

# Contents

<b>1</b>	<b>Secuencias de números</b>	<b>2</b>
1.1	El espacio vectorial de las secuencias infinitas $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$	2
1.1.1	Notación mediante funciones generatrices	2
1.1.2	Características de algunas secuencias	3
1.1.3	Algunos subespacios de $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$	3
1.2	Producto convolución	4
1.3	Anillos conmutativos y cuerpos	4
1.3.1	Anillos conmutativos	4
1.3.2	Cuerpos	4
1.4	Clasificación de algunos subconjuntos de sucesiones	5
1.5	Inversas	5
1.5.1	Inversas de secuencias con principio	5
1.5.2	Inversas de secuencias con final	6
1.5.3	Inversas de polinomios	7
1.5.4	Cuerpo de fracciones de polinomios	8
1.6	Operador retardo $\mathbf{B}$ y suma de los elementos de una secuencia.	8
1.6.1	Polinomios y secuencias en el operador retardo $\mathbf{a}(\mathbf{B})$ actuando sobre secuencias	8
1.7	Convolución de una serie formal con el " <i>reverso</i> " de otra	9

# Econometría Aplicada. Lección 4

Marcos Bujosa

November 27, 2024

En esta lección veremos conceptos algebraicos usados en la modelización de series temporales.

## 1 Secuencias de números

### 1.1 El espacio vectorial de las secuencias infinitas $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$

Consideremos el conjunto  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  de secuencias infinitas de números reales

$$\mathbf{x} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_t \mid t \in \mathbb{Z})$$

Las secuencias se pueden sumar y también se pueden multiplicar por escalares.

Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  y  $a \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_t + y_t \mid t \in \mathbb{Z})$$

y

$$a \cdot \mathbf{x} = (a \cdot x_t \mid t \in \mathbb{Z}).$$

El conjunto  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  junto con la suma elemento a elemento y el producto por escalares constituyen un espacio vectorial.

#### 1.1.1 Notación mediante funciones generatrices

En la expresión  $\mathbf{x} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$  separamos los elementos por comas, e indicamos la posición con un subíndice. Pero en

$$\mathbf{a} = (\dots, 0, 1, 4, 9, 2, 0, \dots)$$

¿qué posición ocupan estos números en la secuencia?

Las funciones generatrices resuelven este problema. En ellas los elementos se separan con el símbolo "+" y la posición es indicada con la potencia del símbolo "z"

$$\mathbf{a} = \dots + 0z^{-2} + 1z^{-1} + 4z^0 + 9z + 0z^2 + \dots$$

Así podemos denotar la secuencia  $\mathbf{x}$  de manera muy compacta del siguiente modo

$$\mathbf{x} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t z^t \equiv \mathbf{x}(z)$$

**¡Pero esta expresión no es una suma!** es solo un modo de expresar una secuencia. Dicha expresión se denomina *función generatriz*.

La sucesión  $\mathbf{0} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} 0z^t$  se denomina *sucesión nula*.

Además, denotaremos con  $\mathbf{1}$  la secuencia constante uno:  $\mathbf{1} = (\dots, 1, 1, 1, \dots) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} 1z^t$ .

### 1.1.2 Características de algunas secuencias

En una sucesión  $\mathbf{a}$  no nula llamamos

**Grado** al menor índice entero que verifica la propiedad:

$$j > \text{grado}(\mathbf{a}) \Rightarrow a_j = 0$$

Para la sucesión,  $\mathbf{0}$ , diremos que su grado es menos infinito ( $\text{grado}(\mathbf{0}) = -\infty$ ).

**Cogrado** al mayor índice entero que verifica la propiedad:

$$j < \text{cogrado}(\mathbf{a}) \Rightarrow a_j = 0$$

Para la sucesión,  $\mathbf{0}$ , diremos que su cogrado es infinito ( $\text{cogrado}(\mathbf{0}) = \infty$ ).

