Matemáticas II

Marcos Bujosa

21/01/2025

Puede encontrar la última versión de este material en

https://mbujosab.github.io/MatematicasII/

Índice

Part IV
Ortogonalidad

LECCIÓN 11: Vectores y subespacios ortogonales

Lección 11

(**Lección** 11) T-**1** Esquema de la Lección 11

Esquema de la *Lección 11*

- Vectores y subespacios ortogonales
- Espacio nulo $\perp$ espacio fila

$$\mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right) \perp \mathcal{C}\left(\mathsf{A}^{\intercal}\right)$$

- espacio nulo por la izquierda $\perp$ espacio columna

$$\mathcal{N}\left(\mathsf{A}^{\intercal}\right) \perp \mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$$

F1

(**Lección** 11) T-**2** Algunas definiciones

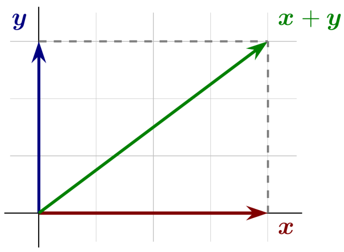
- Producto punto

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

- Longitud de un vector $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2.$
- Vector unitario: $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ $\qquad$ $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\cdot\boldsymbol{x}$
- Vectores ortogonales (perpendiculares): $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0.$

F2

(**Lección** 11) T-**3** Vectores ortogonales



$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$$

Tma. Pitágoras: $\qquad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}).$$

F3

(**Lección** 11) T-4 Norma al cuadrado de un vector

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \to \quad \|\boldsymbol{x}\|^2 = \qquad ; \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \to \quad \|\boldsymbol{y}\|^2 = \qquad ;$$

¿Son estos vectores ortogonales?

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}; \qquad \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \qquad ;$$

(Pitágoras) (Ortogonalidad)

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0.$$

F4

(**Lección** 11) T-5 Subespacios ortogonales

Cuando el subespacio $\mathcal{S}$ es ortogonal al subespacio $\mathcal{T}$:

$$\boxed{\text{Cada vector de } \mathcal{S} \text{ es ortogonal a cada vector de } \mathcal{T}}$$

¿Son ortogonales el plano de la pizarra y el suelo?

F5

(**Lección** 11) T-6 Espacio nulo ortogonal a espacio fila

- $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \perp$ filas de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} ({}_{1|}\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ ({}_{m|}\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

- $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \perp \boldsymbol{d}\mathbf{A}, \quad \forall \boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^m$ (cualquier combinación lineal de las filas)

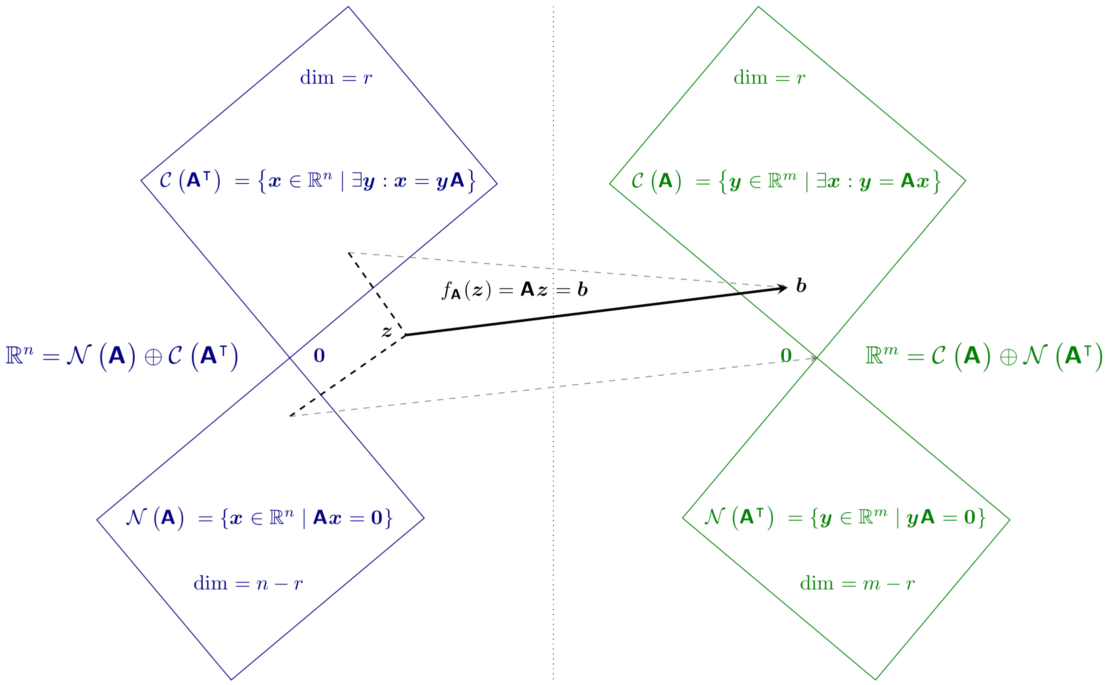
$$\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{0} = 0.$$

$$\boxed{\text{espacio nulo} \perp \text{espacio fila} \qquad \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)}$$

También: $\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$

F6

(**Lección** 11) T-7 **El gran esquema: suma directa de complementos ortogonales**



$$\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}) \qquad\qquad \mathcal{C}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$$

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \cdot \mathbf{0} \qquad\qquad \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{x}$$

F7

(**Lección** 11) T-8 **Revisitando la eliminación gaussiana**

Algoritmo que encuentra una base del complemento ortogonal

Dame varios vectores y los escribo como filas de una matriz $\mathbf{M}$ ...

$$\left[\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{D} & \mathbf{N} \end{array}\right]$$

Base del espacio generado por los vectores (fila): $\mathcal{V}$

Base del complemento ortogonal: $\mathcal{V}^\perp$ $\qquad\qquad \mathbf{M}\mathbf{N} = \mathbf{0}$

Pero si me das $\mathbf{N}_{|1}$ y $\mathbf{N}_{|2}$ y empiezo de nuevo... obtendré una base de...

F8

Fin de la lección

Problemas de la Lección 11

(L-11) PROBLEMA 1. Describa el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.15 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 2. ¿Hay algún vector que sea perpendicular a si mismo?
(Hefferon, 2008, ejercicio 2.17 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 3. Calcule la longitud de cada uno de estos vectores

(a) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.11 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 4. Encuentre un vector unitario (de norma uno) con la misma direccción que $\boldsymbol{v} = (2,\ -1,\ 0,\ 4,\ -2)$.

(L-11) PROBLEMA 5. Encuentre el valor de k de manera que estos vectores sean perpendiculares.

$$\left(k,\quad 1,\right), \qquad \left(4,\quad 3,\right).$$

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.14 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 6. Escriba una matriz con las propiedades requeridas, o explique por qué es imposible:

(a) El espacio columna contiene $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$, el espacio nulo contiene $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(b) El espacio fila contiene $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$, y el espacio nulo contiene $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ tiene solución, y $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

(d) Cada fila es ortogonal a cada columna (y $\mathbf{A}$ no es la matriz cero)

(e) La suma de columnas da una columna de ceros, la suma de filas suma una fila de unos.

(Strang, 2003, ejercicio 3 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 7. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, las columnas de $\mathbf{B}$ pertencen a ________ de $\mathbf{A}$. Las filas de $\mathbf{A}$ están contenidas en el __________ de $\mathbf{B}$. Por qué no es posible que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sean matrices 3 por 3 de rango 2?
(Strang, 2003, ejercicio 4 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 8. Suponga que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$ y que $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$. ¿Debe ocurrir que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$?
(Hefferon, 2008, ejercicio 2.20 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 9.

