

# Índice

<b>1. Procesos estocásticos y datos de series temporales</b>	<b>2</b>
1.1. Datos de sección cruzada vs datos de series temporales . . . . .	3
1.2. El desafío . . . . .	3
<b>2. Estacionariedad</b>	<b>5</b>
2.1. Estacionariedad en sentido débil . . . . .	5
2.2. Función de autocovarianzas y función de autocorrelación . . . . .	6
<b>3. Transformaciones de realizaciones de procesos estocásticos NO estacionarios</b>	<b>6</b>
3.1. Internat. airline passengers: monthly totals in thousands. Jan 49 – Dec 60 . . . . .	7
3.1.1. Transformación logarítmica de los datos . . . . .	8
3.1.2. Primera diferencia del logaritmo de los datos . . . . .	9
3.1.3. Diferencia estacional de la primera diferencia del logaritmo de los datos . . .	10
3.2. Tasa logarítmica de crecimiento . . . . .	10
3.2.1. Comentarios sobre los datos transformados . . . . .	11

# Econometría Aplicada. Lección 1

Marcos Bujosa

3 de abril de 2025

En esta lección veremos algunas transformaciones de los datos para "*hacerlos estacionarios*"; y daremos interpretación a los datos transformados.

- [lección en html](#)
- [lección en mybinder](#)

## Carga de algunos módulos de python

---

```
# Para trabajar con los datos y dibujarlos necesitamos cargar algunos módulos de python
import numpy as np # lineal algebra
import pandas as pd # data processing, CSV file I/O (e.g. pd.read_csv)
import matplotlib as mpl
# definimos parámetros para mejorar los gráficos
mpl.rc('text', usetex=False)
import matplotlib.pyplot as plt # data visualization
```

---

## 1. Procesos estocásticos y datos de series temporales

**Proceso estocástico** es una secuencia de variables aleatorias,  $X_t$  donde el índice  $t$  recorre el conjunto de números enteros ( $\mathbb{Z}$ ).

$$\mathbf{X} = (\dots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, \dots) = (X_t \mid t \in \mathbb{Z});$$

**Muestra** es una secuencia finita de datos

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Consideraremos cada dato  $x_t$  como una *realización* de  $X_t$ .
- Consecuentemente, consideraremos que una *muestra* es una *realización de un tramo finito* de un proceso estocástico:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ es una realización de } (X_t \mid t = 1 : n).$$

## 1.1. Datos de sección cruzada vs datos de series temporales

Consideremos dos tipos de muestras  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  :

**Sección cruzada** el índice NO es cronológico. La numeración (la indexación) de cada dato es solo una asignación arbitraria de *etiquetas* que identifican a cada individuo, empresa, objeto, etc. que ha sido medido. Consecuentemente:

- *el orden en el que aparecen los datos de la muestra es irrelevante.*
- conocer el índice de un dato no permite deducir nada respecto de cualquier otro dato.

**Series temporales** Corresponden a mediciones de un mismo objeto a lo largo del tiempo. El índice indica el instante de cada medición. *Es habitual que el orden cronológico de los datos sea importante* para explicar cada uno de ellos.

- con frecuencia la medición en un instante de tiempo está relacionada con otras mediciones próximas en el tiempo. En tal caso...
- no debemos asumir que las variables aleatorias del proceso estocástico subyacente,  $\mathbf{X} = (X_t \mid t \in \mathbb{Z})$ , sean independientes entre sí.

## 1.2. El desafío

El análisis de *series temporales* trata sobre la inferencia estadística de muestras que **frecuentemente NO podemos asumir que sean realizaciones** de variables aleatorias *i.i.d.* (*independientes e idénticamente distribuidas*).

