

Índice

1. ACF, PACF y densidad espectral de algunos modelos lineales (cont.)	2
1.1. Proceso autorregresivo $\text{ARMA}(p, q)$	2
1.2. Proceso $\text{ARMA}(1, 1)$	4
1.2.1. $\text{ARMA}(1, 1)$ $\phi_1 = 0,7$ y $\theta_1 = -0,8$	4
1.2.2. $\text{ARMA}(1, 1)$ $\phi_1 = -0,7$ y $\theta_1 = 0,8$	5
1.2.3. $\text{ARMA}(1, 1)$ $\phi_1 = 0,4$ y $\theta_1 = 0,8$	5
1.2.4. $\text{ARMA}(1, 1)$ $\phi_1 = -0,8$ y $\theta_1 = -0,4$	6
2. La especificación del modelo se escoge según las características de los datos.	7
3. Herramientas para desvelar propiedades de una serie temporal	7
3.1. Análisis gráfico	7
3.1.1. Gráfico de la serie temporal	7
3.1.2. Gráfico rango-media	7
3.2. Determinación del orden de integración	8
3.2.1. Análisis gráfico	8
3.2.2. Contrastes formales sobre el orden de integración: DF, ADF y KPSS	11
3.3. ACF muestral	12
3.4. PACF muestral	12
3.5. Otras herramientas estadísticas	CÓMOHACERCONR
3.5.1. Estadísticos descriptivos	13
3.5.2. Contraste de normalidad Jarque-Bera	13

Econometría Aplicada. Lección 7

Marcos Bujosa

23 de septiembre de 2024

Resumen

En esta lección veremos la estructura de la ACF, la PACF y la densidad espectral de procesos ARMA. Después indicaremos algunas herramientas estadísticas que usaremos para tratar de identificar un modelo que se ajuste adecuadamente a los datos de una serie temporal: gráficos, contrastes de raíz unitaria, ACF y PACF muestrales, estadísticos descriptivos y contrastes de normalidad.

Carga de algunas librerías de R

```
# cargamos algunas librerías de R
library(tsfarima)      # librería de José Luis Gallego para Time Series
library(readr)         # para leer ficheros CSV
library(ggplot2)       # para el scatterplot (alternativamente library(tidyverse))
library(ggfortify)     # para pintar series temporales
library(jtools)        # para representación resultados estimación
library(zoo)           # para generar objetos ts (time series)
# y fijamos el tamaño de las figuras que se generan en el notebook
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 4, repr.plot.res = 200)
```

1. ACF, PACF y densidad espectral de algunos modelos lineales (cont.)

1.1. Proceso autorregresivo ARMA(p, q)

Sea \mathbf{X} el proceso estocástico estacionario solución de la ecuación en diferencias:

$$\phi * \mathbf{X} = \theta * \mathbf{U}$$

donde $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$; el polinomio *autorregresivo* ϕ tiene grado p con $\phi_0 = 1$ (y raíces fuera del círculo unidad), y el polinomio *de media móvil* θ es de grado q con $\theta_0 = 1$; y donde ϕ y θ no tienen raíces comunes.

Si $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ y $\theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q$, entonces

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)U_t;$$

y por tanto

$$X_t = U_t + \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + \sum_{j=1}^q -\theta_j U_{t-j}.$$

Como las raíces de ϕ están fuera del círculo unidad, es decir, como *el polinomio AR es “invertible”* ($\phi^{-\triangleright} = \phi^{-1} \in \ell^1$) entonces \mathbf{X} tiene una representación como MA(∞):

$$\phi * \mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\phi} * \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad X_t = U_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j U_{t-j};$$

donde $\boldsymbol{\psi} = \phi^{-1} * \boldsymbol{\theta} = (1, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$ tiene grado ∞ .

Y como las raíces de $\boldsymbol{\theta}$ están fuera del círculo unidad, es decir, como *el polinomio MA es “invertible”* ($\boldsymbol{\theta}^{-\triangleright} = \boldsymbol{\theta}^{-1} \in \ell^1$) entonces \mathbf{X} tiene una representación como AR(∞):

$$\phi * \mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{\phi}{\boldsymbol{\theta}} * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad X_t = U_t + \sum_{j=1}^{\infty} -\varphi_j X_{t-j};$$

donde $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\theta}^{-1} * \phi = (1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$ tiene grado ∞ .

En un ARMA(p, q), por tener representación MA(∞):

$$E(X_t) = 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{Z} \text{ y}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \sigma^2 \frac{\boldsymbol{\theta}(z)}{\phi(z)} * \frac{\boldsymbol{\theta}(z^{-1})}{\phi(z^{-1})} = \sigma^2 \boldsymbol{\psi}(z) * \boldsymbol{\psi}(z^{-1}) \text{ donde } \phi = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\phi};$$

es decir, $\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+|k|} \psi_j; \quad k \in \mathbb{Z}$ (grado ∞ y cogrado $-\infty$).

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\gamma_0} \boldsymbol{\gamma}$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\boldsymbol{\theta}(e^{-i\omega}) \cdot \boldsymbol{\theta}(e^{i\omega})}{\phi(e^{-i\omega}) \cdot \phi(e^{i\omega})} = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \gamma_h \cos(h\omega); \quad \text{donde } \omega \in [-\pi, \pi].$$

(suma infinita de cosenos)

En un ARMA(p, q), por tener representación AR(∞):

su PACF, $\boldsymbol{\pi}$, también es una secuencia con grado ∞ y cogrado $-\infty$.

