

Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

15/02/2024

1 / 24

L-4

L-5

1 Esquema de la Lección 4

Esquema de la Lección 4

- Transformaciones elementales
- Identificación de matrices singulares por **eliminación**
- Producto de *matrices elementales*

2 / 24

L-4

L-5

Puede encontrar la última versión de este material en

<https://github.com/mbujosab/MatematicasII/tree/main/Esp>

– Marcos Bujosa. Copyright © 2008–2024

Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

1 / 24

L-4

L-5

2 Transformaciones elementales de una matriz

Tipo I: $\mathbf{A}_{[(\lambda)i+j]}$ (con $i \neq j$)

suma λ veces la columna i -ésima a la columna j -ésima

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{[(-2)1+3]} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Tipo II: $\mathbf{A}_{[(\alpha)i]}$ (con $\alpha \neq 0$)

multiplica por α la i -ésima columna

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{[(10)2]} = \begin{bmatrix} 1 & -30 & 0 \\ 1 & -60 & 3 \end{bmatrix}$$

3 / 24

3 Eliminación y forma pre-escalada de una matriz

- **Pivote**: es el primer componente no nulo de cada columna.
- **Eliminación**: modifica una matriz hasta que los componentes a la derecha de cada pivote son cero

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-3)\tau_1+2]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-2)\tau_2+3]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

4 / 24

4 Eliminación

Algoritmo de Eliminación sobre \mathbf{A}

modifica \mathbf{A} con una secuencia de transformaciones elementales

Objetivo

obtener una forma (pre)escalada de la matriz

- **pre-escalada**: a la derecha de cada pivote solo hay ceros.
- **escalada**: además sus pivotes en disposición descendente y columnas nulas a la derecha.

Toda matriz se puede (pre)escalonar por eliminación

Rango (rg): n^o de pivotes de sus formas pre-escaladas

\mathbf{A} **singular**: sus formas pre-escaladas tienen columnas nulas ($\text{rg} < n$)

$n \times n$

5 / 24

5 Eliminación: ¿Cuándo no hay suficientes pivotes?

matrices $n \times n$: **singulares** si no logramos n pivotes tras la eliminación

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{¿Y si la matriz fuera?} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{¿Y si la matriz fuera?} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{¿Y si la matriz fuera?} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

6 / 24

6 Producto de matrices: matrices elementales

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]}_{\mathbf{I}_\tau} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_\tau}$$

La matriz \mathbf{I}_τ se denomina *matriz elemental*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{I}_\tau) = \mathbf{A}_\tau$$

Esta matriz elemental \mathbf{I}_τ en particular se denota como $\mathbf{I}_{[(-3)\tau_1+2]}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{I}_{[(-3)\tau_1+2]}) = \mathbf{A}_{[(-3)\tau_1+2]}$$

7 / 24

7 Producto de matrices: matrices elementales

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Esta matriz elemental \mathbf{I}_{τ} en particular se denota como $\mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-2)2+3]}}$

$$\mathbf{A} \left(\mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-2)2+3]}} \right) = \mathbf{A}_{\substack{\tau \\ [(-2)2+3]}}$$

8 / 24

8 Eliminación mediante matrices elementales

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-3)1+2]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-2)2+3]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

$$\mathbf{A}_{\substack{\tau \\ [(-3)1+2] \\ [(-2)2+3]}} = \mathbf{A}_{\substack{[(-3)1+2] \\ [(-2)2+3]}} = \left(\mathbf{A} \left(\mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-3)1+2]}} \right) \right) \left(\mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-2)2+3]}} \right) = \mathbf{L}$$

hay una matriz que realiza todas las operaciones “de golpe”

$$\mathbf{A}_{\substack{\tau \\ [(-3)1+2] \\ [(-2)2+3]}} = \mathbf{A} \left(\left(\mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-3)1+2]}} \right) \left(\mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-2)2+3]}} \right) \right) = \mathbf{A} \mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-3)1+2] \\ [(-2)2+3]}} = \mathbf{L}$$

$$\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k} = \mathbf{A} \left(\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k} \right)$$

9 / 24

9 ¿Cómo volver de \mathbf{L} a \mathbf{A} ? Inversas

¿Cómo deshacer el primer paso? (fue restar 3 veces $\mathbf{A}_{|1}$ de $\mathbf{A}_{|2}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-\lambda)i+j]}} \text{ “deshace” } \mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(\lambda)i+j]}}$$

¿Qué deshace $\mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(\alpha)i]}}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10 / 24

10 Matrices de intercambio

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}$$

¿Y si queremos intercambiar las filas?

