Matemáticas II

Marcos Bujosa

14/01/2023

Puede encontrar la última versión de este material en

http://www.ucm.es/fundamentos-analisis-economico2/marcos-bujosa

Índice

II Transformaciones elementales, eliminación y matriz inversa **1**

LECCIÓN 4: Eliminación **2**
Transparencias de la Lección 4 2
Problemas de la Lección 4 6

LECCIÓN 5: Matrices inversas **8**
Transparencias de la Lección 5 8
Problemas de la Lección 5 12

Soluciones **16**

Part II
Transformaciones elementales, eliminación y matriz inversa

LECCIÓN 4: Eliminación

Lección 4

(**Lección** 4) T-1 Esquema de la Lección 4

Esquema de la *Lección 4*

- Transformaciones elementales
- Identificación de matrices singulares por eliminación
- Producto de *matrices elementales*

F1

Resumen de la lección En esta lección se cuenta la mecánica del método de eliminación[1]. Ahora se presenta sin ningún propósito concreto (en la próxima lección se empleará para invertir una matriz, dos lecciones más tarde para resolver sistemas de ecuaciones, y en la segunda parte del curso para calcular determinantes y diagonalizar matrices).

La eliminación solo emplea dos tipos de operaciones, denominadas *transformaciones elementales*:

Transformaciones Elementales Tipo I. Suman a un vector un múltiplo de *otro vector*

Transformaciones Elementales Tipo II. Multiplican un vector por un número *distinto de cero*

Una vez introducidos los dos tipos de transformaciones elementales, se propone pre-escalonar una matriz tres por tres. Con este ejercicio se indica en qué consiste una *matriz (pre)escalonada* y a qué se denomina *pivote*. El pivote de una columna no nula es su primer componente no nulo. Una matriz está *pre-escalonada* si las componentes a la derecha de cada pivote son nulas, y está *escalonada* si además los pivotes de sus columnas describen una escalera descendente, dejando todas las columnas nulas (si hay) a la derecha de las columnas no nulas.

A continuación se propone a los estudiantes que intenten pre-escalonar varias matrices y comprobar si la forma escalonada tiene tres pivotes (o si falta alguno). La idea es darles unos minutos para que lo intenten y comprendan la mecánica (a lo largo del curso casi todo se resolverá mediante eliminación... así que es fundamental comprender la mecánica cuanto antes).

Después se muestra cómo realizar una transformación elemental $\boldsymbol{\tau}$ de las columnas de $\mathbf{A}$ mediante un producto de matrices $\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})$; donde $(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})$ es la *matriz elemental* resultante de aplicar una sola transformación elemental $\boldsymbol{\tau}$ a las columnas de la matriz identidad. Es importante explicar la notación usada para denotar las transformaciones elementales de la columna j-ésima (que también describen las correspondientes matrices elementales): $\mathbf{I}_{\underset{[(a)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ y $\mathbf{I}_{\underset{[(a)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$.

A continuacion veremos una de las ideas que más explotaremos durante el curso: que una sucesión de transformaciones elementales de las columnas de $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ se puede expresar como el producto de $\mathbf{A}$ por una matriz que es el producto de todas las matrices elementales empleadas en la sucesión: $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\cdots\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}$.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)$$

Ésta idea es el pilar del método de eliminiación.

Después destacaremos que las transformaciones elementales se pueden *deshacer*, es decir, que son *invertibles* (esta es una propiedad fundamental, y que será central en la lección sobre matrices invertibles).

También veremos que el intercambio de posición de dos vectores resulta ser equivalente a una sucesión de transformaciones *Tipo I* y *II* —se debe mostrar en la pizarra con la matriz identidad de orden 2, animando a los estudiantes a que vayan indicando los pasos necesarios... es interesante que vean que hay varias formas de llegar al mismo resultado. Llamaremos *permutación*, $\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}$, a cualquier sucesión arbitraria de intercambios; así $\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}$ es una reordenación de las columnas de $\mathbf{I}$. Veremos que puesto que $\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}$ es una sucesión de intercambios, $\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[\circlearrowleft]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)$ reordena las columnas de $\mathbf{A}$.

La demostración de que toda matriz se puede escalonar mediante transformaciones elementales no se cuenta en clase, pero dicha demostración es básicamente una descripción del método de eliminación (véase el libro y la documentación de la librería de Python que lo acompaña).

[1]en esta lección solo aplicaremos la eliminación "de izquierda a derecha".

(**Lección** 4) T-**2** **Transformaciones elementales de una matriz**

Tipo $\boldsymbol{I}$**:** $\mathsf{A}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ ***(con*** $i \neq j$***)***

suma λ veces la columna i-ésima a la columna j-ésima

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Tipo $\boldsymbol{II}$**:** $\mathsf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ ***(con*** $\alpha \neq 0$***)***

multiplica por α la i-ésima columna

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{\underset{[(10)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 1 & -30 & 0 \\ 1 & -60 & 3 \end{bmatrix}$$

F3

Transformación **Tipo I** de la matriz identidad de orden 4:

$$\mathsf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación **Tipo II** de la matriz identidad de orden 4:

$$\mathsf{I}_{\underset{[(5)\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivotes y forma escalonada de una matriz A**:** llamamos *pivote* de una columna *no nula* al primer componente no nulo de dicha columna; y llamaremos *posición de pivote* al índice de la fila en la que se encuentra dicho coeficiente *no nulo*.

Diremos que una matriz K está *pre-escalonada*, si los componentes que quedan a la derecha de cada pivote son nulos. Y diremos que una matriz L es *escalonada*, si está pre-escalonada, y toda columna que precede a una columna $\mathsf{A}_{|k}$ no nula es no nula y tiene una posición de pivote anterior a la posición de pivote de $\mathsf{A}_{|k}$. Por tanto, en una matriz escalonada no puede haber columnas nulas a la izquierda de columnas no nulas (es decir, o no hay columnas nulas, o todas ellas están en el lado derecho de la matriz). Además, conforme nos movemos de izquierda a derecha, los pivotes cada vez aparecen más abajo (i.e., en filas con índices cada vez mayores). Así, recorriendo la matriz de izquierda a derecha, los pivotes describen una escalera descendente (de ahí el nombre de matriz "escalonada").

(**Lección** 4) T-**3** **Eliminación y forma pre-escalonada de una matriz**

- *Pivote*: es el primer componente no nulo de cada columna.
- *Eliminación*: modifica una matriz hasta que los *componentes a la derecha de cada pivote son cero*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \mathsf{L}$$

F4

(**Lección** 4) T-4 Eliminación

Algoritmo de Eliminación sobre $\mathbf{A}$
modifica $\mathbf{A}$ con una secuencia de *transformaciones elementales*

Objetivo
obtener una forma *(pre)escalonada* de la matriz

- *pre-escalonada*: a la derecha de cada pivote solo hay ceros.
- *escalonada*: además sus pivotes en disposición descendente y columnas nulas a la derecha.

