

# Contents

<b>1</b>	<b>Descomposición estructural de una serie temporal</b>	<b>2</b>
1.1	Tendencia determinista <i>lineal</i> . . . . .	3
1.2	Tendencia determinista <i>cuadrática</i> . . . . .	5
1.3	Tendencia cuadrática más estacionalidad determinista mediante <i>dummies</i> . . . . .	7
1.3.1	Ajuste y componente irregular $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{t} - \mathbf{s}$ . . . . .	8
1.3.2	Valoración de modelos con componentes deterministas . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Autocorrelación</b>	<b>11</b>
2.1	Test de Breusch y Godfrey . . . . .	12
2.2	Errores estándar robustos . . . . .	13
2.3	Modelo del error . . . . .	15

# Econometría Aplicada. Lección 2

Marcos Bujosa

July 2, 2024

## Carga de algunos módulos de python

---

```
1 # Importamos algunos módulos de python
2 import numpy as np # linear algebra
3 import pandas as pd # dataframe processing
4 import statsmodels.api as sm # modelos estadísticos
5 import matplotlib as mpl
6 import matplotlib.pyplot as plt # data visualization
7 # definimos parámetros para mejorar los gráficos
8 mpl.rc('text', usetex=True)
9 mpl.rc('text.latex', preamble=r'\usepackage{amsmath}')
10 from matplotlib import rcParams
11 rcParams['figure.figsize'] = 15,5
```

---

---

```
1 # Usaré la siguiente función para transformar salidas en \LaTeX{} de statsmodels a ficheros png (que usaré en las transparencias)
2 from sympy.printing.preview import preview
3 def repr_png(tex, ImgFile):
4     preamble = "\\documentclass[10pt,preview]{standalone}\n" \
5         "\\usepackage{booktabs,amsmath,amsfonts}\\begin{document}"
6     preview(tex, filename=ImgFile, viewer='file', preamble=preamble, dvioptions=['-D','250'])
```

---

- Lectura datos: Internat. airline passengers. Monthly totals in thousands. Jan 49 – Dec 60

---

```
1 # Leemos los datos de un fichero csv y generamos un dataframe de pandas cuyo índice es el tiempo
2 OrigData = pd.read_csv('./database/Datasets-master/airline-passengers.csv')
3 OrigData['Month'] = pd.to_datetime(OrigData['Month'])
4 OrigData = OrigData.set_index(['Month'])
5 print(OrigData.head())
```

---

---

```
1 # Creamos un dataframe con el mismo índice temporal de los datos originales pero con los datos en logaritmos
2 TransformedData = pd.DataFrame(index=OrigData.index)
3 TransformedData['dataLog'] = np.log(OrigData['Passengers'])
4 print(TransformedData.head())
```

---

## 1 Descomposición estructural de una serie temporal

En la lección anterior vimos que una estrategia para analizar series temporales es transformar los datos para

1. primero lograr que sean "*estacionarios*" y
2. después, mediante más transformaciones, lograr una secuencia de "*datos i.i.d*" (este segundo paso aún no lo hemos abordado)

(recuerde que las expresiones "datos estacionarios" o "datos i.i.d." son un abuso del lenguaje).

Pero existe otro enfoque que pretende descomponer la serie temporal en los siguientes componentes "no observables" (o en un subconjunto de ellos):

$$y = t + c + s + e$$

donde:

**La tendencia "t"** recoge la lenta evolución de la media a *largo plazo*.

**El componente estacional "s"** recoge las oscilaciones periódicas que se repiten regularmente en ciclos estacionales (de año en año, o de semana en semana, etc.).

**El componente cíclico "c"** Cuando aparece explícitamente en el modelo, **c** recoge las oscilaciones a medio plazo. Es decir, aquellas de un plazo más largo que las oscilaciones estacionales, pero más corto que la tendencia de largo plazo. Si está ausente, dichas oscilaciones suelen aparecer en el componente de la tendencia, que entonces también podemos denominar *tendencia-ciclo*.

**El componente irregular "e"** recoge las oscilaciones no captadas por el resto de componentes, ya que debe cumplir la siguiente identidad:  $e = y - t - c - s$ .

Ajuste aceptable si (como poco) el componente irregular **e** parece "estacionario".

## 1.1 Tendencia determinista *lineal*

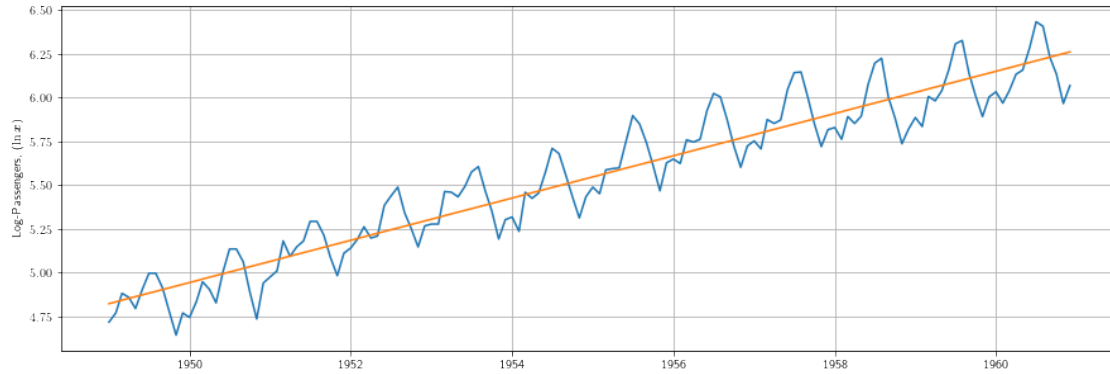
```
1 # Ajustamos por MCO una tendencia lineal. Para ello, primero creamos un DataFrame con el regresando y los regresores del modelo
2 datosModelo1 = TransformedData[['dataLog']].copy()
3 nsample = len(datosModelo1)
4 datosModelo1['cte'] = [1]*nsample
5 datosModelo1['time'] = np.linspace(1, nsample, nsample)
6 model1 = sm.OLS(datosModelo1['dataLog'], datosModelo1[['cte', 'time']])
7 results1 = model1.fit()

1 #Añadimos al DataFrame =datosModelo1= la tendencia ajustada, los residuos y la diferencia estacional de los residuos.
2 datosModelo1['yhat'] = datosModelo1['cte']*results1.params['cte']+datosModelo1['time']*results1.params['time']
3 datosModelo1['ehat'] = results1.resid
4 datosModelo1['ehatDiff12'] = datosModelo1['ehat'].diff(12)

1 # Dibujamos los datos junto a la tendencia estimada
2 plt.plot(datosModelo1['dataLog'])
3 plt.plot(results1.fittedvalues)
4 plt.grid()
5 plt.ylabel(r"Log-Passengers, ($\ln\boldsymbol{x}$) ")
```