Además,

- Aunque el marco ideal es que la serie temporal analizada "**sea estacionaria**" (*abuso del lenguaje que expresa que podemos asumir que la serie es una realización de un proceso estocástico estacionario, es decir, cuyos momentos no dependen del índice  $t$* )
- lo habitual es que, por distintos motivos, **NO lo sea**

---

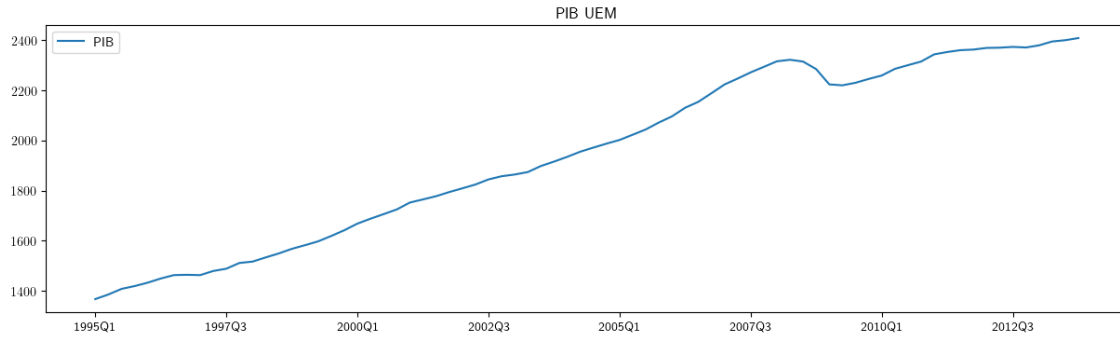
```
path = './datos/'
df1 = pd.read_csv(path+'PIB_UEM.csv')
df2 = pd.read_csv(path+'ProduccionCemento.csv')
df3 = pd.read_csv(path+'IBEX35.csv')
df4 = pd.read_csv(path+'ExportacionDeAcero.csv')
#print(df1.head())
```

---

---

```
df1.plot(x='obs', xlabel='', title='PIB UEM', figsize=(15,4))
```

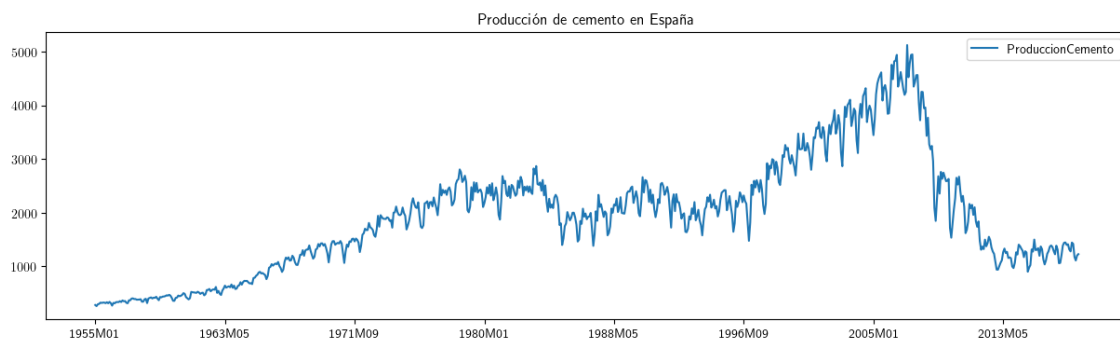
---




---

```
df2.plot(x='obs',xlabel='',title='Producción de cemento en España', figsize=(15,4))
```