Toda matriz se puede (pre)escalonar por eliminación
Rango (rg): nº de pivotes de sus formas pre-escalonadas
$\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ *singular*: sus formas pre-escalonadas tienen columnas nulas (rg $< n$)

F5

(**Lección** 4) T-5 Eliminación: ¿Cuando no hay suficientes pivotes?

matrices $n \times n$: **singulares** si no logramos n pivotes $\rightarrow$ ☹

$$\begin{bmatrix}0&1&3\\4&2&8\\1&1&1\end{bmatrix}$$

¿Y si la matriz fuera? $\begin{bmatrix}1&3&0\\2&6&4\\1&1&1\end{bmatrix}$

¿Y si la matriz fuera? $\begin{bmatrix}1&3&0\\2&6&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

¿Y si la matriz fuera? $\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&-4\end{bmatrix}$

F6

(**Lección** 4) T-6 Producto de matrices: matrices elementales

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&3&0\\2&8&4\\1&1&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_{\tau}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&4\\1&-2&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\tau}}$$

La matriz $\mathbf{I}_{\tau}$ se denomina *matriz elemental*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau}) = \mathbf{A}_{\tau}$$

Esta matriz elemental $\mathbf{I}_{\tau}$ en particular se denota como $\mathbf{I}_{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}$

$$\mathbf{A}\Big(\mathbf{I}_{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\Big) = \mathbf{A}_{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}$$

F7

(**Lección** 4) T-7 Producto de matrices: matrices elementales

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&4\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ & & \\ & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&-2&5\end{bmatrix}$$

Esta matriz elemental $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ en particular se denota como $\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\mathbf{A}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$$

F8

(**Lección** 4) T-8 Eliminación mediante matrices elementales

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&0\\2&8&4\\1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&4\\1&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&-2&5\end{bmatrix}=\mathbf{L}$$

$$\mathbf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}=\mathbf{A}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}][(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\mathbf{L}$$

hay una matriz que realiza todas las operaciones *"de golpe"*

$$\mathbf{A}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}=\mathbf{A}\left(\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\right)=\mathbf{A}\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}=\mathbf{L}$$

$$\boxed{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}=\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)}$$

F9

(**Lección** 4) T-9 ¿Cómo volver de **L** a **A**? Inversas

¿Cómo deshacer el primer paso? (fue restar 3 veces $\mathbf{A}_{|1}$ de $\mathbf{A}_{|2}$)

$$\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ & & \\ & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{I}_{\underset{[(-\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\quad\text{“deshace”}\quad\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$$

¿Qué deshace $\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}$?

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ & & \\ & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

F10

(**Lección** 4) T-10 Matrices de intercambio

$$\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\quad&\quad\\ & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&a\\d&b\end{bmatrix}$$

¿Y si queremos intercambiar las filas?

$$\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\qquad=\begin{bmatrix}b&d\\a&c\end{bmatrix}$$

¡El producto de matrices no es conmutativo!

F11

(**Lección** 4) T-**11** Intercambios entre columnas

Intercambio de columnas:
$\mathbf{A}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}$ → intercambia las columnas i y j de $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\tau}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Podemos intercambiar dos columnas con una sucesión de transformaciones elementales

La matriz $\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}$ se denomina matriz intercambio

F12

(**Lección** 4) T-**12** Permutaciones

Producto de matrices intercambio $\mathbf{I}_{\underset{[\cdot\rightleftharpoons\cdot]}{\tau}}$ es una matriz permutación $\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\tau}}$.

$$\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\tau}} = \text{Matriz identidad } \mathbf{I} \text{ con columnas reordenadas}$$

Veamos el caso 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\tau}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

¿Cuantos posibles reordenamientos o permutaciones hay?

¿Qué obtenemos con el producto de dos matrices permutación?

F13

Fin de la lección

Problemas de la Lección 4

(L-4) Problema 1.

(a) ¿Cuáles son las matrices $\mathbf{I}_{\underset{[(x)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}$, $\mathbf{I}_{\underset{[(y)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}$ y $\mathbf{I}_{\underset{[(z)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}}$ que transforman $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ en una forma escalonada?

(b) Multiplique dichas matrices elementales $\mathbf{I}_{\tau_i}$ para obtener una matriz $\mathbf{E}$ que realice la eliminación: $\mathbf{AE} = \mathbf{K}$.

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 24 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) Problema 2. Considere la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

¿Para que valor(es) de c la matriz es singular (no es posible encontrar tres pivotes)?

(L-4) Problema 3. Suponga las siguientes matrices de orden 3 por 3.

(a) $(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}})$ resta la columna 1 de la columna 2, y luego $(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\tau}})$ intercambia las columnas 2 y 3. ¿Qué matriz $\mathbf{E}$ realiza ambos cambios a la vez?

(b) $(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\tau}})$ intercambia las columnas 2 y 3 y luego $\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}$ resta la columna 1 de la columna 3. ¿Qué matriz $\mathbf{N} = (\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\tau}})(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}})$ realiza ambos cambios a la vez? Explique por qué las matrices $\mathbf{E}$ y $\mathbf{N}$ son iguales en ambos casos, pero las matrices elementales $\mathbf{I}_{\tau}$ son distintas.

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 28 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) Problema 4. Las matrices elementales $\mathsf{I}_{\substack{\tau\\[(-)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}$ y $\mathsf{I}_{\substack{\tau\\[(-)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}$ reducen la matriz A a su forma escalonada por columnas. Encuentre la matriz E tal que $\mathsf{AE} = \mathsf{L}$ es dicha forma escalonada (triangular inferior), si A es

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(L-4) Problema 5. Aunque aquí sólo contemplamos como transformaciones elementales las de *Tipo I* y *II*, en la mayoría de manuales de Álgebra Lineal aparece como tercera operación elemental el *intercambio*:

$$\mathsf{A}_{\substack{\tau\\[p\rightleftharpoons s]}} \to \text{intercambia las columnas } p \text{ y } s \text{ de } \mathsf{A}.$$

Demuestre que un intercambio de columnas es en realidad una sucesión transformaciones elementales de *Tipo I* y *II*. Hágalo transformando la matriz identidad $\underset{2\times 2}{\mathsf{I}}$ en $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mediante transformaciones elementales por columnas.

(L-4) Problema 6. Escriba las matrices de 3 por 3 que producen los siguientes pasos de eliminación:

(a) $\mathsf{I}_{\substack{\tau\\[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}$ resta 5 veces la columna 1 de la columna 2.

(b) $\mathsf{I}_{\substack{\tau\\[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}$ resta 7 veces la columna 2 de la columna 3.

