Matemáticas II

Marcos Bujosa

20/01/2025

Puede encontrar la última versión de este material en

https://mbujosab.github.io/MatematicasII/

Índice

Part I
Álgebra matricial

LECCIÓN 1: Operaciones con vectores y operaciones con matrices

Lección 1

(**Lección** 1) T-1 Esquema de la Lección 1

Esquema de la *Lección 1*

- Operaciones con vectores y matrices
  - sumas y productos por escalares
  - Propiedades de estas operaciones

F1

Resumen de la lección [1] En esta lección se debe incidir en los siguientes puntos:

- Un **vector** de $\mathbb{R}^m$ es una lista ordenada de m números.
- Un **matriz** de $\mathbb{R}^{m\times n}$ es una lista ordenada de n vectores de $\mathbb{R}^m$.
- **La notación**:
  - Encerrando una lista de números (seguidos de comas) entre paréntesis creamos un vector (que se puede escribir vertical u horizontalmente).
  - Con $\boldsymbol{a}_{|i}$ o con $_{i|}\boldsymbol{a}$ seleccionamos la componente i-ésima del vector $\boldsymbol{a}$.
  - Encerrando una lista de vectores entre corchetes creamos una matriz (los vectores son sus columnas).
  - Con $\mathbf{A}_{|j}$ seleccionamos la columna j-ésima de $\mathbf{A}$, que es *un vector*.
  - Con $_{i|}\mathbf{A}$ seleccionamos la fila i-ésima de $\mathbf{A}$, que también es *un vector*.
  - Con $_{i|}\mathbf{A}_{|j}$ seleccionamos el número que se encuentra en la fila i-ésima y columna j-ésima de $\mathbf{A}$.
  - (¡la idea es usar la notación como si programáramos en Python. . . y de hecho lo podremos hacer con la librería que acompaña al libro!)
- **Operaciones:** En esta lección solo se verán dos operaciones: la ***suma*** y el ***producto por un escalar***. En el caso de vectores daremos una definición componente a componente y en el caso de las matrices daremos una definición columna a columna.

  Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y producto por un escalar: $(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

  Matrices. Suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y producto por un escalar: $(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$.

  Debe destacarse que la notación usada para definir estas operaciones es idéntica para matrices y vectores. Es muy importante aprender a explotar las propiedades de la notación. La demostración de las propiedades de la suma y el producto por escalares así lo evidencia, pues explota las propiedades de linealidad del operador "|":

  - el operador " $|i$ " es distributivo para la suma.
  - el operador " $|i$ " es asociativo para el producto por escalares.

  Al explotar esta característica de la notación se ve que las propiedades de la suma y el producto son idénticas tanto para matrices como para vectores.

[1] Estos resúmenes tienen la intención de orientar, tanto al profesor como al alumno, sobre el objetivo de cada lección. Tenga en cuenta que el contenido de la asignatura está en las secciones correspondientes del libro, y que las transparencias solo son una ayuda para facilitar al profesor la exposición de las lecciones en el aula. No piense que la asignatura es únicamente lo que se ve en el aula. . . lo que se ve en clase es solo una parte.

- Por cuestiones didácticas se debe ver la interpretación geométrica de los vectores como puntos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, así como interpretación geométrica de las dos operaciones suma y producto por escalares (…pero se ha de destacar que la interpretación geométrica es bastante limitada, pues en $\mathbb{R}^3$ acaba toda posible visualización).[2] Lo verdaderamente importante es que los vectores son listas ordenadas de números (…por ejemplo datos económicos de 200 individuos…algo imposible de visualizar geométricamente). En cuanto a las operaciones, **lo fundamental son sus propiedades**, que para las matrices son idénticas a las de los vectores *(para las matrices no tenemos una "visualización geométrica" y esto no nos causa dificultades…luego la interpretación geométrica es didáctica pero secundaria).*

- **Se deben demostrar** las propiedades de la suma y producto por escalares (aunque quizá no dé tiempo a demostrar todas en clase). El ejercicio consiste en jugar una y otra vez con las propiedades *distributiva* y *asociativa* de la notación hasta poder llegar a operar con números reales en el caso de los vectores (para ello se deben refrescar algunas de las propiedades de los números reales); o hasta poder llegar a operar con vectores en el caso de las matrices. El objetivo es que el alumno se dé cuenta de que todo consiste en jugar con esas dos propiedades…

De hecho lo más interesante de esta lección es mostrar el uso la notación para demostrar propiedades. Las demos son sencillas y se debe incidir en que la herramienta básica para demostrarlas es la mera sustitución de símbolos.

Si A es igual a B, donde aparezca el *símbolo* "A" podremos sustituirlo por el *símbolo* "B".

¡Las demos son cortas y solo usan la sustitución! (en esta lección no hay demostraciones por reducción al absurdo o por inducción así que el juego es muy sencillo).

1. Primero realizaremos demostraciones más "visuales" con los componentes de un vector de $\mathbb{R}^n$ (ésta es la Estrategia 1 de resolución del Ejercicio 3 del libro, y recuerda a cómo se opera en ejercicios numéricos). Pero esta demostración debería ir seguida en cada caso por la demostración abstracta (Estrategia 2) que sólo usa las propiedades de la notación.

2. Al final de la lección se repiten las mismas demos en el caso de las matrices (pero usando directamente la demo abstracta…la Estrategia 1, "visual", sería una pesadez sin mejora alguna en la claridad de la exposición).

Se debe transmitir que esto es solo un juego de manipulación de símbolos (nótese que las propiedades que obtenemos para los vectores se pueden representar gráficamente con vectores del plano $\mathbb{R}^2$, lo que puede inducir a que estas expresiones significan algo…pero luego se obtienen propiedades análogas para las operaciones con matrices, ¡para las que no tenemos ninguna visualización geométrica!). La visualización es didáctica, pero **lo más importante es el juego de manipulación de símbolos**. No hay mejor prueba de ello que la implementación de estas reglas como código de programación (véase la documentación de la librería de Python que acompaña al libro).

Los problemas propuestos en esta lección consisten en demostrar las propiedades de la suma y producto por escalares (tanto para vectores como para matrices). Demostrar las propiedades es el ejercicio más importante y didáctico del curso. De nada sirve que el alumno vea las demostraciones obtenidas por otra persona (por ejemplo las del profesor); los alumnos deben hacer sus propias demostraciones. No obstante, en esta primera clase el profesor debe mostrar como se hace (haciendo hincapié en el juego de sustitución de símbolos).

(**Lección** 1) **T-2** **Vectores de $\mathbb{R}^n$**

Vector de $\mathbb{R}^n$ es una lista ordenada de n números reales

Ejemplo 1. $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$: primer componente: 5, segundo componente: 1 y tercer componente: 10

$$\boldsymbol{v} = \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_2 = 1 \\ v_3 = 10 \end{cases} ; \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5, & 1, & 10, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Notación

- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{0}$
- $\text{elem}_3(\boldsymbol{v}) \equiv {}_{3|}\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}_{|3} \equiv v_3 = 10$

El paréntesis alrededor de una lista de números denota un vector. F2

[2]Para espacios con dimensión mayor que tres la representación ya no es descriptiva, solo meramente esquemática; no obstante sigue siendo útil y por ello la usaremos al tratar la ortogonalidad en $\mathbb{R}^n$.

