Contents

Econometría Aplicada. Lección 1

Marcos Bujosa

June 18, 2024

Carga de algunos módulos de python

```python
# Para trabajar con los datos y dibujarlos necesitamos cargar algunos módulos de python
import numpy as np # linear algebra
import pandas as pd # data processing, CSV file I/O (e.g. pd.read_csv)
import matplotlib as mpl
import matplotlib.pyplot as plt   # data visualization
mpl.rc('text', usetex=True)
mpl.rc('text.latex', preamble=r'\usepackage{amsmath}')
import dataframe_image as dfi
```

```python
from sympy.printing.preview import preview

def repr_png(tex, ImgFile):
    preamble = "\\documentclass[preview]{standalone}\n" \
        "\\usepackage{booktabs,amsmath,amsfonts}\\begin{document}"
    preview(tex, filename=ImgFile, viewer='file', preamble=preamble, dvioptions=['-D','250'])
    #return open(ImgFile,'rb').read()
```

1 Procesos estocásticos y datos de series temporales

Proceso estocástico es una secuencia de variables aleatorias X_t

$$\boldsymbol{X} = \{X_t \mid t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\};$$

donde el conjunto de índices t recorre el conjunto de números enteros ($\mathbb{Z}$).

Serie temporal es una secuencia de datos tomados a lo largo del tiempo

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

- Consideraremos cada dato x_t como una *realización de una variable aleatoria* X_t.
- Consecuentemente, consideraremos que una *serie temporal* es una *realización de un tramo* de un proceso estocástico:

$$(x_1, x_2, \ldots x_n) \text{ es una realización de } \{X_t \mid t = 1, 2, \ldots n\}.$$

1.1 Datos de series temporales vs datos de sección cruzada

Series temporales Corresponden a mediciones de un mismo objeto a lo largo del tiempo. El índice indica el instante de cada medición. Consecuentemente, el orden temporal de los datos podría ser fundamental para explicar cada uno de ellos.

- El motivo es que frecuentemente la medición en un instante de tiempo está relacionada con otras mediciones próximas en el tiempo.
- Esto presupone que en el proceso estocástico subyacente, $\boldsymbol{X} = \{X_t\}$, las variables aleatorias no son independientes entre sí.

Sección cruzada el índice NO es cronológico. Cada índice es solo una *etiqueta* (asignada arbitrariamente) que identifica al individuo, empresa, objeto, etc. que ha sido medido.

- Por tanto, *el orden en el que aparecen los datos es irrelevante.*
- Consecuentemente, conocer únicamente el índice de un dato no permite deducir nada respecto de cualquier otro dato.

1.2 El desafío

El análisis de *series temporales* trata sobre la inferencia estadística de muestras que **frecuentemente NO podemos asumir que sean realizaciones** de variables aleatorias *i.i.d.* (*independientes e idénticamente distribuidas*).

Además,

- Aunque el marco ideal es que la serie temporal analizada "**sea estacionaria**"
(*abuso del lenguaje que expresa que podemos asumir que la serie es una realización de un proceso estocástico estacionario*)
- lo habitual es que, por distintos motivos, **NO lo sea**

El desafío para el analista es

primero transformar los datos para lograr que sean "***estacionarios***"

y después transformar los datos estacionarios en una secuencia de "**datos *i.i.d***"
(*nuevo abuso del lenguaje que expresa que podemos asumir que los datos son realizaciones de variables aleatorias i.i.d.*)

2 Estacionariedad

El mayor objetivo del *análisis de series temporales* es inferir la distribución de un proceso $\boldsymbol{X} = \{X_t\}$ usando una muestra (serie temporal) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$. Así podremos

Predecir datos futuros

Controlar datos futuros

Pero esto es casi imposible si los datos son inestables o caóticos a lo largo del tiempo

Por tanto, algún tipo de <u>estabilidad</u> o <u>estacionariedad</u> es necesaria.