(c) la matriz permutación $\mathsf{I}_{\substack{\tau\\[\mathfrak{S}]}}$ que intercambia las columna 1 y 2, y después las columnas 2 y 3.

(Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) Problema 7. En referencia a las matrices del Problema 6:

(a) Al aplicar $\underset{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}$ y luego $\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}$ a las columnas de la matriz $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ se obtiene $\mathsf{A}_{\substack{\tau\\[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} = [\quad;\quad;\quad]$.

(b) Pero aplicando $\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}$ antes de $\underset{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}$ se obtiene $\mathsf{A}_{\substack{\tau\\[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} = [\quad;\quad;\quad]$.

(c) Cuando se aplica $\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}$ primero, la columna ____ no se ve afectada por la columna ____. ¡Este hecho es central para que la factorización LU funcione como lo hace!

(Strang, 2007, ejercicio 23 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) Problema 8. ¿Qué matriz M transforma el vector $\boldsymbol{v} = (1, \quad 0,)$ en $(0, \quad 1,)$, es decir $\boldsymbol{v}\mathsf{M} = (0, \quad 1,)$; y también el vector $\boldsymbol{w} = (0, \quad 1,)$ en $(1, \quad 0,)$, es decir $\boldsymbol{w}\mathsf{M} = (1, \quad 0,)$?

(L-4) Problema 9. Hemos visto que para una matriz de intercambio, $\mathsf{I}_{\substack{\tau\\[i\rightleftharpoons j]}}$, el producto $\mathsf{A}(\mathsf{I}_{\substack{\tau\\[i\rightleftharpoons j]}})$ tiene las mismas componentes que A, pero las columnas están intercambiadas. ¿Qué pasaría si alteramos el orden del producto, es decir, si multiplicamos $(\mathsf{I}_{\substack{\tau\\[i\rightleftharpoons j]}})\mathsf{A}$? Verifique su respuesta para el caso 2 por 2.

(L-4) Problema 10. Si cada columna de A es un múltiplo de $(1, \quad 1, \quad 1,)$, entonces $\mathsf{A}\boldsymbol{x}$ siempre es un múltiplo de $(1, \quad 1, \quad 1,)$. Escriba un ejemplo de 3 por 3. ¿Cuántos pivotes se producen por eliminación?
(Strang, 2007, ejercicio 26 del conjunto de problemas 1.4.)

Fin de los Problemas de la Lección 4

LECCIÓN 5: Matrices inversas

Lección 5

(**Lección** 5) T-1 Esquema de la Lección 5

Esquema de la *Lección 5*

- Inversa de $\mathbf{A}$
- eliminación Gauss-Jordan / encontrando $\mathbf{A}^{-1}$
- Inversa de $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A}^{\intercal}$

F14

Resumen de la lección: La inversa de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es una matriz $\mathbf{B}$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Es importante indicar que no toda matriz cuadrada tiene inversa. . . y expondremos dos argumentos: por una parte, es imposible de combinar las columnas de $\mathbf{A}$ para generar las columnas de $\mathbf{I}$ si las columnas de $\mathbf{A}$ están alineadas. Por otra, y de forma más general, es imposible que se puedan combinar las columnas de $\mathbf{A}$ de manera que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, con $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, y que al mismo tiempo exista $\mathbf{A}^{-1}$.

Veremos que encontrar la inversa de $\mathbf{A}$ de orden n implica resolver n sistemas de ecuaciones con n incógnitas (pues hemos de encontrar n combinaciones de las columnas de $\mathbf{A}$ que generen las n columnas de $\mathbf{I}$, una combinación por cada columna de $\mathbf{I}$).

La aparente "magia" del método de Gauss consiste en que es posible resolver simultáneamente los n sistemas de ecuaciones. Para hacerlo basta alargar las columnas de $\mathbf{A}$ con las columnas de la matriz identidad y aplicar después la eliminación Gauss-Jordan; para entenderlo hay que recordar que aplicar una secuencia de transformaciones elementales es equivalente a multiplicar la matriz por la matriz resultante de aplicar dicha sucesión sobre la matriz identidad:

$$\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\right)$$

También deduciremos cómo es la inversa tanto del producto de matrices invertibles, $(\mathbf{AB})^{-1}$, como de la transpuesta de una matriz invertible, $(\mathbf{A}^{\intercal})^{-1}$.

Para finalizar, daremos una caracterización de las matrices invertibles relacionada con el método de eliminación y las matrices elementales (la demo formal aparece en el libro, pero tras haber aplicado Gauss-Jordan con un ejemplo en la pizarra, se puede explicar la idea que hay debajo de esta caracterización).

(**Lección** 5) T-2 Inversa de una matriz (matrices cuadradas)

$\mathbf{A}$ cuadrada de orden n tiene inversa (es *invertible*) si existe $\mathbf{B}$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Entonces

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}.$$

No todas las matrices tienen inversa

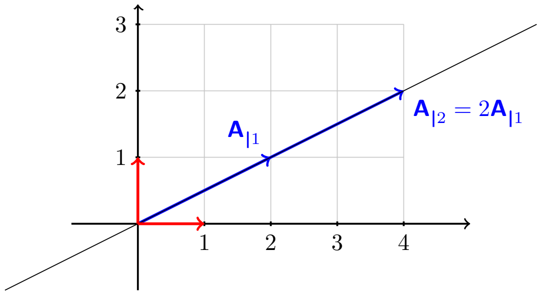
Las *matrices cuadradas sin inversa* se denominan *singulares*

F15

(**Lección** 5) T-3 Caso singular (no inversa)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Es posible encontrar una matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$?
...columnas de $\mathbf{I}$ deben ser combinaciones lineales de columnas de $\mathbf{A}$... pero las columnas están alineadas.



Así pues

$$\boxed{\mathbf{A} \text{ es singular}}$$

F16

(**Lección** 5) T-4 Caso singular (no inversa)

¿Se puede encontrar $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \; \\ \; \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ para $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ $\Rightarrow$ no puede haber $\mathbf{A}^{-1}$

$$\boxed{\text{Suponer } \mathbf{A}^{-1} \text{ nos lleva a una } \textit{contradicción}}$$

$$\text{Si } \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ y } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Cuando existe $\mathbf{A}^{-1}$

la única solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

F17

(**Lección** 5) T-5 Calculando la matriz inversa

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es resolver m sistemas (de m ecuaciones cada uno)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

F18

(**Lección** 5) T-6 Gauss-Jordan: resolviendo dos sistemas lineales de golpe

Eliminación Gauss-Jordan (obtención forma escalonada reducida R)
aplicar transformaciones elementales hasta lograr una matriz escalonada con únicamente ceros a la izda. de cada pivote (y pivotes iguales a 1)

Vamos a resolver los sistemas lineales

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad\qquad \begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

aplicando eliminación Gauss-Jordan sobre $\mathbf{A}$ apilada con $\mathbf{I}$

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}1&3\\2&7\\\hline1&0\\0&1\end{array}\right]\rightarrow \qquad\qquad \rightarrow\qquad\qquad =$$

Si $\mathbf{R}=\mathbf{I}$, hemos encontrado $\mathbf{A}^{-1}$

F19

```
A = Matrix([[1,3],[2,7]])
B = ElimGJ( A.apila(I(2),1) , 1 )
(2,3)|B
```

(**Lección** 5) T-7 Gauss-Jordan: ¿Por qué funciona?