En la Lección 5 se demostró que para un proceso ARMA(p, q)

$$\phi(B)\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2 \left(\boldsymbol{\theta}(z) * \boldsymbol{\psi}(z^{-1}) \right)_k & \text{para } k \leq q \\ 0 & \text{para } k > q \end{cases} \quad (\text{como en un AR})$$

Así, en cuanto a la ACF $\boldsymbol{\rho}$:

- De ρ_1 a ρ_q dependen de los q parámetros de $\boldsymbol{\theta}$ y los p parámetros de ϕ
- Los p valores de ρ_q a ρ_{q-p+1} son los valores iniciales para resolver la ecuación en diferencias $\phi(B)\rho_k = 0$ (con $k \geq q$)
- Si $q < p$ toda la secuencia ρ_j para $j \geq 0$ decae exponencialmente o sinusoidalmente según ϕ y los valores iniciales ρ_q a ρ_{q-p+1}
- Si $q \geq p$ los primeros $q - p + 1$ valores iniciales ρ_0 a ρ_{q-p} siguen una pauta diferente

En cuanto a la PACF $\boldsymbol{\pi}$:

- Tiene grado ∞ y cogrado $-\infty$
- A partir de cierto retardo se comporta como la PACF de un MA(q), es decir, decae exponencialmente o sinusoidalmente.

1.2. Proceso ARMA(1,1)

Sea $(1 - \phi z) * X = (1 - \theta z) * U$ con $|\phi| < 1$ y $|\theta| < 1$ y con $U \sim WN(0, \sigma^2)$:

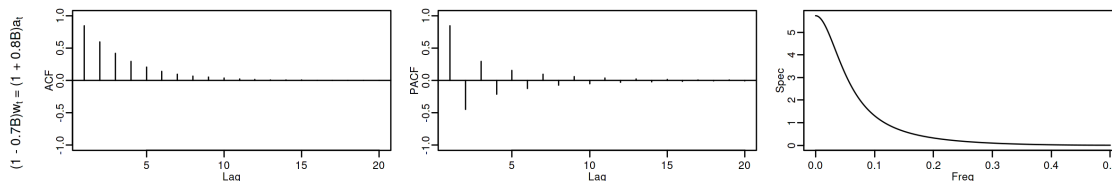
$$X_t = \phi X_{t-1} - \theta U_{t-1} + U_t.$$

- $\gamma = \sigma^2 \frac{(1-\theta z) * (1-\theta z^{-1})}{(1-\phi z) * (1-\phi z^{-1})}$ por tanto...
- $\gamma_0 = \sigma^2 \left(1 + \frac{(\theta+\phi)^2}{1+\phi^2}\right)$; $\gamma_1 = \sigma^2 \left(\phi + \theta + \frac{(\theta+\phi)^2 \phi}{1+\phi^2}\right)$; y $\gamma_k = \phi \gamma_{k-1}$ si $k > 1$
- $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma$
- $f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1+\theta^2-2\theta \cos(\omega)}{1+\phi^2-2\phi \cos(\omega)}$; $\omega \in [-\pi, \pi]$
- π decae geométricamente con θ^k

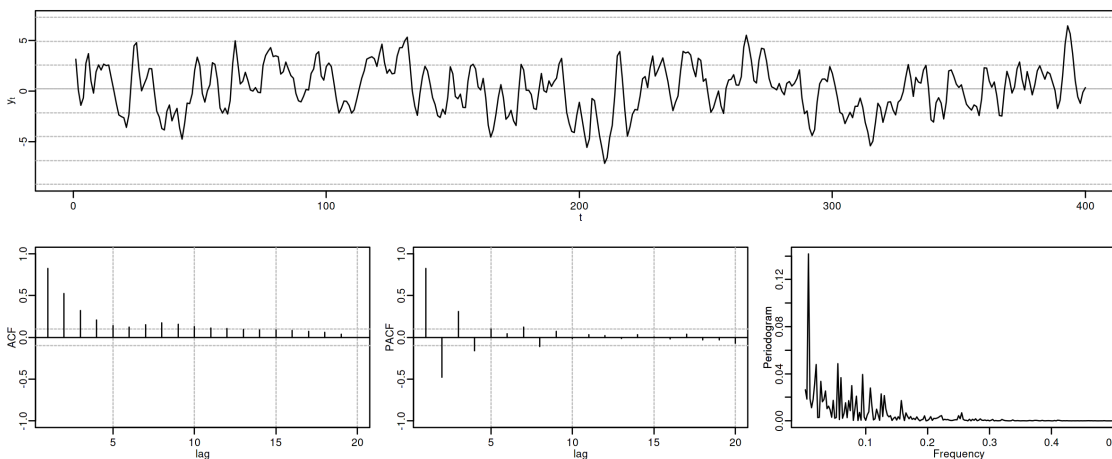
1.2.1. ARMA(1,1) $\phi_1 = 0,7$ y $\theta_1 = -0,8$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
arma11R <- um(ar = "(1 - 0.7B)", ma = "(1 + 0.8B)")
display(list(arma11R), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