2.1 Estacionariedad en sentido débil

Un proceso estocástico $\boldsymbol{X} = \{X_t\}$ se dice **estacionario** (*en sentido débil*) si para todo t y k de $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \mu & (1)\\ Cov(X_t, X_{t-k}) &= \gamma_k & (2) \end{aligned}$$

- La primera igualdad sugiere que las realizaciones de $\{X_t\}$ generalmente oscilan entorno a μ.
- La segunda sugiere que la variabilidad de las realizaciones de $\{X_t\}$ entorno a μ es constante, pues para el caso particular $k = 0$

$$Cov(X_t, X_{t-0}) = Var(X_t) = \gamma_0 \quad \text{para todo } t$$

  Es decir, γ_0 es la varianza común a todas las variables aleatorias del proceso.

2.2 Función de autocovarianzas y función de autocorrelación

- La secuencia $\{\gamma_k\}$ con $k \in \mathbb{Z}$ se denomina *función de autocovarianzas*
- La secuencia $\{\rho_k\}$ con $k \in \mathbb{Z}$, donde

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

  se denomina *función de autocorrelación* (ACF).

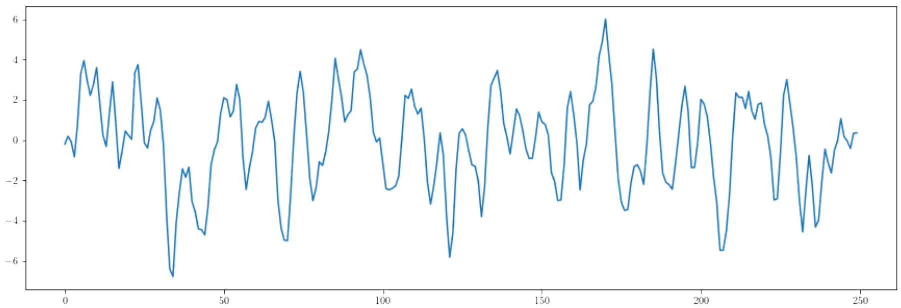
Debido a la estacionariedad, la correlación entre X_t y X_{t+k} no depende de t; tan solo depende de la distancia temporal k entre ambas variables.

Es más, la desigualdad de Chebyshev

$$P\left(|X_t - \mu| \geq c\sigma\right) \leq \frac{1}{c^2}, \quad \text{donde } \sigma = \sqrt{\gamma_0}$$

sugiere que para cualquier proceso estacionario (y un c grande), al pintar una realización, tan solo un pequeño porcentaje de los datos caerán fuera de la franja $(\mu - c\sigma, \mu + c\sigma)$.

```python
import statsmodels.api as sm
np.random.seed(12345)
arparams = np.array([.75, -.25])
maparams = np.array([.65, .35])
ar = np.r_[1, -arparams] # add zero-lag and negate
ma = np.r_[1, maparams] # add zero-lag
y = sm.tsa.arma_generate_sample(ar, ma, 250)
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.plot(y)
plt.savefig(image)   # "image" no definido. Comentar esta línea al ejecutar el notebook
```



3 Transformaciones de realizaciones de procesos estocásticos NO estacionarios

Un proceso estocástico $\mathbf{X} = \{X_t\}$ puede ser

NO estacionario en media porque $E(X_t)$ depende de t.

NO estacionario en covarianza porque $Cov(X_t, X_{t-k})$ depende de t.

Separar o distinguir ambos tipos de no estacionariedad no es sencillo.

Veamos ejemplos de series temporales para los que

- no podemos asumir que son realizaciones de procesos estocásticos estacionarios
- y algunos intentos de transformación para obtener datos "**estacionarios**" (*) (*recuerde que esta expresión, aunque extendida, es un abuso del lenguaje*).

