Repaso para el segundo examen intermedio y el examen final

Actualizado el: 3 de abril de 2024

Tabla de Contenido

1. Comentarios generales

El examen 2 cubre el curso completo Las cuestiones cubiertas por este examen (de manera muy resumida):

1. Todo lo que entraba en el primer examen intermedio.
2. Complementos Ortogonales ($S^{\perp}$) de subespacios (S), especialmente (pero no sólo) para los cuatro subespacios fundamentales de una matriz.
3. Dado el conjunto de soluciones, encontar un sistema de ecuaciones; es decir, pasar de las ecuaciones paramétricas a las implícitas y viceversa.
4. ¿Qué pasa a los cuatro espacios cuando realizamos operaciones sobre las matrices y especialmente con los pasos de eliminación? y en general ¿qué relación hay entre los cuatro subespacios de $\mathbf{AB}$ y los de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$? El hecho (importante para las matrices proyección y los mínimos cuadrados!) de que $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ tiene el mismo rango que $\mathbf{A}$, el mismo espacio nulo que $\mathbf{A}$, y el mismo espacio columna que $\mathbf{A}^{\intercal}$, y por qué (lo hemos visto en clase y en algunos problemas).
5. Proyecciones ortogonales: dada una matriz $\mathbf{A}$, la proyección de $\boldsymbol{b}$ sobre $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{x}}$ donde $\hat{\boldsymbol{x}}$ resuelve $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{b}$ [siempre tiene solución puesto que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$]. Si $\mathbf{A}$ tiene rango completo por columnas, entonces $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ es invertible y podemos escribir la matriz proyección $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}$ (de manera que $\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{P}\boldsymbol{b}$, pero en general es mucho más rápido resolver $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{b}$ por eliminación que calcular $\mathbf{P}$). $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{x}}$ está en $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$, y $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ es la matriz proyección sobre $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.
6. Mínimos cuadrados: $\hat{\boldsymbol{x}}$ minimiza $||\mathbf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||^2$ sobre todo $\boldsymbol{x}$, y es la solución de mínimos cuadrados. Esto es, $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{x}}$ es el punto *más próximo* a $\boldsymbol{b}$ en $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$. Aplicación al ajuste de funciones por mínimos cuadrados, minimizando la suma de cuadrado de los errores.
7. Bases ortonormales, formadas por las columnas de matrices $\mathbf{Q}$ con $\mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.
8. Determinantes: sus propiedades, cómo calcularlos (con fórmulas sencillas para los casos 2×2 y 3×3, normalmente por eliminación para matrices de orden mayor a 3×3), su relación con las ecuaciones lineales (determinante nulo = singular), su uso en los problemas de autovalores.
9. Autovalores y autovectores: su definición $\boxed{\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}}$, sus propiedades, el hecho de que para un autovector la matriz (o cualquier función de la matriz) actua como un número. El cálculo del polinomio característico $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ y de $\boldsymbol{x}$ a partir de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)$; autovalores nulos $\lambda = 0$ corresponden a $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. Comprender (a partir de la definición) por qué, si $\mathbf{A}$ tiene un autovalor λ, entonces $\mathbf{A}^k$ tiene un autovalor λ^k, y ambas matrices tienen el *mismo* autovector.
10. Diagonalización $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$: de donde viene y cuando es posible, su uso y comprensión de las propiedades de las matrices y autovalores. La idea básica de, para resolver un problema donde interviene $\mathbf{A}$, primero expresar el vector como combinación lineal de la bases de autovectores ($\mathbf{S}$), entonces tratar para cada autovector la actuación de la matriz $\mathbf{A}$ como un número, y al final sumar los resultados.
11. Usar los autovalores/autovectores para resolver problemas en los que intervienen potencias de una matriz.
12. Si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\intercal}$ (real y simétrica), entonces los autovalores son reales y los autovectores son ortogonales (o se pueden elegir ortogonales), y $\mathbf{A}$ es diagonalizable como $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^{\intercal}$ donde $\mathbf{Q}$ es ortogonal. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B}$ donde $\mathbf{B}$ tiene rango completo por columnas, entonces $\mathbf{A}$ es definida positiva: todo $\lambda > 0$ y todos los pivotes > 0 y $\boldsymbol{a}\mathbf{Y}\boldsymbol{a} > 0$ para cualquier $\boldsymbol{y} \neq 0$; relación de esto con los problemas de minimización.
13. **Este año no hemos visto problemas de ortogonalización por el método de Gram-Schmidt, ni la factorización LU**

Como de costumbre, las preguntas de examen pueden ser formuladas al revés, dando la vuelta ligeramente a los conceptos, e.g. mostrando el final y solicitando que se trabaje hacia atrás, o preguntando sobre el mismo concepto pero en un contexto ligeramente distinto. Quiero comprobar que usted ha asimilado los conceptos, en lugar de limitarse a memorizar un algoritmo sin saber por qué ese método funciona y de donde viene.

2. Exámenes intermedios pasados

A continuación puede encontrarn los exámenes intermedios que ya han sido puestos en el pasado. Hasta el curso 12/13 el método explicado en clase fué la eliminación gaussiana por filas (como en el libro). Por ello algunas preguntas de esos cursos están pensadas asumiendo elimnación por filas. Aquí he modificado algunos ejercicios para ajustar los enunciados al método de eliminación por columnas.

Lea atentamente las instrucciones del examen. . . le ayudara a no cometer errores que le perjudiquen.

Repaso segundo examen intermedio

Calificación

1.-

2.-

3.-

4.-

5.-

Nombre: ______________________________

INSTRUCCIONES

- Puede emplear papel adicional para realizar cálculos y/o ensayar sus respuestas. . . *pero*. . .
- **Ponga su nombre en todas las hojas** que emplee.
- Lea atentamente cada cuestión y **conteste lo que se le pide**. Cada cuestión *debe mostrar sus cálculos o razonamientos* para poder ser calificada. Explique sus respuestas completa y cláramente (debe ser posible distinguir entre quien "adivina" la respuesta y quien entiende la materia). *Si añade afirmaciones falsas puede perder puntos.* Añadir información cierta pero no solicitada no puntúa.
- **Está prohibido** el uso de calculadoras y dispositivos electrónicos, libros o notas de cualquier clase.

2.1. Grupo B curso 22/23

Ejercicio 1. Sean las formas cuadráticas $\begin{cases} q_{\mathsf{A}}(x,y,z) & = 4x^2+4xz+y^2+z^2 \\ q_{\mathsf{B}}(\boldsymbol{x}) & = \begin{pmatrix} x, & y, & z, \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1-a & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$.

(a) (1^{pts}) Demuestre que $q_{\mathsf{A}}(x,y,z)$ es semi-definida positiva.
(b) (1^{pts}) Halle, si existiese, un valor de a de manera que $q_{\mathsf{B}}(\boldsymbol{x})$ sea definida negativa.

Ejercicio 2. Considere el plano $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^4$ generado por $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1, & 0, & 2, & 1,\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1, & 1, & 0, & 1,\end{pmatrix}$.
(a) (1^{pts}) Escriba unas ecuaciones paramétricas para el plano P^* perpendicular a $\mathcal{P}$ que pasa por el punto $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}1, & 1, & 1, & 1,\end{pmatrix}$.
(b) (1^{pts}) Escriba unas ecuaciones cartesianas para el citado plano P^*.

Ejercicio 3. Suponga que $\boldsymbol{q}_1$ y $\boldsymbol{q}_2$ son vectores ortonormales en $\mathbb{R}^2$. Encuentre todos los valores posibles para los siguientes determinantes de matrices 2 por 2 y explique su razonamiento..
Pista: *Recuerde la interpretación geométrica del determinante.*
(a) (1^{pts}) $\det\big[\boldsymbol{q}_1;\ \boldsymbol{q}_2;\big]$.
(b) (1^{pts}) $\det\big[(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_2);\ (\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2);\big]$.
Basado en MIT Course 18.06 Quiz 2, Fall 2006

Ejercicio 4. (1^{pts}) La ecuación $(\mathsf{A}^2-4\mathsf{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución para algún $\boldsymbol{b}$ (*nótese que* A *está al cuadrado*). Proporcione la mayor cantidad de información posible sobre los autovalores de la matriz A.
MIT 18.06 - Quiz 3, 2009

Ejercicio 5. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*).
Si R es una forma escalonada reducida (por columnas) de A, entonces
(a) (0.5^{pts}) Si $\boldsymbol{x}$ es solution a $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ entonces $\boldsymbol{x}$ debe ser solución a $\mathsf{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(b) (0.5^{pts}) Si $\boldsymbol{x}$ es solution a $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ entonces $\boldsymbol{x}$ debe ser solución a $\mathsf{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
(c) (0.5^{pts}) Si $\boldsymbol{x}$ es solution a $\boldsymbol{x}\mathsf{A} = \boldsymbol{b}$ entonces $\boldsymbol{x}$ debe ser solución a $\boldsymbol{x}\mathsf{R} = \boldsymbol{b}$.
(d) (0.5^{pts}) Si $\boldsymbol{x}$ es solution a $\boldsymbol{x}\mathsf{A} = \boldsymbol{0}$ entonces $\boldsymbol{x}$ debe ser solución a $\boldsymbol{x}\mathsf{R} = \boldsymbol{0}$.

Ejercicio 6.
(a) (1^{pts}) Describa todos los vectores que son ortogonales al espacio nulo de $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.
(*Puede contestar sin necesidad de calcular el espacio nulo*).
MIT 18.06 - Final Exam, Monday May 16th, 2005

2.2. Grupo E curso 22/23

EJERCICIO 1.

(a) (1^{pts}) Sea $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y que $\mathbf{A}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Calcule $(\mathbf{A}^3)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

(b) (1^{pts}) Clasifique la forma cuadrática $q(x, y, z) = az^2 + 2x^2 + 8xy + y^2$ en función del parámetro a (ie., definida positiva, negativa, semidefinida, etc.).

EJERCICIO 2. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) (1^{pts}) Calcule los autovalores de $\mathbf{A}$ y bases de los correspondientes autoespacios.

(b) (0.5^{pts}) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?

(c) (0.5^{pts}) ¿Es posible encontrar una matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{\mathsf{T}}$, siendo $\mathbf{D}$ una matriz diagonal?

(d) (0.5^{pts}) Calcule $|\mathbf{A}^{-1}|$.

EJERCICIO 3. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & 1 & d \\ e & f & 1 \end{bmatrix}$

(a) (0.5^{pts}) $\mathbf{A}$ tiene un autovalor (doble) igual a 2 ($\lambda = 2$). ¿Cuál es el otro autovalor?

(b) (1^{pts}) El rango de $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ es 1. ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?

Justifique sus respuestas.

EJERCICIO 4. Considere 3 vectores linealmente independientes $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ de $\mathbb{R}^5$ y otros 3 vectores ortonormales $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$ de $\mathbb{R}^5$ tales que $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \mathcal{L}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3)$. Pongamos dichos vectores como columnas de sendas matrices 5 por 3 del siguiente modo: $\mathbf{A} = [\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2; \boldsymbol{a}_3;]$. y $\mathbf{B} = [\boldsymbol{q}_1; \boldsymbol{q}_2; \boldsymbol{q}_3;]$

(a) (0.5^{pts}) Escriba sendas expresiones (usando $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$) para las matrices proyección $\mathbf{P}_A$ y $\mathbf{P}_B$ sobre $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{C}(\mathbf{B})$.

(b) (0.5^{pts}) Calcule $\det(\mathbf{P}_B)$.

(c) (0.5^{pts}) ¿Qué es $\mathbf{P}_B$ multiplicado por $\mathbf{B}$? ¿Qué es $\mathbf{P}_B$ multiplicado por $\mathbf{A}$?

(d) (0.5^{pts}) ¿Qué es $\mathbf{P}_B$ multiplicado por $\mathbf{P}_A$? ¿Qué es $\mathbf{P}_A$ multiplicado por $\mathbf{P}_B$?

EJERCICIO 5. Considere $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{q}_1 + c_2\boldsymbol{q}_2 + c_3\boldsymbol{q}_3$, donde $\boldsymbol{q}_i$ son tres autovectores ortonormales de la matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 (así que $\mathbf{A}\boldsymbol{q}_i = \lambda_i\boldsymbol{q}_i$).

(a) (1^{pts}) Exprese $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$ en términos de las c_i.

(b) (1^{pts}) Exprese $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ en términos de las c_i y las λ_i.

MIT Course 18.06 Final, Fall 2006

2.3. Grupo D curso 21/22

EJERCICIO 1. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) (1^{pts}) Encuentre una base ortogonal de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.
(b) (1^{pts}) Encuentre vectores ortonormales $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ y $\boldsymbol{q}_3$ tales que $\left[\boldsymbol{q}_1;\ \boldsymbol{q}_2;\right]$ sea una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.
(c) (0.5^{pts}) ¿Cuál de los cuatro subespacios fundamentales de $\mathbf{A}$ contiene a $\boldsymbol{q}_3$?
(d) (0.5^{pts}) Encuentre la matriz proyección $\mathbf{P}$ que proyecta sobre el espacio nulo por la izquierda (¡no el espacio columna!) de $\mathbf{A}$.
(e) (1^{pts}) Encuentre la proyección $\boldsymbol{p}$ de $\boldsymbol{v} = \left(1,\quad 2,\quad 7,\right)$ sobre $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.
(f) (1^{pts}) Encuentre la solución de mínimos cuadrados para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \left(1,\quad 2,\quad 7,\right)$.
(g) (1^{pts}) Describa $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ con ecuaciones cartesianas.

Basado en MIT Course 18.06 Exam 2, April 12, 2000

EJERCICIO 2. (1^{pts}) Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & d & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. ¿Para qué valores de d (si hay alguno) todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son positivos? (Pista: No intente calcular los autovalores de $\mathbf{A}$). *MIT Course 18.06 Exam 3, May 3, 2000*

EJERCICIO 3. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz de 3 por 3 con valores propios 0, 1, 2. Encuentre lo siguiente (y justifique su respuesta):

(a) (0.5^{pts}) El rango de $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) El determinante de $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) El determinante de $\mathbf{A}+\mathbf{I}$.
(d) (0.5^{pts}) Los autovalores de $\left(\mathbf{A}+\mathbf{I}\right)^{-1}$.

MIT Course 18.06 Exam 2, April 12, 2000

EJERCICIO 4. (1^{pts}) Encuentre una matriz invertible $\mathbf{S}$ que haga que $\mathbf{S}^{-1}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{S}$ sea diagonal. *MIT Course 18.06 Quiz 3, Fall 1997*

2.4. Grupo E curso 21/22

EJERCICIO 1.

(a) (1^{pts}) Considere la matriz simétrica A. Si usted resta 3 veces la fila 1 de la fila 3 y después resta 3 veces la columna 1 de la columna 3, la matriz resultante ¿continua siendo simétrica? Justifique su respuesta!

(b) (1^{pts}) Considere la matriz simétrica A. Si usted resta 3 veces la fila 1 de la fila 3 y después suma 3 veces la columna 3 la columna 1 ¿tiene la matriz resultante los mismos autovalores? Justifique su respuesta!

(c) (0.5^{pts}) Escriba (si es posible) una matriz que no sea simétrica y con autovalores 1, 2 y 4.

(d) (0.5^{pts}) Escriba (si es posible) una matriz de rango 1 y con autovalores 1, 2 y 4.

(e) (1^{pts}) Escriba (si es posible) una matriz simétrica, no diagonal, definida positiva con autovalores 1, 2 y 4.

Basado en MIT Course 18.06 Final, December 21, 2000

EJERCICIO 2. Considere la siguiente *matriz proyección*: $\mathsf{P} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(a) (1^{pts}) Sobre qué subespacio proyecta la matriz P? (describa dicho subespacio con unas ecuaciones paramétricas).

(b) (1^{pts}) ¿Cuál es la distancia desde ese subespacio a $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1, & 2, & 1,\end{pmatrix}$.

(c) (1^{pts}) ¿Cuáles son los tres autovalores de P? (*pista: es mejor pensar que calcular*) ¿Es P diagonalizable?

EJERCICIO 3.

(a) (1^{pts}) Encuentre una diagonalización $\mathsf{A} = \mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^{-1}$ de $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) (1^{pts}) ¿Cuál es el límite de A^k cuando $k \to \infty$?

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 3, December 6, 2000

EJERCICIO 4. (1^{pts}) Supongamos que A es similar a una matriz B de orden 3 con autovalores 1, 1, 2. ¿Qué puede decir acerca de

1. los autovalores de A
2. si A es diagonalizable o no
3. si A es simétrica o no. ¿Es A definida positiva?

MIT Course 18.06 Quiz 3, December 6, 2000

2.5. Grupo D curso 20/21

EJERCICIO 1.

(a) (1^{pts}) Si usted transpone $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D}$ aprenderá que

- Los autovalores de $\mathbf{A}^{\intercal}$ son ______________________________
- Los autovectores de $\mathbf{A}^{\intercal}$ son ______________________________

(b) (1^{pts}) Complete la última fila de forma que $\mathbf{B}$ sea singular, con autovalores reales y autovectores ortogonales:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ x & y & z \end{bmatrix}.$$

(c) (1^{pts}) Considere la matriz $\mathbf{C}$ de orden 3. Sumando la primera columna a la segunda columna se obtiene $\mathbf{F} = \mathbf{C}_{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Esta operación probablemente cambie los autovalores. ¿Qué deberíamos hacer con las filas de $\mathbf{F}$ (vale contestar con palabras) para obtener una matriz con los mismos autovalores de $\mathbf{C}$?

MIT Course 18.06 Quiz 3, Spring 1997

EJERCICIO 2. El sistema de vectores $\left[\ (1,\ \ 1,\ \ 0,);\ \ (2,\ \ 0,\ \ 2,);\ \right]$ es una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre una base para $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

(b) (0.5^{pts}) Escriba la matriz proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

MIT Course 18.06 Exam II, Fall 1996

EJERCICIO 3. (1^{pts}) Sabiendo que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, encuentre $|\mathbf{A}|$. *MIT Course 18.06 Quiz 2, Fall 1997*

EJERCICIO 4. Considere el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix}; \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ c \end{pmatrix}.$$

(a) (1^{pts}) Indique para qué conjunto de valores de los parámetros a y c el sistema tiene solución.

(b) (1^{pts}) Resuelva $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ para $a = 5$ y $c = 10$ (valores fijos para a y c *solo* en este apartado).

(c) (1^{pts}) Clasifique la forma cuadrática $\boldsymbol{a}\mathbf{X}\boldsymbol{a}$.

EJERCICIO 5.

(a) (1^{pts}) Encuentre unas ecuaciones paramétricas para la recta L que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_p = (1,\ \ -3,\ \ 1,)$ y $\boldsymbol{x}_q = (-2,\ \ 2,\ \ -2,)$.

(b) (1^{pts}) Encuentre unas ecuaciones cartesianas para la misma recta.

(Lang, 1986, Example 1 in Section 1.5)

2.6. Grupo E curso 20/21

Ejercicio 1. Let $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) (2^{pts}) Encuentre la solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ más próxima a $\left(2, \quad -1, \quad 0, \quad 3,\right)$.
(b) (1^{pts}) Encuentre una base *ortonormal* para el espacio nulo de $\mathbf{A}$.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 2, Fall 1997

Ejercicio 2.

(a) (0.5^{pts}) El sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución si y solo si $\boldsymbol{b}$ es ortogonal ¿a qué subespacio?
(b) (0.5^{pts}) Encuentre el determinante de la matriz $\mathbf{A}$ de orden 4 cuyas componentes son ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j} = \text{mín}(i^2,\ j^2)$.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 2, Spring 1997

Ejercicio 3. Cada apartado es independiente y se refiere a la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ d & 1 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Indique un valor para d tal que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea un autovector de $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) Indique un valor para d tal que 2 es un autovalor de $\mathbf{A}$.
(c) (1^{pts}) Indique un valor para d tal que $\mathbf{A}$ no es diagonalizable.

Ejercicio 4. (1^{pts}) Escriba un vector $\boldsymbol{v}$ tal que $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}; \right]$ sea una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

MIT Course 18.06 Quiz 2, Fall 1997

Ejercicio 5. Sea el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{cuyo conjunto de soluciones es} \quad \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

(a) (0.5^{pts}) ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial generado por las filas de $\mathbf{A}$? Explique su respuesta.
(b) (1^{pts}) ¿Quién es $\mathbf{A}$ (escriba la matriz completa)? Explique su respuesta.
(c) (1^{pts}) ¿Para qué vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución?

Ejercicio 6. (0.5^{pts}) Sea $\mathbf{A}$ tal que su *inversa* es $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Clasifique la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$.

2.7. Grupo B curso 18/19

Ejercicio 1. En $\mathbb{R}^3$, considere los puntos $\boldsymbol{a} = (1, 0, 3,)$ y $\boldsymbol{b} = (-\frac{1}{3}, 0, -1,)$.

(a) (1^{pts}) Halle unas ecuaciones cartesianas (ó implícitas) de la recta que pasa por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Es dicha recta un subespacio de $\mathbb{R}^3$? Razone su respuesta.
(c) (1^{pts}) Halle el punto de la recta más cercano a $\boldsymbol{z} = (2, 2, 2,)$.
(d) ($0.5 + 0.5^{\text{pts}}$) Verifique que su solución es correcta $\big($es decir, que el punto pertenece a la recta y que es el más cercano a $(2, 2, 2,)\big)$; e indique la mínima distancia entre $(2, 2, 2,)$ y la recta.

Ejercicio 2. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de orden 3×3 con autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y respectivos autovectores

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) ¿Son $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ linealmente independientes? ¿Son $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ ortogonales?
(b) (1^{pts}) Halle un autovector $\boldsymbol{v}_3$, correspondiente al tercer autovalor λ_3, que haga la matriz $\mathbf{A}$ simétrica.
(c) (0.5^{pts}) Si la tr $(\mathbf{A})$ es 2. ¿Cuál es el valor de λ_3? ¿Es $\mathbf{A}$ definida positiva?
(d) (1^{pts}) Halle la matriz $\mathbf{A}$.

Ejercicio 3. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (Fíjese en las colummas. ¡muy poco cálculo es necesario!)

(a) (0.5^{pts}) Indique los rángos de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^\intercal$, y $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$,
(b) (1^{pts}) Escriba una base para cada uno de los siguientes subespacios: $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, y $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})$.
(c) (0.5^{pts}) Suponga que queremos encontrar la solución de mínimos cuadrados $\widehat{\boldsymbol{x}}$ que minimiza $\|\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x}\|$ para $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Para dicha solución, $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$ será la proyección de $\boldsymbol{b}$ sobre ______________________?
(d) (1^{pts}) Encuentre la proyección $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$. (Pista: su respuesta al apartado (b) le puede ayudar a simplificar los cálculos.)

MIT Course 18.06 Exam 2, Problem 2. Fall 2018

Ejercicio 4. (0.5^{pts}) Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*).

Sea $B = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$, una base de un subespacio vectorial $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^4$. Entonces el conjunto

$$B^* = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w},\ 2\boldsymbol{w}\}$$

también es una base de $\mathcal{S}$.

2.8. Grupo E curso 18/19

EJERCICIO 1.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre los autovalores de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} .9 & .1 \\ .4 & .6 \end{bmatrix}$ (nótese que las filas suman uno)

(b) (0.5^{pts}) Encuentre los autoespacios de $\mathbf{A}$.

(c) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el valor límite de $\mathbf{A}^k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ cuando la potencia k tiende a infinito?

Basado en MIT 18.06 - Quiz 3, December 5, 2005

EJERCICIO 2. $\mathbf{A}$ has a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ spanned by $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ and $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$ spanned by $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el orden de $\mathbf{A}$ y su rango?

(b) (1^{pts}) Si consideramos el vector $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$, ¿para qué valor(res) de α y β (si es que hay alguno) el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución? Y en caso de existir solución, ¿sería única?

(c) ($1 + 1^{\text{pts}}$) Give the orthogonal projections of $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ onto two of the four fundamental subspaces of matrix $\mathbf{A}$.

MIT Course 18.06 Exam 2, Problem 1. Fall 2018

EJERCICIO 3. Are the following matrices necessarily positive definite? Explain why or why not? ($\mathbf{D}$ is diagonal with $(1, \ 2, \ 3, \ 4)$ on the diagonal)

(a) (0.5^{pts}) $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^\intercal$ where $\mathbf{Q}$ is some 4×4 orthogonal matrix.
(b) (0.5^{pts}) $\mathbf{A} = \mathbf{Q_1DQ_1}^\intercal + \mathbf{Q_2DQ_2}^\intercal$ where $\mathbf{Q_1}$ and $\mathbf{Q_2}$ are some 4x4 orthogonal matrices.
(c) (0.5^{pts}) $\mathbf{A} = \mathbf{XDX}^\intercal$ for some matrix $\mathbf{X}$ (Hint: Be careful.)
(d) (0.5^{pts}) $\mathbf{P}$ the projection matrix onto the spam of $(1, 2, 3, 4)$.
(e) (1^{pts}) $\mathbf{A}$ is the n by n tridiagonal matrix with 2 for each diagonal entry, and 1 for each superdiagonal and subdiagonal entry.

