Contents

1 Correlación **2**

1.1 La causalidad y correlación 2

1.2 Correlación espuria 3

1.3 Las series con tendencia suelen presentar elevadas correlaciones. 3

1.3.1 Ejemplo de correlación espuria: PNB vs incidencia de melanoma 3

1.4 Una manera de ver que la correlación del ejemplo es "espuria" (que no hay causalidad) 5

2 Cointegración **6**

Econometría Aplicada. Lección 3

Marcos Bujosa

August 13, 2024

En esta lección voy a continuar pero con R y usaré la librería `tfarima` de José Luis Gallego siempre que pueda.

Carga de algunas librerías de R

Primero cargamos la librería `tfarima` (Repositorio Cran: https://cran.r-project.org/web/packages/tfarima/index.html; repositorio GitHub: https://github.com/gallegoj/tfarima)

```
library(tfarima)      # librería de José Luis Gallego para Time Series
library(latticeExtra) # para gráficos con doble eje vertical (doubleYScale)
library(readr)        # para leer ficheros CSV
library(ggplot2)      # para el scatterplot (alternaticamente library(tidyverse))
library(jtools)       # para representación resultados estimación
library(zoo)          # para generar objetos ts (time series)
```

y además fijamos los parámetros por defecto para las figuras en `png` del notebook

```
# fijamos el tamaño de las figuras que se generan en el notebook
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 4, repr.plot.res = 200)
```

1 Correlación

La correlación entre dos muestras de tamaño N (dos vectores de datos de $\mathbb{R}^N$) es el **coseno** del ángulo formado los vectores de dichos datos en desviaciones respecto a sus correspondientes medias.

$$\rho_{\boldsymbol{xy}} = \frac{\sigma_{\boldsymbol{xy}}}{\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{y}}}$$

Por tanto la correlación es algún valor entre -1 y 1.

- Si la correlación es 1 significa que $\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}$ es $a(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})$ para algún a positivo
- Si la correlación es -1 significa que $\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}$ es $a(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})$ para algún a negativo
- Cuando la correlación es 0 el vector $\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}$

1.1 La causalidad y correlación

Cuando existe relación causal entre variables sus muestras suelen estar correladas.

- Número de horas de sol tiene correlación positiva con la temperatura ambiente

- La altitud de una localidad (o su latitud) tiene una correlación negativa con la temperatura ambiente

Pero **correlaciones significativas no indican la existencia de relaciones causales**.

- En una playa: consumo de helados y ataques de tiburón a los bañistas

1.2 Correlación espuria

La correlación entre variables sin relación causal se denomina *correlación espuria*.

- Que haya correlación espuria no significa que "en realidad no hay correlación".
- Que haya correlación espuria significa que *es erróneo interpretar* que dicha correlación se debe a *una relación causal*.

Puede ser que una causa común induzca la correlación entre ambas variables

- consumo de helados y venta de bañadores

Puede ser que no exista causa alguna y aún así haya correlación

- Un ejemplo
- Otro
- Más ejemplos aquí

1.3 Las series con tendencia suelen presentar elevadas correlaciones.

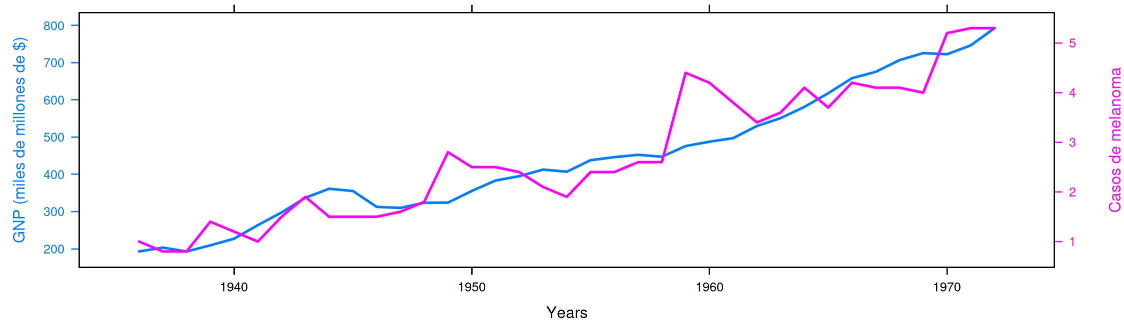
1.3.1 Ejemplo de correlación espuria: PNB vs incidencia de melanoma

```
data_frame <- read_csv('datos/GNPvsMelanoma.csv',show_col_types = FALSE)
head(data_frame, 3)
```