Una sucesión  $\mathbf{a}$  es

**Absolutamente sumable** ( $\ell^1$ ) si  $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |a_t| < \infty$

**De cuadrado sumable** ( $\ell^2$ ) si  $\sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t^2 < \infty$

Una sucesión absolutamente sumable siempre es de cuadrado sumable,  $\ell^1 \subset \ell^2$ .

### 1.1.3 Algunos subespacios de $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$

**Secuencias con final** si tienen grado (a partir de cierto índice son cero).

$$\mathbf{a}(z) = (\dots, a_{p-3}, a_{p-2}, a_{p-1}, a_p, 0, 0, 0, \dots) = \sum_{t=-\infty}^p a_t z^t$$

**Secuencias con principio** si tienen cogrado (antes de cierto índice son cero).

$$\mathbf{a}(z) = (\dots, 0, 0, 0, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots) = \sum_{t=k}^{\infty} a_t z^t \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Series formales** si su cogrado  $\geq 0$ .

$$\mathbf{a}(z) = (\dots, 0, 0, 0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t z^t \quad k \geq 0$$

**Polinomios** son series formales con grado

$$\mathbf{a}(z) = (\dots, 0, 0, 0, a_0, a_1, \dots, a_p, 0, 0, 0, \dots) = \sum_{t=0}^p a_t z^t \quad k \geq 0$$

(p.e.  $a_0 + a_1 z + a_2 z^2$  es un polinomio de grado 2).

## 1.2 Producto convolución

Sean  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  sucesiones con principio (con cogrado). Su producto convolución es la sucesión:

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})_t = \sum_{r+s=t} a_r b_s; \quad r, s, t \in \mathbb{Z}$$

El cogrado de  $\mathbf{a} * \mathbf{b}$  es la suma de los respectivos cogrados.

La convolución también está definida entre sucesiones:

- con final (con grado). El grado del producto es la suma de los respectivos grados.
- absolutamente sumables ( $\ell^1$ ).

**TODO** Incluir las demos en los apuntes :@ECTRAPL:

## 1.3 Anillos conmutativos y cuerpos

### 1.3.1 Anillos conmutativos

Un **anillo conmutativo** es un conjunto  $S$  equipado con dos operaciones binarias, la suma  $+$  y el producto  $*$  que satisfacen tres conjuntos de axiomas.

En cuanto a la suma

- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  en  $S$  (i.e.  $+$  es asociativa).
- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  en  $S$  (i.e.  $+$  es conmutativa).
- Existe un elemento  $\mathbf{0}$  tal que  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$  para todo  $\mathbf{a} \in S$ .
- Para cada  $\mathbf{a} \in S$  existe  $-\mathbf{a} \in S$  tal que  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .

En cuanto al producto

- $(\mathbf{a} * \mathbf{b}) * \mathbf{c} = \mathbf{a} * (\mathbf{b} * \mathbf{c})$  para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  en  $S$  (i.e.  $*$  es asociativo).
- $\mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathbf{b} * \mathbf{a}$  para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  en  $S$  (i.e.  $*$  es conmutativo).
- Existe un elemento  $1$  tal que  $\mathbf{a} * 1 = \mathbf{a}$  para todo  $\mathbf{a} \in S$ .

El elemento  $1$  es la secuencia cuyos elementos son cero excepto un  $1$  en la posición cero:

$$1 = 1z^0 = (\dots, 0, 0, \boxed{1}, 0, 0, \dots)$$

El producto es distributivo respecto de la suma: Para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  en  $S$

- $\mathbf{a} * (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} * \mathbf{b}) + (\mathbf{a} * \mathbf{c})$
- $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) * \mathbf{a} = (\mathbf{b} * \mathbf{a}) + (\mathbf{c} * \mathbf{a})$

### 1.3.2 Cuerpos

Un **cuerpo** es un anillo conmutativo que adicionalmente satisface:

- Para cada  $\mathbf{a} \in S$  no nulo ( $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ), existe  $\mathbf{b} \in S$  tal que  $\mathbf{a} * \mathbf{b} = 1$ .  
(*Todo elemento no nulo del conjunto tiene una inversa en dicho conjunto*)

## 1.4 Clasificación de algunos subconjuntos de sucesiones

**Son anillos el conjunto de** series formales (cogrado  $\geq 0$ ), polinomios y  $\ell^1$ .

Para algunas sucesiones (no nulas) de estos subconjuntos o no existe inversa o, cuando existe, es una sucesión de otro tipo (p.e. las inversas de un polinomio no son polinomios en general).