(a) Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución y $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{y}$ es perpendicular a ____.

(b) Si $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ tiene solución y $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{x}$ es perpendicular a ____.

(Strang, 2003, ejercicio 5 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 10. Demuestre, para $\mathbb{R}^n$, que si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son perpendiculares, entonces $||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||^2 = ||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2$.
(Hefferon, 2008, ejercicio 2.33 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 11. Encuentre una matriz de 1 por 3 cuyo espacio nulo conste de todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$. Encuentre una matriz de 3 por 3 con el mismo espacio nulo.
(Strang, 2007, ejercicio 9 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-11) PROBLEMA 12. Consider $\underset{4\times 2}{\mathbf{A}}$ with exactly two special solutions for $\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0}$:

$\boldsymbol{s}_1 = \left(3,\quad 1,\quad 0,\quad 0,\right)$, and $\boldsymbol{s}_2 = \left(6,\quad 0,\quad 2,\quad 1,\right)$.

(a) Find the reduced row echelon form $\mathbf{R}$ of $\mathbf{A}$.

(b) What is the row space of $\mathbf{A}$?

(c) What is the complete solution to $\boldsymbol{x}\mathbf{R} = \left(3,\quad 6,\right)$?

(d) Find a combination of rows 2, 3, 4 that equals $\mathbf{0}$. (Not OK to use $0({}_{2|}\mathbf{A}) + 0({}_{3|}\mathbf{A}) + 0({}_{4|}\mathbf{A})$. The problem is to show that these rows are dependent.)

(L-11) PROBLEMA 13. Suponga que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución (quizá tiene muchas). Puede demostrase que cualquier solución $\boldsymbol{x}$ de dicho sistema puede descomponerse como suma de dos vectores ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_f + \boldsymbol{x}_n$) donde $\boldsymbol{x}_f$ es combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{x}_n$ pertenece al subespacio vectorial de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_f) = \boldsymbol{b}$.

(b) (1^{pts}) Suponga que $\boldsymbol{v}_f$ es combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$ y que además $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_f) = \boldsymbol{b}$. ¿A qué subespacios vectoriales pertenece la diferencia $(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{x}_f)$? Demuestre que $\boldsymbol{x}_f$ y $\boldsymbol{v}_f$ son iguales.

(c) (1^{pts}) Encuentre la solución $\boldsymbol{x}_f$ del subespacio vectorial generado por las filas de $\mathbf{A}$, para el siguiente sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, encontrando los valores c y d que cumplen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_f = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{x}_f = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Fin de los Problemas de la Lección 11

LECCIÓN 12: Ecuaciones paramétricas y cartesianas

Lección 12

(**Lección** 12) T-**1** Esquema de la Lección 12

Esquema de la *Lección 12*

- De las ecuaciones paramétricas a las cartesianas (o implícitas)
- Escogiendo ente las ecuaciones paramétricas

F9

De ecuaciones paramétricas a ecuaciones cartesianas

(**Lección** 12) T-**2** Ecuaciones cartesianas (implícitas) y paramétricas de rectas y planos

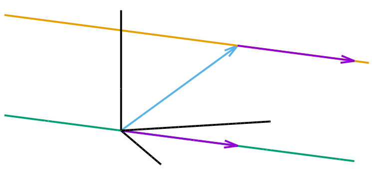
Ecuaciones cartesianas (implícitas) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$:
Por ejemplo

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = \text{c. sol. de } \begin{cases} x_1-x_2+x_3=1\\ \qquad\quad\; x_3=1\end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas:
Para el conjunto del ejemplo anterior

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1 : \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

En este caso dimensión 1 Una recta (sólo hay un parámetro a)
recta recta F10

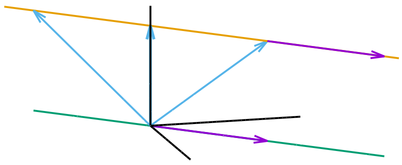


o bien

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1 : \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

o bien

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1 : \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$



(**Lección** 12) | T-3 | **Ecuaciones cartesianas (implícitas) y paramétricas de rectas y planos**

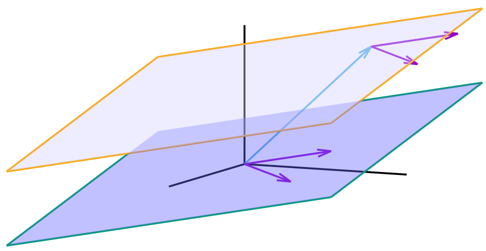
Ecuaciones cartesianas (implícitas) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$:
Por ejemplo

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = (1,)\right\} = \text{c. sol. de } \left\{x_1 - x_2 + x_3 = 1\right.$$

Ecuaciones paramétricas:
Para el conjunto del ejemplo anterior

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

En este caso dimensión 2 Un plano (hay dos parámetros a y b)
plano plano F12

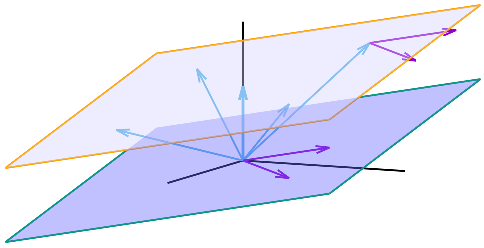


o bien

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

pero también

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$



(**Lección** 12) $\boxed{\text{T-4}}$ **De las ecuaciones paramétricas a las cartesianas**

$$\boxed{\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) \perp \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)}$$

Considere
$$H = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^k : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} + \left[\boldsymbol{n}_1; \;\ldots\; \boldsymbol{n}_k;\right] \boldsymbol{p} \right\}.$$

Si encontramos $\mathbf{A}$ *tal que* $\mathbf{A}\boldsymbol{n}_i = \mathbf{0}$ entonces si $\boldsymbol{x} \in H$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \mathbf{A}\boldsymbol{s} \;+\; \underbrace{\mathbf{A}\left[\boldsymbol{n}_1; \;\ldots\; \boldsymbol{n}_k;\right]}_{\mathbf{0}} \boldsymbol{p} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{b}, \quad \text{donde } \boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{s}.$$

Por tanto
$$H = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \right\}.$$

F14

(**Lección** 12) $\boxed{\text{T-5}}$ **De la solución al sistema de ecuaciones**

Ecuaciones implícitas del plano P paralelo al generado por $(1, 2, 0, -2)$ y $(0, 0, 1, 3)$ que pasa por $\boldsymbol{s} = (1, 3, 1, 1)$.

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; \exists a, b \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

Necesitamos vectores perpendiculares a $(1, 2, 0, -2)$ y a $(0, 0, 1, 3)$

F15

(**Lección** 12) T-6 De la solución al sistema de ecuaciones

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z, w,); \qquad \boldsymbol{s} = (1, 3, 1, 1,).$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline x & y & z & w \\ \hline 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline x & y-2x & z & w+2x \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline x & y-2x & z & w+2x-3z \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Así $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$; y entonces $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2x+y \\ 2x+w-3z \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \mathsf{A}\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por tanto $\begin{cases} -2x + y & = 1 \\ 2x \quad - 3z + w & = 0 \end{cases}$

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

F16

De unas ecuaciones paramétricas a otras

Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones de un problema aplicado, puede ocurrir que estemos interesados en alguna ecuación paramétrica en especial (es lo que comúnmente se llama despejar unas variables respecto de las otras). Veámos como hacerlo una vez hemos resuelto un sistema, es decir, veámos como pasar de unas ecuaciones paramétrica a otras.

