Índice

Econometría Aplicada. Lección 5

Marcos Bujosa

8 de septiembre de 2024

Resumen

Esta lección veremos las dificultades que ocasiona la correlación serial y algunos tipos de procesos débilmente estacionarios que nos permitirán lidiar con ella.

- lección en html
- lección en mybinder

Carga de algunas librerías de R

Primero cargamos la librería `tfarima` (Repositorio Cran: `https://cran.r-project.org/web/packages/tfarima/index.html`; repositorio GitHub: `https://github.com/gallegoj/tfarima`)

```
library(tfarima)      # librería de José Luis Gallego para Time Series
library(readr)        # para leer ficheros CSV
library(ggplot2)      # para el scatterplot (alternaticamente library(tidyverse))
library(ggfortify)    # para pintar series temporales
library(jtools)       # para representación resultados estimación
library(zoo)          # para generar objetos ts (time series)
```

y además fijamos los parámetros por defecto para las figuras en `png` del notebook

```
# fijamos el tamaño de las figuras que se generan en el notebook
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 4, repr.plot.res = 200)
```

1. Series temporales vs datos de sección cruzada

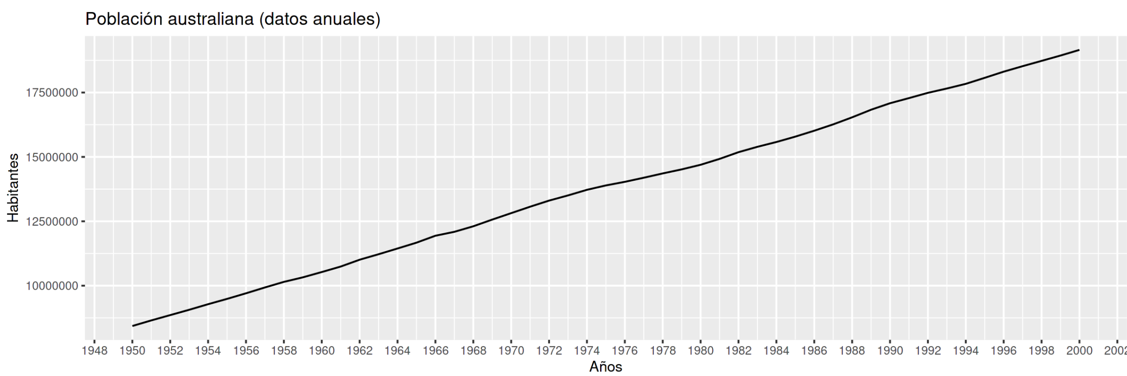
Corresponden a observaciones de un mismo objeto a lo largo del tiempo. El índice indica el instante de cada medición. *El orden cronológico puede ser crucial* al modelar los datos.

- El motivo es que frecuentemente el valor medido en un instante de tiempo está relacionado con otras mediciones próximas en el tiempo (*correlación serial*).
- Si es así, ya no deberíamos asumir que las variables aleatorias del proceso estocástico subyacente, $\boldsymbol{X} = (X_t \mid t \in \mathbb{Z})$, son independientes entre sí.

Esto tiene importantes implicaciones en las técnicas de análisis y los modelos a utilizar.

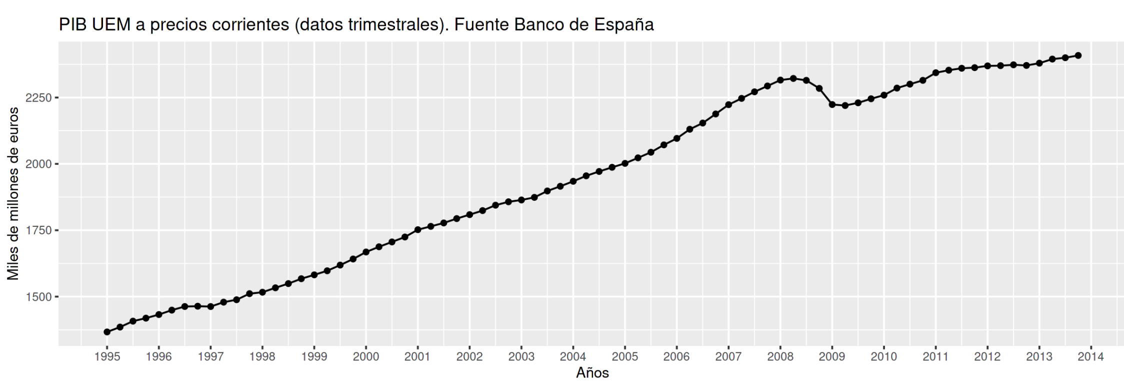
1. Población en Australia

```
PoblacionAustralia_ts = as.ts( read.zoo('datos/PoblacionAustralia.csv',
                                        header=TRUE,
                                        index.column = 1,
                                        sep=",",
                                        FUN = as.yearmon))
p <- autoplot(PoblacionAustralia_ts)
p <- p + labs(y = "Habitantes", x = "Años") + ggtitle("Población australiana (datos anuales)")
p <- p + scale_x_continuous(breaks = scales::pretty_breaks(n = 20))
p
```



