Repaso primer examen intermedio

Actualizado el: 29 de marzo de 2023

Tabla de Contenido

1. Comentarios generales

El examen cubre las lecciones 1 a 10. Las cuestiones cubiertas por este examen (de manera muy resumida):

1. Eliminación y operaciones con matrices (eliminación, pivotes, etcetera; distintos puntos de vista para $\mathbf{AB}$, para $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}\mathbf{A}$, e.g. como combinaciones lineales de las columnas, o de las filas, etc.)..

2. Matrices elementales y matrices inversas (operaciones con las filas = multiplicar por la izquierda de una matriz, operaciones con las columnas = multiplicar por la derecha de una matriz. Eliminación, eliminación gaussiana, eliminación Gauss-Jordan y qué pasa cuando se repiten los mismos pasos de eliminación sobre $\mathbf{I}$).

3. Permutaciones, Productos escalares, and Traspuestas, $(\mathbf{AB})^\intercal = \mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}^\intercal$.

4. Espacios Vectoriales y Subespacios (por ejemplo, el espacio columna y el espacio nulo, qué es un subespacio en general. Otros tipos de espacios y subespacios vectoriales distintos de $\mathbb{R}^n$ e.g. usando matrices y funciones).

5. Resolución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (el espacio nulo), formas pre-escalonadas $\mathbf{K}$ (rango, columnas libres, columnas pivote, soluciones especiales (las encontradas por eliminación), etcetera).

6. Resolución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (soluciones particulares, relaciones entre rango/espacio nulo/espacio columna y la existencia y la unicidad de las soluciones). La interpretación geométrica..

7. Independencia lineal [punto clave: las columnas de una matriz $\mathbf{A}$ son independientes si $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \{\mathbf{0}\}$], bases (un conjunto independiente de vectores que genera todo el espacio), y dimensión de subespacios (el número de vectores en una base).

8. Los cuatro espacios fundamentales [Puntos clave: sus dimensiones para un rango r dado y una matriz $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$, su relación con las soluciones (si existen) de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ y cómo/por qué podemos encontrar bases mediante el procedimiento de eliminación gaussiana].

El método central en estos temas es la eliminación. Usted debe conocer la eliminación hacia delante y hacia atrás. Literalmente: se le pueden indicar los pasos finales y preguntarle cómo volver hacia atrás, o preguntarle qué propiedades de $\mathbf{A}$ puede inferir a la luz de los resultados de la eliminación. Debe conocer la relación entre eliminación y los espacios nulos y los espacios columna: el espacio columna no cambia con la elimnación por columnas... así que puede comprobar que $\boldsymbol{b}$ pertence al espacio columna de $\mathbf{A}$ por eliminación (si la elimnación produce una última columna de ceros en la matriz ampliada $\left[\mathbf{A}| -\boldsymbol{b}\right]$). La eliminación por columnas tampoco cambia el espacio nulo por la izquierda, por lo que se puede resolver $\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ para obtener $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$.[1] Debe comprender porqué funciona el método de elimnación, saber operar no basta. Debe conocer cómo se relaciona la eliminación con las matrices elementales..

Como de costumbre, las preguntas de examen pueden ser formuladas al revés, dando la vuelta ligeramente a los conceptos, e.g. mostrando el final y solicitando que se trabaje hacia atrás, o preguntando sobre el mismo concepto pero en un contexto ligeramente distinto. Quiero comprobar que usted ha asimilado los conceptos, en lugar de limitarse a memorizar un algoritmo sin saber por qué ese método funciona y de donde viene.

[1] debe tener en cuenta que si estudia la elimnación por filas (como en cualquier libro de texto) verá que no cambia el espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, por lo que podemos resolver $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ para obtener $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, mientras que este procedimiento si cambia el espacio columna... pero podemos comprobar que $\boldsymbol{b}$ pertence al espacio columna de $\mathbf{A}$ por eliminación por filas (si la elimnación por filas produce una fila de ceros en $\mathbf{A}$, los mismos pasos deben producir una fila de ceros en $\boldsymbol{b}$, si es que $\boldsymbol{b}$ pertence al espacio columna).

2. Exámenes pasados

A continuación puede encontrar los exámenes intermedios que han sido puestos en el pasado. Hasta el curso 12/13 el método explicado en clase fué la eliminación gaussiana por filas (como en los libros de texto). Por ello algunas preguntas de esos cursos están pensadas asumiendo elimnación por filas. Aquí he modificado algunos ejercicios para ajustar los enunciados al método de eliminación por columnas.

La cabecera que aparce a continuación es como la que verá en sus exámenes intermedios. **Lea atentamente las instrucciones del examen... le ayudara a no cometer errores que le perjudiquen.**

Repaso primer examen intermedio

Calificación

1.-

2.-

3.-

4.-

Nombre: ____________________

INSTRUCCIONES

- Puede emplear papel adicional para realizar cálculos y/o ensayar sus respuestas... *pero*...
- **Ponga su nombre en todas las hojas** que emplee.
- Lea atentamente cada cuestión y **conteste lo que se le pide**. Cada cuestión *debe mostrar sus cálculos o razonamientos* para poder ser calificada. Explique sus respuestas completa y cláramente (debe ser posible distinguir entre quien "adivina" la respuesta y quien entiende la materia). *Si añade afirmaciones falsas puede perder puntos.* Añadir información cierta pero no solicitada no puntúa.
- **Está prohibido** el uso de calculadoras y dispositivos electrónicos, libros o notas de cualquier clase.

2.1. Grupo B curso 22/23

EJERCICIO 1.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre la inversa de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ por eliminación Gauss-Jordan (verifique su respuesta).

(b) (0.5^{pts}) Sin hacer de nuevo eliminación, escriba la inversa de $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

MIT Course 18.06 Exam 1, October 5, 2015

EJERCICIO 2. Considere $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 4 & 11 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Escriba una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

(b) (0.5^{pts}) Describa $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

(c) (1^{pts}) Resuelva $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \left(1, \quad 2, \quad 3,\right)$. (Si se fija en las columnas de $\mathbf{A}$ quizá no necesite más cálculos).

MIT Course 18.06 Exam 1, October 5, 2015

EJERCICIO 3.

Suponga que los vectores no nulos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ apuntan en diferentes direcciones en $\mathbb{R}^3$ pero $3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$; y que la matriz $\mathbf{A}$ tiene a dichos vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ como columnas.

(a) (1^{pts}) Describa el espacio nulo de $\mathbf{A}$.

(b) (1^{pts}) ¿Cuáles son columnas pivote de $\mathbf{A}$?

(c) (1^{pts}) Demuestre que el conjunto de matrices $\mathbf{A}$ de orden 3 tales que $3\mathbf{A}_{|1} + 2\mathbf{A}_{|2} + \mathbf{A}_{|3} = \mathbf{0}$, es decir

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \;\middle|\; 3\mathbf{A}_{|1} + 2\mathbf{A}_{|2} + \mathbf{A}_{|3} = \mathbf{0} \right\},$$

es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^{3\times 3}$ de matrices de orden 3.

EJERCICIO 4. $\mathbf{A}$ es de orden n y existe $\mathbf{A}^{-1}$.

(a) (0.5^{pts}) ¿Quienes son $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$? (no se le piden las definiciones de estos subespacios).

(b) (0.5^{pts}) Escriba una base para $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y una base para $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

MIT Course 18.06 Exam 1, October 5, 2015

EJERCICIO 5. (1^{pts}) Si $\mathbf{A}^2 = \underset{n\times n}{\mathbf{0}}$, explique por qué $\mathbf{A}$ no es invertible. *MIT Course 18.06 Exam 1, March 1, 2000*

EJERCICIO 6.

(a) (1^{pts}) Suponga que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices que conmutan (es decir, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$). Si además son invertibles, demuestre que $\mathbf{A}^{-1}$ y $\mathbf{B}^{-1}$ también conmutan.

(b) (1^{pts}) Indique qué afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas (justifique su respuesta).

Sea $\mathbf{A}$ de orden m por n. Entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ siempre tiene una solución distinta de cero si:

1. $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) < m$.
2. $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) < n$.
3. $m = n$ y $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$.

MIT Course 18.06 Exam 1, October 1, 2001

2.2. Grupo E curso 22/23

Ejercicio 1. (1^{pts}) Resuelva $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

MIT Course 18.06 Exam 1, October 5, 2015

Ejercicio 2. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{AE} = \mathbf{K}$ es preescalonada y donde $\mathbf{E}$ es triangular superior.

(b) (1^{pts}) Factorice $\mathbf{A}$ como $\mathbf{A} = \mathbf{KU}$, donde $\mathbf{K}$ es preescalonada y $\mathbf{U}$ es triangular superior.

(c) (0.5^{pts}) Encuentre una base del espacio columna de $\mathbf{A}$.

MIT Course 18.06 Exam 1, March 1, 2000

Ejercicio 3. Considere $\mathbf{A} = \mathbf{EU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) (1^{pts}) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$?

(b) (1^{pts}) Sin calcular $\mathbf{A}$, encuentre una base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

(c) (1^{pts}) Sin calcular $\mathbf{A}$, resuelva el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3, & -8, & -7, \end{pmatrix}$ usando otro sistema de ecuaciones equivalente $\mathbf{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ cuya matriz de coeficientes es $\mathbf{U}$.

MIT Course 18.06 Exam 1, March 1, 2000

Ejercicio 4.

Si $\mathbf{A}$ es de orden 5×6 y $[\mathbf{A}\ \mathbf{A}]$ es la matriz (5×12) resultante de la concatenación de $\mathbf{A}$ con $\mathbf{A}$.

(a) (1^{pts}) ¿Qué relación hay entre $\mathcal{C}([\mathbf{A}\ \mathbf{A}])$ y $\mathcal{C}(\mathbf{A})$? (explique su respuesta).

(b) (1^{pts}) ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{N}([\mathbf{A}\ \mathbf{A}])$ (explique su respuesta).

MIT Course 18.06 Exam 1 review, Fall 2015

Ejercicio 5. (1^{pts}) Suponga que $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$. Demuestre que $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{n-1}$.

MIT Course 18.06 Exam 1, October 1, 2001

Ejercicio 6. (1^{pts}) Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ cuadradas pero no simétricas. Si $\mathbf{AB}$ es simétrica, entonces $\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal}$.

MIT Course 18.06 Exam 1, October 5, 2015

2.3. Grupo D curso 21/22

EJERCICIO 1. Considere $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) (1^{pts}) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$?

(b) (1^{pts}) Escriba una base (o un sistema generador) de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ (indique si su respuesta es una base o si es un sistema generador).

(c) (1^{pts}) Escriba una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

(d) (1^{pts}) Resuelva este *"inusual"* sistema de ecuaciones: $\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \left(1, \quad 1, \quad 7,\right)$.

Basado en MIT Course 18.06 Exam 1, March 1, 2000

EJERCICIO 2.

(a) (1^{pts}) Encuentre el número c que hace que la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & c \end{bmatrix}$ sea singular.

(b) (1^{pts}) Si $c = 20$ ¿qué son $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$? Describa los subespacios para este caso específico (no quiero la definición). Describa también $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)$ and $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)$ (¡para la inversa!)

(c) (0.5^{pts}) Encuentre una matriz triangular superior $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{L}$, donde $\mathbf{L}$ es escalonada.

(d) (0.5^{pts}) Factorice $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ (donde $\mathbf{L}$ es triangular inferior y $\mathbf{U}$ es triangular superior).

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, October 2, 2000

EJERCICIO 3. Considere $\mathbf{A}$ de orden m por n y rango r.

(a) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución para todo vector del lado derecho $\boldsymbol{b}$ ¿qué es $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$? Descríbalo para este caso concreto (no se limite a repetir la definición).

(b) (0.5^{pts}) En la parte (a) ¿cuáles son todas las igualdades o desigualdades que deben cumplirse entre los números m, n y r.

(c) (1^{pts}) Escriba un ejemplo concreto de matriz $\mathbf{A}$ de rango 1 cuya primera fila es $(2, 5,)$. Describa $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ completamente (es decir, escriba una ecuación paramétrica en cada caso).

(d) (1^{pts}) En su ejemplo (parte c); encuentre la solución completa de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{b} = \mathbf{A}_{|1}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 2, 2000

2.4. Grupo E curso 21/22

Ejercicio 1. Considere una matriz $\mathbf{A}$ de orden 3×3 tal que: ${}_{1|}\mathbf{A} + {}_{2|}\mathbf{A} = {}_{3|}\mathbf{A}$.

(a) (1^{pts}) Explique por qué $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \left(1, \quad 0, \quad 0,\right)$ no tiene solución.
(b) (0.5^{pts}) ¿Qué vector del lado derecho $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3,)$ permite que el sistema sea resoluble $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$? (Responda de la mejor manera posible, basándose en la información proporcionada).
(c) (0.5^{pts}) ¿Por qué $\mathbf{A}$ no es invertible?

MIT Course 18.06 Exam 1, March 1, 2000

Ejercicio 2. Sea $\mathbb{R}^{2\times 2}$ el subespacio de matrices 2×2 y sean $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Escriba una base para $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
(b) (1^{pts}) Describa un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga $\mathbf{A}$ pero no contenga $\mathbf{B}$.
(c) (1^{pts}) Describa un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que no contenga matrices diagonales excepto la matriz cero.
(d) (1^{pts}) Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, debe contener la matriz identidad.

MIT Course 18.06 Exam 1, March 1, 2000

Ejercicio 3. Considere $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & ? \\ 2 & a & ? \\ 1 & 1 & ? \\ b & 8 & ? \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$.

(a) (0.5^{pts}) ¿Qué puede decir inmediatamente sobre $\mathbf{A}_{|3}$?
(b) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el valor de a y b?
(c) (1^{pts}) Describa el conjunto de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(d) (1^{pts}) Describa el conjunto de soluciones de $\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0}$.
(e) (0.5^{pts}) ¿Cuáles de los cuatro espacios fundamentales son iguales para $\mathbf{A}$ y $\mathbf{R}$?

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 2, 2000

Ejercicio 4. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?

Basado en MIT Course 18.06 Exam 1, March 1, 2000

2.5. Grupo D curso 20/21

Ejercicio 1. $\mathbf{A}$ es de orden m por n. Suponga que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene al menos una solución para cada $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

(a) (0.5^{pts}) El rango de $\mathbf{A}$ es ________.
(b) (0.5^{pts}) Describa el conjunto de vectores que pertencen al espacio nulo de $\mathbf{A}^\intercal$.
(c) (1^{pts}) La ecuación $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ tiene (0 ó 1) (1 ó ∞) (0 ó ∞) (1) solución(es) para cada $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.
Elija una de las cuatro opciones y justifique su respuesta.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1999

Ejercicio 2. Encuentre una forma escalonada reducida de las siguientes matrices:

(a) (0.5^{pts}) La matriz $\mathbf{B}$ de orden 4×3 con ${}_{i|}\mathbf{B}_{|j} = i - j + 1$.
(b) (0.5^{pts}) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 1, 1998

Ejercicio 3. Suponga que $\left[\boldsymbol{u};\ \boldsymbol{v};\ \boldsymbol{w};\right]$ es una base de un subespacio de $\mathbb{R}^4$; y que $\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}\right]$.

(a) (1^{pts}) ¿Por qué sabe que $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ tiene una solución $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$?

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1999

Ejercicio 4. Por favor, explique breve pero cláramente sus respuestas.

(a) (1^{pts}) ¿Es el conjunto de matrices invertibles 2×2 un subespacio?
(b) (1^{pts}) Considere el conjunto de matrices de $\mathbb{R}^{m\times 2}$ (dado $m \geq 2$) cuyo espacio nulo contiene $\boldsymbol{x}_0 = (1,\ 1,)$.
¿Es este conjunto un subespacio?

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, October 1, 1998

Ejercicio 5. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c & c & 1 \\ c & c & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. ¿Qué valores de c arrojan cada uno de los siguientes resultados?

(a) (1^{pts}) $\mathbf{A}$ es singular (menos de tres pivotes).
(b) (1^{pts}) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$ para los distintos valores de c?
(c) (1^{pts}) Describa $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ para los distintos valores de c.
(d) (1^{pts}) Para cada c, escriba una base del espacio columna de $\mathbf{A}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1999

2.6. Grupo E curso 20/21

EJERCICIO 1.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre una forma escalonada reducida $\mathbf{R}$ de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) (1^{pts}) Encuentre la matriz $\mathbf{E}^{-1}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{E}^{-1}$.

(c) (0.5^{pts}) Verifique que

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{R}_{|1}\right]\left[{}_{1|}(\mathbf{E}^{-1})\right]^{\mathsf{T}} + \left[\mathbf{R}_{|2}\right]\left[{}_{2|}(\mathbf{E}^{-1})\right]^{\mathsf{T}} + \left[\mathbf{R}_{|3}\right]\left[{}_{3|}(\mathbf{E}^{-1})\right]^{\mathsf{T}}.$$

¿Qué rangos tienen las tres matrices, $\left[\mathbf{R}_{|k}\right]\left[{}_{k|}(\mathbf{E}^{-1})\right]^{\mathsf{T}}$, que aparecen en la suma?

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, March 6, 1998

EJERCICIO 2. Suponga que $\boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{w}$ forman una base de un subespacio de $\mathbb{R}^4$; y que $\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}\right]$.

(a) (1^{pts}) ¿Por qué sabe que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene solución única $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1999

EJERCICIO 3. Por favor, explique breve pero cláramente sus respuestas.

(a) (1^{pts}) ¿Es el conjunto de matrices singulares 2×2 un subespacio?

(b) (1^{pts}) Considere $\mathcal{V} = \left\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \text{cuyas componentes de la diagonal suman cero}\right\}$. ¿Es $\mathcal{V}$ un subespacio?

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, October 1, 1998

EJERCICIO 4.

(a) (0.5^{pts}) Para encontrar la tercera columna de $\mathbf{A}^{-1}$ (3 por 3), ¿Qué sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ necesita resolver?

(b) (0.5^{pts}) Para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & b & 2 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}$, encuentre la tercera columna de $\mathbf{A}^{-1}$ (si es que existe).

(c) (1^{pts}) Para cada a y b, encuentre el rango de $\mathbf{A}$ y diga el motivo.

(d) (1^{pts}) Para cada a y b, encuentre una base para el espacio columna de $\mathbf{A}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1999

EJERCICIO 5. (2^{pts}) Considere $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Encuentre bases para sus cuatro espacios fundamentales. *MIT Course 18.06 Quiz 2, October 23, 1998*

2.7. Grupo B curso 19/20

Ejercicio 1. Sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&7\\3&6&10\\3&6&10\end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Escriba una base para el espacio columna de $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) Escriba una base para el espacio nulo de $\mathbf{A}$.
(c) (1^{pts}) Escriba el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\\7\end{pmatrix}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall 1997

Ejercicio 2. (1^{pts}) ¿Se puede encontrar una matriz $\mathbf{A}$ para la cual el sistema $\left[(1,\quad 2,\quad 1,);\right]$ es una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, y $\left[(1,\quad 1,\quad 1,);\right]$ es una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$? Si la respuesta es "si", escriba un ejemplo. Si la respuesta es "no", explique por qué una matriz así no puede existir.
MIT Course 18.06 Hour exam I, Fall 1996

Ejercicio 3. Suponga que el conjunto de soluciones a

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}\quad\text{es}\quad\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

(a) (1^{pts}) ¿Cuál es la dimensión del espacio fila de $\mathbf{A}$?
(b) (1^{pts}) ¿Quién es la matriz $\mathbf{A}$?
(c) (1^{pts}) Describa el conjunto de vectores $\boldsymbol{b}$ para los cuales $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ tiene solución (no se limite a decir que $\boldsymbol{b}$ debe pertenecer a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$).

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring 1998

Ejercicio 4. Suponga que $\mathbf{A}$ es de orden 3×3; y que obtenemos otra matriz $\mathbf{B}$ del mismo orden mediante operaciones sobre sus filas o sobre sus columnas (según el caso). <u>En cada apartado</u> debe expresar la trasformación como un producto de matrices, y debe indicar expresamente:

1. Si $\mathbf{B}=\mathbf{AM}$ o si $\mathbf{B}=\mathbf{MA}$ y escribir explicitamente la matriz $\mathbf{M}$.
2. Indique si $\mathbf{M}$ es invertible o no (si la operación es reversible). No es necesario que calcule $\mathbf{M}^{-1}$, pero justifique su respuesta.

(a) (1^{pts}) *Intercambiar* las dos primeras filas de $\mathbf{A}$.
(b) (1^{pts}) *Mantener* la primera fila, pero *sumar* a la tercera fila la segunda y después *sustituir* la segunda fila por la suma de la primera y la tercera filas.
(c) (1^{pts}) *Restar* la primera columna a la segunda y a la tercera.

MIT 18.06 - Quiz 1, Fall 2017

Ejercicio 5. (1^{pts}) Sabiendo que: $\underset{3\times3}{\mathbf{A}}\begin{bmatrix}4&3&3\\-1&-1&-1\\-3&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}$, encuentre la inversa de $\mathbf{A}^{\intercal}$.
MIT Course 18.06 Hour exam I, Fall 1996

2.8. Grupo E curso 19/20

Ejercicio 1. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$.

(a) (1^{pts}) Resuelva $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Si existe solución, describa el conjunto de soluciones geometricamente. Es este conjunto de soluciones un subespacio? (Explique).

(b) (1^{pts}) Si las incognitas son $\boldsymbol{x} = (x, y, z, w)$, la solución que usted ha obtenido está expresada ¿en términos de qué variable? (¿qué variable es "libre" en su solución?). Escriba el conjunto de soluciones en términos de una variable "libre" diferente.

(c) (0.5^{pts}) Es el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ resoluble para cualquier $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$? (explique). Cambie el "7" en $\mathbf{A}_{|2}$ por un número "a" diferente de manera que obtenga una matriz $\mathbf{M}$ cuyo espacio columna es más pequeño. El nuevo número a es ____.

(d) (0.5^{pts}) Escriba un nuevo vector del lado derecho $\boldsymbol{c}$ para el que el sistema $\mathbf{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ tiene solución y un vector del lado derecho $\boldsymbol{d}$ para el que $\mathbf{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ NO tiene solución.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring 1997

Ejercicio 2. (1^{pts}) Sabiendo que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}}$, encuentre $\mathbf{A}^{-1}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall 1997

Ejercicio 3.

(a) (1^{pts}) Escriba (si ello es posible) un ejemplo de matriz, tal que $\left[(1, 2, 1,);\right]$ es una base de su espacio columna, y $\left[(0, 3, 2, -1,);\right]$ es una base de su espacio fila. Si no es posible explique el motivo.

(b) (1^{pts}) ¿Son los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$?

MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall 1997

Ejercicio 4. Suponga que $\mathbf{A}$ es el producto:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{Sin calcular } \mathbf{A}.}$

(a) (1^{pts}) Encuentre una base del espacio fila de $\mathbf{A}$.

(b) (1^{pts}) Encuentre una base del espacio columna de $\mathbf{A}$.

(c) (1^{pts}) Encuentre una base del espacio de todas las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(d) (1^{pts}) La dimensión de los tres subespacios anteriores sería diferente si se modifica adecuadamente una de las componentes de $\mathbf{B}$. Escriba la nueva matriz $\mathbf{B}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring 1998

2.9. Grupo B curso 18/19

Ejercicio 1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 5 & 12 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(a) (1^{pts}) Mediante la eliminación Gaussiana determine qué condición deben cumplir las componentes de $\boldsymbol{b}$ para que dicho vector pertenezca al espacio columna de $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$?
(c) (1^{pts}) Encuentre un vector no nulo en el espacio nulo por la izquierda de $\mathbf{A}$.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, Problem 1. March 2, 2018

Ejercicio 2. (1^{pts}) Sea $\mathbf{A}$ una matriz 3 por 3 tal que el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ tiene a $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y a $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ como soluciones. Encuentre otra solución a este sistema. Justifique su respuesta.

Ejercicio 3. (1^{pts}) Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule $\mathbf{A}^{-1}$.

Ejercicio 4. (1^{pts}) Escriba una matriz $\mathbf{A}$ cuyo espacio nulo esté generado por el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Basado en MIT Course 18.06 Exam 1, Problem 4. Fall 2018

Ejercicio 5. El sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (con $\mathbf{A}$ de orden m por n) tiene una sola solución especial: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Describa todas las posibilidades para el número de columnas de $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) Describa todas las posibilidades para el rango de $\mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) Describa todas las posibilidades para el número de filas de $\mathbf{A}$.

Justifique brevemente sus respuestas.

Ejercicio 6. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*).

El conjunto $\mathcal{V}$ es un subespacio vectorial

(a) (0.5^{pts}) $\mathcal{V} = \left\{ \text{todas las soluciones } \boldsymbol{x} \text{ de } \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, donde $\mathbf{A}$ es 3×6.

(b) (0.5^{pts}) $\mathcal{V} = \left\{ \text{todas las matrices } \mathbf{X} \text{ de orden } 6 \times 2 \text{ tales que } \mathbf{AX} = \underset{3\times 2}{\mathbf{0}} \right\}$, donde $\mathbf{A}$ es 3×6.

(c) (0.5^{pts}) $\mathcal{V} = \left\{ \text{Todas las matrices singulares } \mathbf{A} \text{ de orden } 3 \times 3 \right\}$.

Basado en MIT Course 18.06 Exam 1, Problem 4. Fall 2018

Ejercicio 7.

(a) (0.5^{pts}) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cualesquiera con el mismo número de filas. ¿Qué puede usted decir (*y explique el motivo*) acerca de la comparación entre

$$\text{rango de } \mathbf{A} \qquad \text{y} \qquad \text{rango de la matriz por bloques } \left[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{B}\right].$$

(b) (0.5^{pts}) Suponga que en particular $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2$. En este caso, ¿cambiaría su respuesta? Explique su razonamiento.
(c) (0.5^{pts}) Sea $\mathbf{A}$ una matriz m por n de rango r; y considere además la matriz por bloques $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{A}]$. ¿Cuáles son las dimensiones de los conjuntos de soluciones de los sistemas

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad [\mathbf{A} \,|\, \mathbf{A}]\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \ \ ?$$

MIT Course 18.06 Final, Fall 2006

2.10. Grupo E curso 18/19

Ejercicio 1. $\mathbf{A}$ es de orden 5 por 3. Uno de sus amigos de Harvard realiza las siguientes operaciones sobre las columnas de $\mathbf{A}$ para obtener una forma escalonada reducida $\mathbf{R}$ algo rara, pues en lugar de obtener la habitual forma $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$, ha obtenido $\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$. En particular, sus operaciones por columnas le han dado la matriz:

$$\mathbf{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (1^{pts}) Encuentre una base para $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.
(b) (1^{pts}) Escriba una matriz $\mathbf{M}$ de manera que si multiplicamos $\mathbf{A}$ por $\mathbf{M}$ (¿quizá por la **izquierda** o quizá por la **derecha**?) entonces las **mismas** operaciones por columnas usadas por nuestro amigo de Harvard nos darán la matriz escalonada reducida en la forma habitual (con las filas pivote por encima de las filas libres):

$$\begin{pmatrix} \text{quizá } \mathbf{AM} \\ \text{o quizá } \mathbf{MA} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Basado en MIT Course 18.06 Exam 1, Problem 2. Fall 2018

Ejercicio 2. Considere las siguientes matrices 5 por 5

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c & d \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{y} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2.$$

No necesita realizar muchos cálculos si tiene en cuenta que $\mathbf{E}_1$ es el producto de varias matrices elementales (una sucesión de transformaciones elementales sobre $\mathbf{I}$).

