Contents

Econometría Aplicada. Lección 4

Marcos Bujosa

September 10, 2024

En esta lección veremos conceptos algebraicos usados en la modelización de series temporales.

1 Secuencias de números

1.1 El espacio vectorial de las secuencias infinitas $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}},+,\cdot\right)$

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ de secuencias infinitas de números reales

$$\boldsymbol{x} \quad = \quad (\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots) \quad = \quad (x_t \mid t\in\mathbb{Z})$$

Las secuencias se pueden sumar y también se pueden multiplicar por escalares.

Si $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ y $a\in\mathbb{R}$, entonces

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_t+y_t \mid t\in\mathbb{Z})$$

y

$$a\boldsymbol{x}=\big(a(x_t)\mid t\in\mathbb{Z}\big).$$

El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ junto con la suma elemento a elemento y el producto por escalares constituyen un espacio vectorial.

1.1.1 Notación mediante funciones generatrices

En la expresión $\boldsymbol{x} \quad = \quad (\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots)$ separamos los elementos por comas, e indicamos la posición con un subíndice. Pero en

$$\boldsymbol{a} \quad = \quad (\ldots,\ 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 2,0,\ldots)$$

¿qué posición ocupan estos números en la secuencia?

Las funciones generatrices resuelven este problema. En ellas los elementos se separan con el símbolo "+" y la posición es indicada con la potencia del símbolo "z"

$$\boldsymbol{a} \quad = \quad \cdots+0z^{-2}+1z^{-1}+4z^{0}+9z+0z^{2}+\cdots$$

Así podemos denotar la secuencia $\boldsymbol{x}$ de manera muy compacta del siguiente modo

$$\boldsymbol{x} \quad = \quad \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t z^t \quad \equiv \quad \boldsymbol{x}(z)$$

¡Pero esta expresión no es una suma! es solo un modo de expresar una secuencia. Dicha expresión se denomina *función generatriz.*

1.1.2 Características de algunas secuencias

La sucesión $\mathbf{0} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} 0z^t$ se denomina *sucesión nula*.
En una sucesión $\boldsymbol{a}$ no nula llamamos

Grado al menor índice entero que verifica la propiedad:

$$j > grado(\boldsymbol{a}) \Rightarrow a_j = 0$$

Para la sucesión, $\mathbf{0}$, diremos que su grado es menos infinito $(grado(\mathbf{0}) = -\infty)$.

Cogrado al mayor índice entero que verifica la propiedad:

$$j < grado(\boldsymbol{a}) \Rightarrow a_j = 0$$

Para la sucesión, $\mathbf{0}$, diremos que su cogrado es infinito $(cogrado(\mathbf{0}) = \infty)$.

Una sucesión $\boldsymbol{a}$ es

Absolutamente sumable (ℓ^1) si $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |a_t| < \infty$

De cuadrado sumable (ℓ^2) si $\sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t^2 < \infty$

Una sucesión absolutamente sumable siempre es de cuadrado sumable, $\ell^1 \subset \ell^2$.

1.1.3 Algunos subespacios de $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$

Secuencias con final si tienen grado (a partir de cierto índice son cero).

$$\boldsymbol{a}(z) = (\ldots,\ a_{p-3},\ a_{p-2},\ a_{p-1},\ a_p,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots) = \sum_{t=-\infty}^{p} a_t z^t$$

Secuencias con principio si tienen cogrado (antes de cierto índice son cero).

$$\boldsymbol{a}(z) = (\ldots,\ 0,\ 0,\ 0,\ a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3}, \ldots) = \sum_{t=k}^{\infty} a_t z^t \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Secuencias o sucesiones formales si su cogrado ≥ 0.

$$\boldsymbol{a}(z) = (\ldots,\ 0,\ 0,\ 0,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots) = \sum_{t=k}^{\infty} a_t z^t \qquad k \geq 0$$

Polinomios son sucesiones formales con grado

$$\boldsymbol{a}(z) = (\ldots,\ 0,\ 0,\ 0,\ a_0,\ a_1, \ldots,\ a_p,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots) = \sum_{t=k}^{p} a_t z^t \qquad k \geq 0$$

(p.e. $a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ es un polinomio de grado 2).