2. PIB UEM

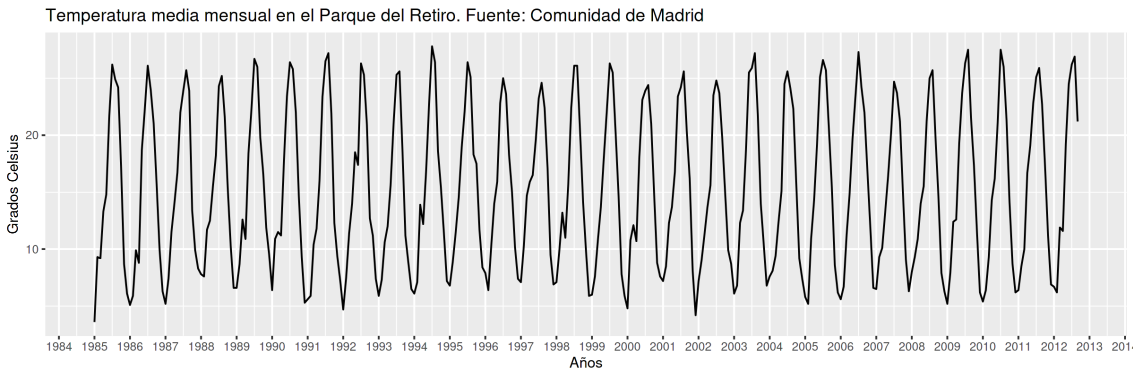
```
PIB_UEM_df <- read_csv("datos/PIB_UEM.csv",
                       show_col_types = FALSE)
fmt <- "%YQ%q"
PIB_UEM_df$Time <- as.yearqtr(PIB_UEM_df$obs, format = fmt)
# head(PIB_UEM_df,3)
P <- ggplot(PIB_UEM_df, aes(Time, PIB))
P <- P + geom_point() + geom_line()
P <- P + scale_x_continuous(breaks = scales::pretty_breaks(n = 15))
P <- P + labs(y = "Miles de millones de euros", x = "Años") + ggtitle("PIB UEM a precios corrientes (datos trimestrales).
P
```



3. Temperatura media en el Parque del Retiro. Madrid

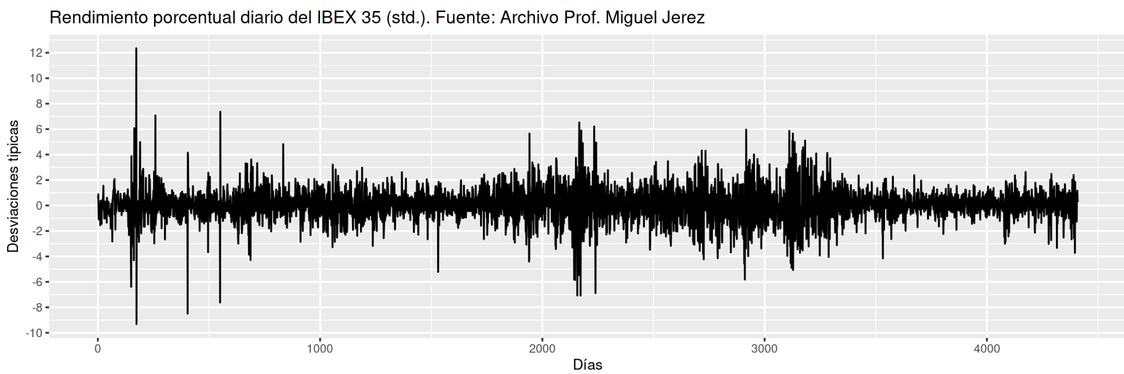
```
TemperaturaRetiro_df <- read_csv("datos/Retiro.txt", show_col_types = FALSE)
# Añadimos fechas
TemperaturaRetiro_df$Time <- as.yearmon(1985 + seq(0, nrow(TemperaturaRetiro_df)-1)/12)
```

```r
P <- ggplot(TemperaturaRetiro_df, aes(Time, TemperaturaMedia))
P <- P + geom_line() # + geom_point()
P <- P + scale_x_continuous(breaks = scales::pretty_breaks(n = 25))
P <- P + labs(y = "Grados Celsius", x = "Años") + ggtitle("Temperatura media mensual en el Parque del Retiro. Fuente: Com
P
```