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}1&3\\2&7\\\hline1&0\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\qquad\qquad\xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}}$$

es decir, puesto que $\quad \mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}=\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\right)$:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right]_{\tau_1\cdots\tau_k}=\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}\\\hline\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k})\\\hline\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\\hline\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\end{array}\right],$$

$$\boxed{\text{¿quien es } \mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\text{?}}$$

por tanto $\mathbf{A}^{-1}=$

F20

$$\text{Como}\quad \mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix},\quad\text{y}\quad \mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix};$$

entonces

$$\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-3\\-2&1\end{bmatrix}.$$

Puesto que $\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\right)=\mathbf{I}$, se deduce que $\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}$ es la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

$$\boxed{\text{Dicho de otro modo, si } \mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}=\mathbf{I}\text{ entonces }\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}=\mathbf{A}^{-1}.}$$

También podemos calcular la inversa operando con las filas (como en la mayoría de los libros de texto). En este caso multiplicamos por la izquierda para operar con las filas .

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}]=\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&7&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}]{}\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow[\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}]{}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&7&-3\\0&1&-2&1\end{array}\right]=\left[{}_{\tau_1\cdots\tau_k}\mathbf{A}\,|\,{}_{\tau_1\cdots\tau_k}\mathbf{I}\right]=\left[\mathbf{I}\,|\,{}_{\tau_1\cdots\tau_k}\mathbf{I}\right].$$

¿Quién es la matriz ${}_{\tau_1\cdots\tau_k}\mathbf{I}$ del lado derecho? El razonamiento es el mismo:

$$ {}_{\tau_1\cdots\tau_k}\left[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}\right] = \left[({}_{\tau_1\cdots\tau_k}\mathbf{I})\mathbf{A}\,|\,{}_{\tau_1\cdots\tau_k}\mathbf{I}\right] = \left[\mathbf{I}\,|\,{}_{\tau_1\cdots\tau_k}\mathbf{I}\right] $$

Puesto que $({}_{\tau_1\cdots\tau_k}\mathbf{I})\mathbf{A} = \mathbf{I}$, entonces ${}_{\tau_1\cdots\tau_k}\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}$.

Dicho de otro modo, si ${}_{\tau_1\cdots\tau_k}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ entonces ${}_{\tau_1\cdots\tau_k}\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}$.

(**Lección** 5) T-8 **Inversa de un producto**

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son invertibles y del mismo orden, $(\mathbf{AB})$ es invertible.
¿Cómo es $(\mathbf{AB})^{-1}$? Probemos con $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})$:

$$\mathbf{AB}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right) =$$

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)\mathbf{AB} =$$

F21

(**Lección** 5) T-9 **Inversa de la matriz transpuesta**

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

Hagamos la transpuesta en ambos lados

$$\left((\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}\right)\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$$

por tanto

la inversa de $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ es

F22

(**Lección** 5) T-10 **Matrices intercambio y matrices permutación**

¿Son invertibles las matrices intercambio, $\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}$?

Es fácil comprobar que

$$\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\tau}}\right)^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\tau}}\right) = \mathbf{I} \qquad \Longrightarrow$$

F23

EJERCICIO 1. Demuestre que $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\tau}}\right)^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\tau}}\right) = \mathbf{I}$.

(**Lección** 5) T-11 Caracterización de las matrices que tienen inversa

Dada $\mathbf{A}$ de orden n, las siguientes propiedades son equivalentes

1. $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p} = \mathbf{K}$ (pre-escalonada) no tiene columnas nulas.
2. $\mathbf{A}$ tiene inversa.
3. $\mathbf{A}$ es producto de matrices elementales.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\big(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\big) = \mathbf{I} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A} = \big(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\big)^{-1}$$

donde

$$\Big(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\Big)^{-1} = \Big((\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1})\cdots(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k})\Big)^{-1} = (\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k^{-1}})\cdots(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1^{-1}}) = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1}}$$

F24

Resumen de la lección

- Si algunas columnas de $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ están alineadas (si unas son combinación lineal de las otras) la matriz es singular.
- Si el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene más de una solución, entonces la matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es singular.
- Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es singular si cualquiera de sus formas pre-escalonadas tienen columnas nulas.
- Encontrar la matriz inversa de $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ es resolver n sistemas de ecuaciones.
- La inversa de $\mathbf{A}$ es el producto de las matrices elementales (operaciones elementales) que transforman $\mathbf{A}$ en $\mathbf{I}$:

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \left[\frac{\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k})}{\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}}\right]; \qquad \text{si} \quad \mathbf{A}\big(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\big) = \mathbf{I} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}^{-1}.$$

- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^{-1})^{\intercal} = \big(\mathbf{A}^{\intercal}\big)^{-1}$
- $\big(\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{j}\rightleftharpoons\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}}\big)^{-1} = \mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{j}\rightleftharpoons\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}}$
- $\big(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}}\big)^{\intercal}\big(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}}\big) = \mathbf{I} \qquad \Rightarrow \qquad \big(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}}\big)^{\intercal} = \big(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}}\big)^{-1}$

Fin de la lección

Problemas de la Lección 5

(L-5) PROBLEMA 1. Aplique la eliminación Gauss-Jordan para invertir estas matrices

(a) $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 2.

(a) Si $\mathbf{A}$ es invertible y $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, demuestre rápidamente que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

(b) Si $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, encuentre un ejemplo con $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, pero $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$.
(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 3. Calcule la inversa de la matriz genérica 2×2

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

¿Qué condiciones sobre a, b, c, y d aseguran que existe la inversa?

(L-5) PROBLEMA 4. Calcule las inversas de las siguientes matrices, usando Gauss-Jordan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(L-5) PROBLEMA 5. Si la matriz 3 por 3 $\mathbf{A}$ es tal que $\mathbf{A}_{|1} + \mathbf{A}_{|2} = \mathbf{A}_{|3}$, demuestre que $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ no es invertible de estas dos formas alternativas:

(a) Encuentre una solución $\boldsymbol{x}$ diferente de cero de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(b) La eliminación preserva la condición $columna1 + columna2 = columna3$. Explique por qué no hay un tercer pivote.