(a) (1^{pts}) Resuelva $\left(\mathbf{E}_1\right)\boldsymbol{x} = \left(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1,\right)$.

(b) (0.5^{pts}) Resuelva $\left(\mathbf{E}_1^{\intercal}\right)\boldsymbol{x} = \left(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1,\right)$.

(c) (0.5^{pts}) Calcule $\mathbf{E}$.
(d) (1^{pts}) Calcule $\mathbf{E}^{-1}$. Compruebe su respuesta.
(e) (1^{pts}) Calcule $(\mathbf{E}_1)^{10} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1$.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, Problem 2. March 2, 2018

Ejercicio 3. (1^{pts}) Escriba una matriz $\mathbf{A}$ no nula cuyo espacio columna este en $\mathbb{R}^3$ pero no contenga al vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Basado en MIT Course 18.06 Exam 1, Problem 4. Fall 2018*

Ejercicio 4. (1^{pts}) Encuentre la solución completa (o *solución general*) a

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Strang, 2003, ejercicio 4 del conjunto de problemas 3.4.)

Ejercicio 5. Para $\mathbf{A}$ de orden 5 por 4 y con sus columnas linealmente independientes, encuentre **explícitamente** lo siguente:

(a) (0.5^{pts}) El espacio nulo de $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) La dimensión del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.
(c) (0.5^{pts}) Una solución particular, $\boldsymbol{x}_p$, para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 2\mathbf{A}_{|2}$.
(d) (0.5^{pts}) La solución general (completa) para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 2\mathbf{A}_{|2}$.

2.11. Grupo E curso 17/18

Ejercicio 1. Sea $\mathbf{A}$ la siguiente matriz de orden 4 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) (0.5^{pts}) ¿Cuál es su rango? (Pista: reducir por eliminación gaussiana es una buena forma. Verá que se repite cierta pauta)
(b) (0.5^{pts}) Escriba una *base* para $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.
(c) (1^{pts}) ¿Para qué vectores $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución? Responda con una ecuación en términos de los componentes $b_1, \ldots b_4$.

Ejercicio 2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son sub-espacios vectoriales? Para aquellos casos que no lo son, muestre un ejemplo que viole alguna de las propiedades de los subespacios.

(a) (0.5^{pts})Dada $\mathbf{A}$ de orden 3×5 con rango completo por filas, el conjunto de soluciones del sistema

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) (0.5^{pts}) El conjunto de todos los vectores $\boldsymbol{x}$ tales que $\boldsymbol{x}\left[\boldsymbol{y}\right] = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{x}\left[\boldsymbol{z}\right] = \mathbf{0}$ para los vectores particulares $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$.
(c) (0.5^{pts}) Todas las matrices de orden 3×5 cuyo espacio columna contiene al vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
(d) (0.5^{pts}) Todas las matrices de orden 5×3 con $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en su espacio nulo.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring, 2009

Ejercicio 3. Suponga que mediante transformaciones de las filas de $\mathbf{A}$ obtiene una nueva matriz $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & 10 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Por ejemplo, restando dos veces la primera fila de $\mathbf{A}$ a la segunda fila de $\mathbf{A}$ para obtener la segunda fila de $\mathbf{B}$.

(a) (0.5^{pts}) Escriba $\mathbf{B}$ como un producto de la matriz $\mathbf{A}$ por alguna otra matriz.
(b) (1^{pts}) ¿Cuáles de los espacios $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ son iguales a los espacios $\mathcal{C}\left(\mathbf{B}^\intercal\right)$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{B}^\intercal\right)$? (si es que algunos de ellos son iguales). **No** necesita realizar ningún cálculo. ¡**No** se le pide que calcule explicitamente qué vectores hay en cada uno de ellos!

Ejercicio 4. Considere una matriz $\mathbf{A}$ de orden 5 por 4 tal que, tras multiplicar por $\mathbf{E}$, hemos logrado escalonar ($\mathbf{AE} = \mathbf{L}$). La forma escalonada que se obtiene sólo tiene una columna de ceros, en concreto *la última*.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ c & d & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{AE} = \mathbf{L}.$$

Fíjese en la estructura de $\mathbf{E}$ para decidir si hubo intercambio de columnas en el proceso de eliminación gaussiana $\mathbf{AE}$, y conteste lo que se le pide.

Si tiene que emplear algunas de las filas o columnas de $\mathbf{A}$ *con letras, traslade dichos vectores a sus expresiones como si las letras fueran números conocidos.* No se le pide que deduzca los valores a, b, c y d).

¡Nota!: En algunas preguntas se le pide que escriba una ***base*** y en otras que describa un ***espacio vectorial***. No es lo mismo una cosa que la otra. Si expresa una *base* en lugar del *espacio*, o viceversa, se considerará que la pregunta está mál contestada.

(a) (0.5^{pts}) ¿Puede encontrar una base del espacio columna de $\mathbf{A}$? En caso afirmativo escriba una ***base*** para $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Puede encontrar una base del espacio fila de $\mathbf{A}$? En caso afirmativo escriba una ***base*** para $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$. En caso contrario indique qué información adicional sobre $\mathbf{L}$ sería suficiente para poder contestar.
(c) (0.5^{pts}) ¿Puede encontrar una base del espacio nulo de $\mathbf{A}$? En caso afirmativo describa el ***espacio*** $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ indicando exlícitamente qué vectores pertenecen a $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.
(d) (0.5^{pts}) ¿Puede encontrar una base del espacio nulo por la izquierda de $\mathbf{A}$? En caso afirmativo describa el ***espacio*** $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ indicando exlícitamente qué vectores pertenecen a $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

Ejercicio 5. La matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 se reduce a $\mathbf{I}$ con las siguientes operaciones elementales:
1. Restar columna 1 de la columna 2
2. Sumar $2\times$ (columna 1) a la columna 3
3. Restar $2\times$ (columna 3) de la columna 2
4. Sumar columna 2 a la columna 1.

(a) (1^{pts}) ¿Quién es $\mathbf{A}^{-1}$?
(b) (1^{pts}) ¿Quién es $\mathbf{A}$?

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1995

Ejercicio 6. (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}$ es 5×3, $\mathbf{B}$ es 4×5, y $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\mathcal{N}\left(\mathbf{B}\right)$, entonces qué es $\mathbf{BA}$?

2.12. Grupo F curso 17/18

EJERCICIO 1.

(a) (1^{pts}) Las transformaciones elementales $\underset{[(a)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$ y $\underset{[(b)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$ de las columnas reducen la matriz $\mathbf{A}$ a su forma escalonada $\mathbf{L}$ (triangular inferior). Encuentre la matriz $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$ cuando $\mathbf{A}$ es $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

(b) (1^{pts}) Encuentre una matriz $\mathbf{U}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, October 13, 1993

EJERCICIO 2. Considere una matriz $\mathbf{A}$ de orden 5 por 4 para la que, tras aplicar la eliminación gaussiana por columnas, hemos encontrado la siguiente forma escalonada reducida:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

¡Nota!: En algunas preguntas se le pide que escriba una ***base*** y en otras que describa un ***espacio vectorial***. No es lo mismo una cosa que la otra. Si expresa una *base* en lugar del *espacio*, o viceversa, se considerará que la pregunta está mál contestada.

(a) (0.5^{pts}) ¿Puede encontrar una base del espacio columna de $\mathbf{A}$? En caso afirmativo escriba una ***base*** para $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

(b) (0.5^{pts}) ¿Puede encontrar una base del espacio fila de $\mathbf{A}$? En caso afirmativo escriba una ***base*** para $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$.

(c) (0.5^{pts}) ¿Puede encontrar una base del espacio nulo de $\mathbf{A}$? En caso afirmativo describa el ***espacio*** $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ indicando exlícitamente qué vectores pertenecen a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

(d) (0.5^{pts}) ¿Puede encontrar una base del espacio nulo por la izquierda de $\mathbf{A}$? En caso afirmativo describa el ***espacio*** $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$ indicando exlícitamente qué vectores pertenecen a $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$.

(e) (0.5^{pts}) Diga si puede conocer quien es $\mathbf{A}$. En caso afirmativo escriba la matrix $\mathbf{A}$.

EJERCICIO 3. ¿Cuales de las siguientes afirmaciones son posibles? Escriba un ejemplo para aquellos casos que sean posibles. Si es imposible, indique el motivo.

(a) (0.5^{pts}) La matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es 5×3 y $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución única.

(b) (0.5^{pts}) La matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es 3×5 y $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución única.

(c) (0.5^{pts}) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no es resoluble para *ningún* $\boldsymbol{b}$ (i.e., no es posible encontrar un $\boldsymbol{b}$ que haga el sistema resoluble).

(d) (0.5^{pts}) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución para ningún $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$.

EJERCICIO 4. Considere los vectores $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. El objetivo es encontrar una *combinación lineal de esos tres vectores* que sea igual al vector $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2, & -2, & 12, \end{pmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Escriba el problema en forma matricial.

(b) (1^{pts}) Encuentre la combinación lineal indicada (i.e., resuelva el sistema).

(c) (0.5^{pts}) Cambie un número en $\boldsymbol{v}_3$ para obtener un sistema sin solución para la mayoría de vectores $\boldsymbol{b}$, pero escriba un nuevo vector $\boldsymbol{b}'$ para el que el sistema si tenga solución. Este nuevo vector $\boldsymbol{b}'$ pertenece al espacio ________________ de la matriz ________________.
(Hay muchas posibles respuestas correctas para los nuevos vectores $\boldsymbol{v'}_3$ y $\boldsymbol{b}'$.)

MIT 18.06 - Quiz 1, Fall 2017

EJERCICIO 5. Suponga una matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ e invertible y con factorización $\mathbf{A} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}$. Ahora suponga que queremos resolver

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

donde $\mathbf{B}$ es de orden $n \times n$, y donde $\mathbf{0}$ es una matriz nula de orden $n \times n$.

(a) (1^{pts}) Suponga que partimos el vector de incognitas en dos bloques $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$ donde $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ son vectores con n componentes cada uno. De manera similar dividimos el vector del lado derecho: $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$ en dos subvectores $\boldsymbol{b}_1$ y $\boldsymbol{b}_2$ de n componentes cada uno. Es decir

$$\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \mathbf{0} & \mathsf{A} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \text{es el sistema} \qquad \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \mathbf{0} & \mathsf{A} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}.$$

Escriba la solución $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ en términos de $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, A y B (o de las inversas de dichas matrices).

(b) (0.5^{pts}) Escriba las soluciones $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ en terminos de L, $\dot{\mathsf{U}}$, B, $\boldsymbol{b}_1$ y $\boldsymbol{b}_2$ (o de las inversas de esas matrices).

2.13. Grupo B curso 16/17

EJERCICIO 1.

(a) (1^{pts} sólo si las cuatro respuestas son correctas) Complete estas frases apropiadamente para el caso de una matriz $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$.

- Si el espacio columna es un plano, el espacio nulo es ______________________________
- Si el espacio columna es una recta, el espacio nulo es ______________________________
- Si el espacio columna es todo $\mathbb{R}^3$, el espacio nulo es ______________________________
- Si el espacio columna es el vector cero, el espacio nulo es ______________________________

(b) (1^{pts}) Encuentre una matriz $\mathbf{A}$ de orden 7×7 cuyo espacio columna sea igual a su espacio nulo, o explique brevemente por qué no es posible. (Pista: la parte (a) puede darle alguna idea.)

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2013

EJERCICIO 2. Suponga que, para una matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3, aplicamos la siguente secuencia de transformaciones elementales sobre sus columnas: $\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$, $\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$ y $\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$.

(a) (1^{pts}) ¿Con qué matriz $\mathbf{A}$ hemos empezado, si tras dichas transformaciones llegamos a

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & g \end{bmatrix}?$$

(b) (1^{pts}) Encuentre la factorización $\mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}$ de $\mathbf{A}$.

(c) (1^{pts}) En el caso de que $g = 0$, las tres columnas de $\mathbf{A}$ deben ser dependientes. Encuentre el espacio nulo (un espacio vectorial) de $\mathbf{A}$.

(d) (0.5^{pts}) En el caso de que $g \neq 0$, ¿qué es el espacio columna de $\mathbf{L}$? ¿Qué es el espacio columna de la matriz original $\mathbf{A}$? ¿Cómo lo sabe?

basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, March 4, 2013

EJERCICIO 3. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Encuentre la solución completa del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(b) (1^{pts}) Encuentre la solución completa a la ecuación $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) (1^{pts}) Encuentre todos los vectores $\boldsymbol{b}$ tales que la equación $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es resoluble.

(d) (0.5^{pts}) Encuentre una matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$.

(e) (1^{pts}) Encuentre bases para los cuatro espacios fundamentales de la matriz $\mathbf{A}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 5, 2009

2.14. Grupo E curso 16/17

Ejercicio 1.

(a) (1^{pts}) Mediante eliminación encuentre el **rango** y una base del espacio columna de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

(b) (1^{pts}) Encuentre las soluciones especiales del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y describa el conjunto de **todas las soluciones** de dicho sistema.

(c) (1^{pts}) ¿Para qué número b_3 el sistema $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ b_3 \end{pmatrix}$ tiene solución? Escriba la **solución completa** $\boldsymbol{x}_c$ (la solución general) empleando dicho valor b_3.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring 2011

Ejercicio 2. ¿Cúales de los siguientes conjuntos son subespacios? Explique por qué.

(a) (0.5^{pts}) Todos los vectores $\boldsymbol{x}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $\boldsymbol{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$.

(b) (0.5^{pts}) Todos los vectores $(x, y,)$ en $\mathbb{R}^2$ tales que $x^2 - y^2 = 0$.

(c) (0.5^{pts}) Todos los vectores $(x, y,)$ en $\mathbb{R}^2$ tales que $x^2 - y^2 = 2$.

(d) (0.5^{pts}) Todos los vectores $\boldsymbol{x}$ en $\mathbb{R}^3$ que pertenecen simultáneamente al espacio columna y al espacio nulo de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) (0.5^{pts}) Todos los vectores $\boldsymbol{x}$ en $\mathbb{R}^3$ que pertenecen al espacio columna Ó al espacio nulo de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 5, 2009

Ejercicio 3. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(a) (1^{pts}) Encuentre la factorización $\mathbf{A} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}$.

(b) (1^{pts}) Encuentre la inversa de $\mathbf{A}$.

(c) (0.5^{pts}) Para qué valores de c la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & c \end{bmatrix}$ es invertible?

basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, October 5, 2009

Ejercicio 4.

Sea $\mathbf{A}$ una matriz m por n. Sea $\mathbf{B}$ una matriz n por m matrix. Suponga que $\mathbf{AB} = \underset{m\times m}{\mathbf{I}}$ es la matriz identidad m por m.

(a) (1^{pts}) Denotemos por $r = \text{rg}\left(\mathbf{A}\right)$ al rango de la matriz $\mathbf{A}$. Elija una de las respuestas y asegúrese de justificarla.

a) $r \geq m$

b) $r \leq m$

c) $r = m$

d) $r > m$

(b) (1^{pts}) ¿Es $m \leq n$ o es $n \leq m$? Por qué.

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 5, 2009

2.15. Grupo E curso 15/16

Ejercicio 1. (2^{pts}) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$$

Ejercicio 2. (1^{pts}) ¿Es linealmente dependiente el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$? (Como siempre, muestre sus cálculos y explique su respuesta).

$$\big[\boldsymbol{u};\ \boldsymbol{v};\ \boldsymbol{w};\big] \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}3\\2\\8\\2\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Los apartados (a), (b) y (c) de este ejercicio se refieren a la matriz $\mathbf{A}$ y la siguiente eliminación Gaussiana por columnas

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 12 \\ -3 & -6 & -2 & -1 & -20 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\tau_1,\ldots,\tau_n} \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & -41 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 8 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{bmatrix}$$

(no es necesario que verifique esto)

(a) (0.5^{pts}) Encuentre una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

(b) (0.5^{pts}) Encuentre una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ y $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

(c) (0.5^{pts}) Si $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$ entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}9\\1\\4\\-12\end{pmatrix}$ (no es necesario que verifique esto).

Encuentre todas las soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}9\\1\\4\\-12\end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. (1^{pts}) Encuentre la matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ y la matriz triangular superior $\dot{\mathbf{U}}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.

(a) (0.5^{pts}) Suponga unas matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ que tienen el mismo espacio columna. Escriba un ejemplo donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen diferente espacio nulo —o explique por qué es imposible.

(b) (0.5^{pts}) De nuevo, suponga unas matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ que tienen el mismo espacio columna. Escriba un ejemplo donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen distinto rango —o explique por qué es imposible.

MIT Course 18.06. Exam I. Professor Strang. March 2, 2015

Ejercicio 6. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de orden 3×4 (3 filas, 4 columnas). Sea $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) (0.5^{pts}) Exprese $\mathbf{A}\boldsymbol{v}$ en términos de las columnas $\mathbf{A}_{|j}$ de $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) Exprese $\mathbf{A}\boldsymbol{v}$ en términos de las filas ${}_{j|}\mathbf{A}$ de $\mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) ¿Pueden ser linealmente independientes las columnas de $\mathbf{A}$? Explique su respuesta.
(d) (0.5^{pts}) ¿Cúantas soluciones $\boldsymbol{x}$ tiene el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$? ¿Ninguna, una, infinitas, o depende de $\mathbf{A}$?
(e) (0.5^{pts}) Encuentre todos los posibles pares de valores $(p,\, q)$, donde p es la dimensión de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ y q es la dimensión de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

Ejercicio 7. (1^{pts}) Demuestre que si el sistema de vectores $\left[\boldsymbol{u};\, \boldsymbol{v};\, \boldsymbol{w};\right]$ de $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente, entonces el sistema de vectores $\left[\boldsymbol{u};\, (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v});\, (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w});\right]$ también es linealmente independiente.

2.16. Grupo H curso 15/16

Ejercicio 1. (2^{pts}) Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Qué condición (o condiciones) debe satisfacer un vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ para pertenecer al espacio columna de $\mathbf{A}$? (Su respuesta deben ser una o más ecuaciones de la forma: $?b_1 + ?b_2 + ?b_3 + ?b_4 = ?$)

Ejercicio 2.

(a) (1^{pts}) Calcule la inversa de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) (1^{pts}) ¿Para qué valor(es) de x la matriz de más abajo es invertible? Explique su respuesta.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & x & 6 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. Suponga que la matriz $\mathbf{A}$ de orden 5×5 se puede reducir a la siguiente forma escalonada reducida (por columnas)

$$\mathbf{AE} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{donde} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para las preguntas de más abajo dé una respuesta cuando sea posible. En caso contrario conteste "No hay información suficiente".
(Note que en los primeros apartados se piden dos cosas. Debe contestar a ambas.)

(a) (0.5^{pts}) Encuentre una base para $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ e indique la dimensión: $\dim \mathcal{C}(\mathbf{A})$).
(b) (0.5^{pts}) Encuentre una base para $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ e indique $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A})$.
(c) (0.5^{pts}) Encuentre una base para $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$ e indique $\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$.
(d) (0.5^{pts}) Encuentre una base para $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$ e indique $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$.
(e) (0.5^{pts}) Encuentre un vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tenga solución.
(f) (0.5^{pts}) Encuentre un vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5$ tal que $\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \boldsymbol{b}$ no tenga solución.
(g) (0.5^{pts}) ¿Existen vectores $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5$ tales que el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene una y sólo una solución?

Ejercicio 4.

(a) (0.5^{pts}) ¿Existe una matriz $\mathbf{A}$ cuyo espacio columna está generado por $(1,2,3,)$ y $(1,0,1,)$, y cuyo espacio nulo está generado por $(1,2,3,6,)$? Si es así, escriba un ejemplo. Si no es posible, explique por qué.
(b) (0.5^{pts}) Considere el conjunto, $\mathcal{M}$, de matrices de orden 3 por 3 y cuyo espacio columna contiene el vector $(1,1,1,)$. ¿Es este conjunto $\mathcal{M}$ un espacio vectorial? Explique su respuesta.
(c) (0.5^{pts}) Si las columnas de una matriz $\mathbf{M}$ de orden 5 por 3 son linealmente independientes y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ no es el vector cero, entonces sabemos que $\mathbf{M}\boldsymbol{x}$ no es ____________________.
(Espero una respuesta que emplee la independencia de las columnas y que $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$).

MIT Course 18.06 Quiz 1. Spring, 2015

Ejercicio 5. (0.5^{pts}) ¿Cuantas soluciones $(0,\ 1,\ \infty)$ tiene $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$?

Por favor, conteste rellenando la siguiente tabla en esta hoja de enunciados.

	$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\{\mathbf{0}\}$	$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)\neq\{\mathbf{0}\}$
$\boldsymbol{b}\in\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$		
$\boldsymbol{b}\notin\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$		

(0.5 puntos si las cuatro casillas está correctas, 0 puntos en caso contrario)

Ejercicio 6. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) (0.5^{pts}) Si las columnas de la matriz $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ son linealmente independientes, entonces existe $\mathbf{A}^{-1}$.

2.17. Grupo A curso 14/15

EJERCICIO 1. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

(a) (0.5^{pts}) Las columnas de una matriz de orden 4×5 deben ser linealmente dependientes.
(b) (0.5^{pts}) Si una matriz $\mathbf{A}$ de orden 3×3 no es invertible, la última columna de $\mathbf{A}$ tiene que ser una combinación lineal de las dos primeras columnas de $\mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices de orden $m \times n$. Si $\mathbf{A}$ es equivalente por filas a $\mathbf{B}$ (es decir, $\mathbf{EA} = \mathbf{B}$, donde $\mathbf{E}$ es invertible —i.e., $\mathbf{E}$ es producto de matrices elementales) entonces $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$.
(d) (0.5^{pts}) Si $5\mathbf{A}^4 - \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 6\mathbf{I} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A}$ es invertible.

EJERCICIO 2.

(a) (1^{pts}) Encuentre la inversa de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) (1^{pts}) Encuentre la inversa de la siguiente matriz **usando el método de Gauss-Jordan**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

Ejercicios 36, 38 y 59 de la sección 3.3 del manual de Poole

EJERCICIO 3. Considere la siguiente matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Elija una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y describa el espacio columna de $\mathbf{A}$ en función de esa base. Escriba una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ distinta de la anterior.
(b) (1^{pts}) Elija una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ y describa el espacio nulo de $\mathbf{A}$ en función de esa base
(c) (1^{pts}) Encuentre una base del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$
(d) (1^{pts}) Escriba la solución completa para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

MIT Course 18.06 Quiz 1. Spring, 2015

EJERCICIO 4. ¿Cuáles de los siguientes siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$? Justifique su respuesta (*sólo se puntuará si la respuesta está correctamente justificada*).

(a) (1^{pts}) $S_1 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } x_1 = x_3\right\}$.
(b) (1^{pts}) $S_2 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } x_1 = 2\right\}$.

2.18. Grupo E curso 14/15

EJERCICIO 1. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

(a) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}$ es una matriz de orden 4×3, y $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente *dependientes*, entonces los vectores $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1$, $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2$, $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_3$ también tienen que ser dependientes.

(b) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}$ es una matriz de orden 4×3, y $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente *independientes*, entonces los vectores $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1$, $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2$, $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_3$ también deben ser independentes.

(c) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}$ es una matriz de orden 3×5 tal que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es de dimensión 2, entonces la ecuación $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ tiene infinitas soluciones.

EJERCICIO 2. (0.5^{pts}) Escriba un ejemplo de matriz de orden 5×4 con rango 3.

EJERCICIO 3.

Suponga que, mediante operaciones elementales por columnas, reducimos la matriz $\mathbf{A}$ a la forma escalonada reducida

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}1&0&0\\4&0&0\\0&1&0\\2&2&0\end{bmatrix}; \quad \text{donde} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix}1&-1&3\\1&1&-2\\1&0&1\end{bmatrix}$$

es el producto de las matrices elementales empleadas en el proceso de eliminación gaussiana.

(a) (1^{pts}) Escoja una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y describa $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ usando dicha base.

(b) (1^{pts}) Escoja una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ y describa $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ usando dicha base.

(c) (1^{pts}) Encuentre la solución completa (si es que existe) para el siguiente sistema :

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \text{ suma de las columnas de}\mathbf{A}.$$

(d) (1^{pts}) Escriba una base para $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$

(e) (1^{pts}) Encuentre la inversa de $\mathbf{E}$.

(f) (1^{pts}) Escriba $\mathbf{A}$.

(g) (1^{pts}) Escriba una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

(h) (1^{pts}) Encuentre la factorización $\mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}$ de $\mathbf{A}$.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1. Spring, 2005

2.19. Grupo H curso 14/15

EJERCICIO 1.

(a) (0.5^{pts}) Cuando $\mathbf{A}$ es invertible ¿es el espacio columna de $\mathbf{A}^{-1}$ necesariamente igual a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$?

(b) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}$ es cuadrada, ¿son iguales el espacio columna de $\mathbf{A}^2$ y $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$?

MIT Course 18.06 Quiz 2. Fall, 2008

EJERCICIO 2. $\mathbf{A}$ es una matriz con espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\right\}$ generado por los siguientes vectores

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\\4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\1\end{pmatrix}.$$

(a) (1^{pts}) Escriba una matriz $\mathbf{B}$ tal que su espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$ es igual al espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. (Hay más de una respuesta correcta.) [Así, cualquier vector $\boldsymbol{y}$ en el espacio nulo de $\mathbf{A}$ verifica $\mathbf{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y}$ para algún vector $\boldsymbol{u}$.]

(b) (1^{pts}) Escriba una respuesta diferente para la pregunta (a) $\mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

(c) (1^{pts})Para algún vector $\boldsymbol{b}$, alguien le dice que una solución particular a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

Sin embargo, su compañero de clase el Sr. Z le dice que una segunda solución es:

$$\boldsymbol{x}_Z = \begin{pmatrix}1\\1\\3\\0\end{pmatrix}$$

mientras que su compañera la Sta. H le dice "No, Z está equivocado, una segunda solución que si que es correcta es:"

$$\boldsymbol{x}_H = \begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix}$$

Quien de los dos tiene razón, Z o H (Pista: ¿qué es cierto respecto de la diferencia $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p$ cuando $\boldsymbol{x}$ es también una solución correcta para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$?)

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring, 2009

EJERCICIO 3. (1^{pts}) Estamos buscando una matriz $\mathbf{A}$ de orden m por n y unos vectores $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución pero $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ tiene exactamente una. ¿Por qué no es posible encontrar tales $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{b}$, y $\boldsymbol{c}$?

EJERCICIO 4.

(a) (1^{pts}) Reduzca la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -6 & -7 & 3\\ 1 & 1 & -1/2\end{bmatrix}$ a su forma escalonada por columnas $\mathbf{L}$;

(b) (1^{pts}) Factorize la matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 en $\mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}$ = (triangular inferior)(triangular unitaria superior).

(c) (1^{pts}) Si se cambiara la última componente de $\mathbf{A}$ de -1/2 a ________ ¿qué número arrojaría una matriz $\mathbf{A}_{nueva}$ que fuera singular. Describa con exactitud el espacio columna dicha matriz singular.

(d) (1^{pts}) Para la matriz singular del (c), ¿qué condición(nes) sobre b_1, b_2, b_3 permiten que el sistema $(\mathbf{A}_{nueva})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenga solución? (en otras palabras ¿qué condición(nes) sobre b_1, b_2, b_3 garantizan que $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}_{nueva}\right)$?)

