

# Mortalidad y matrimonio en Inglaterra 1866–1911

## Los datos

Los datos de este ejercicio corresponden a la mortalidad anual y la proporción de matrimonios eclesiásticos en Inglaterra entre 1866 y 1911 **Fuente:** Ejercicio del Prof. Miguel Jerez

**Std\_mortality** Mortalidad anual por cada 1000 personas. Serie estandarizada.

**Proportion\_marriages** Proporción de matrimonios eclesiásticos anuales por cada 1000 personas.

**d\_Std\_mortality** Primera diferencia de Std\_mortality.

**d\_Proportion\_marriages** Primera diferencia de Proportion\_marriages.

---

```
open mortality-marriages.gdt
```

---

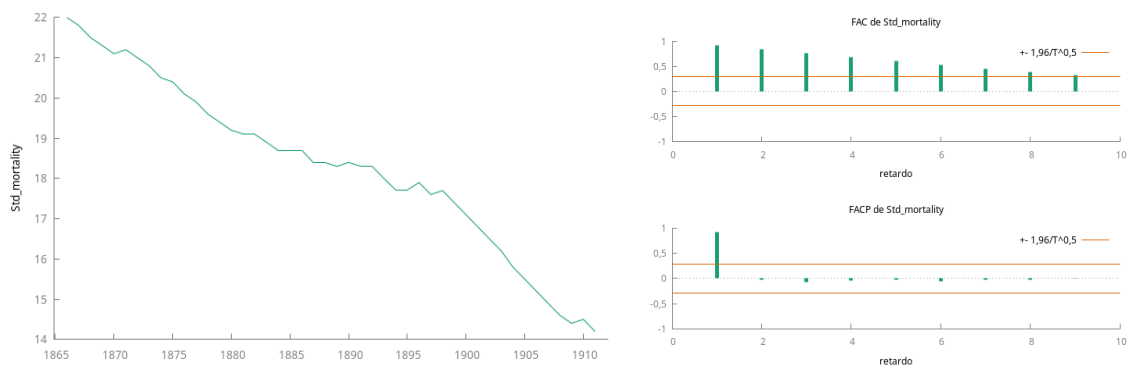
## Datos en nivel de la serie de mortalidad

### Gráfico de la serie temporal y su correlograma

---

```
gnuplot Std_mortality --time-series --with-lines --output="mortality.png"  
corrgm Std_mortality 9 --plot="mortalityACF-PACF.png"
```

---



## Estimación de un modelo univariante para la serie de mortalidad

---

```
arima 1 0 2 ; Std_mortality
```

---

Evaluaciones de la función: 289

Evaluaciones del gradiente: 80

Modelo 2: ARMA, usando las observaciones 1866–1911 ( $T = 46$ )

Estimado usando AS 197 (MV exacta)

Variable dependiente: Std\_mortality

Desviaciones típicas basadas en el Hessiano

	coeficiente	Desv. típica	z	valor p	
const	18,0782	3,69647	4,891	1,00e-06	***
phi_1	0,996455	0,00501938	198,5	0,0000	***
theta_1	0,401166	0,171108	2,345	0,0191	**
theta_2	0,345176	0,108887	3,170	0,0015	***
Media de la vble. dep.	18,32174	D.T. de la vble. dep.	2,135615		
Media de innovaciones	-0,094657	D.T. innovaciones	0,185241		
R-cuadrado	0,994379	R-cuadrado corregido	0,994117		
Log-verosimilitud	9,085184	Criterio de Akaike	-8,170368		
Criterio de Schwarz	0,972839	Crit. de Hannan-Quinn	-4,745268		

	Real	Imaginaria	Módulo	Frecuencia
AR				
Raíz 1	1,0036	0,0000	1,0036	0,0000
MA				
Raíz 1	-0,5811	-1,5998	1,7021	-0,3055
Raíz 2	-0,5811	1,5998	1,7021	0,3055

