# Índice

# Econometría Aplicada. Lección 8

Marcos Bujosa

15 de octubre de 2024

**Resumen**

En esta lección repasamos los instrumentos de identificación y diagnosis del análisis univariante. Extendemos la notación para incorporar modelos con raíces unitarias. Presentamos modelos estacionales y finalmente resumimos las ideas principales del análisis univariante.

### Carga de algunas librerías de R

```r
# cargamos algunas librerías de R
library(tfarima)      # librería de José Luis Gallego para Time Series
library(readr)        # para leer ficheros CSV
library(ggplot2)      # para el scatterplot (alternaticamente library(tidyverse))
library(ggfortify)    # para pintar series temporales
library(jtools)       # para representación resultados estimación
library(zoo)          # para generar objetos ts (time series)
# y fijamos el tamaño de las figuras que se generan en el notebook
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 4, repr.plot.res = 200)
```

## 1. Identificación y diagnosis

- Combinando las herramientas gráficas y estadísticas que hemos visto, se puede inferir el modelo subyacente a los datos.
- Este proceso de especificación empírica del modelo es conocido como "*identificación*"

El proceso de identificación puede estructurarse como una secuencia de preguntas:

1. ¿Es estacionaria la serie?
2. ¿Tiene una media significativa?
3. ¿Es persistente la ACF? ¿sigue alguna pauta reconocible?
4. ¿Es persistente la PACF? ¿sigue alguna pauta reconocible?

- La identificación se basa en estadísticos, como la media muestral o las autocorrelaciones, cuya representatividad depende de la estacionariedad de las series
- Tras inducir la estacionariedad, especificamos un modelo tentativo decidiendo cuál de las funciones ACF o PACF es finita y cuál es persistente

| | ACF finita | ACF persistente |
|---|---|---|
| **PACF finita** | Ruido blanco: retardos conjuntamente NO significativos | AR: orden indicado por la PACF |
| **PACF persistente** | MA: orden indicado por la ACF | ARMA |

La parametrización de mayor orden en modelos ARMA con series económicas suele ser ARMA$(2,1)$

## 1.1. Instrumentos de identificación

| | Instrumento | Objetivo y observaciones |
|---|---|---|
| Transf. logarítmica | Gráficos rango-media y serie temporal | Conseguir independizar la variabilidad de los datos de su nivel. Las series económicas necesitan esta transformación frecuentemente |
| $d$, orden de diferenciación | Gráfico de la serie temporal. ACF (caída lenta y lineal). Contrastes de raíz unitaria (DF o ADF y KPSS) | Conseguir que los datos fluctúen en torno a una media estable. En series económicas, $d$ suele ser 0, 1 ó 2 |
| Constante | Media de la serie transformada. Desviación típica de la media | Si la media de la serie transformada es significativa, el modelo debe incluir un término constante |
| $p$, orden AR | Si PACF de orden $p$ y ACF infinita | En series económicas $p$ suele ser $\leq 2$ |
| $q$, orden MA | Si ACF de orden $q$ y PACF infinita | En series económicas q suele ser $\leq 1$ |

## 1.2. Instrumentos de diagnosis

| | Instrumento | Posible diagnóstico |
|---|---|---|
| $d$, orden de diferenciación | *Proximidad a 1* de alguna raíz de los polinomios AR o MA | Conviene diferenciar si la raíz es AR; o quitar una diferencia si es MA (*salvo si hay tendencia determinista*) |
| $d$, orden de diferenciación | Gráfico de los residuos | Si muestra rachas largas de residuos positivos o negativos, puede ser necesaria una diferencia adicional. |
| Constante | Media de los residuos | Si es significativa: añadir una constante |
| Constante | Constante estimada | Si NO es significativa: el modelo mejorará quitando el término constante |
| $p$ y $q$, | Contrastes de significación de los parámetros estimados | Pueden sugerir eliminar parámetros irrelevantes |
| $p$ y $q$, | ACF/PACF residuos. Test Q de Ljung-Box | Indican posibles pautas de autocorrelación no modelizadas |
| $p$ y $q$, | Correlaciones elevadas entre los parámetros estimados | Puede ser síntoma de sobreparametrización |

Aún, una vez superadas las pruebas de diagnostico, se puede aplicar un análisis exploratorio consistente en añadir parámetros AR y/o MA, para comprobar si resultan significativos y mejoran el modelo