$$(1 - 0,7B)X_t = (1 + 0,8B)U_t; \quad \phi > 0; \theta < 0$$



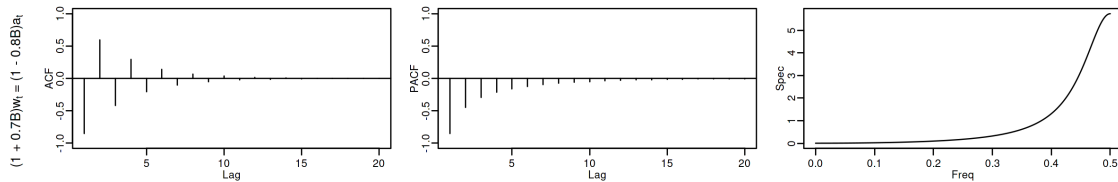
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(arma11R, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



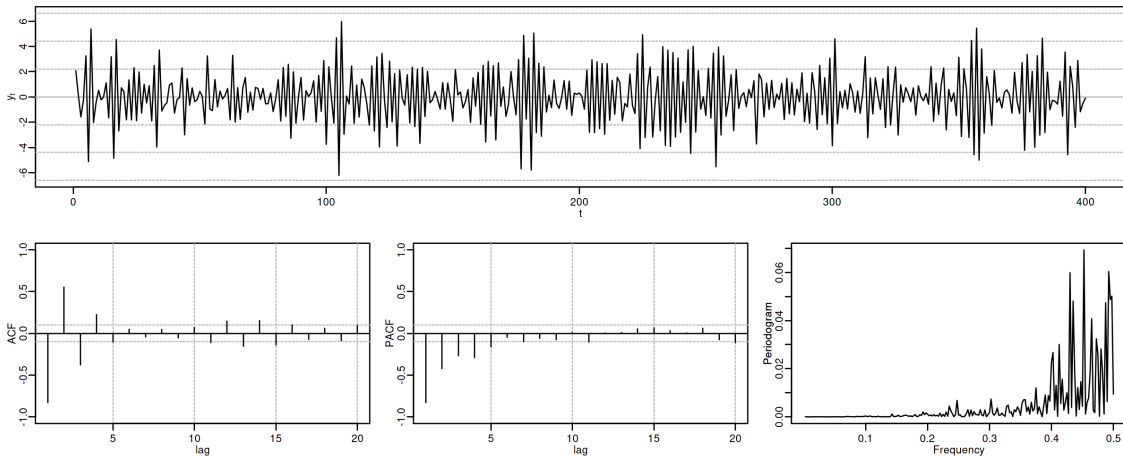
1.2.2. ARMA(1,1) $\phi_1 = -0,7$ y $\theta_1 = 0,8$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
arma11A <- um(ar = "(1 + 0.7B)", ma = "(1 - 0.8B)")
display(list(arma11A), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

$$(1 + 0,7B)X_t = (1 - 0,8B)U_t; \quad \phi < 0; \theta > 0$$



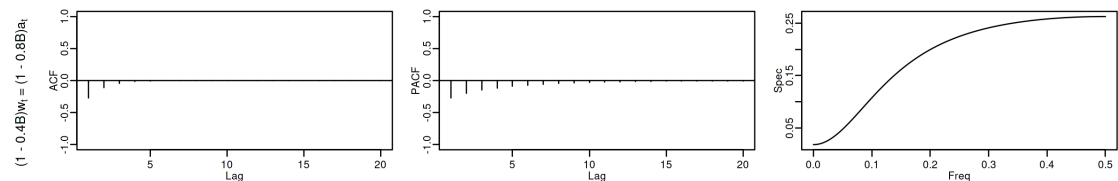
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(arma11A, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



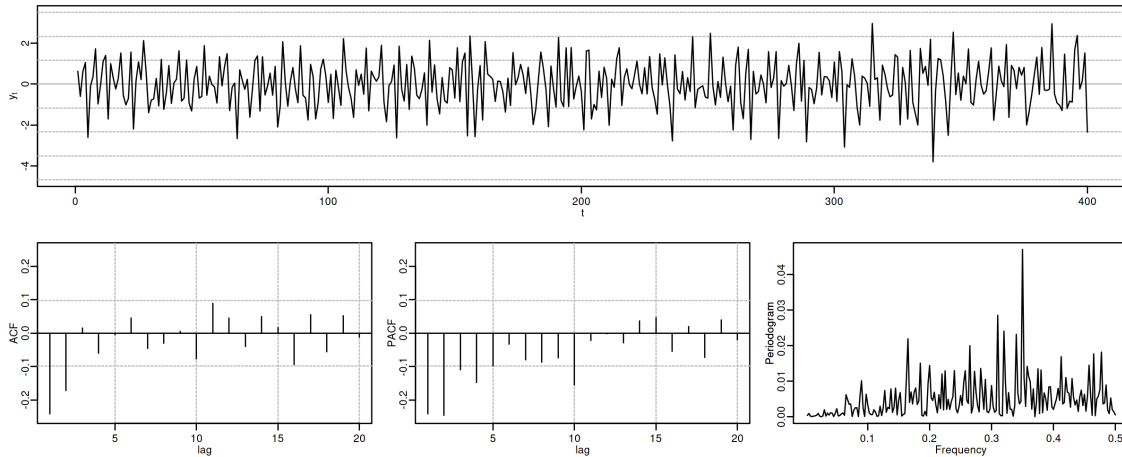
1.2.3. ARMA(1,1) $\phi_1 = 0,4$ y $\theta_1 = 0,8$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
arma11NVA <- um(ar = "(1 - 0.4B)", ma = "(1 - 0.8B)")
display(list(arma11NVA), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