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$$

¡El producto de matrices no es conmutativo!

11 / 24

11 Intercambios entre columnas

Intercambio de columnas:

$\mathbf{A}_{\tau_{[i \rightleftharpoons j]}} \rightarrow$ intercambia las columnas i y j de \mathbf{A}

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{\tau_{[2 \rightleftharpoons 3]}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Podemos intercambiar dos columnas con una sucesión de transformaciones elementales

La matriz $\mathbf{I}_{\tau_{[i \rightleftharpoons j]}}$ se denomina matriz intercambio

12 / 24

12 Permutaciones

Producto de matrices intercambio $\mathbf{I}_{\tau_{[i \rightleftharpoons j]}}$ es una matriz permutación $\mathbf{I}_{\tau_{[\sigma]}}$.

$\mathbf{I}_{\tau_{[\sigma]}} =$ Matriz identidad \mathbf{I} con columnas reordenadas

Veamos el caso 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{\tau_{[1 \rightleftharpoons 2]}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

¿Cuántos posibles reordenamientos o permutaciones hay?

¿Qué obtenemos con el producto de dos matrices permutación?

13 / 24

Problemas de la Lección 4

(L-4) PROBLEMA 1.

(a) ¿Cuáles son las matrices $\mathbf{I}_{\tau_{[(x)1+2]}}$, $\mathbf{I}_{\tau_{[(y)1+3]}}$ y $\mathbf{I}_{\tau_{[(z)2+3]}}$ que transforman

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ en una forma escalonada?}$$

(b) Multiplique dichas matrices elementales \mathbf{I}_{τ_i} para obtener una matriz \mathbf{E} que realice la eliminación: $\mathbf{AE} = \mathbf{K}$.

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 24 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) PROBLEMA 2. Considere la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

¿Para que valor(es) de c la matriz es singular (no es posible encontrar tres pivotes)?

13 / 24

(L-4) PROBLEMA 3. Suponga las siguientes matrices de orden 3 por 3.

(a) $(\mathbf{I}_{\tau_{[(-1)1+2]}})$ resta la columna 1 de la columna 2, y luego $(\mathbf{I}_{\tau_{[2 \rightleftharpoons 3]}})$ intercambia las columnas 2 y 3. ¿Qué matriz \mathbf{E} realiza ambos cambios a la vez?

(b) $(\mathbf{I}_{\tau_{[2 \rightleftharpoons 3]}})$ intercambia las columnas 2 y 3 y luego $(\mathbf{I}_{\tau_{[(-1)1+3]}})$ resta la columna 1 de la columna 3. ¿Qué matriz $\mathbf{N} = (\mathbf{I}_{\tau_{[2 \rightleftharpoons 3]}})(\mathbf{I}_{\tau_{[(-1)1+3]}})$ realiza ambos cambios a la vez?

Explique por qué las matrices \mathbf{E} y \mathbf{N} son iguales en ambos casos, pero las matrices elementales \mathbf{I}_{τ} son distintas.

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 28 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) PROBLEMA 4. Las matrices elementales $\mathbf{I}_{\tau_{[(?)1+2]}}$ y $\mathbf{I}_{\tau_{[(?)2+3]}}$ reducen la matriz \mathbf{A} a su forma escalonada por columnas. Encuentre la matriz \mathbf{E} tal que $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$ es dicha forma escalonada (triangular inferior), si \mathbf{A} es

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

13 / 24

(L-4) PROBLEMA 5. Aunque aquí sólo contemplamos como transformaciones elementales las de *Tipo I* y *II*, en la mayoría de manuales de Álgebra Lineal aparece como tercera operación elemental el *intercambio*:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[p \leftrightarrow s]{\tau} \text{ intercambia las columnas } p \text{ y } s \text{ de } \mathbf{A}.$$

Demuestre que un intercambio de columnas es en realidad una sucesión de transformaciones elementales de *Tipo I* y *II*. Hágalo transformando la matriz identidad

$$\mathbf{I}_{2 \times 2} \text{ en } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ mediante transformaciones elementales por columnas.}$$