(**Lección** 12) T-7 Un problema de Microeconomía

Resuelva Y en *términos de X* para obtener la FPP

$$\begin{cases} X & = 4L_x \\ \quad Y & = 3L_y \\ L_x + L_y & = 80 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} X \quad - 4L_x & = 0 \\ \quad Y \quad - 3L_y & = 0 \\ L_x + L_y & = 80 \end{cases}$$

(*"en términos de" X significa X libre*)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -80 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {[(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -80 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(80)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & -4 & 320 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 0 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = L_y \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 - 4L_y \\ 3L_y \\ 80 - L_y \\ L_y \end{pmatrix} \quad \text{"en términos de" } L_y$$

F17

(**Lección** 12) T-8 Variable libre

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & -4 & 320 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(\frac{-1}{4})\mathbf{4}] \\ [(-320)\mathbf{4}+\mathbf{5}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 240 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 & 80 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 240 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow a = X \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 240 - \frac{3}{4}X \\ \frac{1}{4}X \\ 80 - \frac{1}{4}X \end{pmatrix}$$

"en términos de" X

F18

(**Lección** 12) T-9 Variables libres

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = -1 \\ -x - 2y + 3z + 5w = -5 \\ -x - 2y - z - 7w = 7 \end{cases}$$

1. Resuelva en función de y y w
2. Resuelva en función de x y w
3. Resuelva en función de x y z
4. Resuelva en función de x y y

F19

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 5 & -5 \\ -1 & -2 & -1 & -7 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 6 & -6 \\ -1 & 0 & -2 & -6 & 6 \\ \hline 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{4}] \\ [(3)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{cases} \xrightarrow[\substack{[(\frac{-1}{2})\mathbf{1}] \\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(\frac{-1}{3})\mathbf{2}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & 1 \end{array}\right] \\ \xrightarrow[\substack{[(\frac{-1}{2})\mathbf{1}] \\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(\frac{-1}{2})\mathbf{2}] \\ [(\frac{1}{2})\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & 1 \end{array}\right] \end{cases}$$

Fin de la lección

Problemas de la Lección 12

(L-12) PROBLEMA 1.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_P = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_Q = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
(b) Encuentre una representación implícita de la recta anterior.

(L-12) PROBLEMA 2.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_P = \begin{pmatrix}1, & -3, & 1,\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_Q = \begin{pmatrix}-2, & 4, & 5,\end{pmatrix}$.
(b) Encuentre una representación implícita (ecuaciones Cartesianas) de la recta.

(Lang, 1986, Example 1 in Section 1.5)

(L-12) PROBLEMA 3.

(a) Ecuación paramética de la recta paralela a $2x - 3y = 5$ que pasa por el punto $(1, 1)$.
(b) Encuentre una representación implícita de la recta.

(L-12) PROBLEMA 4.

(a) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $\begin{pmatrix}0, & 1, & 1,\end{pmatrix}$ y tiene por vectores directores $\begin{pmatrix}0, & 1, & 2,\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1, & 1, & 0,\end{pmatrix}$
(b) Escriba la ecuación implicita del mismo plano.

(L-12) PROBLEMA 5.

(a) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $\begin{pmatrix}2, & 1, & 3,\end{pmatrix}$ y es perpendicular a $\begin{pmatrix}3, & 1, & 1,\end{pmatrix}$.

(b) Escriba la ecuación implicita del mismo plano.

(L-12) PROBLEMA 6. Considere el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

(a) (1^{pts}) Obtenga la solución al sistema.
(b) (0.5^{pts}) Explique por qué el conjunto de vectores solución al sistema anterior es una recta en $\mathbb{R}^5$. Indique un vector director y un punto por el que pasa la recta.
(c) (1^{pts}) Encuentre los vectores perpendiculares al vector director anterior. Pruebe que el conjunto de vectores perpendiculares a dicho vector forman un subespacio vectorial de dimensión 4. Encuentre una base de dicho subespacio.

Fin de los Problemas de la Lección 12

LECCIÓN 13: Proyecciones sobre subespacios

Lección 13

(**Lección** 13) **T-1** Esquema de la Lección 13

Esquema de la *Lección 13*

- Proyecciones
- Matrices proyección

F22

(**Lección** 13) **T-2** Suma directa de subespacios

$\mathbb{R}^n$ es *suma directa* de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ $\qquad (\mathbb{R}^n = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$

si todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tiene una descomposición **única** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$,

con $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$.

Ejemplo 1. $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \oplus \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)}$

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}1&2&5\\2&4&10\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&0&0\\ \hline 1&-2&-5\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \Rightarrow \text{Base de } \mathbb{R}^3; \left[\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

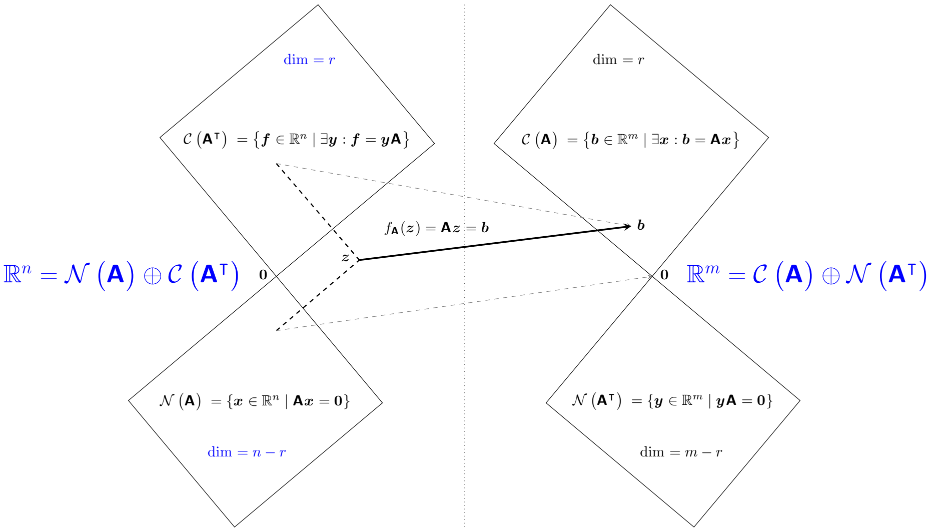
$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ \exists c_1, c_2, c_3 \ \Bigg| \ \boldsymbol{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

donde $\boldsymbol{a} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ y $\boldsymbol{b} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

También $\boxed{\mathbb{R}^m = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \oplus \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)}$

F23

(**Lección** 13) **T-3** El gran esquema: suma directa de complementos ortogonales



$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \perp \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \qquad\qquad \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \perp \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$$

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \cdot \mathbf{0} \qquad\qquad \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{x}$$

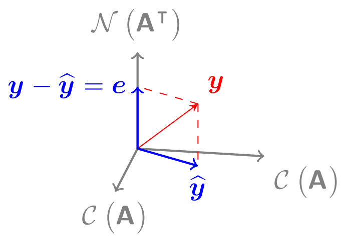
F24

(**Lección** 13) T-4 Proyección ortogonal sobre $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$

Sea $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$; como $\mathbb{R}^m = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \oplus \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$, para todo $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{y} = \widehat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{e}; \qquad (\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}})$$

con $\boxed{\widehat{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \text{ y } \boldsymbol{e} \perp \widehat{\boldsymbol{y}}}$, así que $\boldsymbol{e} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$.