El modelo de tendencia más simple es la recta de regresión donde el regresor no constante es el propio índice  $t$  de cada dato:

$$\ln y_t = \underbrace{\beta_1 + \beta_2 \cdot t}_{\text{tendencia}} + e_t; \quad t = 1 : 114$$



$$\widehat{\ln y_t} = 4.8137 + 0.01 \cdot (t), \quad t = 1 : 114$$

```
1 print(results1.summary())
```

<b>Dep. Variable:</b>	dataLog	<b>R-squared:</b>	0.902
<b>Model:</b>	OLS	<b>Adj. R-squared:</b>	0.901
<b>Method:</b>	Least Squares	<b>F-statistic:</b>	1300.
<b>Date:</b>	Tue, 02 Jul 2024	<b>Prob (F-statistic):</b>	2.41e-73
<b>Time:</b>	19:17:50	<b>Log-Likelihood:</b>	80.794
<b>No. Observations:</b>	144	<b>AIC:</b>	-157.6
<b>Df Residuals:</b>	142	<b>BIC:</b>	-151.6
<b>Df Model:</b>	1		
<b>Covariance Type:</b>	nonrobust		

	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
cte	4.8137	0.023	206.648	0.000	4.768	4.860
time	0.0100	0.000	36.050	0.000	0.009	0.011

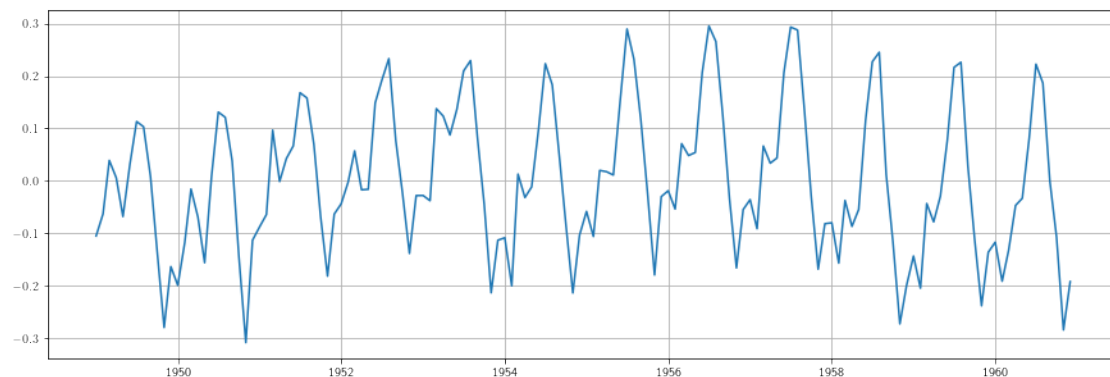
<b>Omnibus:</b>	3.750	<b>Durbin-Watson:</b>	0.587
<b>Prob(Omnibus):</b>	0.153	<b>Jarque-Bera (JB):</b>	2.722
<b>Skew:</b>	0.184	<b>Prob(JB):</b>	0.256
<b>Kurtosis:</b>	2.436	<b>Cond. No.</b>	168.

Notes:

[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

## Componente irregular

```
1 # Gráfico de los residuos del ajuste.
2 plt.grid()
3 plt.plot(results1.resid)
```



En este caso, el modelo

$$y = t + e$$

donde  $t$  es una tendencia lineal no es un ajuste satisfactorio, pues el *componente irregular*

$$e = y - t$$

no tiene la apariencia de realización de un proceso estacionario.

---

```
1 # Gráfico de la diferencia estacional de los residuos del ajuste.
2 plt.grid()
3 plt.plot(datosModelo1['ehatDiff12'])
```

---

Adicionalmente podemos ver que diferencia de orden 12 del componente irregular parece mostrar un componente cíclico con un periodo de unos 4 años.



En el siguiente ejercicio probaremos con una tendencia cuadrática...

## 1.2 Tendencia determinista *cuadrática*

---

```
1 # creamos un DataFrame con el regresando y los regresores del modelo.
2 datosModelo2 = TransformedData[['dataLog']].copy()
3 nsample = len(datosModelo1)
4 datosModelo2['cte'] = [1]*nsample
5 datosModelo2['time'] = np.linspace(1, nsample, nsample)
6 datosModelo2['sq_time'] = [t**2 for t in datosModelo2['time']]
7 # Ajustamos por MCD una tendencia cuadrática a los datos.
8 model2 = sm.OLS(datosModelo1['dataLog'], datosModelo2[['cte', 'time', 'sq_time']])
9 results2 = model2.fit()
```

