Índice

Econometría Aplicada. Lección 5

Marcos Bujosa

27 de noviembre de 2024

Resumen

Esta lección veremos las dificultades que ocasiona la correlación serial y algunos tipos de procesos débilmente estacionarios que nos permitirán lidiar con ella. En particular veremos los procesos lineales, su valor esperado y su función de autocovarianzas, la función de covarianzas cruzadas entre dos procesos lineales, y las ecuaciones de Yule-Walker.

- lección en html
- lección en mybinder

Carga de algunas librerías de R

Primero cargamos la librería `tfarima` (Repositorio Cran: https://cran.r-project.org/web/packages/tfarima/index.html; repositorio GitHub: https://github.com/gallegoj/tfarima)

```
library(tfarima)        # librería de José Luis Gallego para Time Series
library(readr)          # para leer ficheros CSV
library(ggplot2)        # para el scatterplot (alternaticamente library(tidyverse))
library(ggfortify)      # para pintar series temporales
library(jtools)         # para representación resultados estimación
library(zoo)            # para generar objetos ts (time series)
```

y además fijamos los parámetros por defecto para las figuras en `png` del notebook

```
# fijamos el tamaño de las figuras que se generan en el notebook
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 4, repr.plot.res = 200)
```

1. Series temporales vs datos de sección cruzada

Corresponden a observaciones de un mismo objeto a lo largo del tiempo. El índice indica el instante de cada medición. *El orden cronológico puede ser crucial* al modelar los datos.

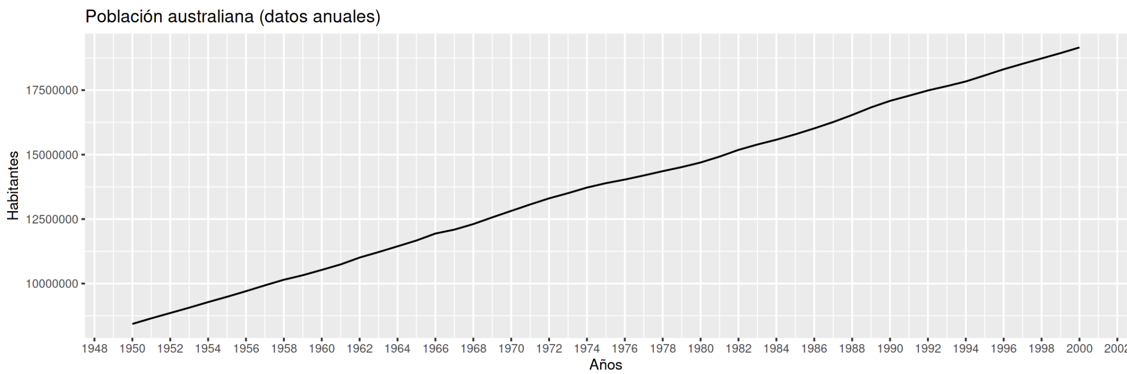
- El motivo es que frecuentemente el valor medido en un instante de tiempo está relacionado con otras mediciones próximas en el tiempo (*correlación serial*).
- Si es así, ya no deberíamos asumir que las variables aleatorias del proceso estocástico subyacente, $\boldsymbol{X} = (X_t \mid t \in \mathbb{Z})$, son independientes entre sí.

Esto tiene importantes implicaciones en las técnicas de análisis y los modelos a utilizar.

Veamos algunos ejemplos de series temporales. . .

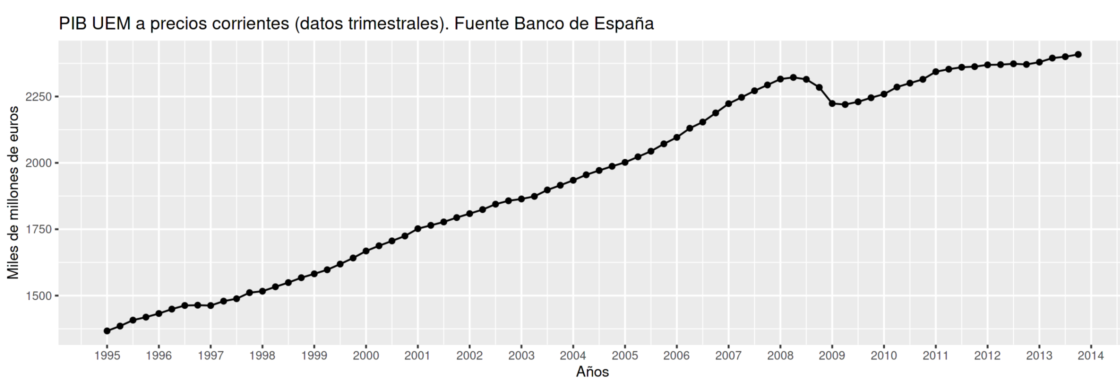
1. Población en Australia

```
PoblacionAustralia_ts = as.ts( read.zoo('datos/PoblacionAustralia.csv',
                                        header=TRUE,
                                        index.column = 1,
                                        sep=",",
                                        FUN = as.yearmon))
p <- autoplot(PoblacionAustralia_ts)
p <- p + labs(y = "Habitantes", x = "Años") + ggtitle("Población australiana (datos anuales)")
p <- p + scale_x_continuous(breaks = scales::pretty_breaks(n = 20))
p
```