$$(1 - 0,4B)X_t = (1 - 0,8B)U_t; \quad \phi > 0; \theta > 0$$



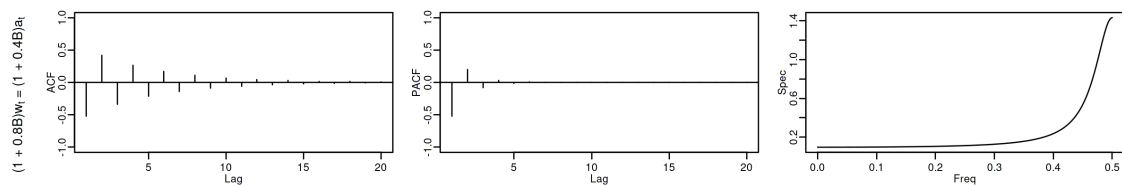
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(arma11NVA, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



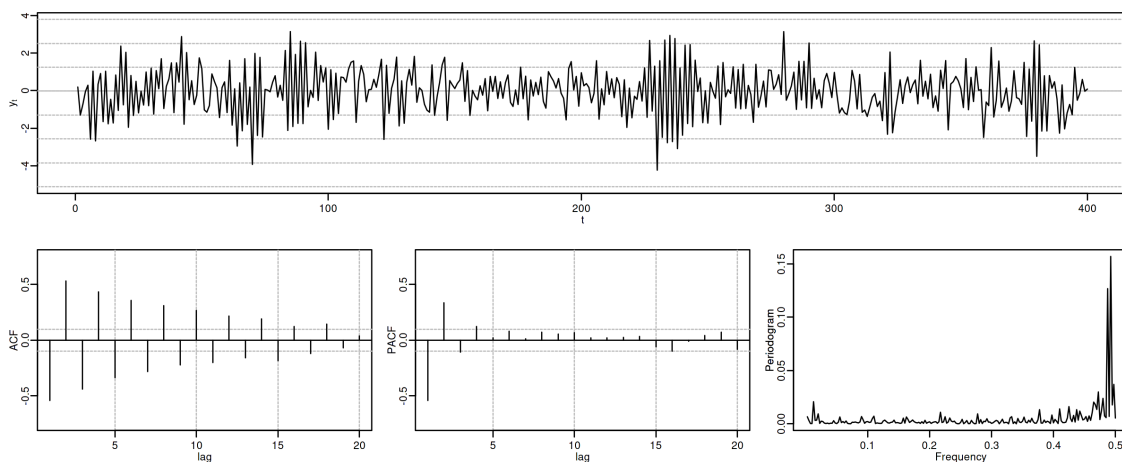
1.2.4. ARMA(1,1) $\phi_1 = -0,8$ y $\theta_1 = -0,4$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
arma11RNV <- um(ar = "(1 + 0.8B)", ma = "(1 + 0.4B)")
display(list(arma11RNV), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

$$(1 + 0,8B)X_t = (1 + 0,4B)U_t; \quad \phi < 0; \theta < 0$$



```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(arma11RNV, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



2. La especificación del modelo se escoge según las características de los datos.

¿Es la serie

- "*estacionaria en media*"

- (y si lo es, ¿cuál es su media?)
- (y si no lo es, ¿cómo cambia o evoluciona su media?)

- "*estacionaria en varianza*" (*homocedástica*)

- (y si lo es, ¿cuál es su varianza?)
- (y si es *heterocedástica*, ¿cómo cambia o evoluciona su varianza?)

¿Están sus valores correlados con su historia pasada (autocorrelados)?

¿Qué correlación tienen los datos con los datos k periodos atrás una vez descontado el efecto de los datos intermedios?

Veamos algunas herramientas estadísticas para poder desvelar estas características.

3. Herramientas para desvelar propiedades de una serie temporal

3.1. Análisis gráfico

3.1.1. Gráfico de la serie temporal

Representa sus valores en el eje vertical (y) frente a una escala temporal en el horizontal (x). Es útil para detectar visualmente:

- tendencias y/o estacionalidad
- cambios de variabilidad
- valores atípicos (*outliers*)
 - el 95 % aprox. de una muestra de valores generados por una distribución normal debería estar comprendido entre $\mu \pm 2\sigma$
 - la probabilidad de que una variable normal genere un valor fuera de las bandas de $\mu \pm 3\sigma$ es 0,0023
(véase gráfico IBEX 35)

Es importante escalar y rotular adecuadamente los ejes y asegurar la comparabilidad entre series y gráficos distintos (si los hubiere).

3.1.2. Gráfico rango-media

Cambios de variabilidad de una serie pueden evidenciarse en su gráfico temporal. Pero también suelen verse bien en un gráfico rango-media, donde se representa:

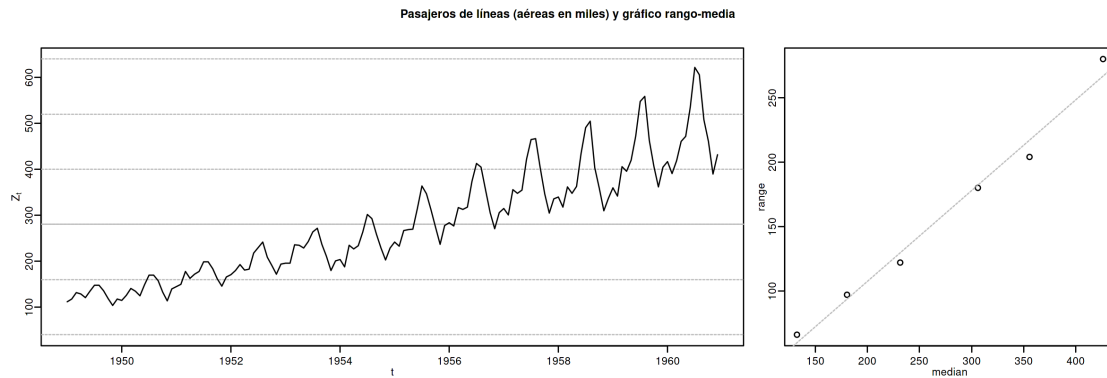
- **en eje x :** nivel de la serie (normalmente la media de submuestras no solapadas).

- en eje y : dispersión de la serie (normalmente el rango de dichas submuestras).

Si los puntos se sitúan alrededor de una recta de pendiente positiva, tomar logaritmos.

Veamos el gráfico de la serie de pasajeros de líneas aéreas junto a su gráfico de rango media:

```
Z <- AirPassengers
ide(Z, graphs = c("plot", "rm"), main="Pasajeros de líneas (aéreas en miles) y gráfico rango-media")
```



El gráfico de rango media a veces se acompaña de una regresión de la dispersión sobre los niveles para medir la relación nivel-dispersión.

3.2. Determinación del orden de integración

El *orden de integración* es el número mínimo de diferencias necesarias para lograr la estacionariedad en media.

Decidir adecuadamente el orden de integración es crucial en el análisis de series temporales.

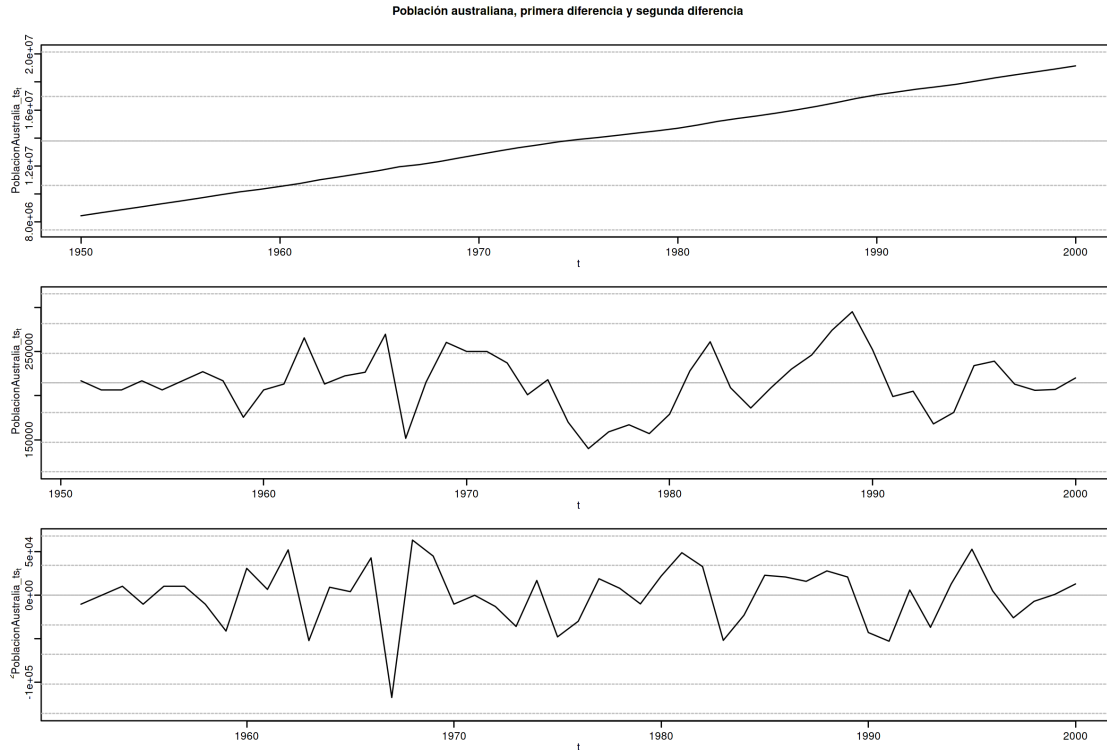
Las herramientas utilizadas para tomar la decisión son

- el análisis gráfico
- los contrastes formales

3.2.1. Análisis gráfico

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 8, repr.plot.res = 200)
PoblacionAustralia_ts = as.ts( read.zoo('datos/PoblacionAustralia.csv',
                                     header=TRUE,
                                     index.column = 1,
                                     sep=",",
                                     FUN = as.yearmon))

ide(PoblacionAustralia_ts,
    graphs = c("plot"),
    transf = list(list(bc = F), list(bc = F, d = 1), list(bc = F, d = 2)),
    main="Población australiana, primera diferencia y segunda diferencia" )
```



La serie de población y tiene una clara tendencia creciente (primer gráfico), que desaparece al tomar una diferencia ordinaria,

$$\nabla y = (1 - B) * y$$

(segundo gráfico). Basta con tomar una primera diferencia de la serie de población para obtener una nueva serie que se asemeja a la realización de un proceso estacionario.