4. Rendimiento porcentual diario del IBEX 35 (std)

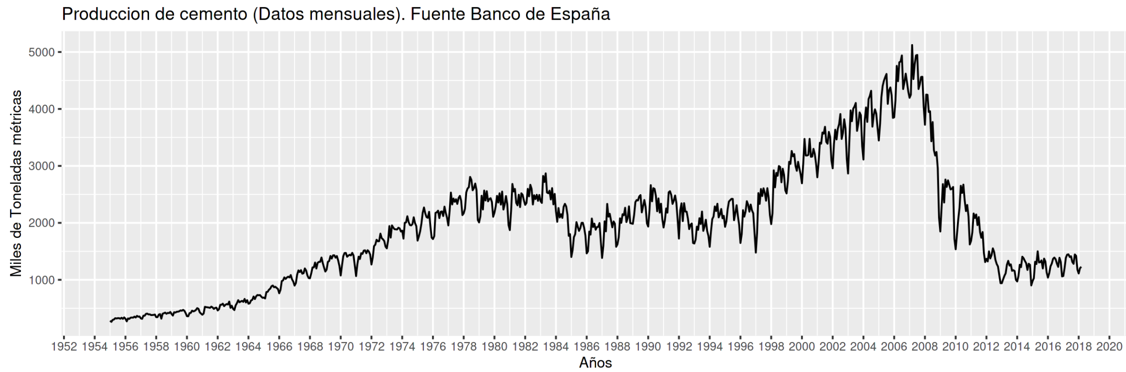
```r
IBEX35_ts = as.ts( read.csv.zoo("datos/IBEX35.csv",
                                strip.white = TRUE))
P <- autoplot(IBEX35_ts) + scale_y_continuous(breaks = scales::pretty_breaks(n = 12))
p <- P + labs(y = "Desviaciones tipicas", x = "Días") + ggtitle("Rendimiento porcentual diario del IBEX 35 (std.). Fuente
p
```



- Datos centrados y estandarizados, i.e. el eje vertical está en desviaciones típicas.
- Los *volatility clustering* son característicos de series financieras de alta frecuencia.

5. Producción de cemento

```r
ProduccionCemento_df <- read_csv("datos/ProduccionCemento.csv",
                      show_col_types = FALSE)
fmt <- "%YM%m"
ProduccionCemento_df$Time <- as.yearmon(ProduccionCemento_df$obs, format = fmt)
# head(ProduccionCemento_df,3)
P <- ggplot(ProduccionCemento_df, aes(Time, ProduccionCemento))
P <- P + geom_line() # + geom_point()
P <- P + scale_x_continuous(breaks = scales::pretty_breaks(n = 25))
P <- P + labs(y = "Miles de Toneladas métricas", x = "Años") + ggtitle("Produccion de cemento (Datos mensuales). Fuente B
P
```



1.1. Correlación serial vs muestreo aleatorio simple

Con datos de

sección cruzada solemos asumir que el muestreo es aleatorio simple

- i.e., los datos son realizaciones de variables aleatorias i.i.d.

series temporales dicha asunción resulta generalmente errónea

- con frecuencia el nivel esperado (o la volatilidad) parece cambiar con t
- con frecuencia hay dependencia temporal (correlación serial).