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

MIT Course 18.06 Quiz 3, Problem 3. May 4, 2018

EJERCICIO 4. Sean el vector $\boldsymbol{x} = (3, 2, 4,)$ y una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ tales que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ y que el conjunto de soluciones a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ esté generado por $\boldsymbol{u} = (0, 1, 1,)$ y $\boldsymbol{v} = (1, 1, 0,)$.

(a) (1^{pts}) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?
(b) (1^{pts}) ¿Es $\mathbf{A}$ simétrica?

2.9. Grupo E curso 17/18

Ejercicio 1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Decida si $\mathbf{A}$ es singular o si es invertible.

(b) (1^{pts}) Encuentre una base ortonormal del espacio columna (si es que tal base existe) (*pista*: $153 = 9 \times 17$).

(c) (1^{pts}) ¿Por qué la expresión $\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}$ no nos da la matriz proyección sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$? De alguna manera debe ser posible encotrar dicha matriz proyección. ¿Cómo se puede encontrar?

(d) (0.5^{pts}) Encuentre esa matriz proyección.

Ejercicio 2. En $\mathbb{R}^3$, considere los puntos $\boldsymbol{a} = (1, 0, 3,)$ y $\boldsymbol{b} = (-\frac{1}{3}, 0, -1,)$.

(a) (1^{pts}) Halle unas ecuaciones cartesianas (ó implícitas) para la recta que pasa por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Ejercicio 3. Suppose that $\mathbf{A}$ is a positive definite matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) (1^{pts}) What are the possible values of b?

(b) (1^{pts}) How do you know that the matrix $\mathbf{A}^2 + \mathbf{I}$ is positive definite for every b?

(c) (1^{pts}) Complete this sentence correctly for a general matrix $\mathbf{M}$, possibly rectangular: *The matrix* $\mathbf{M}^{\intercal}\mathbf{M}$ *is symmetric positive definite unless*____.

Ejercicio 4. $\mathbf{Q}$ is a 4×3 matrix with orthonormal columns $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, and $\boldsymbol{q}_3$. Assume that $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$, and $\boldsymbol{b}$ are linearly independent vectors in $\mathbb{R}^4$.

(a) (1^{pts}) What is the *row* space of $\mathbf{Q}$?

(b) (1^{pts}) What combination $\boldsymbol{p}$ of $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, and $\boldsymbol{q}_3$ is closest to $\boldsymbol{b}$?

(c) (1^{pts}) What combination of $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$, and $\boldsymbol{b}$ is in the nullspace of $\mathbf{Q}^{\intercal}$?

2.10. Grupo F curso 17/18

EJERCICIO 1.

(a) (1^{pts}) Calcule el determinante de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

(b) (1^{pts}) Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz 3×2 de rango 2. Calcule $\det(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\intercal})$.

EJERCICIO 2. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -15 & 8 \\ -28 & 15 \end{bmatrix}$.

(a) (1^{pts}) Encuentre los autovalores y algún autovector para cada autovalor
(b) (1^{pts}) Encuentre una matriz invertible $\mathbf{S}$ y una matriz diagonal $\mathbf{D}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.
(c) (1^{pts}) Calcule $\mathbf{A}^{37}$.

EJERCICIO 3.

(a) (1^{pts}) Encuentre la proyección de $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sobre el plano generado por $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) (1^{pts}) Emplee el procedimiento de Gram-Schmidt sobre los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{b}$ para encontrar unos vectores ortonormales $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ y $\boldsymbol{q}_3$ (una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$)..

EJERCICIO 4. Suponga que $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ tiene autovalores $\lambda = 0,\ 1,\ 2$, con los respectivos autovectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

(a) (1^{pts}) Describa el espacio nulo, el espacio columna y el espacio fila de $\mathbf{A}$ en términos de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.
(b) (1^{pts}) Encuentre todas las soluciones a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$.
(c) (1^{pts}) Demuestre que $\mathbf{A}$ no es una matriz ortogonal. *Pista:* ¿$\det \mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{Q}$?

2.11. Grupo B curso 16/17

Ejercicio 1. (1^{pts}) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones para x y y z

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

(a) (0.5^{pts}) Escriba una base para el espacio columna y otra para el espacio nulo de $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 6 & 3\end{bmatrix}$$

(b) (1^{pts}) Escriba el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 6 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

(c) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}$ es una matriz de orden n y existe $\mathbf{A}^{-1}$, entonces ¿quienes son el espacio columna y el espacio nulo de $\mathbf{A}$? Escriba una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

Ejercicio 3.

(a) (1^{pts}) Encuentre los autovectores de la matriz $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & 2/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4 & 2/4\end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico es $-(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{4})^2$.

(b) (1^{pts}) Encuentre el límite de $\mathbf{A}^k$ cuando $k\to\infty$. (Puede trabajar con $\mathbf{A}=\mathbf{QDQ}^{-1}$)

(c) (1^{pts}) Escoja números positivos r, s, t de manera que

$$\begin{cases}\mathbf{A}-r\mathbf{I} & \text{es definida positiva}\\ \mathbf{A}-s\mathbf{I} & \text{no es ni definida positiva ni negativa}\\ \mathbf{A}-t\mathbf{I} & \text{es definida negativa}\end{cases}$$

Basado en MIT 18.06 - Quiz 3, May 4, 2005

Ejercicio 4. Considere el plano $x+y+z=0$ en $\mathbb{R}^3$.

(a) (1^{pts}) Encuentre las ecuaciones paramétricas de dicho plano.

(b) (1^{pts}) Encuentre la proyección $\boldsymbol{p}$ del vector $\boldsymbol{b}=(1,2,6,)$ sobre el plano $x+y+z=0$ de $\mathbb{R}^3$. (Para ello puede buscar una base para este subespacio bidimensional.)

Basado en MIT 18.06 - Quiz 2, April 1, 2005

Ejercicio 5.

(a) (0.5^{pts}) ¿Cuáles son los posibles valores para el determinante de una matriz proyección? (Justifique su respuesta.)

(b) (0.5^{pts}) ¿Cuáles son los posibles valores para el determinante de una matriz permutación? (Justifique su respuesta.)

MIT 18.06 - Quiz 2, November 4, 2011

Ejercicio 6.

(a) (1^{pts}) En $\mathbb{R}^m$, suponga que tiene los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{p}$ y n vectores linealemnte independientes $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$. Si le digo que $\boldsymbol{p}$ es la proyección de $\boldsymbol{b}$ sobre $\mathcal{L}([\boldsymbol{a}_1;\ldots\boldsymbol{a}_n;])$ (es decir, sobre el espacio genereado por los vectores $\boldsymbol{a}$'s), ¿que debería verificar para comprobar que es cierto?

MIT 18.06 - Final Exam, Monday May 16th, 2005

2.12. Grupo E curso 16/17

EJERCICIO 1. Considere la matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 4:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Describa el espacio columna de $\mathbf{A}$

(b) (1^{pts}) ¿Para qué valores $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución? Indique las condiciones que deben satisfacer b_1, b_2, b_3.

(c) (0.5^{pts}) No existe ninguna matriz $\mathbf{C}$ de orden 4 por 3 tal que $\mathbf{AC} = \underset{3\times 3}{\mathbf{I}}$. Indique el motivo de ello (¿es porque $\mathbf{A}$ es una matriz rectangular?)

(d) (1^{pts}) Encuentre la solución completa para el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

MIT 18.06 - Quiz 1, October 5, 2005

EJERCICIO 2.

(a) (1^{pts}) Complete la matriz $\mathbf{A}$ (rellene los dos huecos vacíos) de manera que $\mathbf{A}$ tenga como auntovectores $\boldsymbol{x}_1 = (3, 1,)$ y $\boldsymbol{x}_2 = (2, 1,)$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ & \end{bmatrix}$$

(b) (1^{pts}) Encuentre otra matriz distinta $\mathbf{B}$ con los mismos autovectores $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$, y con auntovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$. ¿Qué es $\mathbf{B}^{10}$?

MIT 18.06 - Final Exam, Monday May 16th, 2005

EJERCICIO 3. (1^{pts}) Suponga que $\mathbf{P}_1$ es la matriz proyección sobre el subespacio unidimensional generado por la primera columna de $\mathbf{A}$. Y suponga que $\mathbf{P}_2$ es la matriz proyección sobre el subespacio bidimensional generado por las columnas de $\mathbf{A}$, i.e. sobre $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$. Tras pensar un rato sobre ello, calcule el producto $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

MIT 18.06 - Quiz 2, April 1, 2005

EJERCICIO 4. (1^{pts}) ¿Para qué valores de b tiene la siguiente matriz tres autovalores positivos?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & b & 3 \\ b & 2 & b \\ 3 & b & 4 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 5.

(a) (1^{pts}) Estoy buscando una matriz $\mathbf{A}$ de orden m por n y vectores $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ tales que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución pero $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ tiene exactamente una y sólo una. ¿Por qué no puedo encontrar tales $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$?

MIT 18.06 - Final Exam, Monday May 16th, 2005

EJERCICIO 6. (1^{pts}) La matriz $\mathbf{A}$ tiene columnas independientes. La matriz $\mathbf{C}$ es cuadrada, diagonal y sus elementos en la diagonal son positivos. ¿Por qué la matriz $\mathbf{K} = \mathbf{A}^\intercal\mathbf{C}\mathbf{A}$ es positiva definida?

MIT 18.06 - Quiz 3, December 1, 2010

EJERCICIO 7.

(a) (0.5^{pts}) Calcule el determinante (como función de x) de la matriz de orden 4×4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & 0 & 0 \\ x & 0 & x & x \\ x & 0 & x & 1 \end{bmatrix}$$

(b) (0.5^{pts}) Encuentre todos los valores de x para los que $\mathbf{A}$ es singular.

MIT 18.06 - Quiz 3, December 1, 2010

2.13. Grupo E curso 15/16

EJERCICIO 1.

(a) (0.5^{pts}) Find a 3 by 3 matrix $\mathbf{A}$ whose column space is the plane $x+y+z=0$ in $\mathbb{R}^3$. (This means: $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ consists of all column vectors (x,y,z) with $x+y+z=0$.)

(b) (0.5^{pts}) How do you know that a 3 by 3 matrix $\mathbf{A}$ with that column space is not invertible?

EJERCICIO 2. (1^{pts}) Let L be the intersection of the two planes

$$x+2y+3z=10 \quad \text{and} \quad 4x+5y+6z=28.$$

Find a parametric equation for L.

EJERCICIO 3.

(a) (1^{pts}) Suppose $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$ are vectors in $\mathbb{R}^n$ such that $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ are orthogonal (i.e., perpendicular) to each other. Show that $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|$.

(b) (1^{pts}) Suppose $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, and $\boldsymbol{w}$ are unit vectors in $\mathbb{R}^n$. (Recall that a unit vector is a vector whose length is 1.) Suppose each vector is orthogonal (i.e., perpendicular) to each of the other two. Show that the two vectors

$$(\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}) \quad \text{and} \quad (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$$

are orthogonal to each other.

EJERCICIO 4. Let $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) (1^{pts}) Find the eigenvalues of $\mathbf{A}$.

(b) (1^{pts}) $\lambda = 3$ is an eigenvalue of $\mathbf{B}$. (You do not need to check this.) Find all eigenvectors of $\mathbf{B}$ with eigenvalue 3.

EJERCICIO 5. Suppose we measure $y = (0,0,0,1,0,0,0,)$ at times $x = (-3,-2,-1,0,1,2,3,)$.

(a) (0.5^{pts}) To fit these 7 measurements by a straight line $c+dx$, what system $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, with 7 equations, would we want to solve? (note that $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ could be an unsolvable system)

(b) (1^{pts}) Find the least squares solution $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \widehat{c} \\ \widehat{d} \end{pmatrix}$.

(c) (1^{pts}) The projection of that vector $\boldsymbol{y}$ in $\mathbb{R}^7$ onto the column space of $\mathbf{A}$ is what vector $\boldsymbol{p}$?

MIT Course 18.06. Exam II. Professor Strang. April 10, 2015

EJERCICIO 6. (1^{pts}) Suppose $\mathbf{A}$ is an $n \times n$ matrix and that $\boldsymbol{v}$ is an eigenvector of $\mathbf{A}$ with eigenvalue λ. Show that $\boldsymbol{v}$ is an eigenvector of $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}$ with eigenvalue $\lambda^2 + \lambda$.

EJERCICIO 7. (0.5^{pts}) Calcule el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

2.14. Grupo H curso 15/16

EJERCICIO 1. Considere los puntos $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1,)$, $\boldsymbol{b} = (1, 3, 1,)$ y $\boldsymbol{c} = (1, 1, 4,)$ de $\mathbb{R}^3$.
(a) (1^{pts}) Encuentre una ecuación paramétrica del plano que pasa por los puntos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, y $\boldsymbol{c}$.
(b) (1^{pts}) Encuentre una ecuación implícita (o cartesiana) del plano que pasa por los puntos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, y $\boldsymbol{c}$.

EJERCICIO 2.
(a) (1^{pts}) Suponga que $\boldsymbol{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^4$. Sea $\mathcal{V}$ el conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ ortogonales (perpendiculares) a $\boldsymbol{u}$. Es decir,
$$\mathcal{V} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 | \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = 0\right\}.$$
Demuestre que $\mathcal{V}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.
(b) (1^{pts}) Suponga que el vector $\boldsymbol{u}$ del apartado (a) es
$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}.$$
Encuentre una base de $\mathcal{V}$.
(c) (0.5^{pts}) ¿Cuál es la dimensión del subespacio $\mathcal{V}$ del apartado (b)?

EJERCICIO 3.
(a) (0.5^{pts}) Encuentre los autovalores de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\0 & 7 & 8\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.
(b) (1^{pts}) Sea $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\1 & 1 & -1\\2 & -4 & 1\end{bmatrix}$; donde $\lambda = 3$ es una autovalor de $\mathbf{B}$ (no necesita verificar esto).
Encuentre una base del autoespacio $\quad \mathcal{E}_3 = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \mathbf{B}\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}\right\}$.

EJERCICIO 4.
(a) (1^{pts}) ¿Cuál es la matriz proyección, $\mathbf{P}_a$, 3 por 3 sobre la recta generada por el vector $\boldsymbol{a} = (2, 1, 2,)$?
(b) (1^{pts}) Suponga que $\mathbf{P}_v$ es la matriz proyección 3 por 3 sobre la recta generada por el vector $\boldsymbol{v} = (1, 1, 1,)$.
Encuentre una base para el espacio columna de la matriz $\mathbf{A} = \mathbf{P}_a\mathbf{P}_v$ (Producto de dos proyecciones).
MIT Course 18.06. Final Exam. Professor Strang. May 18, 2015

EJERCICIO 5. (1^{pts}) La ecuación $(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución para algunos vectores $\boldsymbol{b}$. Dé tanta información como pueda sobre los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ (la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable).
MIT Course 18.06 Quiz 3. Spring, 2009

EJERCICIO 6. (1^{pts}) Clasifique la forma cuadrática (ie., definida positiva, negativa, semidefinida, no definida, etc.)
$$q(x, y, z) = x^2 + 6xy + y^2 + az^2;$$
en función del parámetro a.

2.15. Grupo A curso 14/15

Ejercicio 1.

Esta matriz Hadmard 4 por 4 es una matriz *ortonormal*. Sus columnas son vectores ortogonales y unitarios.

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{q}_1; \quad \boldsymbol{q}_2; \quad \boldsymbol{q}_3; \quad \boldsymbol{q}_4;\right]$$

(a) (0.5^{pts}) ¿Qué matriz proyección $\mathbf{P}_4$ (hay que escribir los números) proyecta a cualquier vector $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre la recta generada por $\boldsymbol{q}_4$?

(b) (0.5^{pts}) ¿Qué matriz proyección $\mathbf{P}_{123}$ proyecta a cualquier $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio generado por $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ y $\boldsymbol{q}_3$? Recuerde que dichas columnas son ortogonales.

(c) (0.5^{pts}) Suponga que la matriz $\mathbf{A}$ es de orden 4 por 3 y sus columnas son $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ y $\boldsymbol{q}_3$. Encuentre la solución "de mínimos cuadrados" $\boldsymbol{\beta}$ de las cuatro ecuaciones

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(d) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el vector de error $\boldsymbol{e}$?

MIT Course 18.06 Quiz 2, 2013

Ejercicio 2.

(a) (1^{pts}) Suponga tres matrices que satisfacen $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$: Si las columnas de $\mathbf{B}$ son dependientes, demuestre que las columnas de $\mathbf{C}$ también son dependientes.

(b) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}$ es 5 por 3 y $\mathbf{B}$ es 3 por 5, demuestre usando el apartado (a) o de cualquier otra manera que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ es imposible.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 9, 2012

Ejercicio 3. (1^{pts}) Encuentre el determinante de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. *MIT Course 18.06 Quiz 2, 2013*

Ejercicio 4. Sea $\mathbf{A}$ una matriz real y simétrica de orden 3 por 3. Dos de sus autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ con autovectores $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 1,)$ y $\boldsymbol{v}_2 = (1, -1, 0,)$, respectivamente. El tercer autovalor es $\lambda_3 = 0$.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre un autovector $\boldsymbol{v}_3$ para el tercer autovalor λ_3. (*Pista*: ¿qué se debe cumplir entre los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, y $\boldsymbol{v}_3$?)

(b) (0.5^{pts}) Escriba una matriz cuadrada ortonomal cuyas columnas sean los autovectores de $\mathbf{A}$.

(c) (0.5^{pts}) Escriba los autovalores y tres autovectores linealmente independientes para la matriz $\mathbf{A}^4$.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 3. Spring, 2009

Ejercicio 5. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) (0.5^{pts}) La matriz $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ es semejante (mismos autovalores) a la matriz $\left[\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) (0.5^{pts}) Existe una matriz cuyo espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ está generado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, y cuyo espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ está generado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6. (1^{pts}) Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Demuestre que $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un autovector de $\mathbf{A}$.

Ejercicio 7. (1^{pts}) ¿Para qué valores de a los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ a \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes? Justifique su respuesta.

Ejercicio 8. (1^{pts}) ¿Para qué valores de b tiene la matriz $\mathbf{C}$ tres autovalores positivos?

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & b & 3 \\ b & 2 & b \\ 3 & b & 4 \end{bmatrix}$$

2.16. Grupo C curso 14/15

Ejercicio 1.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 2\alpha \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = 3\alpha \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 2\beta \end{cases}$$

(a) (1^{pts}) ¿Qué condiciones sobre α y β hacen el sistema compatible (resoluble)?
(b) (1^{pts}) Resuelva el sistema bajo dichas condiciones

Ejercicio 2. (1^{pts}) Considere que la matriz $\mathbf{A}$ de orden m por n tiene rango r; y que la matriz $\mathbf{B}$ de orden M por N tiene rango R: Suponga que el espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ está contenido en (quizá igual a) el espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$: (Esto significa que cada vector en $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ también está en $\mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$). ¿Qué relaciones se mantienen entre m y M; n y N; y r y R? Quizá le ayude escribir un ejemplo para $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ donde todas las columnas sean distintas. *MIT Course 18.06 Quiz 1, March 9, 2012*

Ejercicio 3.

(a) (0.5^{pts}) Escriba una matriz $\mathbf{A}$ de orden 3×3 tal que el sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tenga solución no trivial ($\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$)
(b) (0.5^{pts}) Si el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$ es $p(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 - 24\lambda^3 + 28\lambda^2 - 3\lambda + 10$. ¿Cual es el rango de $\mathbf{A}$?
(c) (1^{pts}) Suponga que dos de los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ de orden 5×5 son -1 y 3, correspondientes a los autovectores $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}2, & -1, & 4, & 0, & 3,\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}3, & 1, & -2, & 1, & 2,\end{pmatrix}$, respectivamente. Calcule $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ para $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}12 & -1, & 8, & 2, & 13,\end{pmatrix}$. **Pista:** Primero escriba $\boldsymbol{x}$ como combinación de $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$. Tenga en cuenta que

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 12 & -16 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. Considere la matriz real 4 por 4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Calcule $|\mathbf{A}|$ de la manera más sencilla que se le ocurra.
(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de x, y, z es singular la matriz $\mathbf{A}$?

MIT Course 18.06 Quiz 2, November 7, 2012

Ejercicio 5. (1^{pts}) Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Clasifica la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ en función del parámetro a.

Ejercicio 6. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Encuentre los valores característicos de dicha matriz
(b) (1^{pts}) Encuentre los vectores característicos de $\mathbf{A}$

Ejercicio 7. (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}^3 = 2\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}$, ¿Cuáles son los posibles valores para los autovalores de $\mathbf{A}$? *MIT Course 18.06 Spring 2006 - Review Problems*

Ejercicio 8.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre dos autovalores y dos autovectores linealmente independientes para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(b) (0.5^{pts}) Exprese el vector $\boldsymbol{u}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ como combinación de los autovectores del apartado anterior.

MIT Course 18.06 Quiz 3. May 6, 2011

2.17. Grupo E curso 14/15

Ejercicio 1. Buscamos la recta $\boldsymbol{y} = c + d\boldsymbol{x}$ más próxima a los tres puntos $(x, y,) = (0, 1,)$ y $(1, 2,)$ y $(2, -1,)$.

(a) (0.5^{pts}) Si la recta pasara por los tres puntos (que no pasa), ¿qué tres ecuaciones tendríamos que resolver para conocer c y d?

(b) (1^{pts}) Encuentre los “mejores” c y d mediante el método de mínimos cuadrados.

(c) (0.5^{pts}) Explique el resultado que ha obtenido para c y d: ¿Qué relación hay entre el vector $\boldsymbol{y} = (1,\ 2,\ -1,)$ y el plano sobre el que se proyecta?

(d) (0.5^{pts}) ¿Cuál es la longitud del vector de error $\boldsymbol{e}$ (= distancia al plano = $\|\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\|$)?

MIT Course 18.06 Quiz 2, 1995

Ejercicio 2. Considere la matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 con autovalores λ_1, λ_2, λ_3, y autovectores *linealmente independientes* $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$.

(a) (0.5^{pts}) ¿Qué valores toman la traza y el determinante de $\mathbf{A}$?

(b) (0.5^{pts}) Suponga $\lambda_2 = \lambda_3$. Decida cuál de las tres siguienes afirmaciones es correcta, e indique el motivo:

1. $\mathbf{A}$ se puede diagonalizar (¿Por qué?)
2. $\mathbf{A}$ no se puede diagonalizar (¿Por qué?)
3. Es necesaria más información para decidir (¿Por qué?)

(c) (0.5^{pts}) Usando los autovalores y autovectores, ¿cómo puede encontrar la matrix $\mathbf{A}$? Escriba una fórmula para hacerlo, y explique cada parte detalladamente.

(d) (1^{pts}) Suponga que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 5$ y $\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 1,)$ y $\boldsymbol{x}_2 = (1, -2, 1,)$. Elija λ_3 y $\boldsymbol{x}_3$ tales que $\mathbf{A}$ es *simétrica* y *semidefinida* positiva, pero no definida positiva.

Ejercicio 3.

(a) (0.5^{pts}) ¿Por qué no existe una matriz ortonormal $\mathbf{Q}$ tal que $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}?$$

(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de a y b es la forma cuadrática $ax^2 + 2xy + by^2 = \begin{pmatrix} x, & y, \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ definida positiva?

MIT Course 18.06 Final Exam, December 13, 1993

Ejercicio 4. ¿Cuáles son todos los posibles valores para el determinante de una matriz real 3 por 3 en los siguientes casos.

(a) (0.5^{pts}) Una matriz con columnas linealmente independientes.

(b) (0.5^{pts}) Una matriz tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

(c) (0.5^{pts}) Una matrix con pivotes 1, 2 y 3.

MIT Course 18.06 Final Exam, December 13, 1993

Ejercicio 5.

(a) (0.5^{pts}) Proporcione un ejemplo de matriz con exactamente dos autovalores iguales a cero, y que no sea la matriz cero $\mathbf{0}$.

(b) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el rango de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$?

MIT Course 18.06 Final Exam, December 13, 1993

Ejercicio 6. La matriz $\mathbf{A}$ tiene una variante $1 - x$ en la posición (1,2):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1-x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Para $x = 1$ calcule $\det \mathbf{A}$. Use dicho resultado para calcular el elemento (1,1) de la matrix inversa de $\mathbf{A}$ cuando $x = 1$.
(b) (0.5^{pts}) Calcule $\det \mathbf{A}$ cuando $x = 0$.
(c) (0.5^{pts}) Compruebe usando las propiedades de los determinantes que $\det \mathbf{A}$ es una función lineal de x. Calcule el valor de $\det \mathbf{A}$ para cualquier valor de x. ¿Para qué valor de x la matriz es singular?

MIT Course 18.06 Quiz 2, November 2, 2005

2.18. Grupo H curso 14/15

Ejercicio 1.

(a) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{P}$ proyecta todo vector $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^5$ en el punto más próximo del subespacio generado por $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1, 0, 4,)$ y $\boldsymbol{a}_2 = (2, 0, 0, 0, 4,)$, ¡Cuál es el rango de $\mathbf{P}$ y por qué?