## Contraste de cointegración

---

```
coint 9 Std_mortality Proportion_marriages --test-down
```

---

Etapla 1: contrastando la existencia de una raíz unitaria en Std\_mortality

Contraste aumentado de Dickey-Fuller para Std\_mortality  
 contrastar hacia abajo desde 9 retardos, con el criterio AIC  
 tamaño muestral 45  
 la hipótesis nula de raíz unitaria es:  $[a = 1]$

```
contraste con constante
incluyendo 0 retardos de (1-L)Std_mortality
modelo: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + e
valor estimado de (a - 1): 0,00678121
estadístico de contraste: tau_c(1) = 0,615887
valor p asintótico 0,9902
Coef. de autocorrelación de primer orden de e: 0,085
```

Etapla 2: contrastando la existencia de una raíz unitaria en Proportion\_marriages

Contraste aumentado de Dickey-Fuller para Proportion\_marriages  
 contrastar hacia abajo desde 9 retardos, con el criterio AIC  
 tamaño muestral 39  
 la hipótesis nula de raíz unitaria es:  $[a = 1]$

```
contraste con constante
incluyendo 6 retardos de (1-L)Proportion_marriages
modelo: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + ... + e
```

valor estimado de  $(a - 1)$ : 0,0831149  
estadístico de contraste:  $\tau_c(1) = 1,04236$   
valor p asintótico 0,9971  
Coef. de autocorrelación de primer orden de e: -0,068  
diferencias retardadas:  $F(6, 31) = 3,197$  [0,0147]

### Etapa 3: regresión cointegrante

Regresión cointegrante -  
MCO, usando las observaciones 1866-1911 (T = 46)  
Variable dependiente: Std\_mortality

	coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-10,8466	1,42447	-7,614	1,45e-09 ***
Proportion_marri~	0,418536	0,0203914	20,53	3,67e-24 ***
Media de la vble. dep.	18,32174	D.T. de la vble. dep.	2,135615	
Suma de cuad. residuos	19,40865	D.T. de la regresión	0,664158	
R-cuadrado	0,905434	R-cuadrado corregido	0,903284	
Log-verosimilitud	-45,42395	Criterio de Akaike	94,84790	
Criterio de Schwarz	98,50518	Crit. de Hannan-Quinn	96,21794	
rho	0,228283	Durbin-Watson	1,535570	

### Etapa 4: contrastando la existencia de una raíz unitaria en uhat

Contraste aumentado de Dickey-Fuller para uhat  
contrastar hacia abajo desde 9 retardos, con el criterio AIC  
tamaño muestral 45  
la hipótesis nula de raíz unitaria es:  $[a = 1]$

contraste sin constante  
incluyendo 0 retardos de  $(1-L)uhat$   
modelo:  $(1-L)y = (a-1)*y(-1) + e$   
valor estimado de  $(a - 1)$ : -0,771717  
estadístico de contraste:  $\tau_c(2) = -5,22784$   
valor p asintótico 5,236e-05  
Coef. de autocorrelación de primer orden de e: 0,023

Hay evidencia de una relación cointegrante si:

- (a) La hipótesis de existencia de raíz unitaria no se rechaza para las variables individuales y
- (b) La hipótesis de existencia de raíz unitaria se rechaza para los residuos (uhat) de la regresión cointegrante

## Regresión de la mortalidad sobre la proporción de matrimonios eclesiásticos

---

```
ols Std_mortality 0 Proportion_marriages
modtest --normality --quiet
modtest --white --quiet
modtest --autocorr 5 --quiet
```

---

Modelo 6: MCO, usando las observaciones 1866-1911 (T = 46)  
Variable dependiente: Std\_mortality

	coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-10,8466	1,42447	-7,614	1,45e-09 ***
Proportion_marri~	0,418536	0,0203914	20,53	3,67e-24 ***
Media de la vble. dep.	18,32174	D.T. de la vble. dep.	2,135615	
Suma de cuad. residuos	19,40865	D.T. de la regresión	0,664158	
R-cuadrado	0,905434	R-cuadrado corregido	0,903284	
F(1, 44)	421,2815	Valor p (de F)	3,67e-24	
Log-verosimilitud	-45,42395	Criterio de Akaike	94,84790	
Criterio de Schwarz	98,50518	Crit. de Hannan-Quinn	96,21794	
rho	0,228283	Durbin-Watson	1,535570	