(**Lección** 1) T-3 **Operaciones básicas con vectores**

Suma de vectores: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{suman} \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}.$$

Producto por un escalar: $(\lambda\boldsymbol{a})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{a}_{|i})$

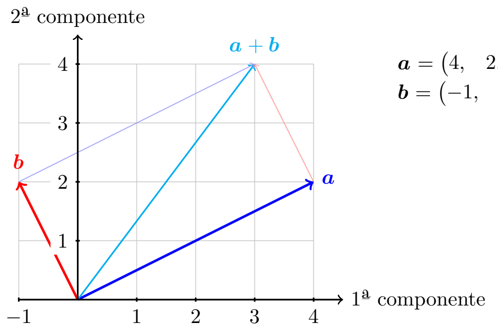
$$2\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad (-1)\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} \equiv -\boldsymbol{a}$$

(Por tanto, el operador "$|i$" es lineal)

$\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (con n componentes) son iguales si: $\boldsymbol{a}_{|i} = \boldsymbol{b}_{|i}$, $\quad i = 1:n$.

F3

(**Lección** 1) T-4 **Suma de vectores**

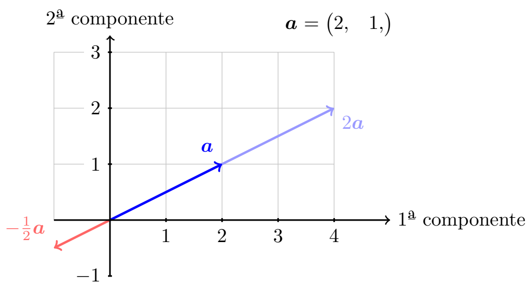


$\boldsymbol{a} = (4, \quad 2,)$
$\boldsymbol{b} = (-1, \quad 2,)$

F4

(**Lección** 1) T-5 **Producto de un vector por un escalar**

$\boldsymbol{a} = (2, \quad 1,)$



¿Qué forman el conjunto de todos los múltiplos de $\boldsymbol{a}$?
¿Pertenece el $\mathbf{0}$ a dicho conjunto?

F5

(**Lección** 1) T-6 Suma y producto por escalares

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}} \qquad \boxed{(\lambda\boldsymbol{a})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{a}_{|i})}$$

Vectores Recordemos algunas propiedades de los escalares

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
2. $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$
3. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$
4. $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$
5. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$
6. $(\lambda+\eta)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\eta\boldsymbol{a}$
7. $\lambda(\eta\boldsymbol{a})=(\lambda\eta)\boldsymbol{a}$
8. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

F6

(**Lección** 1) T-7 Matrices

Matriz de $\mathbb{R}^{m\times n}$ es una lista ordenada de n vectores de $\mathbb{R}^m$

Ejemplo 2. Tres vectores de $\mathbb{R}^2$: $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} = [\ \boldsymbol{a};\quad \boldsymbol{b};\quad \boldsymbol{c};\ ] = \begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 7\end{bmatrix} \neq [\ \boldsymbol{c};\quad \boldsymbol{b};\quad \boldsymbol{a};\ ]$$

Dos vectores de $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{x}=(4,\ -1,\ 0,)$ e $\boldsymbol{y}=(2,\ 2,\ 7,)$

$$\mathbf{B} = [\ \boldsymbol{x};\quad \boldsymbol{y};\ ]$$

Notación

- $\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{0}$
- $\underset{2\times 3}{\mathbf{A}},\ \underset{3\times 2}{\mathbf{B}};\qquad \underset{2\times 3}{\mathbf{A}} \neq \underset{3\times 2}{\mathbf{B}}$

El corchete alrededor de una lista de vectores denota una matriz.

F7

(**Lección** 1) T-8 Más notación

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 7 & 0 & 3\end{bmatrix}$

Operadores que seleccionan

- $\text{elem}_{21}(\mathbf{A}) \;=\; {}_{2|}\mathbf{A}_{|1} \;=\; a_{21}:\quad 7$
- $\text{fila}_1(\mathbf{A}) \;=\; {}_{1|}\mathbf{A}:\quad (1,\ 2,\ 1,)$
- $\text{col}_1(\mathbf{A}) \;=\; \mathbf{A}_{|1}:\quad (1,\ 7,)$

F8

(**Lección** 1) T-**9** Operaciones básicas con matrices

Suma de matrices: $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{suman} \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Producto por un escalar: $\left(\lambda\mathbf{A}\right)_{|j} = \lambda\left(\mathbf{A}_{|j}\right)$

$$7\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7a_{11} & 7a_{12} \\ 7a_{21} & 7a_{22} \end{bmatrix} \text{ y } (-1)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} = -\mathbf{A}.$$

(Por tanto, el operador “ $|i$ ” es lineal)

$\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ (del mismo orden) son iguales si: $\mathbf{A}_{|j} = \mathbf{B}_{|j}$

F9

(**Lección** 1) T-**10** Suma y producto por escalares

$$\boxed{\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}}; \qquad \boxed{\left(\lambda\mathbf{A}\right)_{|j} = \lambda\left(\mathbf{A}_{|j}\right)}$$

Matrices

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$
2. $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$
3. $\mathbf{0}+\mathbf{A} = \mathbf{A}$
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$
5. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$
6. $(\lambda+\eta)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}+\eta\mathbf{A}$
7. $\lambda(\eta\mathbf{A}) = (\lambda\eta)\mathbf{A}$
8. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

F10

Reglas distributivas

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i} \qquad {}_{i|}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = {}_{i|}\boldsymbol{a} + {}_{i|}\boldsymbol{b}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j} \qquad {}_{i|}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = {}_{i|}\mathbf{A} + {}_{i|}\mathbf{B}$$

Si además aceptamos que $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\lambda$ y $\lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda$, tenemos

Reglas asociativas (desplazando el paréntesis)

$$(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i}) \qquad {}_{i|}(\boldsymbol{b}\lambda) = ({}_{i|}\boldsymbol{b})\lambda$$

$$(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j}) \qquad {}_{i|}(\mathbf{A}\lambda) = ({}_{i|}\mathbf{A})\lambda$$

Intercambio entre el escalar y el operador

$$(\boldsymbol{b}\lambda)_{|i} = (\boldsymbol{b}_{|i})\lambda \qquad {}_{i|}(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda({}_{i|}\boldsymbol{b})$$

$$(\mathbf{A}\lambda)_{|j} = (\mathbf{A}_{|j})\lambda \qquad {}_{i|}(\lambda\mathbf{A}) = \lambda({}_{i|}\mathbf{A})$$

F11

Problemas de la Lección 1

- Demuestre las propiedades de las operaciones con vectores.
- Demuestre las propiedades de las operaciones con matrices.

(L-1) PROBLEMA 1. Proporcione ejemplos de matrices 3 por 3 no nulas de los siguientes tipos de matrices:

(a) Diagonal: ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j} = 0$ si $i \neq j$.
(b) Simétrica: $\mathbf{A}_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$.
(c) Triangular superior: ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j} = 0$ si $i > j$.
(d) Antisimétrica: ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j} = -{}_{j|}\mathbf{A}_{|i}$.

(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 1.4.)

Complete los ejercicios del libro correspondientes a cada lección.

Fin de los Problemas de la Lección 1

LECCIÓN 2: Combinaciones lineales

Lección 2

(**Lección** 2) T-1 Esquema de la Lección 2

Esquema de la *Lección 2*

- Producto punto entre vectores
- Combinación lineal de vectores
- Visión por columnas de la geometría de las ecuaciones lineales

F12

Resumen de la lección: veremos el ***producto de una matriz por un vector*** y lo relacionaremos con los sistemas de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (fíjese que el lado izquierdo es precisamente el producto de ¡una matriz por un vector!... $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$).[3]

El producto de $\mathbf{A}$ por $\boldsymbol{v}$ es un ***vector***. Su componente i-ésima, ${}_{i|}\big(\mathbf{A}\boldsymbol{v}\big)$, se puede expresar como un producto punto entre la fila i-ésima de $\mathbf{A}$ y el vector $\boldsymbol{v}$, es decir, $\big({}_{i|}\mathbf{A}\big)\cdot\boldsymbol{v}$. Emplearemos esta expresión para lograr demostraciones sencillas y compactas (por ello comenzamos revisando las propiedades de los productos punto).