(Strang, 2007, ejercicio 26 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 6. Encuentre las inversas de

(a) $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(b) $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix}.$

(c) $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}.$

(Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 7. Calcule la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

¿Para qué valores de a y b no hay inversa?
(Strang, 2007, ejercicio 42 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 8. Encuentre $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{E}^8$ y $\mathbf{E}^{-1}$ si $\quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$
(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.5.)

(L-5) PROBLEMA 9. Dada la matriz de permutación

$$\underset{[\mathfrak{S}]}{\mathbf{I}_{\tau}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

escriba la matriz $\left(\underset{[\mathfrak{S}]}{\mathbf{I}_{\tau}}\right)^{-1}$. ¿Que otra relación tiene con la matriz $\underset{[\mathfrak{S}]}{\mathbf{I}_{\tau}}$ (aparte de ser su inversa)?

(L-5) Problema 10. La matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad $\mathbf{I}$ mediante las siguientes operaciones elementales sobre las columnas (en este orden):

$\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 4 veces columna 1 de la columna 2.

$\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 3 veces columna 1 de la columna 3.

$\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta columna 3 de la columna 2.

(a) Escriba $\mathbf{A}^{-1}$ en términos de operaciones con matrices elementales $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$. Calcule la matriz $\mathbf{A}^{-1}$.
(b) ¿Cuál es la matriz original $\mathbf{A}$?

(Basado en *MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2006*)

(L-5) Problema 11. La matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad $\mathbf{I}$ mediante las siguientes tres operaciones elementales sobre las **filas** (en el siguiente orden):

$\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 4 veces fila 1 de la fila 2.

$\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 3 veces fila 1 de la fila 3.

$\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta fila 3 de la fila 2.

(a) Escriba $\mathbf{A}^{-1}$ en términos de las matrices elementales $\mathbf{E}$. Calcule la matriz $\mathbf{A}^{-1}$.
(b) ¿Cuál es la matriz original $\mathbf{A}$?

(*MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2006*)

(L-5) Problema 12.

(a) Encuentre la inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
(b) Encuentre la inversa de la siguiente matriz usando el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

(Poole, 2004, ejercicio 36, 38 y 59 del conjunto de problemas 3.3.)

(L-5) Problema 13. Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ matrices cuadradas. Justifique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

(a) Si $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$ entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.
(b) $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$.

(L-5) Problema 14. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 0 & 2a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$

(a) Demuestre que $\mathbf{A}$ es invertible para todo valor del parámetro a.
(b) Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ cuando $a = 0$.

(L-5) Problema 15. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule $\mathbf{A}^{-1}$.

(L-5) Problema 16. Encuentre las inversas, si existen, de las siguientes matrices

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(L-5) Problema 17. Tan solo hay un número finito ($n!$) de matrices de permutación de dimensión $n \times n$. Además, cualquier potencia de una matriz permutación es también una matriz permutación. Emplee este hecho para demostrar que $\left(\mathsf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\tau}}\right)^r = \mathsf{I}$ para algún número entero r.

Fin de los Problemas de la Lección 5

References

Poole, D. (2004). *Álgebra lineal. Una introducción moderna.* Thomson Learning, Mexico D.F. ISBN 970-686-272-2.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones.* Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.

Soluciones

(L-4) Problema 1(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

por tanto

$$\mathbf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}_{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

```
A = Matrix([ [1, 4,-2], [1, 6, 2], [0, 1, 0] ])
L = Elim(A,1)
Tr = L.TrC
display(Tr)
Sistema([ Sistema([t, I(3)&t]) for t in Tr])
```

$\square$

(L-4) Problema 1(b)

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} = \left(\mathbf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{AE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}.$$

```
ME = Sistema( [ I(3) & t for t in Tr])
E  = (ME|1)*(ME|2)*(ME|3)
display(E)
display(A*E)
A & Tr
```

$\square$

(L-4) Problema 2.

Restando 2 veces la primera columna a la segunda y cuatro a la última, y después sumando dos veces la segunda a la tercera

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & c+2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

Habrá sólo dos pivotes si la última columna de $\mathbf{L}$ estuviera compuesta únicamente por ceros, es decir si $c = -2$.

```
c = sympy.symbols('c')
Elim( Matrix([[1,2,4],[-1,-3,-2],[0,1,c]]) )
```

$\square$

(L-4) Problema 3(a)

$$\mathbf{E} = \left(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}}$$

$\square$

(L-4) Problema 3(b)

$$\mathbf{N} = \left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}$$

La razón por la que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{N}$ son iguales es que las operaciones que realizan son equivalentes: en el primer caso restamos de la segunda columna la primera, y luego colocamos el resultado en la columna de la derecha. En el segundo caso movemos la segunda columna a la derecha, y ahí realizamos la resta.

$\square$

(L-4) Problema 4.

$$\begin{bmatrix} 2&2&0\\ 1&4&9\\ 1&3&9 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 2&0&0\\ 1&3&9\\ 1&2&9 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 2&0&0\\ 1&3&0\\ 1&2&3 \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} = \begin{bmatrix} 1&-1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&1&-3\\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&-1&3\\ 0&1&-3\\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$

```
A      = Matrix([[2,2,0],[1,4,9],[1,3,9]])
TrfCol = Elim(A).TrC
display(TrfCol)
I(3) & TrfCol
```

$\square$

(L-4) Problema 5. $\begin{bmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1&1\\ 0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 0&1\\ -1&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 0&1\\ -1&0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 0&1\\ 1&0 \end{bmatrix}$

```
pasos = [ T((1,1,2)), T((-1,2,1)), T((1,1,2)),  T((-1,1))]
Math(rprElim(I(2),[[],pasos]))
# I(2) & T((1,1,2)) & T((-1,2,1)) & T((1,1,2)) & T((-1,1))
```

$\square$

(L-4) Problema 6(a)

$$\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} = \begin{bmatrix} 1&-5&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$$

```
display( T((-5,1,2)) )
I(3) & T((-5,1,2))
```

$\square$

(L-4) Problema 6(b)

$$\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&1&-7\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$$

```
display( T((-7,2,3)) )
I(3) & T((-7,2,3))
```

$\square$

(L-4) Problema 6(c)

$$\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}} = \begin{bmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{bmatrix}$$

La matriz que realiza todos los cambios a la vez será

$$\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\quad\ \boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}][\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} = \begin{bmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathfrak{S}]}}$$

El producto de matrices intercambio es siempre una matriz cuyas columnas son como las de la matriz identidad, pero en general reordenadas en una disposición distinta; a dichas matrices la llamamos *matrices permutación* y las denotamos con: $\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathfrak{S}]}}$.

```
display( T([ {1,2}, {2,3} ]) )
I(3) & T([ {1,2}, {2,3} ])
```

$\square$

(L-4) Problema 7(a)

$$\mathbf{A}_{\underset{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -5 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -7\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -5 & 35\\0 & 1 & -7\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -5 & 35\end{bmatrix}.$$

```
TrfC = T([ (-5,1,2), (-7,2,3) ])
display( I(3) & TrfC )
Matrix([ [1,0,0]  ]) & TrfC
```

$\square$

(L-4) Problema 7(b)

$$\mathbf{A}_{\underset{[(-7)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}\underset{[(-5)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -7\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -5 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -5 & 0\\0 & 1 & -7\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -5 & 0\end{bmatrix}.$$

```
TrfC = T([ (-7,2,3), (-5,1,2) ])
display( I(3) & TrfC )
Matrix([ [1,0,0]  ]) & TrfC
```

$\square$

(L-4) Problema 7(c) Entonces la columna 3 no se ve afectada por la columna 1.