# 2. Raíces unitarias

## 2.1. Notación: operadores retardo y diferencia y modelos ARIMA

El operador diferencia $\nabla$ se define a partir del operador retardo como $\nabla = (1 - \mathsf{B})$:

$$\nabla Y_t = (1 - \mathsf{B})Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

El operador diferencia estacional es $\nabla_S = (1 - \mathsf{B}^S)$:

$$\nabla_S Y_t = (1 - \mathsf{B}^S)Y_t = Y_t - Y_{t-S}$$

### 2.1.1. Notación: ARIMA

Extendemos la notación a procesos con raíces autorregresivas unitarias Con "ARIMA$(p, d, q)$"; donde $d$ indica el número de diferencias que la serie necesita para ser $I(0)$,

$$\boldsymbol{\phi}_p * \nabla^d * \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\theta}_q * \boldsymbol{U}$$

es decir

$$\boldsymbol{\phi}_p(\mathsf{B})\nabla^d Y_t = \boldsymbol{\theta}_q(\mathsf{B})U_t; \quad t \in \mathbb{Z}$$

## 2.2. Raíces unitarias en los polinomios AR y MA

Cuando un polinomio tiene alguna raíz igual a uno se dice que tiene "raíces unitarias".
Si el polinomio AR estimado tiene alguna raíz "próxima a uno.es síntoma de infradiferenciación.
Si el polinomio MA estimado tiene alguna raíz "próxima a uno.es síntoma de

1. sobrediferenciación... salvo cuando...

2. antes de diferenciar hubiera una tendencia determinista (que podemos comprobar, por ejemplo, con un test ADF).

Ejemplos que ilustran los tres casos:

| Modelo expresado con raíces unitarias en $\boldsymbol{\phi}$ o $\boldsymbol{\theta}$ | Modelo equivalente sin raíces unitarias en $\boldsymbol{\phi}$ o $\boldsymbol{\theta}$ |
|---|---|
| $(1 - 1{,}5\mathsf{B} + {,}5\mathsf{B}^2)Y_t = U_t$ | $(1 - 0{,}5\mathsf{B})\nabla Y_t = U_t$ |
| $(1 - {,}5\mathsf{B} + 0{,}7\mathsf{B}^2)\nabla^2 Y_t = (1 - \mathsf{B})U_t$ | $(1 - {,}5\mathsf{B} + 0{,}7\mathsf{B}^2)\nabla Y_t = U_t$ |
| $\nabla Y_t = \beta + (1 - \mathsf{B})U_t$ | $Y_t = \beta t + U_t$ (¡no estacionario!) |

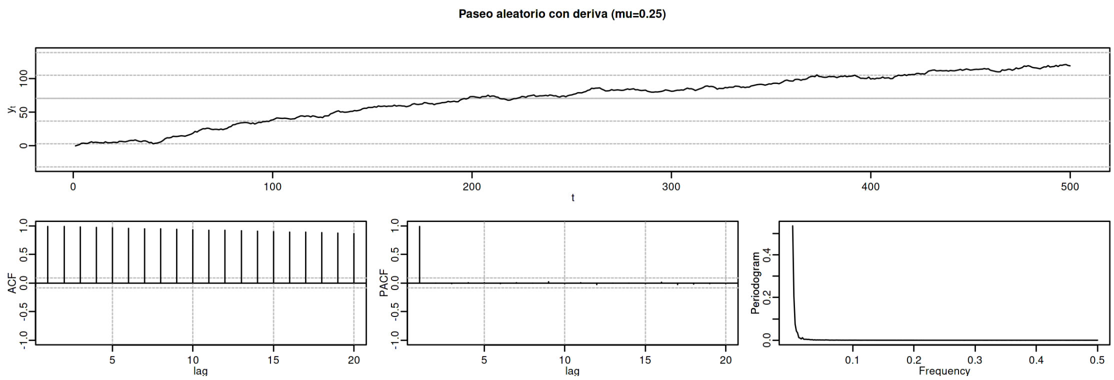
## 2.3. Paseos aleatorios

Un paseo aleatorio representa una variable cuyos cambios son ruido blanco:

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + U_t$$

Cuando $\mu \neq 0$ se denomina *paseo aleatorio con deriva*: $\nabla Y_t = \mu + U_t$