obs	GNP	Melanoma
<dbl>	<dbl>	<dbl>
1936	193.0	1.0
1937	203.2	0.8
1938	192.9	0.8

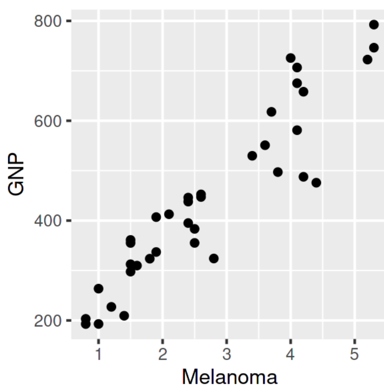
```
# se pueden graficar dos columnas de un data_frame al mismo tiempo
kk <- xyplot(GNP + Melanoma ~ obs, data_frame, type="l")
# Se agrega dos ejes Y. Se construye cada serie por separado
obj1 <- xyplot(GNP ~ obs, data_frame, type = "l" , lwd=2, ylab="GNP (miles de millones de $)",  xlab="Years")
obj2 <- xyplot(Melanoma ~ obs, data_frame, type = "l", lwd=2, ylab="Casos de melanoma")
# --> se realiza la grafica con el segundo eje Y
doubleYScale(obj1, obj2, add.ylab2 = TRUE)
```

Serie anual (1936–1972) del PNB anual USA en miles de millones de dólares corrientes e incidencia de melanoma en la población masculina de Connecticut.




```r
# transitoriamente cambio el tamaño de la siguiente figura
options(repr.plot.width = 3, repr.plot.height = 3, repr.plot.res = 80)
ggplot(data_frame, aes(x = Melanoma, y = GNP)) + geom_point()
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 4, repr.plot.res = 200)
```

La correlación es 0.93 (*debido a que ambas series presentan una tendencia creciente*)



Si regresamos el PNB sobre la incidencia de casos de melanoma obtenemos un excelente ajuste (*coef. de determinación de* 0.87 *y coeficientes muy significativos*).

Ello no significa que el modelo tenga alguna capacidad explicativa o predictiva (*pues la incidencia de melanoma en Connecticut no hace crecer la economía de EEUU*).

```
[4mMODEL INFO:[24m
[3mObservations:[23m 37
[3mDependent Variable:[23m GNP
[3mType:[23m OLS linear regression

[4mMODEL FIT:[24m
[3mF[23m(1,35) = 231.84, [3mp[23m = 0.00
[3mRš = [23m0.87
[3mAdj. Rš = [23m0.87

[3mStandard errors: OLS[23m
--------------------------------------------------
                      Est.    S.E.   t val.      p
```

```
----------------- -------- ------- -------- ------
(Intercept)         118.57   23.73     5.00   0.00
Melanoma            118.98    7.81    15.23   0.00
--------------------------------------------------
```