$\square$

(L-4) Problema 8. Por una parte $(1, \; 0,)\mathbf{M} = (0, \; 1,) \quad \Rightarrow {}_{1|}\mathbf{M} = (0, \; 1,)$; y por otra $(0, \; 1,)\mathbf{M} = (1, \; 0,) \quad \Rightarrow {}_{2|}\mathbf{M} = (1, \; 0,)$. Por tanto la matriz es $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$.

$\square$

(L-4) Problema 9. Si multiplicamos $\mathbf{A}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}\Big)$ permutan las columnas de $\mathbf{A}$, pero si multiplicamos $\Big({}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}\mathbf{I}\Big)\mathbf{A}$ son sus filas las que permutan. Por ejemplo

$$\Big({}_{\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\tau}}\mathbf{I}\Big)\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c & d\\a & b\end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\tau}}\Big) = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b & a\\d & c\end{bmatrix}.$$

Fíjese que $\Big(\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}\Big)$ es simétrica, por lo que $\Big(\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}\Big) = \Big({}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}\mathbf{I}\Big)$.

```
a, b, c, d  = sympy.symbols('a b c d')
A = Matrix([ [a,b], [c,d] ])
display( (T({1,2}) & I(2)) * A )
display( A * (I(2) & T({1,2})) )
(I(2) & T({1,2})) == (T({1,2}) & I(2))
```

$\square$

(L-4) Problema 10. Supongamos que la primera columna es $(a, \; a, \; a,)$, la segunda es $(b, \; b, \; b,)$ y la tercera $(c, \; c, \; c,)$; y donde $a \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}a & b & c\\a & b & c\\a & b & c\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} &= x_1\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}b\\b\\b\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}c\\c\\c\end{pmatrix}\\ &= ax_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + bx_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + cx_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = (ax_1 + bx_2 + cx_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Si aplicamos la eliminación gaussiana tenemos

$$\begin{bmatrix} a&b&c\\ a&b&c\\ a&b&c\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {\left[(-\frac{b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{2}\right]}}} \begin{bmatrix} a&0&c\\ a&0&c\\ a&0&c\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {\left[(-\frac{c}{a})\mathbf{1}+\mathbf{2}\right]}}} \begin{bmatrix} a&0&0\\ a&0&0\\ a&0&0\end{bmatrix};$$

es decir sólo un pivote.

□

Ejercicio 1. Una permutación $\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[\mathfrak{S}]}}}$ es el producto de k matrices intercambio, $\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[\cdot\rightleftharpoons\cdot]}}}$, es decir, una sucesión de k intercambios entre las columnas de la matriz identidad, $\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[\mathfrak{S}]}}} = \left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[h\rightleftharpoons i]}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[j\rightleftharpoons k]}}}\right)\cdots\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[p\rightleftharpoons q]}}}\right)$, por lo que su transpuesta es $\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[\mathfrak{S}]}}}\right)^{\intercal} = \left({}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[p\rightleftharpoons q]}}}\mathbf{I}\right)\cdots\left({}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[j\rightleftharpoons k]}}}\mathbf{I}\right)\left({}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[h\rightleftharpoons i]}}}\mathbf{I}\right)$; donde cada matriz intercambio es simétrica, $\left({}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[i\rightleftharpoons j]}}}\mathbf{I}\right) = \left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[i\rightleftharpoons j]}}}\right)$ y su cuadrado es la matriz identidad (si se intercambian las mismas columnas dos veces, se vuelve al punto de partida), $\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[i\rightleftharpoons j]}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[i\rightleftharpoons j]}}}\right) = \mathbf{I}$. Así

$$\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[\mathfrak{S}]}}}\right)^{\intercal}\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[\mathfrak{S}]}}}\right) = \left({}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[p\rightleftharpoons q]}}}\mathbf{I}\right)\cdots \overbrace{\left({}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[j\rightleftharpoons k]}}}\mathbf{I}\right)\underbrace{\left({}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[h\rightleftharpoons i]}}}\mathbf{I}\right)\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[h\rightleftharpoons i]}}}\right)}_{\mathbf{I}}\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[j\rightleftharpoons k]}}}\right)}^{\mathbf{I}}\cdots\left(\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[p\rightleftharpoons q]}}}\right) = \mathbf{I}.$$

□

(L-5) Problema 1(a) $$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}_1\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1&0&0\\ 1&1&1\\ 0&0&1\\ \hline 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{ccc} 1&0&0\\ 1&1&0\\ 0&0&1\\ \hline 1&0&0\\ 0&1&-1\\ 0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}} \left[\begin{array}{ccc} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ \hline 1&0&0\\ -1&1&-1\\ 0&0&1\end{array}\right].$$

Por tanto $\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ -1&1&-1\\ 0&0&1\end{bmatrix}$

```
A1 = Matrix([[1,0,0],[1,1,1],[0,0,1]])
InvMat(A1, 1)
```

□

(L-5) Problema 1(b)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}_2\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr} 2&-1&0\\ -1&2&-1\\ 0&-1&2\\ \hline 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(2)\mathbf{2}]}\\ {[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}} \left[\begin{array}{rrr} 2&0&0\\ -1&3&-1\\ 0&-2&2\\ \hline 1&1&0\\ 0&2&0\\ 0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(3)\mathbf{3}]}\\ {[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{rrr} 2&0&0\\ -1&3&0\\ 0&-2&4\\ \hline 1&1&1\\ 0&2&2\\ 0&0&3\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(2)\mathbf{2}]}\\ {[(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr} 2&0&0\\ -1&6&0\\ 0&0&4\\ \hline 1&3&1\\ 0&6&2\\ 0&3&3\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(6)\mathbf{1}]}\\ {[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}} \left[\begin{array}{rrr} 12&0&0\\ 0&6&0\\ 0&0&4\\ \hline 9&3&1\\ 6&6&2\\ 3&3&3\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(\frac{1}{3})\mathbf{1}]}\\ {[(\frac{2}{3})\mathbf{2}]}}} \left[\begin{array}{rrr} 4&0&0\\ 0&4&0\\ 0&0&4\\ \hline 3&2&1\\ 2&4&2\\ 1&2&3\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(\frac{1}{4})\mathbf{1}]}\\ {[(\frac{1}{4})\mathbf{2}]}\\ {[(\frac{1}{4})\mathbf{3}]}}} \frac{1}{4}\left[\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{4\mathbf{I}}\\ \hline 3&2&1\\ 2&4&2\\ 1&2&3\end{array}\right]$$