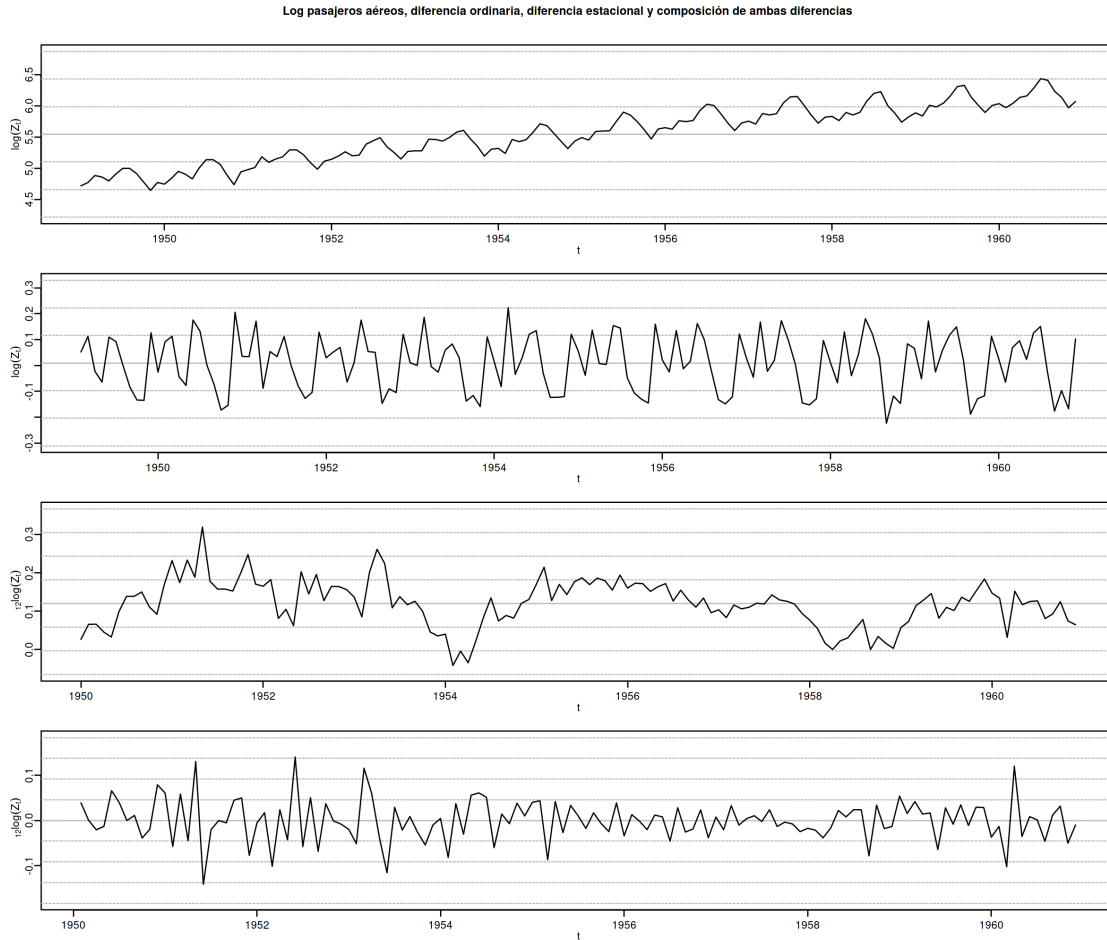
No obstante, ¿qué pasa si tomamos una segunda diferencia ordinaria?

$$\nabla \nabla y = \nabla^2 y = (1 - B)^2 * y$$

(segundo gráfico). Pues que la serie obtenida también es estacionaria, pero ojo, es un grave error tomar más diferencias de las necesarias al modelizar los datos. Se debe tomar el mínimo número de transformaciones que arrojen una serie “estacionaria” (recuerde que decir que una serie temporal es *estacionaria* es un abuso del lenguaje).

Si se toman más diferencias de las necesarias se obtiene un proceso *no invertible* (raíces unitarias en la parte MA que imposibilitan que el proceso tenga una representación como $AR(\infty)$ causal), lo cual conduce a problemas de identificación y estimación.