Contraste de la hipótesis nula de distribución Normal:  
Chi-cuadrado(2) = 0,260 con valor p 0,87796

Contraste de heterocedasticidad de White

Estadístico de contraste:  $TR^2 = 1,729996$ ,  
con valor p =  $P(\text{Chi-cuadrado}(2) > 1,729996) = 0,421052$

Contraste de Breusch-Godfrey para autocorrelación hasta el orden 5

Estadístico de contraste: LMF = 1,947454,  
con valor p =  $P(F(5,39) > 1,94745) = 0,108$

Estadístico alternativo:  $TR^2 = 9,190388$ ,  
con valor p =  $P(\text{Chi-cuadrado}(5) > 9,19039) = 0,102$

Ljung-Box  $Q' = 9,05845$ ,  
con valor p =  $P(\text{Chi-cuadrado}(5) > 9,05845) = 0,107$

## Regresión en primeras diferencias

```
diff Std_mortality Proportion_marriages
ols d_Std_mortality 0 d_Proportion_marriages
modtest --normality --quiet
modtest --white --quiet
modtest --autocorr 5 --quiet
```

Modelo 8: MCO, usando las observaciones 1867-1911 (T = 45)  
Variable dependiente: d\_Std\_mortality

	coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-0,172792	0,0230316	-7,502	2,43e-09 ***
d_Proportion_mar~	0,00142536	0,0117781	0,1210	0,9042
Media de la vble. dep.	-0,173333	D.T. de la vble. dep.	0,149848	
Suma de cuad. residuos	0,987664	D.T. de la regresión	0,151555	
R-cuadrado	0,000340	R-cuadrado corregido	-0,022907	

F(1, 43)	0,014645	Valor p (de F)	0,904241
Log-verosimilitud	22,07697	Criterio de Akaike	-40,15393
Criterio de Schwarz	-36,54061	Crit. de Hannan-Quinn	-38,80692
rho	0,089193	Durbin-Watson	1,806988

Contraste de la hipótesis nula de distribución Normal:  
Chi-cuadrado(2) = 14,808 con valor p 0,00061

Contraste de heterocedasticidad de White

Estadístico de contraste:  $TR^2 = 2,149006$ ,  
con valor p =  $P(\text{Chi-cuadrado}(2) > 2,149006) = 0,341467$

Contraste de Breusch-Godfrey para autocorrelación hasta el orden 5

Estadístico de contraste: LMF = 0,589588,  
con valor p =  $P(F(5,38) > 0,589588) = 0,708$

Estadístico alternativo:  $TR^2 = 3,239657$ ,  
con valor p =  $P(\text{Chi-cuadrado}(5) > 3,23966) = 0,663$

Ljung-Box  $Q' = 4,0454$ ,  
con valor p =  $P(\text{Chi-cuadrado}(5) > 4,0454) = 0,543$

## Preguntas

### Pregunta 1

Discuta de todas las formas posibles si la serie temporal de mortalidad (`Std_mortality`) es estacionaria en media (i.e., la realización de un proceso estocástico estacionario), usando para ello los resultados de los apartados [Datos en nivel de la serie de mortalidad](#) y [Contraste de cointegración](#).

(Respuesta 1)

### Pregunta 2

Discuta si las series de mortalidad y proporción de matrimonios eclesiásticos están cointegradas, a partir de los resultados del apartado [Contraste de cointegración](#).

(Respuesta 2)

### Pregunta 3

Sin embargo, ¿qué sugieren los resultados de las secciones [Regresión de la mortalidad sobre la proporción de matrimonios eclesiásticos](#) y [Regresión en primeras diferencias](#)?

(Respuesta 3)

### Pregunta 4

Los listados en [Contraste de cointegración](#) y [Regresión de la mortalidad sobre la proporción de matrimonios eclesiásticos](#) muestran los principales resultados obtenidos al estimar por MCO dos modelos de regresión que relacionan las dos variables consideradas en este ejercicio. Resuma y comente los resultados de estimación y diagnosis que le parezcan más relevantes. Si detecta alguna desviación del cumplimiento de

las hipótesis habituales, discuta sus consecuencias sobre las propiedades del estimador MCO y sugiera una forma de tratarla.