Posteriormente se debe incidir en las siguientes cuestiones. En la primera parte de la clase:

- La combinación lineal es una suma de múltiplos de vectores
- $\mathbf{A}\boldsymbol{b}$ es por definición *"una combinación lineal de las columnas de la matriz* $\mathbf{A}$*"*
- Para *demostrar las propiedades del producto* $\mathbf{A}\boldsymbol{b}$ usaremos las propiedades del producto punto junto con las reglas de re-escritura que vimos lección anterior. Aunque se pueden demostrar de manera más visual escribiendo explícitamente las columnas de la matriz, las demostraciones son más compactas usando

$$ {}_{i|}\big(\mathbf{A}\boldsymbol{b}\big) = \big({}_{i|}\mathbf{A}\big)\cdot\boldsymbol{b} $$

  (así las demostraciones consisten en una mera manipulación de símbolos; y el uso de la notación es una forma de "operar").

En la segunda parte de la clase:

- Interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones con n ecuaciones y n incógnitas (*visión por columnas*)[4].
  - Hay que subrayar que el sistema de ecuaciones nos pregunta por aquellas combinaciones lineales de las columnas de la matriz de coeficientes que son iguales al vector del lado derecho.
  - Es decir, en la parte izquierda de un sistema de ecuaciones aparece una matriz por un vector de incógnitas, $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$, que representa la combinación lineal que desconocemos, pues $\boldsymbol{x}$ es deconocida. Hay que encontrar los coeficientes de la combinación lineal de columnas (los componentes de $\boldsymbol{x}$) que hacen que dicha combinación $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ sea igual al vector del lado derecho $\boldsymbol{b}$.

Es bueno demostrar en clase algunas de las propiedades que se indican.

Esta lección y las siguientes tienen problemas propuestos.

[3] Aunque en las secciones correspondientes a la Lección 2 del libro aparece el producto de un vector por una matriz ($\boldsymbol{a}\mathbf{B}$), no veremos en clase dicho producto hasta la lección siguiente.

[4] Aquí no nombramos la interpretación geométrica tradicional (por filas). Dicha interpretación no se verá hasta la segunda parte del curso en la Lección 11.

(**Lección** 2) T-**2** Producto punto

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Simétrico

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$$

Lineal en el primer argumento

$$\begin{aligned}(a\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} =& a(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\\ (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} =& \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}\end{aligned}$$

Positivo

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \geq 0$$

Definido

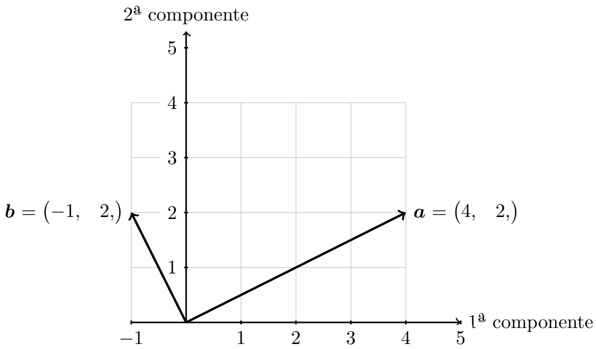
$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = 0$$

F13

(**Lección** 2) T-**3** Combinaciones lineales

La suma de $x\boldsymbol{a}$ y $y\boldsymbol{b}$ es una combinación lineal de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b} = x\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}; & \boldsymbol{b};\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \textbf{MATRIZ}\times \textit{\textbf{vector}}$$

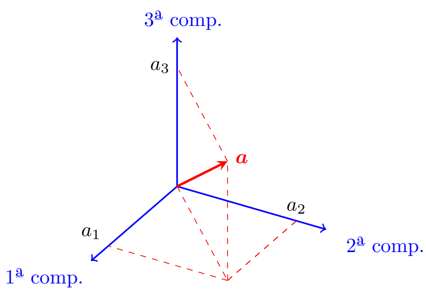


¿Es **0** combinación lineal de ambos vectores? ¿Qué forma el conjunto de *todas* las combinaciones lineales de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$?

F14

(**Lección** 2) T-**4** Combinaciones lineales en $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{a} = (a_1, \quad a_2, \quad a_3,) \in \mathbb{R}^3$$



¿Qué forman el conjunto de todos los múltiplos de $\boldsymbol{a}$?
¿Qué forman el conjunto de todas las combinaciones lineales de dos vectores en $\mathbb{R}^3$? (Combinación lineal)

F15

(**Lección** 2) T-5 Matriz por vector

$$\mathbf{A}\boldsymbol{b} = b_1\mathbf{A}_{|1} \quad + \quad b_2\mathbf{A}_{|2} \quad + \cdots + \; b_n\mathbf{A}_{|n}$$

$$= b_1\begin{pmatrix} a_{11}\\ \vdots\\ a_{i1}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} a_{12}\\ \vdots\\ a_{i2}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix} + \cdots + b_n\begin{pmatrix} a_{1n}\\ \vdots\\ a_{in}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ({}_{1|}\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{b}\\ \vdots\\ ({}_{i|}\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{b}\\ \vdots\\ ({}_{n|}\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$$

Así,

$$\boxed{{}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{b}}$$

si omitimos el punto, podemos escribir sencillamente: ${}_{i|}\mathbf{A}\boldsymbol{b}$

F16

(**Lección** 2) T-6 Matriz por vector

$$\text{Si} \quad \boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n \quad \text{entonces} \quad (\underset{m\times n}{\mathbf{A}}\;\boldsymbol{b})\in\mathbb{R}^m; \quad \text{donde} \quad {}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{b}$$

Matriz por vector

1. $\mathbf{I}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
2. $\mathbf{A}(\mathbf{I}_{|j}) = \mathbf{A}_{|j}$
3. $\mathbf{A}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \mathbf{A}\boldsymbol{b}+\mathbf{A}\boldsymbol{c}$
4. $\mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\mathbf{A}\boldsymbol{b})$
5. $\mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{b}) = (\lambda\mathbf{A})\boldsymbol{b}$
6. $\mathbf{A}(\mathbf{B}\boldsymbol{c}) = \left[\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|1});\dots\;\; \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|n});\right]\boldsymbol{c}$
7. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\boldsymbol{c} = \mathbf{A}\boldsymbol{c}+\mathbf{B}\boldsymbol{c}$

Demuestre las anteriores propiedades (Ejercicios del libro: 14 a 18)
(use las reglas de reescritura y las propiedades del producto punto)

F17

(**Lección** 2) T-7 Ejemplo de sistema lineal: 2 ecuaciones y 2 incógnitas

$$\begin{cases} 2x - \;\; y = 0\\ -x + 2y = 3\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\underbrace{\mathbf{A}\boldsymbol{x} \qquad\qquad = \; \boldsymbol{b}}_{\text{¿qué combinación lineal es igual a este vector?}}$$

$$x(\mathbf{A}_{|1}) + y(\mathbf{A}_{|2}) \qquad = \; \boldsymbol{b}$$

F18

$\mathbf{A}$ se denomina *matriz de coeficientes*, $\boldsymbol{x}$ se denomina *vector de incógnitas*, y $\boldsymbol{b}$ *vector del lado derecho.*

(**Lección** 2) T-**8** Geometría del sistema lineal: Combinación lineal de columnas

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

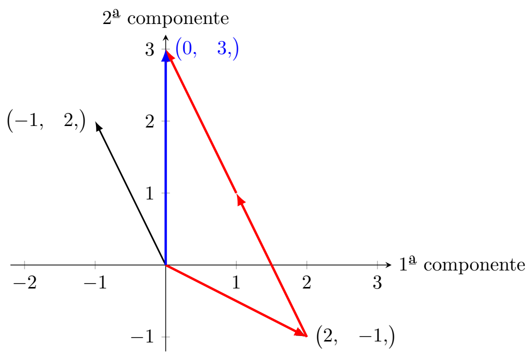
$$x\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

F19

(**Lección** 2) T-**9** 2 ecuaciones y 2 incógnitas: Visión por columnas

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

¿Qué combinación lineal de $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ da $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$?