(e) (1^{pts}) Escriba la solución completa a $\left(\mathbf{A}_{nueva}\right)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1\\-6\\1\end{pmatrix}$ (la primera columna de $\mathbf{A}$).

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1. Spring, 2005

2.20. Grupo E curso 13/14

EJERCICIO 1. Considere que la matriz $\mathbf{A}$ es $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Explique con palabras el motivo por el que conocer todas las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ permite saber si un vector $\boldsymbol{b}$ está o no está en el espacio columna de $\mathbf{A}$.

(b) (1^{pts}) ¿Pertenece el vector $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 28 \\ 14 \end{pmatrix}$ al espacio columna de $\mathbf{A}$?

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring 2010

EJERCICIO 2. La matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 se reduce a $\mathbf{I}$ con las siguientes operaciones elementales:

1. Restar $2 \times$ (columna 1) de la columna 2
2. Restar $3 \times$ (columna 1) de la columna 3
3. Restar columna 3 de la columna 2
4. Restar $3 \times$ (columna 2) de la columna 1.

(a) (1^{pts}) ¿Quién es $\mathbf{A}^{-1}$?

(b) (1^{pts}) ¿Quién es $\mathbf{A}$?

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1995

EJERCICIO 3. Suponga que la matriz $\mathbf{A}$ es el siguiente producto de matrices:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L\dot{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Obtenga una base del espacio fila de $\mathbf{A}$ y una base del espacio columna de $\mathbf{A}$.

(b) (1^{pts}) Describa explícitamente todas las soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(c) (1^{pts}) Encuentre todas las soluciones (si es que hay, y dependiendo de c) del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1995

EJERCICIO 4. Esta pregunta es acerca de la matriz m por n para la cual

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{no tiene solución; y} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{tiene una única solución.}$$

(a) (1^{pts}) Dé tanta información como sea posible sobre m, n y el rango r de $\mathbf{A}$.

(b) (1^{pts}) Si para el vector $\boldsymbol{x}$ se cumple que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, indique una particularidad especial sobre $\boldsymbol{x}$ (no sólo que $\boldsymbol{x}$ pertence al espacio nulo).

(c) (1^{pts}) Escriba un ejemplo de matriz $\mathbf{A}$ que se ajuste a la descripción de la matriz del enunciado.

(d) (0.5^{pts}) *(No relacionado con las partes (a)–(c))* ¿Cómo sabe usted que el rango de la matriz no cambia si intercambiamos la primera y última columnas de la matriz?

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1995

2.21. Grupo E curso 12/13

Ejercicio 1. (2^{pts}) Encuentre todas las soluciones al sistema lineal $\begin{cases} x+2y+\ \ z-2w=5 \\ 2x+4y+\ \ z+\ \ w=9 \\ 3x+6y+2z-\ \ w=14 \end{cases}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 3, 2007

Ejercicio 2. En clase, hemos aprendido cómo realizar la eliminación gaussiana "hacia la izquierda", para transformar la matriz $\mathbf{A}$ en su forma escalonada triangular inferior $\mathbf{L}$: sin contar con posibles permutaciones de las columnas, restamos las columnas pivote a las sub-siguientes columnas para poner ceros a la derecha de los pivotes; lo que corresponde a multiplicar sucesivas matrices elementales por la derecha.

En lugar de ello, podemos realizar la eliminación "hacia arriba" restando múltiplos de las filas pivote de las filas por encima, para obtener una forma escalonada triangular inferior $\mathbf{L}$ mediante productos de matrices elementales por la izquierda. Por ejemplo, sea:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \end{bmatrix};$$

podemos restar dos veces la tercera fila de la primera para eliminar el 2, de manera que logramos los ceros sobre el "pivote" 1 de la esquina inferior derecha.

(a) (1^{pts}) Continúe esta eliminación "hacia arriba" para obtener una forma escalonada triangular inferior $\mathbf{L}$ de la matriz original $\mathbf{A}$, y escriba $\mathbf{L}$ en términos de $\mathbf{A}$ multiplicada por una sucesión de matrices elementales correspondientes a la eliminación de filas "hacia arriba".

(b) (1^{pts}) Suponga que seguimos este procedimiento para cualquier matriz $\mathbf{A}$ (no necesariamente cuadrada e invertible) para obtener una forma escalonada $\mathbf{L}$. ¿Cuál o cuales de los espacios nulo y columna son iguales para $\mathbf{A}$ y $\mathbf{L}$, y porqué?

(c) (1^{pts}) ¿Es la matriz $\mathbf{L}$ que obtenemos con eliminación "hacia arriba" igual a la matriz $\mathbf{L}$ que obtenemos cuando realizamos la eliminación "hacia la derecha"? Justifique su respuesta.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, October 3, 2007

Ejercicio 3. ¿Son los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ subespacios? Justifique su respuesta.

(a) (0.5^{pts}) vectores $(x, y, z,)$ tales que $2x - 2y + z = 0$
(b) (0.5^{pts}) vectores $(x, y, z,)$ tales que $x^2 - y^2 + z = 0$
(c) (0.5^{pts}) vectores $(x, y, z,)$ tales que $2x - 2y + z = 1$
(d) (0.5^{pts}) vectores $(x, y, z,)$ tales que $x = y$ y además $x = 2z$
(e) (0.5^{pts}) vectores $(x, y, z,)$ tales que $x = y$ ó bien $x = 2z$

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 5, 2007

Ejercicio 4. Sea $\mathbf{A}$ de orden 4 por 3 con columnas linealmente independientes.

(a) (0.5^{pts}) Cuáles son las dimensiones de los cuatro subespacios fundamentales $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$, y $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$?

(b) (0.5^{pts}) Describa explícitamente el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ y el espacio fila $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$ de $\mathbf{A}$. (No le pido la definición de dichos subespacios. Le pido que describa que vectores están contenidos en este caso particular).

(c) (0.5^{pts}) Suponga que $\mathbf{B}$ es una matriz de orden 4×3 tal que las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen exactamente los mismos espacios columna $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}(\mathbf{B})$; y los mismos espacios nulos $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{B})$; y los mismos espacios fila $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) = \mathcal{C}(\mathbf{B}^\intercal)$; y los mismos espacios nulos por la izquierda $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal) = \mathcal{N}(\mathbf{B}^\intercal)$.

¿Implica esto que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$? SI NO . Demuestre que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ o bien dé un contraejemplo donde $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 5, 2007

Ejercicio 5. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & d & 0 & g \\ 0 & b & 1 & e & 0 & h \\ 0 & c & 0 & f & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre la solución general a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$, si $s = 1$.
(b) (0.5^{pts}) Encuentre la solución general a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$, si $s = 0$.

Pista: Mejor no trabajar demasiado.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 6, 2006

2.22. Grupo H curso 12/13

Ejercicio 1. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$?
(b) (1^{pts}) Encuentre una matriz $\mathbf{B}$ tal que el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ sea igual al espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{B})$.
(c) (0.5^{pts}) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertennecen al espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ?$$

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 5, 2007

Ejercicio 2. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & k \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de k el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (2, 3, 7,)$ tiene una única solución?
(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de k el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (2, 3, 7,)$ tiene infinitas soluciones?
(c) (1^{pts}) Para $k = 4$, encuentre la matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ y la matriz triangular superior $\mathbf{U}$ tales que $\mathbf{LU} = \mathbf{A}$. (*Pista:* la inversa de una matriz triangular superior es también triangular superior)
(d) (0.5^{pts}) Para todos los valores de k, encuentre la solución completa al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (2, 3, 7,)$. (Quizá necesite considerar varios casos).

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 5, 2007

Ejercicio 3. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre una base del espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.
(b) (0.5^{pts}) Encuentre una base del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.
(c) (0.5^{pts}) Encuentre las condiciones lineales sobre b_1, b_2, b_3, b_4 que garantizan que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución.
(d) (0.5^{pts}) Encuentre la solución completa al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 5, 2007

Ejercicio 4. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ó $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.
(b) (0.5^{pts}) Todas las matrices de orden 2×2 que conmutan con $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (i.e. las matrices $\mathbf{B}$ tales que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$) forman un espacio vectorial (con la suma de matrices y producto por un escalar usuales).
(c) (0.5^{pts}) No existe una matriz de orden 3×3 cuyo espacio columna sea igual a su espacio nulo.
(d) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces $\mathbf{A}^2$ también lo es.
(e) (0.5^{pts}) Si las columnas de una matriz $\underset{m \times n}{\mathbf{A}}$ con $m \neq n$ son linealmente independientes, entonces existe $\mathbf{A}^{-1}$.

(a), (b), (c): MIT Course 18.06 Quiz 1, October 3, 2007

Ejercicio 5. Suponga que las columnas de una matriz $\mathbf{A}$ de orden 7 por 4 son linealmente independientes.

(a) (0.5^{pts}) Si tras una serie de operaciones elementales reducimos $\mathbf{A}$ a $\mathbf{L}$ ó $\mathbf{R}$, ¿cuantas columnas de ceros habrá? (¿o es imposible de saber?)
(b) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el espacio fila de $\mathbf{A}$? Explique porqué la siguente ecuación siempre tiene solución:

$$\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1 February 28, 2005

2.23. Grupo E curso 11/12

Ejercicio 1.

(a) (1^{pts}) Las trasformaciones elementales $\boldsymbol{\tau}_1$ y $\boldsymbol{\tau}_2$ reducen la matriz $\mathbf{A}$ a su forma escalonada por columnas. Encuentre la matriz $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$ es dicha forma escalonada (triangular inferior), si $\mathbf{A}$ es

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(b) (1^{pts}) Encuentre una matriz $\mathbf{U}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, October 13, 1993

Ejercicio 2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ c \end{pmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Encuentre una base del espacio nulo de $\mathbf{A}$.

(b) (1^{pts}) ¿Para qué valores de c el vector $\boldsymbol{b}$ está en el espacio columna de $\mathbf{A}$?

(c) (1^{pts}) Encuentre la solución completa del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ cuando c es elegido de manera que el sistema de ecuaciones tiene solución.

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 13, 1993

Ejercicio 3.

(a) (1^{pts}) Encuentre una base del espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ que son ortogonales (perpendiculares) a los dos vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) (1^{pts}) Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ son tres vectores no nulos en $\mathbb{R}^7$ ¿cuáles son las posibles dimensiones del subespacio generado por ellos?

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 13, 1993

Ejercicio 4. Dada la matriz de orden 5 por 3 $\mathbf{A}$.

(a) (0.5^{pts}) ¿Cómo decidiría si el vector $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}1, & 1, & 1, & 1, & 1,\end{pmatrix}$ es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$? Una sóla frase por favor.

(b) (0.5^{pts}) ¿Cómo decidiría mediante operaciones con las filas (no vale transponer la matriz $\mathbf{A}$) si el vector $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}1, & 1, & 1,\end{pmatrix}$ es una combinación de las filas de $\mathbf{A}$?

(c) (1^{pts}) Si finalemente las decisiones en (a) y (b) fueran ambas “SI”, ¿qué información sabría sobre el rango de la la matriz $\mathbf{A}$? Información completa por favor.

(d) (1^{pts}) Si finalmente las decisiones en (a) y (b) fueran ambas “NO”, ¿qué información sabría sobre el rango de la la matriz $\mathbf{A}$? Justifique su respuesta.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1995

2.24. Grupo H curso 11/12

Ejercicio 1. La matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 se reduce a $\mathbf{I}$ con las siguientes operaciones elementales:

1. Restar $2 \times$ (columna 1) de la columna 2
2. Restar $3 \times$ (columna 1) de la columna 3
3. Restar columna 3 de la columna 2
4. Restar $3 \times$ (columna 2) de la columna 1.

(a) (1^{pts}) ¿Quién es $\mathbf{A}^{-1}$?
(b) (1^{pts}) ¿Quién es $\mathbf{A}$?

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1995

Ejercicio 2. Suponga que la matriz $\mathbf{A}$ es el siguiente producto de matrices:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Obtenga una base del espacio fila de $\mathbf{A}$ y una base del espacio columna de $\mathbf{A}$.
(b) (1^{pts}) Describa explícitamente todas las soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(c) (1^{pts}) Encuentre todas las soluciones (si es que hay, y dependiendo de c) del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1995

Ejercicio 3. Esta pregunta es acerca de la matriz m por n para la cual

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{no tiene solución; y} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{tiene una única solución.}$$

(a) (1^{pts}) Dé tanta información como sea posible sobre m, n y el rango r de $\mathbf{A}$.
(b) (1^{pts}) Si para el vector $\boldsymbol{x}$ se cumple que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, indique una particularidad especial sobre $\boldsymbol{x}$ (no sólo que $\boldsymbol{x}$ pertence al espacio nulo).
(c) (1^{pts}) Escriba un ejemplo de matriz $\mathbf{A}$ que se ajuste a la descripción de la matriz del enunciado.
(d) (0.5^{pts}) *(No relacionado con las partes (a)–(c))* ¿Cómo sabe usted que el rango de la matriz no cambia si intercambiamos la primera y última columnas de la matriz?

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1995

Ejercicio 4. Suponga que las filas de una matriz 4 por 7 son linealmente independientes.

(a) (0.5^{pts}) Suponga que tras algunas operaciones elementales por columnas la matriz $\mathbf{A}$ queda reducida a $\mathbf{L}$ o $\mathbf{R}$. ¿Cuántas columnas de ceros ha obtenido (o es imposible de saber)?
(b) (1^{pts}) ¿Quién es el espacio columna de $\mathbf{A}$? Explique porqué el siguiente sistema tiene solución (note la traspuesta de $\mathbf{A}$):

$$\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.25. Grupo A curso 10/11

EJERCICIO 1. Considere la siguiente matriz $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (1^{pts}) Encuentre las soluciones especiales de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y describa en palabras tanto el espacio nulo de $\mathbf{A}$ (el conjunto de soluciones a dicho sistema), como su forma geométrica.
(b) (1^{pts}) Describa el espacio columna de la matriz $\mathbf{A}$. "Todas las combinaciones de las cuatro columnas" no es respuesta suficiente.
(c) (1^{pts}) ¿Cuál es la forma escalonada reducida $\mathbf{R}^* = \text{rref}(\mathbf{B})$ cuando $\mathbf{B}$ es la siguiente matriz por bloques de orden 6 por 8

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \text{ usando la misma matriz } \mathbf{A}?$$

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring 2010

EJERCICIO 2. Esta cuestión es sobre una matriz $\mathbf{A}$ de orden m por n para la cual

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \textbf{ no } \text{tiene } \textbf{soluciones} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tiene } \textbf{una única solución}.$$

(a) (1^{pts}) Proporcione toda la información posible sobre m y n, y el rango r de $\mathbf{A}$.
(b) (1^{pts}) Encuentre todas las soluciones a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y **explique su respuesta**.
(c) (1^{pts}) Escriba un ejemplo de matriz $\mathbf{A}$ que concuerde con la descripción del apartado (a).

MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall 2008

EJERCICIO 3. Considere una matriz $\mathbf{A}$ de 3 por 5 con rango $r = 3$.

(a) (0.75^{pts}) **Marque con un círculo las palabras** que completen correctamente la siguiente frase:

Entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (siempre / en ocasiones, aunque no siempre,) *tiene* (una única solución / muchas soluciones / niguna solución).

(b) (0.75^{pts}) ¿Cuál es el espacio columna de $\mathbf{A}$? Describa el espacio nulo de $\mathbf{A}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring 2010

EJERCICIO 4.

(a) (1^{pts}) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{p} = (2, 2,)$ y $\boldsymbol{q} = (-1, 4,)$.
(b) (1^{pts}) Encuentre una representación implícita de la recta anterior.

2.26. Grupo E curso 10/11

El ejercicio siguiente está pensado en función de la eliminación por filas y no tiene mucho sentido transformalo a un ejercicio de eliminación por columnas, salvo que se quiera plantear un sistema del tipo $\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \boldsymbol{b}$. Como un sistema así es inusual, lo dejo tal cual…

Ejercicio 1. Tras el proceso de eliminación gaussiana **por filas** de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ obtenemos un sistema equivalente escalonado reducido $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, cuya solución completa es:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$$

(a) (1^{pts}) ¿Cuál es la matriz escalonada reducida por filas $\mathbf{R}$ de orden 3 por 3 y quién es $\boldsymbol{d}$?

(b) (1.5^{pts}) Si en dicho proceso de eliminación hemos restado 3 veces la fila 1 de la fila 2 y después 5 veces la fila 1 de la 3, ¿Qué matriz transforma de vuelta la matriz $\mathbf{R}$ y el vector $\boldsymbol{d}$ a sus formas originales $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{b}$? Use esta matriz para encontrar $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{b}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring 2010

Ejercicio 2. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 0 & -1\\ 5 & 4 & 9 & -1\\ 1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ cuya forma escalonada reducida es: $\mathbf{R} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(a) (0.75^{pts}) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$? ¿y las dimensiones del espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ y del espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?

(b) (0.75^{pts}) Encuentre una base del espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

(c) (0.75^{pts}) Encuentre una base del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

(d) (1^{pts}) Encuentre una base del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

(e) (0.75^{pts}) Exprese la tercera fila de $\mathbf{A}$ como una combinación lineal de las filas ${}_{1|}\mathbf{A}$, ${}_{2|}\mathbf{A}$, ${}_{4|}\mathbf{A}$ y ${}_{5|}\mathbf{A}$.

Ejercicio 3. Considere una matriz $\mathbf{A}$ de 3 por 5 con rango $r = 3$.

(a) (0.75^{pts}) **Marque con un círculo las palabras** que completen correctamente la siguiente frase:

Entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (siempre / en ocasiones, aunque no siempre,) *tiene* (una única solución / muchas soluciones / niguna solución).

(b) (0.75^{pts}) ¿Cuál es el espacio columna de $\mathbf{A}$? Describa el espacio nulo de $\mathbf{A}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring 2010

Ejercicio 4.

(a) (1^{pts}) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{p} = (2, 4,)$ y $\boldsymbol{q} = (1, 3,)$.

(b) (1^{pts}) Encuentre una representación implícita de la recta anterior.

2.27. Grupo G curso 10/11

Ejercicio 1.

(a) (1^{pts}) Mediante eliminación encuentre el **rango** y las columnas pivote de $\mathbf{A}$ (y describa su espacio columna):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

(b) (1^{pts}) Encuentre las soluciones especiales del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y describa el conjunto de **todas las soluciones** de dicho sistema.

(c) (1^{pts}) ¿Para qué número b_3 el sistema $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ b_3 \end{pmatrix}$ tiene solución? Escriba la **solución completa** $\boldsymbol{x}_c$ (la solución general) empleando dicho valor b_3.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring 2011

Ejercicio 2. Suponga una matriz $\mathbf{A}$ de 3 por 5 y que el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución para todo $\boldsymbol{b}$. ¿**Cómo** son (a) (b) (c) y (d)? (Si no tiene suficiente información para responder, diga tanto como pueda).

(a) (1^{pts}) Espacio columna de $\mathbf{A}$

(b) (1^{pts}) Espacio nulo de $\mathbf{A}$

(c) (0.75^{pts}) Rango de $\mathbf{A}$

(d) (0.75^{pts}) Rango de la matriz 6 por 5: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring 2011

Ejercicio 3. Considere una matriz $\mathbf{A}$ de 3 por 5 con rango $r = 3$.

(a) (0.75^{pts}) **Marque con un círculo las palabras** que completen correctamente la siguiente frase:

Entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (siempre / en ocasiones, aunque no siempre,) *tiene* (una única solución / muchas soluciones / niguna solución).

(b) (0.75^{pts}) ¿Cuál es el espacio columna de $\mathbf{A}$? Describa el espacio nulo de $\mathbf{A}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring 2010

Ejercicio 4.

(a) (1^{pts}) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{p} = (1, -1,)$ y $\boldsymbol{q} = (0, 1,)$.

(b) (1^{pts}) Encuentre una representación implícita de la recta anterior.

2.28. Grupo F curso 09/10

EJERCICIO 1.

(a) (1^{pts}) Encuentre la inversa de las siguientes matrices $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & c\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(b) (1^{pts}) Encuentre la inversa de la siguiente matriz **usando el método de Gauss-Jordan**

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\a & b & c & d\end{bmatrix}$$

Ejercicios 36, 38 y 59 de la sección 3.3 del manual de Poole

EJERCICIO 2. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0 & 0\\1 & 2 & 0 & 2 & 2\\1 & 2 & -1 & 0 & 0\\2 & 4 & 0 & 4 & 4\end{bmatrix}$

(a) (0.5^{pts}) Encuentre una base del espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ (del espacio vectorial generado por las columnas).

(b) (0.5^{pts}) Encuentre una base del espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ (el conjunto de soluciones del sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$).

(c) (0.5^{pts}) Encuentre las condiciones lineales sobre b_1, b_2, b_3, b_4 que garantizan que el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución.

(d) (0.5^{pts}) Encuentre la solución completa al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 5, 2007

EJERCICIO 3. Para cada una de estas proposiciones, decida si la afirmación en verdadera o falsa. Justifique brevemente su respuesta

(a) **Verdadero/Falso:** El conjunto de matrices *no invertibles* de orden 3×3 constituye un subespacio del espacio vectorial de todas las matrices 3×3.

(b) **Verdadero/Falso:** Si el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, entonces $\mathbf{A}$ no es de rango completo por *filas*.

(c) **Verdadero/Falso:** Existen matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de orden $n \times n$ tales que $\mathbf{B}$ no es invertible pero $\mathbf{AB}$ si tiene inversa.

(d) **Verdadero/Falso:** Para toda matriz permutación se verifica que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2004

EJERCICIO 4. $\mathbf{A}$ es una matriz con espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\right\}$ generado por el siguiente sistema

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\1\\4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\1\end{pmatrix};\right].$$

(a) (1^{pts}) Escriba una matriz $\mathbf{B}$ tal que su espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$ es igual al espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. (Hay más de una respuesta correcta.) [Así, cualquier vector $\boldsymbol{y}$ en el espacio nulo de $\mathbf{A}$ verifica $\mathbf{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y}$ para algún vector $\boldsymbol{u}$.]

(b) (1^{pts}) Escriba una respuesta diferente para la pregunta (a) $\mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

(c) (1^{pts}) Para algún vector $\boldsymbol{b}$, alguien le dice que una solución particular a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

Sin embargo, su compañero de clase el Sr. Z le dice que una segunda solución es:

$$\boldsymbol{x}_Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mientras que su compañera la Sta. H le dice "No, Z está equivocado, una segunda solución que si que es correcta es:"

$$\boldsymbol{x}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quien de los dos tiene razón, Z o H (Pista: ¿qué es cierto respecto de la diferencia $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p$ cuando $\boldsymbol{x}$ es también una solución correcta para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$?)

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring, 2009

2.29. Grupo H curso 09/10

Ejercicio 1. La matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad $\mathbf{I}$ mediante las siguientes tres operaciones elementales *sobre las filas* (en el siguiente orden):

$$\begin{array}{ll} \underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}: & \text{Resta } 4\times\text{(fila 1) de la fila 2.}\\ \underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}: & \text{Resta } 3\times\text{(fila 1) de la fila 3.}\\ \underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}: & \text{Resta fila 3 de la fila 2.} \end{array}$$

(a) Escriba la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ en términos de las correspondientes matrices elementales. Calcule la matriz $\mathbf{A}^{-1}$.
(b) ¿Cuál es la matriz original $\mathbf{A}$?

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2006

Ejercicio 2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son sub-espacios vectoriales? Para aquellos casos que no lo son, muestre un ejemplo que viole alguna de las propiedades.

(a) Dada una matriz $\mathbf{A}$ de orden 3×5 con rango completo por filas, el conjunto de soluciones del sistema

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(b) Dados los vectores $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$, el conjunto de todos los vectores $\boldsymbol{x}$ tales que $\left[\boldsymbol{x}\right]^{\intercal}\left[\boldsymbol{y}\right] = 0$ y $\left[\boldsymbol{x}\right]^{\intercal}\left[\boldsymbol{z}\right] = 0$.

(c) Todas las matrices de orden 3×5 cuyo espacio columna contiene al vector $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

(d) Todas las matrices de orden 5×3 con $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ en su espacio nulo.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring, 2009

Ejercicio 3. Encuentre la solución completa (o *solución general*) a

$$\begin{bmatrix}1&3&1&2\\2&6&4&8\\0&0&2&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

Exercise 4, section 3.4 del manual de Strang 2005

Ejercicio 4. Mediante eliminación gausiana por columnas (y posiblemente alguna permutación) sobre la matriz $\mathbf{A}$ de orden 4×8

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&-1&1&0\\2&-2&2&0\\-2&1&-2&2\\1&-2&1&2\\-5&3&-5&4\\0&0&1&0\\2&-2&1&0\\-3&0&1&2\end{bmatrix} \quad \text{hemos obtenido la matriz} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&0&0\\0&1&0&0\\3&1&0&0\\-1&2&0&0\\0&0&1&0\\2&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(a) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$?
(b) ¿Cuáles son las dimensiones de los cuatro espacios fundamentales de $\mathbf{A}$?
(c) ¿Cuantas soluciones tiene el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$? ¿Depende la respuesta de cómo es $\boldsymbol{b}$? Justifique su respuesta.
(d) ¿Son las columnas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes? ¿Por qué?
(e) ¿Forman las filas 4, 5, 6 y 7 de $\mathbf{A}$ una base de $\mathbb{R}^4$? ¿Por qué?
(f) Escriba una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ (del conjunto de soluciones del sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$).
(g) Escriba una base del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.
(h) (Tampoco aquí son necesarios más cálculos) Sea $\mathbf{B} = \mathbf{AE}$. ¿Es $\mathbf{E}$ invertible? Si lo es, ¿cuál es la inversa de $\mathbf{E}$?

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2004

Referencias

Strang, G. (). 18.06 linear algebra. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare. License: Creative Commons BY-NC-SA.
URL http://ocw.mit.edu

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8. 14

Soluciones a los Ejercicios

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 1(a) Puesto que $\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ \hline 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(3)\mathbf{1}] \\ [(2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ \hline -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(\frac{1}{3})\mathbf{1}] \\ [(-\frac{1}{3})\mathbf{2}]}}]{\boldsymbol{\tau}}$
$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$,
tenemos que $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Check: $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

□

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 1(b) Del apartado a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} =$
$\mathbf{I}$. Así que $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \\ & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}$.

□

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 2(a) Dado que $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 4 & 11 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 12 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}}]{\boldsymbol{\tau}}$
$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};\right]$ es una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ (pero hay muchas otras respuestas posibles).

□

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 2(b) Es el plano de $\mathbb{R}^4$ formado por los vectores:

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

□

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 2(c) Como el vector del lado derecho es $\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_{|2}\right)$, la solución es

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 3(a) Si $\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}\right]$, como $3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, tenemos que $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$. Es decir $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. Dado que $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ apuntan en diferentes direcciones, sabemos que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son linealmente independientes ($\boldsymbol{b}$ no puede ser múltiplo de $\boldsymbol{a}$). Por tanto $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 2$ y $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 1$. Así pues, $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es el conjunto de múltiplos de $\left(3, 2, 1,\right)$.

□

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 3(b) Dado que $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son no nulos y apuntan en diferentes direcciones, sabemos que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son linealmente independientes. Y dado que $3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}$, la última columna se convierte en $\mathbf{0}$ tras la eliminación (por ser combinación lineal de las columnas que la anteceden). Por tanto, las dos primeras columnas son columnas pivote y la tercera es una columna libre.