Ejemplo: no parece aceptable asumir que $ProdCemento_{1960M01}$ se distribuye igual que $ProdCemento_{2000M04}$ (ni que sea independiente de $ProdCemento_{1959M01}$).

Veamos por qué esto genera dificultades...

Consideremos el proceso estocástico

$$\boldsymbol{X} = (X_t \mid t = 0, \pm1, \pm2, \dots).$$

Caracterizar su distribución conjunta (todos los momentos) es demasiado ambicioso.
Así que, tentativamente, vamos a fijarnos *solo* en los dos primeros momentos:

$$E(X_t) = \mu_t \quad \text{y} \quad Cov(X_t, X_k) = E\big[(X_t - \mu_t)(X_k - \mu_k)\big] = \lambda_{t,k}; \quad t, k \in \mathbb{Z}$$

(si $k = t$ entonces $\lambda_{t,t} = Var(X_t) = \sigma_t^2$).

Si el proceso $\boldsymbol{X}$ fuera gaussiano, conocer estos *parámetros* bastaría para caracterizar la distribución conjunta. Pero aún así...

- necesitaríamos para cada X_t una muestra suficiente para estimar los parámetros
  - pero en una serie temporal tenemos una sola realización de cada X_t.
- Además... para cada variable aleatoria X_t hay infinitos parámetros.

1.2. Tipos de procesos estocásticos que simplifican el escenario

- Si es débilmente estacionario se reduce drásticamente el número de parámetros:

$$E(X_t) = \mu \tag{1}$$
$$Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k \tag{2}$$

- Si además es i.i.d. podemos interpretar la serie temporal como una realización de un muestreo aleatorio simple.

El desafío para el analista es (y nótese el abuso de lenguaje)

primero transformar los datos para lograr que sean "***estacionarios***".

- (Algo vimos en la lección 1))

después transformar los datos estacionarios en una secuencia de "**datos *i.i.d***"

- (Aún no lo hemos visto)

Todo este proceso constituye la especificación y ajuste de un modelo a la serie temporal.

Antes de atacar los temas de especificación y ajuste de modelos, debemos estudiar un poco los procesos estocásticos débilmente estacionarios que vamos a utilizar.

2. Procesos estocásticos de segundo orden

El ambiente natural para estudiar las propiedades de segundo orden de una colección de variables aleatorias es el espacio de variables aleatorias X definidas en un espacio de probabilidad tales que

$$E(X) = 0 \quad \text{y} \quad E(X^2) < \infty$$

donde E es el operador esperanza. Denotaremos este espacio con H.

2.1. Un poco de geometría

El espacio, dotado de producto escalar y norma

$$\langle X \mid Y \rangle = E(XY), \qquad \|X\| = \sqrt{E(X^2)}, \qquad X, Y \in H,$$

es un espacio de Hilbert,

Nótese que como las variables de H tienen esperanza cero, el producto escalar entre $X, Y \in H$ también es

$$\langle X \mid Y \rangle = Cov(X, Y).$$

Por tanto, en este espacio H la noción geométrica de ortogonalidad coincide con la noción estadística de *no correlación*. Por tanto, en este contexto los términos producto escalar, covarianza y esperanza del producto serán intercambiables.

Una colección de variables aleatorias pertenecientes a H

$$\boldsymbol{X} = (X_t \mid t \in \mathbb{Z}) \;\text{ con }\; X_t \in H$$

se denomina *proceso estocástico de segundo orden*.

Si $\boldsymbol{Y} = (Y_t \mid t \in \mathbb{Z})$ es tal que $E(Y_t) = \mu \neq 0$, entonces $\boldsymbol{Y}$ no es de segundo orden.

Pero basta restar μ de cada Y_t para tener un proceso $(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu})$ de segundo orden.

Por ello siempre asumiremos (sin pérdida de generalidad) *que las variables aleatorias de los procesos estocásticos de esta lección* (y la siguiente) *tienen esperanza cero.*

2.2. Función de covarianzas

La *función de covarianzas* de un proceso estocástico $\boldsymbol{X}$ segundo orden es

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{s,t} \mid s,t \in \mathbb{Z})$$

donde $\gamma_{s,t} = Cov(X_s, X_t) \quad s,t \in \mathbb{Z}$.