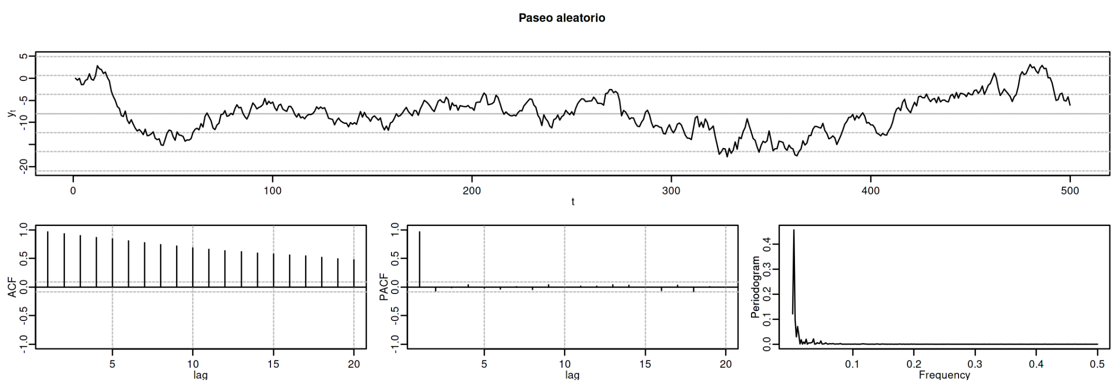
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 4, repr.plot.res = 200)
rwcd <- um(i = "(1 - B)",
           mu=.25)
ide(sim(rwcd, n = 500),
    lag.max = 20,
    graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"),
    main = "Paseo aleatorio con deriva (mu=0.25)")
```




El proceso tiene mayor inercia cuanto mayor es $|\mu|$. El signo de $\mu$ determina el signo de la pendiente global.

Cuando $\mu = 0$ se denomina sencillamente *paseo aleatorio*: $\nabla Y_t = U_t$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 4, repr.plot.res = 200)
rw <- um(i = "(1 - B)")
ide(sim(rw, n = 500), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"), main = "Paseo aleatorio")
```




# 3. Modelos ARIMA estacionales (SARIMA)

El período estacional $S$ es el número mínimo de observaciones necesarias para recorrer un ciclo estacional completo. Por ejemplo, $S = 12$ para datos mensuales, $S = 4$ para datos trimestrales, $S = 24$ para datos horarios, etc.

Describiremos comportamientos estacionales con modelos ARIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_S$

$$\boldsymbol{\phi}_p(\mathsf{B})\boldsymbol{\Phi}_P(\mathsf{B}^S)\nabla^d\nabla_S^D Y_t = \boldsymbol{\theta}_q(\mathsf{B})\boldsymbol{\Theta}_q(\mathsf{B}^S)U_t; \quad t \in \mathbb{Z}$$

donde

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_P(\mathsf{B}^S) =& 1 - \Phi_1\mathsf{B}^{1\cdot S} - \Phi_2\mathsf{B}^{2\cdot S} - \cdots - \Phi_P\mathsf{B}^{P\cdot S}\\ \boldsymbol{\Theta}_Q(\mathsf{B}^S) =& 1 - \Theta_1\mathsf{B}^{1\cdot S} - \Theta_2\mathsf{B}^{2\cdot S} - \cdots - \Theta_Q\mathsf{B}^{Q\cdot S}\\ \nabla_S^D =& (1-\mathsf{B}^S)^D\end{aligned}$$

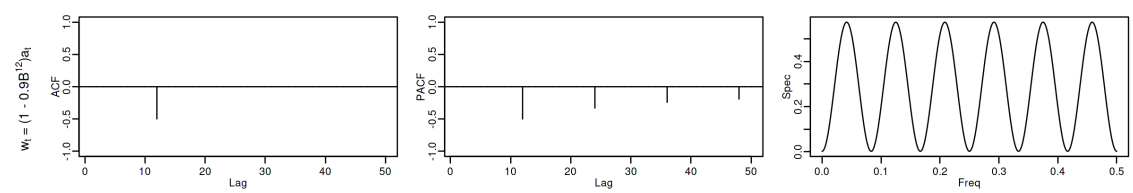
Es decir, el modelo consta de polinomios autorregresivos y de media móvil tanto regulares (en minúsculas) como estacionales (en mayúsculas).

Veamos un ejemplo de un modelo MA(1) estacional y otro de un modelo AR(1) estacional...