---

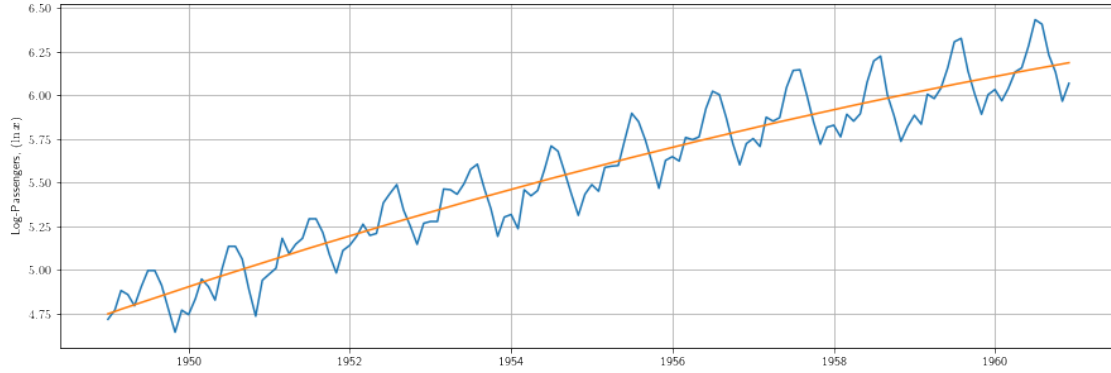
```
1 # Añadimos al DataFrame 'datosModelo2' la tendencia ajustada, los residuos y la diferencia estacional de los residuos.
2 datosModelo2['yhat'] = results2.fittedvalues
3 datosModelo2['ehat'] = results2.resid
4 datosModelo2['ehatDiff12'] = datosModelo2['ehat'].diff(12)
```

---

```
1 # Dibujamos los datos junto a la tendencia estimada.
2 plt.plot(datosModelo1['dataLog'])
3 plt.plot(results2.fittedvalues)
4 plt.grid()
5 plt.ylabel(r"Log-Passengers, ($\ln\boldsymbol{x}$) ")
```

---

$$\ln y_t = \underbrace{\beta_1 + \beta_2 \cdot t + \beta_3 \cdot t^2}_{\text{tendencia}} + e_t; \quad t = 1 : 114$$



$$\widehat{\ln y_t} = 4.7364 + (0.0132) \cdot t + (-2.191e-05) \cdot t^2, \quad t = 1 : 114$$

---

```
1 print(results2.summary())
```

---

Dep. Variable:	dataLog	R-squared:	0.907
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.906
Method:	Least Squares	F-statistic:	691.0
Date:	Tue, 02 Jul 2024	Prob (F-statistic):	1.37e-73
Time:	19:17:53	Log-Likelihood:	85.260
No. Observations:	144	AIC:	-164.5
Df Residuals:	141	BIC:	-155.6
Df Model:	2		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>  t	[0.025	0.975]
cte	4.7364	0.034	138.117	0.000	4.669	4.804
time	0.0132	0.001	12.112	0.000	0.011	0.015
sq_time	-2.191e-05	7.29e-06	-3.004	0.003	-3.63e-05	-7.49e-06

Omnibus:	4.978	Durbin-Watson:	0.624
Prob(Omnibus):	0.083	Jarque-Bera (JB):	3.317
Skew:	0.205	Prob(JB):	0.190
Kurtosis:	2.380	Cond. No.	2.85e+04

Notes:

[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

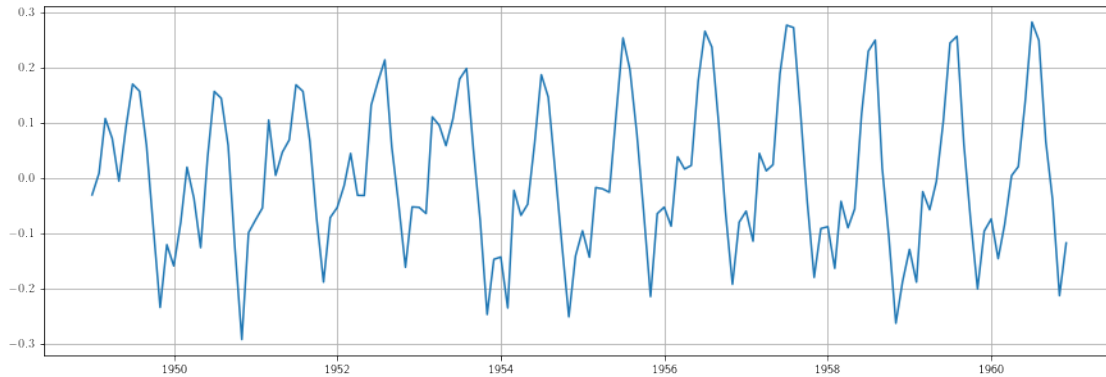
[2] The condition number is large, 2.85e+04. This might indicate that there are strong multicollinearity or other numerical problems.

## Componente irregular

---

```
1 plt.grid()
2 plt.plot(results2.resid)
```

---



De manera análoga al caso anterior, el modelo

$$y = t + e$$

donde  $t$  ahora es una *tendencia cuadrática* tampoco es un ajuste satisfactorio, pues el componente irregular  $e$  sigue sin parecerse a la realización de un proceso estacionario.

---

```
1 plt.grid()
2 plt.plot(datosModelo2['ehatDiff12'])
```

---

También en este modelo la diferencia de orden 12 del componente irregular muestra un componente cíclico con un periodo de unos 4 años.



Para obtener una *tendencia-ciclo* que capte este ciclo, son necesarios procedimientos más sofisticados (por ejemplo TRAMO-SEATS, o X13-ARIMA, o STAMP, o LDHR, o E4, etc.) que estiman tendencias y componentes estacionales estocásticos.

En el siguiente ejercicio estimaremos un **componente estacional determinista** (junto a una tendencia cuadrática determinista).