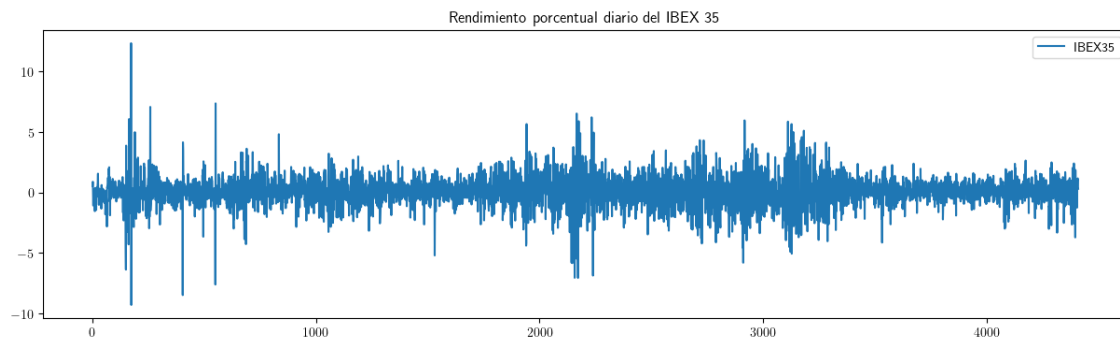
---




---

```
df3.plot(x='obs',xlabel='',title='Rendimiento porcentual diario del IBEX 35', figsize=(15,4))
```

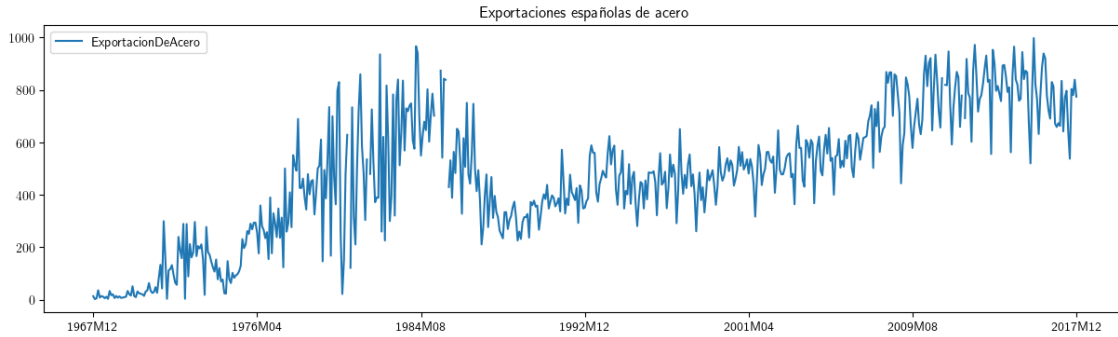
---




---

```
df4.plot(x='obs',xlabel='',title='Exportaciones españolas de acero', figsize=(15,4))
```

---



El desafío para el analista es

**primero** transformar los datos para lograr que sean "*estacionarios*"

y **después** transformar los datos estacionarios en "*ruido blanco*"

(*nuevo abuso del lenguaje que expresa que podemos asumir dichos datos transformados son realizaciones de un proceso de ruido blanco, i.e. de media cero e incorrelado.*)

## 2. Estacionariedad

El mayor objetivo del *análisis de series temporales* es inferir la distribución de  $\mathbf{X} = (X_t \mid t \in \mathbb{Z})$  usando una muestra finita (serie temporal)  $\mathbf{x} = (x_t \mid t = 1 : n)$ .

Así podremos

**Predecir** datos futuros

**Controlar** datos futuros

Pero esto es casi imposible si los datos son inestables a lo largo del tiempo

Por tanto, algún tipo de estabilidad o estacionariedad es necesaria.

### 2.1. Estacionariedad en sentido débil

Un proceso estocástico  $\mathbf{X}$  se dice **estacionario** (*en sentido débil*) si para todo  $t, k \in \mathbb{Z}$

$$E(X_t) = \mu \quad (1)$$

$$Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k \quad (2)$$

- (1) sugiere que las realizaciones de  $\mathbf{X}$  generalmente oscilan entorno a  $\mu$ .
- (2) entre otras cosas, sugiere que la variabilidad de las realizaciones de  $\mathbf{X}$  entorno a  $\mu$  es constante, pues para el caso particular  $k = 0$

$$Cov(X_t, X_{t-0}) = Var(X_t) = \gamma_0 \quad \text{para todo } t$$

Por tanto,  $\gamma_0$  es la varianza común a todas las variables aleatorias del proceso.