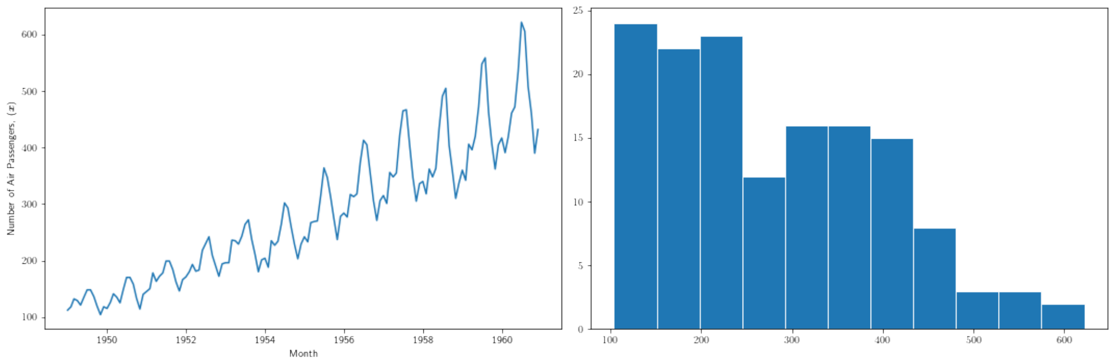
3.1 Internat. airline passengers: monthly totals in thousands. Jan 49 – Dec 60

Leemos los datos de un fichero `csv` y generamos un `dataframe` de pandas.

```
OrigData = pd.read_csv('./database/Datasets-master/airline-passengers.csv')
OrigData['Month']=pd.to_datetime(OrigData['Month'])
OrigData=OrigData.set_index(['Month'])
print(OrigData.head())
```

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots x_{114})$$

```
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(OrigData['Passengers'])
plt.xlabel("Month")
plt.ylabel(r"Number of Air Passengers, ($\boldsymbol{x}$)")
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.hist(OrigData['Passengers'], edgecolor='white', bins=11)
plt.tight_layout()
plt.savefig(image)   # "image" no definido. Comentar esta línea al ejecutar el notebook
```



Serie *"no estacionaria"* (*):

- La media crece de año en año
- La variabilidad estacional crece de año en año (fíjese en la diferencia entre el verano y el otoño de cada año)

3.1.1 Trasformación logarítmica de los datos

- Al aplicar la función logarítmica transformamos **monótonamente** los datos estabilizando la varianza cuando los valores son mayores que 0.567 (aprox.)
- ¡Pero ocurre lo contrario, pues se amplifica el valor absoluto, cuando los valores están entre 0 y 0.567! De hecho, $\lim_{x \to \infty} \ln(x) = -\infty$
- Además, *el logaritmo no está definido para valores negativos.*

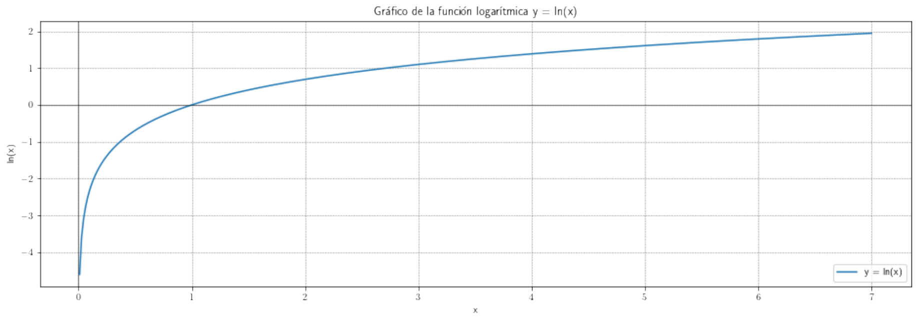
```python
# Definir el rango de valores para x (empezando desde un número positivo ya que log(0) no está definido)
x = np.linspace(0.01, 7, 400)  # Valores de 0.1 a 10

# Calcular y = log(x)
y = np.log(x)

# Crear el gráfico
plt.figure(figsize=(16, 5))
plt.plot(x, y, label='y = ln(x)')

# Añadir etiquetas y título
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('ln(x)')
plt.title('Gráfico de la función logarítmica y = ln(x)')
plt.axhline(0, color='black',linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black',linewidth=0.5)
plt.grid(color = 'gray', linestyle = '--', linewidth = 0.5)
plt.legend()

plt.savefig(image)   # "image" no definido. Comentar esta línea al ejecutar el notebook
```