Por tanto $\mathbf{A}_2^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3&2&1\\ 2&4&2\\ 1&2&3\end{bmatrix}$

□

(L-5) Problema 1(c)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}_3\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\ \hline 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline 0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{array}\right].$$

Por tanto $\mathbf{A}_3^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

$\square$

(L-5) Problema 2(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{AB}&=\mathbf{AC}\\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB}&=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AC}\\ \mathbf{IB}&=\mathbf{IC}\\ \mathbf{B}&=\mathbf{C}.\end{aligned}$$

$\square$

(L-5) Problema 2(b)

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\5&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\2&2\end{bmatrix}$$

$\square$

(L-5) Problema 3.

$$\left[\begin{array}{cc}a&b\\c&d\\ \hline 1&0\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(\frac{-b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{cc}a&0\\c&d-\frac{bc}{a}\\ \hline 1&-b/a\\0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}a&0\\c&\frac{ad-bc}{a}\\ \hline 1&-b/a\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(\frac{a}{ad-bc})\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{cc}a&0\\c&1\\ \hline 1&\frac{-b}{ad-bc}\\0&\frac{a}{ad-bc}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-c)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}}\left[\begin{array}{cc}a&0\\0&1\\ \hline 1+\frac{bc}{ad-bc}&\frac{-b}{ad-bc}\\ \frac{-ac}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}a&0\\0&1\\ \hline \frac{ad}{ad-bc}&\frac{-b}{ad-bc}\\ \frac{-ac}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(\frac{1}{a})\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\ \hline \frac{d}{ad-bc}&\frac{-b}{ad-bc}\\ \frac{-c}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}\end{array}\right]$$

es decir

$$\mathbf{M}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

La condición necesaria es que $ad\neq bc$.

```
a, b, c, d = sympy.symbols('a b c d')
A = Matrix([ [a,b], [c,d] ])
InvMat(A, 1)
```

$\square$

(L-5) Problema 4.

$$\left[\begin{array}{ccc}3&1&2\\-1&0&1\\0&1&6\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}1&3&2\\0&-1&1\\1&0&6\\ \hline 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&1\\1&-3&4\\ \hline 0&1&0\\1&-3&-2\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\\ \hline 0&-1&1\\1&3&-5\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline -1&-4&1\\6&18&-5\\-1&-3&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{A}^{-1}\end{array}\right]$$

$$
\left[\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0\\ -1 & 6 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ \hline 1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 6\\ 1 & 0 & 1\\ \hline 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[{[(-6)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ \hline 2 & 1 & -8\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 6\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 10 & 1 & -8\\ -1 & 0 & 1\\ -7 & -1 & 6\end{array}\right]=\left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{B}^{-1}}\right]
$$

$\square$

(L-5) Problema 5(a)

$$
\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1\\ a_2 & b_2 & a_2+b_2\\ a_3 & b_3 & a_3+b_3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}
$$

$\square$

(L-5) Problema 5(b) Cuando restamos la primera y segunda columna de la tercera, obtenemos una columna de ceros (y por tanto sin pivote)

$$
\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1\\ a_2 & b_2 & a_2+b_2\\ a_3 & b_3 & a_3+b_3\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0\\ a_2 & b_2 & 0\\ a_3 & b_3 & 0\end{bmatrix}
$$

$\square$

(L-5) Problema 6(a)

$$
\left[\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[{[(1/4)\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1/2)\mathbf{2}]\\ [(1/3)\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/4\\ 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]
$$

$\square$

(L-5) Problema 6(b)

$$
\left[\frac{\mathbf{A}_2}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0\\ -1/2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2/3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3/4 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(1/2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(3/4)\mathbf{4}+\mathbf{3}]\\ [(2/3)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 2/3 & 1 & 0\\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1\end{array}\right]=\left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{A}_2^{-1}}\right]
$$

$\square$

(L-5) Problema 6(c) Basta repetir para cada bloque los pasos dados en el Ejercicio 3:

$$\left[\begin{array}{cccc} a & b & 0 & 0\\ c & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & c & d\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-b/a)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(\frac{a}{ad-bc})\mathbf{2}]\\ [(-c)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(\frac{1}{a})\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & c & d\\ \hline \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} & 0 & 0\\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-b/a)\mathbf{3}+\mathbf{4}]\\ [(\frac{a}{ad-bc})\mathbf{4}]\\ [(-c)\mathbf{4}+\mathbf{3}]\\ [(\frac{1}{a})\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} & 0 & 0\\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc}\\ 0 & 0 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I}\\ \hline \mathbf{A}_3^{-1} \end{array}\right]$$

□

(L-5) Problema 7.

$$\left[\begin{array}{ccc} a & b & b\\ a & a & b\\ a & a & a\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(\frac{-b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(\frac{-b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} a & 0 & 0\\ a & a-b & 0\\ a & a-b & a-b\\ \hline 1 & \frac{-b}{a} & \frac{-b}{a}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(\frac{1}{a})\mathbf{1}]\\ [(\frac{1}{a-b})\mathbf{2}]\\ [(\frac{1}{a-b})\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ \hline \frac{1}{a} & \frac{-b/a}{a-b} & \frac{-b/a}{a-b}\\ 0 & \frac{1}{a-b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{a-b} \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline \frac{1}{a-b} & 0 & \frac{-b/a}{a-b}\\ \frac{-1}{a-b} & \frac{1}{a-b} & 0\\ 0 & \frac{-1}{a-b} & \frac{1}{a-b} \end{array}\right]$$

Es decir $\quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a-b}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -b/a\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

No hay inversa para los valores $a = b$, es decir cuando el denominador $(a - b)$ es cero (en tal caso todas las filas de la matriz original $\mathbf{A}$ son iguales, y sólo hay un pivote).

Tampoco hay inversa si $a = 0$, pues el primer elemento de la tercera columna tampoco estaría determinado (en este caso habría una fila y una columna de ceros en la matriz original $\mathbf{A}$).

□

(L-5) Problema 8. Puesto que $\mathbf{E}$ es elemental

$$\mathbf{E}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 12 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{E}^8 = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 48 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ -6 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{E}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 6n & 1 \end{bmatrix}$$

□

(L-5) Problema 9. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. También es su traspuesta: $\Big(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big)^{\mathsf{T}}$.