$\square$

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 3(c) Dado que la matriz nula $\underset{3\times 3}{\mathbf{0}}$ pertenece al conjunto, el conjunto no es vacío. Solo necesitamos probar que $\mathcal{S}$ es cerado para las combinaciones lineales. Sean $\mathbf{B}\,(3,2,1,)=\mathbf{0}$ y $\mathbf{C}\,(3,2,1,)=\mathbf{0}$, y $x,y\in\mathbb{R}$; entonces

$$\left(x\mathbf{B}+y\mathbf{C}\right)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=x\mathbf{B}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+y\mathbf{C}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=x\mathbf{0}+y\mathbf{0}=\mathbf{0}\quad\Longrightarrow\quad\left(x\mathbf{B}+y\mathbf{C}\right)\in\mathcal{S}.$$

Por tanto $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

$\square$

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 4(a) $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\{\mathbf{0}\}$.

$\square$

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 4(b) El sistema $[\mathbf{I}_{|1};\ldots\mathbf{I}_{|n}]$ de columnas de la matriz identidad $\underset{n\times n}{\mathbf{I}}$ es una base para $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$. El sistema vacío, [ ], es una base para $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

$\square$

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 5. Si suponemos que existe $\mathbf{A}^{-1}$ encontraremos una contradicción. Veamos tres formas de encontrar una contradicción:

1. Cuando aplicamos una secuencia de transformaciones elementales a una matriz invertible *no podemos obtener una matriz con columnas nulas*. Pero, si asumimos (erróneamente) que $\mathbf{A}$ es invertible, es decir, si asumimos (erróneamente) $\mathbf{A}=\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}$, entonces
$$\begin{aligned}\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k})=&\mathbf{0}\\ \mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}=&\mathbf{0}.\end{aligned}$$

2. Una matriz invertible *no puede tener columnas nulas* pero como $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{0}$ multiplicando ambos lados por la (inexistente) $\mathbf{A}^{-1}$ obtenemos
$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}^2=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{A}=&(\mathbf{A}^{-1})\mathbf{0}\\ \mathbf{A}=&\mathbf{0}.\end{aligned}$$

3. Si $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ es rango completo, entonces $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right)=n\neq 0$, y por lo tanto, el espacio de fila de $\mathbf{A}$ tiene dimensión $n\neq 0$. Pero, dado que $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{0}$, multiplicando ambos lados por la (inexistente) $\mathbf{A}^{-1}$ obtenemos
$$\mathbf{A}=(\mathbf{A}^{-1})\mathbf{0}\quad\Rightarrow\quad\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)\subset\mathcal{C}\left(\mathbf{0}^\intercal\right)\quad\Rightarrow\quad\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right)=0=\dim\mathcal{C}\left(\mathbf{0}^\intercal\right).$$

4. Como $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}\right)_{|j}=\mathbf{A}\left(\mathbf{A}_{|j}\right)=\mathbf{0}_{|j}$, tenemos dos casos posibles
$$\begin{cases}\mathbf{A}_{|j}=\mathbf{0}\;\Rightarrow\;\mathbf{A}\text{ singular por tener una columna nula}\\ \mathbf{A}_{|j}\neq\mathbf{0}\;\Rightarrow\;\mathbf{A}\text{ tiene columnas linealmente dependientes}\end{cases}$$

Otra prueba: dado que el producto de matrices invertibles es invertible, si $\mathbf{A}$ fuera invertible, entonces $\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{A}^2$ sería invertible, pero no lo es ya que $\mathbf{A}^2$ tiene columnas de ceros.

$\square$

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 6(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{B}=&\mathbf{B}\mathbf{A}\\ \left(\mathbf{A}\mathbf{B}\right)^{-1}=&\left(\mathbf{B}\mathbf{A}\right)^{-1}\\ (\mathbf{B}^{-1})(\mathbf{A}^{-1})=&(\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{B}^{-1})\end{aligned}$$

$\square$

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 6(b) $\mathbf{A}x = \mathbf{0}$ tiene soluciones distintas de cero cuando las formas escalonadas de $\mathbf{A}$ tienen alguna columna nula (y por tanto podemos encontrar alguna solución especial). Consecuentemente, es cierto cuando $\boxed{\operatorname{rg}(\mathbf{A}) < n}$ y también cuando $\boxed{\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}}$, ya que esto implica que $\mathbf{A}$ es singular. El caso 1 es falso en general.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{4}] \\ [(5)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\frac{1}{3})\mathbf{4}]}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \text{ Por tanto, el conjunto de soluciones es } \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 2(a) Como $\left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}$

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{K} \\ \hline \mathbf{E} \end{array}\right],$$

$$\text{entonces } \boxed{\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}; \text{ comprobación: } \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 2(b) Como $\mathbf{AE} = \mathbf{K}$ entonces $\mathbf{A}{=}\mathbf{KE}^{-1}$; y como

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{E}^{-1} \end{array}\right],$$

concluimos que

$$\boxed{\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}; \text{ comprobación: } \mathbf{KU} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 2(c) Dado que el rango es tres, el espacio columna es todo $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, cualesquiera tres vectores independientes en $\mathbb{R}^3$ servirán. Por ejemplo: una lista con las tres columnas de $\mathbf{I}$ de orden 3, o una lista con las tres columnas de $\mathbf{A}$, o una lista con las tres columnas de $\mathbf{K}$.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 3(a) *Una posible respuesta es*: Como $\mathbf{E}$ es invertible entonces $\boxed{\operatorname{rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{rg}(\mathbf{U}) = 3}$; ya que

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{EU} \ \Rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) \subset \mathcal{C}(\mathbf{U}^\intercal) \\ \mathbf{U} = (\mathbf{E}^{-1})\mathbf{A} \ \Rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{U}^\intercal) \subset \mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) \end{cases} ; \text{ y por tanto } \mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) = \mathcal{C}(\mathbf{U}^\intercal).$$

Pero el siguiente razonamiento alternativo nos servirá para responder al apartado (b): Puesto que $\mathbf{A}=\mathbf{EU}$ entonces $\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}=\mathbf{E}\big(\mathbf{U}_{\tau_1\cdots\tau_k}\big)$. Así, al obtener una forma preescalonada de $\mathbf{U}$ el rango de $\mathbf{A}$ resultará evidente:

$$\left[\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{ccccc}1&0&1&4&5\\0&1&2&2&1\\0&0&0&1&1\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccccc}1&0&0&0&5\\0&1&0&0&1\\0&0&0&1&1\\\hline 1&0&-1&-4&0\\0&1&-2&-2&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{5}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{5}]\\ [(-1)\mathbf{4}+\mathbf{5}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccccc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 1&0&-1&-4&-1\\0&1&-2&-2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\frac{\mathbf{U}_{\tau_1\cdots\tau_k}}{\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}}\right].$$

$$\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}=\mathbf{EU}_{\tau_1\cdots\tau_k}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-3&1&0&0&0\\-3&1&0&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow\boxed{\operatorname{rg}\big(\mathbf{A}\big)=3}.$$

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 3(b) $\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}=\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k})$ es una forma preescalonada y las columnas 3 y 5 de $(\mathbf{A})_{\tau_1\cdots\tau_k}$ son cero, por lo que las columnas 3 y 5 de $(\mathbf{I})_{\tau_1\cdots\tau_k}$ son soluciones especiales.

Por tanto $\left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\\1\end{pmatrix};\right]$ es una base de $\mathcal{N}\big(\mathbf{A}\big)$.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 3(c) $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ es equivalente a $(\mathbf{E}^{-1})\mathbf{A}\boldsymbol{x}=(\mathbf{E}^{-1})\boldsymbol{b}$ donde $(\mathbf{E}^{-1})\mathbf{A}=\mathbf{U}$, y ya conocemos una forma escalonada reducida de $\mathbf{U}$. Entonces, la parte (no demasiado) difícil es calcular el vector del lado derecho $\boldsymbol{c}=(\mathbf{E}^{-1})\boldsymbol{b}$ para obtener un sistema de ecuaciones equivalente $\mathbf{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$.

$$\left[\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\-3&1&0\\-3&1&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\\\hline 1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 1&0&0\\3&1&0\\0&-1&1\end{array}\right]=\left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{E}^{-1}}\right];$$

así $\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\-8\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{c}$. Mirando la forma escalonada reducida de $\mathbf{U}$ en el apartado (a) vemos que tres veces $3\mathbf{U}_{|1}$ más $\mathbf{U}_{|2}$ más $\mathbf{U}_{|4}$ es igual a $\boldsymbol{c}$. Consecuentemente, una solución particular es

$$3(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k})_{|1}+(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k})_{|2}+(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k})_{|4}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Por tanto, la solución es $\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^5\;\middle|\;\exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-1\\-2&1\\1&0\\0&-1\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 4(a) Las columnas que se añaden en la concatenación $[\mathbf{A}\ \mathbf{A}]$ son iguales a las que ya había en $\mathbf{A}$. Por tanto, tras la eliminación de izquierda a derecha, las formas pre-escalonadas de ambas matrices tendrán las mismas columnas pivote; y dichas columnas forman un base de sus correspondientes espacios columna. Es decir, $\boxed{\mathcal{C}\left([\mathbf{A}\ \mathbf{A}]\right)=\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)}$.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 4(b) Dado que ambas matrices tienen el mismo espacio columna, ambas tienen el mismo rango r. Por tanto $\boxed{\dim \mathcal{N}\left([\mathbf{A}\ \mathbf{A}]\right) = 12 - r}$.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 5.

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{n-1}) =&\mathbf{I}(\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{n-1})-\mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{n-1})\\ =&(\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{n-1})-(\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{n-1}+\mathbf{0})=\mathbf{I}.\end{aligned}$$

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 6. **Verdadero**. $\mathbf{AB} = \left(\mathbf{AB}\right)^{\intercal} = (\mathbf{B}^{\intercal})(\mathbf{A}^{\intercal})$.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 1(a) La matriz de la derecha del producto es de rango completo (es decir, un producto de matrices elementales $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$); si la denominamos $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ tenemos que la matriz de la izquierda del producto es igual a $\mathbf{A}(\mathbf{E}^{-1}) = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1}}$; por tanto la matriz de la izquierda del producto es una forma escalonada de $\mathbf{A}$ con tres pivotes $\Rightarrow \boxed{\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 3}$. En otras palabras, si $\mathbf{E}$ es de rango completo, $\operatorname{rg}\left(\mathbf{BE}\right) = \operatorname{rg}\left(\mathbf{B}\right)$.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 1(b) Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{\begin{pmatrix}0, & 0, & 0,\end{pmatrix}\right\}$, un sistema generador solo contiene el vector nulo o es vacío

$$\text{Sistema generador de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right): \quad \left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\right] \qquad \text{o bien} \qquad [\,] = \emptyset,$$

la base es necesariamente vacía (dimensión cero): Base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = [\,] = \emptyset$.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 1(c) Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{B}^{\intercal}\right) = \mathcal{N}\left(\left(\mathbf{AE}\right)^{\intercal}\right)$ si $\mathbf{E}$ es de rango completo, basta con mirar la matriz de la izquierda: $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&2&0\\4&2&1\\5&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-4)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&2&0\\0&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix} \Rightarrow$ una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$:

$$\left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\\1\end{pmatrix};\right].$$

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 1(d) Puesto que la primera fila de $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix}1, & 1, & 7,\end{pmatrix}$, el conjunto de soluciones es

$$\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-1&-1\\-2&1\\1&0\\0&-1\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}.$$

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 2(a)

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&5&6\\2&6&c\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}1&0&0\\1&3&3\\2&2&c-6\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}1&0&0\\1&3&0\\2&2&c-8\end{bmatrix} = \mathbf{L};$$

Por tanto; $c = 8 \Rightarrow \mathbf{A}$ singular.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 2(b) Cuando $c \neq 8$ la matriz es invertible (rango 3). Así que su espacio nulo solo contiene el cero, $\mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right) = \{\mathbf{0}\}$, y su espacio columna es todo $\mathbb{R}^3$. Exáctamente lo mismo aplica para $\mathsf{A}^{\text{-}1}$.

$\square$

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 2(c) Aplicando las transformaciones del primer apartado a las columnas de I:

$$\mathsf{I}_{\overset{\tau}{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\overset{\tau}{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\overset{\tau}{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\overset{\tau}{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\tau}{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1&-2&-1\\0&1&-1\\0&0&1 \end{bmatrix} = \mathsf{B}.$$

Así, $\mathsf{A}_{\overset{\tau}{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\overset{\tau}{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\overset{\tau}{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} = \mathsf{AB} = \mathsf{L}$.

$\square$

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 2(d) Basta invertir B; por ejemplo, aplicando a las columnas de I la inversa de la secuencia de transformaciones del apartado (a).

$$\mathsf{B}^{\text{-}1} = \mathsf{I}_{\substack{\overset{\tau}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}\\ [(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\tau}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&1\\0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\tau}{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1&0&3\\0&1&1\\0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\tau}{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 1&2&3\\0&1&1\\0&0&1 \end{bmatrix} = \mathsf{U};$$

de manera que $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$; pues $\mathsf{LU} = \left(\mathsf{A}_{\overset{\tau}{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\overset{\tau}{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\overset{\tau}{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\right)\left(\mathsf{I}_{\overset{\tau}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}\overset{\tau}{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\overset{\tau}{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\right) = \mathsf{A}$.

$\square$

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 3(a) Como para cada $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ el sistema tiene solución, sabemos que siempre $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$, es decir, $\mathbb{R}^m \subset \mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$. Y puesto que $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right) \subset \mathbb{R}^m$ (pues cada columna tiene m componentes): $\boxed{\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right) = \mathbb{R}^m}$.

$\square$

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 3(b) Como cada fila tiene un pivote: $\boxed{n \geq m = r}$.

$\square$

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 3(c) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2&5\\4&10\\0&0 \end{bmatrix}$.

$\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$ es la recta formada por los vectores $\left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2\\4\\0 \end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$.

$\mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right)$ es la recta formada por los vectores $\left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -5\\2 \end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$.

$\square$

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 3(d) $\left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -5\\2 \end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$.

$\square$

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 1(a) Todas las columnas verifican que su tercera componente es la suma de las dos primeras $(a,\ b,\ (a+b),)$. Como $1+0 \neq 0$, sabemos que $(1,\ 0,\ 0,) \notin \mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$.

$\square$

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 1(b) Cualquiera del conjunto

$$\left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists b_1, b_2 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_1+b_2 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v} = (0,)\right\}.$$

$\square$

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 1(c) Porque A tiene tres filas pero $\dim \mathcal{C}\left(\mathsf{A}^{\intercal}\right) < 3$, es decir, $\operatorname{rg}\left(\underset{3\times 3}{\mathsf{A}}\right) < 3$.

$\square$

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 2(a) Por ejemplo: $\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix};\right]$.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 2(b) Por ejemplo, el conjunto de múltiplos de $\mathbf{A}$:

$$\left\{\mathbf{M}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\ \middle|\ \exists c\in\mathbb{R};\ \mathbf{M}=c\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}=\mathcal{L}\left(\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix};\right]\right).$$

Otro ejemplo: las combinaciones lineales de las tres primeras matrices de la base del apartado (a):

$$\left\{\mathbf{M}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\ \middle|\ \exists \boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3;\ \mathbf{M}=\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix};\right]\boldsymbol{b}\right\}$$
$$=\mathcal{L}\left(\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix};\right]\right).$$

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 2(c) Por ejemplo:

$$\left\{\mathbf{M}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\ \middle|\ \exists a,b\in;\ \mathbf{M}=a\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right\}=\mathcal{L}\left(\left[\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix};\right]\right).$$

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 2(d) Verdadero. Si un subespacio $\mathcal{V}$ contiene $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, también contiene $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{I}$.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 3(a) Las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes puesto que $\mathbf{R}_{|3}=\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|3})=\mathbf{0}$. Puesto que $\mathbf{B}_{|3}$ no tiene componentes nulas, sabemos que $\mathbf{A}_{|3}$ es una combinación lineal de $\mathbf{A}_{|1}$ y $\mathbf{A}_{|2}$. En particular $\mathbf{A}_{|3}=3\mathbf{A}_{|1}-2\mathbf{A}_{|2}$.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 3(b) Tras dos pasos de eliminación tenemos

$$\begin{bmatrix}1&2&?\\2&a&?\\1&1&?\\b&8&?\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&?\\2&a-4&?\\1&-1&?\\b&8-2b&?\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&?\\2&4-a&?\\1&1&?\\b&2b-8&?\end{bmatrix}.$$

Puesto que $4-a=0$ y que $2b-8=2$ necesariamente $a=4$ y $b=5$.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 3(c) $\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}.$

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 3(d) Es el mismo que el de $\boldsymbol{x}\mathbf{R}=\mathbf{0}$. Por tanto,

$$\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-2&-3\\1&0\\0&-2\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}.$$

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 3(e) $\mathcal{C}(\mathbf{A})=\mathcal{C}(\mathbf{R})$ y $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)=\mathcal{N}(\mathbf{R}^\intercal)$.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 4(a) $\begin{bmatrix}2&2&0\\2&5&3\\1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}2&0&0\\2&3&3\\1&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}2&0&0\\2&3&0\\1&-1&3\end{bmatrix}.$

Como $\operatorname{rg}(\mathbf{A})=3$, entonces $\mathcal{C}(\mathbf{A})=\mathbb{R}^3$. Por tanto sirve cualquier base de $\mathbb{R}^3$; por ejemplo $\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\right]$.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 4(b) $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 0$.

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 1(a) Como hay solución para cada $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, el rango de $\mathbf{A}$ es igual al número de filas, es decir, $\boxed{rg(\mathbf{A}) = m.}$

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 1(b) Como el rango es m entonces, $\mathcal{N}\left(\underset{n\times m}{\mathbf{A}^\intercal}\right) = \{\mathbf{0}\}$ con $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$.

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 1(c) Puesto que $rg(\mathbf{A}) = m \leq n$, entonces $\underset{n\times m}{\mathbf{A}^\intercal}$ es de rango completo por columnas. Por tanto 0 ó 1 soluciones (si $m = n$ entonces siempre 1 solución).

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 2(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 2(b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(\frac{1}{3})\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\frac{1}{2})\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 3(a) Puesto que el sistema es homogéneo siempre tiene solución. Como hay más columans que filas, cualquier forma pre-escalonada de $\mathbf{A}^\intercal$ tiene una columna libre y, por tanto, encontraremos una solución especial $\neq \mathbf{0}$.

(Como $\boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{w}$ son una base, son linealmente independientes y $\mathbf{A}^\intercal$ (3×4) es de rango completo por *filas*. Consecuentemente el sistema es resoluble para cualquier vector del lado derecho. Por tanto, la afirmación sería cierta incluso si $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ no fuera homogeneo).

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 4(a) No. El conjunto no es cerrado para la suma. Por ejemplo: $\mathbf{I} + (-\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ no es invertible. El conjunto tampoco es cerrado para el producto por escalares. Por ejemplo: $0\mathbf{I} = \mathbf{0}$ no es invertible.

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 4(b) Si, es un subespacio ya que es cerrado para las combinaciones lineales: considere $a, b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de orden $m \times 2$ tales que $\mathbf{A}\big(\boldsymbol{x}_0\big) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{B}\big(\boldsymbol{x}_0\big) = \mathbf{0}$ entonces

$$(a\mathbf{A} + b\mathbf{B})\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = a\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\mathbf{B}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 5(a)

- Si $c \neq 0$, $\mathbf{A}$ es invertible: $\begin{bmatrix} c & c & 1 \\ c & c & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-\frac{1}{c})\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 9-\frac{3}{c} \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-3+\frac{1}{c})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$

- $\boxed{\mathbf{A} \text{ es singular si y solo si } c = 0}$ (2 pivotes): $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 5(b)

- Cuando $c = 0$: rango 2
- Cuando $c \neq 0$: rango 3

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 5(c)

- Cuando $c = 0$: $\mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\} = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \right] \right)$
- Cuando $c \neq 0$: $\mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right) = \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^3$.

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 5(d)

- Cuando $c = 0$: Una base de $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}; \right]$
- Cuando $c \neq 0$: Una base de $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$ es cualquier base de $\mathbb{R}^3$; por ejemplo $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \right]$.

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 1(a)

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{R}$$

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 1(b) Puesto que $\mathsf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} = \mathsf{R}$, entonces $\mathsf{E} = \mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}}$. Así pues $\mathsf{E}^{-1} = \mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}$, es decir, $\mathsf{E}^{-1} = \mathsf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 1(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$. Rango 1, 1 y 0 respectivamente.

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 2(a) Puesto que $\boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{w}$ son una base, son linealmente independientes. Así pues, (de orden 4×3) es de rango completo por *columnas*. Consecuentemente todas las columnas de cualquiera de sus formas pre-escalonadas son columnas pivote (no hay soluciones especiales).

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 3(a) No. Conjunto NO cerrado para la suma. Por ejemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathsf{I}$ es invertible.

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 3(b) Si. Es un subespacio. Considere las matrices A y B con diagonales $(a_{11},\ a_{22},\ a_{33})$ y $(b_{11},\ b_{22},\ b_{33})$, respectivametne, y donde $a_{11}+a_{22}+a_{33} = b_{11}+b_{22}+b_{33} = 0$.

Cualquier combinación lineal $\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{B}$ tendra como diagonal $(\lambda a_{11}+\mu b_{11},\ \lambda a_{22}+\mu b_{22},\ \lambda a_{33}+\mu b_{33})$. Por tanto $(\lambda a_{11}+\mu b_{11})+(\lambda a_{22}+\mu b_{22})+(\lambda a_{33}+\mu b_{33}) = \lambda(a_{11}+a_{22}+a_{33})+\mu(b_{11}+b_{22}+b_{33}) = 0+0 = 0.$ □

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 4(a) El sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. □

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 4(b) $\mathbf{A}$ invertible si $b \neq 3$. Y $\begin{bmatrix}0&3&2\\0&b&2\\2&a&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ nos da $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ por inspección. □

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 4(c)

- Si $b=3$ entonces $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right)=2$ (Dos filas iguales, independientemente del valor de a).
- Si $b\neq 3$ entonces $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right)=3$ (Columnas linealmente independientes. No depende de a).

□

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 4(d)

- Si $b=3$ una base para $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}3\\3\\a\end{pmatrix};\right]$.
- Si $b\neq 3$ entonces cualquier base de $\mathbb{R}^3$ es una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, por ejemplo $\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\right]$.

□

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 5.

Base para $\mathcal{C}\left(\mathbf{M}^\intercal\right)$: $\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\right]$, Base para $\mathcal{N}\left(\mathbf{M}\right)$: $\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\right]$,

Base para $\mathcal{C}\left(\mathbf{M}\right)$: $\left[\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\\4\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\2\end{pmatrix};\right]$, Base para $\mathcal{N}\left(\mathbf{M}^\intercal\right)$: $\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\-4\\0\\-2\\1\end{pmatrix};\right]$.

□

(Grupo B curso 19/20) Ejercicio 1(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-3\\2&4&7&-4\\3&6&10&-7\\3&6&10&-7\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\2&0&1&2\\3&0&1&2\\3&0&1&2\\\hline 1&-2&-3&3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\2&0&1&0\\3&0&1&0\\3&0&1&0\\\hline 1&-2&-3&9\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]$$

Una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$: $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}3\\7\\10\\10\end{pmatrix};\right]$; otra: $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix};\right]$.

□

(Grupo B curso 19/20) Ejercicio 1(b) Una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$: $\left[\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix};\right]$.

□

(Grupo B curso 19/20) Ejercicio 1(c) $\left\{ \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}9\\0\\-2\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$.

□

(Grupo B curso 19/20) Ejercicio 2. $\boxed{\text{Una matriz así NO existe}}$. Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)\subset\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)\subset\mathbb{R}^3$, la matrix $\mathbf{A}$ es de orden 3 por 3; y puesto que $\dim\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=1$, su rango es uno. Por tanto, $\dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ debería ser $3-1=2$, y por tanto $\left[(1,\quad 2,\quad 1,);\right]$ no puede ser una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, pues dicho sistema solo contiene un vector.

□

(Grupo B curso 19/20) Ejercicio 3(a) El espacio nulo tiene dimension 2. Por tanto $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right)=3-2=1$, y $\boxed{\dim\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)=1}$.

□

(Grupo B curso 19/20) Ejercicio 3(b) La columna $\mathbf{A}_{|1}$ se deduce de la solución particular. El resto de columnas se deducen de las soluciones especiales: $\boxed{\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{bmatrix}}$.

□

(Grupo B curso 19/20) Ejercicio 3(c) Los múltiplos de $\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$. Es decir

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\left\{\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists a\in\mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{b}=a\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

□

(Grupo B curso 19/20) Ejercicio 4(a) Recuerde que los productos por la izquierda corresponden a transformaciones de las filas, y por la derecha a las columnas. Por tanto, intercambiar las primeras filas corresponde a multiplicar por la izquierda:

$$\mathbf{B}=\mathbf{MA}\quad\text{donde}\quad\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$\mathbf{M}$ es invertible puesto que repetir el intercambio nos devuelve al estado inicial, es decir, $\mathbf{M}^2=\mathbf{I}$.

□

(Grupo B curso 19/20) Ejercicio 4(b) De nuevo multiplicamos por la izquierda por ser una transformación de las filas, por tanto $\boxed{\mathbf{B}=\mathbf{MA}}$. Para encontrar $\mathbf{M}$, aplicamos las transformaciones a la matriz identidad 3 por 3. Mantener la primera fila no cambia nada. Añadir la seguda fila a la tercera si modifica $\mathbf{I}$:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

Sustituir la segunda fila por la suma de las otras dos nos da:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}$ no es invertible; sus columnas don dependientes, pues las dos últimas son iguales. Esto significa que $(0,1,1)$ es un vector de $\mathcal{N}\left(\mathbf{M}\right)$. Como $\mathcal{N}\left(\mathbf{M}\right)$ contiene otros vectores además del nulo, $\mathbf{M}$ es singular.

□

(Grupo B curso 19/20) Ejercicio 4(c) Ahora operamos con las columnas, por tanto $\boxed{\mathsf{B} = \mathsf{AM}}$. Para obtener M, aplicamos las transformaciones a la matriz identidad:

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

M es invertible ya que dichas restas son reversibles: basta sumar la primera columna a las otras dos! De hecho, aplicando esta operación sobre la indentidad obtenemos la inversa de M

$$\mathsf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

(Grupo B curso 19/20) Ejercicio 5. $\left(\mathsf{A}^{\intercal}\right)^{-1} = \left(\mathsf{A}^{-1}\right)^{\intercal} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\intercal} = \boxed{\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}}.$

□

(Grupo E curso 19/20) Ejercicio 1(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & \color{blue}{\mathbf{7}} & 4 & -2 & -2 \\ 3 & 9 & 6 & 7 & -13 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}]{\substack{\tau \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \color{blue}{\mathbf{1}} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 10 & -10 \\ \hline 1 & -3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{4}+\mathbf{5}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ \hline 1 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \color{blue}{z} \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \color{blue}{0} \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \color{blue}{1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

El conjunto es una recta pero, como no contiene el vector nulo, dicho conjunto no es un subespacio.

