

Índice

1. Función de autocovarianzas y función de autocorrelación (ACF)	2
2. Función de autocorrelación parcial (PACF)	3
3. Densidad espectral	4
4. ACF, PACF y densidad espectral de algunos modelos lineales	4
4.1. Procesos lineales	4
4.2. Proceso de Ruido Blanco	5
4.3. Proceso de media móvil $MA(q)$	6
4.4. Proceso de media móvil $MA(1)$	6
4.4.1. $MA(1)$ con raíz positiva	7
4.4.2. $MA(1)$ con raíz negativa	7
4.5. Proceso de media móvil $MA(2)$	8
4.5.1. $MA(2)$ con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa	9
4.5.2. $MA(2)$ con un par de raíces complejas	9
4.5.3. $MA(2)$ con dos raíces reales y negativas	10
4.5.4. $MA(2)$ con dos raíces reales y positivas	11
4.6. Proceso autorregresivo $AR(p)$	12
4.6.1. Demostración de que la PACF tiene cogrado $-p$ y grado p	12
4.6.2. Ecuaciones de Yule-Walker (que relacionan las autocovarianzas con los parámetros de ϕ)	13
4.7. Proceso autorregresivo $AR(1)$	14
4.8. Proceso autorregresivo $AR(2)$	16
4.8.1. $AR(2)$ con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa	17
4.8.2. $AR(2)$ con un par de raíces complejas	18
4.8.3. $AR(2)$ con dos raíces reales y negativas	18
4.8.4. $AR(2)$ con dos raíces reales y positivas	19
5. (Resumen) características de procesos $MA(q)$	20
6. (Resumen) características de procesos $AR(p)$	21
7. Nota final	21

Econometría Aplicada. Lección 6

Marcos Bujosa

10 de septiembre de 2024

Resumen

En esta lección veremos algunas herramientas estadísticas. y usaré la librería `tfarima` de José Luis Gallego siempre que pueda.

Carga de algunas librerías de R

Primero cargamos la librería `tfarima` (Repositorio Cran: <https://cran.r-project.org/web/packages/tfarima/index.html>; repositorio GitHub: <https://github.com/gallegoj/tfarima>)

```
library(tfarima) # librería de José Luis Gallego para Time Series
library(readr)  # para leer ficheros CSV
library(ggplot2) # para el scatterplot (alternativamente library(tidyverse))
library(ggfortify) # para pintar series temporales
library(jtools)  # para representación resultados estimación
library(zoo)     # para generar objetos ts (time series)
```

y además fijamos los parámetros por defecto para las figuras en `png` del notebook

```
# fijamos el tamaño de las figuras que se generan en el notebook
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 4, repr.plot.res = 200)
```

1. Función de autocovarianzas y función de autocorrelación (ACF)

Ya hemos visto que si un proceso estocásticos es estacionario, la covarianza entre X_t y X_{t+k} no depende de t ; tan solo depende de la distancia temporal k entre ambas variables y que

- La secuencia $\gamma = (\gamma_k \mid k \in \mathbb{Z})$ se denomina *función de autocovarianzas*
- La secuencia $\rho = (\rho_k \mid k \in \mathbb{Z})$ donde

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

se denomina *función de autocorrelación* (ACF).

Veamos otra secuencia que también describe la relación entre distintas variables del proceso.

2. Función de autocorrelación parcial (PACF)

Dado un conjunto de variables $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$, la *correlación condicional* $\rho_{X,Y|\mathbf{Z}}$ entre las variables X e Y es

$$\rho_{X,Y|\mathbf{Z}} = \text{Corr}(X - E(X | \mathbf{Z}), Y - E(Y | \mathbf{Z}))$$

El problema es que no siempre es fácil conocer las esperanzas condicionadas $E(X | \mathbf{Z})$ y $E(Y | \mathbf{Z})$.

Pero es sencillo restar de X y de Y los ajustes \hat{X} y \hat{Y} correspondientes a sus respectivas regresiones lineales sobre \mathbf{Z} . La correlación entre ambos residuos se denomina *correlación parcial* entre X e Y ; y mide la correlación entre ambas variables una vez “descontado” el efecto lineal de las variables \mathbf{Z} .

$$\text{Corr}((X - \hat{X}), (Y - \hat{Y}))$$

La *correlación parcial* entre dos variables X_t y X_{t-k} de un proceso estacionario \mathbf{X} mide su correlación una vez descontado el efecto de las variables $X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}$ que median entre ambas.

$$X_t, \overbrace{X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}}, X_{t-k}$$

Si denotamos con \hat{X}_t y $\widehat{X_{t-k}}$ los ajustes de las respectivas regresiones de X_t y X_{t-k} sobre $X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}$; la *correlación parcial* π_k entre X_t y X_{t+k} es la correlación entre los residuos de sendas regresiones:

$$\pi_k = \text{Corr}((X_t - \hat{X}_t), (X_{t-k} - \widehat{X_{t-k}}))$$

En un proceso débilmente estacionario las correlaciones parciales solo dependen de la distancia k , lo que permite definir la siguiente secuencia.

Función de autocorrelación parcial (PACF) de un proceso estacionario \mathbf{X} es la siguiente secuencia $\boldsymbol{\pi} = (\pi_k | k \in \mathbb{Z})$, que es simétrica pues $\pi_{-k} = \pi_k$:

$$\begin{cases} \pi_0 &= 1 \\ \pi_1 &= \text{Corr}(X_t, X_{t-1}) = \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \\ \pi_k &= \text{Corr}((X_t - \hat{X}_t), (X_{t-k} - \widehat{X_{t-k}})) \end{cases},$$

donde \hat{X}_t y $\widehat{X_{t-k}}$ son los ajustes de las respectivas regresiones de X_t y X_{t-k} sobre $X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}$. i.e., las proyecciones ortogonales sobre $\bar{s}p(1, X_{t-1} : X_{t-(k-1)})$.

La magnitud de la correlación parcial π_k refleja la mejora en la predicción de \hat{X}_t si en lugar de usar una combinación lineal con solo los $k - 1$ primeros retardos, $\hat{X}_t = \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\alpha}_j X_{t-j}$, empleáramos k retardos (i.e., un retardo más).

Hay una correspondencia uno-a-uno entre la función de autocovarianzas $\boldsymbol{\gamma}$ y la PACF $\boldsymbol{\pi}$.

Es decir, es posible reconstruir una de las secuencias a partir de la otra (por ejemplo resolviendo la ecuaciones de Yule-Walker recursivamente con el algoritmo Levinson-Durbin; véase *Pourahmadi, M. (2001, Capítulo 7)* o *Brockwell & Davis (1991, Capítulo 5)*)

Consecuentemente, la PACF $\boldsymbol{\pi}$ puede verse como una reparametrización de la función de autocovarianzas $\boldsymbol{\gamma}$.

Veamos otra transformación de $\boldsymbol{\gamma}$ que también arrojará luz sobre las propiedades de un proceso estocástico.

3. Densidad espectral

Para un proceso estocástico \mathbf{X} con función de autocovarianzas $\gamma \in \ell^1$, es decir, con función de autocovarianzas absolutamente sumable,

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma_h| < \infty,$$

entonces definimos la *densidad espectral* de \mathbf{X} como

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_h e^{-ih\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \geq 0} \gamma_h \cos(h\omega), \quad \omega \in [-\pi, \pi].$$

La *densidad espectral* $f(\omega)$ satisface las siguientes propiedades:

1. $f(\omega) = f(-\omega)$
2. $f(\omega) \geq 0$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega < \infty$

Es más, desde la densidad espectral se pueden calcular las covarianzas

$$\gamma_h = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{-ih\omega} d\omega; \quad h \in \mathbb{Z}$$

Consecuentemente, para $h = 0$

$$\sigma^2 = \gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega.$$

Por tanto podemos interpretar la densidad espectral como una descomposición de la varianza en distintas frecuencias.