### 1.3 Tendencia cuadrática más estacionalidad determinista mediante *dummies*

---

```
1 # Creamos un dataframe con los datos y los regresores 'cte', 't' y 't^2'
2 df = TransformedData[['dataLog']].copy()
3 nsample = len(df)
4 df['cte'] = [1]*nsample
5 df['time'] = np.linspace(1, nsample, nsample)
6 df['sq_time'] = [t**2 for t in df['time']]
```

---

---

```

1 # Creamos las /dummies/ estacionales
2 from statsmodels.tsa.deterministic import Seasonality
3 seas_gen = Seasonality(12, initial_period=1)
4 seasonalDummies = seas_gen.in_sample(df.index)

```

---

```

1 # Creamos un dataframe con el regresando y todos los regresores del modelo
2 datosModelo3 = pd.concat([df, seasonalDummies],axis=1)
3 # realizamos la regresión de la primera columna ('dataLog') sobre el resto de columnas del dataframe.
4 model3 = sm.OLS(datosModelo3['dataLog'], datosModelo3.iloc[:,1:-1])
5 results3 = model3.fit()

```

---

```

1 # La combinación lineal de los regresores 'cte', 'time' y 'sq_time' usando los correspondientes
2 # parámetros estimados nos da el componente de tendencia (determinista) estimado.
3 TrendComp = datosModelo3[['cte','time','sq_time']].dot(results3.params[['cte','time','sq_time']])

```

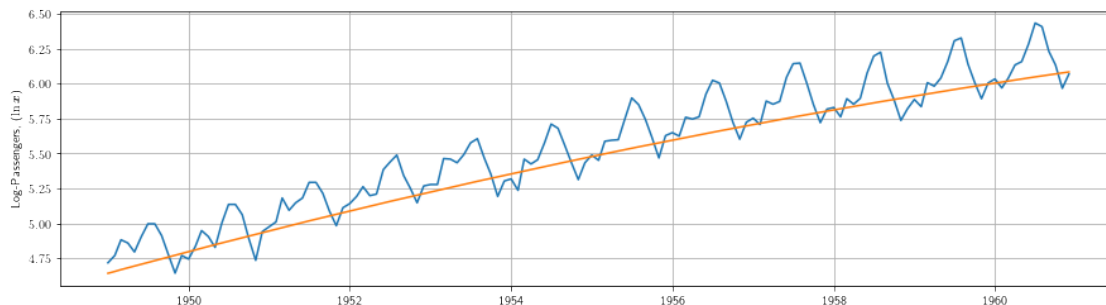
---

```

1 rcParams['figure.figsize'] = 15,4
2 plt.plot(datosModelo1['dataLog'])
3 plt.plot(TrendComp)
4 plt.grid()
5 plt.ylabel(r"Log-Passengers, ( $\ln x$ ) ")

```

---

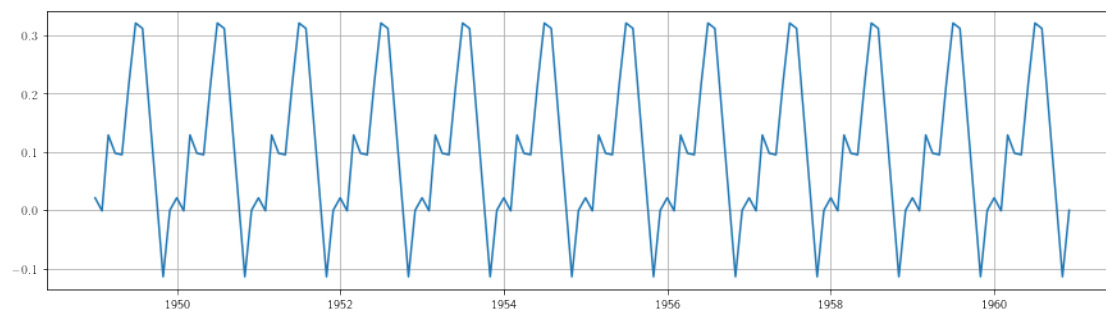


```

1 SeasonalComp = (seasonalDummies.iloc[:, :-1]).dot(results3.params[3:])
2 plt.grid()
3 plt.plot(SeasonalComp)

```

---



### 1.3.1 Ajuste y componente irregular $e = y - t - s$

---

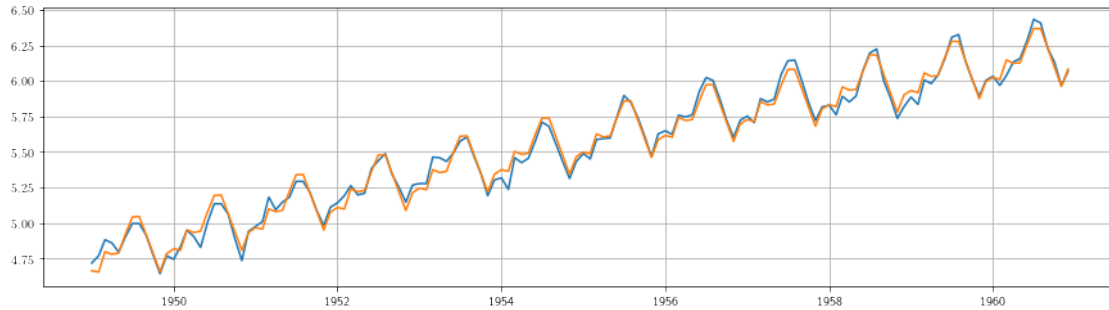
```

1 plt.grid()
2 plt.plot(datosModelo3['dataLog'])
3 plt.plot(TrendComp + SeasonalComp)