**Son cuerpos el conjunto de** secuencias con principio, secuencias con final (y el [Cuerpo de fracciones de polinomios](#))

## 1.5 Inversas

### 1.5.1 Inversas de secuencias con principio

Supongamos que  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  y que  $k = \text{cogrado}(\mathbf{a})$ . Definimos  $\mathbf{b}$  del siguiente modo:

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < -k \\ \frac{1}{a_k} & \text{si } j = -k \\ \frac{-1}{a_k} \sum_{r=-k}^{j-1} b_r a_{j+k-r} & \text{si } j > -k \end{cases}$$

Por construcción,  $\text{cogrado}(\mathbf{b}) = -k$  y en consecuencia  $(\mathbf{a} * \mathbf{b})_j = 0$  si  $j < 0$ . Obviamente,  $(\mathbf{a} * \mathbf{b})_0 = 1$ ; y además  $(\mathbf{a} * \mathbf{b})_j = 0$  si  $j > 0$ .

Es así ya que

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} * \mathbf{b})_j &= \sum_{r+s=j} a_r b_s = \sum_{r=-k}^{j-k} a_{j-r} b_r \\ &= \sum_{r=-k}^{j-k-1} a_{j-r} b_r + a_k b_{j-k} \\ &= \sum_{r=-k}^{j-k-1} a_{j-r} b_r + a_k \left( \frac{-1}{a_k} \sum_{r=-k}^{j-k-1} b_r a_{j-k+k-r} \right) \\ &= \sum_{r=-k}^{j-k-1} a_{j-r} b_r - \sum_{r=-k}^{j-k-1} b_r a_{j-r} = 0 \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Para el polinomio  $1 - az$

$$(1 - az)^{-\triangleright} = \text{inversa con principio de } (1 - az) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < 0 \\ 1 & \text{si } j = 0 \\ a^j & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

es decir  $(\dots, 0, \boxed{1}, a, a^2, a^3, \dots) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j$ ; (donde la posición  $j = 0$  está marcada con un recuadro).

Comprobación:

$$\begin{aligned}
(1 - az) \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j &= \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j - az \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j - \sum_{j=1}^{\infty} a^j z^j \\
&= a^0 z^0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a^j - a^j) z^j \\
&= 1z^0 + \sum_{j=1}^{\infty} 0z^j = 1
\end{aligned}$$

### 1.5.2 Inversas de secuencias con final

Supongamos que  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  y que  $p = \text{grado}(\mathbf{a})$ . Definimos  $\mathbf{b}$  del siguiente modo:

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j > -p \\ \frac{1}{a_p} & \text{si } j = -p \\ \frac{-1}{a_p} \sum_{r=j-1}^{-p} b_r a_{j+p-r} & \text{si } j < -p \end{cases}$$

Por construcción,  $\text{grado}(\mathbf{b}) = -p$ .

**Ejemplo:** Para el polinomio  $1 - az$

$$(1 - az)^{\blacktriangleleft -} = \text{inversa con final de } (1 - az) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > -1 \\ \frac{-1}{a} & \text{si } j = -1 \\ \frac{-1}{a^j} & \text{si } j < -1 \end{cases}$$

es decir  $(\dots, \frac{-1}{a^3}, \frac{-1}{a^2}, \frac{-1}{a}, \boxed{0}, \dots) = \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j$

Comprobación:

$$\begin{aligned}
(1 - az) \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j &= \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j + (-az) \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j \\
&= \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j + \sum_{j=-\infty}^0 a^j z^j \\
&= \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j + \sum_{j=-\infty}^{-1} a^j z^j + a^0 z^0 \\
&= \sum_{j=-\infty}^{-1} (a^j - a^j) z^j + 1z^0 = 1
\end{aligned}$$