La ACF, la PACF y la densidad espectral son funciones que solo dependen de los dos primeros momentos de la distribución.

Su estimación y posterior análisis son la herramienta fundamental para elegir un modelo ARMA para una serie temporal “*estacionaria*”.

Para entenderlo debemos ver cómo son estas funciones en algunos modelos lineales concretos.

4. ACF, PACF y densidad espectral de algunos modelos lineales

4.1. Procesos lineales

Sea el proceso lineal $\mathbf{X} = \psi * \mathbf{U}$, donde $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y $\psi \in \ell^1$; es decir

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j U_{t-j}.$$

Puesto que $E(U_t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{Z}$, entonces

$$E(X_t) = E \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j U_{t-j} \right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j E(U_{t-j}) = 0$$

Y como además, $E(U_j \cdot U_k) = 0$ cuando $j \neq k$, su función de autocovarianzas es

$$\begin{aligned}\gamma_{k,t} = E[X_t \cdot X_{t-k}] &= E\left[\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j U_{t-j}\right)\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j U_{t-k-j}\right)\right] = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{j+k} \cdot \psi_j \\ &= \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{j+k} \cdot R(\psi_{-j}) = \sigma^2 (\psi(z) * \psi(z^{-1}))_k\end{aligned}$$

que solo depende de k (el proceso es estacionario como ya sabíamos). Por tanto...

Si \mathbf{X} es un proceso lineal $\mathbf{X} = \psi * \mathbf{U}$, con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$, donde $\psi \in \ell^1$ es una serie formal (i.e., cogrado 0) y donde $\psi_0 = 1$, es decir, si

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j U_{t-j} + U_t; \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Entonces

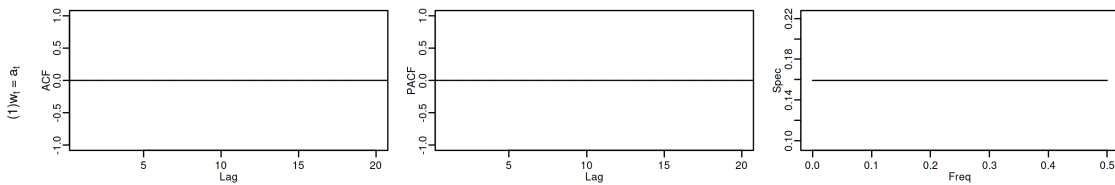
- $\gamma = \sigma^2 \psi(z) * \psi(z^{-1})$
 $\gamma_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{k-j} \psi_j$; así que $\gamma_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.
- ACF: $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma$
- Densidad espectral: $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \geq 0} \gamma_h \cos(h\omega)$; $\omega \in [-\pi, \pi]$
- PACF: $\pi \in \ell^2$, i.e., $\pi_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$
(Cuando $\pi \in \ell^2$ se dice que el proceso es *no-determinista*)

4.2. Proceso de Ruido Blanco

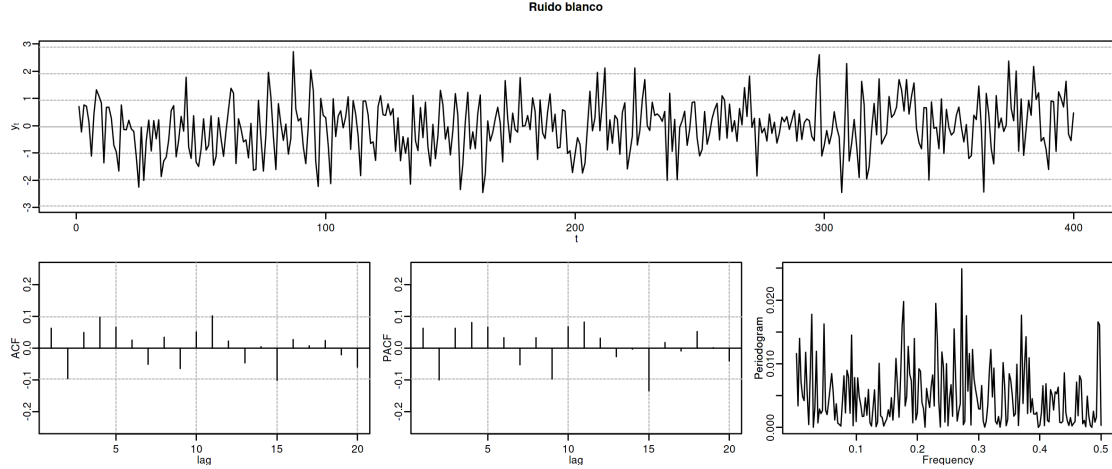
Sea $\mathbf{X} = \mathbf{1} * \mathbf{U}$, donde $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$; es decir $X_t = U_t$ para $t \in \mathbb{Z}$. Entonces

- $\gamma = \sigma^2 \mathbf{1}(z) * \mathbf{1}(z^{-1}) = \sigma^2 \mathbf{1} = (\dots, 0, 0, \sigma^2, 0, 0, \dots) = \sigma^2 z^0$
- $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1}{\sigma^2} \gamma = \mathbf{1} = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) = 1z^0$
- $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \geq 0} \gamma_h \cos(h\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cos(0\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$; $\omega \in [-\pi, \pi]$
- $\pi = \mathbf{1} = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) = 1z^0$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
wn <- um(ar = "(1 - OB)")
display(list(wn), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```



```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(wn, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"), main="Ruido blanco")
```



4.3. Proceso de media móvil MA(q)

Sea $\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U}$, con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y donde $\boldsymbol{\theta}$ es un polinomio de orden $q > 0$, con $\theta_0 = 1$ y con todas sus raíces fuera del círculo unidad ($\boldsymbol{\theta}^{-\triangleright} \in \ell^1$), es decir

$$X_t = \sum_{j=1}^q \theta_j U_{t-j} + U_t.$$

Este requisito no es necesario para que el proceso sea estacionario, pero por conveniencia se usan modelos MA que puedan tener una representación AR(∞) causal (es decir, usando observaciones del pasado “para construir” el presente):

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\boldsymbol{\theta}} * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad U_t = \sum_{h=0}^{\infty} \psi_h X_{t-h}$$

donde $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\theta}^{-\triangleright} = \boldsymbol{\theta}^{-1} \in \ell^1$. Entonces se dice que el modelo MA es “invertible”. Cualquier modelo MA sin raíces en el círculo unidad se puede reparametrizar para obtener un modelo invertible con la misma función de autocovarianzas “ $\boldsymbol{\gamma}$ ” y ,consecuentemente, las mismas ACF, PACF y densidad espectral que el modelo original.

Entonces $E(X_t) = 0$ y

$$\boldsymbol{\gamma} = \sigma^2 \boldsymbol{\theta}(z) * \boldsymbol{\theta}(z^{-1}) = \sigma^2 \sum_{j,k=0}^q \theta_j \theta_k z^{j-k} \quad (\text{grado } q \text{ y cogrado } -q)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\gamma_0} \boldsymbol{\gamma}$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \boldsymbol{\theta}(e^{-i\omega}) \cdot \boldsymbol{\theta}(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^q \gamma_h \cos(h\omega); \quad \omega \in [-\pi, \pi] \quad (q \text{ cosenos } +1)$$

$\boldsymbol{\pi}$ tiene grado ∞ y cogrado $-\infty$ y su magnitud decae paulatinamente cuando $k \rightarrow \infty$

4.4. Proceso de media móvil MA(1)

Sea $\mathbf{X} = (1 - \theta z) * \mathbf{U}$ con $|\theta| < 1$ y con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$, es decir $X_t = U_t - \theta U_{t-1}$.

$$\blacksquare \quad \boldsymbol{\gamma} = \sigma^2(1 - \theta z) * (1 - \theta z^{-1}) = \sigma^2(\dots, 0, -\theta, (1 + \theta^2), -\theta, 0, \dots)$$