```

---

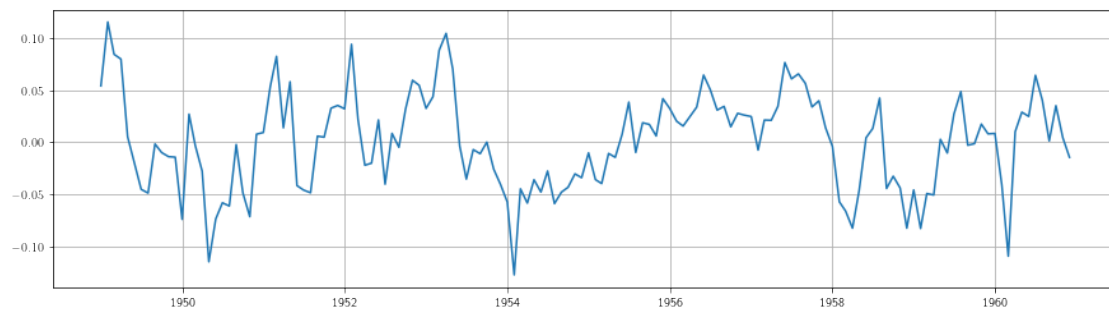





---

```
1 plt.grid()
2 plt.plot(results3.resid)
```

---



### 1.3.2 Valoración de modelos con componentes deterministas

- Estos modelos resultan útiles para realizar un análisis descriptivo.
- Pero suelen funcionar bastante mal como herramienta de predicción:
  - no tienen en cuenta la dependencia inter-temporal de los datos (se han estimado mediante una regresión como si los datos hubieran sido de sección cruzada)
  - Por ejemplo, a la hora de prever el dato de enero de 1961, en este modelo pesa tanto el dato de enero de 1949 como el dato de enero de 1960.

En general, para que los modelos funcionen bien en predicción deben *dar un mayor peso a los datos recientes* frente a los datos alejados en el tiempo.

Pero sigamos explorando este modelo...

**Hay parámetros no significativos...** (p-valores para dummies enero, febrero y octubre).

---

```
1 repr_png(results3.summary().as_latex(), "./img/resultsModel3.png")
```

---

Dep. Variable:	dataLog	R-squared:	0.989
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.988
Method:	Least Squares	F-statistic:	912.7
Date:	Tue, 02 Jul 2024	Prob (F-statistic):	7.45e-121
Time:	19:20:15	Log-Likelihood:	239.70
No. Observations:	144	AIC:	-451.4
Df Residuals:	130	BIC:	-409.8
Df Model:	13		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>  t	[0.025	0.975]
cte	4.6301	0.018	253.331	0.000	4.594	4.666
time	0.0132	0.000	33.877	0.000	0.012	0.014
sq.time	-2.148e-05	2.6e-06	-8.265	0.000	-2.66e-05	-1.63e-05
s(1,12)	0.0213	0.020	1.082	0.281	-0.018	0.060
s(2,12)	-0.0009	0.020	-0.048	0.962	-0.040	0.038
s(3,12)	0.1291	0.020	6.555	0.000	0.090	0.168
s(4,12)	0.0977	0.020	4.962	0.000	0.059	0.137
s(5,12)	0.0953	0.020	4.838	0.000	0.056	0.134
s(6,12)	0.2174	0.020	11.041	0.000	0.178	0.256
s(7,12)	0.3213	0.020	16.323	0.000	0.282	0.360
s(8,12)	0.3120	0.020	15.855	0.000	0.273	0.351
s(9,12)	0.1675	0.020	8.511	0.000	0.129	0.206
s(10,12)	0.0295	0.020	1.497	0.137	-0.009	0.068
s(11,12)	-0.1141	0.020	-5.797	0.000	-0.153	-0.075

Omnibus:	0.334	Durbin-Watson:	0.648
Prob(Omnibus):	0.846	Jarque-Bera (JB):	0.430
Skew:	-0.108	Prob(JB):	0.806
Kurtosis:	2.843	Cond. No.	1.17e+05

Notes:

[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

[2] The condition number is large, 1.17e+05. This might indicate that there are strong multicollinearity or other numerical problems.

1

<div>  </div>

podemos eliminarlos secuencialmente (quitando cada vez la variable de mayor p-valor)

```

1 import operator
2 def remove_most_insignificant(df, results):
3     # use operator to find the key which belongs to the maximum value in the dictionary:
4     max_p_value = max(results.pvalues.iteritems(), key=operator.itemgetter(1))[0]
5     # this is the feature you want to drop:
6     df.drop(columns = max_p_value, inplace = True)
7     return df

```

```

1 y = datosModelo3['dataLog']
2 X = datosModelo3.iloc[:,1:-1]
3 significacion = 0.05
4 insignificant_feature = True
5 while insignificant_feature:
6     model4 = sm.OLS(y, X)
7     results4 = model4.fit()
8     significant = [p_value < significacion for p_value in results4.pvalues]
9     if all(significant):
10         insignificant_feature = False
11     else:
12         if X.shape[1] == 1: # if there's only one insignificant variable left
13             print('No significant features found')
14             results4 = None
15             insignificant_feature = False
16         else:
17             X = remove_most_insignificant(X, results4)
18
19 print(results4.summary())

```

Dep. Variable:	dataLog	R-squared:	0.989
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.988
Method:	Least Squares	F-statistic:	1181.
Date:	Tue, 02 Jul 2024	Prob (F-statistic):	1.19e-124
Time:	19:17:57	Log-Likelihood:	237.72
No. Observations:	144	AIC:	-453.4
Df Residuals:	133	BIC:	-420.8
Df Model:	10		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>  t	[0.025	0.975]
cte	4.6425	0.013	344.431	0.000	4.616	4.669
time	0.0132	0.000	33.805	0.000	0.012	0.014
sq_time	-2.149e-05	2.61e-06	-8.248	0.000	-2.66e-05	-1.63e-05
s(3,12)	0.1166	0.016	7.479	0.000	0.086	0.147
s(4,12)	0.0852	0.016	5.467	0.000	0.054	0.116
s(5,12)	0.0828	0.016	5.309	0.000	0.052	0.114
s(6,12)	0.2049	0.016	13.140	0.000	0.174	0.236
s(7,12)	0.3088	0.016	19.805	0.000	0.278	0.340
s(8,12)	0.2996	0.016	19.211	0.000	0.269	0.330
s(9,12)	0.1550	0.016	9.941	0.000	0.124	0.186
s(11,12)	-0.1265	0.016	-8.111	0.000	-0.157	-0.096