1.4 Una manera de ver que la correlación del ejemplo es "espuria" (que no hay causalidad)

Si fuera cierto que

$$\boldsymbol{y} = \beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$$

Entonces también sería cierto que

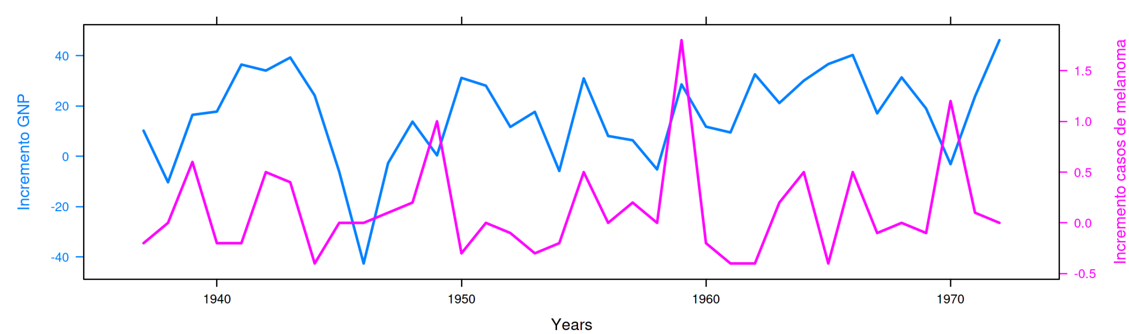
$$\nabla \boldsymbol{y} = \beta_2 \nabla \boldsymbol{x} + \nabla \boldsymbol{u}$$

```
# creamos un objeto ts ("time series")
datos_ts <- as.ts( read.zoo( data_frame ) )
# creamos dos nuevas series temporales con las primeras diferencias de las columnas "GNP" y "Melanoma" de datos_ts
d_GNP      = diff(datos_ts[,"GNP"])
d_Melanoma = diff(datos_ts[,"Melanoma"])
```

```
# creamos un nuevo data frame con las primeras diferencias
DF.diferencias = data.frame(date = zoo::as.Date(time(d_GNP)),
                            d_GNP = as.matrix(d_GNP),
                            d_Melanoma = as.matrix(d_Melanoma))
head(DF.diferencias, 2)
```

	date	d_GNP	d_Melanoma
	<date>	<dbl>	<dbl>
1	1937-01-01	10.2	-0.2
2	1938-01-01	-10.3	0.0

```
# gráfico conjunto con dos columnas del data frame DF.diferencias
kk <- xyplot(d_GNP + d_Melanoma ~ date, DF.diferencias, type="l")
obj1 <- xyplot(d_GNP ~ date, DF.diferencias, type = "l" , lwd=2, ylab="Incremento GNP",  xlab="Years")
obj2 <- xyplot(d_Melanoma ~ date, DF.diferencias, type = "l", lwd=2, ylab="Incremento casos de melanoma")
doubleYScale(obj1, obj2, add.ylab2 = TRUE)
```



Sin embargo, al realizar la regresión de la primera diferencia de `GNP` sobre la primera diferencia de `Melanoma` obtenemos un ajuste pésimo (tan solo la constante es significativa… ¡cuando en teoría $\beta_1 = 0$!).

```r
# resultados del ajuste MCO entre d_GNP y d_Melanoma
summ( lm(d_GNP ~ d_Melanoma) )
```

```
MODEL INFO:
Observations: 36
Dependent Variable: d_GNP
Type: OLS linear regression

MODEL FIT:
F(1,34) = 0.01, p = 0.92
Rš = 0.00
Adj. Rš = -0.03

Standard errors: OLS
------------------------------------------------
                     Est.   S.E.   t val.      p
----------------- ------- ------ -------- ------
(Intercept)         16.57   3.18     5.21   0.00
d_Melanoma           0.71   6.59     0.11   0.92
------------------------------------------------
```

2 Cointegración

- Una serie temporal es *integrada de orden* d, (ó $I(d)$) si d es el mínimo número de diferencias ordinarias necesarias para lograr la estacionariedad en media.
  - Consecuentemente, una serie estacionaria en media es $I(0)$.
- En ocasiones una combinación lineal de series $I(d)$ (i.e., series con el mismo orden de integración) resulta ser integrada con un orden menor a d; entonces se dice que están *cointegradas*:

  $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ *están cointegradas* si son $I(d)$ y existen a, b, c tales que

  $$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{z} \quad \text{es cointegrada de orden } d - m,$$

  con $m > 0$ (se dice que tienen m relaciones de integración).

Para estimar la relación de cointegración, se ajusta una regresión lineal entre las variables potencialmente cointegradas y se evalúa la estacionariedad o el orden de integración de los residuos

- La situación más habitual es tener dos series $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ que son $I(1)$ y encontrar por MCO un $\hat{\alpha}$ tal que $\boldsymbol{y} - \hat{\alpha}\boldsymbol{x}$ es $I(0)$.