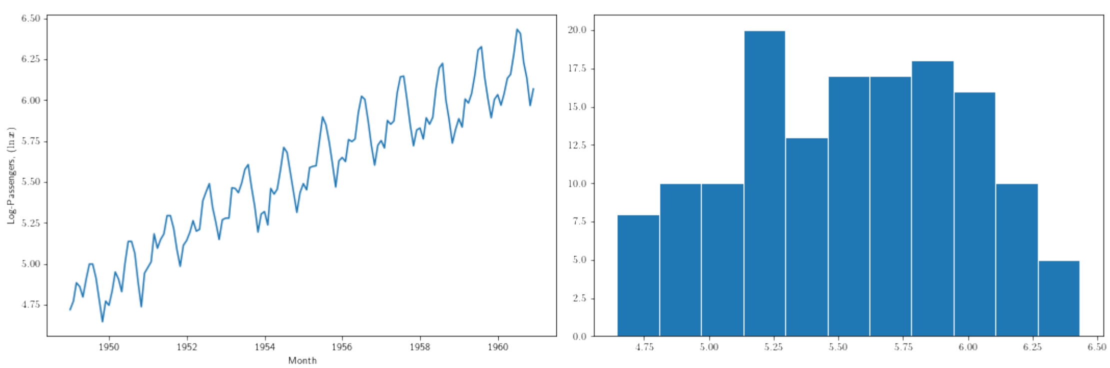


$$\ln \boldsymbol{x} = \Big(\ln(x_1), \ldots \ln(x_{114}) \Big)$$

Vamos a crear un nuevo **dataframe** con los datos originales y varias transformaciones de los datos

```python
TransformedData = OrigData.copy()
TransformedData['dataLog'] = np.log(OrigData['Passengers'])
TransformedData['dataLogDiff'] = TransformedData['dataLog'].diff(1)
TransformedData['dataLogDiffDiff12'] = TransformedData['dataLogDiff'].diff(12)
```

```python
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(TransformedData['dataLog'])
plt.xlabel("Month")
plt.ylabel(r"Log-Passengers, ($\ln\boldsymbol{x}$) ")
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.hist(TransformedData['dataLog'], edgecolor='white', bins=11)
plt.tight_layout()
plt.savefig(image)    # "image" no definido. Comentar esta línea al ejecutar el notebook
```



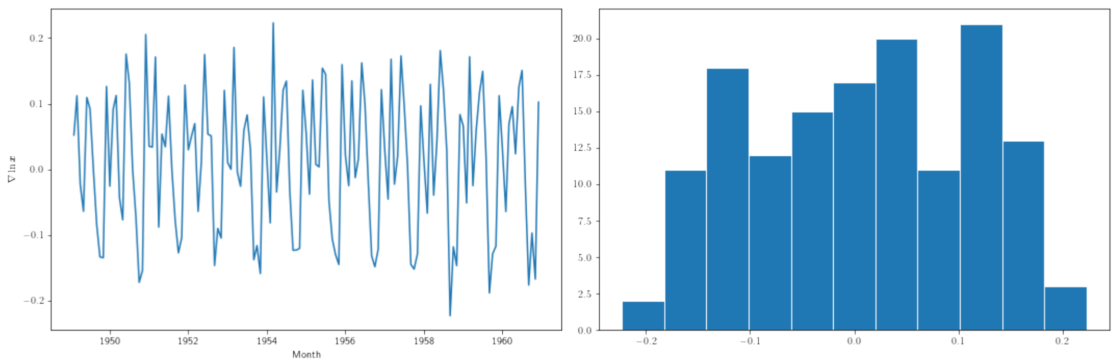
Ésta tampoco parece la realización de un proceso estocástico *estacionario*