□

(L-5) Problema 10(a) Sabemos que $\mathbf{A}\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big) = \mathbf{I}$, por tanto $\Big(\mathbf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\Big) = \mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{I}_{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}$$

```
Tr = T((-4,1,2)) & T((-3,1,3)) & T((-1,3,2))
display(Tr)
Ainv = I(3) & Tr
Ainv
```

□

(L-5) Problema 10(b) Puesto que $\left(\mathbf{I}_{\substack{\tau\\[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\substack{\tau\\[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\substack{\tau\\[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}\right)^{-1} = \mathbf{A}$ sabemos que $\mathbf{A} = \left(\mathbf{I}_{\substack{\tau\\[(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}\substack{\tau\\[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\substack{\tau\\[(4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\right)$.

$$\mathbf{I}_{\substack{\tau\\[(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\[(4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&4&3\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\text{comprobación:}\quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&-1&-3\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&3\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

```
display(Tr**-1)
A    = I(3) & Tr**-1
Sistema([A, A*Ainv] )
```

□

(L-5) Problema 11(a) Recuerde que ${}_{\tau}\mathbf{I}$ es la transpuesta de $\mathbf{I}_{\tau}$.

Sabemos que $\left({}_{\substack{\tau\\[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}\substack{\tau\\[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\substack{\tau\\[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\mathbf{I}\right)\mathbf{A} = \mathbf{I}$, por tanto $\left({}_{\substack{\tau\\[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}\substack{\tau\\[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\substack{\tau\\[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\mathbf{I}\right) = \mathbf{A}^{-1}$:

$${}_{\substack{\tau\\[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\mathbf{I} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\-3&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}$$

```
Tr   = T((-4,1,2)) & T((-3,1,3)) & T((-1,3,2))
display(Tr)
display( Sistema([t & I(3) for t in ~Tr]) )
Ainv = ~Tr & I(3)
Ainv
```

□

(L-5) Problema 11(b) Puesto que $\left({}_{\substack{\tau\\[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}\substack{\tau\\[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\substack{\tau\\[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\mathbf{I}\right)^{-1} = \mathbf{A}$ sabemos que $\mathbf{A} = \left({}_{\substack{\tau\\[(4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\substack{\tau\\[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\substack{\tau\\[(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}\mathbf{I}\right)$.

$${}_{\substack{\tau\\[(4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\[(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}\mathbf{I} = \begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&1\\3&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\text{comprobación:}\quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\-3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&1\\3&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

```
display(~Tr**-1)
display( Sistema([t & I(3) for t in ~Tr**-1]) )
A    = ~Tr**-1 & I(3)
Sistema([A, Ainv*A] )
```

□

(L-5) Problema 12(a) La primera es una matriz elemental, cuya inversa es $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-c\\0&0&1\end{bmatrix}$; la segunda es una matriz permutación, por lo que su inversa es igual a su traspuesta.

□

(L-5) Problema 12(b)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\a&b&c&d\\\hline1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[[(\frac{1}{d})\mathbf{4}]]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\a&b&c&1\\\hline1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\frac{1}{d}\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-c)\mathbf{4}+\mathbf{3}]\\[(-b)\mathbf{4}+\mathbf{2}]\\[(-a)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\frac{a}{d}&-\frac{b}{d}&-\frac{c}{d}&\frac{1}{d}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{I}\\\hline\mathbf{A}^{-1}\end{bmatrix}$$

```
a, b, c, d = sympy.symbols('a b c d')
C = Matrix([ [1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [a,b,c,d] ])
C.apila(I(4),1) & T((fracc(1,d),4)) & T([(-c,4,3),(-b,4,2),(-a,4,1)])
```

□

(L-5) Problema 13(a) Es cierto; por una parte

$$\mathbf{AB}=\mathbf{I}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}.$$

Y por otra

$$\mathbf{CA}=\mathbf{I}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{C}=\mathbf{A}^{-1}.$$

Por tanto $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son iguales.

□

(L-5) Problema 13(b) Es falso

$$(\mathbf{AB})^2=(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})=\mathbf{ABAB}$$

que en general es distinto de

$$\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2=\mathbf{AABB}.$$

Ejemplo:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix};\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}.\qquad\mathbf{ABAB}=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix};\quad\mathbf{AABB}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

□

(L-5) Problema 14(a) Busquemos el número de pivotes que aparecen tras la eliminación

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc}0&1&0&2\\1&a&0&2a\\a&0&1&0\\1&0&a&1\\\hline1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}0&1&0&0\\1&a&0&0\\a&0&1&0\\1&0&a&1\\\hline1&0&0&0\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\a&1&0&0\\0&a&1&0\\0&1&a&1\\\hline0&1&0&0\\1&0&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{L}\\\hline\mathbf{E}\end{bmatrix}$$

Esta matriz es de rango 4 sea cual sea el valor de a; por lo tanto es invertible.

□

(L-5) Problema 14(b)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\mathbf{L}\\\hline\mathbf{E}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\\hline0&1&0&0\\1&0&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[[(-1)\mathbf{4}+\mathbf{2}]]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&1&0&0\\1&2&0&-2\\0&0&1&0\\0&-1&0&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{I}\\\hline\mathbf{A}^{-1}\end{bmatrix}$$

```
a    = sympy.symbols('a')
A    = Matrix([ [0,1,0,2],[1,a,0,2*a],[a,0,1,0],[1,0,a,1] ])
Ainv = InvMat(A, 1)
Ainv.subs([(a,0)])
```

$\square$

(L-5) Problema 15. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

```
A = Matrix([ [1,1,0,1], [0,1,0,-1], [0,0,1,0], [0,0,0,-2] ])
InvMat(A, 1)
```

$\square$

(L-5) Problema 16.

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(\frac{1}{2})\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{A}^{-1}}\right]$$

$$\left[\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right]$$

La matriz $\mathbf{B}$ es singular (no tiene inversa).

$\square$

(L-5) Problema 17. Puesto que todas las potencias de la matriz $\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ son matrices permutación, y sólo hay un número finito de ellas; la sucesión de potencias $(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})$, $(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^2$, $(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^3$, $\dots$, $(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^r, \dots$ se debe repetir en algún punto. Así pues, para algún m y algún n debe ocurrir que, $(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^m = (\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^n$. Y puesto que las matrices permutación tienen inversa, existe $(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^{-n}$. Pre-multiplicando por dicha matriz obtenemos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^m &= (\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^n \\ (\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^{-n}(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^m &= (\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^{-n}(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^n \\ (\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}})^{m-n} &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Es decir, la potencia $(m-n)$-ésima de $\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ es la matriz identidad.

$\square$