La notación tradicional no me gusta. Usaré una más compacta con productos convolución en lugar de sumatorios y donde $\boldsymbol{y} = \{y_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ (ya ves que tengo cierta obsesión con las notaciones).

Sea

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}_1 + \cdots + \boldsymbol{c}_k$$

donde cada $\boldsymbol{c}_j = \{c_{j_t} \mid t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso ARIMA

$$\mathsf{A}_j * \boldsymbol{c}_j = \mathsf{B}_j * \boldsymbol{e}_j,$$

es decir, donde A_j y B_j son polinomios en el operador retardo L, donde $*$ es el producto convolución y donde $\boldsymbol{e}_j = \{e_{j_t} \mid t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de ruido blanco. Entonces $\boldsymbol{y}$ también es un proceso ARIMA

$$\mathsf{A} * \boldsymbol{y} = \mathsf{B} * \boldsymbol{e}$$

donde, si denotamos el conjunto de índices $1, 2, \ldots, k$ con $\{1 : k\}$, tenemos que

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 * \cdots * \mathsf{A}_k = \prod_{j \in \{1:k\}} \mathsf{A}_j.$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned}
\mathsf{A} * \boldsymbol{y} =& \mathsf{B} * \boldsymbol{e} \\
\mathsf{A} * (\boldsymbol{c}_1 + \cdots + \boldsymbol{c}_k) =& \mathsf{B} * \boldsymbol{e} \\
\mathsf{A} * \boldsymbol{c}_1 + \cdots + \mathsf{A} * \boldsymbol{c}_k =& \mathsf{B} * \boldsymbol{e} \\
\left(\prod_{\substack{j \in \{1:k\} \\ j \neq 1}} \mathsf{A}_j\right) * \mathsf{A}_1 * \boldsymbol{c}_1 + \left(\prod_{\substack{j \in \{1:k\} \\ j \neq 2}} \mathsf{A}_j\right) * \mathsf{A}_2 * \boldsymbol{c}_2 + \cdots + \left(\prod_{\substack{j \in \{1:k\} \\ j \neq k}} \mathsf{A}_j\right) * \mathsf{A}_k * \boldsymbol{c}_k =& \mathsf{B} * \boldsymbol{e} \\
\left(\prod_{\substack{j \in \{1:k\} \\ j \neq 1}} \mathsf{A}_j\right) * \mathsf{B}_1 * \boldsymbol{e}_1 + \left(\prod_{\substack{j \in \{1:k\} \\ j \neq 2}} \mathsf{A}_j\right) * \mathsf{B}_2 * \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \left(\prod_{\substack{j \in \{1:k\} \\ j \neq k}} \mathsf{A}_j\right) * \mathsf{B}_k * \boldsymbol{e}_k =& \mathsf{B} * \boldsymbol{e}
\end{aligned}$$

Y si asumimos que B es invertible, entonces

$$\frac{\left(\prod_{\substack{j \in \{1:k\} \\ j \neq 1}} \mathsf{A}_j\right) * \mathsf{B}_1}{\mathsf{B}} * \boldsymbol{e}_1 + \frac{\left(\prod_{\substack{j \in \{1:k\} \\ j \neq 2}} \mathsf{A}_j\right) * \mathsf{B}_2}{\mathsf{B}} * \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \frac{\left(\prod_{\substack{j \in \{1:k\} \\ j \neq k}} \mathsf{A}_j\right) * \mathsf{B}_k}{\mathsf{B}} * \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}.$$

Me da en la nariz que la condición no puede ser exclusivamente sobre el polinomio B, probablemente también debe haber condiciones sobre los procesos de ruido blanco $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2, \ldots$ $\boldsymbol{e}_k$, pues la suma de los k procesos de la izquierda en la última expresión resulta ser ruido blanco.

No sé ¿voy bien orientado?… ¿o toda esta deducción es una gilipollez?