Omnibus:	1.502	Durbin-Watson:	0.691
Prob(Omnibus):	0.472	Jarque-Bera (JB):	1.504
Skew:	-0.241	Prob(JB):	0.471
Kurtosis:	2.867	Cond. No.	5.81e+04

Notes:

[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

[2] The condition number is large, 5.81e+04. This might indicate that there are strong multicollinearity or other numerical problems.

<div>  </div>

Pero esta inferencia es incorrecta. Con auto-correlación la varianza del estimador MCO es diferente (**la estimación por defecto de las desviaciones típicas es incorrecta**)

## 2 Autocorrelación

Considere el modelo  $Y = \mathbf{X}\beta + U$ . Bajo los supuestos habituales

$$E(U | \mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \text{Var}(U | \mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{I} \quad \text{y} \quad E(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \text{ es invertible}$$

el estimador  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$  es insesgado y eficiente, con varianza

$$\text{Var}(\hat{\beta} | \mathbf{X}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

Pero si las perturbaciones  $U$  del modelo son heterocedásticas y/o autocorreladas

$$\text{Var}(U | \mathbf{X}) = \Sigma \neq \sigma^2 \mathbf{I}$$

entonces el estimador  $\hat{\beta}$ , aunque insesgado, ya no es eficiente; y su varianza es

$$\text{Var}(\hat{\beta} | \mathbf{X}) = \text{Var}(\hat{\beta} - \mathbf{I}\beta | \mathbf{X}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Sigma\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.$$

El test de Durbin-Watson o el test de Breusch y Godfrey sirven para contrastar la  $H_0$  de *no autocorrelación*...

**El test de Durbin-Watson** contrasta la autocorrelación de orden uno. Para muestras grandes, el test es aproximadamente igual a  $2(1 - \hat{\rho})$ , donde  $\hat{\rho}$  es la autocorrelación de orden uno de los residuos. Por tanto, valores del test próximos a 2 indican no autocorrelación, valores próximos a 0 indican fuerte autocorrelación positiva y valores próximos a 4 indican fuerte autocorrelación negativa.

## 2.1 Test de Breusch y Godfrey

Considere el *modelo de regresión lineal*

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t,1} + \cdots + \beta_k X_{t,k+1} + U_t$$

donde las perturbaciones  $U$  quizá siguen un esquema auto-regresivo  $AR(p)$ :

$$U_t = \rho_1 U_{t-1} + \rho_2 U_{t-2} + \cdots + \rho_p U_{t-p} + \varepsilon_t$$

- **Paso 1.** Se obtienen los residuos del ajuste por MCO con una muestra de tamaño  $T$  del *modelo de regresión lineal*.
- **Paso 2.** Se realiza un ajuste MCO de los residuos sobre los regresores del modelo original y sobre los  $p$  primeros retardos de los residuos.

$$\hat{E}_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t,1} + \cdots + \alpha_k X_{t,k} + \rho_1 \hat{E}_{t-1} + \rho_2 \hat{E}_{t-2} + \cdots + \rho_p \hat{E}_{t-p} + \varepsilon_t$$

asintóticamente y bajo la  $H_0$  de *no autocorrelación*:  $\{\rho_i = 0 \text{ para todo } i\}$

$$nR^2 \sim \chi_p^2,$$

donde  $R^2$  es el coeficiente de determinación de la regresión auxiliar y  $n = T - p$ .

---

```

1 import statsmodels.stats.diagnostic as dg
2 #perform Breusch-Godfrey test of order p = 3
3 arbg = dg.acorr_breusch_godfrey(results4, nlags=3, store=True)
4 arbg[:1]
5 repr_png(arbg[-1].resols.summary().as_latex(), "./img/resultsBreusch-Godfrey.png")

```

---

Dep. Variable:	y	R-squared:	0.435
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.379
Method:	Least Squares	F-statistic:	7.715
Date:	Tue, 02 Jul 2024	Prob (F-statistic):	3.54e-11
Time:	19:20:15	Log-Likelihood:	278.89
No. Observations:	144	AIC:	-529.8
Df Residuals:	130	BIC:	-488.2
Df Model:	13		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>  t	[0.025	0.975]
const	-0.0001	0.005	-0.027	0.979	-0.010	0.010
x1	3.05e-05	0.000	0.103	0.918	-0.001	0.001
x2	-2.318e-07	1.98e-06	-0.117	0.907	-4.15e-06	3.69e-06
x3	0.0058	0.012	0.477	0.634	-0.018	0.030
x4	0.0024	0.012	0.199	0.843	-0.021	0.026
x5	-0.0017	0.012	-0.144	0.886	-0.025	0.022
x6	-0.0003	0.012	-0.027	0.978	-0.024	0.023
x7	-0.0003	0.012	-0.027	0.979	-0.024	0.023
x8	-0.0003	0.012	-0.026	0.979	-0.024	0.023
x9	-0.0003	0.012	-0.026	0.979	-0.024	0.023
x10	-0.0109	0.012	-0.908	0.366	-0.035	0.013
x11	-0.0001	0.005	-0.027	0.979	-0.010	0.010
x12	0.6214	0.089	6.973	0.000	0.445	0.798
x13	0.1333	0.105	1.274	0.205	-0.074	0.340
x14	-0.1042	0.090	-1.160	0.248	-0.282	0.074

Omnibus:	4.932	Durbin-Watson:	2.013
Prob(Omnibus):	0.085	Jarque-Bera (JB):	4.703
Skew:	-0.442	Prob(JB):	0.0952
Kurtosis:	3.062	Cond. No.	4.82e+19

Notes:

[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

[2] The smallest eigenvalue is 5.41e-30. This might indicate that there are strong multicollinearity problems or that the design matrix is singular.