2. PIB UEM

```
PIB_UEM_df <- read_csv("datos/PIB_UEM.csv",
                       show_col_types = FALSE)
fmt <- "%YQ%q"
PIB_UEM_df$Time <- as.yearqtr(PIB_UEM_df$obs, format = fmt)
# head(PIB_UEM_df,3)
P <- ggplot(PIB_UEM_df, aes(Time, PIB))
P <- P + geom_point() + geom_line()
P <- P + scale_x_continuous(breaks = scales::pretty_breaks(n = 15))
P <- P + labs(y = "Miles de millones de euros", x = "Años")
P <- P + ggtitle("PIB UEM a precios corrientes (datos trimestrales). Fuente Banco de España")
P
```

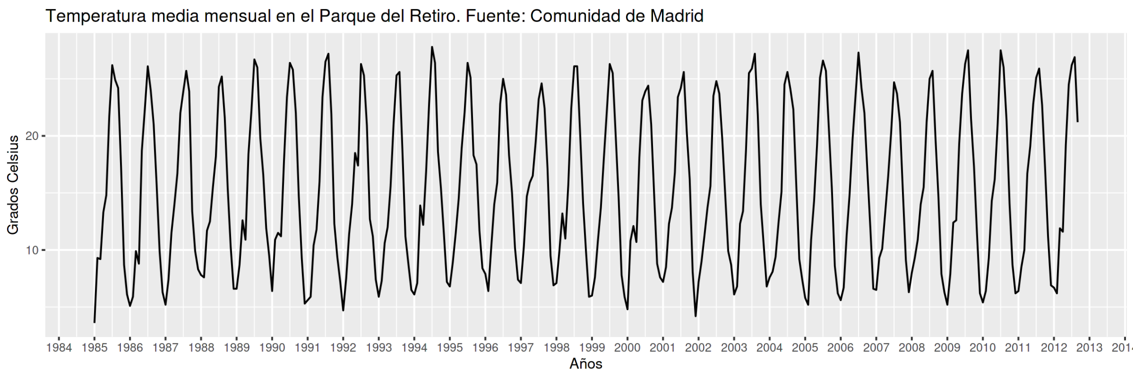


3. Temperatura media en el Parque del Retiro. Madrid

```
TemperaturaRetiro_df <- read_csv("datos/Retiro.txt", show_col_types = FALSE)
# Añadimos fechas
```

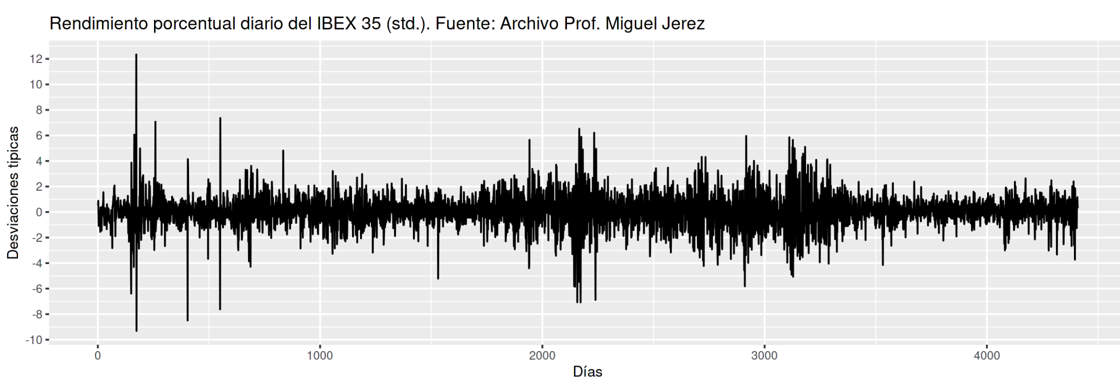
```r
TemperaturaRetiro_df$Time <- as.yearmon(1985 + seq(0, nrow(TemperaturaRetiro_df)-1)/12)

P <- ggplot(TemperaturaRetiro_df, aes(Time, TemperaturaMedia))
P <- P + geom_line() # + geom_point()
P <- P + scale_x_continuous(breaks = scales::pretty_breaks(n = 25))
P <- P + labs(y = "Grados Celsius", x = "Años")
P <- P + ggtitle("Temperatura media mensual en el Parque del Retiro. Fuente: Comunidad de Madrid")
P
```



4. Rendimiento porcentual diario del IBEX 35 (std)

```r
IBEX35_ts = as.ts( read.csv.zoo("datos/IBEX35.csv",
                                strip.white = TRUE))
P <- autoplot(IBEX35_ts) + scale_y_continuous(breaks = scales::pretty_breaks(n = 12))
p <- P + labs(y = "Desviaciones típicas", x = "Días")
p <- P + ggtitle("Rendimiento porcentual diario del IBEX 35 (std.). Fuente: Archivo Prof. Miguel Jerez")
p
```