Así, para cada par (s,t), la covarianza $\gamma_{s,t}$ mide la dependencia lineal entre X_s y X_t.

Esta función $\boldsymbol{\gamma}$ es demasiado general, por eso nos restringiremos a la subclase de procesos estocásticos *débilmente estacionarios*; pues simplifican enormemente la *función de covarianzas* $\boldsymbol{\gamma}$.

2.3. Proceso estocástico (débilmente) estacionario y su ACF

Un proceso estocástico de segundo orden $\boldsymbol{X}$ se dice que es *débilmente estacionario* (estacionario en covarianza o, sencillamente, estacionario) si la covarianza entre X_s y X_t solo depende de la diferencia $s-t$ para todo $s,t \in \mathbb{Z}$.

En tal caso se denomina *función de auto-covarianzas* de $\boldsymbol{X}$ a la secuencia

$$\boldsymbol{\gamma}(z) \;=\; (\gamma_k \mid k \in \mathbb{Z}) \;=\; \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k$$

donde $\gamma_k = Cov(X_{t+k}, X_t)$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Y se denomina matriz de autocovarianzas de $\boldsymbol{X}$ a la matriz simétrica

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Tanto la secuencia $\boldsymbol{\gamma}$ como la matriz $\boldsymbol{\Gamma}$ son *definidas positivas*; es decir, para todos los enteros $n \geq 1$ y escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \gamma_{i-j} \geq 0$$

ya que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j Cov(X_i, X_j) = Cov\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i,\ \sum_{j=1}^{n} c_j X_j\right) = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \mid \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \right\|^2 \geq 0.$$

Esto es equivalente a que las submatrices principales de $\boldsymbol{\Gamma}$ son definidas positivas.

Es más, una secuencia $\boldsymbol{\gamma}$ es definida positiva si y solo si existe un espacio de Hilbert H y un proceso estocástico estacionario $\boldsymbol{X}$ con $X_t \in H$ tales que $\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k})$ para todo $t,k \in \mathbb{Z}$ (Kolmogorov, 1941).

Propiedades de la función de autocovarianzas $\boldsymbol{\gamma}$ (ACF):

- $\gamma_0 \geq 0$
- $\boldsymbol{\gamma}$ es definida positiva; y por tanto,
  - $\boldsymbol{\gamma}$ es simétrica: $\gamma_k = \gamma_{-k}$
  - $\boldsymbol{\gamma}$ es acotada: $|\gamma_k| \leq \gamma_0$

Si $\gamma_0 > 0$, llamamos *función de autocorrelación* (ACF) a la secuencia: $\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\gamma_0}(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\gamma_k}{\gamma_0} z^k$.

3. Ejemplos de procesos (débilmente) estacionarios

3.1. Proceso de ruido blanco

Una secuencia $\boldsymbol{U} = (U_t \mid t \in \mathbb{Z})$ de variables aleatorias incorreladas y tales que

$$E(U_t) = 0 \quad \text{y} \quad Var(U_t) = E(U_t^2) = \sigma^2$$

para $t \in \mathbb{Z}$ y $0 < \sigma^2 < \infty$ se llama *proceso de ruido blanco.* $\quad \boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$.

Al ser variables aleatorias incorreladas, su función de autocovarianzas es

$$\boldsymbol{\gamma}(z) \;=\; \sigma^2 z^0 \;=\; (\ldots, 0, 0, \sigma^2, 0, 0, \ldots)$$

- Es el proceso estacionario (no trivial) más sencillo.
- Este proceso es el pilar sobre el que definiremos el resto de ejemplos.

3.2. Procesos lineales

Sea $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y sea $\boldsymbol{b} \in \ell^2$; es decir, una secuencia de cuadrado sumable $\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j^2 < \infty$.

Denominamos *proceso lineal* al proceso estocástico $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{U}$ cuyos elementos son

$$X_t \;=\; (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{U})_t \;=\; \boldsymbol{b}(\mathsf{B}) U_t \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j U_{t-j}; \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

$\boldsymbol{b}(\mathsf{B})$ se denomina *función de transferencia* del filtro lineal que relaciona X_t con U_t.