¿Cómo calcular $\widehat{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$?

F25

(**Lección** 13) T-5 Ecuaciones normales

Sea $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$. Buscamos la descomposición $\boxed{\boldsymbol{y} = \widehat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{e}}$ donde

$$\widehat{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \quad \text{y} \quad (\widehat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}) \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$$

Por tanto

$$\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{y}} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}) \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$$

Es decir

$$\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{y}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^\intercal\left(\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}\right) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}}$$

¡Sistemas equivalentes! $\Rightarrow \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right) \Rightarrow \operatorname{rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{rg}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})$

$\boxed{\text{solución única } \widehat{\boldsymbol{x}} \text{ si y sólo si } \mathbf{A} \text{ tiene columnas independientes}}$

F26

(**Lección** 13) T-6 Solución a las ecuaciones normales (rango completo por columnas)

$\boxed{\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}}$ ($\mathbf{A}$ de rango completo por columnas)

La solución $\widehat{\boldsymbol{x}} = (\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$

La proyección $\widehat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$

La matriz de proyección $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal$

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{P}\boldsymbol{y}$$

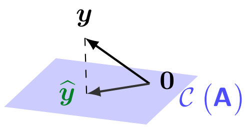
$\mathbf{P}$: Simétrica e idempotente.

F27

(**Lección** 13) T-7 Matriz proyección

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}}$$

La proyección $\mathbf{P}\boldsymbol{y}$ *es el punto* $\widehat{\boldsymbol{y}}$ *de* $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ *más próximo a* $\boldsymbol{y}$

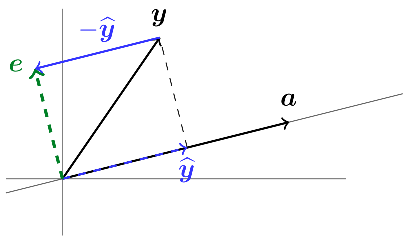


Casos extremos:

- Si $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ entonces $\mathbf{P}\boldsymbol{y} =$
- Si $\boldsymbol{y} \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ entonces $\mathbf{P}\boldsymbol{y} =$

F28

(**Lección** 13) T-8 Proyección sobre una recta



recta= $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$; $\quad \mathbf{A} = \left[\boldsymbol{a}\right]$; $\quad \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$

Queremos encontrar el punto $\widehat{\boldsymbol{y}}$ sobre la linea más próximo a $\boldsymbol{y}$

$\widehat{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{C}\left(\left[\boldsymbol{a}\right]\right) \quad \perp \quad \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{N}\left(\left[\boldsymbol{a}\right]^{\mathsf{T}}\right)$.

$\widehat{\boldsymbol{y}}$ es algún múltiplo de $\boldsymbol{a}$: $\qquad \widehat{\boldsymbol{y}} = \left[\boldsymbol{a}\right](\widehat{x},)$

Cómo: $\qquad \left[\boldsymbol{a}\right]^{\mathsf{T}}\left[\boldsymbol{a}\right]\widehat{\boldsymbol{x}} = \left[\boldsymbol{a}\right]^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}$

La solución $\qquad \widehat{\boldsymbol{x}} = \quad \left(\left[\boldsymbol{a}\right]^{\mathsf{T}}\left[\boldsymbol{a}\right]\right)^{-1}\left[\boldsymbol{a}\right]^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}$

La proyección $\qquad \widehat{\boldsymbol{y}} = \left[\boldsymbol{a}\right]\widehat{\boldsymbol{x}} = \left[\boldsymbol{a}\right]\left(\left[\boldsymbol{a}\right]^{\mathsf{T}}\left[\boldsymbol{a}\right]\right)^{-1}\left[\boldsymbol{a}\right]^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}$

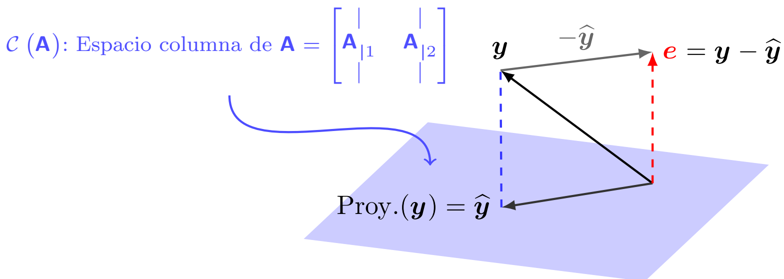
La matriz de proyección $\qquad \mathbf{P} = \left[\boldsymbol{a}\right]\left(\left[\boldsymbol{a}\right]^{\mathsf{T}}\left[\boldsymbol{a}\right]\right)^{-1}\left[\boldsymbol{a}\right]^{\mathsf{T}}$

F29

(**Lección** 13) T-9 Proyección sobre un plano

¿Por qué proyectar?
Así que resolveremos

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \Big(\text{Proy. de } \boldsymbol{y} \text{ sobre } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)\Big).$$

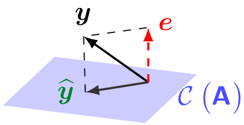


$(\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{e} \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \qquad$ . . . ese es el hecho fundamental.

F30

(**Lección** 13) T-10 Ecuaciones normales

¿Qué es la proyección de $\boldsymbol{y}$ sobre el espacio columna de $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{A}_{|1} & \mathbf{A}_{|2} \\ | & | \end{bmatrix}$?



$$\widehat{\boldsymbol{y}} = (\mathbf{A}_{|1})\widehat{x_1} + (\mathbf{A}_{|2})\widehat{x_2} \;=\; \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$$

"Encontrar una combinación de columnas tal que $\boldsymbol{e}\perp\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$*"*

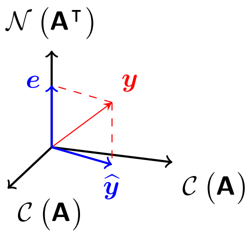
$$\boldsymbol{e}\perp\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{e}\in$$

$$\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{e} = \mathbf{A}^{\intercal}(\boldsymbol{y}-\widehat{\boldsymbol{y}}) \quad=\quad \mathbf{A}^{\intercal}(\boldsymbol{y}-\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y}}$$

F31

(**Lección** 13) T-11 Dos proyecciones

$\boldsymbol{y}$ tiene un componente $\widehat{\boldsymbol{y}}$ en $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, y otro $\boldsymbol{e}$ en $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)^{\perp}$.



$$\widehat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{y}$$

$\widehat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{P}\boldsymbol{y}$ es la proyección sobre $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$

$\boldsymbol{e} = (\mathbf{I}-\mathbf{P})\boldsymbol{y}$ es la proyección sobre $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)^{\perp}$

F32

Fin de la lección

Problemas de la Lección 13

(L-13) PROBLEMA 1. Proyecte el primer vector ($\boldsymbol{b}$) sobre la recta generada por el segundo vector ($\boldsymbol{a}$). Compruebe que $\boldsymbol{e}$ es perpendicular a $\boldsymbol{a}$. Encuentre la matriz proyección $\mathbf{P} = \left[\boldsymbol{a}\right]\left(\left[\boldsymbol{a}\right]^{\intercal}\left[\boldsymbol{a}\right]\right)^{-1}\left[\boldsymbol{a}\right]^{\intercal}$ sobre la recta generada por cada vector $\boldsymbol{a}$. Verifique en cada caso que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. Multiplique $\mathbf{P}\boldsymbol{b}$ en cada caso para calcular la proyección $\widehat{\boldsymbol{b}}$.