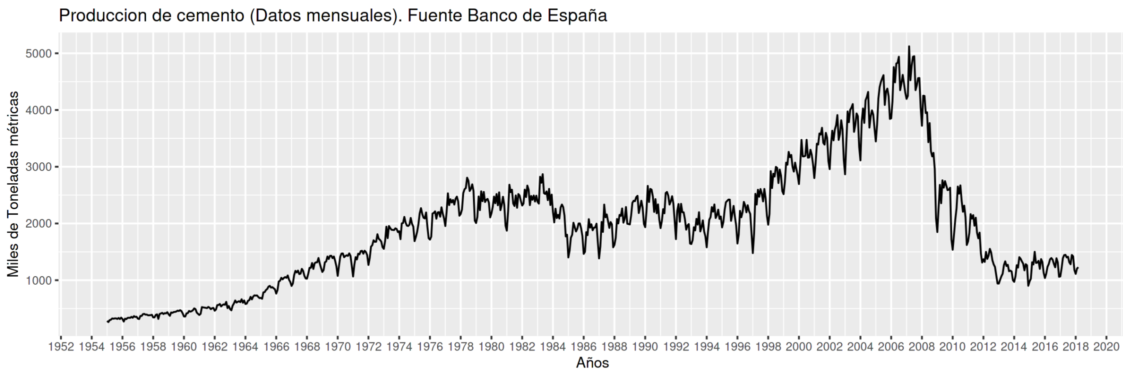


- Datos centrados y estandarizados, i.e. el eje vertical está en desviaciones típicas.
- Los *volatility clustering* son característicos de series financieras de alta frecuencia.

5. Producción de cemento

```r
ProduccionCemento_df <- read_csv("datos/ProduccionCemento.csv",
                        show_col_types = FALSE)
fmt <- "%YM%m"
ProduccionCemento_df$Time <- as.yearmon(ProduccionCemento_df$obs, format = fmt)
# head(ProduccionCemento_df,3)
P <- ggplot(ProduccionCemento_df, aes(Time, ProduccionCemento))
```

```r
P <- P + geom_line() # + geom_point()
P <- P + scale_x_continuous(breaks = scales::pretty_breaks(n = 25))
P <- P + labs(y = "Miles de Toneladas métricas", x = "Años")
P <- P + ggtitle("Producción de cemento (Datos mensuales). Fuente Banco de España")
P
```



1.1. Correlación serial vs muestreo aleatorio simple

Con datos de

sección cruzada solemos asumir que el muestreo es aleatorio simple

- i.e., los datos son realizaciones de variables aleatorias i.i.d.

series temporales dicha asunción resulta generalmente errónea

- con frecuencia el nivel esperado (o la volatilidad) parece cambiar con t
- con frecuencia hay dependencia temporal (correlación serial).

Ejemplo: no parece aceptable asumir que $ProdCemento_{1960M01}$ se distribuye igual que $ProdCemento_{2000M04}$ (ni que sea independiente de $ProdCemento_{1959M01}$).

Veamos por qué esto genera dificultades…

Consideremos el proceso estocástico

$$\boldsymbol{X} = (X_t \mid t = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Caracterizar su distribución conjunta (todos los momentos) es demasiado ambicioso.

Así que, tentativamente, vamos a fijarnos *solo* en los dos primeros momentos:

$$E(X_t) = \mu_t \quad \text{y} \quad Cov(X_t, X_k) = E\big[(X_t - \mu_t)(X_k - \mu_k)\big] = \gamma_{t,k}; \quad t, k \in \mathbb{Z}$$

(si $k = t$ entonces $\gamma_{t,t} = Var(X_t) = \sigma_t^2$).

Si el proceso $\boldsymbol{X}$ fuera gaussiano, conocer estos *parámetros* bastaría para caracterizar la distribución conjunta. Pero aún así…

- necesitaríamos para cada X_t una muestra suficiente para estimar los parámetros
  - pero en una serie temporal $\boldsymbol{x}$ tenemos una sola realización de cada X_t.
- Además… para cada variable aleatoria X_t hay infinitos parámetros.

1.2. Simplificación del escenario

Si $\boldsymbol{X}$ es débilmente estacionario se reduce drásticamente el número de parámetros:

$$E(X_t) \quad = \mu \tag{1}$$
$$Cov(X_t, X_{t-k}) \quad = \gamma_k \tag{2}$$

El desafío para el analista es (y nótese el abuso de lenguaje)

primero transformar los datos para lograr que sean "***estacionarios***".

- (Algo vimos en la lección 1))

después transformar los datos estacionarios en "***ruido blanco***"

- (Es lo que iniciaremos en esta lección y las siguientes)

Todo este proceso constituye la especificación y ajuste de un modelo a la serie temporal.

Antes de atacar los temas de especificación y ajuste de modelos, debemos estudiar un poco los procesos estocásticos débilmente estacionarios que vamos a utilizar.

2. Procesos estocásticos de segundo orden

El ambiente natural para estudiar las propiedades de segundo orden de una colección de variables aleatorias es el espacio de variables aleatorias X definidas en un espacio de probabilidad tales que

$$E(X) = 0 \quad \text{y} \quad E(X^2) < \infty$$

donde E es el operador esperanza. Denotaremos este espacio con H.

2.1. Un poco de geometría

El espacio, dotado de producto escalar y norma

$$\langle X \mid Y \rangle = E(XY), \qquad \|X\| = \sqrt{E(X^2)}, \qquad X, Y \in H,$$

es un espacio de Hilbert,

Nótese que como las variables de H tienen esperanza cero, el producto escalar entre $X, Y \in H$ también es

$$\langle X \mid Y \rangle = Cov(X, Y).$$

Por tanto, en este espacio H la noción geométrica de ortogonalidad coincide con la noción estadística de *no correlación*. Por tanto, en este contexto los términos producto escalar, covarianza y esperanza del producto serán intercambiables (esto deja de ser cierto cuando hay variables aleatorias con esperanza no nula).