## 3.1. MA(1) estacional con raíz positiva

```r
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
SMA1 <- um(ma = "(1 - 0.9B12)")
display(list(SMA1), lag.max = 50, byrow = TRUE)
```

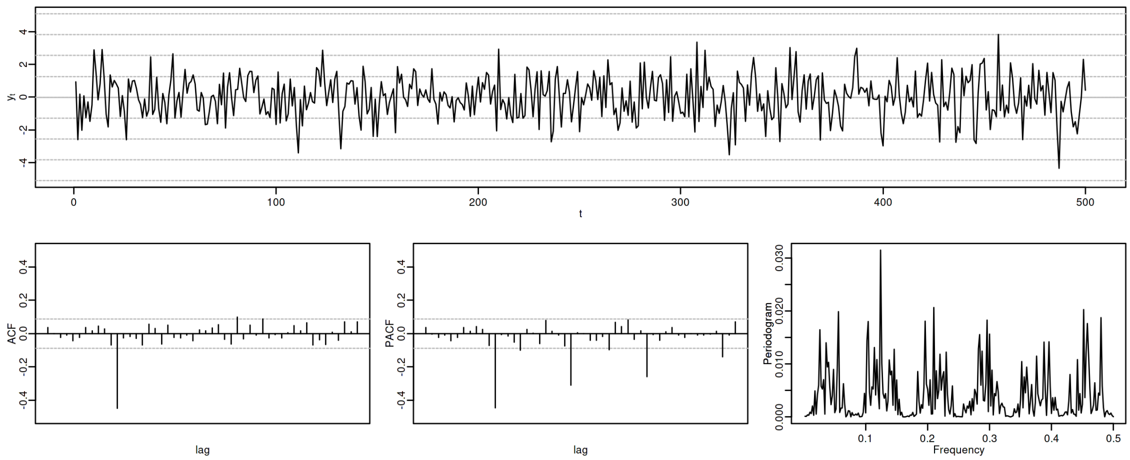
MA(1) estacional: $\quad \boldsymbol{\Theta} = 1 - 0{,}9z^{12} \quad \Rightarrow \quad X_t = (1 - 0{,}9\mathsf{B}^{12})U_t$




```r
roots(SMA1)
```

| | Real | Imaginary | Modulus | Frequency | Period | Mult. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1.008819e+00 | 1.082287e-14 | 1.008819 | 0.00000000 | Inf | 1 |
| | 8.736626e-01 | 5.044094e-01 | 1.008819 | 0.08333333 | 12.0 | 1 |
| | 8.736626e-01 | -5.044094e-01 | 1.008819 | 0.08333333 | 12.0 | 1 |
| | 5.044094e-01 | -8.736626e-01 | 1.008819 | 0.16666667 | 6.0 | 1 |
| | 5.044094e-01 | 8.736626e-01 | 1.008819 | 0.16666667 | 6.0 | 1 |
| 1. | 1.288336e-14 | -1.008819e+00 | 1.008819 | 0.25000000 | 4.0 | 1 |
| | -2.057493e-17 | 1.008819e+00 | 1.008819 | 0.25000000 | 4.0 | 1 |
| | -5.044094e-01 | -8.736626e-01 | 1.008819 | 0.33333333 | 3.0 | 1 |
| | -5.044094e-01 | 8.736626e-01 | 1.008819 | 0.33333333 | 3.0 | 1 |
| | -8.736626e-01 | -5.044094e-01 | 1.008819 | 0.41666667 | 2.4 | 1 |
| | -8.736626e-01 | 5.044094e-01 | 1.008819 | 0.41666667 | 2.4 | 1 |
| | -1.008819e+00 | -1.257046e-14 | 1.008819 | 0.50000000 | 2.0 | 1 |

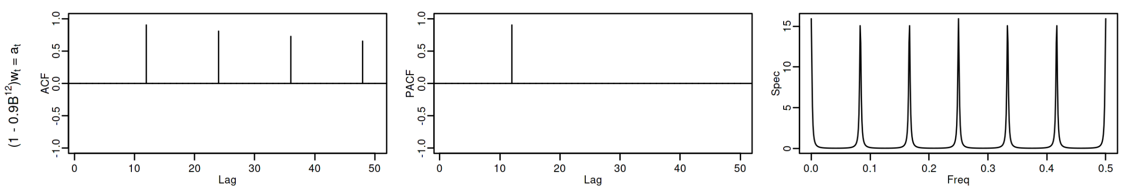
```r
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(SMA1, n = 500),
    lag.max = 50,
    graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```




## 3.2. AR(1) estacional con raíz positiva

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
SAR1 <- um(ar = "(1 - 0.9B12)")
display(list(SAR1), lag.max = 50, byrow = TRUE)
```