(b) (0.5^{pts}) Si estos dos vectores fueran las columnas de una matriz $\mathbf{A}$ de orden 5 por 2 , ¿Cúal de los cuatro sub-espacios fundamentales de $\mathbf{A}$ es también el espacio nulo de $\mathbf{P}$?

(c) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{P}$ es cualquier matriz proyección (simétrica), demuestre que $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\mathbf{P}$ es una matriz ortogonal.

MIT Course 18.06 Quiz 2, 2013

Ejercicio 2. (1^{pts}) Encuentre un vector $\boldsymbol{v}$ en $\mathbb{R}^4$ que sea ortogonal a cualquier solución $\boldsymbol{x}$ del sistema homogeneo

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ \quad +x_2 \quad + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 \quad + x_3 &= 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3.

(a) (1^{pts}) Aplique la eliminación por columnas para reducir la matriz $\mathbf{A}$ hasta llegar a $\mathbf{I}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) (1^{pts}) Escriba entonces $\mathbf{A}^{-1}$ como un producto de tres (o más) matrices que provengan del proceso de eliminación. Multiplique dichas matrices para encontrar $\mathbf{A}^{-1}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 9, 2012

Ejercicio 4. (0.5^{pts}) Suponga que la matriz $\mathbf{A}$ de orden 5 por 3 tiene columnas ortonormales (perpendiculares entre si y de norma uno). Calcule el siguiente determinante: $\det \mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$

Ejercicio 5.

(a) (1^{pts}) Suponga que la matriz $\mathbf{A}$ se puede factorizar en $\mathbf{A} = \mathbf{PL\dot{U}}$, donde $\mathbf{P}$ es una matriz permutación, la matriz triangular superior unitaria $\mathbf{\dot{U}}$ tiene su diagonal principal llena de unos y donde los pivotes $d_1, \ldots, d_n$ se encuentran en la diagonal de $\mathbf{L}$ (triangular inferior). ¿Cuál es el determinate de $\mathbf{A}$? EXPLIQUE QUÉ REGLAS O PROPIEDADES HA USADO.

Based on MIT Course 18.06 Quiz 2, April 11, 2012

Ejercicio 6.

(a) (0.5^{pts}) Escriba un ejemplo de matriz (con todos sus autovalores reales) que no sea diagonalizable.

(b) (0.5^{pts}) Encuentre un vector unitario (norma uno) en la misma dirección de $\boldsymbol{v} = (2, -1, 0, 4, -2,)$.

Ejercicio 7. (0.5^{pts}) Suponga que $\mathbf{A}$ tiene autovalores 1, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$, y que sus autovectores son las columnas de $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cuáles son los autovalores y los autovectores de $\mathbf{A}^{-1}$? *MIT Course 18.06 Quiz 3, 2013*

Ejercicio 8.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Encuentre los autovalores de $\mathbf{A}$.

(b) (1^{pts}) Encuentre una matriz no singular $\mathbf{S}$ y una matriz diagonal $\mathbf{D}$ tales que $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{D}$ (es decir, que, $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$).

(c) (1^{pts}) Encuentre $\mathbf{A}^5$. (Si tiene que calcular la quinta potencia de un número a, puede dejarlo indicado como a^5.)

2.19. Grupo E curso 13/14

Ejercicio 1. An odd permutation matrix produces an odd number of "two-element swaps"; an even permutation matrix produces an even number of "two-element swaps".

(a) (0.5^{pts}) When an odd permutation matrix $\mathbf{P}_1$ multiplies an even permutation matrix $\mathbf{P}_2$, the product $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ is ________________ (EXPLAIN WHY).

(b) (0.5^{pts}) If the columns of $\mathbf{B}$ are vectors in the nullspace of $\mathbf{A}$, then $\mathbf{AB}$ is ________________ (EXPLAIN WHY)

(c) (1^{pts}) If $c = 0$, factor this matrix into $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ (lower triangular times upper triangular):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & c \end{bmatrix}.$$

(d) (0.5^{pts}) That matrix $\mathbf{A}$ is invertible unless $c =$ _______.

MIT Course 18.06 Quiz 1, 2011

Ejercicio 2. (1^{pts}) Is $\lambda = 3$ an eigenvalue of $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$? If yes, find one corresponding eigenvector.

Ejercicio 3.

(a) (0.5^{pts}) For a really large number N, will this matrix be positive definite? Show why or why not.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & N & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) (1^{pts})

Suppose:

$\mathbf{A}$ is positive definite symmetric

$\mathbf{Q}$ is orthogonal (same order as $\mathbf{A}$)

$\mathbf{B}$ is $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{AQ} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$

Show that:

1. $\mathbf{B}$ is also symmetric.
2. $\mathbf{B}$ is also positive definite.

MIT Course 18.06 Quiz 3, 2013

Ejercicio 4. Consider the following *unsolvable* linear system $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Find the projection matrix that projects any vector onto $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

(b) (0.5^{pts}) Find the best solution to the *unsolvable* linear system $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(c) (0.5^{pts}) Find the error vector.

Ejercicio 5. Let $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

(a) (0.5^{pts}) Find a basis of the column space $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

(b) (0.5^{pts}) Find a basis of the null space $\mathcal{N}(\mathbf{A})$

Ejercicio 6. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

(a) (0.5^{pts}) If $\boldsymbol{v}$ is an eigenvector of $\mathbf{A}$, then $\boldsymbol{v}$ must be an eigenvector of $\mathbf{A}^2$ as well.

(b) (0.5^{pts}) If $\boldsymbol{v}$ is an eigenvector of $\mathbf{A}^2$, then $\boldsymbol{v}$ must be an eigenvector of $\mathbf{A}$ as well.

(c) (0.5^{pts}) If $\mathbf{A}$ is an invertible 3×3 matrix and $\boldsymbol{x}$ is a non-zero vector in $\mathbb{R}^3$, then the vectors $\boldsymbol{x}$, $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$, and $\mathbf{A}^2\boldsymbol{x}$ must form a basis of $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIO 7.

(a) (0.5^{pts}) Is there a 2×2 matrix $\mathbf{A}$ with eigenvalues 4 and 6, such that all the four entries of $\mathbf{A}$ are positive (> 0)? Give an example of such a matrix $\mathbf{A}$, or explain why non exist.

(b) (0.5^{pts}) Is there a 2×2 matrix $\mathbf{B}$ that fails to be diagonalizable, such that all the four entries of $\mathbf{B}$ are positive (> 0)? Give an example of such a matrix $\mathbf{B}$, or explain why none exists.

2.20. Grupo G curso 13/14

EJERCICIO 1. Considere la matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 con autovalores λ_1, λ_2, λ_3, y autovectores *linealmente independientes* $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$.

(a) (0.5^{pts}) ¿Qué valores toman la traza y el determinante de $\mathbf{A}$?

(b) (0.5^{pts}) Suponga $\lambda_2 = \lambda_3$. Decida cuál de las tres siguienes afirmaciones es correcta, e indique el motivo:

1. $\mathbf{A}$ se puede diagonalizar (¿Por qué?)
2. $\mathbf{A}$ no se puede diagonalizar (¿Por qué?)
3. Es necesaria más información para decidir (¿Por qué?)

(c) (0.5^{pts}) Usando los autovalores y autovectores, ¿cómo puede encontrar la matrix $\mathbf{A}$? Escriba una fórmula para hacerlo, y explique cada parte detalladamente.

(d) (1^{pts}) Suponga que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 5$ y $\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 1,)$ y $\boldsymbol{x}_2 = (1, -2, 1,)$. Elija λ_3 y $\boldsymbol{x}_3$ tales que $\mathbf{A}$ es *simétrica* y *semidefinida* positiva, pero no definida positiva.

EJERCICIO 2.

(a) (0.5^{pts}) Si una matriz $\mathbf{Q}$ de orden m por n tiene columnas ortonormales, ¿es necesariamente invertible? Justifique su respuesta o proporcione un contraejemplo.

(b) (0.5^{pts}) ¿Qué vectores contiene el espacio nulo de una matriz $\mathbf{Q}$ con columnas ortogonales? (proporcione una explicación que no se limite a decir que son los vectores que solucionan el sistema homogeneo $\mathbf{Q}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$).

(c) (0.5^{pts}) ¿Cuál es la matriz proyección sobre el espacio columna de $\mathbf{Q}$? Evite las inversas cuando sea posible.

MIT Course 18.06 Quiz 2, 1995

EJERCICIO 3. Buscamos la recta $\boldsymbol{y} = c + d\boldsymbol{x}$ más próxima a los tres puntos $(x, y,) = (0, 1,)$ y $(1, 2,)$ y $(2, -1,)$.

(a) (0.5^{pts}) Si la recta pasara por los tres puntos (que no pasa), ¿qué tres ecuaciones tendríamos que resolver para conocer c y d?

(b) (1^{pts}) Encuentre los "mejores" c y d mediante el método de mínimos cuadrados.

(c) (0.5^{pts}) Explique el resultado que ha obtenido para c y d: ¿Qué relación hay entre el vector $\boldsymbol{y} = (1,\ 2,\ -1,)$ y el plano sobre el que se proyecta?

(d) (0.5^{pts}) ¿Cuál es la longitud del vector de error $\boldsymbol{e}$ (= distancia al plano = $\|\boldsymbol{y} - \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\|$)?

MIT Course 18.06 Quiz 2, 1995

EJERCICIO 4. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

(a) (0.5^{pts}) Si todos los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ de orden n son iguales a 1, entonces $\mathbf{A}$ necesariamente tiene que ser la matriz identidad $\mathbf{I}$.

(b) (0.5^{pts}) Si todos los autovalores de la matriz *diagonalizable* $\mathbf{A}$ de orden n son iguales a 1, entonces $\mathbf{A}$ necesariamente tiene que ser la matriz identidad $\mathbf{I}$.

(c) (0.5^{pts}) Si el rango de una matriz $\mathbf{A}$ de orden 9×10 es 5, entonces la dimensión de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es 4.

(d) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}$ es similar a $\mathbf{B}$ (mismos autovalores y misma multiplicidad geométrica de los autovectores), y $\mathbf{A}$ es invertible, entonces $\mathbf{B}$ también tiene que ser invertible.

EJERCICIO 5. (0.5^{pts}) Calcule el determinante de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 5 & 10 & 6 \end{bmatrix}$.

EJERCICIO 6. Sea $\mathcal{V}$ el subespacio de todas las matrices $\mathbf{A}$ de orden 2 tales que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ está en $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre una base de $\mathcal{V}$ y determine de ese modo $\dim \mathcal{V}$.

(b) (0.5^{pts}) Encuentre la dimensión del subespacio $\mathcal{W}$ de todas las matrices $\mathbf{A}$ de orden 2 tales que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un autovector de $\mathbf{A}$ (Pista, use la parte (a) y sepa que puede deducir la respuesta sin realizar muchos cálculos, tan sólo comparando la dimensiones de otros subespacios que si conoce).

2.21. Grupo E curso 12/13

EJERCICIO 1. El problema consiste en encontrar el determinante de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Encuentre $\det \mathbf{A}$ y justifique su respuesta.
(b) (0.5^{pts}) Encuentre $\det \mathbf{B}$ mediante eliminación gaussiana.
(c) (0.5^{pts}) Encuentre $\det \mathbf{C}$ en función de x. Para ello puede usar la Propiedad multilineal de las funciones determinante.

MIT Course 18.06 Quiz 2, 1995

EJERCICIO 2.
(a) (0.5^{pts}) ¿Por qué no existe una matriz ortonormal $\mathbf{Q}$ tal que $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \mathbf{D}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}?$$

(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de a y b es la forma cuadrática $ax^2 + 2xy + by^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ definida positiva?

MIT Course 18.06 Final Exam, December 13, 1993

EJERCICIO 3. Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores del espacio Euclideo $\mathbb{R}^n$, y sea $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ la matriz cuadrada $[\boldsymbol{u}][\boldsymbol{v}]^{\intercal}$.
(a) (0.5^{pts}) Describa el espacio fila y el espacio nulo de $\mathbf{A}$ en términos de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.
(b) (0.5^{pts}) Demuestre que $\boldsymbol{u}$ es un autovector de $\mathbf{A}$, y encuentre el correspondiente autovalor.
(c) (0.5^{pts}) ¿Qué condición deben satisfacer $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ para que $\mathbf{A}$ sea anti-simétrica ($\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\intercal}$)?
(d) (0.5^{pts}) ¿Qué condición deben satisfacer $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ para que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$?

MIT Course 18.06 Final Exam, December 13, 1993

EJERCICIO 4. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada con autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = c$ (real) y $\lambda_3 = 2$, y autovectores

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

respectivamente. En cada una de las siguientes cuestiones debe dar una justificación a su respuesta para poder puntuar.
(a) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de c (si existe alguno) es $\mathbf{A}$ una matriz diagonalizable? ¿Por qué?
(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de c (si existe alguno) es $\mathbf{A}$ una matriz simétrica? ¿Por qué?
(c) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de c (si existe alguno) es $\mathbf{A}$ una matriz definida positiva? ¿Por qué?

basado en MIT Course 18.06 Quiz 3, November 22, 1993

EJERCICIO 5. (1.5^{pts}) Diagonalize la matriz $\begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. *MIT Course 18.06 Final Exam, December 13, 1993*

EJERCICIO 6. El espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está generado por $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(a) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$? ¿Cuál es el determinante de $\mathbf{A}$?
(b) (1^{pts}) Encuentre una o varias ecuaciones lineales para a, b y c cuyas soluciones son valores para los que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$ es un sistema resoluble.

(c) (0.5^{pts}) El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donde a, b y c satisfacen la ecuación (o ecuaciones) de la parte (b), es (marque con un círculo la respuesta correcta):

el conjunto vacío, un punto, una recta, un plano, todo $\mathbb{R}^3$.

Explique su respuesta.

(d) (0.5^{pts}) El conjunto de soluciones de la ecuación $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es (marque con un círculo la respuesta correcta)

el conjunto vacío, un punto, una recta, un plano, un hiperplano tridimensional, todo $\mathbb{R}^4$.

Explique su respuesta.

MIT Course 18.06 Final Exam, December 13, 1993

Por favor conteste a las dos última preguntas en esta página

2.22. Grupo H curso 12/13

Ejercicio 1. ¿Cuáles son todos los posibles valores para el determinante de una matriz real 3 por 3 en los siguientes casos.

(a) (0.5^{pts}) Una matriz con columnas linealmente independientes.
(b) (0.5^{pts}) Una matriz tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) Una matrix con pivotes 1, 2 y 3.

MIT Course 18.06 Final Exam, December 13, 1993

Ejercicio 2. (1.5^{pts}) Diagonalize la matriz $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}$. *Basado en MIT Course 18.06 Final Exam, December 13, 1993*

Ejercicio 3.

(a) (0.5^{pts}) Proporcione un ejemplo de matriz con exactamente dos autovalores iguales a cero, y que no sea la matriz cero $\mathbf{0}$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el rango de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$?

MIT Course 18.06 Final Exam, December 13, 1993

Ejercicio 4. Suponga que $\mathbf{A}$ tiene autovalores $\lambda = 0, 1, 2$, y respectivos autovectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.

(a) (0.5^{pts}) Describa el espacio nulo de $\mathbf{A}$ en términos de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.
(b) (0.5^{pts}) Describa el espacio columna de $\mathbf{A}$ en términos de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.
(c) (0.5^{pts}) Describa el espacio fila de $\mathbf{A}$ en términos de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.
(d) (0.5^{pts}) Encuentre todas las soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$.

basado en MIT Course 18.06 Quiz 3, November 22, 1993

Ejercicio 5. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz definida positiva:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) ¿Cuáles son los posibles valores de b?
(b) (0.5^{pts}) Demuestre que la matriz $\mathbf{A}^2 + \mathbf{I}$ es definida positiva para todo b.
(c) (0.5^{pts}) Complete esta frase correctamente para una matriz general $\mathbf{M}$ (posiblemente rectangular):

La matriz $\mathbf{M}^\intercal\mathbf{M}$ es simétrica y definida positiva a no ser que ____________________

____

MIT Course 18.06 Quiz 3, May 10, 1995

Ejercicio 6. Sea $\mathbf{A}$ la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) (0.5^{pts}) Encuentre una factorización $\mathbf{A} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}$, donde $\mathbf{L}$ es la forma escalonada de la matriz, y $\dot{\mathbf{U}}$ es una matriz triangular superior unitaria.
(b) (1^{pts}) Encuentre la solución general de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(c) (1^{pts}) El vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pertenece al espacio columna de $\mathbf{A}$ si a, b y c satisfacen ¿qué condiciones lineales?

basado en MIT Course 18.06 Final Exam, December 13, 1993

2.23. Grupo E curso 11/12

EJERCICIO 1.

(a) (1^{pts}) Find the determinant of $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) (2^{pts}) Let $\mathbf{A}$ be the 5 by 5 matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Find all five eigenvalues of $\mathbf{A}$ by noticing that $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ has rank 1 and the trace of $\mathbf{A}$ is ____________. Find five linear independent eigenvectors of $\mathbf{A}$

(c) (0.5^{pts}) Find the (3, 1) and (1, 3) entries of $\mathbf{A}^{-1}$.

MIT Course 18.06. Final Exam. Professor Strang. May 16, 2005

EJERCICIO 2. Considere la matriz $\mathbf{A}$ de orden 4 por 4 (en bloques de 2 por 2) que ya está en su su forma escalonada reducida

$$\underset{4\times 4}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \underset{2\times 2}{\mathbf{I}} & \underset{2\times 2}{3\mathbf{I}} \\ \underset{2\times 2}{\mathbf{0}} & \underset{2\times 2}{\mathbf{0}} \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Find a basis for the column space $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

(b) (0.5^{pts}) Describe all possible bases for $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

(c) (1^{pts}) Find a basis (special solutions are good) for the nullspace $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

(d) (0.5^{pts}) Find the complete solution $\boldsymbol{x}$ to the 4 by 4 system

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 9, 2012

EJERCICIO 3.

(a) (0.5^{pts}) Complete this 2 by 2 matrix A (depending on a) so that its eigenvalues are = 1 and = -1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ & \end{bmatrix}$$

(b) (0.5^{pts}) How do you know that $\mathbf{A}$ has two independent eigenvectors?

(c) (0.5^{pts}) Which choices of a give orthogonal eigenvectors and which don't?

MIT Course 18.06 Quiz 3 2005 (spring)

EJERCICIO 4. La siguiente matriz $\mathbf{Q}$ tiene columnas ortonormales $\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2,\ \boldsymbol{q}_3$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} .1 & .5 & a \\ .7 & .5 & b \\ .1 & -.5 & c \\ .7 & -.5 & d \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) ¿Qué ecuaciones deben satisfacer los números a, b, c, d?

(b) (0.5^{pts}) ¿Hay una única elección posible para estos números, aparte de poder multiplicar todos ellos por -1?

MIT Course 18.06 Quiz 2, November 2, 2005

EJERCICIO 5.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto (0,1,1,) y tiene por vectores directores (0,1,2,) y (1,1,0,)

(b) (0.5^{pts}) Escriba la ecuación implicita del mismo plano.

EJERCICIO 6. (0.5^{pts}) Suppose $\mathbf{A}$ is a 5 by 3 matrix and $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ is never zero (except when $\boldsymbol{x}$ is the zero vector). What can you say about the columns of $\mathbf{A}$?

2.24. Grupo H curso 11/12

EJERCICIO 1. (2^{pts}) Encuentre la solución completa (o *solución general*) a

$$\begin{bmatrix}1&3&1&2\\2&6&4&8\\0&0&2&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

(Strang, 2003, ejercicio 4 del conjunto de problemas 3.4.)

EJERCICIO 2.

(a) (1^{pts}) Encuentre el conjunto de "soluciones especiales" del sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(b) (1^{pts}) y (c) (0.5^{pts}) Demuestre para esta matriz $\mathbf{A}$ que el conjunto de dichas soluciones especiales es una base del espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. ¿Qué dos hechos es necesario probar? (Las demostración constituye la parte (b) del ejercicio, y la pregunta la parte (c)).

MIT Course 18.06 Final Exam, May 16, 2005

EJERCICIO 3. La matriz $\mathbf{A}$ tiene una variante $1-x$ en la posición (1,2):

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1-x&0&0\\1&1&1&1\\1&1&2&4\\1&1&3&9\end{bmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Para $x=1$ calcule $\det\mathbf{A}$. Use dicho resultado para calcular el elemento (1,1) de la matrix inversa de $\mathbf{A}$ cuando $x=1$.
(b) (0.5^{pts}) Calcule $\det\mathbf{A}$ cuando $x=0$.
(c) (0.5^{pts}) Compruebe usando las propiedades de los determinantes que $\det\mathbf{A}$ es una función lineal de x. Calcule el valor de $\det\mathbf{A}$ para cualquier valor de x. ¿Para qué valor de x la matriz es singular?

MIT Course 18.06 Quiz 2, November 2, 2005

EJERCICIO 4. Sea la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&3\end{bmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Encuentre los autovalores de $\mathbf{A}$.
(b) (1^{pts}) Encuentre los autovectores de $\mathbf{A}$.
(c) (1^{pts}) Diagonalice $\mathbf{A}$, i.e., escriba $\mathbf{A}=\mathbf{P}\;\mathbf{D}\;\mathbf{P}^{-1}$ para alguna matriz diagonal $\mathbf{D}$ (escriba explícitamente las tres matrices).

EJERCICIO 5. (0.5^{pts}) Buscamos una matrix $\mathbf{A}$ de orden m por n y vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ tales que $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ no tiene solución y $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$ tiene sólo una. ¿Por qué no es posible encontrar tales $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$? *MIT Course 18.06 Final Exam, May 16, 2005*

2.25. Grupo A curso 10/11

EJERCICIO 1. Se pide

(a) (0.5^{pts}) Norma del vector $\boldsymbol{v} = (1, 2, 2,)$.
(b) (0.5^{pts}) Un vector ortogonal a $\boldsymbol{v} = (1, 2, 2,)$ con norma 2.
(c) (0.5^{pts}) Los valores de a y b tales que el vector $(1, 2, 1,)$ sea ortogonal al vector $(a, 0, b,)$.

Proporcionado por Javier Gavilanes

EJERCICIO 2. (1^{pts}) Sea $\mathbf{A}$ una matriz 3 por 3 tal que el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tiene a $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y a $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ como soluciones.

Encuentre otra solución a este sistema. Justifique su respuesta.

EJERCICIO 3. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) (2^{pts}) Calcular los autovalores y autovectores de la matriz $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable? Justifique su respuesta (*sólo puntuará una respuesta correctamente justificada*)
(c) (0.5^{pts}) ¿Cómo emplearia usted lo que ya sabe de la matriz $\mathbf{A}$ si quisiera calcular su décima potencia $\left(\mathbf{A}^{10}\right)$, pero evitando multiplicar la matriz 10 veces (escriba cómo intervienen los elementos que usted usaría en el cómputo de la potencia de la matriz, pero sin llegar a realizar los cálculos).
(d) (0.5^{pts}) Obtenga $\mathbf{A}^4$ siguiendo de manera coherente a su respuesta al apartado anterior.
(e) (0.5^{pts}) Obtenga la forma cuadrática $f(x, y, z)$ asociada a la matriz $\mathbf{A}$, y clasifiquela.

Versión de un ejercicio proporcionado por Javier Gavilanes

EJERCICIO 4. ¿Cuáles de los siguientes siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$? Justifique su respuesta (*sólo se puntuará si la respuesta está correctamente justificada*).

(a) (0.5^{pts}) $S_1 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } x_1 = x_3\right\}$.
(b) (0.5^{pts}) $S_2 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } x_1 = 2\right\}$.

Versión de un ejercicio proporcionado por Javier Gavilanes

EJERCICIO 5. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Primero calcule $\det(\mathbf{A})$

Ahora, usando el valor de $\det(\mathbf{A})$ calculado más arriba, encuentre el valor de los siguientes determinantes; PERO HÁGALO EMPLENDO LAS <u>PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES</u> JUNTO CON LA RELACIÓN ENTRE LOS <u>VECTORES FILA DE ESTOS DETERMINANTES</u> Y LAS <u>FILAS DE $\mathbf{A}$</u> (salvo para el último caso, donde deberá emplear otra propiedad). Si no los calcula como se le ha indicado, no puntuará el ejercicio.

(b) (0.5^{pts})

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

(c) (0.5^{pts})

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

(d) (0.5^{pts})

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

(e) (0.5^{pts}) $\det \mathbf{A}^{-1}$

2.26. Grupo E curso 10/11

EJERCICIO 1. Suppose $\mathbf{A}$ is a 2 by 2 matrix and $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ and $\mathbf{A}\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}$ (with $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ and $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$).

(a) (0.5^{pts}) (Reverse engineering) What is the polynomial $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$?

(b) (0.5^{pts}) If you know that the first column of $\mathbf{A}$ is $\begin{pmatrix}2, & 1,\end{pmatrix}$, find the second column:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}.$$

(c) (1^{pts}) For that matrix in part (b), find an invertible $\mathbf{S}$ and a diagonal matrix $\mathbf{D}$ so that $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.