¿qué forma el conjunto de todas las posibles combinaciones?

F20

(**Lección** 2) T-**10** Ejemplo: 3 ecuaciones y 3 incógnitas

$$\begin{cases} 2x - y \phantom{{}-4z} = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ - 3y + 4z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\underbrace{\mathbf{A}\boldsymbol{x}\qquad}\ \underbrace{\qquad = \ \boldsymbol{b}}$$

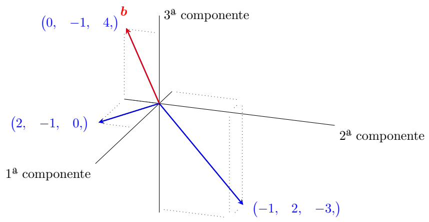
¿qué combinación lineal es igual a este vector?

F21

(**Lección** 2) T-**11** **3 ecuaciones y 3 incógnitas: Visión por columnas**

$$x\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$$

¿Qué combinación lineal de las columnas da $\boldsymbol{b}$?



$$\left\{x= \quad ; \quad y= \quad ; \quad z= \quad \right\}$$

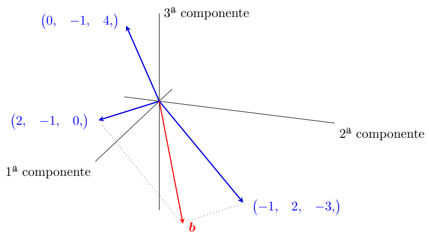
F22

¿Y si cambia el vector del lado derecho?

(**Lección** 2) T-**12** **3 ecuaciones y 3 incógnitas: Visión por columnas**

$$x\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$$

¿Qué combinación lineal de las columnas da el nuevo $\boldsymbol{b}$?



$$\left\{x= \quad ; \quad y= \quad ; \quad z= \quad \right\}$$

F23

(**Lección** 2) T-**13** **¿Qué significa Ax=b?**

$\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es una combinación de las columnas de $\mathbf{A}$:

Ejemplo 3.

$$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\7\end{pmatrix}$$

"$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$" nos pregunta por una combinación lineal:

$$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\7\end{pmatrix}$$

Para resolver sistemas lineales, antes aprenderemos a transformar las matrices de coeficientes por eliminación (próximas lecciones)

F24

Fin de la lección

Emplee el rato que queda de clase para aclarar dudas y resolver los ejercicios correspondientes a la lección. En este momento dispone del profesor, rentabilice la clase centrándose en los problemas que no tenga claro cómo se *resuelven (ejercicios análogos a los propuestos tras cada lección pueden "caer" en el examen... ¡es muy importante que sepa resolver tantos como pueda; y a un ritmo que le permita terminar el examen con tranquilidad!... Solo así podrá superar la asignatura.). Tenga en cuenta que además de los ejercicios propuestos por el profesor, dispone de numerosos ejercicios adicionales en los libros de texto y en la web (por ejemplo en el curso 18.06 del MIT).*

Casi siempre tendrá tiempo de resolver dudas y ejercicios en el aula al final de cada lección. No desaproveche ese valioso tiempo en el que dispone del profesor para aclarar las dudas que le surjan al intentar resolver los problemas propuestos.

Problemas de la Lección 2

Siempre debe completar los ejercicios de las secciones correspondientes del libro

(L-2) PROBLEMA 1. Opere con las columnas para calcular los siguientes productos

(a)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-2) PROBLEMA 2. Decida si el sistema de ecuaciones tiene solución:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ x - y &= 2 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

¿Qué ocurre si todos los miembros de la derecha son cero? ¿Hay otras opciones diferentes de cero para los miembros derechos que permitan que el sistema tenga solución? ¿Cuantas opciones más?
(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 1.2.)

(L-2) PROBLEMA 3. Sean $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Compruebe que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. ¿Puede encontrar más soluciones para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

Pista. Intente con un vector $\boldsymbol{x}$ con su primera componente igual a 4. Intente también cambiando el signo de $\boldsymbol{x}$. Intente alguna solución más. ¿Cuantas soluciones puede encontrar?

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-2) PROBLEMA 4. Suponga que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene dos soluciones $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ (sabiendo además que $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$). Demuestre entonces que $\frac{1}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ es también solución, aunque $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ no lo es.

Pista. Emplee las propiedades: $\mathbf{A}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \mathbf{A}\boldsymbol{b} + \mathbf{A}\boldsymbol{c}$ y $\mathbf{A}(c\boldsymbol{b}) = c(\mathbf{A}\boldsymbol{b})$.

(L-2) PROBLEMA 5. *"Es imposible que un sistema de ecuaciones lineales tenga exactamente dos soluciones"*. Explique por qué contestando al siguiente apartado:

(a) Si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son dos soluciones, ¿que otras soluciones existen? diga al menos una más.

(Strang, 2007, ejercicio 18 del conjunto de problemas 1.3.)

(L-2) PROBLEMA 6. Dibuje $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, junto con $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, y $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ en el plano en cuyos ejes se representan la primera y segunda componentes de los vectores.

(L-2) PROBLEMA 7. Represente gráficamente la visión por columnas del siguiente sistema cuya solución es $x = 3$ e $y = -1$.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

(L-2) PROBLEMA 8. Represente gráficamente la visión por columnas del siguiente sistema .

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad ; \qquad \left(\text{su solución es :} \qquad x = 1 + \frac{1}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}\right).$$

No deje de hacer los ejercicios del libro.

Fin de los Problemas de la Lección 2

LECCIÓN 3: Multiplicación matricial

Lección 3

(**Lección** 3) T-1 Esquema de la Lección 3

Esquema de la *Lección 3*

- Producto matricial: $\big(\mathbf{AB}\big)_{|j} = \mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|j}\big)$
  - Propiedades
- Transpuesta de una matriz
- $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}\mathbf{A}$ (combinaciones lineales)
- Otras formas de calcular el producto
- Transpuesta de $\mathbf{AB}$

F25

Resumen de la lección En esta lección se define el producto de matrices. Es muy importante remarcar que $(\mathbf{AB})$ es una matriz cuyas columnas son combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}$ y cuyas filas son combinaciones lineales de las filas de $\mathbf{B}$. De hecho, ¡*la notación empleada subrayará este hecho*!

También veremos que hay distintas formas de calcular el producto: *operando con las columnas*, $\big(\mathbf{AB}\big)_{|j} = \mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|j}\big)$ (nuestra definición de producto); *multiplicando filas por columnas*, $\big({}_{i|}\mathbf{A}\big) \cdot \big(\mathbf{B}_{|j}\big)$ (que es la forma de calcular que habitualmente conocen los alumnos) y *operando con las filas*, ${}_{i|}\big(\mathbf{AB}\big) = \big({}_{i|}\mathbf{A}\big)\mathbf{B}$.

- La definición de producto de matrices que usaremos es:
  $$\big(\mathbf{AB}\big)_{|j} = \mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|j}\big),$$
  es decir, que la columna j-ésima de $(\mathbf{AB})$ es la matriz $\mathbf{A}$ multiplicada por la columna j-ésima de $\mathbf{B}$ (y por tanto es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$).