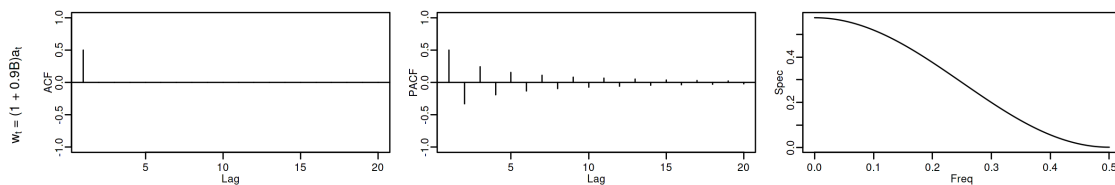
$$\blacksquare \quad \boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\gamma_0} \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{\sigma^2(1 + \theta^2)} \boldsymbol{\gamma}$$

- $f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \theta(e^{-i\omega}) \cdot \theta(e^{i\omega}) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left((1 + \theta^2) - 2\theta \cos(\omega) \right); \quad \omega \in [-\pi, \pi]$
- $\pi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{-\theta^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(k+1)}} z^k$

4.4.1. MA(1) con raíz positiva

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma1p <- um(ma = "(1 - 0.9B)")
display(list(ma1p), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

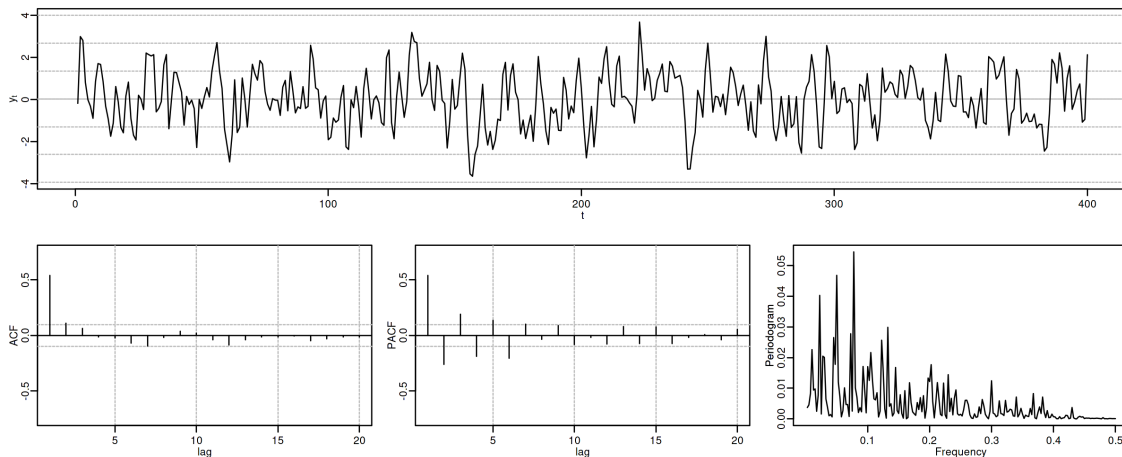
$$\theta(z) = 1 - 0,9z \Rightarrow X_t = (1 - 0,9B)U_t.$$



```
roots(ma1p)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1.111111	0	1.111111	0	Inf	1

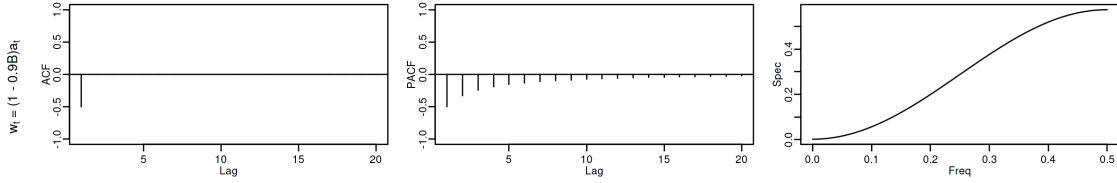
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma1p, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.4.2. MA(1) con raíz negativa

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
main <- um(ma = "(1 + 0.9B)")
display(list(main), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

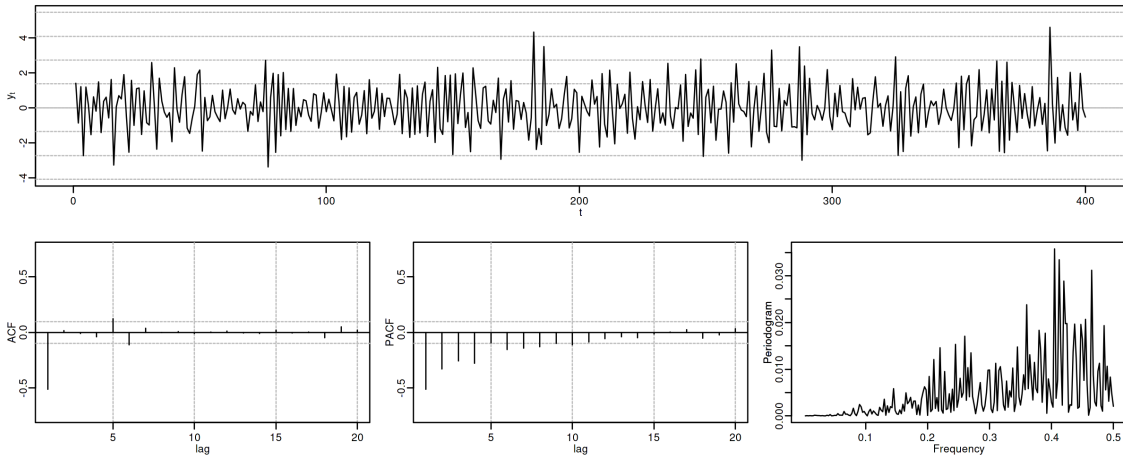
$$\theta(z) = 1 + 0,9z \Rightarrow X_t = (1 + 0,9B)U_t.$$



```
roots(main)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	-1.111111	0	1.111111	0.5	2	1

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(main, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.5. Proceso de media móvil MA(2)

Sea $\mathbf{X} = (1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2) * \mathbf{U}$, con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y con

$$\theta_1 + \theta_2 < 1; \quad \theta_2 - \theta_1 < 1; \quad |\theta_2| < 1; \quad (\text{i.e., invertible})$$

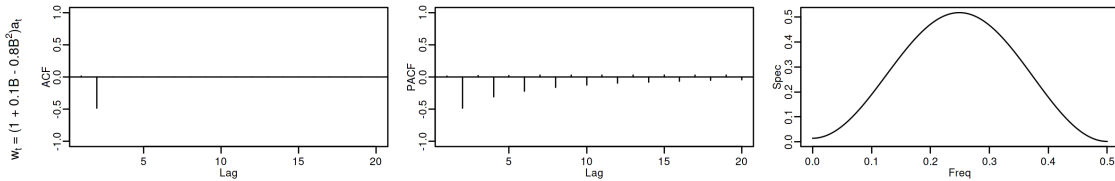
es decir $X_t = U_t - \theta_1 U_{t-1} - \theta_2 U_{t-2}$.