La cointegración entre series temporales suele tener dos interpretaciones relacionadas entre sí:

1. Las series poseen *una tendencia común* (pues hay una combinación lineal entre ellas que cancela dicha tendencia)
2. *Existe un equilibrio a largo plazo entre dichas series*, de manera que las desviaciones del equilibrio tienden a desaparecer a corto plazo

Ejemplo de series cointegradas: tipos de interes en UK a corto y largo plazo

```r
# leemos los datos cuartrimestales como un objeto zoo
UK_zoo <- read.csv.zoo("datos/UK_Interest_rates.csv", FUN = as.yearqtr, format = "%YQ%q",
  strip.white = TRUE)
head(UK_zoo,3)
```

```
        Long Short
1952 Q2 4.23  2.32
1952 Q3 4.36  2.47
1952 Q4 4.19  2.42
```

```r
# creamos un data frame a partir de UK_zoo (data frame para la figura de doble eje)
UK_df = fortify.zoo(UK_zoo)
head(UK_df,3)
```

	Index	Long	Short
	<yearqtr>	<dbl>	<dbl>
1	1952 Q2	4.23	2.32
2	1952 Q3	4.36	2.47
3	1952 Q4	4.19	2.42

```r
# creamos un ts (time series) a partir de UK_zoo por conveniencia
UK_ts = as.ts(UK_zoo)
head(UK_ts,3)
```

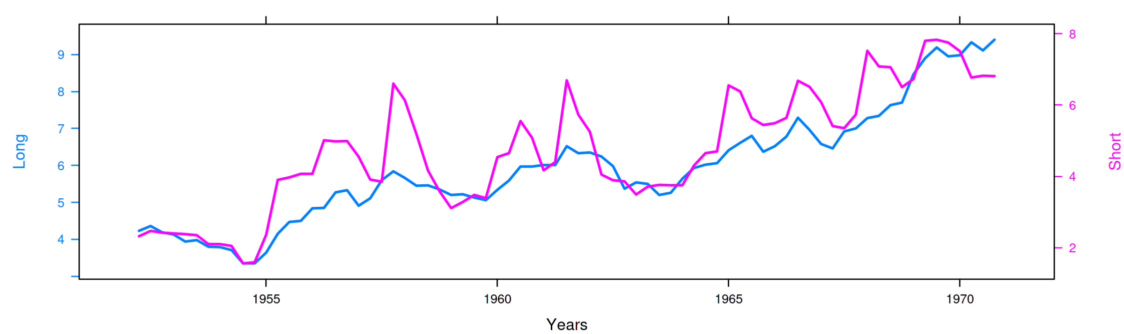
Long	Short
4.23	2.32
4.36	2.47
4.19	2.42

```r
kk <- xyplot(Long + Short ~ Index, UK_df, type="l")
obj1 <- xyplot(Long ~ Index, UK_df, type = "l" , lwd=2, ylab="Long",  xlab="Years")
obj2 <- xyplot(Short ~ Index, UK_df, type = "l", lwd=2, ylab="Short")
doubleYScale(obj1, obj2, add.ylab2 = TRUE)
```

`Long` rendimiento porcentual a 20 años de los bonos soberanos del Reino Unido

`Short` rendimiento de las letras del tesoro a 91 días

(Muestra: 1952Q2–1979Q4)



La correlación es 0.898 (*ambas series poseen una tendencia creciente... pero en este caso veremos es común*)

```
cor(UK_df$Long, UK_df$Short)
```

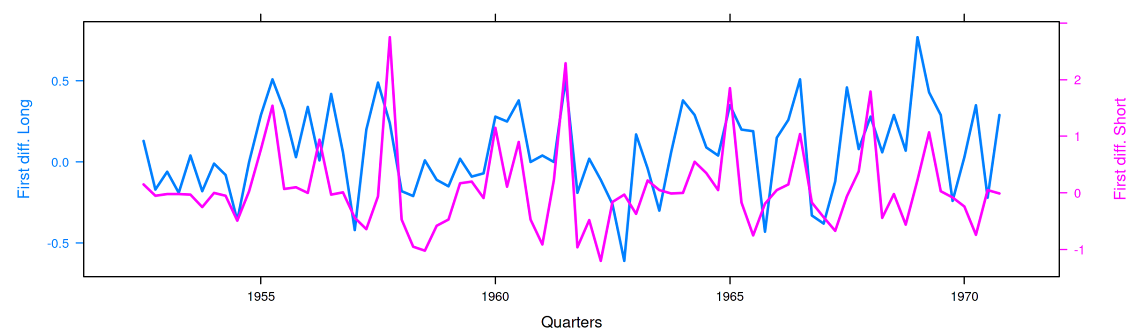
0.89764827721203

```
# creamos dos nuevas series temporales con las primeras diferencias
d_Long  = diff(UK_ts[,"Long"])
d_Short = diff(UK_ts[,"Short"])
```

```
# creamos un nuevo data frame con las primeras diferencias
UK_df.diferencias = data.frame(date = zoo::as.Date(time(d_Long)),
                               d_Long  = as.matrix(d_Long),
                               d_Short = as.matrix(d_Short))
head(UK_df.diferencias, 2)
```