- Valor del estadístico: 62.7119 (p-valor:  $1.55e - 13$ )
- $x_{12}$  corresponde al primer retardo en la regresión auxiliar y es muy significativo

<div>  </div>

## 2.2 Errores estándar robustos

Un procedimiento adecuado en presencia de autocorrelación y muestras grandes consiste en usar errores estándar "*robustos*" al realizar inferencia con la estimación de los parámetros.

1. las estimaciones serán insesgadas, consistentes pero ineficientes,
2. los residuos son los mismos y, por tanto, estarán autocorrelados, aunque
3. la inferencia a partir de errores estándar robustos será válida

```

1 y = datosModelo3['dataLog']
2 X = datosModelo3.iloc[:,1:-1]
3 model5 = sm.OLS(y, X)
4 results5 = model5.fit()
5 print(results5.get_robustcov_results(cov_type='HAC', maxlags=3, use_correction=True).summary())

```

```

1 repr_png(results5.get_robustcov_results(cov_type='HAC', maxlags=3, use_correction=True).summary().as_latex(), "./img/resultsMode

```

Dep. Variable:	dataLog	R-squared:	0.989
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.988
Method:	Least Squares	F-statistic:	388.9
Date:	Tue, 02 Jul 2024	Prob (F-statistic):	3.26e-97
Time:	19:20:15	Log-Likelihood:	239.70
No. Observations:	144	AIC:	-451.4
Df Residuals:	130	BIC:	-409.8
Df Model:	13		
Covariance Type:	HAC		

	coef	std err	t	P>  t	[0.025	0.975]
cte	4.6301	0.023	200.015	0.000	4.584	4.676
time	0.0132	0.001	19.130	0.000	0.012	0.015
sq_time	-2.148e-05	4.32e-06	-4.970	0.000	-3e-05	-1.29e-05
s(1,12)	0.0213	0.011	1.982	0.050	3.75e-05	0.043
s(2,12)	-0.0009	0.020	-0.046	0.963	-0.041	0.040
s(3,12)	0.1291	0.021	6.264	0.000	0.088	0.170
s(4,12)	0.0977	0.019	5.025	0.000	0.059	0.136
s(5,12)	0.0953	0.019	5.134	0.000	0.059	0.132
s(6,12)	0.2174	0.017	12.734	0.000	0.184	0.251
s(7,12)	0.3213	0.018	18.110	0.000	0.286	0.356
s(8,12)	0.3120	0.018	17.772	0.000	0.277	0.347
s(9,12)	0.1675	0.013	12.821	0.000	0.142	0.193
s(10,12)	0.0295	0.012	2.413	0.017	0.005	0.054
s(11,12)	-0.1141	0.011	-10.272	0.000	-0.136	-0.092

Omnibus:	0.334	Durbin-Watson:	0.648
Prob(Omnibus):	0.846	Jarque-Bera (JB):	0.430
Skew:	-0.108	Prob(JB):	0.806
Kurtosis:	2.843	Cond. No.	1.17e+05

Notes:

[1] Standard Errors are heteroscedasticity and autocorrelation robust (HAC) using 3 lags and with small sample correction

[2] The condition number is large, 1.17e+05. This might indicate that there are strong multicollinearity or other numerical problems.

<div>  </div>

Ahora, y empleando errores estándar robustos, podemos reducir el modelo de manera más cuidadosa usando desviaciones típicas robustas. El modelo reducido es...

```

1 y = datosModelo3['dataLog']
2 X = datosModelo3.iloc[:,1:-1]
3
4 significacion = 0.05
5
6 insignificant_feature = True
7 while insignificant_feature:
8     results6 = sm.OLS(y, X).fit()
9     robustResults = results6.get_robustcov_results(cov_type='HAC', maxlags=3, use_correction=True)
10    robustPvalues = pd.Series(index=results6.pvalues.index, data=robustResults.pvalues)
11
12    significant = [p_value < significacion for p_value in robustPvalues]
13
14
15    if all(significant):
16        insignificant_feature = False
17    else:
18        if X.shape[1] == 1: # if there's only one insignificant variable left
19            print('No significant features found')
20            results6 = None
21            insignificant_feature = False
22        else:
23            X = remove_most_insignificant(X, results6)
24    print(robustResults.summary())
25    repr_png(robustResults.summary().as_latex(), "./img/resultsModel6.png")

```

Dep. Variable:	dataLog	R-squared:	0.989
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.988
Method:	Least Squares	F-statistic:	418.9
Date:	Tue, 02 Jul 2024	Prob (F-statistic):	3.59e-98
Time:	19:20:16	Log-Likelihood:	239.70
No. Observations:	144	AIC:	-453.4
Df Residuals:	131	BIC:	-414.8
Df Model:	12		
Covariance Type:	HAC		

	coef	std err	t	P>  t	[0.025	0.975]
cte	4.6296	0.026	179.310	0.000	4.578	4.681
time	0.0132	0.001	19.195	0.000	0.012	0.015
sq_time	-2.148e-05	4.3e-06	-4.992	0.000	-3e-05	-1.3e-05
s(1,12)	0.0218	0.011	1.983	0.049	5.42e-05	0.044
s(3,12)	0.1296	0.016	7.867	0.000	0.097	0.162
s(4,12)	0.0982	0.018	5.496	0.000	0.063	0.134
s(5,12)	0.0957	0.019	4.917	0.000	0.057	0.134
s(6,12)	0.2178	0.018	11.837	0.000	0.181	0.254
s(7,12)	0.3218	0.019	16.955	0.000	0.284	0.359
s(8,12)	0.3125	0.019	16.603	0.000	0.275	0.350
s(9,12)	0.1680	0.015	11.071	0.000	0.138	0.198
s(10,12)	0.0299	0.015	2.014	0.046	0.001	0.059
s(11,12)	-0.1136	0.015	-7.616	0.000	-0.143	-0.084