Una colección de variables aleatorias pertenecientes a H

$$\boldsymbol{X} = (X_t \mid t \in \mathbb{Z}) \;\text{ con }\; X_t \in H$$

se denomina *proceso estocástico de segundo orden*.

Si $\boldsymbol{Y} = (Y_t \mid t \in \mathbb{Z})$ es tal que $E(Y_t) = \mu \neq 0$, entonces $\boldsymbol{Y}$ no es de segundo orden.

Pero basta restar μ de cada Y_t para tener un proceso $(\boldsymbol{Y} - \mu\mathbf{1})$ de segundo orden.

Por ello siempre asumiremos (sin pérdida de generalidad) *que las variables aleatorias de los procesos estocásticos de esta lección* (y la siguiente) *tienen esperanza cero.*

2.2. Primeros momentos de procesos estocásticos de segundo orden

Si $E(X_t) < \infty$ para $t \in \mathbb{Z}$, entonces $E(\boldsymbol{X})$ es la secuencia

$$E(\boldsymbol{X}) = (E(X_t) \mid t \in \mathbb{Z}) = \sum\nolimits_{t\in\mathbb{Z}} E(X_t)z^t = (\ldots,\ E(X_{-1}),\ E(X_0),\ E(X_1), \ldots)$$

Si $\boldsymbol{X}$ tiene segundos momentos finitos, la secuencia de autocovarianzas de orden k es

$$\begin{aligned}\Big(Cov(X_t, X_{t-k})\Big| t \in \mathbb{Z}\Big) =&(\gamma_{_{k,t}} \mid t \in \mathbb{Z})\\ =&(\ldots,\, \gamma_{_{k,-1}},\, \gamma_{_{k,0}},\, \gamma_{_{k,1}},\, \gamma_{_{k,2}}, \ldots); \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(la secuencia solo contiene la covarianza de orden $k\ldots$ pero en distintos instantes t).

Así, para cada par (k, t), tenemos la covarianza $\gamma_{k,t}$ entre X_t y X_{t-k}. Por tanto, en general, tenemos una esperanza para cada t y una covarianza de orden k para cada t. Dado que t recorre todos los números enteros, ¡esto son muchos momentos! Por eso necesitamos reducir el número de parámetros restringiéndonos a procesos estocásticos débilmente estacionarios.

2.3. Procesos estocásticos (débilmente) estacionarios y la ACF

Un proceso estocástico de segundo orden $\boldsymbol{X}$ se dice que es *débilmente estacionario* (estacionario en covarianza o, sencillamente, estacionario) si $E(X_t) = \mu$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ y la covarianza entre X_s y X_t solo depende de la diferencia $s - t$ para todo $s, t \in \mathbb{Z}$.

En tal caso, definimos la función de autocovarianzas como:

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_k \mid k \in \mathbb{Z}) = (\ldots,\, \gamma_{-1},\, \gamma_0,\, \gamma_1,\, \gamma_2, \ldots) \ = \ \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k.$$

(nótese que esta secuencia sí incluye covarianzas de todos los órdenes).

Y se denomina matriz de autocovarianzas de $\boldsymbol{X}$ a la matriz simétrica

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Tanto la secuencia $\boldsymbol{\gamma}$ como la matriz $\boldsymbol{\Gamma}$ son *definidas positivas*; es decir, para todos los enteros $n \geq 1$ y escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \gamma_{i-j} \geq 0$$

ya que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j Cov(X_i, X_j) = Cov\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i,\ \sum_{j=1}^{n} c_j X_j\right) = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \mid \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \right\|^2 \geq 0.$$

Esto es equivalente a que las submatrices principales de $\boldsymbol{\Gamma}$ son definidas positivas.

Es más, una secuencia $\boldsymbol{\gamma}$ es definida positiva si y solo si existe un espacio de Hilbert H y un proceso estocástico estacionario $\boldsymbol{X}$ con $X_t \in H$ tales que $\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k})$ para todo $t, k \in \mathbb{Z}$ (Kolmogorov, 1941).

Propiedades de la función de autocovarianzas $\boldsymbol{\gamma}$ (ACF):

- $\gamma_0 \geq 0$
- $\boldsymbol{\gamma}$ es definida positiva; y por tanto,
  - $\boldsymbol{\gamma}$ es simétrica: $\gamma_k = \gamma_{-k}$
  - $\boldsymbol{\gamma}$ es acotada: $|\gamma_k| \leq \gamma_0$

Y, si $\gamma_0 > 0$, llamamos *función de autocorrelación* (ACF) a la secuencia: $\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\gamma_0}(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\gamma_k}{\gamma_0} z^k$.

3. Notación: convolución y el operador retardo

Los procesos estocásticos se pueden sumar elemento a elemento y se pueden multiplicar por escalares. Si $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son dos procesos estocásticos y $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = (X_t + Y_t \mid t \in \mathbb{Z}) \qquad \text{y} \qquad a\boldsymbol{X} = \big(a(X_t) \mid t \in \mathbb{Z}\big).$$

El conjunto de procesos estocásticos con la suma y el producto por escalares es un espacio vectorial.