- $\gamma = \sigma^2(1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2) * (1 - \theta_1 z^{-1} - \theta_2 z^{-2})$
 $\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2); \quad \gamma_1 = \sigma^2(-\theta_1(1 - \theta_2)); \quad \gamma_2 = \sigma^2(-\theta_2)$
 $\gamma_3 = \gamma_4 = \dots = 0 \quad (\text{y es simétrica})$
- $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1}{\sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)} \gamma$
- $f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left((1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) - 2\theta_1(1 + \theta_2) \cos(\omega) - 2\theta_2 \cos(2\omega) \right)$
- π tiene una expresión complicada, pero su magnitud decae paulatinamente

4.5.1. MA(2) con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma2pn <- um(ma = "(1 + 0.1B - 0.8B^2)")
display(list(ma2pn), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

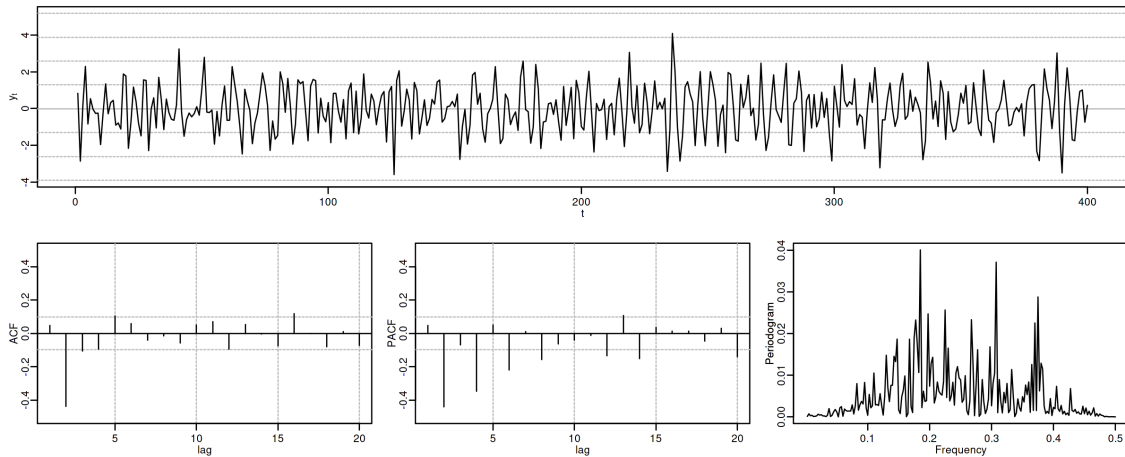
$$\theta(z) = 1 + 0,1z - 0,8z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 0,1B - 0,8B^2)U_t.$$



```
roots(ma2pn)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1.18228	7.754818e-26	1.18228	0.0	Inf	1
	-1.05728	-7.754818e-26	1.05728	0.5	2	1

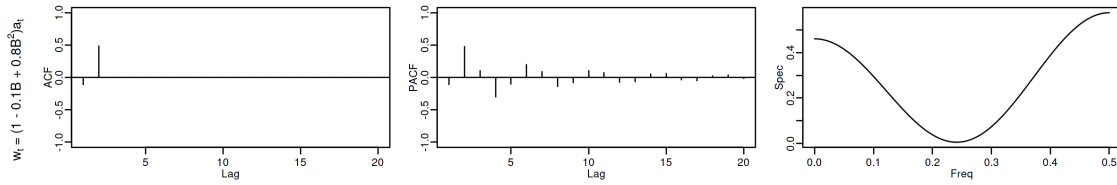
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma2pn, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.5.2. MA(2) con un par de raíces complejas

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma2np <- um(ma = "(1 - 0.1B + 0.8B^2)")
display(list(ma2np), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

$$\theta(z) = 1 - 0,1z + 0,8z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 0,1B + 0,8B^2)U_t.$$

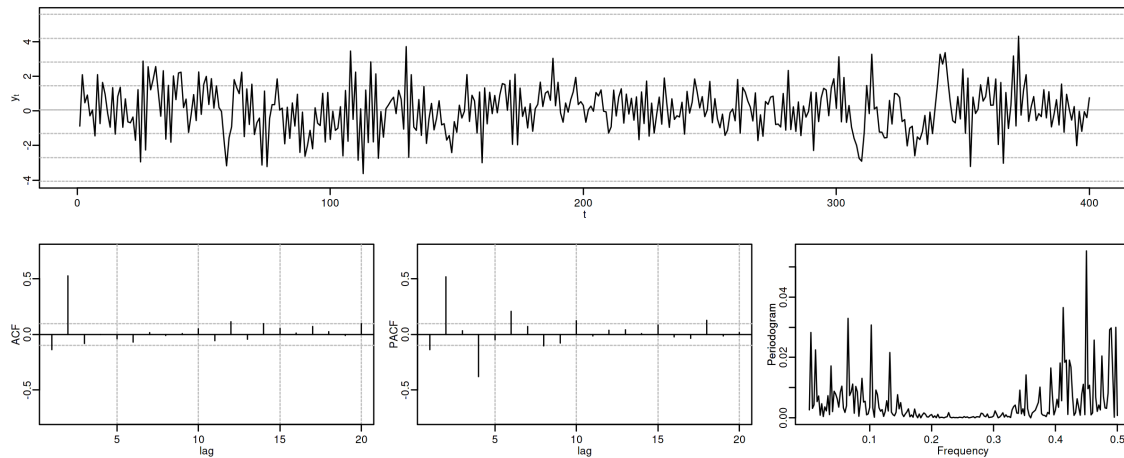


```
roots(ma2np)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	0.0625	1.116286	1.118034	0.2410983	4.147685	1
	0.0625	-1.116286	1.118034	0.2410983	4.147685	1

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma2np, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```

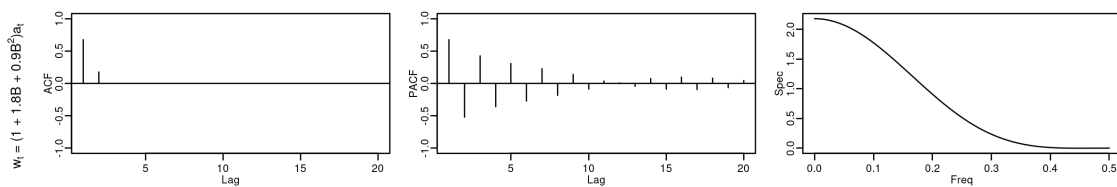
C



4.5.3. MA(2) con dos raíces reales y negativas

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma2rojo <- um(ma = "(1 + 1.8B + .9B^2)")
display(list(ma2rojo), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