□

(Grupo E curso 19/20) Ejercicio 1(b) En la expresión del conjunto de soluciones de más arriba, z es la variable "libre" (la correspondiente a la tercera columna de A). Pero, mediante transformaciones elementales tenemos que

$$\left[\begin{array}{c|c} -2 & 2 \\ 0 & 0 \\ \color{blue}{1} & \color{blue}{0} \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\tau} \left[\begin{array}{c|c} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(\frac{-1}{2})\mathbf{1}]}]{\tau} \left[\begin{array}{c|c} \color{blue}{1} & \color{blue}{0} \\ 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow S = \left\{ \begin{pmatrix} \color{blue}{x} \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \color{blue}{0} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \color{blue}{1} \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Donde ahora $\color{blue}{x}$ es la variable "libre".

□

(Grupo E curso 19/20) Ejercicio 1(c) $\boxed{\text{El sistema } \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \text{ es resoluble para cualquier } \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3}$; puesto que $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right) \subset \mathbb{R}^3$ y puesto que el rango de A es 3, entonces $\boxed{\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right) = \mathbb{R}^3.}$

$\boxed{\text{El nuevo número es } \underline{{}_{2|}\mathsf{A}_{|2} = 6}\,;}$ así pues $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & \color{blue}{6} & 4 & -2 \\ 3 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}$; y $\operatorname{rg}\left(\mathsf{M}\right) = 2 = \dim \mathcal{C}\left(\mathsf{M}\right)$.

□

(Grupo E curso 19/20) Ejercicio 1(d) Por ejemplo: $\boxed{\boldsymbol{c} = \mathsf{A}_{|1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};\quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$

□

(Grupo E curso 19/20) Ejercicio 2. Premultiplicando ambos lados de la igualdad por $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\intercal}$ tenemos

$$\begin{bmatrix} & & 1\\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&6\\1&0&8\end{bmatrix}\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{I} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} & & 1\\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&6\\1&0&8\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}1&0&8\\1&2&3\\2&5&6\end{bmatrix}}.$$

□

(Grupo E curso 19/20) Ejercicio 3(a)

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&2&-1\\0&2&4&-2\\0&1&2&-1\end{bmatrix},$$ o cualquier múltiplo *no nulo* de esta matrix.

□

(Grupo E curso 19/20) Ejercicio 3(b) $\boxed{\text{SI.}}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&3\\1&1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\tau} \begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&2\\1&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}]{\tau} \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}]{\tau} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

Por tanto $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}^3$ (las columnas generan el espacio) y $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \{\mathbf{0}\}$; (son independientes) es decir, las columnas de $\mathbf{A}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

□

(Grupo E curso 19/20) Ejercicio 4(a) Puesto que ${}_{i|}\mathbf{A} = \left({}_{i|}\mathbf{B}\right)\mathbf{C}$, y puesto que $\mathbf{B}$ es de rango completo y ${}_{1|}\mathbf{C}$ y ${}_{3|}\mathbf{C}$ son linealmente independientes, entonces una base del espacio fila es: $\left[{}_{1|}\mathbf{C};\quad {}_{3|}\mathbf{C};\right] = \left[(2,2,4,4,);\quad (2,2,6,6,);\right]$.

□

(Grupo E curso 19/20) Ejercicio 4(b) Puesto que $\mathbf{A}_{|j} = \mathbf{B}\left(\mathbf{C}_{|j}\right)$; y puesto que $\mathbf{B}$ es de rango completo y $\mathbf{C}_{|1}$ y $\mathbf{C}_{|3}$ son linealmente independientes, entonces $\mathbf{B}\mathbf{C}_{|1} = \mathbf{B}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\\6\end{pmatrix}$ y $\mathbf{B}\mathbf{C}_{|3} = \mathbf{B}\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\12\\14\end{pmatrix}$ también son linealmente independientes. Así, una base del espacio columna es: $\left[\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}8\\12\\14\end{pmatrix};\right]$.

□

(Grupo E curso 19/20) Ejercicio 4(c) Puesto que el rango de $\mathbf{A}$ es 2 y que $\mathbf{C}_{|1} = \mathbf{C}_{|2}$ y $\mathbf{C}_{|3} = \mathbf{C}_{|4}$, una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es $\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix};\right]$.

□

(Grupo E curso 19/20) Ejercicio 4(d) Si $b_{33} = 0$ entonces $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}2&0&0\\3&4&0\\2&0&0\end{bmatrix}$ y por tanto, para la nueva $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$ ocurre que $\dim\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = 1 = \dim\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ y $\dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 3$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 1(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&-b_1\\3&8&2&-b_2\\5&12&2&-b_3\end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\3&-1&-1&3b_1-b_2\\5&-3&-3&5b_1-b_3\end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(3b_1-b_2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\3&-1&0&0\\5&-3&0&-4b_1+3b_2-b_3\end{array}\right]$$

es decir, $\boxed{4b_1 - 3b_2 + b3 = 0}$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 1(b) Puesto que su forma escalonada tiene dos pivotes, el rango es $\boxed{2}$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 1(c) Primero encontramos una forma escalonada reducida de la matriz

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\3&-1&0\\5&-3&0\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\-4&-3&0\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&3&0\end{bmatrix} = \mathbf{R}.$$

De $\mathbf{R}$ se deduce que

$$\begin{pmatrix}4, & -3, & 1,\end{pmatrix}\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix}4, & -3, & 1,\end{pmatrix}\mathbf{A} = \mathbf{0},$$

por tanto $\boxed{\begin{pmatrix}4, & -3, & 1,\end{pmatrix} \text{ es un vector en } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)}$.

También usando la forma escalonada reducida se puede contestar al primer apartado. Los vectores $\boldsymbol{b}$ que pertenecen al espacio columna deben ser combinación lineal de las dos columnas no nulas de $\mathbf{R}$; por tanto deben ser de la forma

$$b_1\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\-4b_1+3b_2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad b_3 = -4b_1+3b_2$$

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 2. Puesto que $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) = \mathbf{A}\boldsymbol{v} - \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$; entonces $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. Así pues $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} \text{ es otra solución}}$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 3.

$$\left[\begin{array}{cccc}1&1&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&-2\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{4}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline 1&-1&0&1\\0&1&0&\frac{-1}{2}\\0&0&1&0\\0&0&0&\frac{-1}{2}\end{array}\right]; \qquad \text{así pues} \qquad \boxed{\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}1&-1&0&1\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&0\\0&0&0&-1/2\end{bmatrix}}.$$

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 4. Queremos encontrar una matriz cuyo espacio nulo está generado por $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Tal matriz debe tener *tres columnas*; y *su rango debe ser dos*, de manera que no hay más vectores en una base de dicho espacio nulo: el espacio nulo debe ser de dimensión uno para que pueda ser generado por $\boldsymbol{v}$. Ejemplos de matrices como la solicitada son:

$$\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&2&4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}; \quad \text{puesto que} \quad \begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&2&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}; \; \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Pero *aplicando ingeniería inversa* (por ejemplo aplicada a una matriz con tres filas) podemos econtrar muchas más; por ejemplo, partiendo de una matriz de rango 2 (es decir, si a y b son no nulas):

$$\left[\begin{array}{ccc}a&0&0\\0&b&0\\c&d&0\\\hline 1&0&1\\0&1&2\\0&0&-1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc}a&0&0\\0&b&0\\c&d&0\\\hline 1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc}a&0&a\\0&b&2b\\c&d&(c+2d)\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline \mathbf{I}\end{array}\right] \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix}a&0&a\\0&b&2b\\c&d&(c+2d)\end{bmatrix}$$

Usted puede estar tentado a escribir una matriz con una única fila, como $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, cuyo espacio nulo contiene al vector $\boldsymbol{v}$, pero tal matriz tiene un espacio nulo de dimensión 2, por lo que no está generado por $\boldsymbol{v}$. Una matriz nula es una respuesta aún peor, pues al tener rango cero, su espacio nulo es todo $\mathbb{R}^3$ (dimensión 3).

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 5(a) Puesto que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$, necesariamente $\boxed{n = 4}$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 5(b) Puesto que $n = 4$ y solo hay una solución especial, entonces $\boxed{\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 4 - 1 = 3}$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 5(c) Puesto que $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 3$ entonces $\boxed{m \geq 3}$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 6(a) $\boxed{\text{No es un subespacio}}$, puesto que no contiene al vector nulo $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^6$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 6(b) $\boxed{\text{Es un subespacio}}$ (relacionado con, aunque no igual, el espacio nulo de $\mathbf{A}$). Si tomamos dos matrices $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ del conjunto $\mathcal{V}$, entonces la combinción lineal $a\mathbf{C} + b\mathbf{D}$ pertenece al conjunto $\mathcal{V}$, puesto que $\mathbf{A}(a\mathbf{C} + b\mathbf{D}) = a\mathbf{AC} + b\mathbf{AD} = a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 6(c) $\boxed{\text{No es un subespacio}}$. Considere las siguientes matrices singulares

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Su suma es la matriz identidad, que es de rango completo. Por tanto el conjunto no es cerrado para la suma de matrices.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 7(a)

Todo lo que podemos decir es que $\boxed{\text{rango } \mathbf{A} \leq \text{rango } [\mathbf{A} \,|\, \mathbf{B}]}$. ($\mathbf{A}$ puede tener r columnas pivote, y esas también serán columnas pivote de $[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]$; pero podría haber nuevas columnas pivote entre las de $\mathbf{B}$).

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 7(b)

En este caso $\boxed{\text{rango } \mathbf{A} = \text{rango } [\mathbf{A} \,|\, \mathbf{A}^2]}$. (Cada columna de $\mathbf{A}^2$ es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$. Por ejemplo, si llamamos $\mathbf{A}_{|1}$ a la primera columna de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_{|1}$ es la primera columna de $\mathbf{A}^2$. Así que no puede haber nuevas columnas pivote (nuevas columnas linealmente independientes de las de $\mathbf{A}$) en el bloque (la parte) "$\mathbf{A}^2$" de la matriz por bloques $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{A}^2]$).

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 7(c)

El conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene, como siempre, dimensión $n - r$ (donde n es el número de columnas de $\mathbf{A}$ y r su rango). Y la matriz $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{A}]$ sólo tiene r columnas linealmente independientes (r columnas pivote) — ya que las n columnas que añadimos están todas repetidas. Así pues, $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{A}]$ es una matriz m por $2n$ de rango r, y por tanto, la dimensión del conjunto de soluciones del sistema $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{A}]\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es $\boxed{2n - r}$.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 1(a) Las operaciones sobre las columnas preservan el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$, i.e. cualquier solución del sistema $\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ lo es también para el sistema: $\boldsymbol{x}\left(\mathbf{AE}\right) = \mathbf{0}$. Sea $\mathbf{W}$ la matriz escalonada reducida con la estructura inusual obtenida por nuestro amigo de Harvard. Podemos buscar las soluciones especiales para el sistema $\boldsymbol{x}\mathbf{W} = \mathbf{0}$. Las filas 3, 4 y 5 son filas "pivote", mientras que las filas 1 y 2 son filas "libres". Podemos buscar dos soluciones especiales con la siguiente estructura:

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix}1, & 0, & x_3, & x_4, & x_5,\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix}0, & 1, & y_3, & y_4, & y_5,\end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $\begin{pmatrix}x_3, & x_4, & x_5,\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2, & -4, & -6,\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}y_3, & y_4, & y_5,\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3, & -5, & -7,\end{pmatrix}$, i.e., las componentes cada fila de $\mathbf{H}$ con el signo cambiado. Esto nos da una base del espacio nulo por la izquierda de

$\mathbf{A}$:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix}1, & 0, & -2, & -4, & -6,\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}0, & 1, & -3, & -5, & -7,\end{pmatrix} \right\}}.$$

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 1(b) Queremos reodenar las filas de $\mathbf{W}$ de manera que veamos la forma habitual de una forma escalonada reducida. Recuerde que operar con las filas es equivalente a multiplicar por la izquierda por una matriz apropiada. Una matriz que coloque las filas de $\mathbf{W}$ en el orden habitual es una matriz permutación

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz $\mathbf{R} = \mathbf{MW}$ tiene la forma habitual de una forma escalonda reducida. Recuerde que nuestro amigo de Harvard realizó operaciones sobre las columnas para transformar $\mathbf{A}$ en la "extraña" forma de $\mathbf{W}$, y que las operaciones por columnas no cambian el orden de las filas. Y recuerde que operar con las columnas es equivalente a multiplicar por la derecha por una matriz apropiada. Así, existe una matriz $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{AE} = \mathbf{W}$. Por tanto, el producto $\mathbf{R} = \mathbf{MW} = \mathbf{M}\big(\mathbf{AE}\big) = \big(\mathbf{MA}\big)\mathbf{E}$ tiene el aspecto habitual de una forma escalonada reducida. Así que realizar las operaciones sobre las columnas de sobre $\mathbf{MA}$ que aplicó nuestro amigo de Harvard nos dará una forma escalonada en su aspecto habitual.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 2(a) La forma más rápida es tener en cuenta que $\mathbf{E}_1$ realiza cuatro transformaciones elementales sobre las columnas, sumando a, b, c y d veces la primera columnas sobre el resto de columnas, y que por tanto $\mathbf{E}_1^{-1}$ deshace dichas operaciones, i.e. resta a, b, c y d veces la primera columnas al resto de columnas, dando como resultado inmediato que $\boldsymbol{x}$ es la suma de las columnas de $\mathbf{E}_1^{-1}$:

$$\big(\mathbf{E}_1\big)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x} = \big(\mathbf{E}_1^{-1}\big)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & -c & -d \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1-a-b-c-d)\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 2(b) La forma más rápida es darse cuenta de que $\boldsymbol{x}$ es la suma de las columnas de $\big(\mathbf{E}_1^{\intercal}\big)^{-1}$. Por tanto:

$$\big(\mathbf{E}_1^{\intercal}\big)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x} = \big(\mathbf{E}_1^{\intercal}\big)^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -a & 1 & & & \\ -b & & 1 & & \\ -c & & & 1 & \\ -b & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\(1-a)\\(1-b)\\(1-c)\\(1-d)\end{pmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 2(c)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c & (d+cx) \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 2(d)

$$\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}_2^{-1} \cdot \mathbf{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & -x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -a & -b & -c & -d \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & -c & -d \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & -x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Para comprobar la respuesta multiplicamos esta matriz por la matriz $\mathbf{E}$ de la parte c)

$$\begin{bmatrix}1 & -a & -b & -c & -d\\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & -x\\ & & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a & b & c & (d+cx)\\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & x\\ & & & & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 2(e) La mejor solución en interpretar cada producto como un operador que suma a, b, c y d veces la columna 1, de manera que dicha operación se realiza 10 veces. Es fácil darse cuenta de la pauta iterando: basta realizar un par de productos para deducir la pauta y poder escribir la solución

$$\left(\mathbf{E}_1\right)^2=\begin{bmatrix}1 & a & b & c & d\\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a & b & c & d\\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2a & 2b & 2c & 2d\\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{E}_1\right)^3=\begin{bmatrix}1 & 2a & 2b & 2c & 2d\\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a & b & c & d\\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3a & 3b & 3c & 3d\\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{bmatrix}$$

de manera iterativa podemos ver que

$$\left(\mathbf{E}_1\right)^{10}=\begin{bmatrix}1 & 10a & 10b & 10c & 10d\\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 3. Dicha matriz debe tener tres filas y cualquier número de columnas, siempre que $\begin{pmatrix}1, & 2, & -1,\end{pmatrix}$ no sea combinación de sus columnas, lo que significa que dicha matriz necesariamente tiene rango menor a tres. Posibles ejemplos son

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Tenga en cuenta que, para saber que un vector no está en su espacio columna, usted se debe asegurar de que no existe una combinación lineal de las columnas que sea igual a dicho vector. Así, por ejemplo, la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$$

no vale como respuesta. A pesar de que el vector $\begin{pmatrix}1, & 2, & -1,\end{pmatrix}$ no aparece explicitamente entre sus columnas, resulta que $3\mathbf{A}_{|1}-2\mathbf{A}_{|2}=\begin{pmatrix}1, & 2, & -1,\end{pmatrix}$.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 4.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & 1 & 2 & -1\\ 2 & 6 & 4 & 8 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}]{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1\\ \hline 1 & -3 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(\frac{1}{2})\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ \hline 1 & -3 & -1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\text{Conjunto de vectores:}\;\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2\text{ tal que }\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-3&0\\1&0\\0&-2\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 5(a) Es el conjunto que contiene unicamente al vector nulo de $\mathbb{R}^4$: $\{\mathbf{0}\}$.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 5(b) $5-4=1$

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 5(c) $\boldsymbol{x}_p=\begin{pmatrix}0, & 1, & 0, & 0,\end{pmatrix}$

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 5(d) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p$ puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\{\mathbf{0}\}$.

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 1(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&-b_1\\-1&2&-1&0&-b_2\\0&-1&2&-1&-b_3\\0&0&-1&1&-b_4\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{1+2}]\\[(1)\mathbf{2+3}]\\[(1)\mathbf{3+4}]}]{\tau}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-b_1\\-1&1&0&0&-b_2\\0&-1&1&0&-b_3\\0&0&-1&0&-b_4\\\hline 1&1&1&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(b_1)\mathbf{1+5}]\\[(b_1+b_2)\mathbf{2+5}]\\[(b_1+b_2+b_3)\mathbf{3+5}]}]{\tau}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&-b_1-b_2-b_3-b_4\\\hline 1&1&1&1&3b_1+2b_2+b3\\0&1&1&1&2b_1+2b_2+b3\\0&0&1&1&b_1+b_2+b_3\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

Después de estas operaciones ya tenemos más que suficiente para contestar a todo *(y mucho más…, puesto que he calculado una solución particular (de color azul), que no se pide en el ejercicio, y que no es necesaria para contestar.)*

Respuesta de este apartado: puesto hay tres pivotes en la forma escalonada, el **rango es 3**.

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 1(b) La solución "especial" encontrada es una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ (de dimensión 1); por tanto

$$\text{Base de }\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};\right]$$

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 1(c) Basta con mirar qué condición deben cumplir los elementos de $\boldsymbol{b}$ para que pertenezcan a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$. Aquí $\boldsymbol{b}\in\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ si y sólo si

$$-b_1-b_2-b_3-b_4=0.$$

Dicho de otra forma, la suma de las componentes debe ser igual a cero. Nótese que todas las columnas de $\mathbf{A}$ cumplen dicha condición: *es decir, la última fila de* $\mathbf{A}$ *es suma de las tres primeras.* Esta es la condición que debe cumplir $\boldsymbol{b}$ para que el sistema sea resoluble (i.e., para que $\boldsymbol{b}\in\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$).

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 2(a) No. El conjunto de soluciones no puede ser un subespacio puesto que no contiene el vector nulo ($\mathbf{0}$ no es solución a dicho sistema).

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 2(b) Si. Este conjunto es el espacio nulo por la izquierda de la matriz cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$. También es el espacio nulo de la matriz cuyas dos columnas son $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$

$$\boldsymbol{x}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}; & \boldsymbol{z};\end{bmatrix}=\mathbf{0}.$$

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 2(c) No. Este conjunto no contiene la matrix nula $\mathbf{0}$; así que no puede ser sub-espacio vectorial.

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 2(d) Si, puesto que si los espacios nulos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ contienen $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ entonces el espacio nulo de cualquier combinación lineal de ambas matrices, $(a\mathbf{A}+b\mathbf{B})$, también contiene a dicho vector:

$$\big(a\mathbf{A}+b\mathbf{B}\big)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=a\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+b\mathbf{B}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=a\mathbf{0}+b\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 3(a) Las operaciones por columnas se logran multiplicando por matrices elementales por la *derecha* ; de manera similar, las operaciones sobre las filas se logran multiplicando por la *izquierda*. Así, podemos escribir $\mathbf{B}=\mathbf{E}\mathbf{A}$ vía una matriz invertible $\mathbf{E}$. Una sencilla forma de obtener $\mathbf{E}$ es aplicando las operaciones descritas sobre la matriz identidad de orden 3.

$$ {}_{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{E}$$

de manera que

$$\mathbf{B}={}_{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}\mathbf{A}={}_{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&0\\4&1&-1\\6&10&3\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 3(b) Puesto que $\mathbf{B}=\mathbf{E}\mathbf{A}$ involucra el producto de una matriz $\mathbf{E}$ invertible por la izquierda de $\mathbf{A}$, el espacio fila no varía, por lo que $\mathcal{C}\left(\mathbf{B}^\intercal\right)=\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$:

- Para cualquier $\boldsymbol{y}\in\mathcal{C}\left(\mathbf{B}^\intercal\right),\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\mathbf{B}=(\boldsymbol{x}\mathbf{E})\mathbf{A}$ para algún $\boldsymbol{x}$, y por tanto $\boldsymbol{y}\in\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$.
- De manera similar, para cualquier $\boldsymbol{y}\in\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right),\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\mathbf{A}=(\boldsymbol{x}\mathbf{E}^{-1})\mathbf{E}\mathbf{B}=\boldsymbol{z}\mathbf{B}$ está en el espacio fila de $\mathbf{B}$ (hicimos algo muy parecido en clase.)

En general, multiplicar $\mathbf{A}$ por la izquierda cambia el espacio nulo, puesto que si $\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ entonces $\boldsymbol{x}\mathbf{E}^{-1}$ está en $\mathcal{N}\left(\mathbf{B}^\intercal\right)$ (pero no $\boldsymbol{x}$ en general):

$$\boldsymbol{x}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}=\boldsymbol{x}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{A}=\boldsymbol{x}\mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

Sin embargo, en este caso particular, pusto que la matriz de es rango completo por filas, resulta que $\mathcal{N}\left(\mathbf{B}^\intercal\right)=\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=\{\mathbf{0}\}$.

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 4(a) Si. Las tres primeras columnas de $\mathbf{A}$ (solo la última columna de $\mathbf{L}$ es cero). Es decir

$$\text{Base de }\ \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\left[\begin{pmatrix}a\\1\\c\\1\\1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}b\\2\\d\\1\\3\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}3\\3\\4\\1\\0\end{pmatrix};\right].$$

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 4(b) Puesto que el rango es 3 y tres de las filas (las que no tienen letras) son evidentemente independientes, esas tres filas constituyen una base del espacio fila.

$$\text{Base de }\ \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=\Big[\begin{pmatrix}1&2&3&3\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&1&1&2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&3&0&4\end{pmatrix};\Big].$$

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 4(c) Una base está formada por la última columna de $\mathbf{E}$. Así, el espacio nulo de $\mathbf{A}$ es la recta formada por todos los múltiplos de $\mathbf{E}_{|4}$.

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ \exists a\in\mathbb{R}\text{ tal que }\boldsymbol{v}=a\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\square$

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 4(d) No se puede saber, pues no hay información suficiente. Sería necesario conocer a, b, c, y d para saber de qué modo combinar las filas para generar vectores nulos.

$\square$

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 5(a) Las cuatro operaciones elementales por columnas en el proceso de eliminación Gauss-Jordan son

$$\mathbf{A}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}}\Big)=\mathbf{AE}=\mathbf{I}$$

ó

$$\mathbf{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1&-1&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&2\\&1&\\&&1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1&-1&2\\&1&\\&&1\end{bmatrix}}\underbrace{\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\1&1&\\&&1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1&&\\1&1&\\-2&-2&1\end{bmatrix}}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}-4&-5&2\\1&1&0\\-2&-2&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}.$$

También podemos expresar lo mismo asi:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}\underset{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}}\\\hline\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}\underset{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}\\\hline\mathbf{A}^{-1}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc}1&&\\&1&\\&&1\\\hline-4&-5&2\\1&1&0\\-2&-2&1\end{array}\right]\Rightarrow\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-4&-5&2\\1&1&0\\-2&-2&1\end{bmatrix}.$$

$\square$

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 5(b) Podemos calcular la inversa de la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ para obtener $\mathbf{A}$. Basta aplicar las inversas de las operaciones elementales sobre $\mathbf{I}$ (pero en orden inverso).

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}\\\hline\mathbf{I}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc}-2&1&-3\\-3&1&0\\3&-1&1\\\hline1&&\\&1&\\&&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\[(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc}1&&\\&1&\\&&1\\\hline1&1&-2\\-1&0&2\\0&2&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{I}\\\hline\mathbf{A}\end{bmatrix},$$

es decir, basta calcular el siguiente producto: $\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}\Big)=\mathbf{A}.$

$\square$

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 6. $\mathbf{BA}$ es una matriz 4×3. Puesto que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\mathcal{N}\left(\mathbf{B}\right)$, entonces $\mathbf{BA}\boldsymbol{x}$ para cualquier $\boldsymbol{x}$ nos da $\mathbf{B}$ multiplicada por algún vector en $\mathcal{N}\left(\mathbf{B}\right)$, que por tanto es cero. Puesto que $\mathbf{BA}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ para cualquier $\boldsymbol{x}$, necesariamente tenemos $\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$

$\square$

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 1(a)

$$\left[\begin{array}{ccc}2&2&0\\1&4&9\\1&3&9\\\hline1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}2&0&0\\1&3&9\\1&2&9\\\hline1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}2&0&0\\1&3&0\\1&2&3\\\hline1&-1&3\\0&1&-3\\0&0&1\end{array}\right]$$

Por tanto

$$\mathbf{E}=\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 1(b) Puesto que $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{LE}^{-1}$; y por tanto $\mathbf{U} = \mathbf{E}^{-1}$.

$$\mathbf{U} = \mathbf{E}^{-1} = \Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}}\Big)^{-1} = \Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}}\Big)^{-1}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}\Big)^{-1} = \Big(\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}\Big)$$
$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 2(a) Si. Las tres columnas de $\mathbf{R}$ que tienen pivote. Es decir

$$\text{Base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\-4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\\5\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\\6\end{pmatrix};\right].$$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 2(b) No se puede saber. Necesitamos conocer las filas de $\mathbf{A}$.

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 2(c) No se puede saber, pues no hay información suficiente. Necesitaríamos conocer cómo hemos logrado hacer una columna de ceros en $\mathbf{R}$.

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 2(d) Debemos fijarnos en las las filas sin pivote de $\mathbf{R}$. Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{R}^{\intercal}\right)$, una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ la constituyen los vectores $\left(1, \quad 2, \quad -3, \quad 1, \quad 0,\right)$ y $\left(4, \quad -5, \quad -6, \quad 0, \quad 1,\right)$.

Por tanto $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ es el plano generado por estos dos vectores, es decir

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1&4\\2&-5\\-3&-6\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}$$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 2(e) No se puede saber, pues no hay información suficiente. Necesitaríamos saber qué transformaciones elementales se tomaron para obtener $\mathbf{R}$.

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 3(a) **Posible.**

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 3(b) **Imposible.** El rango máximo posible para $\mathbf{A}$ es 3, así que las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes.