(a) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

(c) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

(d) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}3\\3\\12\end{pmatrix}$.

(Hefferon, 2008, ejercicio 1.6 del conjunto de problemas VI.1.)

(L-13) Problema 2. Proyecte ortogonalmente el vector sobre la recta.

(a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, La recta : $\left\{ \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-3\\1\\-3\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}$.

(b) $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, la recta descrita por la ecuación $y = 3x$.

(L-13) Problema 3. Aunque los dibujos nos han guiado el desarrollo del tema, no estamos restringidos a espacios que podamos dibujar. En $\mathbb{R}^4$ proyecte el vector sobre la recta.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix};\quad \left\{ \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}.$$

(L-13) Problema 4.

(a) Proyecte el vector $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1, & 1,\end{pmatrix}$ sobre las rectas generadas por $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}1, & 0,\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}1, & 2,\end{pmatrix}$. Sume las proyecciones: $\widehat{\boldsymbol{b}}_1 + \widehat{\boldsymbol{b}}_2$. Las proyecciones no suman $\boldsymbol{b}$ porque los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ no son ortogonales.

(b) La proyección de $\boldsymbol{b}$ sobre el plano generado por $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ será igual a $\boldsymbol{b}$. Encuentre $\mathsf{P} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\intercal$ para $\mathsf{A} = [\boldsymbol{a}_1;\ \boldsymbol{a}_2;]$.

(Strang, 2003, ejercicio 8–9 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-13) Problema 5.

(a) Si $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$ demuestre que $(\mathsf{I}-\mathsf{P})^2 = \mathsf{I}-\mathsf{P}$. Cuando P proyecta sobre el espacio columna de A, $(\mathsf{I}-\mathsf{P})$ proyecta sobre el ________.

(b) Si $\mathsf{P}^\intercal = \mathsf{P}$ demuestre que $(\mathsf{I}-\mathsf{P})^\intercal = \mathsf{I}-\mathsf{P}$.

(Strang, 2003, ejercicio 17 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-13) Problema 6.

(a) Calcule las matrices proyección $\mathsf{P} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^\intercal[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^\intercal$ sobre las rectas que pasan por $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}-1, & 2, & 2,\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}2, & 2, & -1,\end{pmatrix}$. Compruebe que $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$. Multiplique esas matrices proyección y explique por qué su producto $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2$ es lo que es.

(b) Proyecte $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1, & 0, & 0,\end{pmatrix}$ sobre las rectas generadas por $\boldsymbol{a}_1$, y $\boldsymbol{a}_2$ y también por $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix}2, & -1, & 2,\end{pmatrix}$. Sume las tres proyecciones $\widehat{\boldsymbol{b}}_1 + \widehat{\boldsymbol{b}}_2 + \widehat{\boldsymbol{b}}_3$.

(c) Encuentre la matriz proyección P_3 sobre $\mathcal{L}\left([\boldsymbol{a}_3;]\right) = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}2, & -1, & 2,\end{pmatrix};\right]\right)$. Verifique que $\mathsf{P}_1+\mathsf{P}_2+\mathsf{P}_3 = \mathsf{I}$. ¡La base $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ es ortogonal!

(Strang, 2003, ejercicio 5–7 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-13) Problema 7. Proyecte $\boldsymbol{b}$ sobre el espacio columna de A resolviendo $\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathsf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$ y después calculando $\widehat{\boldsymbol{b}} = \mathsf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$. Encuentre $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}}$.

(a) $\mathsf{A}_1 = \begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

(b) $\mathsf{A}_2 = \begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix}$

(c) Calcule las matrices proyección P_1 y P_2 sobre los espacios columna. Verifique que $\mathsf{P}_1\boldsymbol{b}_1$ da la primera proyección $\widehat{\boldsymbol{b}}_1$. Verifique también que $(\mathsf{P}_2)^2 = \mathsf{P}_2$.

(Strang, 2003, ejercicio 11–12 del conjunto de problemas 4.2.)

Fin de los Problemas de la Lección 13

References

Hefferon, J. (2008). *Linear Algebra*. Jim Hefferon, Colchester, Vermont USA. This text is Free. URL ftp://joshua.smcvt.edu/pub/hefferon/book/book.pdf

Lang, S. (1986). *Introduction to Linear Algebra*. Springer-Verlag, second ed.

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.

Soluciones

(L-11) Problema 1. Puesto que $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}^\intercal\right) \perp \mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right)$, tan sólo necesitamos encontrar el complemento ortogonal del espacio generado por $\begin{pmatrix}1, & 3, & -1\end{pmatrix}$, o lo que es lo mismo, el espacio nulo de $\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\end{bmatrix}$.

$$\left[\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathsf{L}}{\mathsf{E}}\right]$$

Por tanto, el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $\begin{pmatrix}1, & 3, & -1\end{pmatrix}$ es

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

Con NAcAL hay varias formas de obtener dicho subespacio. Hay dos formas de invocar `SubEspacio`; si el argumento es un `Sistema` de `Vector`es de $\mathbb{R}^n$, nos devuelve el `SubEspacio` generado por dicho sistema.

```
a = Vector([-3,1,0])
b = Vector([1,0,1])
SubEspacio(Sistema([a,b]))
```

Si el argumento es una `Matrix`, nos devuelve el espacio nulo de dicha matriz

```
v = Vector([1,3,-1])
A = ~Matrix([v])     # trasponemos para obtener la matriz fila
SubEspacio(A)
```

Pero como nos piden el complemento ortogonal del subespacio generado por el vector, secillamente podemos escribir (pues en este contexto significa el complemento ortogonal):

```
~SubEspacio(Sistema([v]))
```

La representación mediante ecuaciones paramétricas o cartesianas no es única, de hecho, obtenemos unas ecuaciones paramétricas diferentes para los sistemas $\left[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b};\right]$ (visto más arriba) y $\left[\boldsymbol{b}; \boldsymbol{a};\right]$

```
SubEspacio(Sistema([b,a]))
```

Por tanto, es útil poder comprobar si dos subespacios son iguales

```
~SubEspacio(Sistema([v])) == SubEspacio(Sistema([b,a]))
```

□

(L-11) Problema 2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Por tanto, la respuesta es si, el vector $\boldsymbol{0}$.

□

(L-11) Problema 3(a) $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

□

(L-11) Problema 3(b) $\sqrt{5}$

□

(L-11) Problema 3(c) $\sqrt{18}$

□

(L-11) Problema 3(d) 0

□

(L-11) Problema 3(e) $\sqrt{3}$

□

(L-11) Problema 4. $\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 4 + 1 + 0 + 16 + 4 = 25$ así que tomamos $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|} \cdot \boldsymbol{v} = (\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}, 0, \frac{4}{5}, \frac{-2}{5})$.

□

(L-11) Problema 5. Su producto punto debe ser cero, por tanto $(k)(4) + (1)(3) = 0$ por tanto $k = -3/4$.

$\square$

(L-11) Problema 6(a) $\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & -3 & b\\ -3 & 5 & c\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$;

Así pues, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\end{bmatrix}$.

$\square$

(L-11) Problema 6(b) Imposible, $\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$ no es ortogonal a $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\square$

(L-11) Problema 6(c) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, y $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ pertence a $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$. Es imposible: estos vectores no son perpendiculares.