(d) (1^{pts}) Compute $\mathbf{A}^{101}$. (If you don't solve parts (b)–(c), use the description of $\mathbf{A}$ at the start. In all questions show enough work so we can see your method and give due credit.)

(e) (1^{pts}) If $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ and $\mathbf{A}\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}$ (with $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ and $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$) prove that $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$ are *independent*.

Start of a proof: Suppose $\boldsymbol{z} = c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$. Then $\mathbf{A}\boldsymbol{z} = \ldots$ (follow from here.)

MIT Course 18.06 Quiz 2. April 6, 2011

EJERCICIO 2. Suppose the following information is known about a matrix $\mathbf{A}$:

$$i)\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix};\qquad ii)\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\6\end{pmatrix};\qquad ii)\quad \mathbf{A}\text{ is symetric.}$$

Please note the right hand side vector in i) *is the opposite of the right hand side vector in* ii).

(a) (1^{pts}) Is the nullspace of $\mathbf{A}$ zero?

(b) (1^{pts}) Is $\mathbf{A}$ invertible?

(c) (1^{pts}) Does $\mathbf{A}$ have linearly independent eigenvectors?

(d) (0.5^{pts}) Give a specific example of a matrix $\mathbf{A}$ satisfying the above three properties and whose eigenvalues add up to zero.

MIT Course 18.06 Spring 2006 - Review Problems

EJERCICIO 3. Let $\mathbf{A}$ a 3×3 matrix with $\det \mathbf{A} = 0$. Determine if each of the following statements is true or false (to receive full credit you must explain your answers in a clear and concise way).

(a) (0.5^{pts}) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ has a nontrivial solution ($\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$).

(b) (0.5^{pts}) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has at least one solution for every $\boldsymbol{b}$.

(c) (0.5^{pts}) For every 3×3 matrix $\mathbf{B}$, we have $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})$.

(d) (0.5^{pts}) For every 3×3 matrix $\mathbf{B}$, we have $\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) > 0$.

(e) (0.5^{pts}) There is a vector $\boldsymbol{b}$ in $\mathbb{R}^3$ such that for the augmented matrix $\operatorname{rg}\left([\mathbf{A}|\boldsymbol{b}]\right) > \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right)$.

EJERCICIO 4. Consider the following matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (1^{pts}) Compute the determinant of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$. Are these matrices invertible? Compute the inverse matrix when it is possible.

(b) (1^{pts}) Compute the following determinants when it is possible.

- $\det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)$
- $\det\left(\mathbf{B}^4\mathbf{A}\right)$
- $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)$

De un examen intermedio de Mercedes

2.27. Grupo G curso 10/11

Ejercicio 1. Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{bmatrix}$$

Responda a cada una de estas preguntas añadiendo una breve explicación en cada caso.

(a) (0.5^{pts}) Calcular los valores de los parámetros a y b para que el vector $\begin{pmatrix} -2, & 1, \end{pmatrix}$ sea un autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 5$ de $\mathbf{A}$.

(b) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el otro autovalor λ_2?

(c) (0.5^{pts}) ¿Es diagonalizable?

(d) (0.5^{pts}) Considere la forma cuadrática $f(x, y)$ que resulta al multiplicar $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x, & y, \end{pmatrix}$. ¿Es esta forma cuadrática definida? (*pista:* piense en su matriz simétrica asociada)

(e) (0.5^{pts}) ¿Es el punto $(0, 0,)$ un mínimo para dicha forma cuadrática $f(x, y)$?

(f) (0.5^{pts}) ¿Qué forma tiene la superficie definida por la forma cuadrática $f(x, y)$?...¿un cuenco? ¿una silla de montar? ¿un valle?

Basado en un problema que me pasó Leonel Cerno

Ejercicio 2. Considere la siguiente matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Encuentre su forma escalonada reducida $\mathbf{R}$. Cuantas columnas linealmente independientes tiene $\mathbf{A}$

(b) (1^{pts}) Encuentre una base del espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

(c) (1^{pts}) Si el vector $\boldsymbol{b}$ es la suma de las columnas de $\mathbf{A}$, escriba la solución general del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

MIT Course 18.06 Final Exam. May 18, 2010

Ejercicio 3. (0.5^{pts}) Estamos buscando una matriz $\mathbf{A}$ de orden m por n y unos vectores $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución pero $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ tiene exactamente una. ¿Por qué no es posible encontrar tales $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{b}$, y $\boldsymbol{c}$?

Ejercicio 4. (1^{pts}) Sea $\mathbf{A}$ una matriz 3 por 3 tal que el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tiene a $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y a $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ como soluciones.

Encuentre otra solución a este sistema. Justifique su respuesta.

Ejercicio 5. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule los siguientes determinantes

(a) (1^{pts}) $\det \mathbf{A}$

(b) (0.5^{pts}) $\det \mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$

(c) (0.5^{pts}) $\det \mathbf{A}^{-1}$

(d) (0.5^{pts}) $\det 2\mathbf{A}$

(e) (0.5^{pts})

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Nótese que hay dos modificaciones respecto a las columnas de $\mathbf{A}$.

2.28. Grupo F curso 09/10

Ejercicio 1. El determinante de una matriz $\mathbf{A}$ de orden n por n es 12 (donde n es un múltiplo de dos). ¿Cuál es el determinante de $-\mathbf{A}^\intercal$? (Justifique su respuesta).

Ejercicio 2. La matriz $\mathbf{A}$ tiene dos soluciones especiales:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Describa todas las posibilidades para el número de columnas de $\mathbf{A}$.
(b) Describa todas las posibilidades para el número de filas de $\mathbf{A}$.
(c) Describa todas las posibilidades para el rango de $\mathbf{A}$.

Explique sus respuestas.
(*MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall, 2008*)

Ejercicio 3. Let $\mathbf{A}$ be any matrix and $\mathbf{R}$ its row reduced echelon form. Answer True or False to the statements below and briefly explain. (Note, if there are any counterexamples to a statement below you must choose false for that statement.)

(a) If $\boldsymbol{x}$ is a solution to $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ then $\boldsymbol{x}$ must be a solution to $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(b) If $\boldsymbol{x}$ is a solution to $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ then $\boldsymbol{x}$ must be a solution to $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Ejercicio 4. Consider the equation $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(a) Put the equation into echelon form $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$.
(b) For which $\boldsymbol{b}$ are there solutions?

Ejercicio 5. The equation $(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has no solution for some right-hand side $\boldsymbol{b}$. Give as much information as possible about the eigenvalues of the matrix $\mathbf{A}$ (the matrix $\mathbf{A}$ is diagonalizable).

Ejercicio 6. You are given the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

One of the eigenvalues is $\lambda = 1$. What are the eigenvalues of $\mathbf{A}$? [Hint: Very little calculation required! You should be able to see another eigenvalue by inspection of the form of $\mathbf{A}$, and the third by an easy calculation. You shouldn't need to compute $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ unless you really want to do it the hard way.]

2.29. Grupo H curso 09/10

Ejercicio 1. El determinante de una matriz $\mathbf{A}$ de orden n por n es 12 (donde n es un múltiplo de dos). ¿Cuál es el determinante de $-\mathbf{A}^{\intercal}$? (Justifique su respuesta).

Ejercicio 2. La matriz $\mathbf{A}$ tiene una solución especial:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

(a) Describa todas las posibilidades para el número de columnas de $\mathbf{A}$.
(b) Describa todas las posibilidades para el número de filas de $\mathbf{A}$.
(c) Describa todas las posibilidades para el rango de $\mathbf{A}$.

Justifique brevemente sus respuestas.

Ejercicio 3. Tu compañera de clase, Nyarlathotep, realizo los pasos habituales de eliminación gaussaiana para convertir[1] $\mathbf{A}$ en su forma escalonada $\mathbf{U}$, obteniendo:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre un conjunto de vectores que genere el espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.
(b) Si $\mathbf{U}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$, encuentre la solución completa $\boldsymbol{y}$ (i.e. describa todas las posibles soluciones $\boldsymbol{y}$).
(c) Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{U}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$. (fíjese en la nota a pie de página para saber que pasos dio Nyarla).

Ejercicio 4. Sea $\mathbf{A}$ una matriz y $\mathbf{R}$ su forma escalonada reducida por filas. Responda Verdadero o Falso a las siguientes afirmaciones, y añada una breve explicación a su respuesta. (Nota, si hay contraejemplos a una afirmación, debe calificarla como falsa).

(a) Si $\boldsymbol{x}$ es solution a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ entonces $\boldsymbol{x}$ debe ser solución a $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(b) Si $\boldsymbol{x}$ es solution a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x}$ debe ser solución a $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Ejercicio 5. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & 1 & d \\ e & f & 1 \end{bmatrix}$$

(a) $\mathbf{A}$ tiene un autovalor (doble) igual a 2 ($\lambda = 2$). ¿Cuál es el otro autovalor?
(b) El rango de ($\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$) es 1. ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?

Justifique sus respuestas.

Referencias

Lang, S. (1986). *Introduction to Linear Algebra*. Springer-Verlag, second ed. 9

Strang, G. (). 18.06 linear algebra. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare. License: Creative Commons BY-NC-SA.
URL http://ocw.mit.edu

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8. 34

[1] Nyarla primero restó dos veces la primera fila de la segunda, entonces sumó la primera fila a la tercera, y por último restó tres veces la segunda fila de la tercera.

Soluciones a los Ejercicios

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 1(a) La matriz asociada es $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Su polinomio característico es:

$$\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda\left(-\lambda^2 + 6\lambda - 5\right) = 0.$$

Por tanto la matriz es *semi*-definida positiva, pues su espectro (las raíces) es $\{0, 1, 5\}$. Pero es mucho más sencillo comprobar que en la diagonal principal de la matriz obtenida al diagonalizar A por congruencia no hay elementos negativos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\overset{\tau}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]} \\ [(2)\mathbf{3}]}]{\substack{\overset{\tau}{[(2)\mathbf{3}]} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 1(b) Usemos un método que nunca falla, mirar los elementos de la diagonal tras diagonalizar por congruencia

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1-a & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\overset{\tau}{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\substack{\overset{\tau}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & -a & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\overset{\tau}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\overset{\tau}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No existe, pues hay un autovalor positivo y otro negativo independientemente del valor de a.

□

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 2(a) $P^* = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$

puesto que

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\overset{\tau}{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\tau}{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

□

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 2(b) $P^* = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ puesto que

$$\left[\begin{array}{cccc} -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline x & y & z & w \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\overset{\tau}{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]} \\ [(2)\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline x & x+y & x+2z & w \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\overset{\tau}{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 \\ \hline x & x+y & -y+2z & w+x+y \end{array}\right].$$

□

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 3(a) Como ambos vectores perpendiculares corresponden a un cuadrado con lados de longitud 1, el área encerrada es 1. Por tanto, $\boxed{\text{los posibles valores para el determinante son } 1 \text{ o } -1}$.

□

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 3(b) Usando transformaciones elementales tenemos que

$$\begin{aligned} \det\left[(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2);\ (\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2);\right] &= \det\left[(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2);\ 2\boldsymbol{q}_1;\right] && \text{Sumando la primera columna a la segunda} \\ &= 2\det\left[(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2);\ \boldsymbol{q}_1;\right] \\ &= 2\det\left[-\boldsymbol{q}_2;\ \boldsymbol{q}_1;\right] && \text{Restando la segunda columna de la primera} \\ &= -2\det\left[\boldsymbol{q}_2;\ \boldsymbol{q}_1;\right] \\ &= 2\det\left[\boldsymbol{q}_1;\ \boldsymbol{q}_2;\right] && \text{intercambiando las columnas} \end{aligned}$$

Es decir, $\boxed{\text{este determinante solo puede valer } 2 \text{ o } -2}$.

$\square$

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 4. Dado que $(\mathbf{A}^2-4\mathbf{I})$ es singular, $\lambda=4$ es un valor propio de $\mathbf{A}^2$. Por lo tanto, un valor propio de $\mathbf{A}$ es $\lambda=2$ o $\lambda=-2$ (o ambos).

$\square$

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 5(a) **Falso.** $(0,2)$ es solución de $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, pero no de $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

$\square$

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 5(b) **Falso.** $(-1,1)$ es solución de $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, pero no de $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

$\square$

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 5(c) **Falso.** $(1,1)$ es solución de $\begin{pmatrix}x, & y,\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}2, & 2,\end{pmatrix}$, pero no de $\begin{pmatrix}x, & y,\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}2, & 2,\end{pmatrix}$.

$\square$

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 5(d) **Verdadero.** Sea $\mathbf{E}=\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ tal que $\mathbf{AE}=\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}=\mathbf{R}$, entonces

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}=\mathbf{0} \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{x}\mathbf{AE}=\mathbf{0E}=\mathbf{0}.$$

$\square$

(Grupo B curso 22/23) Ejercicio 6(a) Los vectores ortogonales al espacio nulo de $\mathbf{A}$ son las filas de $\mathbf{A}$. Como sabemos que la matriz $\mathbf{A}$ es singular y claramente no es de rango uno, se deduce que el rango de $\mathbf{A}$ es dos. Las dos primeras filas son independientes y, por lo tanto, el complemento ortogonal del espacio nulo de $\mathbf{A}$ está generado por las dos primeras filas $\mathbf{A}$:

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)^{\perp}=\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)=\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\\7&6\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}=\mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix};\right]\right).$$

$\square$

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 1(a) Como $\mathbf{A}^3=\mathbf{SD}^3\mathbf{S}^{-1}$,

$$\mathbf{A}^3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(2)^3&\\&(-2)^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&-16\\0&-8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}8&-32\\0&-8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\8\end{pmatrix}.$$

Otra forma de verlo: como $\left[\begin{array}{cc|c}1&2&-1\\0&1&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&1\\\hline 1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\\hline 1&-2&3\\0&1&-1\\0&0&1\end{array}\right]$ entonces $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, Así $\mathbf{A}^3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\mathbf{A}^3\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\mathbf{A}^3\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=(2)^3\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+(-2)^3\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\8\end{pmatrix}$.

$\square$

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 1(b) Como $q(x,y,z)=az^2+2x^2+8xy+y^2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\begin{bmatrix}2&4&0\\4&1&0\\0&0&a\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, diagonalizando por congruencia: $\begin{bmatrix}2&4&0\\4&1&0\\0&0&a\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-7&0\\0&0&a\end{bmatrix}$, concluimos que $q(x,y,z)$ puede tomar valores tanto positivos como negativos (sea cual sea el valor de a).

Alternativamente: los menores principales son 2, -14 y $-14a$, por lo que la forma cuadrática puede tomar valores tanto positivos como negativos (sea cual sea el valor de a).

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 2(a) Por ser la matriz triangular los autovalores son los números que aparecen en la diagonal principal; es decir, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda = -1$. Como $(\mathbf{A} + 1\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, una base del autoespacio $\mathcal{E}_{(\lambda=-1)}$ es $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \right]$.

Para $\lambda = 2$. Como $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, una base de $\mathcal{E}_{(\lambda=2)}$ es $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \right]$.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 2(b) Es diagonalizable puesto que hemos encontrado 4 autovectores linealmente independientes

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 2(c) La factorización $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^\intercal$ implica que la matriz $\mathbf{A}$ debe ser simétrica. puesto que $\mathbf{A}$ no es simétrica, no es posible encontrar tal factorización.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 2(d) $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{\text{producto de los autovalores de } \mathbf{A}} = -\frac{1}{8}$.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 3(a) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad 2 + 2 + \lambda_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_3 = -1}$.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 3(b) $\operatorname{rg}\big((\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\big) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{N}\left((\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\right) = 2$; por tanto $\mathbf{A}$ *es diagonalizable* ya que la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ es igual a su multiplicidad algebráica.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 4(a) $\mathbf{P}_A = \mathbf{A}\big(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\big)^{-1}\mathbf{A}^\intercal$ y $\mathbf{P}_B = \mathbf{B}\big(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B}\big)^{-1}\mathbf{B}^\intercal = \mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal$ (pues las columnas de $\mathbf{B}$ son ortonormales).

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 4(b) Como $\mathcal{C}(\mathbf{B}) \subset \mathbb{R}^5$ tiene dimensión 3, su complemento ortogonal tiene dimensión 2. Consecuentemente hay vectores $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}(\mathbf{B})^\perp$ distintos de cero, pero como para cualquier $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}(\mathbf{B})^\perp$ la proyección $(\mathbf{P}_B)\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, concluimos que $\mathbf{P}_B$ es singular y $\boxed{\det(\mathbf{P}_B) = 0}$.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 4(c) Como $\mathbf{P}_B$ proyecta cualquier vector de $\mathbb{R}^5$ sobre $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}(\mathbf{B})$, y como tanto las columnas de $\mathbf{A}$ como las de $\mathbf{B}$ pertenecen a $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}(\mathbf{B})$, entonces $(\mathbf{P}_B)\mathbf{B} = \mathbf{B}$ y $(\mathbf{P}_B)\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 4(d) Dado que las columnas de $(\mathbf{P}_B)$ son combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{B}$ y las columnas de $(\mathbf{P}_A)$ son combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}$, usando el mismo razonamiento de más arriba $(\mathbf{P}_B)(\mathbf{P}_A) = \mathbf{P}_A$ y $(\mathbf{P}_A)(\mathbf{P}_B) = \mathbf{P}_B$.

$$\text{Otra forma de verlo: } \begin{cases} (\mathbf{P}_B)(\mathbf{P}_A) = (\mathbf{P}_B)\mathbf{A}\big(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\big)^{-1}\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{A}\big(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\big)^{-1}\mathbf{A}^\intercal = (\mathbf{P}_A) \\ (\mathbf{P}_A)(\mathbf{P}_B) = (\mathbf{P}_B)\mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal = \mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal = (\mathbf{P}_B) \end{cases}.$$

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 5(a)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} &= (c_1\boldsymbol{q}_1 + c_2\boldsymbol{q}_2 + c_3\boldsymbol{q}_3) \cdot (c_1\boldsymbol{q}_1 + c_2\boldsymbol{q}_2 + c_3\boldsymbol{q}_3) \\ &= c_1^2(\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_1) + c_1c_2(\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2) + \cdots + c_3c_2(\boldsymbol{q}_3 \cdot \boldsymbol{q}_2) + c_3^2(\boldsymbol{q}_3 \cdot \boldsymbol{q}_3) \\ &= c_1^2 + c_2^2 + c_3^2. \end{aligned}$$

□

(Grupo E curso 22/23) Ejercicio 5(b)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cdot\mathbf{A}\boldsymbol{x} &= (c_1\boldsymbol{q}_1 + c_2\boldsymbol{q}_2 + c_3\boldsymbol{q}_3)\cdot(c_1\mathbf{A}\boldsymbol{q}_1 + c_2\mathbf{A}\boldsymbol{q}_2 + c_3\mathbf{A}\boldsymbol{q}_3)\\ &= (c_1\boldsymbol{q}_1 + c_2\boldsymbol{q}_2 + c_3\boldsymbol{q}_3)\cdot(c_1\lambda_1\boldsymbol{q}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{q}_2 + c_3\lambda_3\boldsymbol{q}_3)\\ &= c_1^2\lambda_1 + c_2^2\lambda_2 + c_3^2\lambda_3. \end{aligned}$$

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 1(a) Busquemos un vector en $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ perpendicular a $\mathbf{A}_{|1}$. Es decir $(\mathbf{A}_{|1})\cdot\left(a\mathbf{A}_{|1} + b\mathbf{A}_{|2}\right) = 0$:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\cdot\left(a\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a+b\\2a-b\\-2\,(a-2b)\end{pmatrix} = 9\,(a-b) = 0;$$

por tanto $a = b$. Así (para $a = 1$), $\mathbf{A}_{|1} + \mathbf{A}_{|2} = \begin{pmatrix}2, & 1, & 2,\end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y es ortogonal a $\mathbf{A}_{|1}$. Consecuentemente, una base ortogonal para $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix};\right]$.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 1(b) Aplicando la eliminación para encontrar un vector perpendicular a los vectores de la base anterior tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc}1&2&-2\\2&1&2\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-3&6\\\hline 1&-2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-3&0\\\hline 1&-2&-2\\0&1&2\\0&0&1\end{array}\right].$$

Así que el sistema $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix};\right]$ es ortogonal. Como queremos vectores ortonormales, debemos dividir cada vector por su longitud: $\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\quad\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$; $\quad\boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 1(c) El complemento ortogonal de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, es decir, el espacio nulo por la izquierda: $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 1(d) Como $[\boldsymbol{q}_3]^{\intercal}[\boldsymbol{q}_3] = [1] = \underset{1\times 1}{\mathbf{I}}$,

$$\mathbf{P} = [\boldsymbol{q}_3]\Big([\boldsymbol{q}_3]^{\intercal}[\boldsymbol{q}_3]\Big)^{-1}[\boldsymbol{q}_3]^{\intercal} = [\boldsymbol{q}_3][\boldsymbol{q}_3]^{\intercal} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}4&-4&-2\\-4&4&2\\-2&2&1\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 1(e) Usando $\mathbf{P}$, que proyecta sobre $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$, obtenemos la matriz proyección $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$, que proyecta sobre $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$. Por lo tanto

$$\boldsymbol{p} = (\mathbf{I}-\mathbf{P})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \mathbf{P}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix}4&-4&-2\\-4&4&2\\-2&2&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}.$$

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 1(f) Es el vector $\boldsymbol{x}$ con los coeficientes de la combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$ que está más cerca de $\boldsymbol{v}$. Así que podemos resolver las ecuaciones normales pero, como ya conocemos la proyección $\boldsymbol{p}$, podemos resolver simplemente $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&-3\\2&-1&0\\-2&4&-6\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\2&-3&6\\-2&6&-12\\\hline 1&-1&3\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\2&-3&0\\-2&6&0\\\hline 1&-1&1\\0&1&2\\\hline 0&0&1\end{array}\right].$$

Por lo tanto, la solución de mínimos cuadrados es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 1(g) Necesitamos encontrar una matriz cuya fila sea un vector no nulo ortogonal a $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$ (ya hemos hemos encontrado un vector así en el apartado b). Así, unas ecuaciones cartesianas de $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$ son

$$\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = (0,) \right\}.$$

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 2. Diagonalizando A por congruencia obtenemos: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & d & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & d-4 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d-4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(d-4)\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d-4 & 0 \\ 0 & -2 & -4\left(d-3\right) \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(d-4)\mathbf{3}]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d-4 & 0 \\ 0 & 0 & -4\left(d-4\right)\left(d-3\right) \end{bmatrix}.$$

Si $d-4>0$ entonces $-4\left(d-4\right)\left(d-3\right)<0$. Por tanto, $\boxed{\text{no existe tal valor de } d}$.

Otra forma de ver lo mismo es calcular los menores principales de A: 1, $(d-4)$ y $(12-4d)$. **Nunca pueden ser todos positivos**.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 3(a) Para cualquier A de orden n sabemos que $\dim \mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right) = n - \operatorname{rg}\left(\mathsf{A}\right) =$ *el número de autovalores nulos de* A. Por tanto: $\operatorname{rg}\left(\mathsf{A}\right) = 2$.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 3(b) $\det(\mathsf{A}^{\intercal}\mathsf{A}) = \det \mathsf{A}^{\intercal} \cdot \det \mathsf{A} = 0 \cdot 0 = 0$.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 3(c) Cuando añadimos I a una matriz, aumentan los autovalores en 1 (ya que necesitaremos restar otra unidad más a la diagonal principal para obtener una matriz singular). Así que los valores propios de $\mathsf{A}+\mathsf{I}$ son 1, 2 y 3, y $|\mathsf{A}+\mathsf{I}| = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 3(d) Los autovalores de $\left(\mathsf{A}+\mathsf{I}\right)^{-1}$ son $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

□

(Grupo D curso 21/22) Ejercicio 4. Como $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es triangular, sus autovalores son los elementos de la diagonal principal:

$$\begin{cases} \text{Para } \lambda = -2: \quad \mathsf{A}+2\mathsf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathcal{E}_{(-2)}(\mathsf{A}) = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \right]\right) \\[2ex] \text{Para } \lambda = 0: \quad \mathsf{A}-0\mathsf{I} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathcal{E}_{(0)}(\mathsf{A}) = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \right]\right) \end{cases}; \qquad \text{así} \quad \boxed{\mathsf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}.$$

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 1(a) Para toda A simétrica, la matriz $\mathsf{C}^{\intercal}\mathsf{AC}$ también es simétrica, pues $\left(\mathsf{C}^{\intercal}\mathsf{AC}\right)^{\intercal} = \mathsf{C}^{\intercal}\mathsf{AC}$. Así ${}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{A}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = {}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{IAI}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ es simétrica, ya que ${}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{I} = \left(\mathsf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{\intercal}$.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 1(b) Para toda A simétrica, la matriz $\mathsf{C}^{-1}\mathsf{AC}$ es similar a A. Por tanto ${}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{A}_{\underset{[(3)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}} = {}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{IAI}_{\underset{[(3)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ es similar a A ya que $\left({}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{I}\right)\left(\mathsf{I}_{\underset{[(3)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \mathsf{I}$.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 1(c) Cualquier matriz triangular y con dichos valores en la diagonal. Por ejemplo: $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 1(d) Imposible. Para ser de rango uno, tan solo un único autovalor (con multiplicidad 1) puede ser distinto de cero.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 1(e) Necesitamos una matriz ortogonal. Por ejemplo $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Así, $\mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{D}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene autovalores 1, 2, 4.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 2(a) La matriz proyección $\mathbf{P}$ proyecta sobre el espacio columna de $\mathbf{P}$, que es la recta

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{P}\right) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 2(b) La diferencia entre $\boldsymbol{v}$ y su proyección es

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v} - \mathbf{P}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix};$$

así que la distancia es $\|\boldsymbol{e}\| = \sqrt{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}} = \sqrt{2}$.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 2(c) Como $\mathbf{P}$ proyecta sobre una recta, sus tres autovalores deben ser 0, 0 y 1. Como $\mathbf{P}$ es simétrica, tiene un conjunto completo de autovalores (ortogonales), así que es diagonalizable.