Sea $\boldsymbol{a}$ una secuencia de números y sea $\boldsymbol{X}$ un proceso estocástico tales que la suma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X_{t-k}$$

converge para todo t. Entonces:

Definimos el producto convolución $(*)$ de $\boldsymbol{a}$ con $\boldsymbol{X}$ como el proceso estocástico:

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{X} = \left(\sum_{r+s=t} a_r X_s \,\middle|\, t \in \mathbb{Z} \right)$$

es decir

$$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{X})_t = \sum_{r+s=t} a_r X_s, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, cada elemento de $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{X})$ es una combinación de variables aleatorias de $\boldsymbol{X}$

Podemos aplicar el operador B sobre los elementos de un proceso estocástico $\boldsymbol{X}$.

$$\mathsf{B}X_t = X_{t1}, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z}.$$

Aplicando el operador B repetidamente tenemos

$$\mathsf{B}^k X_t = X_{tk}, \quad \text{para } t, z \in \mathbb{Z}$$

Así, para el polinomio $\boldsymbol{a}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$, y el proceso estocástico $\boldsymbol{Y}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(\mathsf{B})Y_t &= (a_0 + a_1\mathsf{B} + a_2\mathsf{B}^2 + a_3\mathsf{B}^3)Y_t \\ &= a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + a_3 Y_{t-3} \\ &= (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{Y})_t, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Y en general, si la suma $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k Y_{t-k}$ converge para todo t, entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(\mathsf{B})Y_t &= (\cdots + a_{-2}\mathsf{B}^{-2} + a_{-1}\mathsf{B}^{-1} + a_0 + a_1\mathsf{B} + a_2\mathsf{B}^2 + \cdots)Y_t \\ &= \cdots + a_{-2}Y_{t+2} + a_{-1}Y_{t+1} + a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \cdots \\ &= (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{Y})_t, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

4. Ejemplos de procesos (débilmente) estacionarios

4.1. Proceso de ruido blanco

Una secuencia $\boldsymbol{U} = (U_t \mid t \in \mathbb{Z})$ de variables aleatorias **incorreladas** y tales que

$$E(U_t) = 0 \quad \text{ y } \quad Var(U_t) = E(U_t^2) = \sigma^2$$

para $t \in \mathbb{Z}$ y $0 < \sigma^2 < \infty$ se llama *proceso de ruido blanco.* $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$.

Al ser variables aleatorias incorreladas, su función de autocovarianzas es

$$\boldsymbol{\gamma}(z) \;=\; \sigma^2 z^0 \;=\; (\ldots, 0, 0, \sigma^2, 0, 0, \ldots)$$

- Es el proceso estacionario (no trivial) más sencillo.
- Este proceso es el pilar sobre el que definiremos el resto de ejemplos.

4.2. Procesos lineales

Sea $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y sea $\boldsymbol{b} \in \ell^2$; es decir, una secuencia de cuadrado sumable $\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j^2 < \infty$.

Denominamos *proceso lineal* al proceso estocástico $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{U}$ cuyos elementos son

$$X_t \;=\; (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{U})_t \;=\; \boldsymbol{b}(\mathsf{B}) U_t \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j U_{t-j}; \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

$\boldsymbol{b}(\mathsf{B})$ se denomina *función de transferencia* del filtro lineal que relaciona X_t con U_t.

El proceso está bien definido puesto que la serie infinita converge en norma por el Teorema de Riesz-Fisher (Pourahmadi, M. 2001, Teorema 9.7). Y el proceso es estacionario porque, usando la continuidad de los productos escalares (Pourahmadi, M. 2001, Teorema 9.2),

$$\begin{aligned}
\gamma_k = Cov(X_{t+k}, X_t) = \langle X_{t+k} \mid X_t \rangle &= \lim_{m,n\to\infty} \left\langle \sum_{i=-m}^{m} b_i U_{t+k-i} \;\Big|\; \sum_{j=-n}^{n} b_j U_{t-j} \right\rangle \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_i b_j \langle U_{t+k-i} \mid U_{t-j} \rangle \\
&= \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_i b_j \delta_{t+k-i,t-j} \\
&= \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i b_{i+k} \;=\; \sigma^2 (\boldsymbol{b}(z) * \boldsymbol{b}(z^{-1}))_k
\end{aligned}$$

que solo depende de k (en la tercera línea, $\delta_{p,q}$ es la delta de Kronecker; y en la cuarta hemos usado la última ecuación de la Lección 4).

El proceso lineal es *"causal"* si además $\boldsymbol{b}$ es una serie formal (i.e., $cogrado(\boldsymbol{b}) \geq 0$)

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j U_{t-j}; \qquad t \in \mathbb{Z}$$

(pues cada X_t es una suma de variables "*del presente y/o el pasado*").

La clase de **procesos lineales causales** incluye muchas e importantes subclases de procesos, algunas de las cuales son objeto principal de estudio de este curso.

4.2.1. Media móvil infinita. MA(∞)

Sea $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y sea $\boldsymbol{\psi} \in \ell^2$ una serie formal con infinitos términos NO nulos; entonces el proceso estocástico $\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{U}$, cuyos elementos son

$$X_t \;=\; (\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{U})_t \;=\; \boldsymbol{\psi}(B)U_t \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j U_{t-j}; \qquad t \in \mathbb{Z}$$

se denomina proceso de *media móvil infinita* MA(∞).