1.2 Producto convolución

Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ sucesiones con principio (con cogrado).

Definimos la sucesión producto convolución () de $\boldsymbol{a}$ con $\boldsymbol{b}$ como:

$$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_t = \sum_{r+s=t} a_r b_s$$

El producto convolución entre dos sucesiones con cogrado está bien definido.

El cogrado de $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ es la suma de los respectivos cogrados.

Además, el producto convolución está bien definido entre dos sucesiones:

- con final (con grado). El grado del producto es la suma de los respectivos grados.
- absolutamente sumables (ℓ^1).

TODO Incluir las demos en los apuntes

1.3 Anillos conmutativos y cuerpos

1.3.1 Anillos conmutativos

Un **anillo conmutativo** es un conjunto S equipado con dos operaciones binarias, la suma $+$ y el producto $*$ que satisfacen tres conjuntos de axiomas.

En cuanto a la suma

- $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ para todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ en S (i.e. $+$ es asociativa).
- $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ para todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ en S (i.e. $+$ es conmutativa).
- Existe un elemento $\mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{a}+\mathbf{0} = \boldsymbol{a}$ para todo $\boldsymbol{a} \in \mathsf{S}$.
- Para cada $\boldsymbol{a} \in \mathsf{S}$ existe $-\boldsymbol{a} \in \mathsf{S}$ tal que $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.

En cuanto al producto

- $(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})*\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}*(\boldsymbol{b}*\boldsymbol{c})$ para todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ en S (i.e. $*$ es asociativo).
- $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}*\boldsymbol{a}$ para todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ en S (i.e. $*$ es conmutativo).
- Existe un elemento 1 tal que $\boldsymbol{a}*1 = \boldsymbol{a}$ para todo $\boldsymbol{a} \in \mathsf{S}$.

El elemento 1 es la secuencia cuyos elementos son cero excepto un 1 en la posición cero:

$$1 \;=\; 1z^0 \;=\; (\ldots, 0, 0, \boxed{1}, 0, 0, \ldots)$$

El producto es distributivo respecto de la suma: Para todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ en S

- $\boldsymbol{a}*(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{c})$
- $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})*\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c}*\boldsymbol{a})$

1.3.2 Cuerpos

Un **cuerpo** es un anillo conmutativo que adicionalmente satisface:

- Para cada $\boldsymbol{a} \in \mathsf{S}$ no nulo ($\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$), existe $\boldsymbol{b} \in \mathsf{S}$ tal que $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b} = 1$.

  (*Todo elemento no nulo del conjunto tiene una inversa en dicho conjunto*)

1.4 Clasificación de algunos subconjuntos de sucesiones

Son anillos el conjunto de sucesiones formales (cogrado ≥ 0), polinomios y ℓ^1.

Para algunas sucesiones (no nulas) de estos subconjuntos o no existe inversa o, cuando existe, es una sucesión de otro tipo (p.e. las inversas de un polinomio no son polinomios en general).

Son cuerpos el conjunto de secuencias con principio, secuencias con final (y el Cuerpo de fracciones de polinomios)

1.5 Inversas

1.5.1 Inversas de secuencias con principio

Supongamos que $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y que $k = cogrado(\boldsymbol{a})$. Definimos $\boldsymbol{b}$ del siguiente modo:

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < -k \\ \frac{1}{a_k} & \text{si } j = -k \\ \frac{-1}{a_k} \sum_{r=-k}^{j-1} b_r a_{j+k-r} & \text{si } j > -k \end{cases}$$

Por construcción, $cogrado(\boldsymbol{b}) = -k$ y en consecuencia $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_j = 0$ si $j < 0$. Obviamente, $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_0 = 1$; y además $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_j = 0$ si $j > 0$.