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 3(a)

$$\begin{cases} \text{Para } \lambda = \frac{1}{2}: \quad \mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \implies \mathcal{E}_{\left(\frac{1}{2}\right)}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\right]\right). \\ \text{Para } \lambda = 1: \quad \mathbf{A} - 1\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \mathcal{E}_{(1)}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\right]\right). \end{cases}$$

Así que, $\quad \mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 3(b) $\mathbf{A}^{\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

□

(Grupo E curso 21/22) Ejercicio 4.

1. Los autovalores de $\mathbf{A}$ son: 1, 1, 2.
2. $\mathbf{A}$ puede que sea diagonalizable o puede que no.
3. $\mathbf{A}$ puede que sea simétrica o puede que no.

   $\mathbf{A}$ evidentemente tiene autovalores positivos. No obstante, como puede que sea simétrica o puede que no, entonces puede que sea definida positiva, o puede que no.

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 1(a) Puesto que $\mathsf{D} = \mathsf{D}^\intercal = \mathsf{S}^\intercal \mathsf{A}^\intercal \left(\mathsf{S}^{-1}\right)^\intercal$

- Los autovalores de $\mathsf{A}^\intercal$ son <u>los mismos que los de A</u>
- Los autovectores de $\mathsf{A}^\intercal$ son <u>las columnas de $\left(\mathsf{S}^{-1}\right)^\intercal$</u>

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 1(b) $x = 3$ e $y = 4$ por simetría, y $z = 5$ para que sea singular:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & z \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & z-9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & z-5 \end{bmatrix} \implies \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 1(c) Es necesario multiplicar por la izquierda de F con la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}_{\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{I}.$$

Es decir, es necesario $\boxed{\textbf{restar de la segunda fila la primera.}}$ Ya que $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{C} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}_{\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{C}_{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ es semejante a C y por tanto tiene los mismos autovalores.

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 2(a) $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{N}\left(\mathsf{A}^\intercal\right)$:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \implies \text{Base: } \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\right].$$

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 2(b)

$$\mathsf{P} = \mathsf{A}\left(\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}\right)^{-1}\mathsf{A}^\intercal = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 3. Puesto que $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$; y puesto que $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$; entonces llamando B a la primera matriz y C a la tercera $\boxed{|\mathsf{A}| = \frac{|\mathsf{C}|}{|\mathsf{B}|} = \frac{-27}{-1} = 27}$.

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 4(a) Tiene solución cuando $a \neq 5$ ó $c = 10$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & a & -c \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & a-1 & 2-c \\ \hline 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(4)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a-5 & 10-c \\ \hline 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 4(b) El conjunto de soluciones es $\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 4(c) Basta mirar el signo de los pivotes tras diagonalizar por congruencia:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a-5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$$

- Si $a > 5$ definida positiva.
- Si $a = 5$ *semi*definida positiva.
- Si $a < 5$ ni positiva ni negativa.

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 5(a) Encontremos primero un vector en la misma direción que la recta

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q = \begin{pmatrix} 1, & -3, & 1, \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2, & 2, & -2, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, & -5, & 3, \end{pmatrix}.$$

Así que una representación paramétrica es

$$L = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

$\square$

(Grupo D curso 20/21) Ejercicio 5(b)

$$\left[\begin{array}{ccc} 3 & -5 & 3 \\ \hline v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{2}] \\ [(5)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ \hline v_1 & 5v_1 + 3v_2 & -v_1 + v_3 \\ \hline 1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

por tanto

$$L = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 1(a) Encontremos una base para $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

El vector de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ más próximo a $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ es la combinación lineal $\mathbf{N}\boldsymbol{c}$ donde $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y tal que $\boldsymbol{c}$ verifica $\mathbf{N}^\intercal\mathbf{N}\boldsymbol{c} = \mathbf{N}^\intercal\boldsymbol{b}$ (las ecuaciones normales). Como $\mathbf{N}^\intercal\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{N}^\intercal\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(5)\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(5)\mathbf{3}] \\ [(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 11 & -11 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 11 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\frac{1}{5})\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 11 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Así que la solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ más próxima a $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\3\end{pmatrix}$ es $\boldsymbol{x} = 1\mathbf{N}_{|1} + 1\mathbf{N}_{|2} = 1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 1(b) Si tomamos la columna $\mathbf{N}_{|1}$ como primer vector de la base, necesitamos encontrar alguna combinación lineal de las columnas de $\mathbf{N}$ perpendicular a dicho vector $\mathbf{N}_{|1}$. Es decir,

$$(\mathbf{N}_{|1}) \cdot (a\mathbf{N}_{|1} + b\mathbf{N}_{|2}) = \begin{pmatrix}2, & 1, & 0, & 0,\end{pmatrix} \cdot \left(a\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad a(5) + b(-2) = 0.$$

Así, si $a = 2$ y $b = 5$ entonces $2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\\5\end{pmatrix} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{N}\right)$ y es ortogonal a $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$. Dividiendo cada vector por su longitud obtenemos una base ortonormal:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix};\ \frac{1}{\sqrt{55}}\begin{pmatrix}-1\\2\\5\\5\end{pmatrix};\ \right]$$

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 2(a) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución si y solo si $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = (\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right))^{\perp} \quad\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{b} \perp \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right).}$

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 2(b) $\boxed{|\mathbf{A}| = (1)\cdot(3)\cdot(5)\cdot(7) = 105}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0\\ 1&4&4&4&0\\ 1&4&9&9&0\\ 1&4&9&16&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 1&3&3&3&0\\ 1&3&8&8&0\\ 1&3&8&15&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 1&3&0&0&0\\ 1&3&5&5&0\\ 1&3&5&12&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 1&3&0&0&0\\ 1&3&5&0&0\\ 1&3&5&7&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right].$$

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 3(a) $\begin{bmatrix}1&1\\d&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\d+3\end{pmatrix} \implies \begin{cases}4 = \lambda 1 \ \Rightarrow \lambda = 4\\ d+3 = \lambda 3\end{cases} \implies$ $d + 3 = 12 \implies \boxed{d = 9}$.

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 3(b) La matriz $\left(\mathbf{A} - (2)\mathbf{I}\right)$ debe ser singular. Por tanto

$$|\mathbf{A} - (2)\mathbf{I}| = \det\begin{bmatrix}-1&1\\d&-1\end{bmatrix} = 1 - d = 0 \implies \boxed{d = 1}.$$

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 3(c) Esta cuestión solo es posible si la matriz tiene autovalores repetidos (i.e., con multiplicidad algebráica mayor a uno). Así $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Por tanto $2\lambda = \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}\right) = 2 \implies \lambda = 1$. Es decir $|\mathbf{A}| = \lambda^2 = \lambda = 1$

$$|\mathbf{A}| = \det\begin{bmatrix}1&1\\d&1\end{bmatrix} = 1 - d = 1 \implies \boxed{d = 0}.$$

$\square$

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 4.

$$\left[\begin{array}{ccc} 1&1&2\\ 5&11&-8\\ \hline 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1&0&0\\ 5&6&-18\\ \hline 1&-1&-2\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1&0&0\\ 5&6&0\\ \hline 1&-1&-5\\ 0&1&3\\ 0&0&1 \end{array}\right] \Rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}$$

□

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 5(a)

Pensemos primero en el orden y rango de $\mathbf{A}\ldots$ Puesto que el "lado derecho" es un vector de $\mathbb{R}^3$, la matriz $\mathbf{A}$ tiene tres filas, además, las solución al sistema es también un vector con tres componentes (por tanto una combinación de las tres columnas de $\mathbf{A}$); así pues, $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden 3.

La solución completa está formada por vectores de un espacio nulo de dimensión 2 (dos columnas libres). Entonces, $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 3 - \dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 3 - 2 = 1$. Se deduce de todo esto que sólo hay una fila pivote, y las otras dos son libres, por tanto $\dim\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = 1$.

□

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 5(b)

La solución particular nos dice que $2\mathbf{A}_{|1} = \begin{pmatrix}2, & 4, & 2,\end{pmatrix}$, por tanto, $\mathbf{A}_{|1} = \begin{pmatrix}1, & 2, & 1,\end{pmatrix}$. Como $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 1$, sabemos que el resto de columnas son múltiplos de la primera. El primer vector de la base del espacio nulo indica que la segunda columna es el opuesto de la primera, pues, $\mathbf{A}_{|1} + \mathbf{A}_{|2} = \mathbf{0}$. Por último, el segundo vector de la base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ indica que, $\mathbf{A}_{|3} = \mathbf{0}$. Así pues,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 5(c) Para cualquier $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$; por tanto, *solo para los múltiplos de la primera columna*.

□

(Grupo E curso 20/21) Ejercicio 6. Los autovalores de $\mathbf{A}$ son los inversos de los autovalores de $\mathbf{A}^{-1}$, así pues, podemos clasificar $\mathbf{A}^{-1}$, pues su clasificación coincidirá con las de $\mathbf{A}$. Diagonalizando por congruencia descubriremos los *signos* de los autovalores de $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\tau}{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\overset{\tau}{\mathbf{1}}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Puesto que $\mathbf{A}^{-1}$ que tiene autovalores con ambos signos, la matriz $\mathbf{A}$ es indefinida.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 1(a) Una representación paramétrica de la recta es: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \boldsymbol{a} + \alpha(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}4/3\\0\\4\end{pmatrix}$. Así, multiplicando por 4 el vector de la parte paramétrica (para evitar las fracciones), podemos obtener una ecuación implícita de la misma recta.

$$\left[\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \hline 1 & 0 & 3 \\ \hline 4 & 0 & 12 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} x & y & (z-3x) \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} -3x \quad + z = 0 \\ \qquad y \quad = 0 \end{cases}}$$

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 1(b) Si. Dicha recta es el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo. Nótese que dicha recta es el conjunto de múltiplos del vector $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1, & 0, & 3,\end{pmatrix}$. Fíjese que $\boldsymbol{b}$ es $\frac{-1}{3}\boldsymbol{a}$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 1(c) El punto $\boldsymbol{p}$ más cercano es la proyección de $\boldsymbol{z}$ sobre la recta generada por el vector $\begin{pmatrix}1, & 0, & 3,\end{pmatrix}$, es decir

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{P}\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 0 & 0\\3 & 0 & 9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}8\\0\\24\end{pmatrix}.$$

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 1(d) Por una parte, el vector $\boldsymbol{p}$ pertenece a la recta, pues $\boldsymbol{p} = \frac{8}{10}\boldsymbol{a}$;

Y por otra, el vector $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix}2, & 2, & 2,\end{pmatrix} - \frac{8}{10}\begin{pmatrix}1, & 0, & 3,\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}20, & 20, & 20,\end{pmatrix} - \frac{8}{10}\begin{pmatrix}1, & 0, & 3,\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}12, & 20, & -4,\end{pmatrix}$ es perpendicular a la recta, ya que $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a} = 0$. Por tanto $\boldsymbol{p}$ es el múltiplo de $\boldsymbol{a}$ más próximo a $(2,2,2,)$.

La distancia, entre $(2,2,2,)$ y la recta, es $\|\boldsymbol{e}\| = \sqrt{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}} = \sqrt{\frac{144+400+16}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{560}$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 2(a) El rango de la matriz $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ es dos, por tanto sus columnas son linealmente independientes. El producto escalar $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 = 0$ por tanto los autovectores son ortogonales.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 2(b)

Si $\mathbf{A}$ es simétrica se pueden encontrar tres autovectores ortogonales de $\mathbf{A}$. Usando eliminación podemos encontrar un autovector $\boldsymbol{v}_3$ que pertenecerá necesariamente al complemento ortogonal del autoespacio correspondiente a $\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(1)3+1]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ \hline 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{pertenece a dicho sub-espacio.}$$

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 2(c)

Si $\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}\right) = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 2$ entonces $\lambda_3 = 0$. La matriz $\mathbf{A}$ es ***semi***definida positiva.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 2(d)

Dado que $\mathbf{A}$ es simétrica, $\mathbf{A}$ es diagonalizable en la forma $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^\intercal$ donde las columnas de $\mathbf{Q}$ son autovectores ortonormales de $\mathbf{A}$. Así pues,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^\intercal\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 3(a) Como las columnas primera y tercera son iguales, pero la primera y segunda son linealmente independientes, el rango de $\mathbf{A}$ es $\boxed{2}$. El rango de $\mathbf{A}^\intercal$ y el rango $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ son iguales al rango de $\mathbf{A}$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 3(b) Una base para $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ la forman la primera y segunda columnas $\boxed{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}}$.

El espacio nulo de $\mathbf{A}$ es de dimensión uno, y como $(\mathbf{A}_1)_{|y}$ $(\mathbf{A}_3)_{|s}$ on iguales, una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ está formada por el vector $\boxed{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}$. Para finalizar, $\boxed{\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})}$, y por tanto la base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ también es base de $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 3(c) $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$ es la proyección de $\boldsymbol{b}$ sobre $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 3(d) Para encontrar $\widehat{\boldsymbol{x}}$ debemos resolver las ecuaciones normales $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$. Sin embargo, puesto que $\mathbf{A}$ solo tiene dos columnas independientes, podemos simplificar los cálculos usando una una matriz de rango completo $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix}$, donde $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$; y resolver las siguientes ecuaciones normales $\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{B}^\intercal\boldsymbol{b}$ para encontrar $\boldsymbol{p} = \mathbf{B}\widehat{\boldsymbol{x}}$. Puesto que

$$\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&0&1&1\\2&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&3\\3&6\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^\intercal\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1&0&1&1\\2&1&1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix};$$

las ecuaciones normales son: $\begin{bmatrix}3&3\\3&6\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Para fnalzar, calculamos

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{B}\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

□

(Grupo B curso 18/19) Ejercicio 4. **Falso:** Podemos obtener una matriz cuyas columnas son los vectores de B^* con el siguiente produto de matrices, donde las columnas de la primera matriz del producto son los vectores de B.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}), & (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}), & 2\boldsymbol{w}\end{bmatrix}$$

Puesto que en el producto, la matriz de la derecha es singular, los vectores de B^* son necesariamente dependientes. Tambien podemos verlo aplicando la eliminación gaussiana

$$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}), & (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}), & 2\boldsymbol{w}\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}), & \boldsymbol{w}, & 2\boldsymbol{w}\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}), & \boldsymbol{w}, & \mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 1(a) Since $\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ one eigenvalue is $\lambda_1 = 1$. Since the trace is 1.5 the second eigenvalue is $\lambda_2 = 0.5$.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 1(b) We already known that all non-zero multiples of $(1,1)$ are the eigenvectors corresponding to $\lambda_1 = 1$. To find the eigenvectors corresponding to $\lambda_2 = 0.5$, we look at $\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}$:

$$\left[\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}\right]\boldsymbol{x}_2 = \left[\mathbf{A} - 0.5\mathbf{I}\right]\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix}.4&.1\\.4&.1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix};$$

$$\mathcal{E}_{\lambda=1} = \mathcal{L}\left\{(1,1)\right\}; \qquad \mathcal{E}_{\lambda=0.5} = \mathcal{L}\left\{(1,-4)\right\}.$$

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 1(c) We have

$$\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$$

so

$$\mathbf{A}^k\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = \mathbf{A}^k(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \mathbf{A}^k\boldsymbol{x}_1 + \mathbf{A}^k\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + 0.5^k\boldsymbol{x}_2$$

Since $(0.5)^k$ goes to 0 as k goes to infinity, the limiting value of $\mathbf{A}^k\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ is $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 2(a) Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \subset \mathbb{R}^3$, la matriz $\mathbf{A}$ tiene tres columnas. Puesto que $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 1$, el rango de $\mathbf{A}$ es 2. Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) \subset \mathbb{R}^4$, la matriz $\mathbf{A}$ tiene cuatro filas.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 2(b) If $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ is solvable, then $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$. Since $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ is the orthogonal complement of $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$, this means that an equivalent condition for $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ to be solvable is that $\boldsymbol{b}$ is orthogonal to $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$. This gives us two constraints on $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 1; \quad \beta = 0}.$$

For these values of α and β, the solution of $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ is not unique, since $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ has dimension 1: given any particuar solution of $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, we can add on any multiple of $\begin{pmatrix}1, & 0, & -1,\end{pmatrix}$ and the resulting vector would still be a solution.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 2(c) The vector $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}1, & 2 & ,-3,\end{pmatrix}$ is in $\mathbb{R}^3$, and so we can only project onto $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ and $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$. To project onto $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, we use the formula to project $\boldsymbol{y}$ onto the spam of $\begin{pmatrix}1, & 0 & ,-1,\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{p}_{\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

To compute the projection onto $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$, recall that if $\boldsymbol{p} = \mathbf{P}\boldsymbol{y}$ is the projection of $\boldsymbol{y}$ onto some subspace, then $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\boldsymbol{y}$ will project $\boldsymbol{y}$ onto the orthogonal complement of this subspace. Since $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ is orthogonal to $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, the projection of $\boldsymbol{y}$ onto $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ is given by:

$$\boldsymbol{p}_{\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \boldsymbol{p}_{\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 3(a) First this matrix is clearly symmetric as $\mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{A}$. Since $\mathbf{Q}$ is orthogonal $\mathbf{Q}^{\intercal} = \mathbf{Q}^{-1}$ and so this gives an othogonal diagonalization (by similarity and congruence), so $\mathbf{A}$ has eigenvalues 1, 2, 3, $4 > 0$ and is thus positive definite.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 3(b) From part (a) we know that each of $\mathbf{A}_i = \mathbf{Q}_i\mathbf{D}\mathbf{Q}_i^{\intercal}$ are positive definite, so for $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ $\boldsymbol{x}\mathbf{A}_i\boldsymbol{x} > 0$. So we get $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{A}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\mathbf{A}_2\boldsymbol{x} > 0$ and it follows that $\mathbf{A}$ is positive definite as $\mathbf{A}$ is clearly symmetric as it is the sum of symmetric matrices.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 3(c) We have $\mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{A}$, so $\mathbf{A}$ is symmetric. Also $\boldsymbol{v}\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{\intercal}\boldsymbol{v} = \left(\mathbf{X}^{\intercal}\boldsymbol{v}\right)\mathbf{D}\left(\mathbf{X}^{\intercal}\boldsymbol{v}\right) \geq 0$ as $\mathbf{D}$ is positive definite and the inequality is strict as long as $\mathbf{X}^{\intercal}\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. So we get that $\mathbf{A}$ is not positive definite as long as $\mathbf{X}^{\intercal}$ is not full column rank.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 3(d) This is a projection matrix to a 1 dimensional space, so $\mathbf{P}$ has rank 1. It thus has a non-trivial nullspace and so has a 0 eigenvalue. So not all eigenvalues are positive and thus is not positive definite.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 3(e) Applying *Type I* elementary transformations we get

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{1}{2})\mathbf{2}+\mathbf{1}]} \\ \overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{2}{3})\mathbf{3}+\mathbf{2}]} \\ \overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{3}{4})\mathbf{2}+\mathbf{3}]} \\ \vdots}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & & & & \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & & & \\ & 1 & \frac{4}{3} & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \frac{n}{n-1} & 0 \\ & & & & 1 & \frac{n+1}{n} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{1}{2})\mathbf{2}+\mathbf{1}]} \\ \overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{2}{3})\mathbf{3}+\mathbf{2}]} \\ \overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{4}{3})\mathbf{4}+\mathbf{3}]} \\ \vdots}]{} \begin{bmatrix} \frac{2}{1} & & & & \\ & \frac{3}{2} & & & \\ & & \frac{4}{3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{n+1}{n} \end{bmatrix};$$

so it is positive definite.

Alternatively, we can use determinants: Lets denote by $T(n)$ the determinant of the $n \times n$ matrix $\mathbf{A}_n$. By expanding the determinant along the first column, we get the formula

$$T(n) = 2T(n-1) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2T(n-1) - T(n-2)$$

Were we expand the second determinant along the first row. Also $T(1) = 2$ and $T(2) = 3$, so we can check $T(n) = n + 1 > 0$. So we have $\mathbf{A}_n$ is symmetric and all top left corner determinants are positive so it is positive definite.

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 4(a) $\mathbf{A}$ es de orden 3, con un autovalor $\lambda = 2$ y, por ser singular, otro autovalor $\lambda = 0$. Como la dimensión de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es 2, la multiplicidad geométrica del autovalor 0 es 2. Así pues, **A es diagonalizable** (pues es posible encontrar tres autovectores linealmente independientes).

□

(Grupo E curso 18/19) Ejercicio 4(b) Como el autoespacio asociado al autovalor $\lambda = 0$ es de dimensión dos, sabemos que podemos encontrar dos autovectores perpendiculares en dicho autoespacio. Necesitamos comprobar si el autoespacio asociado a $\lambda = 2$ es perpendicular al autoespacio asociado al autovalor $\lambda = 0$. Puesto que

$$\begin{pmatrix} 3, & 2, & 4, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5,$$

estos autoespacios no son perpendiculares entre si. Así pues, **A no es simétrica**.

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 1(a) Puesto que $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, es singular.

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 1(b) Since the rank is not 0, such a basis exist. We can apply Gram-Schmidt:

1. Elegimos un primer vector: $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Proyectamos un segundo vector sobre el primero y nos quedamos con la diferencia ("la parte del segundo vector" que es ortogonal al primer vector):

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a}_2 - [\boldsymbol{a}_1]\left([\boldsymbol{a}_1]^{\intercal}[\boldsymbol{a}_1]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}_1]^{\intercal}\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{8}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. ...y comprobamos que son perpendiculares: $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}10, & -7, & 2,\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 0.$

4. Por último normalizamos los dos vectores: $\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{3\sqrt{17}}\begin{pmatrix}10\\-7\\2\end{pmatrix}$,

   donde $\|\boldsymbol{v}_2\|^2 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \frac{(100+49+4)}{81} = \frac{153}{81} = \frac{17}{9}$ por lo que tenemos que $\|\boldsymbol{v}_2\| = \frac{\sqrt{17}}{3}$

An orthonormal basis:
$$\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix};\quad \frac{1}{3\sqrt{17}}\begin{pmatrix}10\\-7\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 1(c) Such product $\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\intercal$ does not exist since $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ is singular.

But we can use the two first columns of $\mathbf{A}$; hence, if $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}$, the projection matrix is $\mathbf{B}\left(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^\intercal$.

Or we can use an orthonormal basis of $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$:
$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 10/\sqrt{17}\\2 & -7/\sqrt{17}\\2 & 2/\sqrt{17}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}\sqrt{17}/\sqrt{17} & 10/\sqrt{17}\\2\sqrt{17}/\sqrt{17} & -7/\sqrt{17}\\2\sqrt{17}/\sqrt{17} & 2/\sqrt{17}\end{bmatrix} = \frac{1}{3\cdot\sqrt{17}}\begin{bmatrix}\sqrt{17} & 10\\2\sqrt{17} & -7\\2\sqrt{17} & 2\end{bmatrix},$$

so the projection matrix is $\mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^\intercal = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\intercal$.

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 1(d) Hence, the projection matrix is
$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\intercal = \frac{1}{(3\cdot\sqrt{17})^2}\begin{bmatrix}\sqrt{17} & 10\\2\sqrt{17} & -7\\2\sqrt{17} & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{17} & 2\sqrt{17} & 2\sqrt{17}\\10 & -7 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{9\cdot 17}\begin{bmatrix}117 & -36 & 54\\-36 & 117 & 54\\54 & 54 & 72\end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix}13 & -4 & 6\\-4 & 13 & 6\\6 & 6 & 8\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 2(a)

Una representación paramétrica de la recta es:
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \boldsymbol{a} + \alpha(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}4/3\\0\\4\end{pmatrix}$$

Puesto que $(-3,0,1,)$ y $(0,1,0,)$ son ortogonales a $(\frac{4}{3},0,4,)$, una ecuación cartesiana de la recta es
$$\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}4/3\\0\\4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-3x & +z = 0\\ \quad y & = 0\end{cases}.$$

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 3(a) Using leading principal minors:
$$4-b^2>0; \qquad 16-4-4b^2 = 12-4b^2 > 0;$$

or gaussian elimination
$$\begin{bmatrix}1 & b & 0\\b & 4 & 2\\0 & 2 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-b)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\b & 4-b^2 & 2\\0 & 2 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{\left[\left(\frac{2}{4-b^2}\right)\mathbf{2}+\mathbf{3}\right]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\b & 4-b^2 & 0\\0 & 2 & 4-\frac{4}{4-b^2}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}4-b^2 & >0\\16-4b^2-4 = 12-4b^2 & >0\end{cases}.$$

we get the same conclussion: $\begin{cases}4-b^2>0 & \rightarrow \quad |b|<2\\3-b^2>0 & \rightarrow \quad |b|<\sqrt{3}\end{cases}$; so $\boxed{-\sqrt{3}<b<\sqrt{3}.}$

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 3(b) Since

$$\boldsymbol{x}(\mathbf{A}^2+\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\mathbf{A}^2\boldsymbol{x}+\mathbf{I}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\mathbf{I}\boldsymbol{x};$$

is a sum of squares, where $\boldsymbol{x}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\boldsymbol{x} \geq 0$ and $\boldsymbol{x}\mathbf{I}\boldsymbol{x} > 0$.