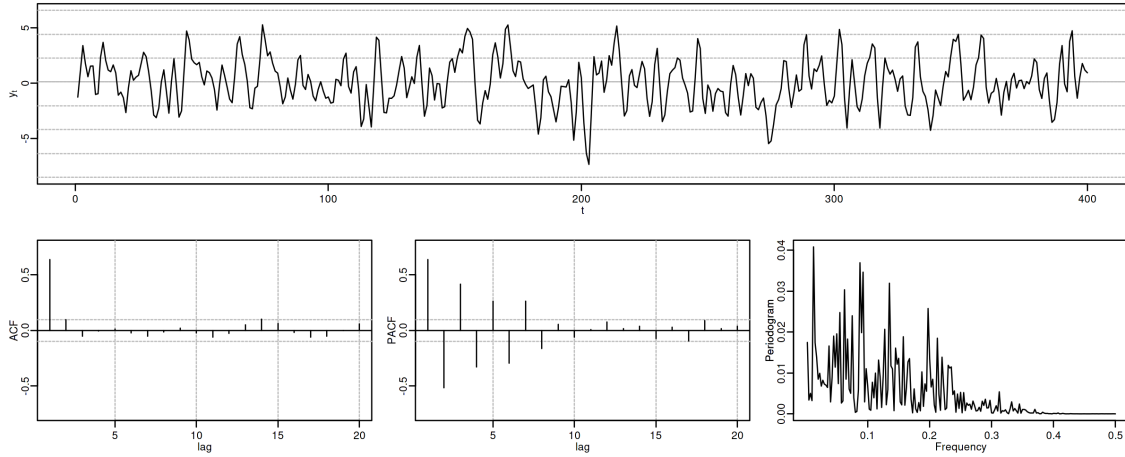
$$\theta(z) = 1 + 1.9z + 0.9z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 1.8B + 0.9B^2)U_t.$$



```
roots(ma2rojo)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	-1	0.3333333	1.054093	0.4487918	2.228205	1
	-1	-0.3333333	1.054093	0.4487918	2.228205	1

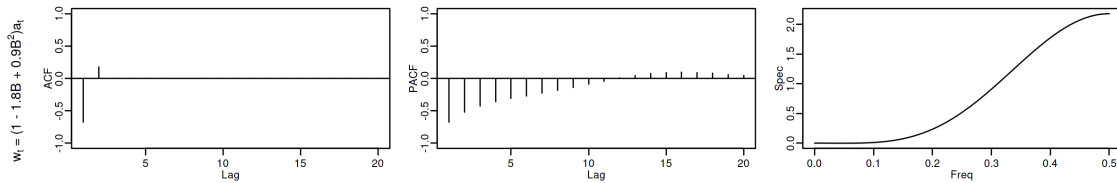
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma2rojo, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.5.4. MA(2) con dos raíces reales y positivas

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma2violeta <- um(ma = "(1 - 1.8B + .9B^2)")
display(list(ma2violeta), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

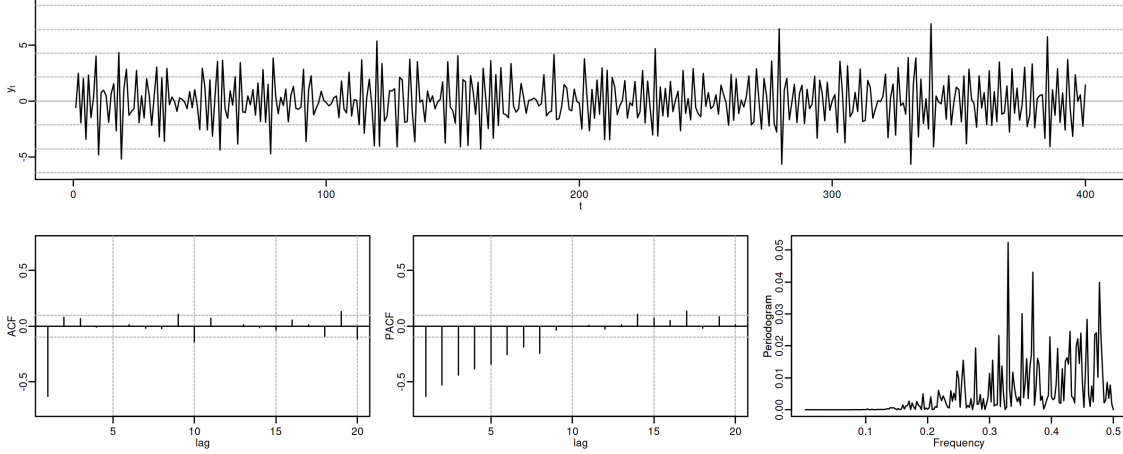
$$\theta(z) = 1 - 1,9z + 0,9z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 1,8B + 0,9B^2)U_t.$$



```
roots(ma2violeta)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1	0.3333333	1.054093	0.05120819	19.52813	1
	1	-0.3333333	1.054093	0.05120819	19.52813	1

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma2violeta, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.6. Proceso autorregresivo AR(p)

Sea $\phi * \mathbf{X} = \mathbf{U}$, con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y donde ϕ es un polinomio de grado $p > 0$. Entonces

$$(\phi * \mathbf{X})_t = \phi(B)X_t = (1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p)X_t = U_t$$

Y por tanto

$$X_t = U_t - \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j}.$$

Si todas las raíces del polinomio ϕ (de grado p) están fuera del círculo unidad, es decir, si el polinomio AR es “invertible” ($\phi^{-1} = \phi^{-1} \in \ell^1$) entonces \mathbf{X} tiene una representación como proceso lineal causal MA(∞):

$$\phi * \mathbf{X} = \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{X} = \frac{1}{\phi} * \mathbf{U} \Rightarrow X_t = U_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j U_{t-j};$$

donde $\phi^{-1} = \psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$ tiene grado ∞ .

Por tanto $E(X_t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ y

$$\gamma = \sigma^2 \frac{1}{\phi(z)} * \frac{1}{\phi(z^{-1})} = \sigma^2 \sum_{j,k=0}^{\infty} \psi_j \psi_k z^{j-k} \quad (\text{grado } \infty \text{ y cogrado } -\infty)$$

$$\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{\phi(e^{-i\omega}) \cdot \phi(e^{i\omega})} = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \gamma_h \cos(h\omega); \quad \text{donde } \omega \in [-\pi, \pi].$$

(suma infinita de cosenos)

Pero, sin embargo, la PACF, π , es una secuencia con grado p y cogrado $-p \dots$

4.6.1. Demostración de que la PACF tiene cogrado $-p$ y grado p

- Sea \mathbf{X} un proceso causal AR(p): $X_t = \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + U_t$ donde $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$.
- La proyección de X_{k+1} sobre el espacio $\bar{s}p(X_2 : X_k)$ generado por X_2, \dots, X_k (con $k > p$) es:

$$\widehat{X_{k+1}} = P_{\bar{s}p(X_2 : X_k)}(X_{k+1}) = \sum_{j=1}^p \phi_j X_{k+1-j}$$

- De su representación MA(∞): $Y \in \bar{s}p(X_2 : X_k) \Rightarrow Y \in \bar{s}p(U_j \mid j \leq k)$, pues

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j U_{t-j} \Rightarrow \bar{s}p(X_2 : X_k) \subset \bar{s}p(U_j \mid j \leq k) \perp U_{k+1}$$

- Si $Y \in \bar{s}p(X_2 : X_k)$ entonces $Cov((X_{k+1} - \widehat{X_{k+1}}), Y) = Cov(U_{k+1}, Y) = 0$
- Denotemos con \widetilde{X}_1 a la proyección $P_{\bar{s}p(X_2 : X_k)}(X_1)$ de X_1 sobre $\bar{s}p(X_2 : X_k)$
- Ahora es fácil ver que $\pi_k = 0$ para $k > p$, pues

$$\begin{aligned} \pi_k &= Corr((X_{k+1} - \widehat{X_{k+1}}), (X_1 - \widetilde{X}_1)) \\ &= Corr(U_{k+1}, (X_1 - \widetilde{X}_1)) = 0 \end{aligned}$$

ya que $U_{k+1} \perp (X_1 - \widetilde{X}_1) \in \bar{s}p(U_j \mid j \leq k)$.

4.6.2. Ecuaciones de Yule-Walker (que relacionan las autocovarianzas con los parámetros de ϕ)

Consideremos un proceso AR(p): $X_t = \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + U_t$; $U_t \sim WN(0, \sigma^2)$

Multiplicando ambos lados por X_{t-k} para $0 \leq k \leq p$ y tomando esperanzas tenemos

$$Cov(X_t, X_{t-k}) = \sum_{j=1}^p \phi_j Cov(X_{t-j}, X_{t-k}) + Cov(U_t, X_{t-k}); \quad 0 \leq k \leq p.$$

Para $k = 0$ tenemos:

$$\sigma^2 = \gamma_0 - \sum_{j=1}^p \phi_j \gamma_j \tag{1}$$

puesto que $Cov(U_t, X_t) = Cov(U_t, \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j}) + Cov(U_t, U_t) = 0 + \sigma^2$.