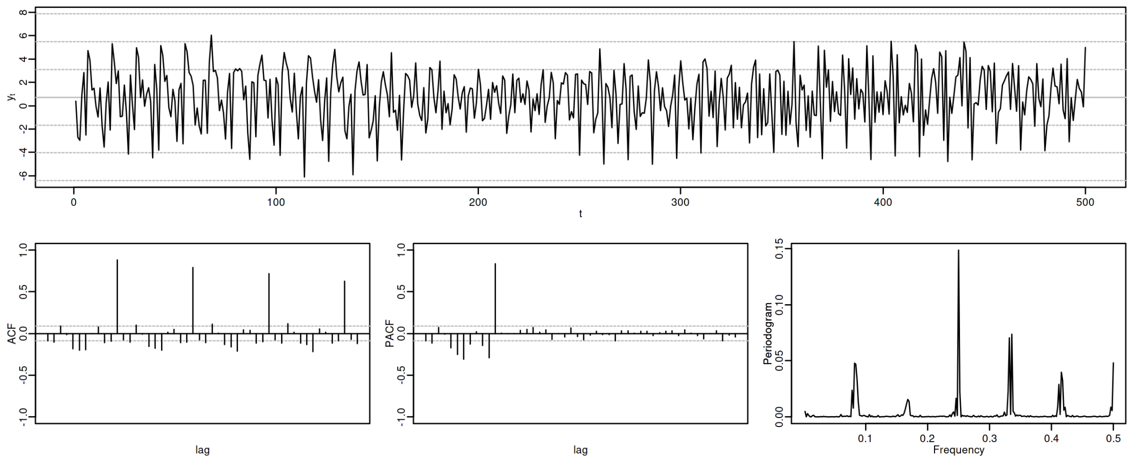
$$\text{AR(1) estacional:} \quad \mathbf{\Phi} = 1 - 0{,}9z^{12} \quad \Rightarrow \quad (1 - 0{,}9\mathsf{B}^{12})X_t = U_t$$




```
roots(SAR1)
```

Evidentemente las raíces son iguales a las del caso anterior (aunque ahora corresponden al polinomio autorregresivo).

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(SAR1, n = 500),
    lag.max = 50,
    graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```




Con estos dos ejemplos hemos podido apreciar que:

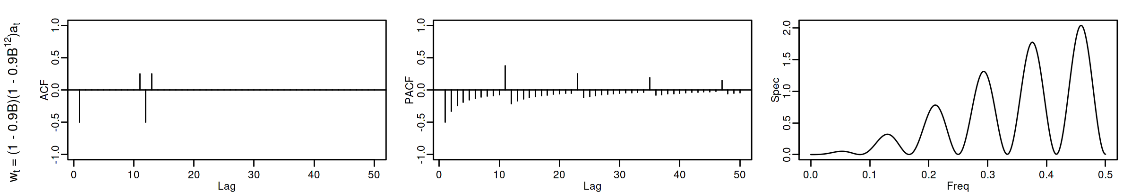
- las pautas de autocorrelación son análogas a las de los MA(1) y AR(2), pero ahora los retardos significativos corresponden a los retardos estacionales, es decir, a múltiplos del período estacional $S$.
- En estos ejemplos, en los que $S = 12$, los retardos estacionales son: 12, 24, 36, 48, 60,...
- las correlaciones correspondientes a los “retardos regulares” (es decir, todos menos menos los estacionales) son no significativas en general.

Veamos ahora un par de ejemplos de modelos estacionales multiplicativos (i.e., con parte regular y parte estacional).