$\square$

(L-11) Problema 6(d) Se pide que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Por ejemplo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, o $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

$\square$

(L-11) Problema 6(e) $\begin{pmatrix}1, & 1, & 1,\end{pmatrix}$ debe pertencer simultánemante al espacio nulo, $\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}$; y al espacio fila, $\begin{pmatrix}1, & 1, & 1,\end{pmatrix}\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1, & 1, & 1,\end{pmatrix}$, ...no existe tal matriz.

$\square$

(L-11) Problema 7. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, las columnas $\mathbf{B}$ están contenidas en el *espacio nulo* de $\mathbf{A}$. Las filas de $\mathbf{A}$ están en el *espacio nulo por la izquierda de* $\mathbf{B}$.

Si rango=2, los espacios fila y columna de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen dimensión 2 ($\mathbf{A}$ tiene dos filas linealmente independientes y $\mathbf{B}$ tiene dos columnas linealmente independientes). Pero entonces $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{N}(\mathbf{B}^\intercal)$ tienen dimensión 1 (una sola columna libre para $\mathbf{A}$ y una sola fila libre para $\mathbf{B}$).

Esto nos lleva ana contradicción: no es posible que dos filas linealmente independientes pertenezcan a $\mathcal{N}(\mathbf{B}^\intercal)$ que tiene dimensión 1. Del mismo modo, no es posible que dos columnas linealmente independientes pertenezcan a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ que tiene dimensión 1.

Para que esto fuera posible los cuatro subespacios deberían tener dimensión 2 (dos vectores linealmente independientes en cada espacio), pero esto es imposible para una matriz de orden 3 por 3.

$\square$

(L-11) Problema 8. No. Por ejemplo:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 1 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$, pero $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{w}$.

$\square$

(L-11) Problema 9(a) Por una parte $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$ por otra parte $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{y} \perp\in \mathcal{C}(\mathbf{A})$.

Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución y $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{y}$ es perpendicular a $\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{b} = \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{b} = 0.$$

$\square$

(L-11) Problema 9(b) Si $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ entonces $\boldsymbol{y}\mathbf{A} = \boldsymbol{c}$, además $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; entonces $\boldsymbol{x}$ es perpendicular a $\boldsymbol{c}$.

$\boldsymbol{c}$ pertenece al espacio fila, y por tanto es perpendicular a $\boldsymbol{x}$ que pertenece al espacio nulo. Otra forma de verlo:

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\cdot\mathbf{0} = 0.$$

$\square$

(L-11) Problema 10. Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son perpendiculares, entonces

$$\|(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\|^2 = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} + 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$$

(la tercera igualdad es cierta debido a que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$).

□

(L-11) Problema 11. Podemos tomar como fila de la matriz $\mathbf{A}$ una combinación lineal de una base del espacio nulo por la izquierda de la matriz $\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$. Así pues,

$$\left[\begin{array}{ccc}1&2&4\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\\hline 1&-2&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix}-2&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix}$$

y entonces

$$\underset{1\times 3}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6&1&1\end{bmatrix}$$

cumple el requisito. Una matriz 3 por 3 con el mismo espacio nulo es, por ejemplo

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2&1&0\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{bmatrix}$$

□

(L-11) Problema 12(a) Any column of $\mathbf{A}$ is orthogonal to the two special solutions given in the problem. That is,

$$\left[\begin{array}{cccc}3&1&0&0\\6&0&2&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{4}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}\\{[(-6)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}}} \left[\begin{array}{cccc}0&1&0&0\\0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0\\-3&1&0&0\\0&0&1&0\\-6&0&-2&1\end{array}\right] \quad \text{so} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix}1&0\\-3&0\\0&1\\-6&-2\end{bmatrix}.$$

□

(L-11) Problema 12(b) $\mathbf{R}$ has two pivots, and therefore $\mathbf{A}$ has two pivots and $r(\mathbf{A})=2$. Two independent rows in $\mathbb{R}^2$ span $\mathbb{R}^2$, so $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=\mathbb{R}^2$.

□

(L-11) Problema 12(c) Since rows 1 and 3 are pivot rows, then $\boldsymbol{x}_p = (3, \quad 0, \quad 6, \quad 0,)$ is a particular solution, so the complete solution is

$$\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = (3, \quad 0, \quad 6, \quad 0,) + \boldsymbol{p}\begin{bmatrix}3&1&0&0\\6&0&2&1\end{bmatrix}\right\}$$

since

$$(3, \quad 0, \quad 6, \quad 0,)\begin{bmatrix}1&0\\-3&0\\0&1\\-6&-2\end{bmatrix} = (3, \quad 6,)$$

and

$$\boldsymbol{p}\begin{bmatrix}3&1&0&0\\6&0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-3&0\\0&1\\-6&-2\end{bmatrix} = \boldsymbol{p}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} = (0, \quad 0,).$$

□

(L-11) Problema 12(d) It is easy to see that

$$-2\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

If you dont see that, we can always use gaussian elimination

$$\left[\begin{array}{ccc}-3&0&-6\\0&1&-2\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\left[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}\right]]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}-3&0&0\\0&1&-2\\\hline 1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\left[(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}\right]]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}-3&0&0\\0&1&0\\\hline 1&0&-2\\0&1&2\\0&0&1\end{array}\right].$$

□

(L-11) Problema 13(a)

$$\boldsymbol{b}\;=\;\mathbf{A}\boldsymbol{x}\;=\;\mathbf{A}\big(\boldsymbol{x}_f+\boldsymbol{x}_n\big)\;=\;\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_f)+\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_n)\;=\;\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_f)+\mathbf{0}.$$

□

(L-11) Problema 13(b) Si $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_f)=\boldsymbol{b}$ y $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_f)=\boldsymbol{b}$, entonces $\mathbf{A}\big(\boldsymbol{x}_f-\boldsymbol{v}_f\big)=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

Por tanto $\big(\boldsymbol{x}_f-\boldsymbol{v}_f\big)$ pertenece simultáneamente al conjunto de soluciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ y al subespacio generado por las filas de $\mathbf{A}$ (pues tanto $\boldsymbol{x}_f$ como $\boldsymbol{v}_f$ son combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$).

Dado que las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ son perpendiculares a las filas de $\mathbf{A}$, el vector $\mathbf{0}$ es el único vector que simultáneamente es solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ y combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$. Por tanto, $\big(\boldsymbol{x}_f-\boldsymbol{v}_f\big)=\mathbf{0}$. Es decir $\boldsymbol{x}_f$ y $\boldsymbol{v}_f$ son iguales.

□

(L-11) Problema 13(c) Resolvamos $\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_f=\begin{pmatrix}14\\9\end{pmatrix}$. Como $\boldsymbol{x}_f=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\3&-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$, tenemos que

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_f\;=\;\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\3&-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\;=\;\begin{pmatrix}14\\9\end{pmatrix}$$

es decir $\begin{bmatrix}14&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\9\end{pmatrix}$, que implica $c=1$ y $d=3$. Así que $\boldsymbol{x}_f=1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}$.

□

(L-12) Problema 1(a) Encontremos primero un vector paralelo a la recta:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

Así que una representación paramétrica es

$$\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1,\;\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}.$$

Con NAcAL, los puntos, rectas, planos, etc. (es decir, regiones planas en $\mathbb{R}^n$) se crean con `EAfin`. Los argumentos necesarios para `EAfin` son un `SubEspacio` y un `Vector`. Si en lugar de un `SubEspacio` se da un `Sistema` de `Vectores` de $\mathbb{R}^n$ o una `Matrix`, NAcAL usará dichos argumentos para generar el subespacio necesario (el subespacio generado por el sistema en el primer caso, o el espacio nulo de la matriz en el segundo).