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 3(c) **Imposible.** Si $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ siempre tiene solución: $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 3(d) **Posible.**

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$\square$

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 4(a) Recuerde que una matriz A por un vector $\boldsymbol{x}$ que multiplica a la matriz por la derecha, es decir $\mathsf{A}\boldsymbol{x}$, es una combinación lineal de las columnas de A. Por tanto, la ecuación solicitada es la combinación lineal $\mathsf{A}\boldsymbol{x}$ que es igual a $\boldsymbol{b}$:

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x}=\Big[\boldsymbol{v}_1;\ \boldsymbol{v}_2;\ \boldsymbol{v}_3;\Big]\,\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-2&0&2\\3&5&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\12\end{pmatrix}.$$

$\square$

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 4(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-2\\-2&0&2&2\\3&5&4&-12\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ {[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\ {[(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\-2&2&2&-2\\3&2&4&-6\\\hline 1&-1&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ {[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}\\ {[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}\\ {[(2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\-2&2&0&0\\3&2&2&0\\\hline 1&-1&1&3\\0&1&-1&-1\\0&0&1&2\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]$$

Por tanto la solución es $(x_1,x_2,x_3,)=(3,-1,2,)$ pues

$$3\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{b}.$$

$\square$

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 4(c) Basta con hacer que $\boldsymbol{v'}_3$ sea combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ para que A sea singular y que por tanto no tenga solución para algunos vectores $\boldsymbol{b}$. Por ejemplo, si hacemos que $\boldsymbol{v'}_3$ sea $\boldsymbol{v}_2$ menos $\boldsymbol{v}_1$, solo cambia la última componente de $\boldsymbol{v}_3$

$$\boldsymbol{v'}_3=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1&1\\-2&0\\3&5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}.$$

y el espacio columna de la nueva matriz $\mathsf{B}=\big[\boldsymbol{v}_1;\ \boldsymbol{v}_2;\ \boldsymbol{v'}_3;\big]=\begin{bmatrix}1&1&0\\-2&0&2\\3&5&2\end{bmatrix}$ es de dimensión 2 .

Para lograr un sistema $\mathsf{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b'}$ que tenga solución, es necesario que $\boldsymbol{b'}$ pertenezca al espacio columna de la nueva matriz B. Por ello, si escogemos como vector del lado derecho $\boldsymbol{b'}$ cualquiera de las columnas de B o una combinación lineal de ellas (incluido el vector $\mathbf{0}$) obtendremos un sistema con solución (de hecho con infinitas soluciones).

$\square$

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 5(a) Operando por *columnas* sobre los bloques de la matriz. Aquí abusaremos de la notación, haciendo corresponder los subíndices con los distintos bloques de la matriz de coeficientes; por ejemplo con $\underset{[(\mathsf{A}^{-1})\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}$ indicaremos que multiplicamos por A^{-1} la primera columna de submatrices:

$$\left[\begin{array}{cc|c}\mathsf{A}&\mathsf{B}&-\boldsymbol{b}_1\\\mathbf{0}&\mathsf{A}&-\boldsymbol{b}_2\\\hline\mathsf{I}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathsf{I}&\mathbf{0}\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ {\left[\left(\mathsf{A}^{-1}\right)\mathbf{1}\right]}\\ {\left[\left(\mathsf{A}^{-1}\right)\mathbf{2}\right]}}}\left[\begin{array}{cc|c}\mathsf{I}&\mathsf{B}\mathsf{A}^{-1}&-\boldsymbol{b}_1\\\mathbf{0}&\mathsf{I}&-\boldsymbol{b}_2\\\hline\mathsf{A}^{-1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathsf{A}^{-1}&\mathbf{0}\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ {\left[\left(-\mathsf{B}\mathsf{A}^{-1}\right)\mathbf{1}+\mathbf{2}\right]}}}\left[\begin{array}{cc|c}\mathsf{I}&\mathbf{0}&-\boldsymbol{b}_1\\\mathbf{0}&\mathsf{I}&-\boldsymbol{b}_2\\\hline\mathsf{A}^{-1}&-\mathsf{A}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{A}^{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathsf{A}^{-1}&\mathbf{0}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\tau\\ {[(\boldsymbol{b}_1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}}\left[\begin{array}{cc|c}\mathsf{I}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathsf{I}&-\boldsymbol{b}_2\\\hline\mathsf{A}^{-1}&-\mathsf{A}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{A}^{-1}&\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}_1\\\mathbf{0}&\mathsf{A}^{-1}&\mathbf{0}\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ {[(\boldsymbol{b}_2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}}\left[\begin{array}{cc|c}\mathsf{I}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathsf{I}&\mathbf{0}\\\hline\mathsf{A}^{-1}&-\mathsf{A}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{A}^{-1}&\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}_1-\mathsf{A}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}_2\\\mathbf{0}&\mathsf{A}^{-1}&\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}_2\end{array}\right]$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}_1 - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}_2 \quad = \quad \mathbf{A}^{-1}\left(\boldsymbol{b}_1 - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}_2\right)$$

y

$$\boldsymbol{z} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}_2.$$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 5(b) Puesto que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}$, sabemos que $\mathbf{A}^{-1} = \dot{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$; así

$$\boldsymbol{y} = \dot{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\left(\boldsymbol{b}_1 - \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{b}_2\right)$$

y

$$\boldsymbol{z} = \dot{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{b}_2.$$

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 1(a)

- Si el espacio columna es un plano, el espacio nulo es una recta.
- Si el espacio columna es una recta, el espacio nulo es un plano.
- Si el espacio columna es todo $\mathbb{R}^3$, el espacio nulo es un punto.
- Si el espacio columna es el vector cero, el espacio nulo es todo $\mathbb{R}^3$.

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 1(b)
Puesto que $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) + \dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 7$, si $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, entonces ambos subespacios deben tener la misma dimensión (es decir $\frac{7}{2}$), pero las dimensiones son números enteros. Por tanto, una matriz $\mathbf{A}$ tal como la indicada no puede existir.

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 2(a)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&2&0\\1&1&g\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&2&6\\1&1&g+3\\ \hline 1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&3\\1&2&9\\1&1&g+6\\ \hline 1&0&3\\0&1&3\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{ccc}1&3&3\\1&5&9\\1&4&g+6\\ \hline 1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{E}^{-1}\end{array}\right],$$

donde $\mathbf{A}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{AE} = \mathbf{L}$.

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 2(b)
Puesto que $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{LE}^{-1} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}$; y por tanto tenemos que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&3&3\\1&5&9\\1&4&g+6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&1&g\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}.$$

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 2(c)

Puesto que $\mathbf{E} = \left(\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \begin{bmatrix}1&-3&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-3&6\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}$; la última columna de $\mathbf{E}$ es una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, así

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } a\begin{pmatrix}6\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 2(d)

Si $g \neq 0$, entonces el rango es tres y por tanto $\mathcal{C}\left(\mathbf{L}\right) = \mathbb{R}^3$. Y puesto que sólo hemos empleado eliminación por columnas $\mathcal{C}\left(\mathbf{L}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}^3$.

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 3(a)

En anticipación a los otros apartados, ampliamos la matriz con "menos" un vector del lado derecho genérico antes de aplicar la eliminación gaussiana por columnas.

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & -\boldsymbol{b}\\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & -a\\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -b\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -c\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{5}]\\ [(a)\mathbf{1}+\mathbf{6}]}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -b-a\\ 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -c+a\\ \hline 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & a\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{5}]\\ [(b+a)\mathbf{3}+\mathbf{6}]\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -b-c\\ \hline 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & -b\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & b+a\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{R} & \boldsymbol{c}\\ \hline \mathbf{E} & \boldsymbol{x}_p\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right]$$

La solución general para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las soluciones especiales (que constituyen una base del espacio nulo), es decir

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 3(b)

Para encontrar la solución general sustituimos $a = 2$, $b = 1$ y $c = -1$ en la matriz aumentada. Así que directamente vemos que una solución particular es $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}-1, & 0, & 3, & 0, & 0,\end{pmatrix}$.

Por tanto la solución general es esta solución particular más la solución general del apartado (a) :

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 3\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 3(c)

Encontrar todos los vectores $\boldsymbol{b}$ tales que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución es lo mismo que preguntar qué condición debe satisfacer $\boldsymbol{b}$ para pertenecer al espacio columna de $\mathbf{A}$. Del proceso de eliminación gaussiana de la matriz ampliada vemos que necesariamente se debe cumplir que $b + c = 0$, así que $\boldsymbol{b}$ debe ser de la forma $\begin{pmatrix}a\\ b\\ -b\end{pmatrix}$ donde b y c son números reales cualquiera. En otras palabras, el espacio columna está generado por los vectores:

$$a\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 3(d)

Para encontrar una matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$ podemos simplemente escoger la matriz cuyas columnas son una base del espacio nulo de $\mathbf{A}$. Es decir, la matriz:

$$\begin{bmatrix}-2&0&-1\\1&0&0\\0&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 3(e)

Puesto que en los apartados (a) y (b) ya hemos descrito bases para los espacios nulo y columnas de $\mathbf{A}$, sólo nos resta encontrar bases para los espacios fila y nulo por la izquierda. Como base del espacio fila podemos tomar dos vectores fila linealmente independientes, por ejemplo las dos primeras filas de $\mathbf{A}$:

$$\Big[\big(1,\quad 2,\quad 1,\quad 2,\quad 2,\big)\,;\ \big(-1,\quad -2,\quad 0,\quad 0,\quad -1,\big)\,;\Big].$$

Puesto que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)=\mathcal{C}\left(\mathbf{R}^{\intercal}\right)$, y que su dimensión es 1, observando las filas de $\mathbf{R}$ es inmediato ver que una base del espacio es:

$$\Big[\big(0,\quad 1,\quad 1,\big)\,;\Big].$$

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 1(a)

En anticipación a los otros apartados, ampliamos la matriz con "menos" el vector del lado derecho del apartado (c) antes de aplicar la eliminación gaussiana por columnas.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&4&-3\\3&6&3&9&-9\\2&4&2&9&-b_3\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(3)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}]{\tau}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\3&0&0&-3&0\\2&0&0&1&-b_3+4\\\hline 1&-2&-1&-4&3\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$r=\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right)=2$, las columnas $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\9\\9\end{pmatrix}$ son una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

El espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es un plano dentro de $\mathbb{R}^3$ generado por las dos columnas pivote

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 1(b)

Sol. especiales: $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$. $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2&-1\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$.

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 1(c)

Para tener solución necesitamos $\boxed{b_3=6}$

Para $b_3=3$, una solución (particular) es $\boldsymbol{x}_p=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Solución completa: $\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-2&-1\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$.

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 2(a)

Sí. Esta ecuación describe el espacio nulo por la izquierda de la matriz $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 2(b)
No. Considere los vectores $(1,1,)$ y $(1,-1,)$, ambos satisfacen la ecuación. Pero la suma $(1,1,)+(1,-1,)=(2,0,)$ no satisface la ecuación pues $2^2-0=4$.

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 2(c) No. Este conjunto no contiene $(0,0,)$.

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 2(d) Sí. Es la intersección de dos subespacios. Nótese que el espacio columna de esta matriz está generado por el vector $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; y que el espacio nulo está generado por los vectores: $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. Puesto que la suma de estos dos vectores de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es el vector $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, entonces $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)\subset\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ y la intersección es el espacio columna, que es un subespacio.

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 2(e)
Sí. Acabamos de ver en la parte (d) que el espacio columna es un subespacio del espacio nulo. Así, los vectores que pertenecen al espacio columna también pertenecen al espacio nulo, que es un subespacio.

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 3(a)
Puesto que

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}1&1&0\\2&1&1\\3&1&3\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\tau}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-1&1\\3&-2&3\\ \hline 1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\tau}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-1&0\\3&-2&1\\ \hline 1&-1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]$$

entonces

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\3&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}$$

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 3(b)
Nótese que $\mathbf{A}^{-1}=\left(\mathbf{LU}\right)^{-1}=\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$. Puesto que $\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{E}$, sólo necesitamos calcular $\mathbf{L}^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-1&0\\3&-2&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\tau}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&0\\-1&-2&1\\ \hline 1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{\substack{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]\\ [(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}]{\tau}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\\ \hline 1&0&0\\2&1&0\\1&2&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}]}]{\tau}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline 1&0&0\\2&-1&0\\1&-2&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{L}^{-1}\end{array}\right].$$

Así

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&3&-1\\3&-3&1\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

que es lo mismo que hubiéramos obtenido si continuamos la eliminación inicial hasta llegar a $\mathbf{R}$.

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 3(c)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc}1&1&0\\2&1&1\\3&1&c\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[}(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-1&1\\3&-2&c\\ \hline 1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[}(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-1&0\\3&-2&c-2\\ \hline 1&-1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{array}\right]$$

Es invertible cuando $c \neq 2$.

$\square$

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 4(a)

$r = m$. El rango de $\mathbf{A}$ es igual a la dimensión del espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$. Ahora bien, por una parte el espacio columna de $\mathbf{A}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ (es decir $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \subset \mathbb{R}^m$). Por otra parte, puesto que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, resulta que el espacio columna de $\mathbf{AB}$ es el espacio columna de la matriz identidad, que es todo $\mathbb{R}^m$, es decir $\mathcal{C}\left(\mathbf{AB}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{I}\right) = \mathbb{R}^m$; pero además $\mathbb{R}^m = \mathcal{C}\left(\mathbf{AB}\right) \subset \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, pues el producto $\mathbf{AB}$ es una matriz cuyas columnas son combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}$. Por tanto $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}^m$. Otra forma de verlo es que cualquier vector $\boldsymbol{v}$ en $\mathbb{R}^m$ se puede escribir como $\mathbf{AB}\boldsymbol{v} = \mathbf{I}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ de lo que se deduce que cualquier vector $\boldsymbol{v}$ en $\mathbb{R}^m$ pertenece al espacio columna de $\mathbf{A}$ porque puede escribirse como $\boldsymbol{v} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, basta con elegir $\boldsymbol{x} = \mathbf{B}\boldsymbol{v}$. En resumen, como $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}^m$, la dimensión del espacio columna es m, y por tanto la respuesta correcta es la (c).

$\square$

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 4(b)

Sabemos que el rango de $\mathbf{A}$ tiene que ser menor o igual al menor orden de $\mathbf{A}$. Puesto que $r = m$, necesariamente tiene que ser que $m \leq n$.

$\square$

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 1.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&-7\\1&1&1&1&-10\\1&0&1&1&-9\\ \hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[}(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ {[}(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ {[}(7)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\1&0&1&0&-3\\1&-1&1&0&-2\\ \hline 1&-1&0&-1&7\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[}(3)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&-1&1&0&1\\ \hline 1&-1&0&-1&7\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[}(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ {[}(1)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0\\ \hline 1&-1&-1&-1&6\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right].$$

Así, el conjunto de soluciones es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}6\\1\\3\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 2.

Sea $\mathbf{A}$ la matriz cuyas tres columnas son los vectores dados, entonces

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&2&2\\3&-2&8\\-1&4&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[}(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ {[}(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&4&-4\\3&1&-1\\-1&3&5\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[}(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&1&0\\-1&3&8\end{bmatrix}=\mathbf{L}.$$

Puesto que la matriz es de rango completo por columnas (pues las tres columnas son columnas pivote), la única combinación lineal de las colunas que es cero (la única solucion a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$) es $0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{w}$, por tanto, estos vectores son linealmente independientes.

$\square$

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 3(a)

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\-5\\0\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\25\\-41\end{pmatrix};\right]$$

es una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ (también las columnas 1, 3 y 4 de $\mathbf{A}$, puesto que el único intercabio realizado ha sido $\underset{[\mathbf{3}\rightleftharpoons\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}$). Así pues, $\dim\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = 3$

$\square$

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 3(b)

$$\left[\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-4\\0\\-3\\-2\\1\end{pmatrix};\right]$$

es una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. Así pues $\dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=2$.

$\square$

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 3(c)

Puesto que el vector $\boldsymbol{v}$ es una solución, cualquier otra solución será de la forma $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}_n$, donde $\boldsymbol{x}_n$ pertence a $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. Así, el conjunto de soluciones es

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-2&-4\\1&0\\0&-3\\0&-2\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}.$$

$\square$

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 4.

$$\left[\begin{array}{rrr}2&4&0\\1&1&3\\-1&-3&2\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{rrr}2&0&0\\1&-1&3\\-1&-1&2\\\hline 1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{rrr}2&0&0\\1&-1&0\\-1&-1&-1\\\hline 1&-2&-6\\0&1&3\\0&0&1\end{array}\right]$$

Por tanto,

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&-1&0\\-1&-1&-1\end{bmatrix};\qquad \dot{\mathbf{U}}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$\square$

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 5(a) El modo más simple de crear un ejempo es añadir columnas dependientes a la matriz $\mathbf{A}$. Por ejemplo, las matrices $\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}$ tienen el mismo espacio columna y distinto espacio nulo.

$\square$

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 5(b) Es imposible dar un ejemplo. El rango es la dimensión del espacio columna. Si ambas matrices tienen el mismo espacio columna, entonces tienen el mismo rango.

$\square$

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 6(a)

$\mathbf{A}\boldsymbol{v}=\left(\mathbf{A}_{|1}\right)+2\left(\mathbf{A}_{|2}\right)+3\left(\mathbf{A}_{|3}\right)+4\left(\mathbf{A}_{|4}\right).$

$\square$

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 6(b) $\mathbf{A}\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\left({}_{1|}\mathbf{A}\right)\cdot\boldsymbol{v}\\\left({}_{2|}\mathbf{A}\right)\cdot\boldsymbol{v}\\\left({}_{3|}\mathbf{A}\right)\cdot\boldsymbol{v}\\\left({}_{4|}\mathbf{A}\right)\cdot\boldsymbol{v}\end{bmatrix}$

$\square$

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 6(c)

La matriz tiene como máximo tres pivotes, por lo que sus columnas son dependientes (como mínimo hay una columna libre), y por tanto $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)\neq\{\mathbf{0}\}$, es decir, hay combinaciones lineales de la columnas de $\mathbf{A}$ (distintas de la trivial) que son iguales a $\mathbf{0}$.

$\square$

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 6(d)

Infinitas. Como hemos visto en el apartado (c), al menos hay una columna libre (quizá más). Así que hay infinitos vectores en $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ (como mínimo la recta compuesta por todos los múltiplos de la columna libre… muchos más si hay más de una columna libre)

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 6(e)

Para una matriz k por n, el número de columnas pivote más el número de columnas libre es igual al número total de columnas (es decir, n). El número de columnas libres es la dimensión del espacio nulo de $\mathbf{A}$ (en nuestro caso p). El número de columnas pivote es la dimensión del espacio columna de $\mathbf{A}$ (en nuestro caso q). Así $p+q=n$ (en nuestro caso, $n=4$). Sin embargo, sabemos que $p=1$, 2, 3 ó 4, puesto que hemos visto que hay al menos una columna libre. Es decir, p no puede ser cero en este caso.

La respuesta es, por tanto, $(p,q)=(1,3)$ ó $(2,2)$ ó $(3,1)$ ó $(4,0)$. (El último caso sólo puede ocurrir si la matriz es nula, i.e., todas sus componentes son cero; $\mathbf{A}=\mathbf{0}$.)

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 7.

Suponga

$$a\boldsymbol{u}+b(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\mathbf{0}$$

Entonces

$$(a+b+c)\boldsymbol{u}+(b+c)\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$$

Puesto que $\left[\boldsymbol{u};\boldsymbol{v};\boldsymbol{w};\right]$ es un sistema de vectores linealmente independiente, esto implica que $\begin{cases} a+b+c=0\\ \quad\;\; b+c=0\\ \qquad\;\;\; c=0\end{cases}.$

La única solución para este último sistema de ecuaciones es $c=0$, $b=0$ y $a=0$. Así pues, el sistema de vectores $\left[\boldsymbol{u};(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v});(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w});\right]$ es linealmente independiente.

Demostración alternativa:

Puesto que $\left[\boldsymbol{u};\ \boldsymbol{v};\ \boldsymbol{w};\right]$ es un sistema de vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independiente, la matriz

$$\mathbf{A}=\left[\boldsymbol{u};\quad \boldsymbol{v};\quad \boldsymbol{w};\right]$$

es de rango completo por columnas (tres pivotes). Así, operando con la matriz $\mathbf{M}=\left[\boldsymbol{u};\ (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v});\ (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w});\right]$

$$\left[\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{ccc} | & | & | \\ \boldsymbol{u} & (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) & (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \\ | & | & | \\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}}\left[\begin{array}{ccc} | & | & | \\ \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \\ | & | & | \\ \hline 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]=\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{E}}\right]$$

vemos que también es de rango completo por columnas.

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -b_1\\ 0 & 1 & 3 & -b_2\\ 1 & 3 & 7 & -b_3\\ 2 & 2 & 2 & -b_4\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -b_1\\ 0 & 1 & 3 & -b_2\\ 1 & 1 & 3 & -b_3\\ 2 & -2 & -6 & -b_4\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -b_1\\ 0 & 1 & 0 & -b_2\\ 1 & 1 & 0 & -b_3\\ 2 & -2 & 0 & -b_4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[{[(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -b_2\\ 1 & 1 & 0 & b_1-b_3\\ 2 & -2 & 0 & 2b_1-b_4\end{array}\right]\xrightarrow[{[(b_2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & b_1+b_2-b_3\\ 2 & -2 & 0 & 2b_1-2b_2-b_4\end{array}\right]$$

Así pues,

$$\boxed{\begin{cases} b_1+\ \ b_2-b_3 \qquad\ =0\\ 2b_1-2b_2 \qquad\ -b_4=0\end{cases}}.$$

Solución alternativa: Necesariamente $\boldsymbol{b}\in\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, es decir:

$$\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\\ -2\end{pmatrix};\qquad \text{llamando } a=b_1 \text{ y } c=b_2,\qquad \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{pmatrix}=b1\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}+b2\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

tenemos

$$\begin{cases} b_3 = b_1 + b_2 \\ b_4 = 2b_1 - 2b_2 \end{cases} \quad \to \quad \boxed{\begin{cases} b_1 + \ b_2 - b_3 \qquad = 0 \\ 2b_1 - 2b_2 \qquad - b_4 = 0 \end{cases}}.$$

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 2(a)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}]}]{\substack{\tau \\ [(\frac{1}{2})\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3/2 & -8 \\ 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 2(b)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & x & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & x-5 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & x-5 & 11-2x \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Esta matriz es singular (no invertible) si y sólo si $11-2x = 0$, es decir, $x = \frac{11}{2}$. Así, la matriz es invertible cuando $x \neq \frac{11}{2}$.

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 3(a)

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\right]$$

$\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)) = 3$

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 3(b)

$$\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\right]$$

$\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 2.$

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 3(c)

$\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = 3.$

Cuando escribí el examen no caí en la cuenta de que era posible obtener **A**. A cada alumno que ha calculado correctamente $\mathbf{A}$ le he otorgado un punto y medio adicional a su calificación:

$$
\left[\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 2 & -1 & 4\\
0 & 1 & 0 & 1 & -1\\
0 & 0 & 1 & 2 & -2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}]{\tau}
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & -1\\
0 & 0 & 1 & 2 & -2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline
1 & 1 & -2 & 1 & -4\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}]{\tau}
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 2 & -2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline
1 & 1 & -2 & 0 & -3\\
0 & 1 & 0 & -1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]\\ [(2)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\tau}
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline
1 & 1 & -2 & 4 & -7\\
0 & 1 & 0 & -1 & 1\\
0 & 0 & 1 & -2 & 2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
=\left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{E}^{-1}}\right].
$$

Así pues, $\mathbf{A}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{E}^{-1}$

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 2 & 0 & 0 & 0\\
4 & 3 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & -2 & 4 & -7\\
0 & 1 & 0 & -1 & 1\\
0 & 0 & 1 & -2 & 2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
1 & 1 & -2 & 4 & -7\\
0 & 1 & 0 & -1 & 1\\
-1 & 1 & 2 & -6 & 9\\
4 & 7 & -8 & 13 & -25\\
0 & 0 & 1 & -2 & 2
\end{bmatrix}
$$

$$
\text{Base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)=\Big[\begin{pmatrix}1, & 1, & -2, & 4, & -7,\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0, & 1, & 0, & -1, & 1,\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0, & 0, & 1, & -2, & 2,\end{pmatrix};\Big].
$$

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 3(d)

$$
\Big[\begin{pmatrix}1, & -2, & 1, & 0, & 0,\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-4, & -3, & 0, & 1, & 0,\end{pmatrix};\Big].
$$

$\dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)=2.$

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 3(e)

$$
\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.
$$

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 3(f)

No hay información suficiente ... salvo que haya calculado $\mathbf{A}$. En tal caso, sabemos que la segunda y última fila son independientes (son filas pivote). Su suma es $\begin{pmatrix}0, & 1, & 1, & -3, & 3,\end{pmatrix}$. Basta cambiar el último número para obtener un vector fuera del espacio fila. Por ejemplo $\begin{pmatrix}0, & 1, & 1, & -3, & 0,\end{pmatrix}$.

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 3(g)

No. La matriz no es de rango completo por columnas (hay columnas libres).

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 4(a)

No existe tal matriz. El orden de la matriz debe ser 3 por 4 ($m=3$ y $n=4$). Así, como la dimensión del espacio columna es 2, la dimensión del espacio nulo, también debería ser $4-2=2$. Por tanto, el espacio nulo no puede estar generado por un sólo vector.

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 4(b)

Considere las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para ambas matrices, sus respectivos espacios columna contienen el vector $(1, 1, 1,)$, pero esto no ocurre para la matriz suma:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 4(c)

$\mathbf{M}\boldsymbol{x}$ no es el vector cero de $\mathbb{R}^5$.

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 5.

	$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$	$\mathcal{N}(\mathbf{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$
$\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$	1	∞
$\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}(\mathbf{A})$	0	0

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 6(a)

Falso. Sería cierto si supiéramos que la matriz $\mathbf{A}$ es cuadrada, pero podría ser rectangular.

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 1(a)

Verdadero. Las columnas pertenecen al espacio $\mathbb{R}^4$ de dimensión 4 (sólo hay 4 filas); y el número máximo de vectores linealmente independientes que se pueden tomar en $\mathbb{R}^4$ es 4.

Otra forma de verlo es observar que el máximo número de pivotes tras la eliminación agussiana es 4 (un pivote en cada fila), así que al menos una columna no es pivote (y por tanto el conjunto de todas las columnas es dependiente).

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 1(b)

Falso. Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 1(c)

Falso.

$$\mathbf{EA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 1(d)

Verdadero. Si $5\mathbf{A}^4 - \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 6\mathbf{I} = \mathbf{0}$, entonces despejando $\mathbf{I}$ y sacando factor común $\mathbf{A}$ tenemos: $\mathbf{I} = (-1/6)[5\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}] = (-1/6)[5\mathbf{A}^3 - \mathbf{A} + 2\mathbf{I}]\mathbf{A}$, así que si llamamos $\mathbf{B} = (-1/6)[5\mathbf{A}^3 - \mathbf{A} + 2\mathbf{I}]$ tenemos $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ y por tanto $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 2(a)

La primera es una matriz elemental cuya inversa es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La segunda es una matriz permutación, cuya inversa es su traspuesta.

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 2(b)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\a&b&c&d\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(1/d)\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\a&b&c&1\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\frac{1}{d}\end{array}\right]\xrightarrow[{\substack{[(-c)\mathbf{4}+\mathbf{3}]\\ [(-b)\mathbf{4}+\mathbf{2}]\\ [(-a)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\frac{a}{d}&-\frac{b}{d}&-\frac{c}{d}&\frac{1}{d}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{A}^{-1}\end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz inversa es

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\frac{a}{d}&-\frac{b}{d}&-\frac{c}{d}&\frac{1}{d}\end{bmatrix}$$

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 3(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&0&-1\\2&-2&4&0&-2\\3&-3&7&0&-4\\ \hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{\substack{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&0&0&0&0\\3&0&1&0&-1\\ \hline 1&1&-2&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&0&0&0&0\\3&0&1&0&0\\ \hline 1&1&-2&0&-1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}&\mathbf{0}\\ \hline \mathbf{E}&\boldsymbol{x}_p\end{array}\right]$$

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 3(a)

$$\text{Una base}=\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\right].\quad \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2\text{ tal que }\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\3&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}.$$

$$\text{Otra base}=\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix};\right].$$

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 3(b)

$$\text{Base}=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};\right].\qquad \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\exists a,b\in\mathbb{R}\text{ tales que }\boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Las soluciones especiales provienen de las columnas 2 y 4 de $\mathbf{E}$.