	date	d_Long	d_Short
	<date>	<dbl>	<dbl>
1	1952-07-01	0.13	0.15
2	1952-10-01	-0.17	-0.05

```
# gráfico con las primeras diferencias de los tipos de interésframe DF.diferencias
kk <- xyplot(d_Long + d_Short ~ date, UK_df.diferencias, type="l")
obj1 <- xyplot(d_Long ~ date, UK_df.diferencias, type = "l" , lwd=2, ylab="First diff. Long",  xlab="Quarters")
obj2 <- xyplot(d_Short ~ date, UK_df.diferencias, type = "l", lwd=2, ylab="First diff. Short")
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
doubleYScale(obj1, obj2, add.ylab2 = TRUE)
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 4, repr.plot.res = 200)
```



La regresión de la primera diferencia de `Short` sobre la primera diferencia de `Long` **NO sugiere que la correlación sea espuria**: obtenemos un ajuste razonable con una pendiente es muy significativa y una constante NO significativa.

```
# resultados del ajuste MCO
summ( lm(d_Short ~ d_Long) )
```

```
MODEL INFO:
Observations: 74
Dependent Variable: d_Short
Type: OLS linear regression

MODEL FIT:
F(1,72) = 20.11, p = 0.00
Rš = 0.22
Adj. Rš = 0.21

Standard errors: OLS
------------------------------------------------
                     Est.   S.E.   t val.      p
----------------- ------- ------ -------- ------
(Intercept)         -0.03   0.08    -0.35   0.72
d_Long               1.26   0.28     4.48   0.00
------------------------------------------------
```

Hagamos la regresión de los tipos a corto plazo sobre los tipos a largo plazo (en niveles)

```
modelo <- lm(UK_df$Short ~ UK_df$Long) # ajuste MCO
summ( modelo )                         # resultados del ajuste
```

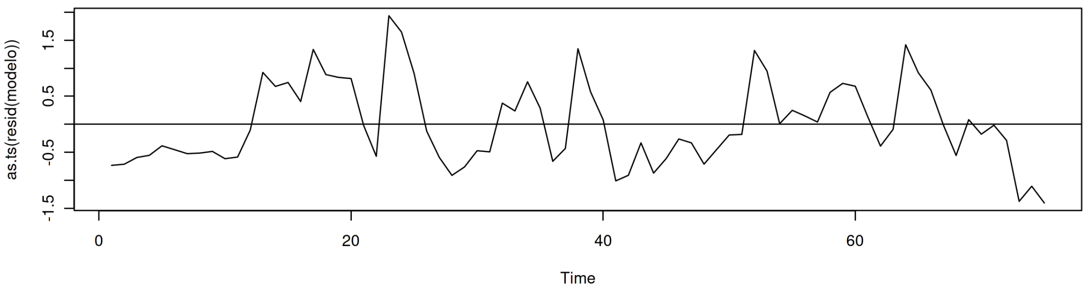
```
MODEL INFO:
Observations: 75
Dependent Variable: UK_df$Short
Type: OLS linear regression

MODEL FIT:
F(1,73) = 302.85, p = 0.00
Rš = 0.81
Adj. Rš = 0.80

Standard errors: OLS
------------------------------------------------
                     Est.   S.E.   t val.      p
----------------- ------- ------ -------- ------
(Intercept)         -1.17   0.35    -3.34   0.00
UK_df$Long           1.00   0.06    17.40   0.00
------------------------------------------------
```

El ajuste es muy bueno, y los parámetros muy significativos. Veamos si los residuos parecen la realización de un proceso estacionario (en la jerga habitual… "*veamos si los residuos son estacionarios*")

```
plot(as.ts(resid(modelo)))
abline(0,0)
```



Aparentan ser "estacionarios en media" (i.e., no se aprecia una tendencia evidente); por lo que **los tipos de interés a corto y largo plazo podrían estar cointegrados**.

Más adelante veremos test estadísticos para contrastar si son estacionarios.