Para $1 \leq k \leq p$ tenemos:

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^p \phi_j \gamma_{k-j} \tag{2}$$

O en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_{p-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{bmatrix}.$$

Dividiendo (1) y (2) por γ_0 (y operando en (1) tenemos

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \cdots - \phi_p \rho_p}; \quad \rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p} \tag{3}$$

4.7. Proceso autorregresivo AR(1)

Sea $(1 - \phi z) * \mathbf{X} = \mathbf{U}$, con $|\phi| < 1$ y con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$, es decir

$$X_t = \phi X_{t-1} + U_t.$$

Y nótese que

$$(1 - az) * (1 + az + a^2 z^2 + a^3 z^3 + \dots) = 1;$$

por lo que ahora hay que calcular infinitos términos en

$$\gamma = \sigma^2 (1 - \phi z)^{-1} * (1 - \phi z^{-1})^{-1}.$$

Hay varias formas de hacer los cálculos. Una es vía los productos convolución; puesto que

$$(1 - a^2 z)^{-1} = (1 + a^2 z + a^4 z^2 + a^6 z^3 + \dots) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} a^{2|h|} z^h$$

(para verlo basta sustituir a^2 por b), tenemos que $(1 - az)^{-1} * (1 - az^{-1})^{-1}$ es:

$$\begin{array}{cccccccc} (\dots, & 0, & 0, & 0, & 1, & a, & a^2, & a^3, & \dots) \\ * (\dots, & a^3, & a^2, & a, & 1, & 0, & 0, & 0, & \dots) \\ \hline = (\dots, & \frac{a^3}{1+a^2}, & \frac{a^2}{1+a^2}, & \frac{a}{1+a^2}, & \frac{1}{1+a^2}, & \frac{a}{1+a^2}, & \frac{a^2}{1+a^2}, & \frac{a^3}{1+a^2}, & \dots) \end{array}$$

(donde además hemos sustituido z por 1, pues cada término es una suma).

Es decir $(1 - az)^{-1} * (1 - az^{-1})^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a^{|k|}}{1-a^2} z^k$; y por tanto

$$\gamma = \sigma^2 (1 - \phi z)^{-1} * (1 - \phi z^{-1})^{-1} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi^{|k|} z^k$$

Pero también podemos usar las Ecuaciones de Yule-Walker. En este caso (donde el único parámetro es $\phi_1 = \phi$), en cuanto a la correlación:

$$\rho_k = \phi \rho_{k-1} \quad k > 0$$

y como $\rho_0 = 1$, tenemos que

$$\rho_k = \phi^k \quad k \geq 0$$

Y en cuanto a la varianza, dado que $\rho_1 = \phi$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \rho_1 \phi} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}.$$

Por tanto

$$\gamma = \gamma_0 \cdot \boldsymbol{\rho} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi^{|k|} z^k$$

Proceso autorregresivo AR(1)

Así pues, si $(1 - \phi z) * \mathbf{X} = \mathbf{U}$, con $|\phi| < 1$ y con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$, es decir, si

$$X_t = \phi X_{t-1} + U_t$$

tenemos que

$$\gamma = \sigma^2(1 - \phi z)^{-1} * (1 - \phi z^{-1})^{-1} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi^{|k|} z^k$$

$$\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1 + \phi^2}{\sigma^2} \gamma = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi^{|j|} z^j \Rightarrow \rho_k = \phi^k \text{ para } k \geq 0.$$

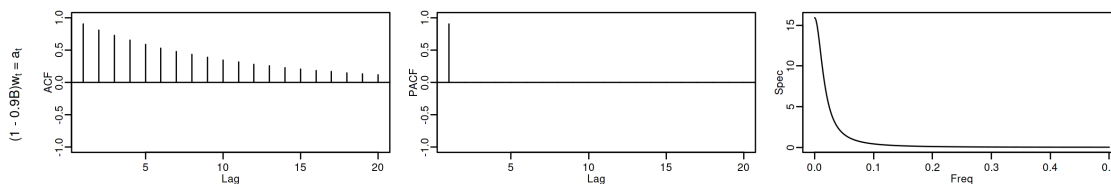
$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \gamma_h \cos(h\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 + \phi^2 - 2\phi \cos(\omega)} \quad (\text{compárese con MA(1)}).$$

$$\pi = (\dots, 0, 0, \phi, 1, \phi, 0, 0, \dots)$$

AR(1) con raíz positiva

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
arip <- um(ar = "(1 - 0.9B)")
display(list(arip), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

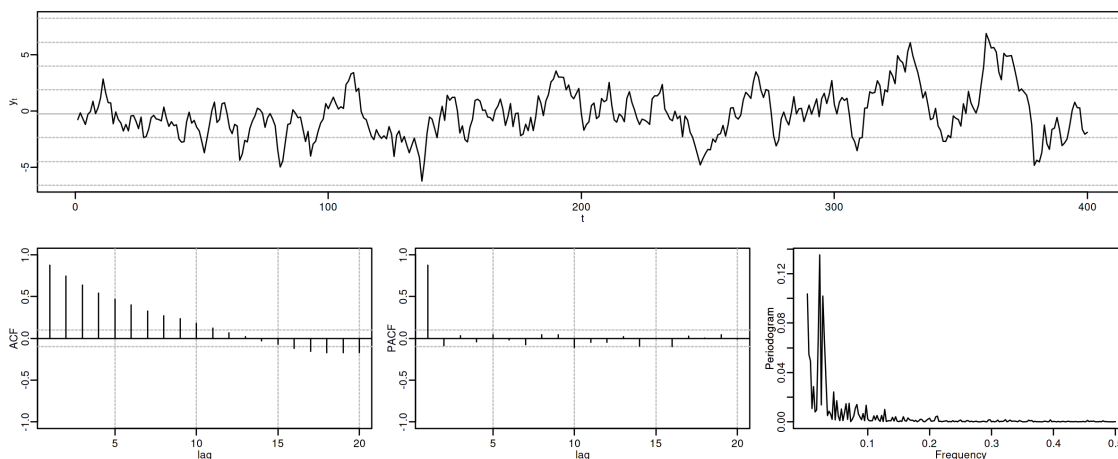
$$\phi(z) = 1 - 0.9z \Rightarrow X_t = 0.9X_{t-1} + U_t.$$



```
roots(arip)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1.111111	0	1.111111	0	Inf	1

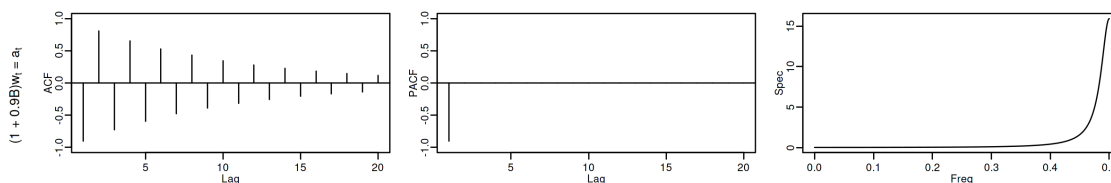
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(arip, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



AR(1) con raíz negativa

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
arin <- um(ar = "(1 + 0.9B)")
display(list(arin), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

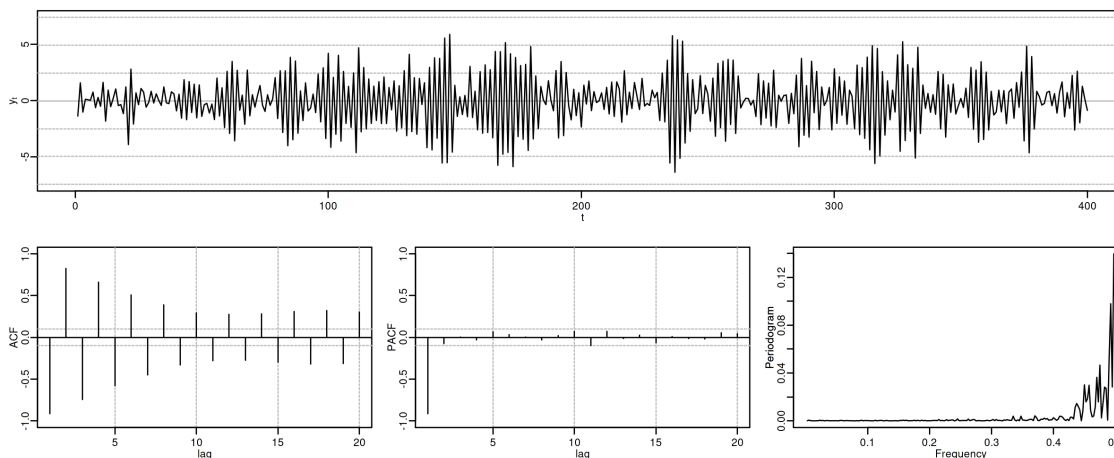
$$\phi(z) = 1 + 0,9z \Rightarrow X_t = -0,9X_{t-1} + U_t.$$