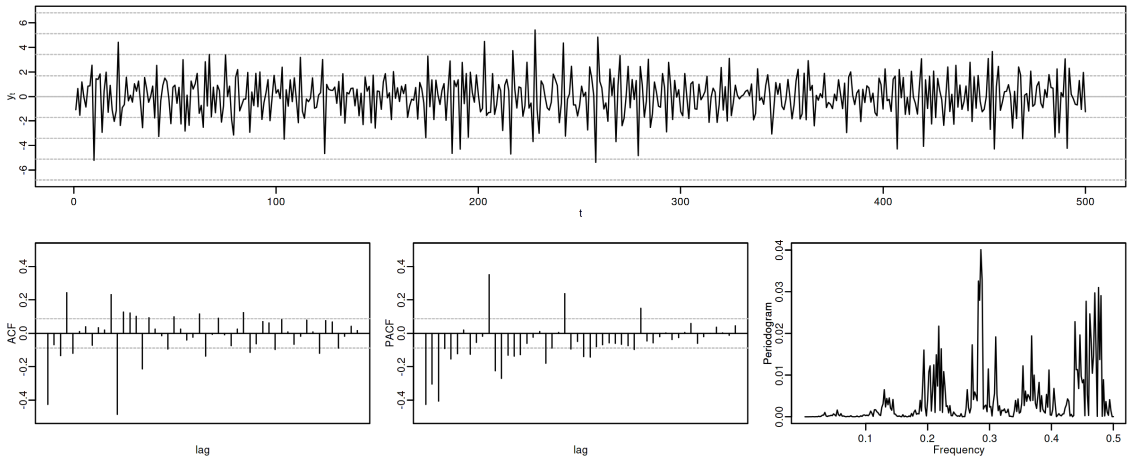
## 3.3. ARIMA$(0,0,1) \times (0,0,1)_{12}$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
MA1SMA1 <- um(ma = "(1 - 0.9B)(1 - 0.9B12)")
display(list(MA1SMA1), lag.max = 50, byrow = TRUE)
```

ARIMA$(0,0,1) \times (0,0,1)_{12}$: $\quad X_t = (1 - 0{,}9\mathsf{B})(1 - 0{,}9\mathsf{B}^{12})U_t$



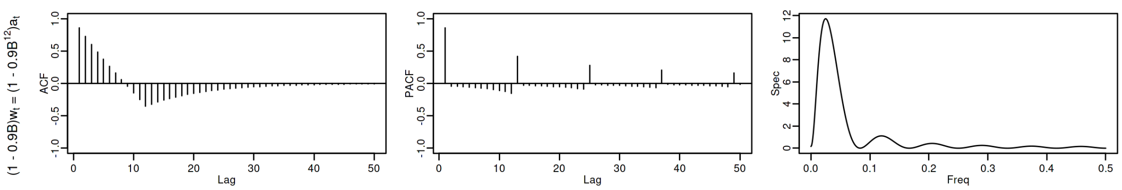

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(MA1SMA1, n = 500),
    lag.max = 50,
    graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



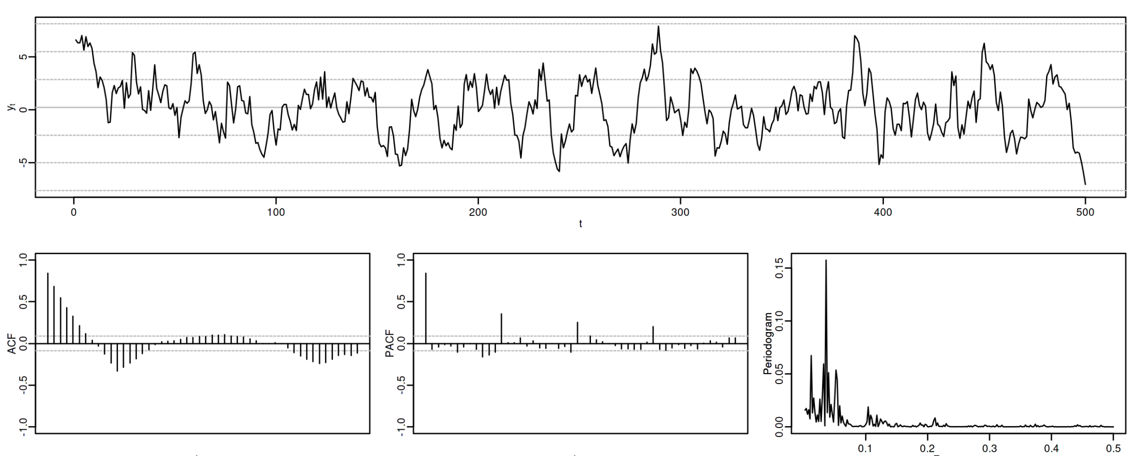

## 3.4. ARIMA$(1, 0, 0) \times (0, 0, 1)_{12}$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
AR1SMA1 <- um(ar = "(1 - 0.9B)", ma = "(1 - 0.9B12)")
display(list(AR1SMA1), lag.max = 50, byrow = TRUE)
```

$$\text{ARIMA}(1, 0, 0) \times (0, 0, 1)_{12}: \quad (1 - 0{,}9\mathsf{B})X_t = (1 - 0{,}9\mathsf{B}^{12})U_t$$