Es más, la desigualdad de Chebyshev

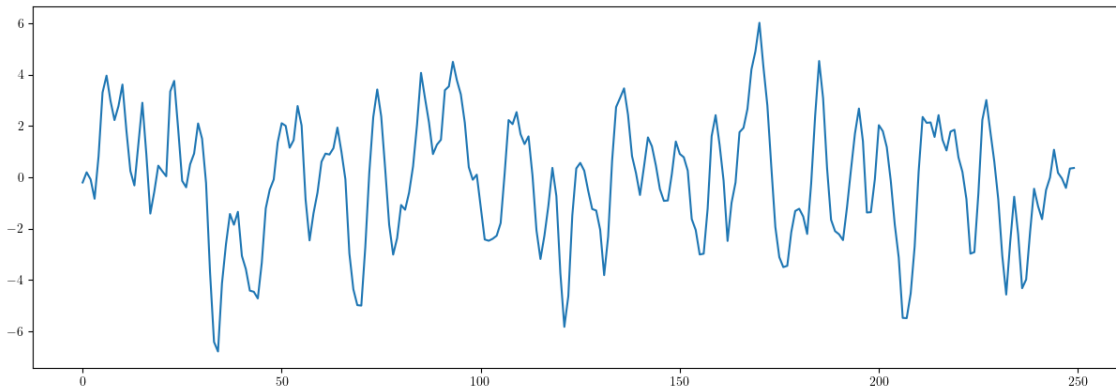
$$P(|X_t - \mu| \geq c\sigma) \leq \frac{1}{c^2}, \quad \text{donde } \sigma = \sqrt{\gamma_0}$$

sugiere que para cualquier proceso estacionario (y un  $c$  grande), al pintar una realización, tan solo un pequeño porcentaje de los datos caerán fuera de la franja  $(\mu - c\sigma, \mu + c\sigma)$ .

---

```
import statsmodels.api as sm
np.random.seed(12345)
arparams = np.array([.75, -.25])
maparams = np.array([.65, .35])
ar = np.r_[1, -arparams] # add zero-lag and negate
ma = np.r_[1, maparams] # add zero-lag
y = sm.tsa.arma_generate_sample(ar, ma, 250)
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.plot(y)
#plt.savefig("./img/lecc01/stationaryTimeSeriesExample.png")
```

---



## 2.2. Función de autocovarianzas y función de autocorrelación

Cuando  $\mathbf{X}$  es un proceso estocástico (débilmente) **estacionario**

- La secuencia  $(\gamma_k \mid k \in \mathbb{Z})$ , donde  $\gamma_k = \text{Cov}(X_t, X_{t-k})$  se denomina *función de autocovarianzas*

Debido a la estacionariedad, la correlación entre  $X_t$  y  $X_{t+k}$  no depende de  $t$ ; tan solo depende de la distancia temporal  $k$  entre ambas variables.

- La secuencia  $(\rho_k \mid k \in \mathbb{Z})$ , donde  $\rho_k = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$  se denomina *función de autocorrelación (ACF)*.

## 3. Transformaciones de realizaciones de procesos estocásticos NO estacionarios

Un proceso estocástico  $\mathbf{X} = (X_t \mid t \in \mathbb{Z})$  puede ser

**NO estacionario en media** porque  $E(X_t)$  depende de  $t$ .

**NO estacionario en covarianza** porque  $Cov(X_t, X_{t-k})$  depende de  $t$ .

Separar o distinguir ambos tipos de no estacionariedad no es sencillo.

Veamos un ejemplo de serie temporal para la que

- no podemos asumir que sea realización de un proceso estocástico *estacionario*
- y algunos intentos de transformación para obtener datos "**estacionarios**"(\*)  
(recuerde que esta expresión, aunque extendida, es un abuso del lenguaje).