(L-4) PROBLEMA 6. Escriba las matrices de 3 por 3 que producen los siguientes pasos de eliminación:

- (a) $\mathbf{I}_{[(-5)1+2]}^{\tau}$ resta 5 veces la columna 1 de la columna 2.
 (b) $\mathbf{I}_{[(-7)2+3]}^{\tau}$ resta 7 veces la columna 2 de la columna 3.
 (c) la matriz permutación $\mathbf{I}_{\begin{bmatrix} \tau \\ \ominus \end{bmatrix}}$ que intercambia las columna 1 y 2, y después las columnas 2 y 3.

(Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 1.4.)

13 / 24

(L-4) PROBLEMA 7. En referencia a las matrices del PROBLEMA 6:

- (a) Al aplicar $\mathbf{I}_{[(-5)1+2]}^{\tau}$ y luego $\mathbf{I}_{[(-7)2+3]}^{\tau}$ a las columnas de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ se obtiene $\mathbf{A} \xrightarrow[p \leftrightarrow s]{\tau} = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau \\ \tau \end{bmatrix}$.

- (b) Pero aplicando $\mathbf{I}_{[(-7)2+3]}^{\tau}$ antes de $\mathbf{I}_{[(-5)1+2]}^{\tau}$ se obtiene $\mathbf{A} \xrightarrow[p \leftrightarrow s]{\tau} = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau \\ \tau \end{bmatrix}$.

- (c) Cuando se aplica $\mathbf{I}_{[(-7)2+3]}^{\tau}$ primero, la columna ____ no se ve afectada por la columna _____. ¡Este hecho es central para que la factorización LU funcione como lo hace!

(Strang, 2007, ejercicio 23 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) PROBLEMA 8. ¿Qué matriz \mathbf{M} transforma el vector $\mathbf{v} = (1, 0,)$ en $(0, 1,)$, es decir $\mathbf{vM} = (0, 1,)$; y también el vector $\mathbf{w} = (0, 1,)$ en $(1, 0,)$, es decir $\mathbf{wM} = (1, 0,)$?

(L-4) PROBLEMA 9. Hemos visto que para una matriz de intercambio, $\mathbf{I}_{\begin{bmatrix} \tau \\ i \leftrightarrow j \end{bmatrix}}$, el producto $\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\begin{bmatrix} \tau \\ i \leftrightarrow j \end{bmatrix}})$ tiene las mismas componentes que \mathbf{A} , pero las columnas están intercambiadas. ¿Qué pasaría si alteramos el orden del producto, es decir, si multiplicamos $(\mathbf{I}_{\begin{bmatrix} \tau \\ i \leftrightarrow j \end{bmatrix}})\mathbf{A}$? Verifique su respuesta para el caso 2 por 2.

13 / 24

(L-4) PROBLEMA 10. Si cada columna de \mathbf{A} es un múltiplo de $(1, 1, 1,)$, entonces \mathbf{Ax} siempre es un múltiplo de $(1, 1, 1,)$. Escriba un ejemplo de 3 por 3. ¿Cuántos pivotes se producen por eliminación?
 (Strang, 2007, ejercicio 26 del conjunto de problemas 1.4.)

1 Esquema de la Lección 5

Esquema de la Lección 5

- Inversa de \mathbf{A}
- eliminación Gauss-Jordan / encontrando \mathbf{A}^{-1}
- Inversa de \mathbf{AB} , \mathbf{A}^T

2 Inversa de una matriz (matrices cuadradas)

A **cuadrada** de orden n tiene inversa (es *invertible*) si existe **B** tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Entonces

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}.$$

No todas las matrices tienen inversa

Las *matrices cuadradas sin inversa* se denominan *singulares*

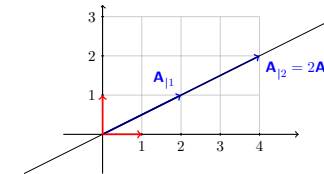
15 / 24

3 Caso singular (no inversa)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Es posible encontrar una matriz **B** tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$?

... columnas de **I** deben ser combinaciones lineales de columnas de **A**... pero las columnas están alineadas.