Así, en este caso obtenemos las ecuaciones de la recta requerida con:

```
p = Vector([1,2])
q = Vector([3,1])
S = SubEspacio(Sistema([p-q]))
R = EAfin(S,p)
Math( R.EcParametricas() )  # Por ahora solo quiero visualizar las Ec. Paramétricas de R
```

□

(L-12) Problema 1(b) Buscamos multiplicar $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_P+a\boldsymbol{v}$ por un vector perpendicular a $\boldsymbol{v}$. Lo haremos mediante la eliminación gaussiana:

$$\left[\begin{array}{cc}-2&1\\\hline x&y\\\hline 1&2\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(2)\mathbf{2}]\\[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cc}-2&0\\\hline x&x+2y\\\hline 1&5\end{array}\right]\;\Rightarrow\;\text{el conjunto de soluciones de }\big\{x+2y=5\;;$$

y por tanto la recta es:

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = (5,) \right\}.$$

Vamos a reproducir el cálculo de lapiz y papel con NAcAL.

```
x,y = sympy.symbols('x y')
N = ~Matrix([p-q])
M = N.apila(~Matrix([Vector([x,y])]),1).apila(~Matrix([p]),1)
Math( rprElim(M, Elim(N).pasos) )
```

Por tanto la recta es el conjunto de vectores que resuelven el siguiente Sistema de Ecuaciones Lineales:

```
A = Matrix([[1,2]])
b = Vector([5])
SEL(A,b).eafin
```

(fíjese que NAcAL guarda como un atributo (de tipo `EAfin`) el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones)

□

(L-12) Problema 2(a) Encontremos primero un vector en la misma direción que la recta

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = (3, \quad -7, \quad -4,).$$

Así que una representación paramétrica es

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = (1, \quad -3, \quad 1,) + \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(L-12) Problema 2(b)

$$\left[\begin{array}{ccc} 3 & -7 & -4 \\ \hline x & y & z \\ \hline 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{2}] \\ [(7)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(3)\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ \hline x & 7x+3y & 4x+3z \\ \hline 1 & -2 & 7 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 7x + 3y & = -2 \\ 4x \quad\quad + 3z & = 7 \end{cases};$$

Por tanto las ecuaciones cartesianas de la recta son:

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

Este sistema cuenta con dos ecuaciones. Si las tomamos por separado corresponden a dos planos en $\mathbb{R}^3$.

```
p1=SEL(Matrix([[7,3,0]]),Vector([-2])).eafin
p1
```

y

```
p1=SEL(Matrix([[7,3,0]]),Vector([-2])).eafin
p1
```

(sabemos que son dos planos, pues las ecuaciones paramétricas tienen dos parámentos, y las matrices de coeficientes de las ecuaciones cartesianas tiene dos columnas libres) La recta del ejercicio corresponde a la intersección de ambos planos, es decir, a los puntos que pertenencen a ambos planos:

```
p1 & p2
```

□

(L-12) Problema 3(a) Puesto que es paralela a la recta $2x - 3y = 5$, el vector director es común, es decir, necesitamos encontrar un vector $\boldsymbol{v}$ del espacio nulo de la matriz de coeficientes del sistema; por ejemplo:

$$\left[\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(6)\mathbf{1}] \\ [(2)\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc} 6 & -6 \\ \hline 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{cc} 6 & 0 \\ \hline 3 & \color{blue}{3} \\ 0 & \color{blue}{2} \end{array}\right]$$

por tanto $\quad \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \right\}$

$\square$

(L-12) Problema 3(b) Basta sustituir (x, y) por el punto requerido $(1, 1)$ para obtener el "vector" del lado derecho $\boldsymbol{b}$.

$$2x - 3y = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3y = -1.$$

Por tanto

$$\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(L-12) Problema 4(a) $\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\; \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0, & 1, & 1,\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}.$

$\square$

(L-12) Problema 4(b)

$$\left[\begin{array}{ccc}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ \hline x & y & z\\ \hline 0 & 1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ \hline x & -x+y & z\\ \hline 0 & 1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \hline x & -x+y & 2x-2y+z\\ \hline 0 & 1 & -1\end{array}\right]$$

Por tanto: $\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}2 & -2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}-1,\end{pmatrix} \right\}.$

```
p = Vector([0,1,1])
v = Vector([0,1,2])
w = Vector([1,1,0])
S = SubEspacio(Sistema([v,w]))
EAfin(S,p)
```

$\square$

(L-12) Problema 5(a) Puesto que nos piden un plano en $\mathbb{R}^3$, en este caso necesitamos encontrar dos vectores ortogonales a $\begin{pmatrix}3, & 1, & 1,\end{pmatrix}$. Por ejemplo, $\begin{pmatrix}-1, & 3, & 0,\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0, & -1, & 1,\end{pmatrix}$. Por tanto,

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}.$$

$\square$

(L-12) Problema 5(b) En este caso ya conocemos, por el enunciado, un vector ortogonal a la parte paramétrica; así pues:

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{s}; \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = (10,);$$

$$\Longrightarrow \qquad \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}10,\end{pmatrix} \right\}.$$

```
p = Vector([2,1,3])
v = Vector([3,1,1])
S =  SubEspacio(~Matrix([v])) # esta es una alternativa
#S = ~SubEspacio(Sistema([v])) # esta es otra alternativa
EAfin(S,p)
```

$\square$

(L-12) Problema 6(a) La solución completa es:

$$\boldsymbol{b} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\; \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-2\\4\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}$$

```
A = Matrix([ [1,2,0,1,1], [0,0,2,3,1], [0,0,1,4,2], [0,0,0,1,1] ])
b = Vector( [1,0,1,2] )
SEL (A, b, 1)
```

$\square$

(L-12) Problema 6(b) Puesto que la matriz de coeficientes tiene cinco columnas, el sistema tiene cinco incognitas, así pues, los vectores que pertenecen al conjunto de soluciones tienen cinco componentes (un número por columna). Así pues, el conjunto de soluciones es un subconjunto de $\mathbb{R}^5$; Y en este caso, dicho conjunto es una recta, ya que la dimensión de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es uno. Así pues, un vector director es cualquier múltiplo (excepto el vector nulo $\mathbf{0}$) de la solución especial que hemos encontrado: $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}-2, & 1, & 0, & 0, & 0,\end{pmatrix}$. Y uno de los puntos por donde pasa la recta es la solución particular que obtuvimos al resolver el sistema: $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix}-1, & 0, & 1, & -2, & 4,\end{pmatrix}$.

$\square$

(L-12) Problema 6(c)

$$\left[\begin{array}{c}[\boldsymbol{n}]^{\mathsf{T}}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc}-2&1&0&0&0\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccccc}-2&0&0&0&0\\ \hline 1&1&0&0&0\\ 0&2&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]$$

Las cuatro últimas columnas de la matriz $\mathbf{E}$ son vectores perpendiculares a $\boldsymbol{n}$; y es evidente que son cuatro, y que son linealmente independientes, así que son una base del subespacio perpendicular a $\boldsymbol{n}$.