### 3.1. Internat. airline passengers: monthly totals in thousands. Jan 49 – Dec 60

---

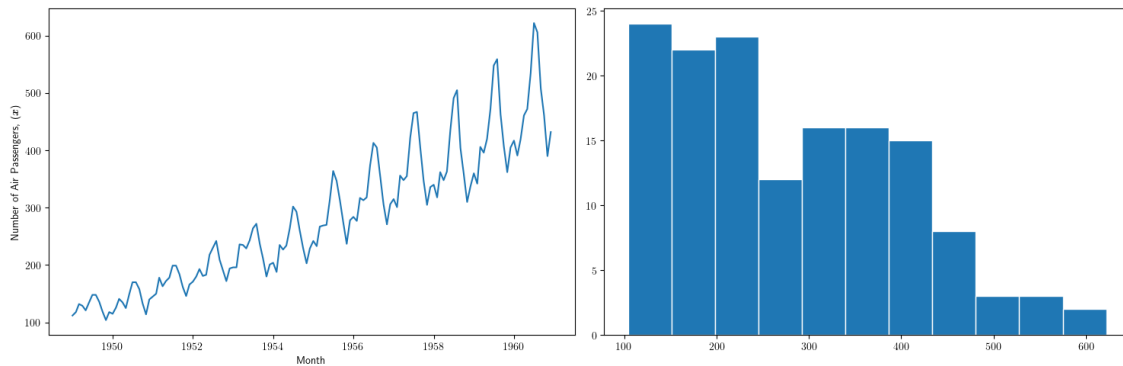
```
# Leemos los datos de un fichero csv y generamos un dataframe de pandas.
OrigData = pd.read_csv('../database/Datasets-master/airline-passengers.csv')
OrigData['Month']=pd.to_datetime(OrigData['Month'])
OrigData=OrigData.set_index(['Month'])
print(OrigData.head())
```

---

---

```
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(OrigData['Passengers'])
plt.xlabel("Month")
plt.ylabel(r"Number of Air Passengers, ($\boldsymbol{x}$)")
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.hist(OrigData['Passengers'], edgecolor='white', bins=11)
plt.tight_layout()
#plt.savefig("../img/lecc01/airlinepass+hist.png")
```

---



$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{114})$$

Serie "*no estacionaria*" (\*):

- La media crece de año en año
- La variabilidad estacional crece de año en año (fíjese en la diferencia entre el verano y el otoño de cada año)

### 3.1.1. Transformación logarítmica de los datos

- Al aplicar la función logarítmica transformamos **monótonamente** los datos estabilizando la varianza cuando los valores son mayores que 0.567 (aprox.)
- Pero ocurre lo contrario cuando los valores son pequeños (aumenta el valor absoluto de aquellos entre 0 y 0.567 aprox.). De hecho,  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ .
- Además, *el logaritmo no está definido para valores negativos.*

---

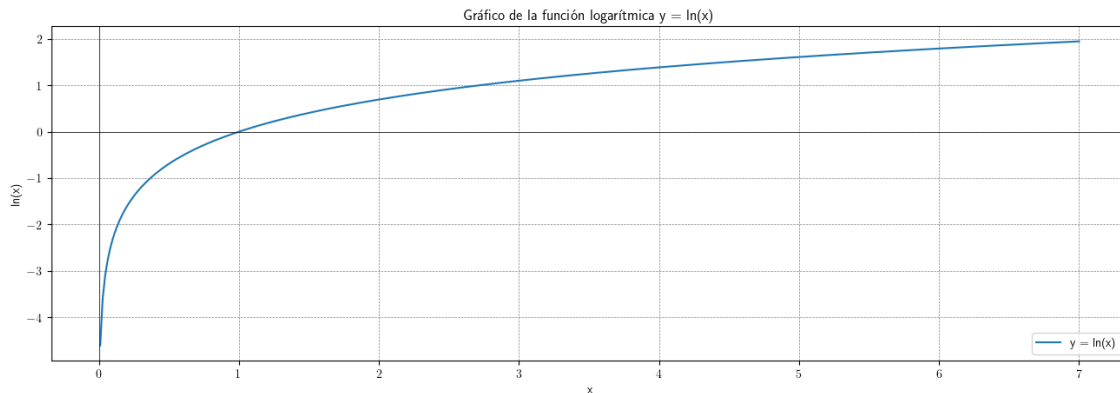
```
# Definir el rango de valores para x (empezando desde un número positivo ya que log(0) no está definido)
x = np.linspace(0.01, 7, 400) # Valores de 0.1 a 10

# Calcular y = log(x)
y = np.log(x)

# Crear el gráfico
plt.figure(figsize=(16, 5))
plt.plot(x, y, label='y = ln(x)')

# Añadir etiquetas y título
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('ln(x)')
plt.title('Gráfico de la función logarítmica y = ln(x)')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.legend()
plt.savefig("./img/lecc01/funcion_logaritmica.png")
```