- Ahora la variabilidad estacional parece mantenerse de año en año
- Pero la media sigue creciendo de año en año

3.1.2 Primera diferencia del logarítmo de los datos

$$\boldsymbol{y} = \nabla \ln \boldsymbol{x} = \Big(\big[\ln(x_2) - \ln(x_1)\big], \dots \; \big[\ln(x_{114}) - \ln(x_{113})\big] \Big)$$

```python
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(TransformedData['dataLogDiff'])
plt.xlabel("Month")
plt.ylabel(r"$\nabla\ln\boldsymbol{x}$")
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.hist(TransformedData['dataLogDiff'], edgecolor='white', bins=11)
plt.tight_layout()
plt.savefig(image)   # "image" no definido. Comentar esta línea al ejecutar el notebook
```



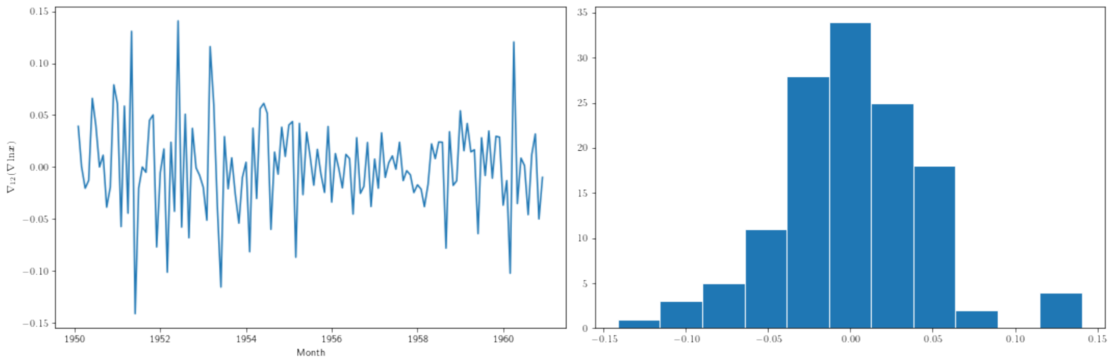
Esta serie tampoco parece *"estacionaria"* (*)

- Hay un componente periódico (de naturaleza estacional), debido a que hay pocos viajes en otoño y muchos en Navidad, Semana Santa y verano (i.e., el número esperado de viajeros parece cambiar en función del mes o estación del año).

3.1.3 Diferencia estacional de la primera diferencia del logarítmo de los datos

$$\boldsymbol{z} = \nabla_{12}(\nabla \ln \boldsymbol{x}) = \nabla_{12}(\boldsymbol{y}) = \Big((y_{13} - y_1), \dots \; (y_{113} - y_{101}) \Big)$$

```python
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(TransformedData['dataLogDiffDiff12'])
plt.xlabel("Month")
plt.ylabel(r"$\nabla_{12}(\nabla\ln\boldsymbol{x})$")
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.hist(TransformedData['dataLogDiffDiff12'], edgecolor='white', bins=11)
plt.tight_layout()
plt.savefig(image)   # "image" no definido. Comentar esta línea al ejecutar el notebook
```



Esta serie se aproxima más al aspecto de la realización de un proceso *estacionario*

- Aunque parece haber más varianza a principios de los 50 que a finales
- De propina, el histograma sugiere una distribución aproximadamente Gaussiana