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 3(c)

Las filas pivote de $\mathbf{A}$:

$$\text{Base}=\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\-3\\7\\0\end{pmatrix};\right].$$

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 3(d)

Conjunto de soluciones para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

donde la solución particular empleada es el vector $\boldsymbol{x}_p$.

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 4(a)

Es subespacio vectorial, ya que el conjunto es cerrado para la suma

$$\begin{pmatrix} a, & b, & a, \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c, & d, & c, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c, & b+d, & a+c, \end{pmatrix}$$

y también es cerrado para el producto por un escalar

$$\lambda \begin{pmatrix} b, & c, & d, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b, & \lambda c, & \lambda b, \end{pmatrix}.$$

En concreto S_1 es una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, y constituye el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0};$$

es decir, que $S_1 = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, con $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

□

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 4(b)

No es un subespacio. Por ejemplo el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0, \end{pmatrix}$ pertenece a S_2, pero $2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}$ no. Así pues, el conjunto S_2 no es cerrado para el producto por un escalar ni tampoco para la la suma.

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 1(a)

Verdadero. Puesto que $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ son dependientes, existe un vector $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$x_1\left(\boldsymbol{v}_1\right) + x_2\left(\boldsymbol{v}_2\right) + x_3\left(\boldsymbol{v}_3\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{V}\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}$. Así, puesto que $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, tenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 & \mathbf{A}\boldsymbol{v}_2 & \mathbf{A}\boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{A}\mathbf{V}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 1(b)

Falso. Tome por ejemplo $\mathbf{A} = \underset{4\times 3}{\mathbf{0}}$ (la matriz nula de orden 4 por 3).

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 1(c)

Verdadero. Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ sólo tiene dimensión 2, el rango de $\mathbf{A}$ es 3. Así pues, $\mathbf{A}$ tiene rango completo por filas (i.e., $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}^3$) y el sistema es resoluble para cualquier vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Por tanto, debe tener infinitas soluciones, pues además las columnas de $\mathbf{A}$ son dependientes (ya que hay columnas sin pivote, $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 2$).

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 2.

El ejemplo más sencillo es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 3(a)

$$\text{Base} = \left[\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}; \right]. \qquad \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \exists\, a, b \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = a \begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} \right\}.$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 3(b)

$$\text{Base} = \left[\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}; \right]. \qquad \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = a \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

La base viene de la última columna de $\mathbf{E}$.

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 3(c)

La solución particular de unos cumple con $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ = suma de las columnas de $\mathbf{A}$.
Así, el conjunto de soluciones es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \exists\, a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + a \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 3(d)

La estructura de $\mathbf{R}$ es

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\4&0&0\\0&1&0\\2&2&0\end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad \underset{2\times 2}{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \underset{2\times 2}{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix}4&0\\2&2\end{bmatrix}.$$

Así, escribiendo las columnas de $\mathbf{M}$ en las posiciones correspondientes a los índices de las filas pivotes, y las columnas de la matrix identidad en las posiciones correspondientes a los índices de las filas sin pivote, tenemos:

$$\begin{bmatrix}-4&1&0&0\\-2&0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\4&0&0\\0&1&0\\2&2&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Por tanto, una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ está formada por las dos filas de la matriz de la izquierda:

$$\text{Base} = \left[\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\1\end{pmatrix}; \right].$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 3(e)

$$\left[\begin{array}{ccc}1&-1&3\\1&1&-2\\1&0&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(5)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(2)\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&2&0\\1&1&1\\\hline 1&1&-1\\0&1&5\\0&0&2\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{1}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\\\hline 2&2&-1\\-6&-4&5\\-2&-2&2\end{array}\right] \xrightarrow[{[(\frac{1}{2})\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{1}{2})\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 1&1&-1\\-3&-2&5\\-1&-1&2\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\\hline \mathbf{E}^{-1}\end{array}\right]$$

Por tanto

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&-1\\-3&-2&5\\-1&-1&2\end{bmatrix}$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 3(f)
Puesto que $\mathbf{AE} = \mathbf{R}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{RE}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{RE}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \\ -3 & -2 & 5 \\ -4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 3(g)
Las filas pivote (filas 1 y 3) de $\mathbf{A}$ son una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)$.

$$\text{Base} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}; \right]$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 3(h)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \\ -3 & -2 & 5 \\ -4 & -2 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \hline \dot{\mathbf{E}} \end{bmatrix}$$

Así, puesto que $\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{E}}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}.$$

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 1(a) **Si.** Como $\mathbf{A}$ es invertible, su espacio columna el todo el espacio $\mathbb{R}^n$; y lo mismo es cierto para $\mathbf{A}^{-1}$.

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 1(b) **No**. Considere $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. El espacio $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ contiene todos los múltiplos del vector $(1, 0,)$, pero $\mathbf{A}^2$ es la matriz nula, así que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^2\right)$ sólo contiene el vector $\mathbf{0}$.

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 2(a)
Puesto que el espacio nulo está generado por los siguientes tres vectores, sencillamente podemos tomar la matriz $\mathbf{B}$ cuyas columnas son los vectores dados, i.e.,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}$ no tiene por qué ser cuadrada.

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 2(b)
Por ejemplo, podemos sencilamente añadir una columna de ceros a $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

O simplemente podemos intercambiar dos columnas. O multiplicar una columna por -1. Por ejemplo:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

O podemos remplazar una de las columnas por una combinación lineal de esa columna junto con otras columnas (cualquier operación por columnas que sea invertible). O podemos remplazar $\mathbf{B}$ por $-\mathbf{B}$ ó $2\mathbf{B}$. Hay muchas soluciones posibles. En cualquier caso, ¡la respuesta no requiere muchos cálculos!

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 2(c)

Puesto que cualquier solución $\boldsymbol{x}$ de la ecuación $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es de la forma $\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n$ para algún vector $\boldsymbol{x}_n$ en el espacio nulo, el vector $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p$ debe pertencer al espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. Así pues, tenemos que fijarnos en

$$\boldsymbol{x}_Z - \boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_H - \boldsymbol{x}_p \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Para determinar si un vector $\boldsymbol{y}$ pertenece al espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, podemos verificar si $\mathbf{B}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ tiene solución. Como hemos visto en clase, podemos hacerlo mediante la eliminación: si la eliminación produce un vector de ceros en la última columna de la matriz ampliada $[\mathbf{B}| - \boldsymbol{y}]$, entonces $\boldsymbol{y}$ es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{B}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -a \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1+3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & -a \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{2+3}] \\ [(-1)\mathbf{2+4}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & -a-4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{3+4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -a-4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

El sistema tiene solución sólo si $a = -4$. Así que Z tiene razón.

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 3.

Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, el espacio columna de $\mathbf{A}$ tiene dimensión menor que m (tiene filas libres). Así que el rango r es $r < m$. Pero puesto que $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ tiene sólo una solución, las columnas de $\mathbf{A}^\intercal$ son independientes. Esto quiere decir que el tango de $\mathbf{A}^\intercal$ es $r = m$. Esta contradicción demuestra que no podemos encontrar tales $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 4(a)

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 1 \\ -6 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{1+2}] \\ [(1)\mathbf{1+3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{2+3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{L} \\ \hline \mathbf{E} \end{array}\right]$$

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 4(b)

Puesto que $\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{E}}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 4(c)

Si se cambia a_{33} de -1/2 a -1, el tercer pivote se reduce en 1/2 y $\mathbf{A}_{nueva}$ resulta singular. Su espacio columna es el plano in $\mathbb{R}^3$ que contiene todas las combinanciones lineales de las dos primeras columnas: (-1, -6, 1) y (0, -1, 0).

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 4(d)

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(\text{-}3)\mathbf{2+3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\text{-}1)\mathbf{1+2}] \\ [(1)\mathbf{1+3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} \text{-}1 & 0 & 0 & \text{-}b_1 \\ \text{-}6 & \text{-}1 & 0 & \text{-}b_2 \\ 1 & 0 & 0 & \text{-}b_3 \\ \hline 1 & \text{-}1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \text{-}3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(\text{-}1)\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\text{-}6)\mathbf{2+1}] \\ [(\text{-}1)\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \text{-}b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \text{-}b_2 \\ \text{-}1 & 0 & 0 & \text{-}b_3 \\ \hline \text{-}7 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & \text{-}1 & \text{-}3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(b_2)\mathbf{2+4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(b_1)\mathbf{1+4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{-}1 & 0 & 0 & \text{-}b_1\text{-}b_3 \\ \hline \text{-}7 & 1 & 4 & b_2\text{-}7b_1 \\ 6 & \text{-}1 & \text{-}3 & 6b_1\text{-}b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Por tanto, es necesario que $b_1 + b_3 = 0$ (puesto que así la última columna de la matriz aumentada no tiene pivote, es decir, que entonces $\boldsymbol{b}$ es combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes).

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 4(e)

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix} \right\}$$

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 1(a)

Si conocemos las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, quiere decir que conocemos qué combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}$ son iguales a $\boldsymbol{b}$, y por lo tanto sabemos si $\boldsymbol{b}$ es combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$, que es lo mismo que decir que sabemos si $\boldsymbol{b}$ pertence a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, puesto que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}$. Así,

$\boxed{\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ tiene solución si y sólo si } \boldsymbol{b} \text{ pertenece al espacio columna de } \mathbf{A}}$.

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 1(b)

$\boxed{\text{Si}}$. Basta con comprobar que podemos eliminar la última columna de la matriz ampliada $\left[\mathbf{A}| - \boldsymbol{b}\right]$

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -8 \\ 6 & 5 & -28 \\ 2 & 4 & -14 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(4)\mathbf{1+3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1/2)\mathbf{1+2}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -6 \\ \hline 1 & -1/2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{2+3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -1/2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Así, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ es solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, y $\boldsymbol{b}$ es por lo tanto un vector del espacio columna de $\mathbf{A}$.

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 2(a)

Las cuatro operaciones elementales por columnas en el proceso de eliminación Gauss-Jordan son

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{1+2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{1+3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{3+2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{2+1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{I}$$

ó

$$\mathbf{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -2 & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & -3\\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ -3 & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1 & & \\ -3 & 1 & \\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}-2 & 1 & -3\\ -3 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

También podemos expresar lo mismo así: $\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]\mathbf{E} = \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{A}^{-1}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}1&&\\&1&\\&&1\\ \hline -2&1&-3\\-3&1&0\\3&-1&1\end{array}\right].$

Así, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}-2&1&-3\\-3&1&0\\3&-1&1\end{bmatrix}.$

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 2(b)

Podemos calcular la inversa de la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ para obtener $\mathbf{A}$, realizando la operaciones elementales inversas sobre $\mathbf{I}$ (pero en orden inverso).

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}^{-1}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}-2&-1&-3\\-3&1&0\\3&-1&1\\ \hline 1&&\\&1&\\&&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\substack{\tau\\ [(3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\ [(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&&\\&1&\\&&1\\ \hline 1&2&3\\3&7&9\\0&1&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{A}\end{array}\right],$$

calculando el siguiente producto: $\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}\Big) = \mathbf{A}.$

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 3(a)

La tercera columna de $\mathbf{A}$ es el doble de la primera.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0&2\\2&0&4\\1&1&2\\2&2&4\\1&3&2\end{bmatrix}.$$

Puesto que $\mathbf{L}$ tiene su primer pivote en la primera fila, primera columna; y el segundo pivote en la tercera fila, segunda columna; entonces

Una base de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$: $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\3\end{pmatrix};\right].$ Una base de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$: $\Big[\big(1,\ 0,\ 2,\big);\ \big(1,\ 1,\ 2,\big);\Big].$

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 3(b)

Puesto que la tercera columna de $\mathbf{L}$ es cero, la tercera columna de $\mathbf{E} = \mathbf{U}^{-1}$ es una base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Así pues el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = a\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 3(c)

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathsf{A} & \textbf{-}\boldsymbol{b}\\ \hline \mathsf{I} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 4 & -2\\ 1 & 1 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 4 & -4\\ 1 & 3 & 2 & -c\\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 4-c\\ \hline 1 & & -2 & 1\\ & 1 & & 1\\ & & 1 & 0\\ \hline & & & 1 \end{array}\right]$$

Si $c \neq 4$ el sistema no tiene solución. Cuando $c = 4$ la solución completa es:

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 4(a)

El número de filas m es tres. Puesto que el primer sistema no tiene solución, el rango es menor que tres, y puesto que el segundo tiene sólo una solución, no hay columnas libres (todas son pivote). Por tanto el número de columnas n es uno o dos; y el rango también.

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 4(b)

Puesto que la matrix es de rango completo por columnas, el único vector en el espacio nulo es el cero $\mathbf{0}$. Así pues, necesariamente ese vector es el vector nulo: $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 4(c)

$$\begin{bmatrix}0\\a\\0\end{bmatrix}, \qquad \text{o} \qquad \begin{bmatrix}0 & c\\ a & 0\\ 0 & c\end{bmatrix}; \quad \text{y } a, c \neq 0;$$

o cualquier matriz que sea pueda obtener mediante transformaciones elementales por columnas de ambos ejemplos.

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 4(d)

El rango es el máximo número de vectores columna de la matriz que podemos tomar manteniendo un conjunto linealmente independiente. Es decir, tal que la única combinación de dichos vectores

$$a \cdot \mathsf{A}_{|i} + b \cdot \mathsf{A}_{|j} + \cdots + m \cdot \mathsf{A}_{|p}$$

que dé un vector de ceros es que todos los coeficientes sean nulos. Pero en esta definición el orden en que sumemos los vectores columna es irrelevante, por lo que el rango no depende del orden en que se suman las columnas de la matriz..

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 1.

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathsf{A} & -\boldsymbol{b}\\ \hline \mathsf{I} & \mathbf{0}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & -5\\ 2 & 4 & 1 & 1 & -9\\ 3 & 6 & 2 & -1 & -14\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(5)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 5 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 5 & 1\\ \hline 1 & -2 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(5)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0\\ \hline 1 & -2 & -1 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, la solución completa es el conjunto de vectores de la forma

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-2 & -3\\ 1 & 0\\ 0 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 2(a)
El procedimiento de eliminación "hacia arriba" es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}7&6&2\\6&3&0\\4&12&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}-1&-18&0\\6&3&0\\4&12&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(6)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}35&0&0\\6&3&0\\4&12&1\end{bmatrix} = \mathbf{L},$$

donde el primer paso es $\underset{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$ y el segundo $\underset{[(6)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}\Big(\underset{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}\Big)$. Puesto que estas operaciones son combinaciones lineales de las filas, corresponden a productos de matrices elementales por la izquierda:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix}35&0&0\\6&3&0\\4&12&1\end{bmatrix} = \big(\underset{[(6)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}\big)\big(\underset{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}\big)\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&6&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\mathbf{A}$$

(Una manera de obtener estas matrices eliminación es realizando la operación correspondiente sobre la matriz identidad de orden 3×3.)

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 2(b)
Como más arriba, $\mathbf{L} = \mathbf{EA}$ (las matrices eliminación multiplican por la *izquierda* para operar con las filas). Por lo tanto, el espacio columna de $\mathbf{A}$ es distinto del espacio columna $\mathbf{L}$, pero los espacios nulos son idénticos:

Por ejemplo

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix} = \mathbf{EA} = \begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

donde

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{L}\right) = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\right]\right) \quad \neq \quad \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\right]\right).$$

Mientras que para toda matriz invertible $\mathbf{E}$

$$\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \Rightarrow \ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \mathbf{EA}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \mathbf{L}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{L}\right)$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{L}\right) \Rightarrow \ \mathbf{L}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \mathbf{E}^{-1}\mathbf{L}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$$

Así que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{L}\right)$.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 2(c) Una manera sencilla de verlo es con un contraejemplo: e.g., aplicando sobre la matriz $\mathbf{A}$ la eliminación "hacia la derecha" obtendremos una matriz distinta. Por ejemplo, la eliminación hacia la derecha nunca cambiará la esquina superior izquierda (7), pero la eliminación hacia arriba ha cambiado dicho numero (35).

De manera más abstracta, sabemos por clase que la eliminación hacia la derecha mantiene el espacio columna, mientras que ya hemos visto que la eliminación hacia arriba de las filas cambia el espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$. Así que las matrices obtenidas por ambos procedimientos no pueden ser siempre iguales.

Para contestar adecuadamente no basta con decir que las operaciones empleadas son distintas, ya que en muchas aplicaciones se obtienen resultados idénticos empleado sucesiones de operaciones distintas (por ejemplo, podemos usar eliminación hacia la derecha o eliminación hacia arriba para encontrar $\mathbf{A}^{-1}$, y por supuesto, si tal matriz existe, el resultado es el mismo independientemente del procediminto empleado).

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 3(a) <u>**SI**</u>
Es el conjunto de soluciones de un sistema homogeneo. En particular, es el espacio nulo de la matriz $\begin{pmatrix}2, & -2, & 1,\end{pmatrix}$.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 3(b) <u>**NO**</u>
El vector $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ pertenece al conjunto, pero el múltiplo (multiplicando por -1), $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ no pertenece.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 3(c) <u>**NO**</u>
Es el conjunto de soluciones de un sistema no homogeneo. En particular, el conjunto no contiene al vector **0**.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 3(d) <u>**SI**</u>
Es la intersección de dos subespacios (dos planos que pasan por el origen). En particular es el espacio nulo de la matriz $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 3(e) <u>**NO**</u>

Es la unión de dos planos, es decir, un conjunto no cerrado para la suma. Tomemos por ejemplo $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$; que no pertenece al conjunto.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 4(a) Las columnas son linealmente independientes, así que el rango de la matriz es 3. Entonces $\dim\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=3$, $\dim\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)=3$, $\dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=0$, $\dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)=1$.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 4(b) Puesto que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ es un subespacio tridimensional de $\mathbb{R}^3$, resulta ser todo el espacio $\mathbb{R}^3$. Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión cero, entonces es $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 4(c) $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ pueden ser distintas. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\text{y}\quad\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 5(a)
No hay solución. La última fila de $\mathbf{A}$ esta llena de ceros. Si $s=1$, entonces tenemos $0=1$.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 5(b)

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}p\\0\\q\\0\\r\\0\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-a&-d&-g\\1&0&0\\-b&-e&-h\\0&1&0\\-c&-f&-i\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}.$$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 1(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-b_1\\1&2&3&5&-b_2\\1&3&5&9&-b_3\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1+4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1+2}]\\ [(-1)\mathbf{1+3}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-b_1\\1&1&2&4&-b_2\\1&2&4&8&-b_3\\\hline 1&-1&-1&-1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2+1}]\\ [(-2)\mathbf{2+3}]\\ [(-4)\mathbf{2+4}]\\ [(b_1)\mathbf{1+5}]\\ [(b_2)\mathbf{2+5}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\-1&2&0&0&b_3-2b_2+b_1\\\hline 2&-1&1&3&2b_1-b_2\\-1&1&-2&-4&-b_1+b_2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 1(a) Rango 2 (dos pivotes).

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 1(b) De la última fila tras la reducción de $-\boldsymbol{b}$, podemos ver que la condición para que un vector pertenezca al espacio columna de $\mathbf{A}$ es $b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$. Así $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es $\mathcal{N}\left(\mathbf{B}\right)$ para

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 1(c) los dos últimos no pueden pertenecer al espacio columna puesto que pertenecen a $\mathbb{R}^4$. De la condición obtenida en la parte (b), tenemos que $\begin{pmatrix}2, & 0, & -2,\end{pmatrix}$ pertenece al espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, pero $\begin{pmatrix}1, & -2, & 1,\end{pmatrix}$ no pertence.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 2(c)

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & -\boldsymbol{b}\\ \hline \mathbf{I} & \\ \hline & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3 & -3\\ 3 & 4 & k & -7\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & k-3 & -1\\ \hline 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & k-5 & 0\\ \hline 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right].$$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 2(a) Del proceso de eliminación vemos que no importa el valor de k, el sistema siempre tiene solución (hemos eliminado $-\boldsymbol{b}$ sin tener en cuenta el valor de k). Por inspección, esto se puede observar directamente en $\mathbf{A}$, ya que la suma sus dos primeras columnas es igual al vector del lado derecho

$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}.$$

Para $k \neq 5$ la matriz tiene rango 3, y por tanto solución única.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 2(b) Para $k = 5$ la matriz tiene rango 2, y por tanto el sistema tiene infinitas soluciones.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 2(c) Del proceso de eliminación gaussiana por columnas sabemos que $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$, y puesto que $\mathbf{E}$ es invertible, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{LE}^{-1}$; vamos a calcular $\mathbf{E}^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{E}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{E}^{-1}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{U}\end{array}\right]$$

por tanto

$$\mathbf{LU} = \mathbf{LE}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 4\end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 2(d) Como se ha hecho notar más ariba, para $k \neq 5$ sólo hay una solución, dada por $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}1, & 1, & 0,\end{pmatrix}$. Esta solución la podemos obtener del proceso de eliminación, o como hemos mencionado antes, sencillamente por inspección.

Para $k = 5$, $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}1, & 1, & 0,\end{pmatrix}$ es una solución particular; la solución general se obtiene añadiendo los vectores del espacio nulo:

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 3(d)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&2&-1&0&0&-b_1\\ 1&2&0&2&2&-b_2\\ 1&2&-1&0&0&-b_3\\ 2&4&0&4&4&-b_4\\ \hline 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&-b_1\\ 1&0&1&2&2&-b_2\\ 1&0&0&0&0&-b_3\\ 2&0&2&4&4&-b_4\\ \hline 1&-2&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(3)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]\\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&-b_1\\ 0&0&1&0&0&-b_2\\ 1&0&0&0&0&-b_3\\ 0&0&2&0&0&-b_4\\ \hline 0&-2&1&-2&-2&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ -1&0&1&-2&-2&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[{[(b_2)\mathbf{3}+\mathbf{6}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{6}]}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&b_1-b_3\\ 0&0&2&0&0&2b_2-b_4\\ \hline 0&-2&1&-2&-2&b_2\\ 0&1&0&0&0&0\\ -1&0&1&-2&-2&b_2-b_1\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$\square$

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 3(a)

$$\text{Por ejemplo: base } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2;\end{pmatrix}\right];\quad \text{ó también: base } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix};\right].$$

$\square$

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 3(b) Por ejemplo: base $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left[\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix};\right].$

$\square$

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 3(c) $\begin{cases} b_1 - b_3 = 0\\ 2b_2 - b_4 = 0 \end{cases}$

$\square$

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 3(d) Puesto que $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}b_2\\0\\b_2-b_1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, entonces

$$\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-2&-2&-2\\1&0&0\\0&-2&-2\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}.$$

$\square$

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 4(a) **Falso.** Contraejemplo: si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ pero $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ y $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$.

Note que si asumimos que $\mathbf{A}$ es invertible, entonces la única solución es $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (multiplicando ambos lados de $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ por $\mathbf{A}^{-1}$), pero el enunciado no indica que este supuesto se cumpla.

$\square$

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 4(b) **Verdadero.** Basta comprobar que las combinaciones lineales de vectores se mantienen dentro del espacio. Si $\mathbf{B}$ es una matriz tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, entonces $\mathbf{A}(\mathbf{B}c) = (c\mathbf{B})\mathbf{A}$

para cualquier c. Si $\mathbf{B'}$ es otra matriz tal que $\mathbf{AB'} = \mathbf{B'A}$, entonces $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{B'}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AB'} = \mathbf{BA}+\mathbf{B'A} = (\mathbf{B}+\mathbf{B'})\mathbf{A}$. (El resto de propiedades de un espacio vectorial, asociatividad, etc., no es necesario demostrarlas, ya que con lo anterior quedan aseguradas).

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 4(c) **Verdadero.** Suponga que el rango de $\mathbf{A}$ es r, entonces la dimensión de su espacio columna es r, y la dimensión del espacio nulo es $3-r$. Obviamente no importa si $r=0,1,2,3$, siempre tenemos que $r \neq 3-r$. (De manera equivalente, $r=3-r$ implicaría un rango fraccional $r=3/2$). Esto muestra que los dos espacios son distintos, ya que sus dimensiones son necesariamente diferentes.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 4(d) **Verdadero.**

$$\left(\mathbf{A}^2\right)^{\intercal} = \left(\mathbf{AA}\right)^{\intercal} = \mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{AA} = \mathbf{A}^2$$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 4(e) **Falso.** Sería cierto si la matriz fuera cuadrada.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 5(a) Ninguna. Puesto que el rango en cuatro, no hay columnas libres.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 5(b) El espacio fila de $\mathbf{A}$ es todo el subespacio $\mathbb{R}^4$ (puesto que el rango es 4). Entonces cada vector $\boldsymbol{b}$ en $\mathbb{R}^4$ es una combinación de las filas de $\mathbf{A}$, lo que significa que $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ es resoluble para cualquier vector del lado derecho $\boldsymbol{b}$.

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 1(a)

$$\left[\begin{array}{ccc} 2&2&0\\ 1&4&9\\ 1&3&9\\ \hline 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 2&0&0\\ 1&3&9\\ 1&2&9\\ \hline 1&-1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 2&0&0\\ 1&3&0\\ 1&2&3\\ \hline 1&-1&3\\ 0&1&-3\\ 0&0&1 \end{array}\right]$$

Por tanto

$$\mathbf{E} = \Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big) = \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 1(b) Puesto que $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{LE}^{-1}$; y por tanto $\mathbf{U} = \mathbf{E}^{-1}$.

$$\mathbf{U} = \mathbf{E}^{-1} = \Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)^{-1} = \Big(\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 2(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&2&1&-3\\ 1&1&5&4&-6\\ 3&3&9&6&-c\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(3)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 1&0&3&3&-3\\ 3&0&3&3&-c+9\\ \hline 1&-1&-2&-1&3\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 1&0&3&0&0\\ 3&0&3&0&-c+12\\ \hline 1&-1&-2&1&1\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&-1&1\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

Por tanto

$$\text{Una base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}; \right]$$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 2(b) Sólo para $c = 12$.

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 2(c) La solución completa es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 0\\0 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}$$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 3(a) El espacio de todos los vectores in $\mathbb{R}^4$ que son ortogonales (perpendiculares) a ambos vectores es el conjunto de soluciones al sistema:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Así,

$$\left[\begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 1\\0 & 0 & 1 & 2\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2\\ \hline 1 & -2 & -3 & -1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 1 & -2 & -3 & 5\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Por tanto, una base es

$$\left[\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}5\\0\\-2\\1\end{pmatrix}; \right].$$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 3(b) Depende del rango (del número de pivotes) de la matriz $\left[\boldsymbol{u};\quad \boldsymbol{v};\quad \boldsymbol{w};\right]$. Puesto que los vectores no son nulos, entonces la matriz es no nula, y por tanto la dimensión de su espacio columna puede ser 1, 2 ó 3.