---



---

```
# Creamos un nuevo dataframe con los datos originales y varias transformaciones de los mismos
TransformedData = OrigData.copy()
TransformedData['dataLog'] = np.log(OrigData['Passengers'])
TransformedData['dataLogDiff'] = TransformedData['dataLog'].diff(1)
TransformedData['dataLogDiffDiff12'] = TransformedData['dataLogDiff'].diff(12)
```

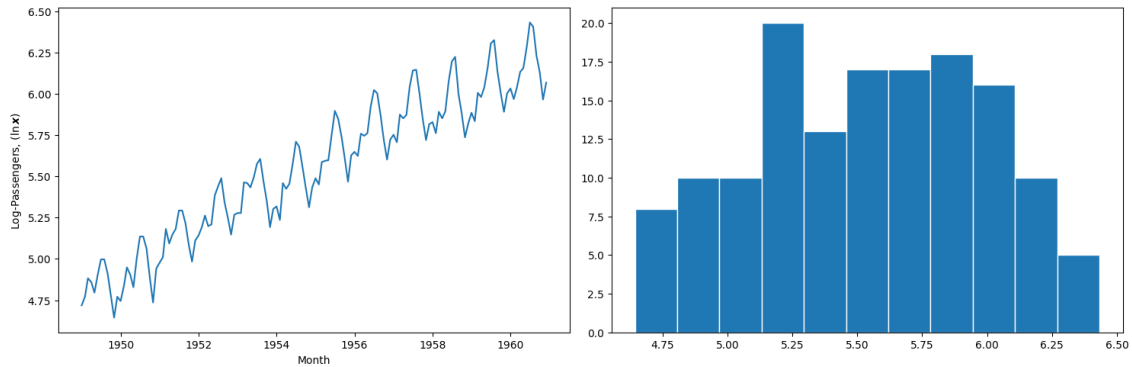
---

---

```
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(TransformedData['dataLog'])
plt.xlabel("Month")
plt.ylabel(r"Log-Passengers, ($\ln\boldsymbol{x}$) ")
```



```
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.hist(TransformedData['dataLog'], edgecolor='white', bins=11)
plt.tight_layout()
#plt.savefig("./img/lecc01/airlinepass_log+hist.png")
```



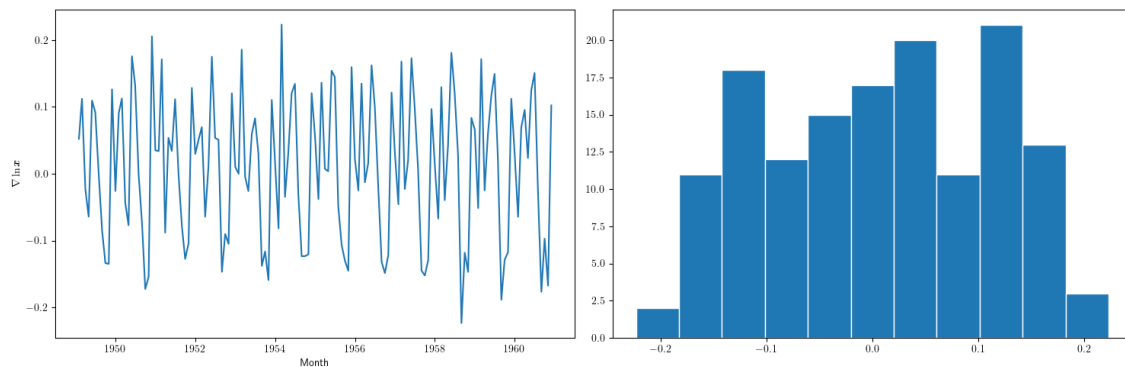
$$\ln \mathbf{x} = (\ln(x_1), \dots, \ln(x_{114}))$$