3.2 Tasa logarítmica de crecimiento

```
START = 100
UnoPorCiento = lambda n0, t: n0 if t<=1 else 1.01 * UnoPorCiento(n0, t-1)
TasaLogCrecimiento = pd.DataFrame({'$y_t$':[UnoPorCiento(START,t+1) for t in range(10)]})
TasaLogCrecimiento['$\\frac{y_t-y_{t-1}}{y_{t-1}}$'] = TasaLogCrecimiento['$y_t$'].pct_change()
TasaLogCrecimiento['$\\ln y_t$'] = np.log(TasaLogCrecimiento['$y_t$'])
TasaLogCrecimiento['$\\nabla\\ln\\boldsymbol{y}$'] = TasaLogCrecimiento['$\\ln y_t$'] - TasaLogCrecimiento['$\\ln y_t$'].shift(
TasaLogCrecimiento['$\\frac{y_t-y_{0}}{y_{0}}$'] = TasaLogCrecimiento['$y_t$'].apply(lambda x: ((x/START)-1))
TasaLogCrecimiento['$\\ln y_t- \\ln y_{0}$'] = TasaLogCrecimiento['$\\ln y_t$'] - TasaLogCrecimiento['$\\ln y_t$'].iloc[0]
```

```
dfi.export(TasaLogCrecimiento, file, use_mathjax=True, dpi=200)
```

La tasa logarítmica de variación de $\boldsymbol{y}$ se define como $z_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$; es decir

$$\boldsymbol{z} = \nabla \ln \boldsymbol{y} = \Big(\big[\ln(y_2) - \ln(y_1)\big], \dots \ \big[\ln(y_n) - \ln(y_{n-1})\big] \Big)$$

y se *aproxima* a la tasa de crecimiento (en tanto por uno) si el incremento es pequeño.

	y_t	$\frac{y_t-y_{t-1}}{y_{t-1}}$	$\ln y_t$	$\nabla \ln \boldsymbol{y}$	$\frac{y_t-y_0}{y_0}$	$\ln y_t - \ln y_0$
0	100.000000	NaN	4.605170	NaN	0.000000	0.000000
1	101.000000	0.01	4.615121	0.00995	0.010000	0.009950
2	102.010000	0.01	4.625071	0.00995	0.020100	0.019901
3	103.030100	0.01	4.635021	0.00995	0.030301	0.029851
4	104.060401	0.01	4.644972	0.00995	0.040604	0.039801
5	105.101005	0.01	4.654922	0.00995	0.051010	0.049752
6	106.152015	0.01	4.664872	0.00995	0.061520	0.059702
7	107.213535	0.01	4.674823	0.00995	0.072135	0.069652
8	108.285671	0.01	4.684773	0.00995	0.082857	0.079603
9	109.368527	0.01	4.694723	0.00995	0.093685	0.089553

3.2.1 Observaciones sobre los datos transformados

Transformación de la serie temporal $\boldsymbol{y} = \{y_t\},\ t = 1 : n$	Observaciones
$\boldsymbol{z} = \ln \boldsymbol{y} = \{\ln y_t\}$	A veces independiza la volatilidad del nivel e induce normalidad.
$\boldsymbol{z} = \nabla \boldsymbol{y} = \{y_t - y_{t-1}\}$	Indica al crecimiento absoluto entre periodos consecutivos.
$\boldsymbol{z} = \nabla \ln \boldsymbol{y}$	Tasa logarítmica de crecimiento. Aproximación del crecimiento relativo entre periodos consecutivos.
$\boldsymbol{z} = \nabla\nabla \ln \boldsymbol{y} = \nabla^2 \ln \boldsymbol{y}$	Cambio en la tasa log, de crecimiento. Indica la “aceleración” en el crecimiento relativo.
$\boldsymbol{z} = \nabla_s \ln \boldsymbol{y} = \{\ln y_t - \ln y_{t-s}\}$	Tasa de crecimiento acumulada en un ciclo estacional completo (s períodos). Cuando el período estacional es de un año, se conoce como “tasa anual” o “tasa interanual”.
$\boldsymbol{z} = \nabla\nabla_s \ln \boldsymbol{y}$	Cambio en la tasa de crecimiento acumulada en un ciclo estacional completo. Es un indicador de aceleración en el crecimiento acumulado.