$\square$

(L-13) Problema 1(a)

$$\widehat{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^{\mathsf{T}}[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}24\\16\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{13}\begin{pmatrix}24\\16\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix}3, & 2,\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\frac{1}{13} = 0\frac{1}{13} = 0.$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}9&6\\6&4\end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^2 = \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{13}\begin{bmatrix}117&78\\78&52\end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}9&6\\6&4\end{bmatrix} = \mathbf{P};$$

$$\mathbf{P}\boldsymbol{b} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}9&6\\6&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}24\\16\end{pmatrix}.$$

```
a      = Vector([3,2]);  b = Vector([2,1]);   A = Matrix([a])
P      = A*InvMat((~A)*A)*(~A)
bhat   = P*b;    e = b-bhat
Sistema([bhat,e,P])
```

$\square$

(L-13) Problema 1(b)

$$\widehat{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^{\mathsf{T}}[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}3&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}18\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix}18\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}0\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix}3, & 0,\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\9\end{pmatrix}\frac{1}{9} = 0\frac{1}{9} = 0.$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}9&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \mathbf{P};$$

$$\mathbf{P}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

(L-13) Problema 1(c)

$$\widehat{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^\intercal[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^\intercal\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & -1, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 23 \end{pmatrix} \frac{1}{6} = 0\frac{1}{6} = 0.$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 12 & -6 \\ 12 & 24 & -12 \\ -6 & -12 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{P}\boldsymbol{b} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

(L-13) Problema 1(d)

$$\widehat{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^\intercal[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^\intercal\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{162} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{0} = 0.$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 16 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^2 = \frac{1}{18}\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 18 & 18 & 72 \\ 18 & 18 & 72 \\ 72 & 72 & 288 \end{bmatrix} = \mathbf{P};$$

$$\mathbf{P}\boldsymbol{b} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\square$

(L-13) Problema 2(a)

$$\widehat{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}-3\\1\\-3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-3&1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\1\\-3\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}-3&1&-3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{19}\begin{bmatrix}-3\\1\\-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1&-3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix}9&-3&9\\-3&1&-3\\9&-3&9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$$

```
b      = Vector([2,-1,4]); a = Vector([-3,1,-3]); A = Matrix([a])
P      = A*InvMat((~A)*A)*(~A)       # Matriz proyección
bhat1  = P*b                         # Alternativa 1
x      = SEL( (~A)*A, (~A)*b ).solP # Solución Ecuaciones Normales
bhat2  = A*x                         # Alternativa 2
Sistema([bhat1,bhat2])
```

□

(L-13) Problema 2(b) La recta es el conjunto de soluciónes a $3x - y = 0$:

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc}3&-1\\ \hline 1&0\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(3)\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc}3&0\\ \hline 1&1\\0&3\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathsf{L}\\ \hline \mathsf{E}\end{array}\right];$$

así que debemos proyectar sobre la recta

$$\text{La recta}: \left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

$$\widehat{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&3\\3&9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix};$$

```
b      = Vector([-1,-1])
B      = Matrix([[3,-1]])

a      = Homogenea(B).sgen|1
# a      = Homogenea(B).enulo.sgen|1 # alternativa equivalente
# a      = EAfin(B, V0(2)).S.sgen|1  # alternativa equivalente

A      = Matrix([a])
P      = A*InvMat((~A)*A)*(~A)       # Matriz proyección
bhat1  = P*b                         # Alternativa 1
x      = SEL( (~A)*A, (~A)*b ).solP # Solución Ecuaciones Normales
bhat2  = A*x                         # Alternativa 2
Sistema([bhat1, bhat2])
```

□

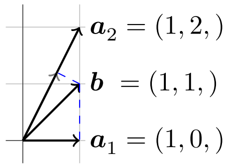
(L-13) Problema 3.

$$\widehat{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-1&1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}-1&1&-1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&-1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3\\3\\-3\\3\end{pmatrix};$$

□

(L-13) Problema 4(a) $\widehat{\boldsymbol{b}_1} = (1,\ \ 0,)$ y $\widehat{\boldsymbol{b}_2} = (\frac{3}{5},\ \ \frac{6}{5},)$. Entonces $\widehat{\boldsymbol{b}_1} + \widehat{\boldsymbol{b}_2} \neq \boldsymbol{b}$.




```
b  = Vector([1,1])
a1 = Vector([1,0])
a2 = Vector([1,2])

A1 = Matrix([a1])
bhat1 = A1 * SEL((~A1)*A1,(~A1*b)).solP

A2 = Matrix([a2])
bhat2 = A2 * SEL((~A2)*A2,(~A2*b)).solP
Sistema([bhat1, bhat2])
```

□

(L-13) Problema 4(b) Puesto que A es invertible, la matrix proyección $\mathsf{P} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\intercal = \mathsf{I}$ proyecta sobre todo el espacio $\mathbb{R}^2$. Por tanto $\widehat{\boldsymbol{b}_1} = \mathsf{P}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1$.

```
A3 = Matrix([a1,a2])
P  = A3*InvMat((~A3)*A3)*(~A3)
bhat3 = P*b
Sistema([bhat1,bhat2,bhat3,P])
```

□

(L-13) Problema 5(a) $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$ y por tanto $(\mathsf{I}-\mathsf{P})^2 = (\mathsf{I}-\mathsf{P})(\mathsf{I}-\mathsf{P}) = \mathsf{I} - \mathsf{PI} - \mathsf{IP} + \mathsf{P}^2 = \mathsf{I} - \mathsf{P}$.

Cuando P proyecta sobre el espacio columna de A, $(\mathsf{I}-\mathsf{P})$ proyecta sobre el *espacio nulo por la izquierda* de A.

□

(L-13) Problema 5(b) $\mathsf{P}^\intercal = \mathsf{P}$ y por tanto $(\mathsf{I}-\mathsf{P})^\intercal = (\mathsf{I}^\intercal - \mathsf{P}^\intercal) = \mathsf{I} - \mathsf{P}$.

□

(L-13) Problema 6(a)

$$\mathsf{P}_1 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \mathsf{P}_1 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 =$ matriz cero debido a que $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$.

□

(L-13) Problema 6(b) $\widehat{\boldsymbol{b}_1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1, & -2, & -2,\end{pmatrix}$, $\widehat{\boldsymbol{b}_2} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4, & 4, & -2,\end{pmatrix}$, $\widehat{\boldsymbol{b}_3} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4, & -2, & 4,\end{pmatrix}$. Entonces $\widehat{\boldsymbol{b}_1} + \widehat{\boldsymbol{b}_2} + \widehat{\boldsymbol{b}_3} = \begin{pmatrix}1, & 0, & 0,\end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$. Nótese que $\boldsymbol{a}_3 \perp \boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_3 \perp \boldsymbol{a}_2$.

□

(L-13) Problema 6(c)

$$\mathsf{P}_1 \;+\; \mathsf{P}_2 \;+\; \mathsf{P}_3 \quad = \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad = \quad \mathsf{I}.$$

□

(L-13) Problema 7(a) $\widehat{\boldsymbol{b}_1} = \mathsf{A}_1(\mathsf{A}_1^\intercal\mathsf{A}_1)^{-1}(\mathsf{A}_1^\intercal)\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix}2, & 3, & 0,\end{pmatrix}$ y $\widehat{[1]}e = \begin{pmatrix}0, & 0, & 4,\end{pmatrix}$.

□

(L-13) Problema 7(b) $\widehat{\boldsymbol{b}_2} = \mathsf{A}_2(\mathsf{A}_2^\intercal\mathsf{A}_2)^{-1}(\mathsf{A}_2^\intercal)\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix}4, & 4, & 6,\end{pmatrix}$ y $\widehat{\boldsymbol{e}_2} = \begin{pmatrix}0, & 0, & 0,\end{pmatrix}$.

□

(L-13) Problema 7(c)

$$\mathsf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ proyección sobre el plano } xy. \qquad \mathsf{P}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = (\mathsf{P}_2)^2.$$

□