Así pues

A es singular

16 / 24

4 Caso singular (no inversa)

¿Se puede encontrar $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow$ no puede haber \mathbf{A}^{-1}

Suponer \mathbf{A}^{-1} nos lleva a una contradicción

$$\text{Si } \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ y } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Cuando existe \mathbf{A}^{-1}

la única solución a $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

17 / 24

5 Calculando la matriz inversa

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es resolver m sistemas (de m ecuaciones cada uno)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \quad \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \quad \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18 / 24

6 Gauss-Jordan: resolviendo dos sistemas lineales de golpe

Eliminación Gauss-Jordan (obtención forma escalonada reducida **R**)

aplicar transformaciones elementales hasta lograr una matriz **escalonada** con únicamente **ceros a la izda.** de cada pivote (y pivotes iguales a 1)

Vamos a resolver los sistemas lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aplicando eliminación Gauss-Jordan sobre **A** apilada con **I**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \rightarrow \quad =$$

Si **R = I**, hemos encontrado **A⁻¹**

19 / 24

8 Inversa de un producto

Si **A** y **B** son invertibles y del mismo orden, **(AB)** es invertible.

¿Cómo es **(AB)⁻¹**? Probemos con **(B⁻¹A⁻¹)**:

$$\mathbf{AB}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) =$$

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB} =$$

21 / 24

7 Gauss-Jordan: ¿Por qué funciona?

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-3)\mathbf{I}_1+2]} \quad \xrightarrow{[(-2)\mathbf{I}_2+1]}$$

es decir, puesto que $\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k})$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}_{\tau_1 \dots \tau_k} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k} \\ \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}) \\ \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k} \end{bmatrix},$$

¿quién es $\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}$?

por tanto **A⁻¹** =

20 / 24

9 Inversa de la matriz transpuesta

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

Hagamos la transpuesta en ambos lados

$$((\mathbf{A}^{-1})^T)\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$$

por tanto

la inversa de **A^T** es

22 / 24

10 Matrices intercambio y matrices permutación

¿Son invertibles las matrices intercambio, $\mathbf{I}_{\tau_{[i \Rightarrow j]}}$?

Es fácil comprobar que

$$\left(\mathbf{I}_{\tau_{[i \Rightarrow j]}}\right)^T \left(\mathbf{I}_{\tau_{[i \Rightarrow j]}}\right) = \mathbf{I} \quad \Rightarrow$$

23 / 24

Problemas de la Lección 5

(L-5) PROBLEMA 1. Aplique la eliminación Gauss-Jordan para invertir estas matrices

(a) $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

(b) $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

(c) $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 2.

(a) Si \mathbf{A} es invertible y $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, demuestre rápidamente que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

(b) Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, encuentre un ejemplo con $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, pero $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$.

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 3. Calcule la inversa de la matriz genérica 2×2

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

¿Qué condiciones sobre a , b , c , y d aseguran que existe la inversa?

24 / 24

11 Caracterización de las matrices que tienen inversa

Dada \mathbf{A} de orden n , las siguientes propiedades son equivalentes

1. $\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_p} = \mathbf{K}$ (pre-escalónada) no tiene columnas nulas.
2. \mathbf{A} tiene inversa.
3. \mathbf{A} es producto de matrices elementales.

$$\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}) = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = (\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k})^{-1}$$

donde

$$(\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k})^{-1} = ((\mathbf{I}_{\tau_1}) \dots (\mathbf{I}_{\tau_k}))^{-1} = (\mathbf{I}_{\tau_k^{-1}}) \dots (\mathbf{I}_{\tau_1^{-1}}) = \mathbf{I}_{\tau_k^{-1} \dots \tau_1^{-1}}$$

24 / 24

(L-5) PROBLEMA 4. Calcule las inversas de las siguientes matrices, usando Gauss-Jordan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(L-5) PROBLEMA 5. Si la matriz 3 por 3 \mathbf{A} es tal que $\mathbf{A}_{|1} + \mathbf{A}_{|2} = \mathbf{A}_{|3}$, demuestre que \mathbf{A} no es invertible de estas dos formas alternativas:

(a) Encuentre una solución \mathbf{x} diferente de cero de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

(b) La eliminación preserva la condición $columna1 + columna2 = columna3$. Explique por qué no hay un tercer pivote.