Si definimos la función entre secuencias  $R : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  tal que  $R(a_j) = a_{-j}$ , es decir, la función /reverso/

$$R(\mathbf{a}(z)) = \mathbf{a}(z^{-1})$$

se puede demostrar que para toda secuencia con final  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a}^{\blacktriangleleft -} = R\left((R(\mathbf{a}))^{\blacktriangleright -}\right).$$

### 1.5.3 Inversas de polinomios

Ahora sabemos que todo polinomio

**por tener cogrado** tiene una inversa con cogrado (con principio)

**por tener grado** tiene una inversa con grado (con final)

y que dichas inversas no son de la forma  $\sum_{t=k}^{\infty} a_t z^t$  ó  $\sum_{t=-\infty}^k a_t z^t$  (i.e., no son polinomios).

Por el ejemplo anterior sabemos que para  $1 - az$  ambas inversas son

- $(1 - az)^{-\triangleright} = \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j = (\dots, 0, \boxed{1}, a, a^2, a^3, \dots)$
- $(1 - az)^{\blacktriangleleft -} = \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j = (\dots, \frac{-1}{a^3}, \frac{-1}{a^2}, \frac{-1}{a}, \boxed{0}, \dots)$

Es evidente que si  $|a| \neq 1$  una de las inversas está en  $\ell^1$  y la otra no.

Pero si  $|a| = 1$  ninguna de las inversas pertenece a  $\ell^1$

Además, por el [Teorema fundamental del Álgebra](#) también sabemos que:

*Todo polinomio univariante no nulo con coeficientes reales puede factorizarse como*

$$c \cdot p_1 * \dots * p_k,$$

*donde  $c$  es un número real y cada  $p_i$  es un polinomio mónico (i.e., el coeficiente de  $z^0$  es 1) de grado a lo sumo dos con coeficientes reales. Más aún, se puede suponer que los factores de grado dos no tienen ninguna raíz real.*

Podemos factorizar un polinomio  $a$  sin raíces de módulo 1 como

$$a = b * c$$

- donde  $b$  es un polinomio con las raíces de módulo menor que 1 y
- donde  $c$  es un polinomio con las raíces de módulo mayor que 1

Como tanto los polinomios  $a$ ,  $b$  y  $c$  como las inversas  $b^{\blacktriangleleft -}$  y  $c^{-\triangleright}$  pertenecen al anillo  $\ell^1$ ,

$$a * (b^{\blacktriangleleft -} * c^{-\triangleright}) = (b * c) * (b^{\blacktriangleleft -} * c^{-\triangleright}) = b * b^{\blacktriangleleft -} * c * c^{-\triangleright} = 1 * 1 = 1.$$

La secuencia  $(b^{\blacktriangleleft -} * c^{-\triangleright})$  es "la" inversa de  $a$  en  $\ell^1$ .

En general, dicha inversa no tiene grado ni cogrado finitos y se denota con  $a^{-1} = \frac{1}{a}$ .  
(es la inversa que aparece en los libros de series temporales)

Evidentemente dicha inversa no existe si  $a$  tiene alguna raíz de módulo 1.

En los manuales de *series temporales* se dice que un polinomio  $a$  es **invertible** si

(la inversa con principio)  $a^{-\triangleright} = a^{-1}$  (la inversa absolutamente sumable).

(y solo es posible si sus raíces están fuera del círculo unidad).

**Hay infinitas inversas.** Si una secuencia tiene dos inversas, entonces tiene infinitas.

Sean  $a$ ,  $b$  y  $d$  secuencias tales que  $a * b = 1$  y  $a * d = 1$ ; y sean  $\beta$  y  $\delta$  dos escalares tales que  $\beta + \delta = 1$ . Entonces

$$a * (\beta b + \delta d) = \beta(a * b) + \delta(a * d) = \beta 1 + \delta 1 = (\beta + \delta)1 = 1$$

Así, para  $\beta$  y  $\delta$  tales que  $\beta + \delta = 1$ , sabemos que  $(\beta b + \delta d)$  es otra inversa de  $a$ .