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 10, repr.plot.res = 200)
ide(Z,
  graphs = c("plot"),
  transf = list(list(bc=T), list(bc=T, d=1), list(bc=T, D=1), list(bc=T, D=1, d=1)),
  main = "Log pasajeros aéreos, diferencia ordinaria, diferencia estacional y composición de ambas diferencias" )
```



Como ya vimos, la serie pasajeros en logaritmos tiene tendencia y estacionalidad muy evidentes. No basta con tomar solo una diferencia ordinaria

$$\nabla \mathbf{y} = (1 - B) * \mathbf{y};$$

pues el resultado muestra una pauta estacional. Ni tampoco basta con tomar solo una diferencia estacional

$$\nabla_{12}(\mathbf{y}) = (1 - B^{12}) * \mathbf{y};$$

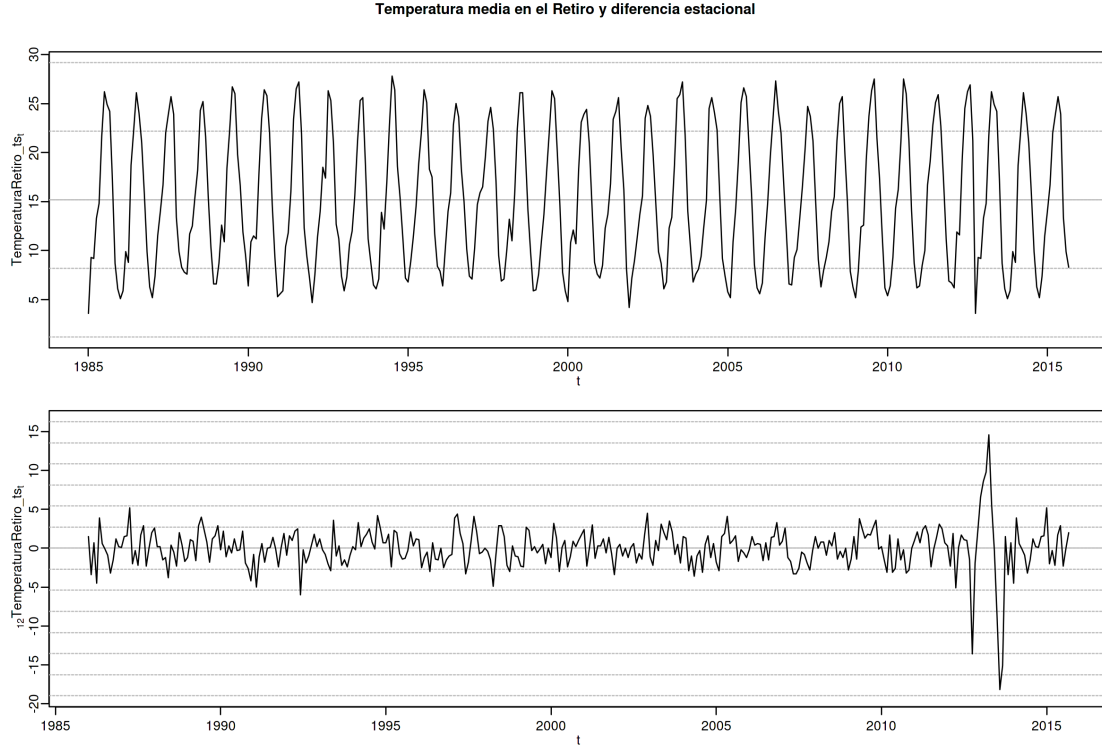
pues resulta una serie que “deambula”, i.e., que no es “*estacionaria*” en media.

Tomar una diferencia ordinaria y otra estacional

$$\nabla \nabla_{12}(\mathbf{y}) = (1 - B) * (1 - B^{12}) * \mathbf{y}$$

arroja una serie que sí parece ser “*estacionaria*”.

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 8, repr.plot.res = 200)
TemperaturaRetiro_ts=ts(read.csv("datos/Retiro.txt"),start=c(1985, 1), end=c(2015,9), frequency=12)
ide(TemperaturaRetiro_ts,
  graphs = c("plot"),
  transf = list(list(), list(D = 1)),
  main="Temperatura media en el Retiro y diferencia estacional" )
```



En el caso de la serie de temperaturas en el Parque del Retiro, parece que es suficiente con tomar solo una diferencia estacional.

3.2.2. Contrastes formales sobre el orden de integración: DF, ADF y KPSS

1. Test de Dickey-Fuller (DF)

H_0 la serie es $I(1)$

H_1 la serie es $I(0)$.

Sea el siguiente modelo donde ϕ es un parámetro autorregresivo y U_t es ruido blanco

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + U_t,$$

Habrá una raíz unitaria (será no-estacionario) si $\phi = 1$. Restando Y_{t-1} a ambos lados

$$\nabla Y_t = (\phi - 1)Y_{t-1} + U_t = \delta Y_{t-1} + U_t$$

donde $\delta = \phi - 1$ y, por tanto, la H_0 se reduce a $\delta = 0$.

Pasos del contraste:

- se estima el último modelo por MCO
- se calcula el ratio t de significación de δ
- se compara dicho ratio con la distribución específica del contraste DF (pues bajo la nula, el ratio t no se distribuye de la forma habitual).

2. Test de Dickey-Fuller aumentado (ADF) Una variante habitual del test DF es el test de Dickey-Fuller aumentado (ADF), que consiste en estimar por MCO el modelo:

$$\nabla Y_t = c + \delta Y_{t-1} + \pi_1 \nabla Y_{t-1} + \pi_2 \nabla Y_{t-2} + \cdots + \pi_p \nabla Y_{t-p} + U_t$$

que añade p retardos del regresando como regresores para permitir autocorrelación. Por lo demás, el test se calcula de la forma habitual (comparando de ratio t de $\hat{\delta}$ con las tablas del test ADF).