```
roots(arin)
```

1.	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
	-1.111111	0	1.111111	0.5	2	1

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(arin, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.8. Proceso autorregresivo AR(2)

Sea $(1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2) * X = U$, con $U \sim WN(0, \sigma^2)$ y con

$$\phi_1 + \phi_2 < 1; \quad \phi_2 - \phi_1 < 1; \quad |\phi_2| < 1; \quad (\text{i.e., invertible})$$

es decir

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + U_t.$$

Entonces

$$\gamma = \sigma^2 \left(\frac{1}{\phi(z)} * \frac{1}{\phi(z^{-1})} \right) \quad (\text{Verifica } \gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \text{ y decae paulatinamente})$$

(de (3) : $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2}$ e iniciamos el cálculo (2) recursivamente)

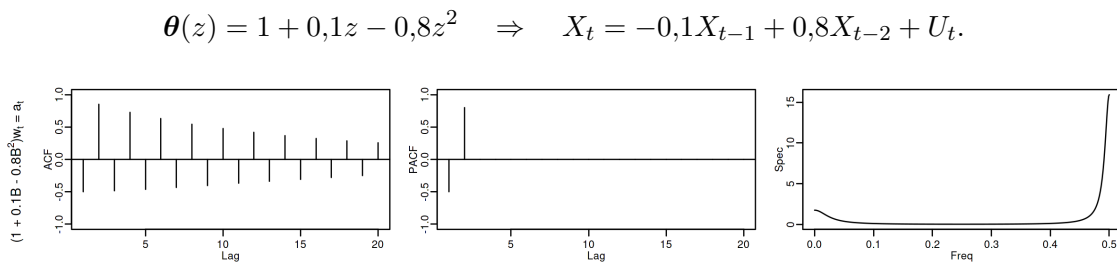
$\rho = \frac{1}{\gamma_0}\gamma$ (Verifica $\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}$ y decae paulatinamente)
(como $\rho_0 = 1$, iniciamos el cálculo (3) recursivamente)

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1+\phi_1^2+\phi_2^2-2\phi_1(1+\phi_2)\cos(\omega)-2\phi_2\cos(2\omega)}$$

$$\pi = (\dots, 0, \phi_2, \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, 1, \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, \phi_2, 0, \dots)$$

4.8.1. AR(2) con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa

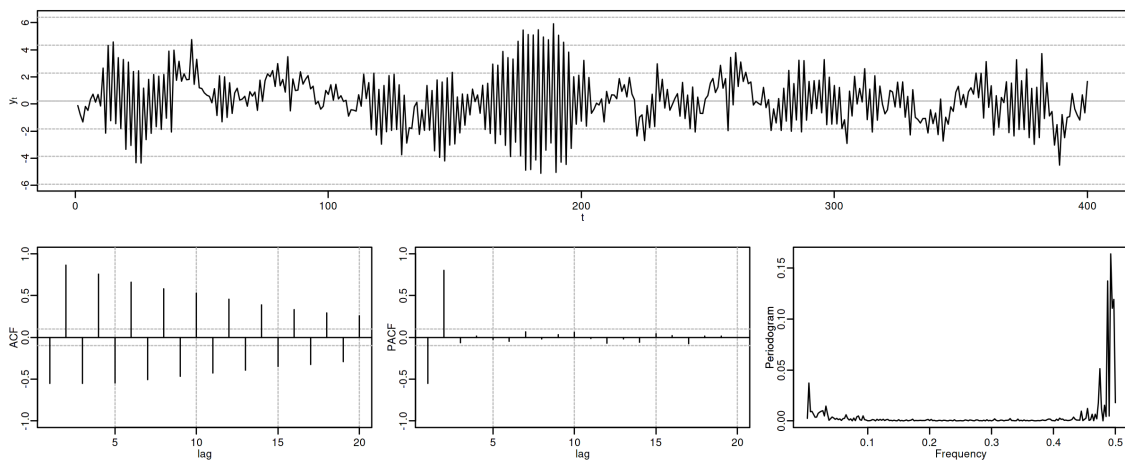
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar2pn <- um(ar = "(1 + 0.1B - 0.8B^2)")
display(list(ar2pn), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```



```
roots(ar2pn)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1.18228	7.754818e-26	1.18228	0.0	Inf	1
	-1.05728	-7.754818e-26	1.05728	0.5	2	1

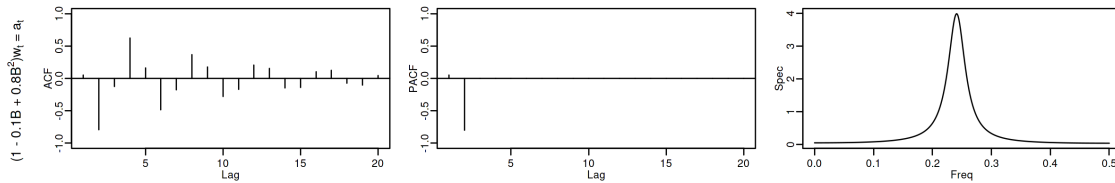
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar2pn, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.8.2. AR(2) con un par de raíces complejas

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar2np <- um(ar = "(1 - 0.1B + 0.8B^2)")
display(list(ar2np), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

$$\theta(z) = 1 - 0,1z + 0,8z^2 \Rightarrow X_t = 0,1X_{t-1} - 0,8X_{t-2} + U_t.$$

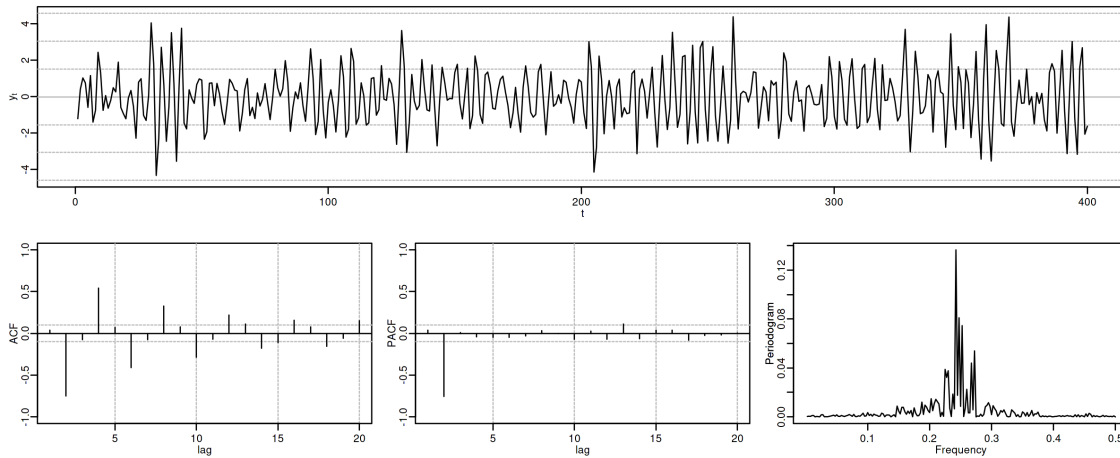


```
roots(ar2np)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	0.0625	1.116286	1.118034	0.2410983	4.147685	1
	0.0625	-1.116286	1.118034	0.2410983	4.147685	1

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar2np, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```

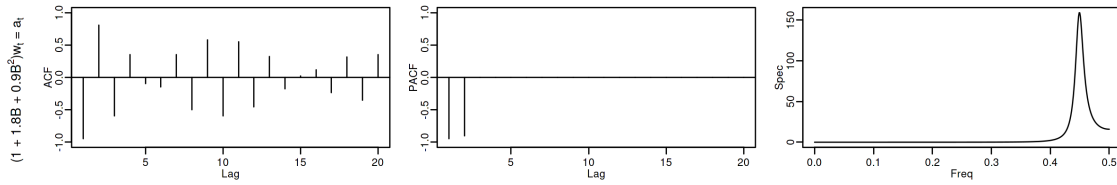
C



4.8.3. AR(2) con dos raíces reales y negativas

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar2azul <- um(ar = "(1 + 1.8B + .9B^2)")
display(list(ar2azul), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

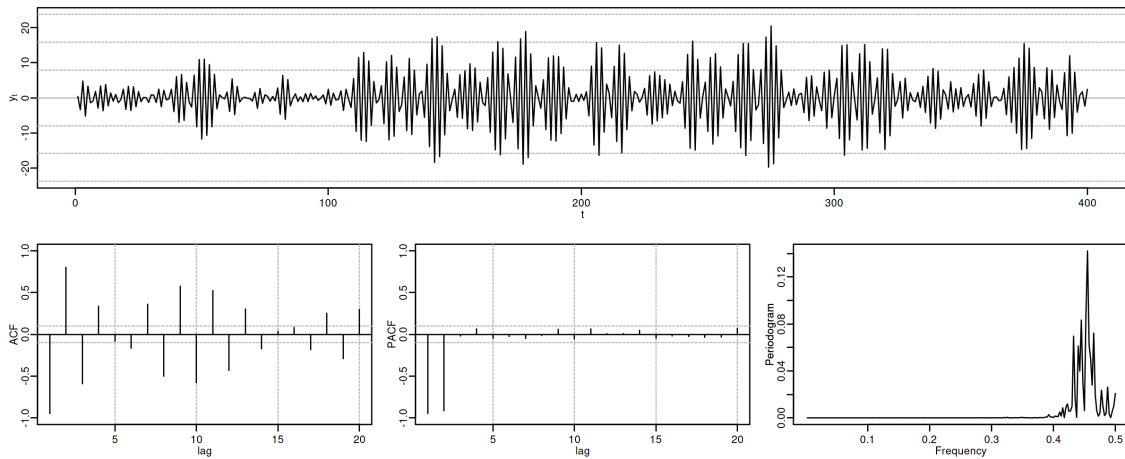
$$\theta(z) = 1 + 1,8z + 0,9z^2 \Rightarrow X_t = -1,8X_{t-1} - 0,9X_{t-2} + U_t.$$