### 1.5.4 Cuerpo de fracciones de polinomios

El cuerpo de fracciones de polinomios

$$\{\mathbf{p} * \mathbf{q}^{-\triangleright} \mid \mathbf{p} \text{ y } \mathbf{q} \text{ son polinomios y } \mathbf{q} \neq \mathbf{0}\};$$

es un subcuerpo del cuerpo de las sucesiones con principio (i.e., con cogrado finito)

Toda fracción de sucesiones con grado y cogrado (con principio y final) pertenece al cuerpo de fracciones de polinomios, pues toda sucesión con grado  $k$  y cogrado es de la forma  $\mathbf{p} * (z^k)^{-\triangleright}$ , donde  $\mathbf{p}$  es un polinomio.

Cuando las raíces del polinomio  $\mathbf{q}$  están fuera del círculo unidad (i.e.,  $\mathbf{q}^{-\triangleright} = \mathbf{q}^{-1}$ ) es habitual denotar la secuencia  $\mathbf{p} * \mathbf{q}^{-\triangleright}$  así  $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$

$$(\mathbf{p} * \mathbf{q}^{-\triangleright})(z) = \frac{\mathbf{p}(z)}{\mathbf{q}(z)}$$

Este conjunto es fundamental en la modelización ARIMA.

### 1.6 Operador retardo B y suma de los elementos de una secuencia.

Por conveniencia se usa el operador retardo B en la notación:

$$\mathbf{B}x_t = x_{t1}, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z}.$$

Aplicando el operador B repetidamente tenemos

$$\mathbf{B}^k x_t = x_{tk}, \quad \text{para } t, k \in \mathbb{Z}$$

Así, si la secuencia  $\mathbf{x}(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t z^t$  es sumable, entonces la expresión

$$\mathbf{x}(\mathbf{B}) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t \mathbf{B}^t = \cdots + x_{-2} + x_{-1} + x_0 + x_1 + \cdots$$

tiene sentido como suma.

#### 1.6.1 Polinomios y secuencias en el operador retardo $\mathbf{a}(\mathbf{B})$ actuando sobre secuencias

Así, para el polinomio  $\mathbf{a}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ , y la secuencia  $\mathbf{y}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{B})y_t &= (a_0 + a_1 \mathbf{B} + a_2 \mathbf{B}^2 + a_3 \mathbf{B}^3)y_t \\ &= a_0 y_t + a_1 \mathbf{B}^1 y_t + a_2 \mathbf{B}^2 y_t + a_3 \mathbf{B}^3 y_t \\ &= a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} \\ &= \sum_{r=0}^3 a_r y_{t-r} \\ &= (\mathbf{a} * \mathbf{y})_t \end{aligned}$$

Y en general, si  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{y}$  son secuencias sumables, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{B})y_t &= (\cdots + a_{-2} \mathbf{B}^{-2} + a_{-1} \mathbf{B}^{-1} + a_0 + a_1 \mathbf{B} + a_2 \mathbf{B}^2 + \cdots)y_t \\ &= \cdots + a_{-2} y_{t+2} + a_{-1} y_{t+1} + a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \cdots \\ &= (\mathbf{a} * \mathbf{y})_t \end{aligned}$$



## 1.7 Convolución de una serie formal con el "*reverso*" de otra

Por último, si tenemos dos series formales  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}(z) * \mathbf{b}(z^{-1}) &= (a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots)(\dots + b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_0 z^0) \\
 &= \left( \dots, \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j+2} b_j, \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j+1} b_j, \boxed{\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j b_j}, \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j+1} b_j, \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j+2} b_j, \dots \right) \\
 &= \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j+k} b_j \mid k \in \mathbb{Z} \right)
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\left( \mathbf{a}(z) * \mathbf{b}(z^{-1}) \right)_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j+k} b_j. \tag{1}$$