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 4(a) Comprobando que el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ es resoluble, por ejemplo:

- Comprobando si $\mathbf{A}$ tiene el mismo número de pivotes que la matriz aumentada $[\mathbf{A}|\boldsymbol{c}]$ $\Big($es decir, comprobando que $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = \operatorname{rg}\left([\mathbf{A}|\boldsymbol{c}]\right)\Big)$.
- En otras palabras, comprobando si la última columna de la matriz aumentada $[\mathbf{A}|\boldsymbol{c}]$ es una columna libre tras el proceso de eliminación gaussiana por filas.
- o realizando la eliminación por columnas en la matriz aumentada $[\mathbf{A}|\boldsymbol{c}]$ y comprobando que la última columna se convierte en una columna de ceros: $[\mathbf{A}|\boldsymbol{c}] \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_n} [\mathbf{L}|\mathbf{0}]$.

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 4(b) Comprobando si $\boldsymbol{r}$ se transforma en una fila de ceros tras la eliminación gaussiana por filas:

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{r}}\right] \xrightarrow[\boldsymbol{\tau}_n\cdots\boldsymbol{\tau}_1]{} \left[\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{0}}\right]$$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 4(c) Puesto que $\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ $\Big($o, puesto que $\boldsymbol{r} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$;$\Big)$ el rango de $\mathbf{A}$ es como mínimo uno.

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 4(d) Como mucho el rango es dos, ya que no todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ pertencen al espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$, puesto que $\boldsymbol{r} \notin \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$. Esto significa que la dimensión de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ es menor que tres (la dimensión de $\mathbb{R}^3$), es decir, que hay menos de tres pivotes.

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 1(a)

Las cuatro operaciones elementales por columnas en el proceso de eliminación Gauss-Jordan son

$$\mathbf{A}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}}\Big) = \mathbf{AE} = \mathbf{I}$$

ó

$$\mathbf{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1&-2&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&-3\\&1&\\&&1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1&-2&-3\\&1&\\&&1\end{bmatrix}}\underbrace{\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\-3&1&\\&&1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1&&\\-3&1&\\3&-1&1\end{bmatrix}} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}-2&1&-3\\-3&1&0\\3&-1&1\end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

También podemos expresar lo mismo así: $\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right]\mathbf{E} = \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\\hline\mathbf{A}^{-1}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}1&&\\&1&\\&&1\\\hline-2&1&-3\\-3&1&0\\3&-1&1\end{array}\right].$

Así, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}-2&1&-3\\-3&1&0\\3&-1&1\end{bmatrix}.$

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 1(b)

Podemos calcular la inversa de la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ para obtener $\mathbf{A}$, realizando la operaciones elementales inversas sobre $\mathbf{I}$ (pero en orden inverso).

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}^{-1}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}-2&-1&-3\\-3&1&0\\3&-1&1\\\hline1&&\\&1&\\&&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\substack{\tau\\ [(3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\ [(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&&\\&1&\\&&1\\\hline1&2&3\\3&7&9\\0&1&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\\hline\mathbf{A}\end{array}\right],$$

calculando el siguiente producto: $\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}\Big)\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}\Big) = \mathbf{A}.$

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 2(a) La tercera columna de $\mathbf{A}$ es el doble de la primera.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0&2\\2&0&4\\1&1&2\\2&2&4\\1&3&2\end{bmatrix}.$$

Puesto que $\mathbf{L}$ tiene su primer pivote en la primera fila, primera columna; y el segundo pivote en la tercera fila, segunda columna; entonces

Una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$: $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\3\end{pmatrix};\right]$. Una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$: $\Big[\big(1, \quad 0, \quad 2,\big);\ \big(1, \quad 1, \quad 2,\big);\Big]$.

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 2(b) Puesto que la tercera columna de L es cero, la tercera columna de $\mathsf{E} = \mathsf{U}^{-1}$ es una base de $\mathcal{N}(\mathsf{A})$.

$$\mathsf{E} = \mathsf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así pues el conjunto de soluciones del sistema $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es

$$\mathcal{N}(\mathsf{A}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 2(c)

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \boldsymbol{\text{-}b} \\ \hline \mathsf{I} & \\ \hline & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & -c \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4-c \\ \hline 1 & & -2 & 1 \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & 0 \\ \hline & & & 1 \end{array}\right]$$

Si $c \neq 4$ el sistema no tiene solución. Cuando $c = 4$ la solución completa es:

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 3(a) El número de filas m es tres. Puesto que el primer sistema no tiene solución, el rango es menor que tres, y puesto que el segundo tiene sólo una solución, no hay columnas libres (todas son pivote). Por tanto el número de columnas n es uno o dos; y el rango también.

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 3(b) Puesto que la matrix es de rango completo por columnas, el único vector en el espacio nulo es el cero $\mathbf{0}$. Así pues, necesariamente ese vector es el vector nulo: $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 3(c)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{o} \qquad \begin{bmatrix} 0 & c \\ a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}; \quad \text{y } a, c \neq 0;$$

o cualquier matriz que sea pueda obtener mediante transformaciones elementales por columnas de ambos ejemplos.

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 3(d) El rango es el máximo número de vectores columna de la matriz que podemos tomar manteniendo un conjunto linealmente independiente. Es decir, tal que la única combinación de dichos vectores

$$a \cdot \boldsymbol{a}i + b \cdot \boldsymbol{a}j + \cdots + m \cdot \boldsymbol{a}p$$

que dé un vector de ceros es que todos los coeficientes sean nulos. Pero en esta definición el orden en que sumemos los vectores columna es irrelevante, por lo que el rango no depende del orden en que aparecen las columnas de la matriz..

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 4(a) Puesto que el rango es 4, habrá 7 - 4 = 3 columnas de ceros en L y R.

$\square$

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 4(b) El espacio columna de A contine todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ (puesto que el rango es 4). Por tanto, cualquier vector de $\mathbb{R}^4$ se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de A, esto significa que $\mathsf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ siempre tiene solución.

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 1(a)

$$\left[\begin{array}{cccc} 0&1&2&2\\ 0&3&8&7\\ 0&0&4&2\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} 0&1&0&0\\ 0&3&2&1\\ 0&0&4&2\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&-2&-2\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\substack{\tau\\ [(2)\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 0&1&0&0\\ 0&3&2&0\\ 0&0&4&0\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&-2&-2\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&0&2 \end{array}\right]$$

así que las soluciones especiales son $\boxed{\boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\2\end{pmatrix}}$ Por tanto, el espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right)$ es **un plano en** $\mathbb{R}^4$ generado por las combinaciones lineales de las soluciones dos especiales.

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1&0\\0&-2\\0&-1\\0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\} = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\2\end{pmatrix};\right]\right).$$

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 1(b) $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$ es un plano en $\mathbb{R}^3$ generado por las combinaciones lineales de las columnas pivote de A

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1&2\\3&8\\0&4\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\} = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\8\\4\end{pmatrix};\right]\right).$$

O también $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$ es un plano en $\mathbb{R}^3$ generado por las combinaciones lineales de las columnas pivote de L

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1&0\\3&2\\0&4\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\} = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix};\right]\right).$$

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 1(c) Notese que B se puede reducir por eliminación gaussiana a

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix}\mathsf{A} & \mathbf{0}\\ \mathsf{A} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

Puesto que conocemos las forma escalonada reducida de A: la forma escalonada reducida de B es por tanto

$$\boxed{\mathsf{B} = \begin{bmatrix}\mathsf{R} & \mathbf{0}\\ \mathsf{R} & \mathbf{0}\end{bmatrix}; \quad \text{donde} \quad \mathsf{R} = \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-6&2&0\end{bmatrix}.}$$

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 2(a) En primer lugar, $m = 3$ ya que $\mathsf{A}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Además, $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ tiene *una* solución $\Longrightarrow$ $\mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right) = \{0\}$, y entonces $r = n$ (donde r es el rango de la matriz).

Pero $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ no tiene solución $\Longrightarrow$ $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right) \neq \mathbb{R}^3$, y entonces $r < m = 3$.

Hay dos posibilidades : $\begin{matrix} m=3 \\ r=n=1 \end{matrix}$ o $\begin{matrix} m=3 \\ r=n=2 \end{matrix}$.

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 2(b) Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \{0\}$ (porque $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ tiene 1 solución), hay una única solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, que necesariamente es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. (Puede ser bien $\boldsymbol{x} = (0,)$ o bien $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ dependiendo de si $n = 1$ o $n = 2$.)

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 2(c) $\mathbf{A}$ puede ser $\begin{bmatrix}0\\a\\0\end{bmatrix}$, para $a \neq 0$; o bien $\begin{bmatrix}0&c\\0&0\\0&c\end{bmatrix}$, ó $\begin{bmatrix}c&0\\0&a\\c&0\end{bmatrix}$ y ambas columnas linealmente independientes (por tanto ninguna columna puede ser nula).

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 3(a) la ecuación $Ax = b$ $\boxed{\text{siempre}}$ tiene $\boxed{\text{muchas soluciones}}$.

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 3(b) $\boxed{\text{El espacio columna es un espacio tridimensional dentro de } \mathbb{R}^3}$, es decir, es todo $\mathbb{R}^3$, y
$\boxed{\text{el espacio nulo tiene dimensión } 5-3=2>0 \text{ dentro de } \mathbb{R}^5}$, un plano dentro de $\mathbb{R}^5$ que pasa por el origen.

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 4(a) Encontremos primero un vector en la misma dirección que la recta

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.$$

Así que una representación paramétrica es

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + a\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x_1 = 2+3a \\ x_2 = 2-2a \end{cases}.$$

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 4(b) Necesitamos "eliminar" la parte de los parámetros ($a\boldsymbol{v}$), puesto que

$$\begin{pmatrix}2, & 3,\end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}2, & 3,\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = (0)$$

entonces es fácil eliminar dicha parte:

$$\begin{pmatrix}2, & 3,\end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2, & 3,\end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{p} + a\begin{pmatrix}2, & 3,\end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{v} \longrightarrow \begin{pmatrix}2, & 3,\end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2, & 3,\end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{p} + a \cdot 0$$

En este caso particular

$$\begin{pmatrix}2, & 3,\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2, & 3,\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}2, & 3,\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \longrightarrow 2x + 3y = 10 + a \cdot 0$$

y por tanto una ecuación para la recta es $\left\{2x + 3y = 10\right.$.

Una forma rápida de hacer todos estos cálculos es mediante. . . ¡eliminación gaussiana!

$$\left[\begin{array}{cc} x & y \\ \hline 2 & 2 \\ \hline\hline 3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(3)\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(2)\mathbf{1}]}}} \left[\begin{array}{cc} 2x & 3y \\ \hline 4 & 6 \\ \hline\hline 6 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}} \left[\begin{array}{cc} 2x & \color{blue}{2x+3y} \\ \hline 4 & \color{blue}{10} \\ \hline\hline 6 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{2x + 3y = 10\right. .$$

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 1(a) Primero, puesto que $\mathbf{R}$ es la forma escalonada reducida por filas, tenemos que $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix}4, & 0, & 0,\end{pmatrix}$. Los otros dos vectores nos dan las soluciones especiales para $\mathbf{R}$, y muestran, por tanto, que $\mathbf{R}$ tiene rango 1: de nuevo, puesto que es la matriz escalonada reducida, las dos ultimas filas son ceros, y la fila de arriba es $\begin{pmatrix}1, & -2, & -5,\end{pmatrix}$, i.e.

$$\boxed{\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}.$$

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 1(b) La matriz que conecta $\mathbf{R}$ y $\boldsymbol{d}$ con los originales $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{b}$ es

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\underset{[(-5)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}{\tau}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Es decir, $\mathbf{R} = \mathbf{E}\mathbf{A}$ y $\mathbf{E}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$. Así, $\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{R}$ y $\boldsymbol{b} = \mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{d}$, dando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & -6 & -15 \\ 5 & -10 & -25 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}}.$$

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 2(a)

- $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) =$ número de pivotes $= 3$.
- $\dim(\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)) = \dim(\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)) = \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 3$.
- $\dim(\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)) =$ número de columnas libres $= 0$
- $\dim(\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)) =$ número de filas sin pivote $= 5 - 3 = 2$.

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 2(b) Las tres coumnas no nulas de $\mathbf{R}$ constituyen una base del espacio columna de $\mathbf{A}$. También $\mathbf{A}_{|1}$ $\mathbf{A}_{|2}$ y $\mathbf{A}_{|4}$.

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 2(c) Las filas primera, segunda y cuarta de $\mathbf{A}$

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 2(d) Puesto que hay dos filas sin pivote, necesitamos encontrar dos soluciones del sistema $\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ que sean linealmente independientes. Puesto que

$$\mathbf{N}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{2} & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & 0 & 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underset{2\times 4}{\mathbf{0}}$$

El sistema formado por las filas $\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix}-3, & 2, & 1, & 0, & 0,\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix}-1, & 0, & 0, & 1, & 0,\end{pmatrix}$ de $\mathbf{N}$ es una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

Y puesto que cualquier combinación lineal de ambas soluciones especiales es también solución del sistema homogéneo; el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ es

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \left\{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{w} = \alpha \boldsymbol{x}_a + \beta \boldsymbol{x}_b \right\}.$$

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 2(e) $3\mathbf{A}_{|1} - 2\mathbf{A}_{|2} + 0\mathbf{A}_{|4} + 0\mathbf{A}_{|5} = \mathbf{A}_{|3}$. Nótese que la tercera fila de $\mathbf{R}$ nos indica una posible combinación (no es la única).

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 3(a) la ecuación $Ax = b$ $\boxed{\text{siempre}}$ tiene $\boxed{\text{muchas soluciones}}$.

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 3(b) $\boxed{\text{El espacio columna es un espacio tridimensional dentro de } \mathbb{R}^3}$, es decir, es todo $\mathbb{R}^3$, y
$\boxed{\text{el espacio nulo tiene dimensión } 5-3=2>0 \text{ dentro de } \mathbb{R}^5}$, un plano dentro de $\mathbb{R}^5$ que pasa por el origen.

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 4(a) Encontremos primero un vector en la misma dirreción que la recta

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Así que una representación paramétrica es

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + a\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x_1 = 1 + a \\ x_2 = 4 + a \end{cases}.$$

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 4(b) Necesitamos "eliminar" la parte de los parámetros ($a\boldsymbol{v}$), puesto que

$$\begin{pmatrix}-1, & 1,\end{pmatrix}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}-1, & 1,\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$$

entonces es fácil eliminar dicha parte:

$$\begin{pmatrix}-1, & 1,\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1, & 1,\end{pmatrix}\boldsymbol{p} + a\begin{pmatrix}-1, & 1,\end{pmatrix}\boldsymbol{v} \longrightarrow \begin{pmatrix}-1, & 1,\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1, & 1,\end{pmatrix}\boldsymbol{p} + a\cdot 0$$

En este caso particular

$$\begin{pmatrix}-1, & 1,\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1, & 1,\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}-1, & 1,\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longrightarrow -x + y = 2 + a\cdot 0$$

y por tanto la recta es

$$\begin{cases} -x + y = 2. \end{cases}$$

Una forma rápida de hacer todos estos cálculos es mediante. . . ¡eliminación gaussiana!

$$\left[\begin{array}{cc} x & y \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc} x & {\color{blue} y-x} \\ \hline 2 & {\color{blue} 2} \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} -x + y = 2\,. \end{cases}$$

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 1(a)

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{K} \\ \hline \mathbf{E} \end{array}\right]$$

$r = \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 2$, las columnas pivote son $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\9\\9\end{pmatrix}$.

El espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es **un plano en** $\mathbb{R}^3$ generado por las dos columnas pivote de $\mathbf{A}$ (o $\mathbf{L}$).

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 1(b) Soluciones especiales: $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, y $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\1 & -1\\0 & 2\\0 & 0\end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 1(c)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & -3\\ 3 & 6 & 3 & 9 & -b_3\\ 2 & 4 & 2 & 9 & -100\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(3)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1 & 6-b_3\\ \hline 1 & -2 & -1 & -4 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, para tener solución necesitamos $\boxed{b_3 = 6}$

Para dicho valor de b_3, una solución (particular) es $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}3, & 0, & 0, & 0,\end{pmatrix}$.

Solución completa o general: $\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-2 & -1\\1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$.

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 2(a) Puesto que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución para cualquier $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, entonces cualquier vector $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$: $\boldsymbol{b} = x_1 \mathbf{A}_{|1} + \cdots + x_n \mathbf{A}_{|n}$. Entonces cada $\boldsymbol{b}$ en $\mathbb{R}^3$ está en $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$; y por tanto **el espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es todo el espacio tridimensional** $\mathbb{R}^3$.

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 2(b) Puesto que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}^3$, tenemos $r = \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 3$ y por tanto num. variables libres = num. soluciones especiales = $n - r = 5 - 3 = 2$.

Así pues $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es un plano en $\mathbb{R}^5$.

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 2(c) Por (a) sabemos que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}^3$ y por tanto $r = \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 3$.

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 2(d) Mediante eliminación gaussiana obtenemos

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\\mathbf{A}\end{bmatrix}\mathbf{E} = \begin{bmatrix}\mathbf{AE}\\\mathbf{AE}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{R}\\\mathbf{R}\end{bmatrix}.$$

Pero $\mathbf{R}$ tiene rango 3. Por tanto $\operatorname{rg}\left(\mathbf{B}\right) = 3$.

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 3(a) la ecuación $Ax = b$ $\boxed{\text{siempre}}$ tiene $\boxed{\text{muchas soluciones}}$.

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 3(b) $\boxed{\text{El espacio columna es un espacio tridimensional dentro de } \mathbb{R}^3}$, es decir, es todo $\mathbb{R}^3$, y
$\boxed{\text{el espacio nulo tiene dimensión } 5-3=2>0 \text{ dentro de } \mathbb{R}^5}$, un plano dentro de $\mathbb{R}^5$ que pasa por el origen.

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 4(a) Encontremos primero un vector en la misma dirreción que la recta

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$$

Así que una representación paramétrica es

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + a\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = a \\ y = 1 - 2a \end{cases} .$$

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 4(b) Necesitamos "eliminar" la parte de los parámetros ($a\boldsymbol{v}$), y realizar las mismas operaciones sobre $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}_p$

$$\left[\begin{array}{cc} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\hline 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc} 2x & 2x+y \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\hline 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{ 2x + y = 1 \right. .$$

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 1(a) La primera es una matriz elemental cuya inversa es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

La segunda es una matriz permutación, cuya inversa es su traspuesta.

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 1(b)

$$\left[\begin{array}{c} \mathsf{A} \\ \hline \mathsf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1/d)\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-c)\mathbf{4}+\mathbf{3}] \\ [(-b)\mathbf{4}+\mathbf{2}] \\ [(-a)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{d} & -\frac{b}{d} & -\frac{c}{d} & \frac{1}{d} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathsf{I} \\ \hline \mathsf{A}^{-1} \end{array}\right]$$

Entonces, la matriz inversa es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{d} & -\frac{b}{d} & -\frac{c}{d} & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 2(b)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -b_1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & -b_2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -b_3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 & -b_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & -b_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & -b_4 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}] \\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}] \\ [(3)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -b_4 \\ \hline 0 & -2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{[(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{6}] \\ [(b_2)\mathbf{3}+\mathbf{6}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 - b_3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2b_2 - b_4 \\ \hline 0 & -2 & 1 & -2 & -2 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 2(a)

$$\text{Por ejemplo:}\quad \text{base } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix};\right]; \quad \text{ó también:}\quad \text{base } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix};\right].$$

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 2(b)

$$\text{Por ejemplo:}\quad \text{base } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left[\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix};\right].$$

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 2(c) $\begin{cases} b_1 - b_3 = 0 \\ 2b_2 - b_4 = 0 \end{cases}$

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 2(d) Puesto que $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ b_2 - b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$; entonces

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 3(a) **Falso.** El conjunto no es cerrado para la suma. Por ejemplo

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Aunque las dos matrices de la izquierda no son invertibles, la suma de ellas si es de rango completo. Tampoco es cerrado para el producto por escalares, basta multiplicar una matriz invertible por 0 para obtener una matriz singular.

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 3(b) **Verdadero.** Si el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, el vector $\boldsymbol{b}$ no puede ser una combinación lineal de las columnas, por tanto, en la matriz aumentada $[\mathbf{A}| - \boldsymbol{b}]$, la última columna no puede ser libre, es decir, tiene que ser una columna pivote. Pero como cada pivote ocupa una fila distinta, la fila correspondiente al pivote de la última columna no puede tener un segundo pivote en la región correspondiente a la matriz de coeficientes. Así que la citada fila de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es una fila libre.

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 3(c) **Falso.** Suponga que $\mathbf{AB}$ es invertible, y considere también la matriz $\mathbf{M} = (\mathbf{AB})^{-1}\,\mathbf{A}$. Entonces $\mathbf{MB} = (\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, así que $\mathbf{M}$ sería la matriz inversa de $\mathbf{B}$.

Otra manera; si $\mathbf{B}$ no es invertible quiere decir que tiene columnas libres, es decir:

$$\mathbf{BE} = \mathbf{L} = \Big[\mathbf{C}|\mathbf{0}\Big]$$

Así que aplicando las mismas operaciones de eliminación gausiana sobre $(\mathbf{AB})$ tenemos

$$(\mathbf{AB})\mathbf{E} = \mathbf{AL} = \mathbf{A}\Big[\mathbf{C}|\mathbf{0}\Big] = \Big[\mathbf{AC}|\mathbf{0}\Big]$$

que tiene columnas libres y por tanto $(\mathbf{AB})$ no es invertible.

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 3(d) **Falso.** Considere la matriz intercambio

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}.$$

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 4(a) Puesto que el espacio nulo está generado por los siguientes tres vectores, sencillamente podemos tomar la matriz $\mathbf{B}$ cuyas columnas son los vectores dados, i.e.,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}$ no tiene por qué ser cuadrada.

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 4(b) Por ejemplo, podemos sencilamente añadir una columna de ceros a $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

O simplemente podemos intercambiar dos columnas. O multiplicar una columna por -1. Por ejemplo:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

O podemos remplazar una de las columnas por una combinación lineal de esa columna junto con otras columnas (cualquier operación por columnas que sea invertible). O podemos remplazar $\mathbf{B}$ por $-\mathbf{B}$ ó $2\mathbf{B}$. Hay muchas soluciones posibles. En cualquier caso, ¡la respuesta no requiere muchos cálculos!

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 4(c) Puesto que cualquier solución $\boldsymbol{x}$ de la ecuación $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es de la forma $\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n$ para algún vector $\boldsymbol{x}_n$ en el espacio nulo, el vector $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p$ debe pertencer al espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Así pues, tenemos que fijarnos en

$$\boldsymbol{x}_Z - \boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_H - \boldsymbol{x}_p \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Para determinar si un vector $\boldsymbol{y}$ pertenece al espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, podemos verificar si $\mathbf{B}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ tiene solución. Como hemos visto en clase, podemos hacerlo mediante la eliminación: si la eliminación produce un vector de ceros en la última columna de la matriz ampliada $[\mathbf{B}| - \boldsymbol{y}]$, entonces $\boldsymbol{y}$ es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{B}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -a \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & -a \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \atop [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & -a-4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -a-4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

El sistema tiene solución sólo si $a=-4$. Así que Z tiene razón.

$\square$

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 1(a) Sabemos que $\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}\Big)\mathbf{A}=\mathbf{I}$, por tanto

$$\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}_{\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\-3&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}$$

$\square$

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 1(b) Aplicando las inversas de las operaciones elementales sobre $\mathbf{I}$ pero en orden inverso $\mathbf{A}=\mathbf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}\underset{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}}$:

$$\mathbf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}\underset{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\3&0&1\end{bmatrix}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&1\\3&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{A}$$

$$\text{comprobación:}\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&1\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\-3&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\square$

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 2(a) No. El conjunto de soluciones no puede ser un subespacio puesto que no contiene el vector nulo ($\mathbf{0}$ no es solución a dicho sistema).

$\square$

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 2(b) Si. Este conjunto es el espacio nulo por la izquierda de la matriz cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$.

$$\boldsymbol{x}\left[\boldsymbol{z};\quad \boldsymbol{y};\right]=\mathbf{0}.$$

$\square$

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 2(c) No. Este conjunto no contiene la matrix nula $\mathbf{0}$; así que no puede ser sub-espacio vectorial.

$\square$

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 2(d) Si, puesto que si los espacios nulos de $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ contienen $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ entonces el espacio nulo de cualquier combinación lineal de ambas matrices, $(a\mathbf{A}_1+b\mathbf{A}_1)$, también contiene a dicho vector:

$$(a\mathbf{A}_1+b\mathbf{A}_1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=a\mathbf{A}_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+b\mathbf{A}_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=a\mathbf{0}+b\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

$\square$

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&1&2&-1\\2&6&4&8&-3\\0&0&2&4&-1\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&0&2&4&-1\\0&0&2&4&-1\\\hline 1&-3&-1&-2&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]\\ [(2)\mathbf{5}]\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{5}]\\ [(\frac{1}{2})\mathbf{5}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&0&2&0&0\\0&0&2&0&0\\\hline 1&-3&-1&0&1/2\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-2&1/2\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right].$$

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-3&0\\1&0\\0&-2\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}.$$

□

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 4(a) 4. Hay cuatro pivotes en la forma escalonada reducida de $\mathbf{A}$.

□

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 4(b)

- $\dim(\mathcal{C}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)) = \text{rg}(\mathbf{A}) = 4$
- $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n - \text{rg}(\mathbf{A}) = 4 - 4 = 0$
- $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)) = m - \text{rg}(\mathbf{A}) = 8 - 4 = 4$

□

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 4(c) Puesto que $\mathbf{A}$ no es de rango completo por filas, el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene soluciones si $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}(\mathbf{A})$, y tan sólo una solución en caso contrario, ya que no hay columnas libres ($\mathbf{A}$ es de rango completo por columnas).

□

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 4(d) Si, la matriz $\mathbf{B}$ (la forma escalonada reducida de $\mathbf{A}$) tiene pivotes en todas sus columnas; por tanto, éstas son linealmente independientes. Las transformaciones elementales de las columnas preservan el espacio columna, por lo que también las columnas de $\mathbf{A}$ son independientes.

□

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 4(e) No. Las filas 4, 5, 6 y 7 de $\mathbf{B}$ (la forma reducida de $\mathbf{A}$) son dependientes; y las operaciones elementales entre columnas conservan la dependencia o independencia lineal entre las filas. Así pues, también las filas 4, 5, 6 y 7 de $\mathbf{A}$ son dependientes.

□

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 4(f) Hemos visto que $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = 0$. Por tanto, el único vector del espacio nulo es el vector nulo; por tanto no es posible encontrar ningún vector linealmente independiente y no se puede encontrar ninguna base del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

□

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 4(g) ya que

$$\begin{bmatrix} -2 & \mathbf{1} & 0 & & & 0 & & 0 \\ -3 & & -1 & \mathbf{1} & & 0 & & 0 \\ 1 & & -2 & & \mathbf{1} & 0 & & 0 \\ -2 & & 0 & & & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las cuatro soluciones especiales correspondientes a las cuatro variables libres x_2, x_4, x_5 y x_7 son:

$$\text{Una base de } \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal) : \quad \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \right].$$

□

(Grupo H curso 09/10) Ejercicio 4(h) Si, $\mathbf{E}$ es invertible, puesto que es el producto de las matrices elementales que se aplican a $\mathbf{A}$ para obtener $\mathbf{B}$. Considere las filas pivote 1, 3, 6 y 8 de $\mathbf{A}$. La matriz $\mathbf{E}$

realiza los cambios en dichas columnas de manera que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo que significa que esta matriz (formada por las filas pivote de $\mathbf{A}$) es $\mathbf{E}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$