(Respuesta 4)

## Pregunta 5

Interprete la pendiente de la regresión cointegrante estimada en la Etapa 3 del [Contraste de cointegración](#).

(Respuesta 5)

## Pregunta 6

Indique cuáles de las siguientes expresiones representan el modelo de la sección [Estimación de un modelo univariante para la serie de mortalidad](#), con un redondeo a tres decimales (0.2 puntos por respuesta correcta, -0.2 puntos por respuesta incorrecta, 0 puntos por respuesta en blanco):

1.  $(1 - 0,997 B) (X_t - 18,078) = (1 + 0,401 B + 0,345 B^2) \hat{U}_t$
2.  $(1 - 0,997 B) (X_t - 18,078) = (1 - 0,401 B - 0,345 B^2) \hat{U}_t$
3.  $(1 + 0,997 B) (X_t - 18,078) = (1 + 0,401 B + 0,345 B^2) \hat{U}_t$
4.  $X_t = 18,078 + \frac{1+0,401 B+0,345 B^2}{1-0,997 B} \hat{U}_t$
5.  $X_t = -18,078 + \frac{1+0,401 B+0,345 B^2}{1-0,997 B} \hat{U}_t$
6.  $X_t = 18,078 + \frac{1-0,401 B-0,345 B^2}{1-0,997 B} \hat{U}_t$
7.  $X_t = 18,078 + \frac{1+0,401 B+0,345 B^2}{1+0,997 B} \hat{U}_t$
8.  $\frac{1-0,997 B}{1+0,401 B+0,345 B^2} (X_t - 18,078) = \hat{U}_t$
9.  $\frac{1-0,997 B}{1+0,401 B+0,345 B^2} X_t = 18,078 + \hat{U}_t$
10.  $\frac{1-0,997 B}{1-0,401 B-0,345 B^2} (X_t - 18,078) = \hat{U}_t$

(Respuesta 6)

## Pregunta 7

A la luz de la [Estimación de un modelo univariante para la serie de mortalidad](#), si tuviera que clasificar el proceso estocástico subyacente del que la serie temporal es una realización ¿diría que es invertible? ¿O que no lo es? ¿diría que es estacionario? ¿O que no lo es? Explique su respuesta.

(Respuesta 7)

## Pregunta 8

¿Cuáles de los modelos de más arriba considera aceptables? ¿O qué mejoras sugeriría para ellos?

(Respuesta 8)

# Respuestas

## Respuesta 1

La serie temporal `Std_mortality` NO es estacionaria en media, como se aprecia en las secciones:

- [Gráfico de la serie temporal y su correlograma](#).
  - El gráfico de la serie muestra una tendencia decreciente.
  - Si FAC muestra mucha persistencia, los coeficientes decrecen a un ritmo aproximadamente lineal; y el primer coeficiente de la PACF está próximo a uno.
- [Estimación de un modelo univariante para la serie de mortalidad](#): El modelo univariante estimado tiene una raíz AR aproximadamente igual a 1.
- [Contraste de cointegración](#): El test ADF calculado en la Etapa 1 no rechaza la hipótesis (raíz unitaria) con un p-valor de 0.9902

([Pregunta 1](#))

## Respuesta 2

Las conclusiones de las distintas etapas del test de cointegración son los siguientes:

**Etapas 1** El test ADF no rechaza que la serie de mortalidad sea  $I(1)$ .

**Etapas 2** El test ADF no rechaza que la serie de proporción de matrimonios eclesiásticos sea  $I(1)$ .

**Etapas 3** La regresión (cointegrante) de mortalidad sobre la proporción de matrimonios eclesiásticos es significativa.

**Etapas 4** El test ADF rechaza contundentemente que los residuos de la regresión cointegrante sean  $I(1)$

Consecuentemente, el test indica que ambas series están cointegradas (*pero, como sugiere tanto el sentido común como la [Regresión en primeras diferencias](#) la relación es espuria*).

