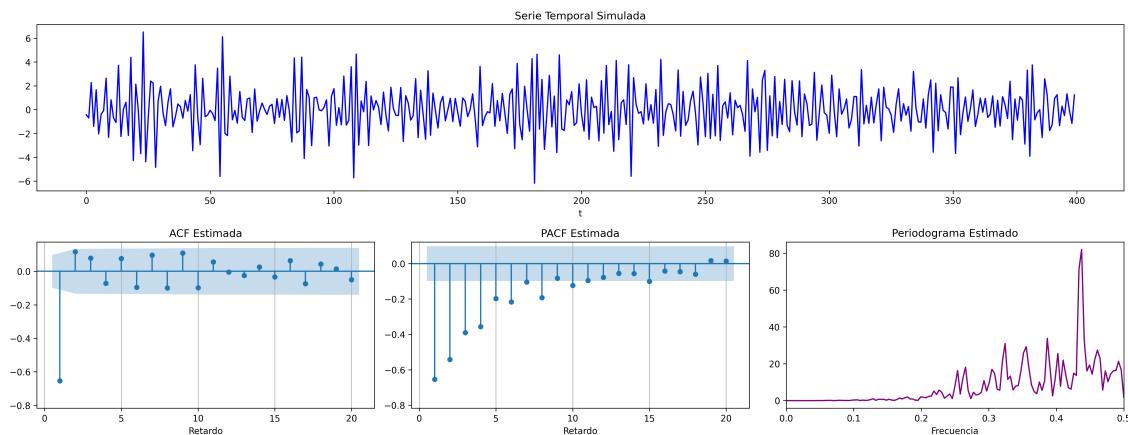
$$\theta(z) = 1 - 1,6z + 0,64z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 1,6B + 0,64B^2)U_t \text{ (r. reales: +, +)}$$

```
ar_params = [1,]
ma_params = [1, -1.6, 0.64]
fig = plot_arma_parametric_diagnostics(ar_params, ma_params, sigma2=1, lags=20)
fig.savefig('./img/lecc04/ACF-MA2violeta.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



| P. real | P. imag. | Módulo | Frecuencia | Periodo | Multip. |
|---------|----------|--------|------------|---------|---------|
| 0       | 1.25     | 0.0    | 0.0        | Inf     | 2       |

```
fig = plot_arma_analysis(ar_params, ma_params, seed=2026)
fig.savefig('./img/lecc04/Sim-MA2violeta.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



## 5. (Resumen) características de procesos MA( $q$ )

Siempre estacionario.

Para ser invertible raíces  $\theta$  fuera del círculo unidad ( $\theta^{-\triangleright} = \theta^{-1} \in \ell^1$ )

### Tipos de representación del proceso

**Como suma ponderada finita** MA( $q$ ) (número finito de parámetros)

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad X_t = \boldsymbol{\theta}(\mathbb{B})U_t$$

**Como suma ponderada infinita** AR( $\infty$ ) (solo existe si es invertible):

$$\frac{1}{\theta} * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\theta}(\mathbb{B})X_t = U_t$$

### Comportamiento de las funciones asociadas a los segundos momentos

**ACF ( $\rho$ )**: Grado ( $q$ ) y cogrado ( $-q$ )

**PACF ( $\pi$ )**: Grado ( $\infty$ ) y cogrado ( $-\infty$ ): Combinación de exponenciales y/o sinusoidales amortiguadas.

**Densidad espectral** Suma de  $q$  cosenos más una constante.