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 3(c)

The matrix $\mathbf{M}^\intercal\mathbf{M}$ is symmetric positive definite unless not all columns are pivot columns ($rank < n$). In that case the matrix is symmetric positive *semi*definite.

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 4(a)

Since the rows of $\mathbf{Q}$ are vectors in $\mathbb{R}^3$, and since the rank of $\mathbf{Q}$ is 3, $\boxed{\mathcal{C}\left(\mathbf{Q}^\intercal\right) = \mathbb{R}^3}$.

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 4(b)

It is the proyection of $\boldsymbol{b}$ onto $\mathcal{C}\left(\mathbf{Q}\right)$. Hence, it is

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{Q}\left[\left(\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^\intercal\boldsymbol{b}\right] = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\intercal\boldsymbol{b},$$

in other words: $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{q}_3\end{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{Q}\widehat{\boldsymbol{x}},$ donde $\widehat{\boldsymbol{x}} = \left(\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^\intercal\boldsymbol{b} = \mathbf{Q}^\intercal\boldsymbol{b}.$

□

(Grupo E curso 17/18) Ejercicio 4(c)

The error vector $\boldsymbol{e} \equiv \boldsymbol{b}-\boldsymbol{p} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{Q}^\intercal\right)$:

$$\boldsymbol{b}-\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\intercal\boldsymbol{b} = \left[\mathbf{I}-\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\intercal\right]\boldsymbol{b}.$$

Or, in a different way

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p} = \left[\boldsymbol{b}\,|\,\mathbf{Q}\right]\begin{pmatrix}1\\-\mathbf{Q}^\intercal\boldsymbol{b}\end{pmatrix} = \left[\boldsymbol{b}\,|\,\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2 \quad \boldsymbol{q}_3\right]\begin{pmatrix}1\\-\widehat{\boldsymbol{x}}\end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \quad \widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{Q}^\intercal\boldsymbol{b}.$$

The error vector $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}$ belongs to $\mathcal{N}\left(\mathbf{Q}^\intercal\right)$ since: $\mathbf{Q}^\intercal\left(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}\right) = \mathbf{Q}^\intercal\left[\mathbf{I}-\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\intercal\right]\boldsymbol{b} = \left[\mathbf{Q}^\intercal-\mathbf{Q}^\intercal\right]\boldsymbol{b} = \mathbf{0}.$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 1(a)

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&4&5\\0&0&5&6\\2&0&0&7\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}3&4&5\\0&5&6\\0&0&7\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2&3&4\\3&4&5\\0&5&6\end{vmatrix} = 1\cdot(3\cdot5\cdot7)-2\cdot(4) = 97.$$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 1(b)

$\boxed{\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\intercal \text{ es una matriz singular y por tanto su determinante es } 0}$. Veámoslo:

Sea $\mathbf{E}$ el producto de varias matrices elementales tales que $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{E} = \underset{2\times3}{\mathbf{R}}$ es la forma escalonada reducida de $\mathbf{A}^\intercal$; puesto que $\mathbf{A}$ tiene rango 2, la última columna de $\mathbf{R}$ está llena de ceros, por tanto

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{E}$$

también tiene una columna de ceros; por tanto $\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\intercal$ es singular. O dicho de otra forma, puesto que $\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{E}$ tiene una columna de ceros

$$0 = \det(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\intercal)\cdot\det(\mathbf{E}),$$

pero, puesto que $\det(\mathbf{E}) \neq 0$ se deduce que $\det(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\intercal) = 0$.

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 2(a)

Los autovalores son 1 y -1 puesto que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0; & (\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0) \\ \lambda_1\lambda_2 = -1; & (\det \mathbf{A} = -1) \end{cases}$$

Para $\lambda = 1$ tenemos

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -16 & 8 \\ -28 & 14 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -16 & 8 \\ -28 & 14 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Por tanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$.

Para $\lambda = -1$ tenemos $\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -14 & 8 \\ -28 & 16 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{rr} -14 & 8 \\ -28 & 16 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(7)\mathbf{2}]}]{\substack{\tau \\ {[(4)\mathbf{1}]} \\ \tau}} \left[\begin{array}{rr} -56 & 56 \\ -112 & 112 \\ \hline 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ {[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}} \left[\begin{array}{rr} -56 & 0 \\ -112 & 0 \\ \hline 4 & \mathbf{4} \\ 0 & \mathbf{7} \end{array}\right]$$

Por tanto $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = -1$.

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 2(b)

Así pues

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}.$$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 2(c)

$$\mathbf{A}^{37} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{37}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\begin{bmatrix} 1^{37} & \\ & -1^{37} \end{bmatrix}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{A}.$$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 3(a)

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, entonces

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & \\ & 9 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 3(b)

1. Elegimos un primer vector: $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_1$
2. Proyectamos un segundo vector sobre el primero y nos quedamos con la diferencia (el componente del segundo vector que es ortogonal al primer vector):

   pero en este caso, como $\boldsymbol{a}_1$ ya es perpendicular a $\boldsymbol{a}_2$, resulta que $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a}_2$.

   (Si no nos damos cuenta y lo calculamos, obtenemos lo que acabamos de indicar:)

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \left[\boldsymbol{a}_1\right]\left(\left[\boldsymbol{a}_1\right]^\intercal\left[\boldsymbol{a}_1\right]\right)^{-1}\left[\boldsymbol{a}_1\right]^\intercal\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Proyectamos $\boldsymbol{b}$ sobre el espacio generado por los vectores anteriores y nos quedamos con la diferencia (el componente de $\boldsymbol{b}$ que es ortogonal a $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$. Como ya hemos calculado dicha proyección en el apartado anterior, solo queda calcular la diferencia:

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Por último normalizamos los tres vectores. Como todos ellos tienen norma 3 tenemos que

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 4(a)

Los autovectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son linealmente independientes puesto que corresponden a autovalores distintos. Además, puesto que dos autovalores son distintos de cero, rg $(\mathbf{A})$ =2, y dim$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 1$. Así,

- $\mathbf{A}\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \quad \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es el espacio generado por $\boldsymbol{u}$
  (es la recta consistente en todos los múltiplos de $\boldsymbol{u}$)
- $\begin{cases}\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\\ \frac{1}{2}\mathbf{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}\end{cases} \Rightarrow \ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \qquad \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es el espacio generado por $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$
  (es el plano consistente en todas las combinaciones lineales de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$)
- $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) \Rightarrow \quad \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = 0\}$
  (es el plano consistente en todos los vectores perpendiculares a $\boldsymbol{u}$)

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 4(b)

Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es el espacio generado por $\boldsymbol{u}$, solo necesitamos encontrar una solución particular. De $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{w}$ se deduce que $\mathbf{A}(\boldsymbol{v} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$; así pues, el conjunto de todas las soluciones es

$$\left\{\boldsymbol{x} \;\middle|\; \boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{v} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}\right) + a\boldsymbol{u}; \quad \forall a \in \mathbb{R}\right\}.$$

□

(Grupo F curso 17/18) Ejercicio 4(c)

Para toda matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ se tiene que $\mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\intercal} = \mathbf{I}$. Así $\det(\mathbf{Q})^2 = 1$, y por lo tanto $\det(\mathbf{Q})$ es 1 ó -1. Pero como $\det(\mathbf{A}) = 0$, $\mathbf{A}$ no puede ser ortogonal.

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-2\\2&2&1&-3\\0&3&-1&-4\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\\tau\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\\tau\\[(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\2&0&-1&1\\0&3&-1&-4\\\hline 1&-1&-1&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\[(1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\2&0&-1&0\\0&3&-1&-5\\\hline 1&-1&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\[(5/3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\2&0&-1&0\\0&3&-1&0\\\hline 1&-1&-1&-2/3\\0&1&0&5/3\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

Por tanto $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\5/3\\1\end{pmatrix}$.

□

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 2(a)

$$\left[\begin{array}{cccc}1&2&2&3\\1&2&4&3\\1&2&6&3\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\\tau\\[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\\tau\\[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&0&2&0\\1&0&4&0\\\hline 1&-2&-2&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

Por tanto, una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}\right\}$; una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$: $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

$\square$

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 2(b)

Es el conjunto de vectores

$$\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\\0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \forall a,b\in\mathbb{R} \right\}$$

$\square$

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 2(c)

$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\mathbb{R}^n$; $\quad\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\{\mathbf{0}\ \}$; $\quad$ Base para $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$: las n columnas de $\underset{n\times n}{\mathbf{I}}$; (O las columnas de $\mathbf{A}$ o las de $\mathbf{A}^{-1}$).

$\square$

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 3(a)

Los autovalores de $\mathbf{A}$ son 1 con multiplicidad uno y $1/4$ con multiplicidad dos. Cláramente los autovalores correspondientes al autovalor 1 son los múltiplos no nulos del vector $(1,1,1)$. Los restantes autovectores son los vectores no nulos del complemento ortogonal de $\mathcal{L}([(1,1,1);])$. Mediante la eliminación gaussiana podemos encontrar una base para dicho complemento ortogonal:

$$\left[\begin{array}{ccc}1&1&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ \boldsymbol{\tau}}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\\hline 1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]$$

una base de dicho complemento ortogonal es $\left[\left(-1,\quad 1,\quad 0,\right);\ \left(-1,\quad 0,\quad 1,\right);\right]$, es decir, pertenecen al autoespacio $\mathcal{E}_{\frac{1}{4}}(\mathbf{A})$ correspondiente a $\lambda=1/4$. Por tanto, los autovectores asociados a los autovalores $1/4$ son de la forma $\left((-y-z),\quad y,\quad z,\right)$ con $y,z\in\mathbb{R}$.

$\square$

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 3(b)

Pero no son perpendiculares entre si. Escojamos uno de ellos, (por ejemplo el primero) y busquemos otro vector no nulo del autoespacio $\mathcal{E}_{1/4}(\mathbf{A})$ que sea perpendicular.

$$0=(-1,1,0,)\cdot\left(a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=2a+b\ \Rightarrow\ b=-2a.\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\in\mathcal{E}_{\frac{1}{4}}(\mathbf{A}).$$

Para la matriz $\mathbf{Q}$ podemos escoger la siguiente matriz ortogonal

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

y entonces $\mathbf{D}$ es la matriz diagonal matrix con entradas 1, $1/4$, y $1/4$ en su diagonal principal. Tenemos por tanto que

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{A}^k=\mathbf{Q}\left(\lim_{k\to\infty}\mathbf{D}^k\right)\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}},$$

así pues

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{A}^k=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&0&0\\1/\sqrt{3}&0&0\\1/\sqrt{3}&0&0\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

$\square$

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 3(c)

Recuerde que si $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ entonces

$$(\mathbf{A}-b\mathbf{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{A}\boldsymbol{x}-b\boldsymbol{x}=(\lambda-b)\boldsymbol{x}$$

así que para contestar basta fijarse que el menor autovalor es $1/4$ y mayor autovalor es 1:

- Para cualquier $r < 1/4$ se verifica que $\mathbf{A} - r\mathbf{I}$ es definido positivo. Puesto que nos piden un r positivo, podemos escoger, por ejemplo, $r = 1/8$.
- Para cualquier $1/4 < s < 1$ se verifica que $\mathbf{A} - s\mathbf{I}$ algunos autovalores son positivos y otros negativos. Así que podemos escoger $s = 1/2$.
- Para cualquier $1 < t$ se verifica que $\mathbf{A} - t\mathbf{I}$ es definido negativo. Podemos escger $t = 2$.

$\square$

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 4(a)

Los vectores $(-1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$ forman una base para el subespacio $x+y+z = 0$. Así pues, el plano está formado por el siguiente conjunto de vectores

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$\square$

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 4(b)

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuyas columnas son los vectores de la base encontrada en el apartado anterior. Entonces $\mathbf{P}$, la matriz proyección sobre el subespacio $x + y + z = 0$, es

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} =& \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
=& \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
=& \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

La proyección de $(1, 2, 6,)$ sobre el plano $x + y + z = 0$ es simplemente

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\square$

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 5(a)

Puesto que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, $\det(\mathbf{P})^2 = \det(\mathbf{P})$, los únicos valores posibles son 0 o 1.

$\square$

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 5(b)

Partiendo de la matriz identidad $\mathbf{I}$, cualquier matriz permutación se obtiene mediante intercambios de sus filas o columnas, por tanto los valores sólo pueden ser ± 1.

$\square$

(Grupo B curso 16/17) Ejercicio 6(a)

Es necesario verificar dos cuestiones: que el vector $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p})$ es ortogonal a $\mathcal{L}\left([\boldsymbol{a}_1; \ldots \boldsymbol{a}_n;]\right)$ y que el vector $\boldsymbol{p}$ pertenece a dicho espacio. La primera condición se verifica comprobando que los productos escalares $\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p})$,..., $\boldsymbol{a}_n \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p})$ son todos nulos.

La segunda condición se puede verificar comprobando que la matriz $\mathbf{A}$ (cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$) y la matriz ampliada $[\mathbf{A}|\boldsymbol{b}]$ tienen el mismo rango, es decir, que tras la eliminación gaussiana por columnas sobre la matriz ampliada, su última columna se convierte en una columna de ceros.

$\square$

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 1(a)

Puesto que la tercera columna es igual a la suma de las dos primeras (que son independientes), el rango es 2; así que es un plano en $\mathbb{R}^3$ formado por todas las combinaciones lineales de las dos primeras columnas (que evidentemente son independientes):

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tales que} \quad \boldsymbol{x} = a \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}; \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 1(b)

Por eliminación gaussiana tenemos. . .

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&-b_1\\ 2&3&4&5&-b_2\\ 3&4&5&6&-b_3\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\\ \underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\\ \underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&-b_1\\ 2&-1&-2&-3&-b_2\\ 3&-2&-4&-6&-b_3\\ \hline 1&-2&-3&-4&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}\\ \underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&-b_1\\ 2&-1&0&0&-b_2\\ 3&-2&0&0&-b_3\\ \hline 1&-2&1&2&0\\ 0&1&-2&-3&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\\ \underset{[(-1)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\\ \underset{[(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}{\boldsymbol{\tau}}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&-b_2\\ -1&2&0&0&-b_3-b_1\\ \hline -3&2&1&2&-3b_1\\ 2&-1&-2&-3&2b_1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(b_2)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ -1&2&0&0&2b_2-b_3-b_1\\ \hline -3&2&1&2&2b_2-3b_1\\ 2&-1&-2&-3&2b_1-b_2\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

Así que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución si y sólo si $\boldsymbol{b}$ es una combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$:

$$\boldsymbol{b} = b_1 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\2b_2-b_1\end{pmatrix}.$$

La condición que deben satisfacer b_1, b_2 y b_3 es: $\quad 2b_2 - b_3 - b_1 = 0.$

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 1(c) Ello se debe a que $\mathbf{A}$ no es de rango completo por filas (visto en el apartado b).

Si por el contrario ocurriera que $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$, entonces podríamos resolver cualquier ecuación de la forma $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. De hecho, en tal caso la solución sería $\boldsymbol{x} = \mathbf{C}\boldsymbol{b}$, ya que $\mathbf{AC}\boldsymbol{b} = \mathbf{I}\boldsymbol{b}$. Pero en el apartado (b) hemos visto que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución para algunos vectores $\boldsymbol{b}$; por tanto, lo anterior no es posible y no existe tal matriz $\mathbf{C}$

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 1(d) En este caso $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, y $b_3 = -1$, así que el conjunto solución se puede exprear como el plano formado por el conjunto de puntos:

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4; \text{ tales que; } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\end{pmatrix} + a \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}; \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 2(a)

La respuesta es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2&6\\-1&7\end{bmatrix}.$$

Motivo:

$$\begin{bmatrix}2&6\\a&b\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\3a+b\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

Deducimos entonces que $\lambda_1 = 4$ y que por tanto $3a + b = 4$. De manera análoga, puesto que $\boldsymbol{x}_2$ es un autovector, tenemos

$$\begin{bmatrix}2 & 6\\ a & b\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\2a+b\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

De donde deducimos que $\lambda_2 = 5$ y que por tanto $2a + b = 5$. Resolviendo $\left[\begin{smallmatrix}3&1\\2&1\end{smallmatrix}\right]\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}\right)$

$$\left[\begin{array}{cc|c}3 & 1 & -4\\ 2 & 1 & -5\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(3)\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(3)\mathbf{3}]\\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c}3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -7\\ \hline 1 & -1 & 4\\ 0 & 3 & 0\\ \hline 0 & 0 & 3\end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\tau}{[(7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c}3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ \hline 1 & -1 & -3\\ 0 & 3 & 21\\ \hline 0 & 0 & 3\end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\tau}{[(\frac{1}{3})\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c}3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ \hline 1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 7\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right],$$

concluimos que $a = -1$ y $b = 7$.

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 2(b)

$\mathbf{B} = \mathbf{S}\ \mathbf{D}\ \mathbf{S}^{-1}$, donde las columnas de $\mathbf{S}$ son los vectores $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$, y $\mathbf{D}$ es la matriz diagonal con entradas 1 y 0:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{bmatrix}.$$

Entonces $\mathbf{D}^{10} = \mathbf{D}$ y por tanto $\mathbf{B}^{10} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{10}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{B}$.

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 3.

El producto $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ es la proyección sobre el espacio columna de $\mathbf{P}_1$, seguido de la proyección sobre el espacio columna de $\mathbf{P}_2$. Puesto que el espacio columna de $\mathbf{P}_2$ contiene al espacio columna de $\mathbf{P}_1$, la segunda proyección no cambia a los vectores. Así

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 4.

$$\begin{bmatrix}2 & b & 3\\ b & 2 & b\\ 3 & b & 4\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\overset{\tau}{[(-\frac{b}{2})\mathbf{2}+\mathbf{1}]}\\ \overset{\tau}{[(-\frac{3}{2})\mathbf{3}+\mathbf{1}]}}} \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ b & 2-b & -b/2\\ 3 & -b/2 & -1/2\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\overset{\tau}{[(-\frac{3}{2})\mathbf{3}+\mathbf{1}]}\\ \overset{\tau}{[(-\frac{b}{2})\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}]{} \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2-b & -b/2\\ 0 & -b/2 & -1/2\end{bmatrix},$$

como el último elemento de la diagonal es negativo, $\mathbf{A}$ no puede ser definida positiva

Otra forma alternativa:

$\mathbf{A}$ tiene 3 autovalores positivos si y solo si es definida positiva. Para comprobar si es posible estudiaremos en qué casos los tres subdeterminates correspondientes a sus tres menores principales son positivos. El primer subdeterminante es 2, que es positivo. El determinante del siguiente menor principal 2 por 2 es $4 - b^2$, que es positivo siempre que $-2 < b < 2$. Finalmente calculamos $\det \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} =& 2\det\begin{bmatrix}2 & b\\ b & 4\end{bmatrix} - b\det\begin{bmatrix}b & b\\ 3 & 4\end{bmatrix} + 3\det\begin{bmatrix}b & 2\\ 3 & b\end{bmatrix}\\ =& 2(8-b^2) - b(4b-3b) + 3(b^2-6) = -2.\end{aligned}$$

que es negativo sea cual sea el valor de b, por lo que concluimos que **$\mathbf{A}$ no puede tener nunca tres autovalores positivos**..

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 5(a)

Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, el espacio columna de $\mathbf{A}$ debe tener dimensión menor que m; es decir el rango es $r < m$. Puesto que $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ tiene exactamente una solución, Las columnas de $\mathbf{A}^{\intercal}$ son independientes. Esto significa que el rango de $\mathsf{A}^\intercal$ es $r = m$. Esta contradicción prueba que no es posible encontrar tales A, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 6. De nuevo, hay distintas formas de responder. Primera: recuerde que una matriz simétrica es positiva definida si y sólo si se puede escribir como $\mathsf{R}^\intercal\mathsf{R}$ donde R tiene columnas linealmente independientes. En nuestro caso, sean $c_1, \ldots, c_n$ las entradas de la diagonal principal de C y sea B una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son $\sqrt{c_1}, \ldots, \sqrt{c_n}$ (tomando la raiz cuadrada positiva). Entonces $\mathsf{C} = \mathsf{B}^\intercal\mathsf{B}$ y por tanto $\mathsf{K} = \mathsf{A}^\intercal\mathsf{B}^\intercal\mathsf{B}\mathsf{A} = (\mathsf{B}\mathsf{A})^\intercal(\mathsf{B}\mathsf{A})$ así que tomamos $\mathsf{R} = \mathsf{B}\mathsf{A}$. Puesto que A tiene columnas independientes y B es invertible (porque los c_i son no nulos), concluimos que $\mathsf{B}\mathsf{A}$ también tiene columnas independientes.

Segunda manera: Sea $\boldsymbol{x}$ un vector no nulo. Tenemos que demostrar que $\boldsymbol{x}\mathsf{K}\boldsymbol{x} > 0$. Primero, puesto que A tiene columnas independientes, esto significa que su espacio nulo es el conjunto $\{\mathbf{0}\}$, por lo que $\mathsf{A}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Tomemos $\boldsymbol{y} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$. Puesto que C es diagonal y con todos los númeoros de su diagonal positivos, es definida positiva (esto viene de la definición de autovalor, o de sus subdeterminantes, por ejemplo). Así pues $\boldsymbol{y}\mathsf{C}\boldsymbol{y} > 0$, pero $\boldsymbol{y}\mathsf{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\mathsf{K}\boldsymbol{x}$, por lo que hemos termindo la demostración.

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 7(a) Hay varias formas para calcularlo. Por ejemplo usando la expansión de Laplace a lo largo de la segunda fila, lo que nos da

$$-x\begin{vmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

El segundo determinante es cero puesto que las dos primeras filas son dependientes, así que basta expandir el primero. Lo más sencillo es expandir por la primera columna, lo que nos da como resultado $-x{\cdot}x(x{-}x^2) = -x^3(1-x)$

□

(Grupo E curso 16/17) Ejercicio 7(b) A es singular sólo cuando el determinante es 0. Es decir $-x \cdot x(x-x^2) = -x^3(1-x) = 0$, lo que significa que los valores de x son 0 ó 1.

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 1(a) The column space is a plane, hence it has dimension 2. That means that any two independent columns vectors in the plane plus the zero vector will do. For example,

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 1(b) The column space is a plane (a plane is 2-dimensional), so the rank of the matrix is 2, which is less than the order of the matrix. In particular the sum of the rows is the zero vector (since the sum of each column is zero), therefore, its rows are linearly dependent.

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -10 \\ 4 & 5 & 6 & -28 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 4 & -3 & -6 & -28 \\ \hline 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(10)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 12 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(4)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

So, a parametric equation is

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 3(a) Two vectors are orthogonal if and only if their scalar product (dot product) is zero. So

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = 0$$

The left hand side expands to

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\|\boldsymbol{u}\|^2-\|\boldsymbol{v}\|^2=0$$

Thus $\|\boldsymbol{u}\|^2=\|\boldsymbol{v}\|^2$ so $\|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|$.

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 3(b) Since $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{w}$ are unit vectors, their lengths (and hence their lengths squared) are all equal to 1. So $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}=1$. Since each vector is perpendicular to the others, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$. So the dot product of the two vectors given is

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})= &\quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}\\ &-3\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}-3\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}\\ &+2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}\\ =&1-3+2=0.\end{aligned}$$

so they are orthogonal.

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 4(a) The characteristic polynomial is

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\lambda-5)(\lambda-3)-1=\lambda^2-8\lambda+14$$

The eigenvalues are its roots,

$$\lambda=\frac{8\pm\sqrt{64-56}}{2}=4\pm\sqrt{2}.$$

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 4(b) The eigenvectors with eigenvalue 3 are nonzero solutions of $\mathbf{B}\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{v}$, or equivalently, nonzero solutions of $(\mathbf{B}-3\mathbf{I})\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. By column reduction we get

$$\left[\begin{array}{rrr}-1&-1&0\\2&-2&1\\5&-7&3\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\tau}\left[\begin{array}{rrr}-1&0&0\\2&-4&1\\5&-12&3\\\hline 1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(4)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{\tau}\left[\begin{array}{rrr}-1&0&0\\2&0&1\\5&0&3\\\hline 1&-1&0\\0&1&0\\0&4&1\end{array}\right].$$

Thus the set of eigenvectors with eigenvalue 3 can be written as

$$\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\boldsymbol{v}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\forall c\in\mathbb{R}\right\}$$

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 5(a) We want to solve the following 7 equations: $\begin{cases}c-3d=0\\c-2d=0\\c-\ \ d=0\\c\qquad=1\\c+\ \ d=0\\c+2d=0\\c+3d=0\end{cases}$.