([Pregunta 2](#))

## Respuesta 3

Aunque el modelo de [Regresión de la mortalidad sobre la proporción de matrimonios eclesiásticos](#) muestra un buen ajuste (un elevado  $R^2$ ) y los parámetros estimados son muy significativos, la relación entre ambas variables se desvanece al diferenciar los datos para lograr la estacionariedad. Ello sugiere, al igual que el sentido común, que la relación es espuria.

([Pregunta 3](#))

## Respuesta 4

**Modelo para datos en nivel** ([Regresión de la mortalidad sobre la proporción de matrimonios eclesiásticos](#)): Todos los coeficientes son muy significativos. El ajuste del modelo, medido por el valor del  $R^2$  es muy elevado. Los contrastes sobre los residuos no rechazan (ni al 1 %, ni al 5 % ni al 10 % de significación) las hipótesis nulas de normalidad, ni homoscedasticidad y ni ausencia de autocorrelación residual.

**Modelo para datos en primeras diferencias** ([Regresión en primeras diferencias](#)): El único coeficiente significativo es el término constante. El ajuste del modelo, medido por el valor del  $R^2$ , es prácticamente nulo. Los contrastes residuales rechazan la hipótesis nula de normalidad, aunque no rechazan las de homoscedasticidad y ausencia de autocorrelación.

Si las perturbaciones no tienen distribución normales las estimaciones no serán eficientes en el sentido máximo-verosímil (aunque sí en el de Gauss-Markov) y la inferencia basada en los tests habituales (incluyendo en particular los intervalos de confianza) no estará bien realizada.

A partir de estos resultados cabría, por ejemplo, volver a estimar el modelo seleccionando la opción de desviaciones típicas robustas, para corregir los contrastes de significación dado que los errores no parecen gaussianos.

(Pregunta 4)

## Respuesta 5

La pendiente de la regresión estimada en la Etapa 3 indica que un aumento de un uno por mil en la proporción de matrimonios eclesiásticos da lugar a un aumento de un 0.419 por mil en la mortalidad esperada (pero, dado que la relación es espuria, interpretar este resultado carece de sentido).

(Pregunta 5)

## Respuesta 6

La 1, 4 y 8.

Recuerde que signo de los parámetros MA en las salidas de Gretl tienen el signo cambiado respecto a convenio habitual, es decir, para los polinomios AR  $(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$ , tenemos que `phi_j` es  $\phi_j$  (es decir, al escribir el modelo cambiamos el signo del parámetro AR); pero para los MA  $(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_p B^p)$ , tenemos que `theta_j` es  $-\theta_j$  (es decir, al escribir no cambiamos el signo del valor indicado por Gretl para el parámetro MA). Además, `const` es la estimación del valor esperado  $\mu$  del proceso  $X$ , es decir, que  $(X_t - \mu \mid t \in \mathbb{Z})$  es un proceso ARMA de media cero.

(Pregunta 6)

## Respuesta 7

La raíz AR estimada está muy próxima a 1, por lo que cabe pensar que la serie proviene de un proceso estocástico NO estacionario. Sin embargo, las raíces del polinomio MA tienen un módulo claramente mayor que uno, por lo que el modelo tiene claramente una representación  $AR(\infty)$ , es decir, es invertible.

(Pregunta 7)

## Respuesta 8

¿Cuáles de los modelos de más arriba considera aceptables? ¿O qué mejoras sugeriría para ellos?

**En cuanto al modelo univariante** Probablemente debería incorporar una diferencia ordinaria, en lugar de un término AR.

**En cuanto a los modelos de regresión** en el modelo en diferencias hay, probablemente, un problema de autocorrelación dado el valor del estadístico Durbin-Watson, por lo que quizá debería ser estimado por mínimos cuadrados generalizados.

No obstante, el modelo en diferencias sugiere que no hay relación entre ambas variables

Consecuentemente ninguna de las dos regresiones ofrece un modelo aceptable.

(Pregunta 8)