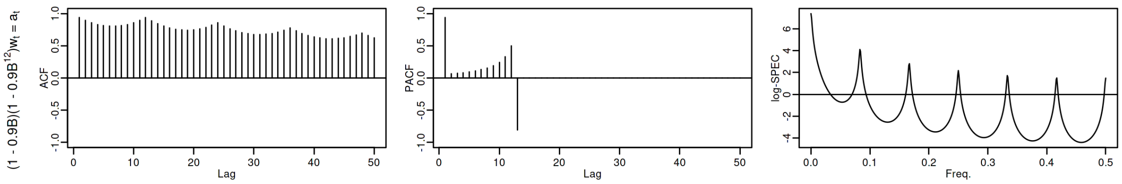

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(AR1SMA1, n = 500),
    lag.max = 50,
    graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



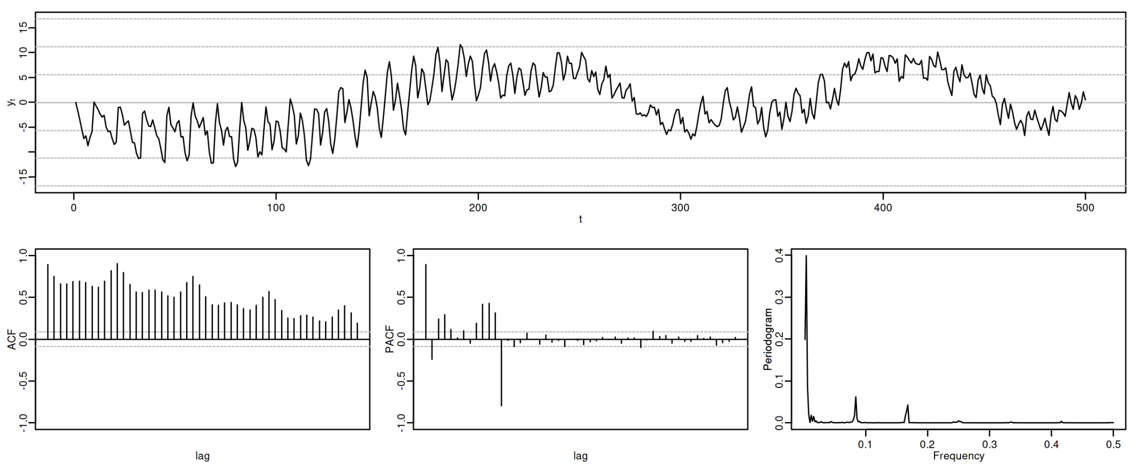
## 3.5. ARIMA$(1, 0, 0) \times (1, 0, 0)_{12}$

```r
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
AR1SAR1 <- um(ar = "(1 - 0.9B)(1 - 0.9B12)")
display(list(AR1SAR1), lag.max = 50, byrow = TRUE, log.spec = TRUE)
```

$$\text{ARIMA}(1, 0, 0) \times (1, 0, 0)_{12}: \quad (1 - 0{,}9\text{B})(1 - 0{,}9\text{B}^{12})X_t = U_t$$