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 5(b) First we need to find the projection of $\boldsymbol{y}$ onto the plane generated by two vectors: $(1,1,1,1,1,1,1,)$ and $(-3,-2,-1,0,1,2,3,)$. As $\boldsymbol{y}$ is perpendicular to the second vector, we only need to find the projection of $\boldsymbol{y}$ on the line generated by the first vector, which is $(1/7,1/7,1/7,1/7,1/7,1/7,1/7,)$. Now we need to solve the seven equations: $\begin{cases}c-3d=1/7\\c-2d=1/7\\c-\ \ d=1/7\\c\qquad=1/7\\c+\ \ d=1/7\\c+2d=1/7\\c+3d=1/7\end{cases}$; so $c=1/7$ and $d=0$.

Alternatively, we can denote by $\mathbf{A}$ the matrix that has these two vectors as its two columns, then $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & \\ & 28 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. The two equations corresponding $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{y}$ are $\begin{cases} 7c & = 1 \\ & 28d = 0 \end{cases}$, resulting in the same solution $c = 1/7$ and $d = 0$.

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 5(c) If we used the first method above, we already calculated the projection as $(1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7,)$. If we used the second method, the projection is $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7,)$.

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 6.

$$(\mathbf{A}^2 + \mathbf{A})\boldsymbol{v} = \mathbf{A}^2\boldsymbol{v} + \mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{v} = (\lambda^2 + \lambda)\boldsymbol{v}.$$

□

(Grupo E curso 15/16) Ejercicio 7.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-2)\cdot(2) = 12.$$

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 1(a) Dos vectores (linealmente independientes) paralelos al plano son $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = (0, 2, 0,)$ y $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} = (0, 0, 3,)$. Así, puesto que $\boldsymbol{a}$ está en el plano,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + p\,\boldsymbol{v} + q\,\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

es una representación paramétrica del plano. Hay muchas otras.

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 1(b) Puesto que

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \hline x & y & z \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Entonces, $\boxed{\{x = 1}$ es una representación implícita (o cartesiana) del plano. Pero hay muchas otras.

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 2(a) Puesto que $\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{u} = 0$, el vector $\mathbf{0}$ pertenece a $\mathcal{V}$, así que $\mathcal{V}$ no es vacío. Ahora queda verificar las dos propuedades de los subespacios.

1. Sean $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ vectores en $\mathcal{V}$. Entonces $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = 0$ y $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u} = 0$. Así $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u} = 0 + 0 = 0$ que significa que $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ pertenece a $\mathcal{V}$. Por tanto $\mathcal{V}$ es cerrado bajo la operación suma de vectores.

2. Sea $\boldsymbol{x}$ un vector en $\mathcal{V}$ y c un escalar cualquiera. Puesto que $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = 0$, $(c\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u} = c(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}) = 0$ entonces $c\boldsymbol{x}$ pertenece a $\mathcal{V}$. Así, $\mathcal{V}$ es cerrado bajo la multiplicación por escalares.

□

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 2(b)

$$\left[\begin{array}{c} [\boldsymbol{u}]^\mathsf{T} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ \boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ \boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto

$$\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

es una base de $\mathcal{V}$.

$\square$

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 2(c) La base de $\mathcal{V}$ del apartado (b) tiene tres elementos, así que la dimensión de $\mathcal{V}$ es $\boxed{3}$.

Aunque no hubieramos calculado una base, sabemos que la dimensión de $\mathcal{V}$ es 3 ya que $\mathcal{V}$ es el complemento ortogonal del espacio vectorial generado por $\boldsymbol{v}$

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}\{\boldsymbol{u}\}^{\perp} \subset \mathbb{R}^4;$$

y puesto que $\dim(\mathcal{L}\{\boldsymbol{u}\}) = 1$, entonces necesariamente $\dim(\mathcal{V}) = 3$.

$\square$

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 3(a)

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{bmatrix}2-\lambda & 4 & 6\\ 0 & 7-\lambda & 8\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{bmatrix} = (2-\lambda)(7-\lambda)(3-\lambda)$$

Así que los autovalores de $\mathbf{A}$ son 2, 7 y 3.

$\square$

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 3(b)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}-3\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr}-1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & -4 & -2\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\overset{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{1}}+\mathbf{3}]}]{{[(2)\overset{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{1}}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{rrr}-1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ \hline 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right].$$

Así que una base es

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Es decir,

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{N}\left(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}\right) = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\right]\right).$$

$\square$

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 4(a)

$$\mathbf{P}_a = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}4 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

$\square$

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 4(b)

$$(\mathbf{P}_a\mathbf{P}_v)\boldsymbol{v} = \mathbf{P}_a\boldsymbol{v} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}10\\5\\10\end{bmatrix} = \frac{5}{9}\boldsymbol{a}$$

y así $\boldsymbol{a} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{P}_a\mathbf{P}_v\right) \subset \mathcal{C}\left(\mathbf{P}_a\right)$. Puesto que $\mathcal{C}\left(\mathbf{P}_a\right)$ es generado por $\boldsymbol{a}$, una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{P}_a\mathbf{P}_v\right)$ viene dada por $\{\boldsymbol{a}\}$.

$\square$

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 5.

La condición dice que $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I}$ es singular. Pero sabemos que, si $\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_n$ son autovalores de $\mathbf{A}$, entonces los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$. La condición de que $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I}$ es singular nos dice que $(\lambda_i^2 - 4)$ es cero para algún i, y por lo tanto $\lambda_i = 2$ ó $\lambda_i = -2$. Es decir, $\mathbf{A}$ tiene un autovalor 2 ó -2.

$\square$

(Grupo H curso 15/16) Ejercicio 6. $q(x,y,z) = x^2 + 6xy + y^2 + az^2 = \begin{pmatrix} x, & y, & z, \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}]{\underset{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

La forma cuadrática es *in*definida (sea cual sea el valor de a).

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 1(a) Siendo $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, la matriz proyección que proyecta cada $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4$ sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$ (que es la recta generada por $\boldsymbol{q}_4$) viene dada por la expresión

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\intercal} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 1(b) Siendo $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, la matriz proyección que proyecta a todo $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4$ sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$ (que es el subespacio generado por $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ y $\boldsymbol{q}_3$) viene dado por la expresión

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\intercal} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 1(c) Debemos resolver el sistema $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y}$. Puesto que $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, tenemos $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Entonces $\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 1(d) $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$.

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 2(a) Que las columnas de $\mathbf{B}$ sean dependientes significa por definición que existe un vector $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Pero entonces también tenemos que $\mathbf{C}\boldsymbol{x} = (\mathbf{AB})\boldsymbol{x} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$; que significa que el mismo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ vale para mostrar que las columnas de $\mathbf{C}$ son dependientes.

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 2(b) Las columnas de $\mathbf{B}$ son dependientes, puesto que son cinco vectores de $\mathbb{R}^3$, y $5 > 3$. Así, por el apartado (a), las columnas de $\mathbf{AB}$ deben ser dependientes. Sin embargo, las columnas de $\mathbf{I}$ son independientes, así que $\mathbf{AB}$ nunca puede ser igual a $\mathbf{I}$. [Nota: Cambiar el orden de las matrices importa. De hecho uno puede encontrar una matriz $\mathbf{A}$ de orden 3×5 y una matriz $\mathbf{B}$ de orden 5×3 tales que $\mathbf{AB} = \underset{3\times 3}{\mathbf{I}}$ — así, cualquier "demostración" que no es sensible al orden en que aparecen $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ no vale].

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[TipoII]{\substack{\tau \\ [(1/2)\mathbf{2}] \\ \tau \\ [(1/3)\mathbf{3}] \\ \tau \\ [(1/4)\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[TipoI]{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ \tau \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}] \\ \tau \\ [(1)\mathbf{4}+\mathbf{3}] \\ \tau \\ [(1)\mathbf{4}+\mathbf{1}] \\ \tau \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[Permutaciones]{\substack{\tau \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}] \\ \tau \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Puesto que $\mathbf{AE} = \mathbf{B}$ entonces $|\mathbf{A}||\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$, cuyo determinante es menos uno $\Rightarrow |\mathbf{A}| = \frac{-1}{|\mathbf{E}|}$.

Revisando las operaciones tipo II y permutaciones realizadas tenemos que, $|\mathbf{E}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot(-1)\cdot(-1) = \frac{1}{24}$, de donde deducimos que $|\mathbf{A}| = -24$.

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 4(a) Para matrices reales y simétricas, los autovectores de autovalores distintos son ortogonales (los autoespacios son ortogonales entre si). Sencillamente por inspección, es evidente que para que $\boldsymbol{v}_3$ sea perpendicular a $\boldsymbol{v}_2$, sus dos primeras componentes deben ser iguales. Así, podemos tomar $\boldsymbol{v}_3$ como $(1; 1; -2)$.

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 4(b)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_1 =& \boldsymbol{v}_1/\|\boldsymbol{v}_1\| = (1,1,1,)/\sqrt{3} \\ \boldsymbol{q}_2 =& \boldsymbol{v}_2/\|\boldsymbol{v}_2\| = (1,-1,0,)/\sqrt{2} \\ \boldsymbol{q}_2 =& \boldsymbol{v}_2/\|\boldsymbol{v}_2\| = (1,1,-2,)/\sqrt{6} \end{aligned}$$

Por tanto $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0/\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 4(c) Los autovalores son la cuarta potencia de los de $\mathbf{A}$, por tanto $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 0$. Los autovectores de $\mathbf{A}^4$ son los mismos que los de $\mathbf{A}$.

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 5(a) **Falso.** Si fueran semejantes tendrían los mismos autovalores, y por lo tanto tendrían la misma traza y determinante. Pero $\det \mathbf{B} = 5 = -\det \mathbf{A}$, y además $\operatorname{tr}\big(\mathbf{A}\big) = 4$ pero $\operatorname{tr}\big(\mathbf{B}\big) = 6$.

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 5(b) **Falso.** Si el espacio columna está generado por $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, entonces la matriz tiene rango uno (el segundo vector es el doble del primero). Pero el vector fila $\begin{pmatrix}2, & 2,\end{pmatrix}$ no es múltiplo de $\begin{pmatrix}1, & 4,\end{pmatrix}$, así que la matriz tiene que tener rango 2. Ambas condiciones son incompatibles.

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 6. $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 10\boldsymbol{v}.$

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 7.

$$\left[\begin{array}{rrr} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & a \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}] \\ \tau \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ \tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -16 & -8 \\ 4 & -6 & a-4 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1/2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -16 & 0 \\ 4 & -6 & a-1 \\ \hline 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & -3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Son dependientes si $a = 1$; pues en tal caso el rango es 2 ya que la combinación: $-1/2$ de la primera columna, más $1/2$ de la segunda más la tercera es el vector nulo $\mathbf{0}$.

$\square$

(Grupo A curso 14/15) Ejercicio 8.

Puesto que el determinante es negativo independientemente del valor de b:

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ b & 2 & b \\ 3 & b & 4 \end{vmatrix} = 16 + 6b^2 - 18 - 6b^2 = -2 \quad < 0;$$

esta matriz nunca puede tener sus tres autovalores positivos.

$\square$

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 1(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -2\alpha \\ 4 & 2 & 2 & -3\alpha \\ 6 & 2 & 3 & -2\beta \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[1\rightleftharpoons 3] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\alpha \\ 2 & 0 & 0 & -3\alpha \\ 3 & -1 & 0 & -2\beta \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\alpha \\ 2 & 0 & 0 & -3\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -2\beta \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(2\alpha)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(2\beta)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 6\alpha - 2\beta \\ -2 & 1 & -2 & -4\alpha + 2\beta \end{array}\right]$$

El sistema es resoluble si $\alpha = 0$.

$\square$

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 1(b)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\beta \\ 2\beta \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}.$$

$\square$

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 2.

El espacio columna de $\mathbf{A}$ está contenido en $\mathbb{R}^m$, y el espacio columna de $\mathbf{B}$ está contenido en $\mathbb{R}^M$. Si $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \subseteq \mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$, ello quiere decir que ambos espacios está contenido en el mismo espacio Euclideo, así que $M = m$. La dimensión del espacio columna es el rango de la matriz, por tanto, si $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \subseteq \mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$, esto significa que $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \leq \dim \mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$, por tanto $r \leq R$. No hay relaciones entre N and n; por ejemplo $n = N$ si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $N \leq n$ si $\mathbf{B} = [\mathbf{A}|\mathbf{A}]$, y $n \leq N$ si $\mathbf{A} = [\mathbf{B}|\mathbf{B}]$.

$\square$

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 3(a)

Por ejemplo $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\square$

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 3(b)

Puesto que $\mathbf{A}$ tiene un polinomio caraterístico de grado 5, sabemos que $\mathbf{A}$ es de orden 5×5. Puesto que 0 no es raíz de $p(\cdot)$, entonces tampoco es un autovalor de $\mathbf{A}$, y por tanto $\mathbf{A}$ es invertible y su rango 5.

$\square$

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 3(c)

Teniendo en cuenta el cálculo de la última columna en el producto de matrices de la pista, tenemos que $-3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$. Así

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 3(\mathbf{A}\boldsymbol{u}) + 2(\mathbf{A}\boldsymbol{v}) = 3(-\boldsymbol{u}) + 2(3\boldsymbol{v}) = 3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -24 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donde hemos empleado el hecho de que $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ son autovectores de manera que $\mathbf{A}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}$.

$\square$

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 4(a)

La solución es $\det \mathbf{A} = -x^2 - y^2 - z^2$. Pero antes de discutir como llegar a esa respuesta, tenga en cuenta que la expresión $-x^2 - y^2 - z^2$ es simétrica en las tres variables x, y y z. Es decir, si intercambiamos los papeles de estas variables, el mensaje de esta expresión no cambia. ¿Por qué podemos anticipar que $\det \mathbf{A}$ posee esta propiedad? Bueno, si intercambiamos las filas 2 y 3 de $\mathbf{A}$, y después las columnas 2 y 3, acabamos obteniendo

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 0 & y & x & z \\ y & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que es igual que $\mathbf{A}$, pero con los papeles de x e y intercambiados. Con cada intercambio hemos multiplicado el determinante por menos uno, así que en total lo hemos multiplicado por $(-1)^2 = 1$, y por lo tanto $\mathbf{A'}$ tiene el mismo determinante que $\mathbf{A}$. De aquí concluimos que $\det \mathbf{A}$, sea lo que sea, debe ser una expresión simétrica en x e y. Con un razonamiento similar se puede demostar que es simétrica para las tres variables x, y y z. Vayamos ahora al cálculo de $\det \mathbf{A}$.

Mediante operaciones elementales Tipo I alcanzamos la forma escalonada: de la columna 1 de $\mathbf{A}$ quitamos x veces la columna 2, y veces la columna 3, y z veces la columna 4. Estas operaciones no cambian el determinante, así que

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -x^2 - y^2 - z^2 & y & x & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x^2 - y^2 - z^2.$$

□

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 4(b)

Una matriz es singular si y sólo si su determiante es cero. Así que se nos pregunta para qué valores de la tripleta $(x, y, z,)$

$$\det \mathbf{A} = -x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

o en otras palabras

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Así, el lado izquierdo es el cuadrado de la distancia desde el punto $(x, y, z,)$ al origen en $\mathbb{R}^3$. Puesto que sólo el origen está a distancia 0 del origen, la matriz $\mathbf{A}$ es singular si y sólo si $x = y = z = 0$.

□

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 5.

$\begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix} < 0;\quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} > 0;\quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2a^2 + 2a + 4;$ una parábola que corta el eje de las x en 1 y -2.

- Si $-2 < a < 1$ Definida negativa
- Si $a = -1$ ó $a = 2$ semi-definida negativa
- No definida en el resto de casos.

□

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 6(a)

Los autovalores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

son la solución a la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) - 16 = 0; \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 5;\ \lambda_2 = -5.$$

Puesto que $\mathbf{A}$ es de orden 2, también podemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 = & \det \mathbf{A} = 25 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = & \operatorname{tr} \mathbf{A} = 0 \end{cases}$$

con idéntico resultado.

□

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 6(b)

- para $\lambda_1 = 5$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 3-5 & 4 \\ 4 & -3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

son los múltiplos del auto-vector $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- para $\lambda_2 = -5$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 3+5 & 4 \\ 4 & -3+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

son los múltiplos del auto-vector $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 7.
Si $\boldsymbol{v}$ es un autovector con autovalor λ, entonces tenemos que $\mathbf{A}^2\boldsymbol{v} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\boldsymbol{v}) = \lambda\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v}$. De manera análoga $\mathbf{A}^3 = \lambda^3\boldsymbol{v}$. Así λ debe satisfacer $\lambda^3 = 2\lambda^2 - \lambda$, lo que significa que es 0 ó 1.

□

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 8(a)
$\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 5$

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \text{espacio generado por} \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \to \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{espacio generado por} \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \to \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

(Grupo C curso 14/15) Ejercicio 8(b)

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b \end{pmatrix}$$

Así que $\boldsymbol{u}_0 = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 1(a)

$$\begin{cases} c + 0\cdot d &= 1 \\ c + 1\cdot d &= 2 \\ c + 2\cdot d &= -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 1(b)
Las ecuaciones normales $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$ son

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{c} \\ \widehat{d} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{c} \\ \widehat{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuya solución es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\tau\\[(1/3)\mathbf{1}]}]{\substack{\tau\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\tau\\[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau\\[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 1/3 & -1 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \widehat{c} \\ \widehat{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 1(c)

$\boldsymbol{y} \notin \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ así que $y = \frac{5}{3} - x$ es el mejor ajuste, y

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}$$

es el punto de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ más próximo a $\vec{y}$.

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 1(d)

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}$$

Así que

$$\|\boldsymbol{e}\|^2 = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e} = \frac{1}{9}\left(-2,\quad 4,\quad -2,\right)\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix} = \frac{24}{9};\quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{e}\| = \frac{\sqrt{24}}{3}.$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 2(a)

La traza de $\mathbf{A}$ es $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$; el determinante de $\mathbf{A}$ es $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$.

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 2(b)

$\mathbf{A}$ siempre se puede diagonalizar, pues siendo una matriz de orden 3, tiene *tres* autovectores *linealmente independientes*

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 2(c)

Podemos obtener $\mathbf{A}$ usando $\mathbf{SDS}^{-1}$ donde $\mathbf{S}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$,

$$\mathbf{S} = \left[\boldsymbol{x}_1;\ \boldsymbol{x}_2;\ \boldsymbol{x}_3;\right]$$

y $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con autovalores respectivos λ_1, λ_2, λ_3

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 2(d)

Para que la matriz sea simétrica tenemos que asegurarnos que el tercer autovalor $\boldsymbol{x}_3$ es ortogonal a los otros dos.

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\tau\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & -1 & \mathbf{-1} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

(aunque se puede descubrir por simple inspección). En cualquier caso, $\boldsymbol{x}_3$ debe ser un multiplo de $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}$. Para que la matriz sea semidefinida positiva, el tercer autovalor debe ser $\lambda_3 = 0$.

Aunque no se pide, aquí tiene un ejemplo que cumple los requisitos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 5 & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\-2 & 8 & -2\\3 & -2 & 3\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 3(a)
Porque $\mathbf{A}$ no es simétrica.

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 3(b)
Cuando $a > 0$ y $\begin{vmatrix}a & 1\\1 & b\end{vmatrix} = ab - 1 > 0$; es decir, cuando $a > 0$ y $b > \frac{1}{a}$.

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 4(a)
Cualquier valor excepto el cero.

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 4(b)
Puesto que los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son el cuadrado de los autovalores de $\mathbf{A}$, los únicos autovalores posibles son cero o uno. Así pues, el determinante sólo puede ser cero o uno

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 4(c)
Deteminante igual a 6.

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 5(a) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 5(b)
Puesto que el determinante no es cero, la matriz tiene rango completo, esto es, el rango es 3.

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 6(a)

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & 4\\1 & 1 & 3 & 9\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\\1 & 3 & 9\end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4.$$

El elemento (1,1) de la inversa de $\mathbf{A}$ es el primer elemento de la matriz adjunta $\mathbf{Adj(A)}$ dividido por el determinante.

$$\frac{\operatorname{cof}(\mathbf{A})_{11}}{\det \mathbf{A}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 6(b)

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & 4\\1 & 1 & 3 & 9\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\\1 & 3 & 9\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\\1 & 3 & 9\end{vmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

□

(Grupo E curso 14/15) Ejercicio 6(c)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix}2 & 1-x & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & 4\\1 & 1 & 3 & 9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & 4\\1 & 1 & 3 & 9\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & -x & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 2 & 4\\1 & 0 & 3 & 9\end{vmatrix} = 2 + x\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\\1 & 3 & 9\end{vmatrix} = 2 + 2x.$$

Por tanto, $\det \mathbf{A} = 2x + 2$; y cuando $x = -1$ la matriz es singular ($\det \mathbf{A} = 0$).

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 1(a) El rango de $\mathbf{P}$ es 2. Cualquier vector perpendicular al sub-espacio generado por $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ está en el espacio nulo de $\mathbf{P}$, y el complemento ortogonal del sub-espacio generado por $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ es de dimensión 3 (es decir, hay tres vectores linealmente independientes que son proyectados sobre $\mathbf{0}$ por la matriz $\mathbf{P}$). Esto es precisamente el espacio nulo de $\mathbf{P}$, y puesto que $\operatorname{rg}\left(\mathbf{P}\right) = \dim \mathcal{C}\left(\mathbf{P}\right) = 5 - \dim \mathcal{N}\left(\mathbf{P}\right)$, el rango de $\mathbf{P}$ es $5 - 3 = 2$.

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 1(b) El espacio nulo de $\mathbf{P}$ es el espacio nulo por la izquierda de $\mathbf{A}$. De hecho, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\boldsymbol{v} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{v} = 0 \text{ and } \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{v} = 0\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}_1 = 0 \text{ and } \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{v}\mathbf{A} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 1(c) Puesto que $\mathbf{P}$ es una matriz proyección, tenemos que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\intercal}$. Para demostrar que $\mathbf{Q}$ es una matriz ortogonal, necesitamos comprobar que $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\intercal} = \mathbf{I}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\intercal} &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{P})(\mathbf{I} - 2\mathbf{P})^{\intercal}\\ &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{P})(\mathbf{I}^{\intercal} - 2\mathbf{P}^{\intercal})\\ &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{P})(\mathbf{I} - 2\mathbf{P}) && \mathbf{I} \text{ y } \mathbf{P} \text{ son simétricas}\\ &= \mathbf{I}(\mathbf{I} - 2\mathbf{P}) - 2\mathbf{P}(\mathbf{I} - 2\mathbf{P})\\ &= \mathbf{I} - 2\mathbf{P} - 2\mathbf{P} + 4\mathbf{P}^2\\ &= \mathbf{I} && \text{Puesto que para una matriz proyección tenemos } \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\end{aligned}$$

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 2. Podríamos complicarnos la vida he intentar una respuesta completa encontrando una base del espacio ortogonal al espacio nulo. Es decir, encontrando una base para el espacio fila; pero como sólo nos piden un vector, cualquier fila de la matriz de coeficientes es una buena respuesta. Es más, el vector $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$ es la respuesta más sencilla.

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 3(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\4&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&4&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-4)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}$
$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{I}.$

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 3(b) Intercambiar las columnas 1 y 2 corresponde a

$$\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Restar la columna 1 de la columna 3 corresponde a

$$\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} := \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Restar cuatro veces la columna 3 de la columna 2 corresponde a

$$\mathbf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{bmatrix}.$$

Juntando todo tenemos

$$\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\cdot\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\cdot\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \mathbf{A}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Así, $\mathbf{A}^{-1} = \big(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\tau}}\big) \cdot \big(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}\big) \cdot \big(\mathbf{I}_{\underset{[(-4)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\tau}}\big) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 4. $\det \mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A} = \det \underset{3\times 3}{\mathbf{I}} = 1$

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 5(a) Puesto que

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{P}) \cdot \det(\mathbf{L}) \cdot \det(\mathbf{U}),$$

donde hemos usado que $\det(\mathbf{MN}) = \det(\mathbf{M})\det(\mathbf{N})$, para cualesquiera dos matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ de orden $n \times n$. Ahora calcularemos los determinantes del lado derecho. El determinante de matrices triangulares es el producto de sus elementos de la diagonal principal. Así que $\det(\dot{\mathbf{U}}) = 1$ y $\det(\mathbf{L}) = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$. Por otra parte, el determinante cambia de signo cuando se intercambian dos filas o dos columnas. Así

$$\det(\mathbf{P}) = \begin{cases} +1 \text{ si } \mathbf{P} \text{ es par (número par de intercambios)} \\ -1 \text{ si } \mathbf{P} \text{ es impar (número inpar de intercambios);} \end{cases}$$

por tanto

$$\det(\mathbf{A}) = \pm d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$$

donde el signo depende del número de intercambios realizado, es decir, de si $\mathbf{P}$ es par o impar.