Ésta tampoco parece la realización de un proceso estocástico *estacionario*

- Ahora la variabilidad estacional parece mantenerse de año en año
- Pero la media sigue creciendo de año en año

### 3.1.2. Primera diferencia del logaritmo de los datos

```
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(TransformedData['dataLogDiff'])
plt.xlabel("Month")
plt.ylabel(r"$\nabla \ln \mathbf{x}$")
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.hist(TransformedData['dataLogDiff'], edgecolor='white', bins=11)
plt.tight_layout()
#plt.savefig("./img/lecc01/airlinepass_logDiff+hist.png")
```



$$\mathbf{y} = \nabla \ln \mathbf{x} = \left( [\ln(x_2) - \ln(x_1)], \dots, [\ln(x_{114}) - \ln(x_{113})] \right)$$

Esta serie tampoco parece *.estacionaria* (\*)

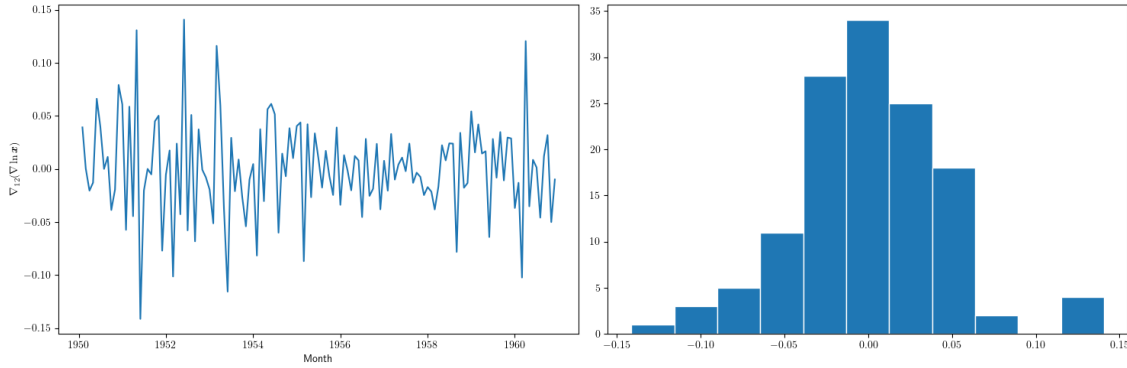
- Hay un *persistente* componente periódico (de naturaleza estacional), debido a que hay pocos viajes en otoño y muchos en Navidad, Semana Santa y verano (i.e., el número esperado de viajeros parece cambiar en función del mes o estación).

### 3.1.3. Diferencia estacional de la primera diferencia del logaritmo de los datos

---

```
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(TransformedData['dataLogDiffDiff12'])
plt.xlabel("Month")
plt.ylabel(r"$\nabla_{12}(\nabla \ln \mathbf{x})$")
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.hist(TransformedData['dataLogDiffDiff12'], edgecolor='white', bins=11)
plt.tight_layout()
#plt.savefig("./img/lecc01/airlinepass_logDiffDiff12+hist.png")
```

---



$$\mathbf{z} = \nabla_{12}(\nabla \ln \mathbf{x}) = \nabla_{12}(\mathbf{y}) = \left( (y_{13} - y_1), \dots, (y_{113} - y_{101}) \right)$$

Esta serie se aproxima más al aspecto de la realización de un proceso *estacionario*

- Aunque parece haber más varianza a principios de los 50 que a finales
- De propina, el histograma sugiere una distribución aproximadamente Gaussiana