Algunas clases de procesos lineales causales tienen una representación parsimoniosa, pues basta un número finito de parámetros para representarlos completamente. Por ejemplo, cuando $\boldsymbol{\psi}$ tiene un número finito de términos no nulos…

4.2.2. Proceso de media móvil de orden q. MA(q)

Sea $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y sea $\boldsymbol{\theta}$ un polinomio de grado q con $\theta_0 = 1$; entonces el proceso estocástico $\boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U}$, cuyos elementos son

$$X_t \;=\; (\boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U})_t \;=\; \boldsymbol{\theta}(B)U_t \;=\; \sum_{j=0}^{q} \theta_j U_{t-j}; \qquad t \in \mathbb{Z}$$

se denomina proceso de *media móvil* MA(q).

Es decir, si $\boldsymbol{\theta} = (1 - \theta_1 z - \cdots - \theta_q z^q)$:

$$X_t = U_t - \theta_1 U_{t-1} - \cdots - \theta_q U_{t-q}.$$

Hay otros procesos lineales con representación parsimoniosa.

4.2.3. Proceso autorregresivo de orden p. AR(p)

Sea $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$, se denomina *proceso autorregresivo de orden p* a aquel proceso estocástico *estacionario* $\boldsymbol{X}$ que es la solución de la siguiente ecuación en diferencias

$$\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{\phi}$ un polinomio de grado p con $\phi_0 = 1$;

Por tanto,

$$(\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{X})_t = \boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})X_t = \sum_{j=0}^{p} \phi_j X_{t-j} = U_t.$$

Si $\boldsymbol{\phi} = (1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p)$ entonces $\boldsymbol{X} = (X_t \mid t \in \mathbb{Z})$ es solución de la ecuación:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_q X_{t-q} = U_t.$$

El problema con la anterior definición es que la ecuación $\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}$ no tiene solución única (y en algunos casos ninguna solución es estacionaria). Despejemos $\boldsymbol{X}$ para verlo.

Multiplicando ambos lados de la ecuación por una inversa de $\boldsymbol{\phi}$ tenemos

$$\boldsymbol{X} = inversa(\boldsymbol{\phi}) * \boldsymbol{U}.$$

Y si denotamos la secuencia $inversa(\boldsymbol{\phi})$ con $\boldsymbol{a}$ entonces

$$X_t = \boldsymbol{a}(\mathsf{B})U_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j U_{t-j}.$$

Pero... ¿Qué secuencia $\boldsymbol{a}$ usamos como inversa de $\boldsymbol{\phi}$? Recuerde que hay infinitas y la mayoría no son sumables (si el polinomio $\boldsymbol{\phi}$ tiene raíces unitarias ninguna lo es).

En tal caso la expresión $\boldsymbol{a}(\mathsf{B})U_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j U_{t-j}$ carece de sentido (pues no converge).

Requisitos sobre el polinomio autorregresivo $\boldsymbol{\phi}$. Para que el proceso AR exista y sea:

1. lineal y estacionario, exigiremos que $\boldsymbol{\phi}$ no tenga raíces de módulo 1.
   Entonces existe una única inversa absolutamente sumable: $\boldsymbol{\phi}^{-1} \in \ell^1 \subset \ell^2$.
   La inversa $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\phi}^{-1}$ corresponde a la única solución *estacionaria* de $\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}$. (Si $\boldsymbol{\phi}$ tuviera raíces de módulo 1 no existiría ni $\boldsymbol{\phi}^{-1}$, ni la solución estacionaria).

$$X_t = \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathsf{B})U_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j U_{t-j}$$

2. causal exigiremos que las raíces de $\boldsymbol{\phi}$ sean mayores que 1 en valor absoluto (raíces fuera del círculo unidad): $\boldsymbol{\phi}^{-1} = \boldsymbol{\phi}^{-\triangleright}$ (**serie formal** $\in \ell^1 \subset \ell^2$).

$$X_t = \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathsf{B})U_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j U_{t-j}$$

(¡de nuevo un proceso lineal causal!)

El siguiente modelo lineal es una combinación (o generalización) de los dos anteriores.

4.2.4. Proceso autorregresivo de media móvil. ARMA(p,q)

Sea $\boldsymbol{U} \sim WN(0,\sigma^2)$, se denomina *proceso autorregresivo de media móvil* (p,q) al proceso estocástico estacionario $\boldsymbol{X}$ que es la solución de la ecuación en diferencias:

$$\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U}$$

donde el polinomio *autorregresivo* $\boldsymbol{\phi}$ tiene grado p con $\phi_0 = 1$ y con todas sus raíces fuera del círculo unidad (*por los motivos anteriormente vistos*); y el polinomio *de media móvil* $\boldsymbol{\theta}$ es de grado q con $\theta_0 = 1$;

$$\text{es decir,} \qquad \boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\phi}} * \boldsymbol{U}; \qquad \text{donde } \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\phi}} \equiv \boldsymbol{\phi}^{-1} * \boldsymbol{\theta}$$

Tanto $\boldsymbol{\phi}^{-1}$ como $\boldsymbol{\theta}$ son series formales absolutamente sumables y como ℓ^1 y las series formales son anillos, $\boldsymbol{\phi}^{-1} * \boldsymbol{\theta} \equiv \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\phi}} \in \ell^1$ también es una serie formal absolutamente sumable (y por tanto de cuadrado sumable). Consecuentemente el proceso estocástico es un proceso lineal causal.

$$X_t = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\phi}}(\mathsf{B})U_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j U_{t-j}$$

donde $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\phi}^{-1} * \boldsymbol{\theta}$.