  Como el paréntesis "se desplaza", la notación es asociativa. Esto quiere decir que podemos escribir[5]
  $$\mathbf{AB}_{|j},$$
  que denota tanto la columna j-ésima de $(\mathbf{AB})$, como la forma de calcularla ($\mathbf{A}$ por la columna j-ésima de $\mathbf{B}$).

- Con las reglas de re-escritura vistas en las lecciones anteriores es muy sencillo demostrar las propiedades del producto de matrices (conviene demostrar unas cuantas en clase para que el alumno se familiarice con el uso de la notación. El alumno debe demostrarlas todas por su cuenta).

- A partir de la definición de producto deduciremos otras formas de calculo del producto. Para lograrlo de manera rápida emplearemos que $\boldsymbol{a}\mathbf{B} = \big(\mathbf{B}^{\intercal}\big)\,\boldsymbol{a}$. Así que previamente definimos la transposición y la notación relacionada (i.e., que los subíndices cambian de lado al transponer). Jugando con la notación se deducen inmediatamente las propiedades de la transpuesta (la transpuesta aparece en la Lección 1 del libro, pero ahora la usaremos por vez primera en clase).

- Después se repasan algunas cuestiones sobre la notación, y se subraya la diferencia entre vectores y matrices (las matrices tienen filas y columnas. . . y los vectores no).

  Es muy importante recordar que $\mathbf{A}_{|k}$ es el *vector* obtenido al seleccionar la columna k-ésima de $\mathbf{A}$; y que ${}_{k|}\mathbf{A}$ es el *vector* obtenido al seleccionar la fila k-ésima de $\mathbf{A}$. Así, los operadores "$|k$" y "$k|$" operan sobre las matrices para "extraer" columnas y filas de una matriz.

[5] de igual modo que el hecho de que $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ nos permite escribir $\mathbf{ABC}$.

- Antes de ver otras formas de calcular el producto de matrices, es **fundamental** dejar claro que $\textsf{\textbf{MATRIZ}}\times\boldsymbol{vector}$ es un *vector*: una combinación lineal de las columnas $\boxed{\mathbf{A}\boldsymbol{b} = (\mathbf{A}_{|1})b_1 + \cdots + (\mathbf{A}_{|n})b_2}$; y que $\boldsymbol{vector} \times \textsf{\textbf{MATRIZ}}$ es un *vector*: una combinación lineal de las filas $\boxed{\boldsymbol{a}\mathbf{B} = a_1\big({}_{1|}\mathbf{B}\big) + \cdots + a_m\big({}_{m|}\mathbf{B}\big)}$ y, por tanto, $\boldsymbol{a}\mathbf{B} = \mathbf{B}^\intercal\boldsymbol{a}$.
- Después se demuestra que la componente ${}_{i|}\mathbf{AB}_{|j}$ es el producto punto entre la fila $\big({}_{i|}\mathbf{A}\big)$ y la columna $\big(\mathbf{B}_{|j}\big)$.
- Siguiendo el mismo juego de manipulación de signos también veremos que ${}_{i|}\big(\mathbf{AB}\big) = \big({}_{i|}\mathbf{A}\big)\mathbf{B}$.

  De nuevo la notación es asociativa (y "rica" en significados), por lo que se puede escribir sencillamente: ${}_{i|}\mathbf{AB}$.
- Para finalizar con este juego de manipulación de símbolos, se demostrará que la transpuesta del producto es el producto de las transpuestas: $\big(\mathbf{AB}\big)^\intercal = (\mathbf{B}^\intercal)(\mathbf{A}^\intercal)$.

  ¡Todo sale de jugar con las reglas de re-escritura de la notación!

(**Lección** 3) T-**2** **Multiplicación matricial (por columnas)**

Columna j del producto de $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$ con $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$ es:

$$\boxed{\big(\mathbf{AB}\big)_{|j} = \mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|j}\big)} \quad\longrightarrow\quad \mathbf{AB}_{|j}$$

Cada columna de $\mathbf{AB}$ es una combinación de las p *columnas* de $\mathbf{A}$

Ejemplo 4.

$$\begin{bmatrix}2&1\\3&8\\4&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\1&0\end{bmatrix} = \Big[\ \mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|1}\big);\quad \mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|2}\big);\ \Big] = \left[\begin{bmatrix}2&1\\3&8\\4&9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\qquad \begin{bmatrix}2&1\\3&8\\4&9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix};\right] = \begin{bmatrix}3&12\\11&18\\13&24\end{bmatrix}$$

F26

(**Lección** 3) T-**3** **Propiedades del producto de matrices**

$$\textsf{\textbf{MATRIZ}} \times \textsf{\textbf{MATRIZ}} = \textsf{\textbf{MATRIZ}}$$

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ recuerde $\mathbf{A}(\mathbf{B}\boldsymbol{c}) = \Big[\mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|1}\big);\dots\ \mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|n}\big);\Big]\,\boldsymbol{c}$
2. $\big(\mathbf{A}+\mathbf{B}\big)\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$.
3. $\mathbf{A}\big(\mathbf{B}+\mathbf{C}\big) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$.
4. $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \lambda(\mathbf{AB})$.
5. $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$.
6. $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$.

F27

(**Lección** 3) T-4 Matrices transpuestas

Transpuesta

$$(\text{columna } i \text{ de } \mathbf{A}^{\intercal}) = (\text{fila } i \text{ de } \mathbf{A}) \quad \leftrightarrow \quad (\mathbf{A}^{\intercal})_{|i} = {}_{i|}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^{\intercal} =$$

$${}_{i|}\mathbf{A}_{|j} = {}_{j|}(\mathbf{A}^{\intercal})_{|i}; \qquad (\mathbf{A}^{\intercal})^{\intercal} = \mathbf{A}; \qquad {}_{j|}(\mathbf{A}^{\intercal}) = \mathbf{A}_{|j}$$

Matrices simétricas $\quad \mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ & 2 & 9 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

F28

(**Lección** 3) T-5 Vectores, matrices fila y matrices columna

$$(1, \quad 3, \quad -10,) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}; \qquad \text{pero} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -10 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}_{2|}\mathbf{A} = (2, \quad 3,) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_{|1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1, \quad 2, \quad 4,)$$

Al encerrar entre corchetes una lista vectores generamos una matriz cuyas columnas son dichos vectores

$$\left[{}_{3|}\mathbf{A}; \quad {}_{1|}\mathbf{A};\right] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}^{\intercal} = \left[{}_{1|}\mathbf{A}; \quad {}_{2|}\mathbf{A}; \quad {}_{3|}\mathbf{A};\right]$$

F29

(**Lección** 3) T-6 Combinaciones lineales de filas y columnas

Combinaciones lineales de columnas

$$\begin{bmatrix} \diamondsuit & \clubsuit \\ \heartsuit & \spadesuit \\ \diamondsuit & \clubsuit \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \diamondsuit \\ \heartsuit \\ \diamondsuit \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} \clubsuit \\ \spadesuit \\ \clubsuit \end{pmatrix}$$

$$\textsf{MATRIZ} \times \textit{vector} = \textit{vector}$$

Combinaciones lineales de filas

$$(1, \quad 2, \quad 7,) \begin{bmatrix} \diamondsuit & \clubsuit \\ \heartsuit & \spadesuit \\ \diamondsuit & \clubsuit \end{bmatrix} = 1\,(\diamondsuit, \quad \clubsuit,) + 2\,(\heartsuit, \quad \spadesuit,) + 7\,(\diamondsuit, \quad \clubsuit,)$$

$$\textit{vector} \times \textsf{MATRIZ} = \textit{vector}$$

Combinaciones lineales $\longrightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{a}\mathbf{B} = (\mathbf{B}^{\intercal})\boldsymbol{a}}$