## 3.2. Tasa logarítmica de crecimiento

---

```
START = 100
UnoPorCiento = lambda n0, t: n0 if t<=1 else 1.01 * UnoPorCiento(n0, t-1)
TasaLogCrecimiento = pd.DataFrame({'$y_t$': [UnoPorCiento(START,t+1) for t in range(10)]})
TasaLogCrecimiento['$\frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$'] = TasaLogCrecimiento['$y_t$'].pct_change()
TasaLogCrecimiento['$\ln y_t$'] = np.log(TasaLogCrecimiento['$y_t$'])
TasaLogCrecimiento['$\\ln y_t - \ln y_{t-1}$'] = TasaLogCrecimiento['$\ln y_t$'] - TasaLogCrecimiento['$\ln y_{t-1}$'].shift(1)
TasaLogCrecimiento['$\frac{y_t - y_0}{y_0}$'] = TasaLogCrecimiento['$y_t$'].apply(lambda x: ((x/START)-1))
TasaLogCrecimiento['$\\ln y_t - \ln y_0$'] = TasaLogCrecimiento['$\ln y_t$'] - TasaLogCrecimiento['$\ln y_0$'].iloc[0]
```

---

La tasa logarítmica de variación de  $\mathbf{y}$  se define como  $z_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$ ; es decir

$$\mathbf{z} = \nabla \ln \mathbf{y} = \left( [\ln(y_2) - \ln(y_1)], \dots, [\ln(y_n) - \ln(y_{n-1})] \right)$$

y se *aproxima* a la tasa de crecimiento (en tanto por uno) si el incremento es pequeño.

	$y_t$	$\frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$	$\ln y_t$	$(\ln y_t - \ln y_{t-1})$	$\frac{y_t - y_0}{y_0}$	$(\ln y_t - \ln y_0)$
0	100.000000	NaN	4.605170	NaN	0.000000	0.000000
1	101.000000	0.01	4.615121	0.00995	0.010000	0.009950
2	102.010000	0.01	4.625071	0.00995	0.020100	0.019901
3	103.030100	0.01	4.635021	0.00995	0.030301	0.029851
4	104.060401	0.01	4.644972	0.00995	0.040604	0.039801
5	105.101005	0.01	4.654922	0.00995	0.051010	0.049752
6	106.152015	0.01	4.664872	0.00995	0.061520	0.059702
7	107.213535	0.01	4.674823	0.00995	0.072135	0.069652
8	108.285671	0.01	4.684773	0.00995	0.082857	0.079603
9	109.368527	0.01	4.694723	0.00995	0.093685	0.089553

### 3.2.1. Comentarios sobre los datos transformados

Transformación de la serie temporal $\mathbf{y} = \{y_t\}, t = 1 : n$	Comentario
$\mathbf{z} = \ln \mathbf{y} = \{\ln y_t\}$	A veces independiza la volatilidad del nivel. A veces induce normalidad.
$\mathbf{z} = \nabla \mathbf{y} = \{y_t - y_{t-1}\}$	Indica al crecimiento absoluto entre periodos consecutivos.
$\mathbf{z} = \nabla \ln \mathbf{y}$ $= \{\ln y_t - \ln y_{t-1}\}$	Tasa logarítmica de crecimiento. Aproximación del crecimiento relativo entre periodos consecutivos.
$\mathbf{z} = \nabla \nabla \ln \mathbf{y} = \nabla^2 \ln \mathbf{y}$	Cambio en la tasa log. de crecimiento. Indica la “aceleración” en el crecimiento relativo.
$\mathbf{z} = \nabla_s \ln \mathbf{y}$ $= \{\ln y_t - \ln y_{t-s}\}$	Tasa log. de crecimiento acumulada en un ciclo estacional completo ( $s$ periodos). Cuando el período estacional es de un año, se conoce como “tasa anual” o “tasa interanual” de crecimiento.
$\mathbf{z} = \nabla \nabla_s \ln \mathbf{y}$	Cambio en la tasa log. de crecimiento acumulada en un ciclo estacional completo. Es un indicador de aceleración en el crecimiento acumulado.