4.2.5. Proceso autorregresivo de media móvil con media no nula

Consideremos un proceso $\boldsymbol{Y}$ con media distinta de cero, es decir,

$$E(Y_t) = \mu \neq 0$$

y definamos la secuencia constante $\boldsymbol{\mu} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu z^j = (\dots, \mu, \mu, \mu, \dots)$.

Decimos que $\boldsymbol{Y}$ es un proceso ARMA(p, q) con media distinta de cero si $\boldsymbol{X}$ es ARMA(p, q)

$$\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}$ es evidentemente un proceso de media cero. Por tanto

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi} * (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}) =& \boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U} \\
\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{\mu} =& \boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U} \\
\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{Y} =& \boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U}
\end{aligned}$$

Es decir, si $\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})$ es $1 - \phi_1\mathsf{B} - \phi_2\mathsf{B}^2 - \cdots - \phi_p\mathsf{B}^p$, entonces

$$\boldsymbol{\phi}(B)Y_t = c + \boldsymbol{\theta}(B)U_t$$

donde

$$c = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)\mu$$

y donde $\mu = E(Y_t)$, es un proceso autorregresivo de media móvil ARMA(p, q) *con media no nula.*

5. Primeros momentos de procesos lineales causales

5.1. Esperanza y autocovarianzas de un proceso lineal causal

Sea $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{U}$, donde $\boldsymbol{\psi}$ es una serie formal de cuadrado sumable ($\boldsymbol{\psi} \in \ell^2$) y donde $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$. Recordando que la convolución es una operación lineal:

$$E(\boldsymbol{X}) = E(\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{\psi} * E(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

Consecuentemente, la covarianza de orden k para cada X_t es

$$\begin{aligned}
\gamma_{k,t} =& E\Big[(\boldsymbol{\psi}(\mathsf{B})X_t) \cdot (\boldsymbol{\psi}(\mathsf{B})X_{t-k})\Big] \\
=& E\Big[(\psi_0 U_t + \psi_1 U_{t-1} + \psi_2 U_{t-2} \cdots)(\psi_0 U_{t-k} + \psi_1 U_{t-k-1} + \psi_2 U_{t-k-2} \cdots)\Big] \\
=& \sigma^2 \sum\nolimits_{j\in\mathbb{Z}} \psi_{j+k}\psi_j \qquad \text{ya que } E(U_h U_j) = 0 \text{ si } j \neq h,
\end{aligned}$$

que no depende de t ($\boldsymbol{X}$ es estacionario). Es más, por la última ecuación de la lección 4

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum\nolimits_{j\in\mathbb{Z}} \psi_{j+k}\psi_j = \sigma^2 \big(\boldsymbol{\psi}(z) * \boldsymbol{\psi}(z^{-1})\big)_k \qquad \text{para } k \in \mathbb{Z}.$$

Y, por tanto

$$\boldsymbol{\gamma} = \sigma^2 \boldsymbol{\psi}(z) * \boldsymbol{\psi}(z^{-1}) \tag{3}$$

con grado igual al grado de $\boldsymbol{\psi}$ y cogrado igual a menos el grado de $\boldsymbol{\psi}$.

5.2. Covarianza cruzada entre dos procesos lineales causales

Sean $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{U}$, donde $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\psi}$ son series formales de cuadrado sumable y donde $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$.

Entonces la covarianza cruzada (de orden $k \in \mathbb{Z}$) entre W_t e Y_{t-k} es

$$\begin{aligned} E\Big[W_t \cdot Y_{t-k}\Big] =& E\Big[(\boldsymbol{\theta}(\mathsf{B})U_t) \cdot (\boldsymbol{\psi}(\mathsf{B})U_{t-k})\Big] \\ =& E\Big[(\theta_0 U_t + \theta_1 U_{t-1} + \theta_2 U_{t-2} \cdots)(\psi_0 U_{t-k} + \psi_1 U_{t-k-1} + \psi_2 U_{t-k-2} \cdots)\Big] \\ =& \sigma^2 \sum\nolimits_{j \in \mathbb{Z}} \theta_{j+k} \psi_j \qquad \text{ya que } \; E(U_h U_j) = 0 \; \text{ si } \; j \neq h \end{aligned}$$

que tampoco depende de t. Es más, por la última ecuación de la lección 4

$$\gamma_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{Y}}(k) = \sigma^2 \sum\nolimits_{j \in \mathbb{Z}} \theta_{j+k} \psi_j = \sigma^2 \big(\boldsymbol{\theta}(z) * \boldsymbol{\psi}(z^{-1})\big)_k \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Es decir...

Repitiendo los mismos pasos que en el caso de la autocovarianza, llegamos a que la función de covarianzas cruzadas es la secuencia

$$\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{Y}} = \sigma^2 \boldsymbol{\theta}(z) * \boldsymbol{\psi}(z^{-1}) \tag{4}$$

con grado igual al grado de $\boldsymbol{\theta}$ y cogrado igual a menos el grado de $\boldsymbol{\psi}$.