Otra variante consiste en incluir una tendencia temporal determinista:

$$\nabla Y_t = \underbrace{c + \beta t}_{\text{tendencia}} + \delta Y_{t-1} + \pi_1 \nabla Y_{t-1} + \pi_2 \nabla Y_{t-2} + \cdots + \pi_p \nabla Y_{t-p} + U_t$$

3. Test Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS) El contraste KPSS es un contraste alternativo (y complementario) al test DF/ADF

Las hipótesis del test KPSS están invertidas respecto a las del Test DF

H_0 la serie es $I(0)$.

H_1 la serie es $I(1)$ o estacionaria en torno a una tendencia determinista

DF/ADF y KPSS se complementan. Si la series es:

- *estacionaria*: el test DF/ADF debería rechazar su H_0 : la serie es $I(1)$
- *NO estacionaria*: el test KPSS debería rechazar su H_0 : la serie es $I(0)$

Estos test son poco potentes y son frágiles ante incumplimientos (heterocedasticidad o no-normalidad); por ello debemos complementarlos con el análisis gráfico.

3.3. ACF muestral

La k -ésima autocorrelación muestral simple ($\widehat{\rho}_k$) se define como:

$$\widehat{\rho}_k = \frac{\widehat{\rho}_k}{\widehat{\rho}_0}; \quad \widehat{\rho}_k = \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n \widetilde{X}_t \widetilde{X}_{t-k}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

donde $\widetilde{X}_t = X_t - \bar{X}$.

Para valorar la significatividad individual de estas autocorrelaciones puede usarse el error estándar asintótico: $s.e(\widehat{\rho}_k) = 1/\sqrt{n}$.

Para contrastar la H_0 : *conjuntamente los k primeros retardos son no significativos* (es decir, para contrastar si el proceso es *ruido blanco*) se emplea el test de Ljung-Box

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

(usaremos el test de Ljung-Box para evaluar los modelos).

3.4. PACF muestral

La k -ésima autocorrelación muestral $\widehat{\pi}_k$ se puede estimar mediante el algoritmo Levinson-Durbin sustituyendo las autocorrelaciones teóricas por las muestrales.

O bien, calculando el k -ésimo coeficiente MCO de una autorregresión de orden k

$$\widetilde{X}_t = \widehat{\phi}_{k1} \widetilde{X}_{t-1} + \widehat{\phi}_{k2} \widetilde{X}_{t-2} + \cdots + \widehat{\phi}_{kk} \widetilde{X}_{t-k} + U_t; \quad k = 1, 2, \dots$$

donde $\widetilde{X}_t = X_t - \bar{X}$ y donde $\widehat{\pi}_k = \widehat{\phi}_{kk}$

3.5.1. Estadísticos descriptivos

- el nivel de la serie (media, mediana),
- valores extremos (máximo y mínimo). A veces son outliers o errores de registro
- dispersión de la variable (desviación típica, coeficiente de variación, rango, rango interpercentiles, rango intercuartílico)
- otros momentos (asimetría, exceso de curtosis)

También es frecuente contrastar si la media es significativa ($H_0 : \mu = 0$)

$$\frac{\hat{\mu}}{\widehat{dt(\hat{\mu})}} \underset{H_0}{\sim} t_{n-1}; \quad \widehat{dt(\hat{\mu})} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}.$$

```
library(pastecs)      # resumen estadísticos descriptivos
# https://cran.r-project.org/web/packages/pastecs/index.html (stat.desc)
library(knitr)        # presentación de tabla resumen
# https://cran.r-project.org/web/packages/knitr/index.html (kable)
# https://bookdown.org/yihui/rmarkdown-cookbook/kable.html

# estadísticos principales y test de normalidad
kable(stat.desc(Z, basic=FALSE, norm=TRUE), 'rst')
```

```
=====
\                               x
=====
median      265.5000000
mean        280.2986111
SE.mean      9.9971931
CI.mean.0.95 19.7613736
var          14391.9172009
std.dev      119.9663169
coef.var     0.4279947
skewness     0.5710676
skew.2SE     1.4132515
kurtosis     -0.4298441
kurt.2SE     -0.5353818
normtest.W   0.9519577
normtest.p   0.0000683
=====
```

3.5.2. Contraste de normalidad Jarque-Bera

[Jarque-Bera test \(Wikipedia\)](#)

Si los datos son mayores que cero a menudo la transformación logarítmica ayuda a conseguir normalidad

Si hay valores atípicos el mejor tratamiento es *intervenirlos*.

Podemos calcularlo con la librería [momments](#):

```
#install.packages("moments")
library(moments)
# Perform the Jarque-Bera test
jb_test <- jarque.test(as.numeric(Z))
# Print the test result
print(jb_test)
```

Jarque-Bera Normality Test

```
data:  as.numeric(Z)
JB = 8.9225, p-value = 0.01155
alternative hypothesis: greater
```

Jarque-Bera Normality Test

```
data:  as.numeric(Z)
JB = 8.9225, p-value = 0.01155
alternative hypothesis: greater
```

Otra librería alternativa para calcularlo: [tseries](#)

```
library(tseries)
# Perform the Jarque-Bera test
jb_test <- jarque.bera.test(Z)
# Print the test result
print(jb_test)
```

Registered S3 method overwritten by 'quantmod':

```
method      from
as.zoo.data.frame zoo
```

Jarque Bera Test

```
data:  Z
X-squared = 8.9225, df = 2, p-value = 0.01155
```