(Strang, 2007, ejercicio 26 del conjunto de problemas 1.6.)

24 / 24

(L-5) PROBLEMA 6. Encuentre las inversas de

$$(a) \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

(Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 1.6.)

24 / 24

(L-5) PROBLEMA 7. Calcule la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

¿Para qué valores de a y b no hay inversa?

(Strang, 2007, ejercicio 42 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 8. Encuentre \mathbf{E}^2 , \mathbf{E}^8 y \mathbf{E}^{-1} si $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.5.)

(L-5) PROBLEMA 9. Dada la matriz de permutación

$$\mathbf{I}_{\begin{smallmatrix} \tau \\ \mathfrak{S} \end{smallmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

escriba la matriz $(\mathbf{I}_{\begin{smallmatrix} \tau \\ \mathfrak{S} \end{smallmatrix}})^{-1}$. ¿Que otra relación tiene con la matriz $\mathbf{I}_{\begin{smallmatrix} \tau \\ \mathfrak{S} \end{smallmatrix}}$ (aparte de ser su inversa)?

24 / 24

(L-5) PROBLEMA 10. La matriz \mathbf{A} de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad \mathbf{I} mediante las siguientes operaciones elementales sobre las columnas (en este orden):

$\begin{smallmatrix} \tau \\ [(-4)1+2] \end{smallmatrix}$: Resta 4 veces columna 1 de la columna 2.

$\begin{smallmatrix} \tau \\ [(-3)1+3] \end{smallmatrix}$: Resta 3 veces columna 1 de la columna 3.

$\begin{smallmatrix} \tau \\ [(-1)3+2] \end{smallmatrix}$: Resta columna 3 de la columna 2.

(a) Escriba \mathbf{A}^{-1} en términos de operaciones con matrices elementales $\mathbf{I}_{\begin{smallmatrix} \tau \\ \mathfrak{S} \end{smallmatrix}}$. Calcule la matriz \mathbf{A}^{-1} .

(b) ¿Cuál es la matriz original \mathbf{A} ?

(Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2006)

24 / 24

(L-5) PROBLEMA 11. La matriz \mathbf{A} de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad \mathbf{I} mediante las siguientes tres operaciones elementales sobre las filas (en el siguiente orden):

$\begin{smallmatrix} \tau \\ [(-4)1+2] \end{smallmatrix}$: Resta 4 veces fila 1 de la fila 2.

$\begin{smallmatrix} \tau \\ [(-3)1+3] \end{smallmatrix}$: Resta 3 veces fila 1 de la fila 3.

$\begin{smallmatrix} \tau \\ [(-1)3+2] \end{smallmatrix}$: Resta fila 3 de la fila 2.

(a) Escriba \mathbf{A}^{-1} en términos de las matrices elementales \mathbf{E} . Calcule la matriz \mathbf{A}^{-1} .

(b) ¿Cuál es la matriz original \mathbf{A} ?

(MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2006)

24 / 24

(L-5) PROBLEMA 12.

(a) Encuentre la inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Encuentre la inversa de la siguiente matriz usando el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

(Poole, 2004, ejercicio 36, 38 y 59 del conjunto de problemas 3.3.)

(L-5) PROBLEMA 13. Sean \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} matrices cuadradas. Justifique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

(a) Si $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$ entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

(b) $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$.

(L-5) PROBLEMA 14. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 0 & 2a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$

(a) Demuestre que \mathbf{A} es invertible para todo valor del parámetro a .

(b) Calcule \mathbf{A}^{-1} cuando $a = 0$.

(L-5) PROBLEMA 15. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule \mathbf{A}^{-1} .

(L-5) PROBLEMA 16. Encuentre las inversas, si existen, de las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(L-5) PROBLEMA 17. Tan solo hay un número finito ($n!$) de matrices de permutación de dimensión $n \times n$. Además, cualquier potencia de una matriz permutación es también una matriz permutación. Emplee este hecho para demostrar que $(\mathbf{I}_{\tau})_{[\mathfrak{S}]}^r = \mathbf{I}$ para algún número entero r .

Poole, D. (2004). *Álgebra lineal. Una introducción moderna*.

Thomson Learning, Mexico D.F. ISBN 970-686-272-2.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom

Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN

970686609-4.