```
roots(ar2azul)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	-1	0.3333333	1.054093	0.4487918	2.228205	1
	-1	-0.3333333	1.054093	0.4487918	2.228205	1

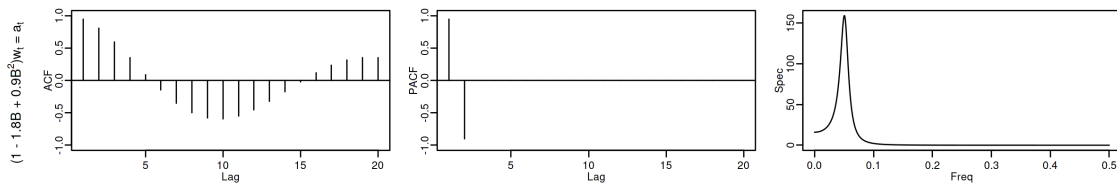
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar2azul, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.8.4. AR(2) con dos raíces reales y positivas

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar2rojo <- um(ar = "(1 - 1.8B + .9B^2)")
display(list(ar2rojo), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

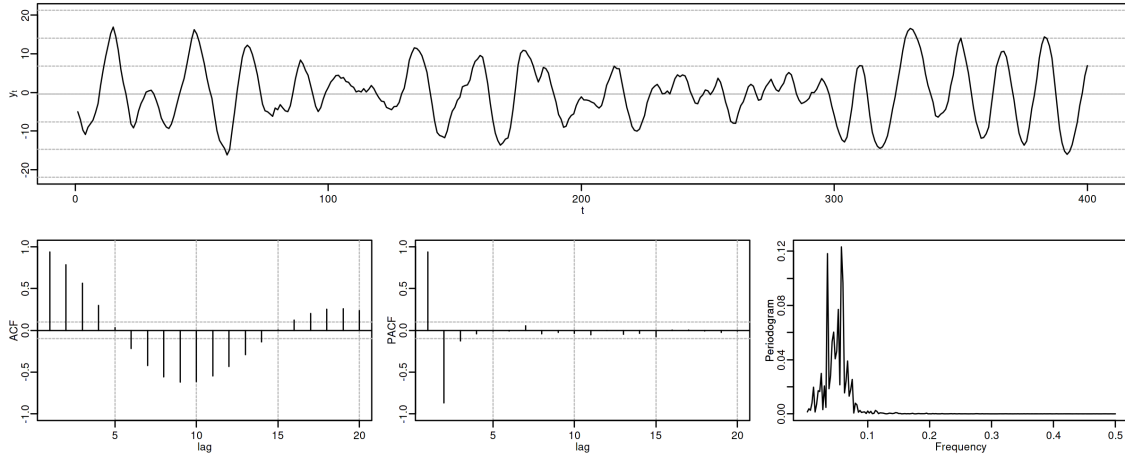
$$\theta(z) = 1 - 1.8z + 0.9z^2 \Rightarrow X_t = 1.8X_{t-1} - 0.9X_{t-2} + U_t.$$



```
roots(ar2rojo)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1	0.3333333	1.054093	0.05120819	19.52813	1
	1	-0.3333333	1.054093	0.05120819	19.52813	1

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar2rojo, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



5. (Resumen) características de procesos $MA(q)$

Siempre estacionario.

Para ser invertible raíces θ fuera del círculo unidad ($\theta^{-\triangleright} = \theta^{-1} \in \ell^1$)

Tipos de representación del proceso

Como suma ponderada finita (número finito de parámetros)

$$\mathbf{X} = \theta * \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad X_t = \theta(B)U_t$$

Como suma ponderada infinita (solo existe si es invertible):

$$\frac{1}{\theta} * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\theta}(B)X_t = U_t$$

Comportamiento de las funciones asociadas a los segundo momentos

ACF (ρ): Grado (q) y cogrado ($-q$)

PACF (π): Grado (∞) y cogrado ($-\infty$): Combinación de exponenciales y/o sinusoidales amortiguadas.

Densidad espectral proporcional al inverso de la densidad espectral de $\theta * \mathbf{X} = \mathbf{U}$

6. (Resumen) características de procesos $\text{AR}(p)$

Siempre invertible.

Para ser estacionario raíces de ϕ fuera del círculo unidad ($\phi^{-\triangleright} = \phi^{-1} \in \ell^1$)

Tipos de representación del proceso

Como suma ponderada finita (número finito de parámetros)

$$\phi * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{B})X_t = U_t$$

Como suma ponderada infinita (solo si es estacionario)

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\phi} * \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad X_t = \frac{1}{\phi}(\mathbf{B})U_t$$

Comportamiento de las funciones asociadas a los segundo momentos

ACF (ρ): Grado (∞) y cogrado ($-\infty$): Combinación de exponenciales y/o sinusoidales amortiguadas.

PACF (π): Grado (p) y cogrado ($-p$)

Densidad espectral proporcional al inverso de la densidad espectral de $\mathbf{X} = \phi * \mathbf{U}$

7. Nota final

Se puede demostrar que

- si un proceso tiene una ACF ρ con cogrado $-q$ y grado q , es un proceso $\text{MA}(q)$
- si un proceso tiene una PACF π con cogrado $-p$ y grado p , es un proceso $\text{AR}(p)$

Véase *Pourahmadi M. (2001)*.

Consecuentemente, que la ACF o la PACF se cortan “bruscamente” nos indica que el modelo es AR o MA (y su grado).

Desgraciadamente para los modelos ARMA (qué veremos más adelante) tanto la ACF como la PACF tienen infinitos términos no nulos, por lo que su identificación no es tan sencilla.