Es así ya que

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})_j &= \sum_{r+s=j} a_r b_s = \sum_{r=-k}^{j-k} a_{j-r} b_r \\
&= \sum_{r=-k}^{j-k-1} a_{j-r} b_r + a_k b_{j-k} \\
&= \sum_{r=-k}^{j-k-1} a_{j-r} b_r + a_k \Big(\frac{-1}{a_k} \sum_{r=-k}^{j-k-1} b_r a_{j-k+k-r} \Big) \\
&= \sum_{r=-k}^{j-k-1} a_{j-r} b_r - \sum_{r=-k}^{j-k-1} b_r a_{j-r} = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo: Para el polinomio $1 - az$

$$(1-az)^{-\triangleright} = \text{inversa con principio de } (1-az) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < 0 \\ 1 & \text{si } j = 0 \\ a^{-1} & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

es decir $(\ldots, 0, \boxed{1}, a, a^2, a^3, \ldots) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j$

Comprobación:

$$\begin{aligned}
(1-az)\sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j =& \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j - az\sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j \\
=& \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j - \sum_{j=1}^{\infty} a^j z^j \\
=& a^0 z^0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a^j - a^j) z^j \\
=& 1z^0 + \sum_{j=1}^{\infty} 0 z^j = 1
\end{aligned}$$

1.5.2 Inversas de secuencias con final

Supongamos que $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ y que $p = grado(\boldsymbol{a})$. Definimos $\boldsymbol{b}$ del siguiente modo:

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j > -p \\ \frac{1}{a_p} & \text{si } j = -p \\ \frac{-1}{a_p}\sum_{r=j-1}^{-p} b_r a_{j+p-r} & \text{si } j < -p \end{cases}$$

Por construcción, $grado(\boldsymbol{b}) = -p$.

Ejemplo: Para el polinomio $1 - az$

$$(1-az)^{\blacktriangleleft-} = \text{inversa con final de } (1-az) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > -1 \\ \frac{-1}{a} & \text{si } j = -1 \\ \frac{-1}{a^j} & \text{si } j < -1 \end{cases}$$

es decir $(\ldots,\ \frac{-1}{a^3},\ \frac{-1}{a^2},\ \frac{-1}{a}, \boxed{0}, \ldots) = \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j$

Comprobación:

$$\begin{aligned}
(1-az)\sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j =& \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j + (-az)\sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j \\
=& \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j + \sum_{j=-\infty}^{0} a^j z^j \\
=& \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j + \sum_{j=-\infty}^{-1} a^j z^j + a^0 z^0 \\
=& \sum_{j=-\infty}^{-1} (a^j - a^j) z^j + 1z^0 = 1
\end{aligned}$$

Si definimos la función entre secuencias $R : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ tal que $R(a_j) = a_{-j}$, es decir, la función *reverso*

$$R(\boldsymbol{a}(z)) = \boldsymbol{a}(z^{-1})$$

se puede demostrar que para toda secuencia con final $\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a}^{\blacktriangleleft-} = R\left((R(\boldsymbol{a}))^{-\triangleright} \right).$$

1.5.3 Inversas de polinomios

Ahora sabemos que todo polinomio

por tener cogrado tiene una inversa con cogrado (con principio)

por tener grado tiene una inversa con grado (con final)

y que dichas inversas no son de la forma $\sum_{t=k}^{p} a_t z^t$ con $k \geq 0$ (i.e., no son polinomios).

Por el ejemplo anterior sabemos que para $1 - az$ ambas inversas son

- $(1-az)^{-\triangleright} = \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j \quad = \quad (\ldots, 0, \boxed{1}, a, a^2, a^3, \ldots)$
- $(1-az)^{\blacktriangleleft-} = \sum_{j=-\infty}^{-1} -a^j z^j \quad = \quad (\ldots, \frac{-1}{a^3}, \frac{-1}{a^2}, \frac{-1}{a}, \boxed{0}, \ldots)$

Es evidente que si $|a| \neq 1$ una de las inversas está en ℓ^1 y la otra no.
Pero si $|a| = 1$ ninguna de las inversas pertenece a ℓ^1
Además, por el Teorema fundamental del Álgebra también sabemos que:

> *Todo polinomio univariante no nulo con coeficientes reales puede factorizarse como*
>
> $$c \cdot \boldsymbol{p}_1 * \cdots * \boldsymbol{p}_k,$$
>
> *donde c es un número real y cada $\boldsymbol{p}_i$ es un polinomio mónico (i.e., el coeficiente de z^0 es 1) de grado a lo sumo dos con coeficientes reales. Más aún, se puede suponer que los factores de grado dos no tienen ninguna raíz real.*