F30

Recuerde además que si $\mathbf{A}$ es de orden m por n y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} b_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} b_n = \begin{pmatrix} \left({}_{1|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \left({}_{m|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b} \end{pmatrix}.$$

(**Lección** 3) T-7 **Vector por matriz**

Recuerde que $\quad {}_{i|}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{b}\right) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b};\quad$ por tanto

$$\left(\boldsymbol{a}\mathbf{B}\right)_{|j} = {}_{j|}\left(\boldsymbol{a}\mathbf{B}\right) = {}_{j|}\Big((\mathbf{B}^{\intercal})\boldsymbol{a}\Big) = \Big({}_{j|}(\mathbf{B}^{\intercal})\Big) \cdot \boldsymbol{a} = \left(\mathbf{B}_{|j}\right) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \left(\mathbf{B}_{|j}\right)$$

Reglas de re-escritura

$$\boxed{{}_{i|}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{b}\right) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\left(\boldsymbol{a}\mathbf{B}\right)_{|j} = \boldsymbol{a} \cdot \left(\mathbf{B}_{|j}\right)}$$

que, omitiendo el punto, podemos reescribir sencillamente como

$${}_{i|}\mathbf{A}\boldsymbol{b} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{a}\mathbf{B}_{|j}$$

F31

Nótese que por una parte

$$\mathbf{MATRIZ} \cdot \boldsymbol{vector} = \boldsymbol{vector}$$

y por otra

$$\boldsymbol{vector} \cdot \mathbf{MATRIZ} = \boldsymbol{vector},$$

que

$$\mathbf{MATRIZ} \cdot \mathbf{MATRIZ} = \mathbf{MATRIZ},$$

pero que sin embargo

$$\boldsymbol{vector} \cdot \boldsymbol{vector} = \textit{escalar}.$$

Nótese también que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{A}\left[\boldsymbol{x}\right] \quad \text{y que} \quad \boldsymbol{x}\mathbf{A} \neq \left[\boldsymbol{x}\right]^{\intercal}\mathbf{A};$$

puesto que a la izquierda de las desigualdades hay vectores y a la derecha hay matrices.

(**Lección** 3) T-8 **Multiplicación matricial: filas por columnas**

Sean $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$ y $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$, entonces:

$$\boxed{{}_{i|}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\right)_{|j} = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \left(\mathbf{B}_{|j}\right)}$$

Demostración. Recuerde que $\quad {}_{i|}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{b}\right) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \boldsymbol{b},\quad$ por tanto

$${}_{i|}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\right)_{|j} = {}_{i|}\Big((\mathbf{A}\mathbf{B})_{|j}\Big) = {}_{i|}\Big(\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})\Big) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right) \cdot \left(\mathbf{B}_{|j}\right)$$

□

Así, si omitimos el punto, podemos escribir sencillamente

$${}_{i|}\mathbf{A}\mathbf{B}_{|j}$$

F32

(**Lección** 3) T-**9** **Multiplicación matricial (por filas)**

Sean $\underset{m\times p}{\mathbf{A}}$ y $\underset{p\times n}{\mathbf{B}}$, entonces:

$$\boxed{{}_{i|}(\mathbf{AB}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}}$$

Demostración. Veamos que las componentes j-ésimas son iguales:

$$\Big({}_{i|}(\mathbf{AB})\Big)_{|j} = {}_{i|}\Big((\mathbf{AB})_{|j}\Big) = ({}_{i|}\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}_{|j}) = \Big(({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}\Big)_{|j}$$

por tanto ${}_{i|}(\mathbf{AB}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}$. □

Así pues, podemos escribir sencillamente

$${}_{i|}\mathbf{AB}$$

F33

(**Lección** 3) T-**10** **Multiplicación matricial (por filas)**

Cada fila de $\mathbf{AB}$ es combinación de las p filas de $\mathbf{B}$

$$\begin{bmatrix}2&1\\3&8\\4&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&12\\11&18\\13&24\end{bmatrix} \text{ donde } \begin{cases}\begin{pmatrix}2, & 1,\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\1&0\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}3, & 12,\end{pmatrix} = {}_{1|}\mathbf{AB}\\[2ex] \begin{pmatrix}3, & 8,\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\1&0\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}11, & 18,\end{pmatrix} = {}_{1|}\mathbf{AB}\\[2ex] \begin{pmatrix}4, & 9,\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\1&0\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}13, & 24,\end{pmatrix} = {}_{1|}\mathbf{AB}\end{cases}$$

F34

(**Lección** 3) T-**11** **Transpuesta de un producto de matrices**

Puesto que

- $(\mathbf{A}^{\intercal})_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$
- $\boldsymbol{a}\mathbf{B} = (\mathbf{B}^{\intercal})\boldsymbol{a}$

resulta que:

$$\boxed{(\mathbf{AB})^{\intercal} = (\mathbf{B}^{\intercal})(\mathbf{A}^{\intercal})}$$

Demostración.

$$(\mathbf{AB})^{\intercal}{}_{|j} = {}_{j|}\mathbf{AB} = (\mathbf{B}^{\intercal})\big({}_{j|}\mathbf{A}\big) = (\mathbf{B}^{\intercal})(\mathbf{A}^{\intercal})_{|j}.$$

□

El producto de una matriz con su transpuesta siempre es simétrico

F35

Fin de la lección

Librería nacal para Python

Revise la implementación de las operaciones del álgebra matricial en la librería nacal para Python que acompaña al curso: Sección 1.3 de la documentación (o estudie directamente el código).

`https://github.com/mbujosab/nacallib`

Verá que el código es una traducción literal de las *definiciones* vistas aquí; pero que no hay ni una línea de código que describa las propiedades que hemos demostrado en estas tres lecciones. ¡No es necesario! Las definiciones implican las propiedades (como hemos comprobado teóricamente con las demostraciones de estas lecciones). Verifique con ejemplos que todas las propiedades se cumplen. Estudie los notebooks de Jupyter correspondientes a las tres primeras lecciones.

Problemas de la Lección 3

No deje de hacer los ejercicios del libro.

(L-3) Problema 1. Calcule los siguientes productos de matrices (en el orden indicado) EF, FE y E^2

$$\mathsf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathsf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

(Strang, 2007, ejercicio 34 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) Problema 2. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas (en este caso proporcione además un contraejemplo).

(a) Si las columnas 1 y 3 de B son iguales, también las columnas 1 y 3 de AB son iguales.
(b) Si las filas 1 y 3 de B son iguales, también las filas 1 y 3 de AB son iguales.
(c) Si las filas 1 y 3 de A son iguales, también las filas 1 y 3 de AB son iguales.
(d) $(\mathsf{AB})^2 = \mathsf{A}^2\mathsf{B}^2$.

(Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) Problema 3. Sean los vectores $\boldsymbol{a} = \left(1, \quad -2, \quad 7,\right)$ y $\boldsymbol{b} = \left(3, \quad 5, \quad 1,\right)$. Calcule los siguientes productos

(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ (b) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ (c) $\left[\boldsymbol{a}\right]\left[\boldsymbol{b}\right]^{\intercal}$

(Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) Problema 4. Escriba las matrices A y B de 2 por 2 cuyos elementos son $a_{ij} = i + j$ y $b_{ij} = (-1)^{i+j}$. Multiplíquelas para encontrar AB y BA.
(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) Problema 5. El producto de dos matrices triangulares inferiores es nuevamente una matriz triangular inferior (todos sus elementos por encima de si diagonal principal son nulos). Confirme esto con un ejemplo 3 por 3, y luego explique por qué este hecho se deduce de las leyes de multiplicación de matrices.
(Strang, 2007, ejercicio 12 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) Problema 6. Sean A, B, C, D, E y F las matrices de más abajo.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule (*en particular, ¡note que* $\mathsf{EF} \neq \mathsf{FE}$*!*)

(a) $\mathsf{B}+\mathsf{D}$ (b) $2\mathsf{E}-\mathsf{F}$ (c) AC
(d) BC (e) CB (f) ACD
(g) EF (h) FE (i) CEF

Fin de los Problemas de la Lección 3

References

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones.* Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.