Omnibus:	0.357	Durbin-Watson:	0.648
Prob(Omnibus):	0.837	Jarque-Bera (JB):	0.451
Skew:	-0.112	Prob(JB):	0.798
Kurtosis:	2.843	Cond. No.	8.24e+04

Notes:

[1] Standard Errors are heteroscedasticity and autocorrelation robust (HAC) using 3 lags and with small sample correction

[2] The condition number is large, 8.24e+04. This might indicate that there are strong multicollinearity or other numerical problems.

<div>  </div>

- Nótese que ahora se aprecia que enero y octubre son significativos al 5%
- Pero la estimación MCO no es eficiente en presencia de heterocedasticidad y/o auto-correlación

## 2.3 Modelo del error

En el modelo  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{U}$ , si las perturbaciones presentan heterocedasticidad y/o auto-correlación, y por tanto

$$\text{Var}(\mathbf{U} | \mathbf{X}) = \Sigma \neq \sigma^2 \mathbf{I},$$

el Teorema de Gauss-Markov ya no es válido, ya que es posible explotar la estructura de la matriz  $\Sigma$  para minimizar la varianza del estimador.

En particular, el estimador lineal de mínima varianza es el estimador MCG (mínimos cuadrados generalizados)

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{Y}$$

El problema es que, en general, la matriz  $\Sigma$  es desconocida.

Una solución es aplicar un procedimiento iterativo en el que se estima la matriz  $\Sigma$  empleando los errores del ajuste de una primera regresión. Con dicha matriz  $\hat{\Sigma}$  se re-estima el modelo por MCG... con los nuevos errores se re-estima  $\Sigma$ ... y vuelta a empezar...

El algoritmo se detiene cuando las estimaciones convergen a valores estables.

Cuando realizamos el Test de Breusch-Godfrey vimos que en la regresión auxiliar el primer retardo de los errores era significativo. Por tanto, vamos a indicar que las perturbaciones siguen un proceso AR(1). El decir, vamos a estimar el modelo

$$\ln y_t = \underbrace{\beta_1 + \beta_2 \cdot t + \beta_3 \cdot t^2}_{\text{tendencia}} + \underbrace{\alpha_1 S_{t1} + \alpha_3 S_{t3} + \dots + \alpha_{11} S_{t11}}_{\text{comp. estacional}} + \epsilon_t$$

donde las perturbaciones  $\epsilon = \{\epsilon_t\}$  siguen el modelo

$$\epsilon_t = \rho_1 \epsilon_{t-1} + e_t$$

(en este caso la estimación converge en 7 iteraciones)

---

```

1 model = sm.GLSAR(y, X, rho=1) # rho=1 indica autocorrelación de orden uno
2 for i in range(7):
3     results = model.fit()
4     print("AR coefficients: {0}".format(model.rho))
5     rho, sigma = sm.regression.yule_walker(results.resid,
6                                           order=model.order)
7     model = sm.GLSAR(y, X, rho)

```

---

```

1 print(results.summary())

```

---

Dep. Variable:	dataLog	R-squared:	0.958			
Model:	GLSAR	Adj. R-squared:	0.954			
Method:	Least Squares	F-statistic:	246.4			
Date:	Tue, 02 Jul 2024	Prob (F-statistic):	3.79e-83			
Time:	19:18:01	Log-Likelihood:	281.79			
No. Observations:	143	AIC:	-537.6			
Df Residuals:	130	BIC:	-499.1			
Df Model:	12					
Covariance Type:	nonrobust					
	coef	std err	t	P>  t	[0.025	0.975]
cte	4.6157	0.031	146.687	0.000	4.553	4.678
time	0.0136	0.001	14.633	0.000	0.012	0.015
sq_time	-2.366e-05	5.99e-06	-3.951	0.000	-3.55e-05	-1.18e-05
s(1,12)	0.0179	0.009	2.044	0.043	0.001	0.035
s(3,12)	0.1306	0.011	12.014	0.000	0.109	0.152
s(4,12)	0.0995	0.014	7.228	0.000	0.072	0.127
s(5,12)	0.0973	0.015	6.389	0.000	0.067	0.127
s(6,12)	0.2194	0.016	13.773	0.000	0.188	0.251
s(7,12)	0.3233	0.016	20.029	0.000	0.291	0.355
s(8,12)	0.3140	0.016	19.716	0.000	0.282	0.345
s(9,12)	0.1692	0.015	11.123	0.000	0.139	0.199
s(10,12)	0.0308	0.014	2.238	0.027	0.004	0.058
s(11,12)	-0.1133	0.011	-10.427	0.000	-0.135	-0.092
Omnibus:	1.864	Durbin-Watson:	2.102			
Prob(Omnibus):	0.394	Jarque-Bera (JB):	1.420			
Skew:	-0.213	Prob(JB):	0.492			
Kurtosis:	3.238	Cond. No.	3.85e+04			

Notes:

[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

[2] The condition number is large, 3.85e+04. This might indicate that there are strong multicollinearity or other numerical problems.

<div>  </div>

---

```

1 # este código realiza las mismas iteraciones que bloque de código de más arriba
2 model2 = sm.GLSAR(y, X, rho=1)
3 res = model2.iterative_fit(maxiter=7)
4 model2.rho
5 print(model2.fit().summary())

```

---