Podemos factorizar un polinomio $\boldsymbol{a}$ sin raíces de módulo 1 como

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}$$

- donde $\boldsymbol{b}$ es un polinomio con las raíces de módulo menor que 1 y
- donde $\boldsymbol{c}$ es un polinomio con las raíces de módulo mayor que 1

Como tanto los polinomios $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ como las inversas $\boldsymbol{b}^{\blacktriangleleft-}$ y $\boldsymbol{c}^{-\triangleright}$ pertenecen al anillo ℓ^1,

$$\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b}^{\blacktriangleleft-} * \boldsymbol{c}^{-\triangleright}) = (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) * (\boldsymbol{b}^{\blacktriangleleft-} * \boldsymbol{c}^{-\triangleright}) = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{b}^{\blacktriangleleft-} * \boldsymbol{c} * \boldsymbol{c}^{-\triangleright} = 1 * 1 = 1.$$

La secuencia $(\boldsymbol{b}^{\blacktriangleleft-} * \boldsymbol{c}^{-\triangleright})$ es "la" inversa de $\boldsymbol{a}$ en ℓ^1.

En general, dicha inversa no tiene grado ni cogrado y se denota con $\boldsymbol{a}^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{a}}$.

(*es la inversa que aparece en los libros de series temporales*)

Evidentemente dicha inversa no existe si $\boldsymbol{a}$ tiene alguna raíz de módulo 1.

En los manuales de *series temporales* se dice que un polinomio $\boldsymbol{a}$ **es invertible** si

$$\text{(la inversa con principio)} \;\; \boldsymbol{a}^{-\triangleright} = \boldsymbol{a}^{-1} \;\; \text{(la inversa absolutamente sumable).}$$

(*si sus raíces están fuera del círculo unidad.*)

Hay infinitas inversas. Si una secuencia tiene dos inversas, entonces tiene infinitas.

Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{d}$ secuencias tales que $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = 1$ y $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{d} = 1$; y sean β y δ dos escalares tales que $\beta + \delta = 1$. Entonces

$$\boldsymbol{a} * (\beta \boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{d}) = \beta(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) + \delta(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{d}) = \beta 1 + \delta 1 = (\beta + \delta) 1 = 1$$

Así, para β y δ tales que $\beta + \delta = 1$, sabemos que $(\beta \boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{d})$ es otra inversa de $\boldsymbol{a}$.

1.5.4 Cuerpo de fracciones de polinomios

El cuerpo más importante en la modelización ARIMA es el *cuerpo de fracciones de polinomios*

$$\left\{\boldsymbol{p} * \boldsymbol{q}^{-\triangleright} \mid \boldsymbol{p} \text{ y } \boldsymbol{q} \text{ son polinomios y } \boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}\right\};$$

es un subcuerpo del cuerpo de las sucesiones con principio (con cogrado)

Toda fracción de sucesiones con grado y cogrado (con principio y final) pertenece al cuerpo de fracciones de polinomios.

El razonamiento es simple: Toda sucesión con grado k y cogrado es de la forma $\boldsymbol{p} * (z^k)^{-\triangleright}$, donde $\boldsymbol{p}$ es un polinomio.

Cuando las raíces del polinomio $\boldsymbol{q}$ están fuera del circulo unidad (i.e., $\boldsymbol{q}^{-\triangleright} = \boldsymbol{q}^{-1}$) es habitual denotar la secuencia $\boldsymbol{p} * \boldsymbol{q}^{-\triangleright}$ así $\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$

$$(\boldsymbol{p} * \boldsymbol{q}^{-\triangleright})(z) = \frac{\boldsymbol{p}(z)}{\boldsymbol{q}(z)}$$

1.6 Operador retardo B y suma de los elementos de una secuencia.

Por conveniencia se usa el operador retardo B en la notación:

$$\mathsf{B}x_t = x_{t1}, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z}.$$

Aplicando el operador B repetidamente tenemos

$$\mathsf{B}^k x_t = x_{tk}, \quad \text{para } t, z \in \mathbb{Z}$$

Así, si la secuencia $\boldsymbol{x}(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t z^t$ es sumable, entonces la expresión

$$\boldsymbol{x}(\mathsf{B}) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t \mathsf{B}^t \;=\; \cdots + x_{-2} + x_{-1} + x_0 + x_1 + \cdots$$

tiene sentido como suma.