El proceso está bien definido puesto que la serie infinita converge en norma por el Teorema de Riesz-Fisher (Pourahmadi, M. 2001, Teorema 9.7). Y el proceso es estacionario porque, usando la continuidad de los productos escalares (Pourahmadi, M. 2001, Teorema 9.2),

$$\begin{aligned}
\gamma_k = Cov(X_{t+k}, X_t) = \langle X_{t+k} \mid X_t \rangle &= \lim_{m,n\to\infty} \left\langle \sum_{i=-m}^{m} b_i U_{t+k-i} \mid \sum_{j=-n}^{n} b_j U_{t-j} \right\rangle \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_i b_j \langle U_{t+k-i} \mid U_{t-j} \rangle \\
&= \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_i b_j \delta_{t+k-i,t-j} \;=\; \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i b_{i+k}
\end{aligned}$$

que solo depende de k y donde $\delta_{p,q}$ es la delta de Kronecker.

El proceso lineal es *"causal"* si además $\boldsymbol{b}$ es una serie formal (i.e., $cogrado(\boldsymbol{b}) \geq 0$)

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j U_{t-j}; \qquad t \in \mathbb{Z}$$

(pues cada X_t es una suma de variables "*del presente y pasado*").

La clase de procesos lineales incluye muchas e importantes subclases de procesos, algunas de las cuales son objeto principal de estudio de este curso.

3.2.1. Media móvil infinita. MA(∞)

Sea $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y sea $\boldsymbol{\psi} \in \ell^2$ una serie formal con infinitos términos NO nulos; entonces el proceso estocástico $\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{U}$, cuyos elementos son

$$X_t \;=\; (\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{U})_t \;=\; \boldsymbol{\psi}(B)U_t \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j U_{t-j}; \qquad t \in \mathbb{Z}$$

se denomina proceso de *media móvil infinita* MA(∞).

Algunas clases de procesos lineales tienen una representación parsimoniosa, pues basta un número finito de parámetros para representarlos completamente. Por ejemplo, cuando $\boldsymbol{\psi}$ tiene un número finito de términos no nulos...

3.2.2. Proceso de media móvil de orden q. MA(q)

Sea $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y sea $\boldsymbol{\theta}$ un polinomio de grado q con $\theta_0 = 1$; entonces el proceso estocástico $\boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U}$, cuyos elementos son

$$X_t \;=\; (\boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U})_t \;=\; \boldsymbol{\theta}(B)U_t \;=\; \sum_{j=0}^{q} \theta_j U_{t-j}; \qquad t \in \mathbb{Z}$$

se denomina proceso de *media móvil* MA(q).

Es decir:

$$X_t = U_t + \theta_1 U_{t-1} + \cdots + \theta_q U_{t-q}.$$

Hay otros procesos lineales con representación parsimoniosa.

3.2.3. Proceso autorregresivo de orden p. AR(p)

Sea $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$, se denomina *proceso autorregresivo de orden p* a aquel proceso estocástico estacionario $\boldsymbol{X}$ que es la solución de la siguiente ecuación en diferencias

$$\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{\phi}$ un polinomio de grado p con $\phi_0 = 1$;

Por tanto,

$$(\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{X})_t = \boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})X_t = \sum_{j=0}^{p} \phi_j X_{t-j} = U_t.$$

Es decir $\boldsymbol{X} = (X_t \mid t \in \mathbb{Z})$ es una solución de la siguiente ecuación en diferencias:

$$X_t + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_q X_{t-q} = U_t.$$

El problema con la anterior definición es que la ecuación $\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}$ no tiene solución única (y en algunos casos ninguna solución es estacionaria). Despejemos $\boldsymbol{X}$ para verlo.

Multiplicando ambos lados de la ecuación por una inversa de $\boldsymbol{\phi}$ lo logramos:

$$\boldsymbol{X} = inversa(\boldsymbol{\phi}) * \boldsymbol{U}.$$

Y si denotamos la secuencia $inversa(\boldsymbol{\phi})$ con $\boldsymbol{a}$ entonces

$$X_t = \boldsymbol{a}(\mathsf{B})U_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j U_{t-j}.$$

Pero… ¿Qué secuencia $\boldsymbol{a}$ usamos como inversa de $\boldsymbol{\phi}$? Recuerde que hay infinitas y la mayoría no son sumables (si el polinomio $\boldsymbol{\phi}$ tiene raíces unitarias ninguna lo es).