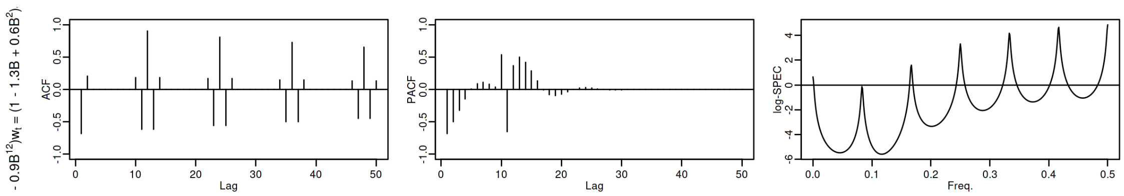

```r
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(AR1SAR1, n = 500),
    lag.max = 50,
    graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



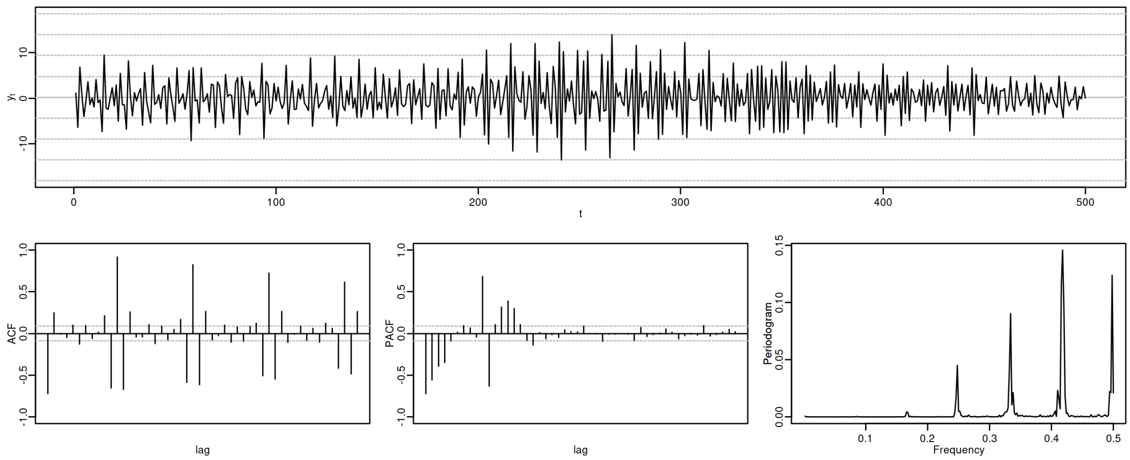

## 3.6. ARIMA$(0, 0, 1) \times (1, 0, 0)_{12}$

```r
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
MA1SAR1 <- um(ar = "(1 - 0.9B12)", ma = "(1 - 0.9)")
display(list(MA1SAR1), lag.max = 50, byrow = TRUE, log.spec = TRUE)
```

$$\text{ARIMA}(0, 0, 1) \times (1, 0, 0)_{12}: \quad (1 - 0{,}9\text{B}^{12})X_t = (1 - 0{,}9\text{B})U_t$$




```r
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(MA1SAR1, n = 500),
    lag.max = 50,
    graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```




En estos cuatro ejemplos hemos podido apreciar que

- en el entorno de los retardos estacionales surgen una serie de coeficientes significativos ("satélites") que proceden de la interacción entre las estructuras regular y estacional
- Estos satélites son útiles para identificar en qué retardos estacionales hay autocorrelaciones no nulas, pero no requieren una parametrización especial.

# 4. Resumen del análisis univariante de series temporales

## 4.1. Ideas principales respecto a la modelización univariante

- Son modelos sin variables exógenas
- Resumen la interdependencia temporal con polinomios de órdenes reducidos.
- Está especialmente indicada para hacer predicción.
- Parte de dos supuestos sobre el proceso estocástico subyacente:
  1. es débilmente estacionario
  2. tiene representación como proceso lineal: $Y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} a_j U_{t-j}$ con $\mu \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \ell^2$ y $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$
- (Además se suele asumir normalidad en $U_t$)
- Utiliza múltiples instrumentos: (a) gráficos (b) función de autocorrelación (c) función de autocorrelación parcial, (d) estadístico Q de Ljung-Box, etc. . .
- Si la serie original no "parece"débilmente estacionaria, se induce esta propiedad mediante las transformaciones adecuadas

| ACF finita | ACF persistente |
|---|---|

Continued on next page

Continued from previous page

| | **ACF finita** | **ACF persistente** |
|---|---|---|
| **PACF finita** | Ruido blanco: retardos conjuntamente NO significativos | AR: orden indicado por la PACF |
| **PACF persistente** | MA: orden indicado por la ACF | ARMA |

## 4.2. Metodología

Tres fases:

**Identificación** Elija una especificación provisional para el proceso estocástico generador de los datos en base a las características medibles de los datos: “dejar que los datos hablen”

**Estimación** suele requerir métodos iterativos (*Gretl se encarga de esto*)

**Diagnosis** de la calidad estadística del modelo ajustado. Algunos controles estándar son:

- Significatividad de los parámetros estimados
- Estacionariedad y homocedasticidad de los residuos
- ¿Existe un patrón de autocorrelación residual que podría ser modelado? ¿O hemos logrado que los residuos sean ***ruido blanco"***?

Si la diagnosis no es satisfactoria, se vuelve a la primera fase.
Si la diagnosis es satisfactoria… ¡hemos logrado un modelo aceptable!