1.6.1 Polinomios y secuencias en el operador retardo $\boldsymbol{a}(\mathsf{B})$ actuando sobre secuencias

Así, para el polinomio $\boldsymbol{a}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$, y la secuencia $\boldsymbol{y}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(\mathsf{B})y_t &= (a_0 + a_1\mathsf{B} + a_2\mathsf{B}^2 + a_3\mathsf{B}^3)y_t \\
&= a_0 y_t + a_1\mathsf{B}^1 y_t + a_2\mathsf{B}^2 y_t + a_3\mathsf{B}^3 y_t \\
&= a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} \\
&= \textstyle\sum_{r=0}^{3} a_r y_{t-r} \\
&= (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{y})_t
\end{aligned}$$

Y en general, si $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{y}$ son secuencias sumables, entonces

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(\mathsf{B})y_t &= (\cdots + a_{-2}\mathsf{B}^{-2}, a_{-1}\mathsf{B}^{-1}, a_0 + a_1\mathsf{B} + a_2\mathsf{B}^2 + \cdots)y_t \\
&= \cdots + a_{-2}y_{t+2} + a_{-1}y_{t+1} + a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \cdots \\
&= (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{y})_t
\end{aligned}$$

2 Procesos estocásticos y notación

Los procesos estocásticos se pueden sumar y se pueden multiplicar por escalares.

Si $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son dos procesos estocásticos y $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} = (X_t + Y_t \mid t \in \mathbb{Z}) \qquad \text{y} \qquad a\boldsymbol{X} = \big(a(X_t) \mid t \in \mathbb{Z}\big).$$

El conjunto de procesos estocásticos junto con la suma elemento a elemento y el producto por escalares constituyen un espacio vectorial.

Consideremos el proceso estocástico

$$\boldsymbol{X} = (X_t \mid t = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Lo podemos denotar con una función generatriz (como hicimos con las secuencias)

$$\boldsymbol{X} \quad = \quad \sum_{t=-\infty}^{\infty} X_t z^t \quad \equiv \quad \boldsymbol{X}(z)$$

Recuerde que esto no es una suma; es una secuencia de variables aleatorias

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} X_t z^t = (\ldots,\ X_{-2},\ X_{-1},\ X_0,\ X_1,\ X_2, \ldots)$$

Sea $\boldsymbol{a}$ una secuencia de números y $\boldsymbol{X}$ un proceso estocástico tales que la suma $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k X_{t-k}$ converge para todo t. Entonces:

Definimos el producto convolución () de $\boldsymbol{a}$ con $\boldsymbol{X}$ como el proceso estocástico:

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{X} = \left(\sum_{r+s=t} a_r X_s \,\middle|\, t \in \mathbb{Z} \right)$$

es decir

$$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{X})_t = \sum_{r+s=t} a_r X_s, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, cada elemento de $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{X})$ es una combinación de variables aleatorias de $\boldsymbol{X}$

Podemos aplicar el operador B sobre los elementos de un proceso estocástico $\boldsymbol{X}$.

$$\mathsf{B}X_t = X_{t1}, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z}.$$

Aplicando el operador B repetidamente tenemos

$$\mathsf{B}^k X_t = X_{tk}, \quad \text{para } t, z \in \mathbb{Z}$$

Así, para el polinomio $\boldsymbol{a}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$, y el proceso estocástico $\boldsymbol{Y}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(\mathsf{B})Y_t &= (a_0 + a_1\mathsf{B} + a_2\mathsf{B}^2 + a_3\mathsf{B}^3)Y_t \\ &= a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + a_3 Y_{t-3} \\ &= (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{Y})_t, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Y en general, si la suma $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k Y_{t-k}$ converge para todo t, entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(\mathsf{B})Y_t &= (\cdots + a_{-2}\mathsf{B}^{-2} + a_{-1}\mathsf{B}^{-1} + a_0 + a_1\mathsf{B} + a_2\mathsf{B}^2 + \cdots)Y_t \\ &= \cdots + a_{-2}Y_{t+2} + a_{-1}Y_{t+1} + a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \cdots \\ &= (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{y})_t, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$