Soluciones

(L-1) Problema 1(a)

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

```
A = Matrix([ [1,0,0],[0,2,0],[0,0,1] ])
display(A)
A.es_diagonal()
```

□

(L-1) Problema 1(b)

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\-1 & 2 & 0\\3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

```
A = Matrix([ [1,-1,3],[-1,2,0],[3,0,1] ])
display(A)
A == ~A
```

□

(L-1) Problema 1(c)

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

```
A = Matrix([ [1,-1,3],[0,2,0],[0,0,1] ])
display(A)
A.es_triangularSup()
```

□

(L-1) Problema 1(d)

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\-1 & 0 & 0\\-3 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

```
Matrix([ [0,1,3],[-1,0,0],[-3,0,0] ])
```

□

(L-2) Problema 1(a)

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\4 & 1\\6 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix}1+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}3=\begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\7\\9\end{pmatrix}$$

```
a = Vector( [4, 4, 6] );  b = Vector( [1, 1, 1] )
A = Matrix( [ a, b ] )
x = Vector( [ 1, 3 ] )
display( A*x )
display( (A|1)*(x|1) + (A|2)*(x|2) )
display(     a *(x|1) +     b *(x|2) )
```

□

(L-2) Problema 1(b)

$$\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}0+\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}1+\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$$

□

(L-2) Problema 1(c)

$$\begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}\frac{1}{2}+\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\frac{1}{3}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$$

$\square$

(L-2) Problema 2. Para $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ el sistema no tiene solución.

Cuando $\boldsymbol{b} = 0\mathbf{A}_{|1} + 0\mathbf{A}_{|2} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Pero hay muchas posibilidades...

Si $\boldsymbol{b} = 2\mathbf{A}_{|1} + 0\mathbf{A}_{|2} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ entonces $x = 2$ y $y = 0$. Si $\boldsymbol{b} = 0\mathbf{A}_{|1} + 1\mathbf{A}_{|2} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ entonces $x = 0$ y $y = 1$. Si $\boldsymbol{b} = 3\mathbf{A}_{|1} + 1\mathbf{A}_{|2} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$ entonces $x = 3$ y $y = 1$.

De hecho, hay INFINITAS posibilidades más!... Elija valores para x e y y calcule el vector

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{b};$$

con ese $\boldsymbol{b}$ obtendrá un sistema con solución $(x, y,)$.

```
c  = sympy.symbols('c')  # usemos variables simbólicas
A  = Matrix( [ [3,-6,0],[0,2,-2],[1,-1,-1] ] )
x  = Vector( [2,1,1] )
y  = c*x
display(y)
display( (2*c)*(A|1) + (c*A|2) + (c*A|3) )
Sistema( [ A*x , A*y ] )
```

$\square$

(L-2) Problema 3.

$$\begin{bmatrix}3&-6&0\\0&2&-2\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Cualquier vector de la forma $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2c\\c\\c\end{pmatrix}$ para cualquier valor de c es solución del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Por tanto hay infinitas soluciones.

$\square$

(L-2) Problema 4. Puesto que $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son soluciones, sabemos que $\quad \mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \quad$ y $\quad \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}; \quad$ por tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\left(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\right) &= \tfrac{1}{2}\mathbf{A}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{A}\boldsymbol{v}+\mathbf{A}\boldsymbol{w})\\ &= \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}) && \text{porque } \boldsymbol{v} \text{ y } \boldsymbol{w} \text{ son soluciones}\\ &= \tfrac{1}{2}(2\boldsymbol{b}) \quad = \quad \boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

Por tanto $\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ es solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Sin embargo, si no dividimos por 2 tenemos que $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ es solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{b}$; que es un sistema distinto, ya que $\boldsymbol{b} \neq 2\boldsymbol{b}$.

$\square$

(L-2) Problema 5(a) Si $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$ entonces, si $c + d \neq 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(c\boldsymbol{v}) &= c\boldsymbol{b}\\ \mathbf{A}(d\boldsymbol{w}) &= d\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

sumando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(c\boldsymbol{v}) + \mathbf{A}(d\boldsymbol{w}) =& (c+d)\boldsymbol{b} \\ \mathbf{A}(c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}) =& (c+d)\boldsymbol{b} \\ \mathbf{A}\left(\frac{c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}}{c+d}\right) =& \boldsymbol{b}; \end{aligned}$$

entonces cualquier combinación de soluciones del tipo $\frac{c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}}{c+d}$ también es solución. Por ejemplo $c = 3$ y $d = -2$

$$\mathbf{A}\left(\frac{3\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w}}{1}\right) = \mathbf{A}3\boldsymbol{v} - \mathbf{A}2\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

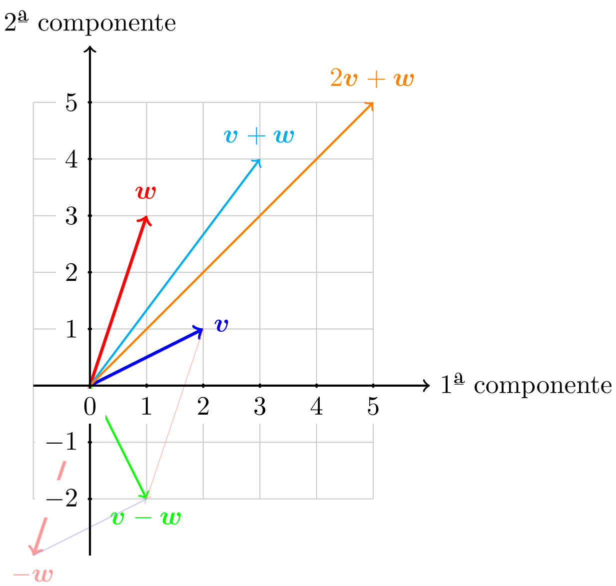
y $c = 1$ y $d = 3$

$$\mathbf{A}\left(\frac{\boldsymbol{v} + 3\boldsymbol{w}}{4}\right) = \mathbf{A}\boldsymbol{v}\frac{1}{4} + \mathbf{A}\boldsymbol{w}\frac{3}{4} = \boldsymbol{b}$$

El Ejercicio 4 on page 13 es un ejemplo donde $c = 1$ y $d = 1$.