En tal caso la expresión $\boldsymbol{a}(\mathsf{B})U_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j U_{t-j}$ carece de sentido (pues no converge).

Requisitos sobre el polinomio autorregresivo $\boldsymbol{\phi}$

1. Para tener un proceso lineal, exigiremos que $\boldsymbol{\phi}$ no tenga raíces de módulo 1.
   Entonces existe una única inversa absolutamente sumable: $\boldsymbol{\phi}^{-1} \in \ell^1 \subset \ell^2$.
   La inversa $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\phi}^{-1}$ corresponde a la única solución *estacionaria* de $\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}$. (Si $\boldsymbol{\phi}$ tuviera raíces de módulo 1 no existiría ni $\boldsymbol{\phi}^{-1}$, ni la solución estacionaria).

$$X_t = \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathsf{B})U_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j U_{t-j}$$

2. Para tener un proceso lineal causal exigiremos que las raíces de $\boldsymbol{\phi}$ sean mayores que 1 en valor absoluto (raíces fuera del círculo unidad): $\boldsymbol{\phi}^{-1} = \boldsymbol{\phi}^{-\triangleright}$.

$$X_t = \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathsf{B})U_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j U_{t-j}$$

El siguiente modelo lineal es una combinación (o generalización) de los dos anteriores.

3.2.4. Proceso autorregresivo de media móvil. ARMA(p, q)

Sea $\boldsymbol{U} \sim WN(0, \sigma^2)$, se denomina *proceso autorregresivo de media móvil* (p, q) al proceso estocástico estacionario $\boldsymbol{X}$ que es la solución de la ecuación en diferencias:

$$\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U}$$

donde el polinomio *autorregresivo* $\boldsymbol{\phi}$ tiene grado p con $\phi_0 = 1$ y con todas sus raíces fuera del círculo unidad (*por los motivos anteriormente vistos*); y el polinomio *de media móvil* $\boldsymbol{\theta}$ es de grado q con $\theta_0 = 1$;

$$\text{es decir,} \qquad \boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\phi}} * \boldsymbol{U}; \qquad \text{donde } \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\phi}} \equiv \boldsymbol{\phi}^{-1} * \boldsymbol{\theta}$$

Tanto $\boldsymbol{\phi}^{-1}$ como $\boldsymbol{\theta}$ son absolutamente sumables y como ℓ^1 es un anillo, $\boldsymbol{\phi}^{-1} * \boldsymbol{\theta} \equiv \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\phi}} \in \ell^1$ (también es absolutamente sumable y por tanto de cuadrado sumable), consecuentemente el proceso estocástico es un proceso lineal.

$$X_t = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\phi}}(\mathsf{B})U_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j U_{t-j}$$

donde $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\phi}^{-1} * \boldsymbol{\theta}$.

3.2.5. Proceso autorregresivo de media móvil con media no nula

Por último, consideremos un proceso $\boldsymbol{Y}$ con media distinta de cero, es decir,

$$E(Y_t) = \mu \neq 0$$

y definamos la secuencia constante $\boldsymbol{\mu} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu z^j = (\ldots, \mu, \mu, \mu, \ldots)$.

Decimos que $\boldsymbol{Y}$ es un proceso ARMA(p,q) con media distinta de cero si $\boldsymbol{X}$ es ARMA(p,q)

$$\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}$ es evidentemente un proceso de media cero. Por tanto

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi} * (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}) =& \boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U} \\
\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{\mu} =& \boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U} \\
\boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{Y} =& \boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{U}
\end{aligned}$$

Es decir, si $\boldsymbol{\phi}(\mathsf{B})$ es $1 - \phi_1\mathsf{B} - \phi_2\mathsf{B}^2 - \cdots - \phi_p\mathsf{B}^p$, entonces

$$\boldsymbol{\phi}(B)Y_t = c + \boldsymbol{\theta}(B)U_t$$

donde

$$c = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)\mu$$

y donde $\mu = E(Y_t)$, es un proceso autorregresivo de media móvil ARMA(p,q) *con media no nula.*