5.3. Las Ecuaciones de Yule-Walker para un AR(p) estacionario

Por una parte (lado izquierdo):

Si $\boldsymbol{X}$ es un proceso (débilmente) estacionario con $E(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{\phi}$ es una serie formal absolutamente sumable; entonces para $t, k \in \mathbb{Z}$

$$E\Big[\Big(\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})X_t\Big) \cdot X_{t-k}\Big] \quad = \quad \boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})E(X_t \cdot X_{t-k}) \quad = \quad \boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})\gamma_k \tag{5}$$

que no depende de t, por ser $\boldsymbol{X}$ es un proceso (débilmente) estacionario.

Por otra parte (lado derecho):

Si $\boldsymbol{X}$ tiene representación $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{U}$ donde $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y $\boldsymbol{\psi} \in \ell^2$ es una serie formal con $\psi_0 = 1$; es decir, si es un proceso lineal causal

$$X_t = U_t + \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \psi_j U_{t-j},$$

entonces para $t, k \in \mathbb{Z}$

$$E[U_t \cdot X_{t-k}] = E\Big[U_t\Big(U_{t-k} + \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \psi_j U_{t-k-j}\Big)\Big] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{cuando } k = 0 \\ 0 & \text{cuando } k \neq 0 \end{cases} \tag{6}$$

Sea un AR(p) estacionario: $\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})X_t = U_t$ donde $\boldsymbol{\phi}(z) = 1 - \phi_1 z^1 - \cdots - \phi_p z^p$. Multiplicando por X_{t-k} y tomando esperanzas:

$$E\Big[\Big(\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})X_t\Big) \cdot X_{t-k}\Big] = E[U_t \cdot X_{t-k}]$$

para $k = 0$: (por 5 y 6)

$$\boxed{\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})\gamma_0 = \sigma^2} \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 - \phi_1\gamma_1 - \cdots - \phi_p\gamma_p = \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = \gamma_0 - \sum\nolimits_{j=1}^{p} \phi_j \gamma_j.$$

Dividiendo por γ_0 (y recordando que $\rho_0 = 1$):

$$\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})\rho_0 = \frac{\sigma^2}{\gamma_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{\phi(\mathsf{B})\rho_0}} \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j \rho_j}.$$

para $k > 0$: (por 5 y 6)

$$\boxed{\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})\gamma_k = 0} \quad \Rightarrow \quad \gamma_k - \phi_1\gamma_{k-1} - \cdots - \phi_p\gamma_{k-p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_k = \sum\nolimits_{j=1}^{p} \phi_j \gamma_{k-j}.$$

Dividiendo por γ_0:

$$\boxed{\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})\rho_k = 0} \quad \Rightarrow \quad \rho_k - \phi_1\rho_{k-1} - \cdots - \phi_p\rho_{k-p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_k = \sum\nolimits_{j=1}^{p} \phi_j \rho_{k-j}.$$

Por tanto, la estructura autorregresiva del proceso impone que las autocovarianzas (y las autocorrelaciones) verifiquen las ecuaciones de Yule-Walker.

5.4. Función de autocovarianzas para un ARMA(p, q)

Sea un ARMA(p, q) estacionario: $\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})X_t = \boldsymbol{\theta}(\mathsf{B})U_t$ donde $\boldsymbol{\phi}$ y $\boldsymbol{\theta}$ no tienen raíces comunes. Multiplicando por X_{t-k}, tomando esperanzas y sustituyendo X_{t-k} por su representación MA(∞), donde $\boldsymbol{\psi} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\phi}}$:

$$\underbrace{E\Big[\Big(\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})X_t\Big) \cdot X_{t-k}\Big]}_{\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})\gamma_k \text{ (por 5)}} = E\Big[\Big(\boldsymbol{\theta}(\mathsf{B})U_t\Big) \cdot X_{t-k}\Big] = \underbrace{E\Big[\Big(\boldsymbol{\theta}(\mathsf{B})U_t\Big) \cdot \Big(\boldsymbol{\psi}(\mathsf{B})U_{t-k}\Big)\Big]}_{\gamma_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{Y}}(k)}$$

Donde hemos usando (5) y renombrando $\boldsymbol{\theta}(\mathsf{B})U_t = \boldsymbol{W}$ y $\boldsymbol{\psi}(\mathsf{B})U_t = \boldsymbol{Y}$. Así:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})\gamma_k &= \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{Y}}(k) \\ &= \sigma^2\Big(\boldsymbol{\theta}(z) * \boldsymbol{\psi}(z^{-1})\Big)_k && \text{por (4)} \end{aligned}$$

Y como $\boldsymbol{\theta}(z) * \boldsymbol{\psi}(z^{-1})$ tiene grado q y cogrado $-\infty$

$$\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})\gamma_k = \begin{cases} 0 & k > q \quad \text{(como en un AR)} \\ \sigma^2\Big(\boldsymbol{\theta}(z) * \boldsymbol{\psi}(z^{-1})\Big)_k & k \leq q \quad \text{(que depende de } \boldsymbol{\theta} \text{ y } \boldsymbol{\phi}) \end{cases} \tag{7}$$