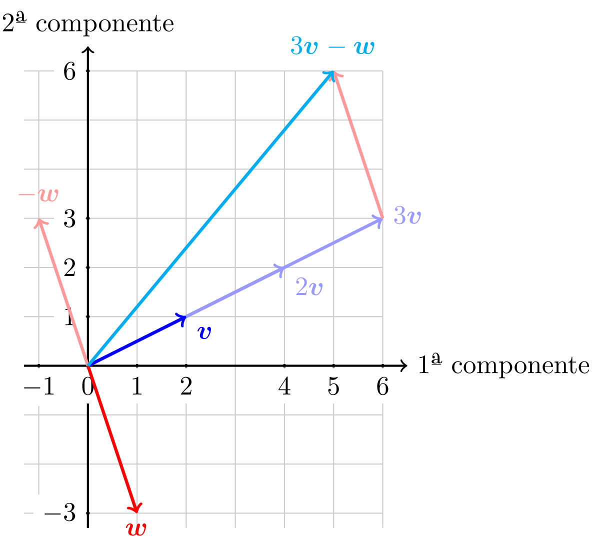
□

(L-2) Problema 6. $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

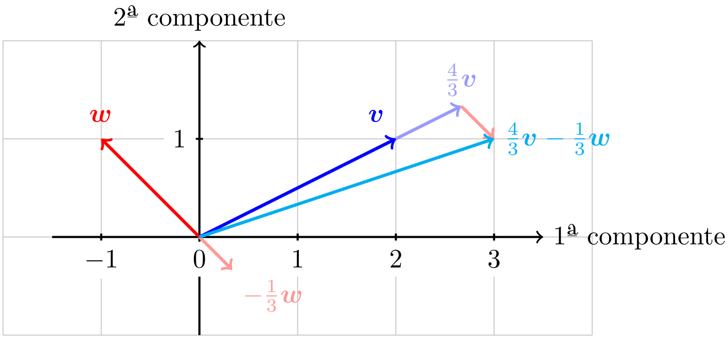


□

(L-2) Problema 7.



(L-2) Problema 8. $x = 1 + \frac{1}{3}$; $y = -\frac{1}{3}$



(L-3) Problema 1. Puesto que: $(\mathbf{EF})_{|1} = \mathbf{E}(\mathbf{F}_{|1}) = (\mathbf{E}_{|1})f_{11} + (\mathbf{E}_{|2})f_{21} + (\mathbf{E}_{|3})f_{31} = \begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}1 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}0 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$;

$(\mathbf{EF})_{|2} = \mathbf{E}(\mathbf{F}_{|2}) = \begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}0 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}1 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}c = \begin{pmatrix}0\\1\\c\end{pmatrix}$;

$(\mathbf{EF})_{|3} = \mathbf{E}(\mathbf{F}_{|3}) = \begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}0 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}0 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

entonces $\mathbf{EF} = \begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{bmatrix}$;

De igual manera: $\mathbf{FE} = \begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\ac+b&c&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{E}^2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\2a&1&0\\2b&0&1\end{bmatrix}$.

```
a, b, c = sympy.symbols('a b c')
E = Matrix([[1,0,0],[a,1,0],[b,0,1]])
F = Matrix([[1,0,0],[0,1,0],[0,c,1]])
display( E * F )
display( F * E )
display( E * E )
```

(L-3) Problema 2(a) Verdadero. Si $\mathbf{B}_{|1} = \mathbf{B}_{|3}$ entonces $(\mathbf{AB})_{|1} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|1}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|3}) = (\mathbf{AB})_{|3}$.

(L-3) Problema 2(b) Falso. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\1&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\-10&-10&-10\end{bmatrix}$..

(L-3) Problema 2(c) Verdadero. Si ${}_{1|}\mathbf{A} = {}_{3|}\mathbf{A}$ entonces ${}_{1|}(\mathbf{AB}) = ({}_{1|}\mathbf{A})\mathbf{B} = ({}_{3|}\mathbf{A})\mathbf{B} = {}_{3|}(\mathbf{AB})$.

(L-3) Problema 2(d) Falso. $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{ABAB}$ y $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 = \mathbf{AABB}$. Por ejemplo si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-10\end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\1&1&1\end{bmatrix}$; entonces $(\mathbf{AB})^2 = \begin{bmatrix}-9&-9&-9\\0&0&0\\90&90&90\end{bmatrix} \neq \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix}2&0&2\\0&0&0\\200&0&200\end{bmatrix}$.

(L-3) Problema 3(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 54$.

En el tema sobre ortogonalidad veremos que la operación $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ calcula el cuadrado de la longitud del vector $\boldsymbol{a}$. Por tanto la longitud del vector $\boldsymbol{a}$ es $\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

□

(L-3) Problema 3(b) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

En el tema sobre ortogonalidad veremos que cuando $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ se dice que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son ortogonales (perpendiculares) entre si.

□

(L-3) Problema 3(c) $\left[\boldsymbol{a}\right]\left[\boldsymbol{b}\right]^{\intercal}=\begin{bmatrix}3&5&1\\-6&-10&-2\\21&35&7\end{bmatrix}$

```
a = Vector([1, -2, 7])
b = Vector([3,  5, 1])
display(a*a)
display(a*b)
display(Matrix([a])* ~Matrix([b]))
```

□

(L-3) Problema 4.

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}2&3\\3&4\end{bmatrix}\quad\text{y}\quad\mathsf{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix};\qquad\mathsf{AB}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix};\qquad\mathsf{BA}=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&1\end{bmatrix}.$$

```
A = Matrix( [[ i+j        for i in range(1,3)] for j in range(1,3) ] )
B = Matrix( [[(-1)**(i+j) for i in range(1,3)] for j in range(1,3) ] )
Sistema( [A, B, A*B, B*A])
```

□

(L-3) Problema 5. Por ejemplo:

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix};\quad\mathsf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix};\quad\mathsf{AB}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\3&3&1\end{bmatrix}.$$

Es triangular inferior debido a que la primera fila de A es de la forma ${}_{1|}\mathsf{A}=(a_{11},0,0)$ y la primera fila de B es de la forma ${}_{1|}\mathsf{B}=(b_{11},0,0)$, así que la primera fila de AB es

$$\left({}_{1|}\mathsf{A}\right)\mathsf{B}=\begin{pmatrix}a_{11}, & 0, & 0\end{pmatrix}\mathsf{B}=a_{11}\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\end{pmatrix}\mathsf{B}=a_{11}\left({}_{1|}\mathsf{B}\right)=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}, & 0, & 0\end{pmatrix};$$

y la tercera columna de A es $\begin{pmatrix}0\\0\\a_{33}\end{pmatrix}$ y la tercera columna de B es $\begin{pmatrix}0\\0\\b_{33}\end{pmatrix}$; y por tanto la tercera columna de AB es

$$\mathsf{A}\left(\mathsf{B}_{|3}\right)=\mathsf{A}\begin{pmatrix}0\\0\\b_{33}\end{pmatrix}=\mathsf{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}b_{33}=\left(\mathsf{A}_{|3}\right)b_{33}=\begin{pmatrix}0\\0\\a_{33}b_{33}\end{pmatrix}.$$

```
a11, a21, a31, a22, a32, a33 = sympy.symbols('a11 a21 a31 a22 a32 a33')
b11, b21, b31, b22, b32, b33 = sympy.symbols('b11 b21 b31 b22 b32 b33')
A = Matrix([ [a11,0,0], [a21,a22,0], [a31,a32,a33] ])
B = Matrix([ [b11,0,0], [b21,b22,0], [b31,b32,b33] ])
A*B
```

□

(L-3) Problema 6(a) $\left[\begin{smallmatrix}1&4&-1\\2&0&3\end{smallmatrix}\right]$

□

(L-3) Problema 6(b) $\left[\begin{smallmatrix}3&8\\4&3\end{smallmatrix}\right]$

□

(L-3) Problema 6(c) $\left[\begin{smallmatrix}14&-1\\8&-1\\-1&-1\end{smallmatrix}\right]$

□

(L-3) Problema 6(d) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$ □

(L-3) Problema 6(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -10 \end{bmatrix}$ □

(L-3) Problema 6(f) $\begin{bmatrix} -2 & 27 & 15 \\ -2 & 15 & 9 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ □

(L-3) Problema 6(g) $\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ □

(L-3) Problema 6(h) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ □

(L-3) Problema 6(i) $\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 25 & -9 \\ 25 & -11 \end{bmatrix}$ □