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 6(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ con polinomio caracteristico λ^2 (así que el único autovalor es $\lambda = 0$) y donde todos los autovectores son múltiplos de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 6(b) $\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 4 + 1 + 0 + 16 + 4 = 25$ asi que podemos tomar $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\| = (2/5, -1/5, 0.4/5, -2/5)$.

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 7. Los autovectores de $\mathbf{A}^{-1}$ son los mismos que los de $\mathbf{A}$. Sus autovalores son los inversos de los de $\mathbf{A}$: 1, 3, y 2.

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 8(a) Puesto que la matriz es triangular, los autovalores coinciden con los números de la diagonal principal (¡Ojo, esto es cierto sólo cuando la matriz es triangular!)

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 3.$$

□

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 8(b) Para diagonalizar $\mathbf{A}$ primero necesitamos encontrar un autovector asociado a cada uno de los autovalores (pues ningún autovalor se repite).

Para $\lambda_1 = 1$ Hemos de encontrar una solución al sistema: $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Por simple inspección es evidente que $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución.

Para $\lambda_2 = 3$ Hemos de encontrar una solución al sistema: $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

De nuevo, por simple inspección es evidente que $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es una solución.

Así pues, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$\square$

(Grupo H curso 14/15) Ejercicio 8(c) $\mathbf{A}^5 = (\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1})^5 = \mathbf{S}\mathbf{D}^5\mathbf{S}^{-1}$ Calculemos primero $\mathbf{S}^{-1}$

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{S}^{-1} \end{array}\right].$$

Y ahora $\mathbf{D}^5$

$$\mathbf{D}^5 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & \\ & 3^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 243 \end{bmatrix}.$$

Así pues,

$$\mathbf{A}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 243 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 121 \\ 0 & 243 \end{bmatrix}.$$

$\square$

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 1(a) *When an odd permutation matrix* $\mathbf{P}_1$ *multiplies an even permutation matrix* $\mathbf{P}_2$*, the product* $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ *is* ***odd****.*

$\mathbf{P}_1$ applies an odd number of column exchanges to $\mathbf{I}$ and $\mathbf{P}_2$ applies an even number of column exchanges to $\mathbf{I}$. Hence the permutation matrix $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ applies an (even+odd)= odd number of column exchanges.

$\square$

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 1(b) $\mathbf{AB}$ *is* ***the zero matrix****.*

Let $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$, where $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ are the columns of $\mathbf{B}$. Since each $\boldsymbol{b}_i$ is in $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ we have $\mathbf{A}\boldsymbol{b}_i = \mathbf{0}$. Then $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \mathbf{A}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$.

$\square$

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 1(c)

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & c \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ \boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & c-3 \\ \hline 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & c-21 \\ \hline 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{L} \\ \hline \mathbf{E} \end{array}\right]$$

When $c = 0$, $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -21 \end{bmatrix}$, $\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}$.

$\square$

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 1(d) *That matrix* $\mathbf{A}$ *is invertible unless* $c = 21$.

$\square$

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 2.

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

So $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ is a singular matrix, and therefore 3 is an eigenvalue of $\mathbf{A}$. The vectors in $\mathcal{N}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ are the corresponding eigenvectors:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{A} - 3\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -5 \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{-3} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{array}\right],$$

Hence, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (or any multiple of this vector) is a corresponding eigenvector.

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 3(a) By Type I elementary *column* operations we get

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&4&3\\4&N&1\\3&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow[{\substack{\tau\\ [(-3/2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}]{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\begin{bmatrix}2&0&0\\4&N-8&-5\\3&-5&-1/2\end{bmatrix}$$

And now, by Type I elementary *row* operations we get

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\4&N-8&-5\\3&-5&-1/2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-10)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\begin{bmatrix}2&0&0\\-26&N+42&0\\3&-5&-1/2\end{bmatrix}$$

Since we have used only Type I elementary *row* operations, and since we can find positive and negative pivots, this matrix is not definite.

We can also check whether the upper-left determinants are positive:

- 1×1: This is 2, which is always greater than 0.
- 2×2: This is $2N-16$ which is greater than 0 if N is really large (in particular if $N>8$).
- 3×3: Use the method of your choice to compute the determinant of $\mathbf{A}$, in terms of N.

$$\det\mathbf{A}=-N-42.$$

This is going to be very negative if N is really large. So the matrix will not be positive definite.

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 3(b)

1. $\mathbf{B}^\intercal=(\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{Q})^\intercal=\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{A}^\intercal(\mathbf{Q}^\intercal)^\intercal=\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{B},$ since $\mathbf{A}$ is symmetric.
2. Since $\mathbf{A}$ is positive definite, $\boldsymbol{x}\mathbf{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{Q}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{y}>0$; where $\mathbf{Q}\boldsymbol{x}$ is a vector $\boldsymbol{y}$.

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 4(a)

$$\mathbf{P}=\mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 4(b) $\widehat{\boldsymbol{x}}=(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=$
$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 4(c) $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}-\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}.$

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 5(a)

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{ccccc}1&2&0&0&3\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&4\\1&2&0&-1&6\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}}]{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccccc}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&4\\1&0&0&-1&3\\\hline 1&-2&0&0&-3\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{\substack{\tau\\ [(3)\mathbf{4}+\mathbf{5}]}}]{\substack{\tau\\ [(-4)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}}\left[\begin{array}{ccccc}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&-1&0\\\hline 1&-2&0&0&-3\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-4\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right]$$

Hence, a basis for $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ is $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 5(b) $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-3\\0\\-4\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 6(a) **True.** Matrices $\mathbf{A}^n$ for $n \in \mathbb{N}$, share the same eigenvectors, since

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v}.$$

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 6(b) **False.** Any vector in $\mathbb{R}^2$ is an eigenvector of the 2 by 2 identity matrix $\mathbf{I}$. For example

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};$$

but that vector is not an eigenvector of the permutation matrix $\mathbf{P}$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};$$

although it is an eigenvector of $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$. Another example is $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, whose eigenvectors are the multiples of $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, nevertheless, note that $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$ so any non-zero vector in $\mathbb{R}^2$ is an eigenvector of $\mathbf{A}^2$ with eigenvalue $\lambda = 0$.

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 6(c) **False.** If $\boldsymbol{x}$ is an egenvector of $\mathbf{A}$, then $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, and $\mathbf{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}$, so in this case $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ and $\mathbf{A}^2\boldsymbol{x}$ are linearly dependent vectors (not a basis).

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 7(a) We are looking for matrices $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a&b\\c&b\end{bmatrix}$ such that $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc) = (\lambda-4)(\lambda-6) = \lambda^2-10\lambda+24$. It is required that $\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}\right) = a+d = 10$ and $\det\mathbf{A} = ad-bc = 24$ (compare coeficients!). One possible solution is $a = d = 5$, $b = c = 1$. Thus $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}5&1\\1&5\end{bmatrix}$ does the job.

□

(Grupo E curso 13/14) Ejercicio 7(b) We are looking for matrices $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a&b\\c&b\end{bmatrix}$ such that fails to be diagonalizable, so $\lambda_1 = \lambda_2$ (repeated eigenvalues, otherwise the matrix must be diagonalizable). Hence $2\lambda = \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}\right) = a+b$, or

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a+b}{2} > 0,$$

since both, a and b are positive. But also $\lambda^2 = ad - bc$, or

$$\lambda = \pm\sqrt{ad-bc} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -\lambda_2.$$

Therefore, there is no such matrix, since conditions $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, and $\lambda_1 = -\lambda_2$ are incompatible.

□

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 1(a) La traza de $\mathbf{A}$ es $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$; el determinante de $\mathbf{A}$ es $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3$.

□

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 1(b) $\mathbf{A}$ siempre se puede diagonalizar, pues siendo una matriz de orden 3, tiene *tres* autovectores *linealmente independientes*

□

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 1(c) Podemos obtener $\mathbf{A}$ usando $\mathbf{SDS}^{-1}$ donde $\mathbf{S}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$,

$$\mathbf{S} = \left[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\right]$$

y $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con autovalores respectivos λ_1, λ_2, λ_3

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 1(d) Para que la matriz sea simétrica tenemos que asegurarnos que el tercer autovalor $\boldsymbol{x}_3$ es ortogonal a los otros dos.

$$\left[\begin{array}{rrr}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ \boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{rrr}1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ \hline 1 & -1 & \mathbf{-1}\\ 0 & 1 & \mathbf{0}\\ 0 & 0 & \mathbf{1}\end{array}\right]$$

(aunque se puede descubrir por simple inspección). En cualquier caso, $\boldsymbol{x}_3$ debe ser un multiplo de $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Para que la matriz sea semidefinida positiva, el tercer autovalor debe ser $\lambda_3 = 0$.

Aunque no se pide, aquí tiene un ejemplo que cumple los requisitos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 5 & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\ -2 & 8 & -2\\ 3 & -2 & 3\end{bmatrix}.$$

□

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 2(a) NO. Aunque las columnas son linealmente independientes, $\mathbf{Q}$ sólo será invertible si es cuadrada (si $m = n$).

□

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 2(b) Puesto que sus columnas son linealmente independientes, la única solución a $\mathbf{Q}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; asi $\mathcal{N}\left(\mathbf{Q}\right) = \{\mathbf{0}\}$.

□

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 2(c) Puesto que el rg $\left(\underset{m\times n}{\mathbf{Q}}\right) = n$, entonces $\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{Q} = \underset{n\times n}{\mathbf{I}}$ y

$$\underset{m\times m}{\mathbf{P}} = \underset{m\times n}{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^\intercal = \underset{m\times n}{\mathbf{Q}}\left(\underset{n\times n}{\mathbf{I}}\right)^{-1}\mathbf{Q}^\intercal = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\intercal.$$

□

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 3(a) $\begin{cases} c + 0\cdot d &= 1\\ c + 1\cdot d &= 2\\ c + 2\cdot d &= -1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$

□

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 3(b) Las ecuaciones normales $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\beta} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$ son

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{c}\\ \widehat{d}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{c}\\ \widehat{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$$

Cuya solución es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau} \\ \underset{[(1/3)\mathbf{1}]}{\tau}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau} \\ \underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 1/3 & -1 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \widehat{c} \\ \widehat{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 3(c) $\boldsymbol{y} \notin \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ así que $y = \frac{5}{3} - x$ es el mejor ajuste, y

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es el punto de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ más próximo a $\vec{y}$.

$\square$

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 3(d)

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Así que, $\quad \|\boldsymbol{e}\|^2 = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{24}{9}; \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{e}\| = \frac{\sqrt{24}}{3}.$

$\square$

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 4(a) **Falso.** Ejemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\square$

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 4(b) **Verdadero.** Puesto que $\mathbf{A}$ es diagonalizable, $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A} - \mathbf{I}\right) = n$. Así que la matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ de orden n tiene n columnas de zeros, asi que $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ es a matriz nula $\mathbf{0}$, y por lo tanto $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

$\square$

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 4(c) **Falso.** Si el rango es 5, hay cinco columnas pivote, y por lo tanto restan cinco columnas libres, así que la dimensión de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es también 5.

$\square$

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 4(d) **Verdadero**. Si $\mathbf{A}$ es invertible, entonces sus autovalores no son cero. Puesto que $\mathbf{B}$ tiene los mismos autovalores, también es invertible.

$\square$

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 5(d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 5 & 10 & 6 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -6\left(1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\right) =$ $-6(-20 + 18) = 12.$

$\square$

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 6(a) Buscamos matrices $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tales que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ c + 2d \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $a = -2b$ y $c = -2d$. Así pues, el elemento genérico de $\mathcal{V}$ es

$$\begin{bmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

así que

$$\left\{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

es una base de $\mathcal{V}$, y por tanto, $\dim \mathcal{V} = 2$.

$\square$

(Grupo G curso 13/14) Ejercicio 6(b) El espacio $\mathcal{V}$ de la parte (a) es un subespacio de $\mathcal{W}$ (si $(1, 2,)$ está e $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, entonces $(1, 2,)$ es un autovector de $\mathbf{A}$ con autovalor $\lambda = 0$). Puesto que no todas las matrices 2×2 perteneces a $\mathcal{W}$, entonces $\dim \mathcal{W} < 4$; y puesto que hay matrices en $\mathcal{W}$ que no pertenecen a $\mathcal{V}$ (por ejemplo la matriz identidad), entonces $\dim \mathcal{W} > 2$. Así pues, $\dim \mathcal{W}$ tiene que ser 3.

$\square$

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 1(a) Puesto que las dos primeras columnas son iguales, $\det \mathbf{A} = 0$.

$\square$

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 1(b) $\det \mathbf{B} = -\begin{vmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&-1\\1&1&-1&-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&-1&0\\1&1&-2&-1\end{vmatrix} =$ 1.

$\square$

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 1(c) $\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}x&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\end{vmatrix} = 1 + x\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{vmatrix} =$ $1 - x\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix} = 1 - x.$

$\square$

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 2(a) Porque $\mathbf{A}$ no es simétrica.

$\square$

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 2(b) Cuando $a > 0$ y $\begin{vmatrix}a&1\\1&b\end{vmatrix} = ab - 1 > 0$; es decir, cuando $a > 0$ y $b > \frac{1}{a}$.

O diagonalizando por congruencia

$$\begin{bmatrix}a&1\\1&b\end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{1}{a})\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix}a&0\\1&b-\frac{1}{a}\end{bmatrix} \xrightarrow[{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{1}{a})\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}]{} \begin{bmatrix}a&0\\0&b-\frac{1}{a}\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad b - \frac{1}{a} > 0.$$

$\square$

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 3(a)

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n |\, \boldsymbol{x} = a\,\boldsymbol{v} \text{ for all } a \in \mathbb{R}\}\,.$$

Y, puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es ortogonal a las filas de $\mathbf{A}$,

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;|\; \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} = 0\}\,.$$

Nótese que si $\boldsymbol{x}$ es perpendicular a las filas de $\mathbf{A}$ (cuando $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$), entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \left[\boldsymbol{u}\right]\left[\boldsymbol{v}\right]^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = \left[\boldsymbol{u}\right]^{\mathsf{T}}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

$\square$

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 3(b) Puesto que $\left[\boldsymbol{v}\right]^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u} = \sum u_i\big(\left[\boldsymbol{v}\right]^{\mathsf{T}}\big)_{|i} = \sum u_i(v_i,) = \Big(\sum u_i\, v_i,\Big) = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v},)$ es un vector de $\mathbb{R}^1$, tenemos

$$\mathbf{A}\boldsymbol{u} = \left[\boldsymbol{u}\right]\left[\boldsymbol{v}\right]^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u} = \left[\boldsymbol{u}\right]\Big(\sum u_i\, v_i,\Big) = \left[\boldsymbol{u}\right](\lambda,) = \lambda\boldsymbol{u}, \qquad \text{donde} \qquad \lambda = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}.$$

$\square$

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 3(c) Puesto que todas las columnas son múltiplos de $\boldsymbol{u}$ y una matriz anti-simétrica sólo tiene ceros en la diagonal principal, entonces todos los elementos de la matriz deben ser cero. Así, $\boldsymbol{u}$ o $\boldsymbol{v}$, o ambos vectores deben ser iguales al vector nulo $\mathbf{0}$.

$\square$

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 3(d) Puesto que $[\boldsymbol{v}]^{\intercal}[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}] = \lambda \underset{1\times 1}{\mathsf{I}}$ entonces

$$\mathsf{A}^2 = [\boldsymbol{u}][\boldsymbol{v}]^{\intercal}[\boldsymbol{u}][\boldsymbol{v}]^{\intercal} = [\boldsymbol{u}]\Big([\boldsymbol{v}]^{\intercal}[\boldsymbol{u}]\Big)[\boldsymbol{v}]^{\intercal} = \lambda[\boldsymbol{u}][\boldsymbol{v}]^{\intercal} = \lambda\,\mathsf{A}.$$

Por tanto, si $\mathsf{A}^2 = \mathsf{A}$; entonces $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} = \lambda = 1$.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 4(a) Para todo c, puesto que $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_3$ son linealmente independientes.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 4(b) Para todo c, puesto que $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_3$ son perpendiculares entre si.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 4(c) La matriz A no puede ser definida puesto que un autovalor es igual a cero.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 5.
Los autovalores son 5 y 15. Para $\lambda = 5$ tenemos

$$\mathsf{A} - 5\mathsf{I} = \begin{bmatrix}8&4\\4&2\end{bmatrix} \quad\to\quad \begin{bmatrix}8&4\\4&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

Para $\lambda = 15$ tenemos

$$\mathsf{A} - 15\mathsf{I} = \begin{bmatrix}-2&4\\4&-8\end{bmatrix} \quad\to\quad \begin{bmatrix}-2&4\\4&-8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

Así pues $\quad \mathsf{A} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1&2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&\\&15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 6(a) Puesto que la dimensión de $\mathcal{N}\left(\mathsf{A}^{\intercal}\right)$ es uno, la dimensión de $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}^{\intercal}\right)$ es tres; así que el rango es tres. Puesto que la matriz no es de rango completo, $\det \mathsf{A} = 0$.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 6(b) Puesto que el sistema es resoluble sólo si el vector del lado derecho pertenece a $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$, y puesto que $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$ es ortogonal a $\mathcal{N}\left(\mathsf{A}^{\intercal}\right)$, sólo necesitamos encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^4$ ortogonal a $\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\end{pmatrix}$; Empleando la eliminación gaussana tenemos que,

$$\left[\begin{array}{cccc}-1&-1&1&1\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ \boldsymbol{\tau}\\[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc}-1&0&0&0\\ \hline 1&-1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right].$$

Por tanto $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\1\end{pmatrix}$ debe ser una combinación lineal de $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. Así

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\1\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b+c+1\\b\\c\\1\end{pmatrix},$$

es decir $\boxed{a = -b+c+1}$.

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 6(c) Puesto que hay una única restricción lineal in $\mathbb{R}^3$ $(a+b-c=1)$, la respuesta es**un plano** (dos columnas libres en el sistema $a+b-c=1$).

□

(Grupo E curso 12/13) Ejercicio 6(d) Puesto que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ is ortogonal a $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$, y $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$, el vector del lado derecho no pertenece al espacio columna. Por tanto, **el conjunto de soluciones es el conjunto vacío**.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 1(a) Cualquier valor excepto el cero.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 1(b) Puesto que los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son el cuadrado de los autovalores de $\mathbf{A}$, los únicos autovalores posibles son cero o uno. Así pues, el determinante sólo puede ser cero o uno

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 1(c) Deteminante igual a 6.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 2. Los autovalores son 5 y 15. Para $\lambda = 5$ tenemos

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix}2 & 4\\4 & 8\end{bmatrix} \quad\to\quad \begin{bmatrix}2 & 4\\4 & 8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Para $\lambda = 15$ tenemos

$$\mathbf{A} - 15\mathbf{I} = \begin{bmatrix}-8 & 4\\4 & -2\end{bmatrix} \quad\to\quad \begin{bmatrix}-8 & 4\\4 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Así pues $\qquad \mathbf{A} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & \\ & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 3(a) $\begin{bmatrix}0 & a\\0 & 0\end{bmatrix} \quad a \neq 0.$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 3(b) Puesto que el determinante no es cero, la matriz tiene rango completo, esto es, el rango es 3.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 4(a) $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } \boldsymbol{x} = a\boldsymbol{u} \text{ para todo } a \in \mathbb{R}\right\}.$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 4(b) Puesto que hay tres autovalores, la matriz $\mathbf{A}$ es de orden 3×3. Puesto que no hay autovalores repetidos, los autovectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ son linealmente independientes. Puesto que sólo uno de los autovalores es cero, el rango de $\mathbf{A}$ es 2, y puesto que $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son autovectores de $\mathbf{A}$ con autovalores 1 y 2, entonces

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, \qquad \mathbf{A}\left(\boldsymbol{w}/2\right) = \boldsymbol{w}$$

por lo que $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ pertenecen a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$; así pues

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } \boldsymbol{x} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 4(c) Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es perpendicular a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$,

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = 0\right\}.$$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 4(d) Puesto que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{w}$$

entonces

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \mathbf{A}\boldsymbol{v} - \frac{1}{2}\mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{A}\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}/2\right).$$

Por tanto, una solución particular es $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}/2)$, y la solución completa es

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}/2)+a\boldsymbol{u},\qquad \text{para todo } a\in\mathbb{R}.$$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 5(a)

$$\begin{vmatrix}1&b\\b&4\end{vmatrix}=4-b^2>0\Rightarrow\quad -\sqrt{4}<b<\sqrt{4}$$

y

$$\begin{vmatrix}1&b&0\\b&4&2\\0&2&4\end{vmatrix}=16-4-4b^2=12-4b^2=4(3-b^2)>0\Rightarrow\quad -\sqrt{3}<b<\sqrt{3}.$$

Puesto que $\sqrt{3}<\sqrt{4}$, A es definida positiva sólo si $-\sqrt{3}<b<\sqrt{3}$.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 5(b) Los autovalores λ_i de A^2 son el cuadrado de los autovalores de A, por tanto, $\lambda_i\geq 0$. Así, $\boldsymbol{x}\mathsf{A}^2\boldsymbol{x}\geq 0$ para todo $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. Por otra parte I es definida positiva, y entonces

$$\boldsymbol{x}(\mathsf{A}^2+\mathsf{I})\boldsymbol{x}=\underbrace{\boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{x}}_{\geq 0}+\underbrace{\boldsymbol{x}\mathsf{I}\boldsymbol{x}}_{>0}>0\quad\text{para todo } b.$$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 5(c) La matriz $\mathsf{M}^{\intercal}\mathsf{M}$ es simétrica y definida positiva a no ser que M *no sea de rango completo por columnas.*

Si M tiene columnas dependientes, entonces $\mathsf{M}^{\intercal}\mathsf{M}$ es simétrica y **semi-**definida positiva, ya que $\boldsymbol{x}\mathsf{M}^{\intercal}\mathsf{M}\boldsymbol{x}=0$ cuando $\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}\left(\mathsf{M}\right)$.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 6(c)

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c}1&2&1&2&-2&-a\\2&1&2&1&-1&-b\\1&1&1&1&-1&-c\\\hline 1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}\\(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}\\(2)\mathbf{1}+\mathbf{5}\\(a)\mathbf{1}+\mathbf{6}}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cccc|c|c}1&0&0&0&0&0\\2&-3&0&-3&3&2a-b\\1&-1&0&-1&1&a-c\\\hline 1&-2&-1&-2&2&a\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{(1)\mathbf{2}+\mathbf{5}\\(\frac{2a-b}{3})\mathbf{2}+\mathbf{6}}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{cccc|c|c}1&0&0&0&0&0\\2&-3&0&0&0&0\\1&-1&0&0&0&(a+b-3c)/3\\\hline 1&-2&-1&0&0&(2b-a)/3\\0&1&0&-1&1&(2a-b)/3\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{array}\right]$$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 6(a) Hemos visto que

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{A}\\\hline\mathsf{I}\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}\\(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}\\(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\2&-3&0&0\\1&-1&0&0\\\hline 1&-2&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathsf{L}\\\hline\dot{\mathsf{E}}\end{array}\right].$$

Puesto que $\quad\dot{\mathsf{U}}=\dot{\mathsf{E}}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad$ tenemos que $\quad\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&-3&0&0\\1&-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 6(b) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad$ para todo $d,e\in\mathbb{R}$.

□

(Grupo H curso 12/13) Ejercicio 6(c) El vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pertence a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ si y sólo si $a+b-3c=0$.

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 1(a) Usando operaciones elementales por columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -|\mathbf{I}| = -1.$$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 1(b) Puesto que la matriz es simétrica, sabemos que es invertible, es decir, que es posible encontrar 5 autovectores linealmente independientes.

Para el autovalor $\lambda = 1$, cuatro autovectores linealmente independientes son:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Puesto que la traza es 10, el quinto autovalor es $\lambda = 6$. En tal caso

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix};$$

y puesto que la suma de las columnas de dicha matriz es $\mathbf{0}$, un quinto autovector es $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \end{pmatrix}$. Nótese que los cinco autovectores son ortogonales.

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 1(c) El elemento $(3,1)$ de $\mathbf{A}^{\text{-}1}$ es $\dfrac{\operatorname{cof}(\mathbf{A})_{1,3}}{\det \mathbf{A}}$; es decir

$$\frac{\operatorname{cof}(\mathbf{A})_{1,3}}{\det \mathbf{A}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6} = \frac{-1}{6}.$$

Y como el menor (3,1) de la matriz del enunciado, $M_{31}(\mathbf{A})$, es igual a la traspuesta del menor (1,3); entonces los cofactores $\operatorname{cof}(\mathbf{A})_{1,3}$ y $\operatorname{cof}(\mathbf{A})_{1,3}$ son iguales, y por tanto también son iguales los elementos (3,1) y (1,3) de $\mathbf{A}^{\text{-}1}$; ambos iguales a $\frac{-1}{6}$.

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 2(a) The column space is spanned by the vectors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We then put them in a matrix and do a Gaussian elimination to find independent vectors. This tells us that a basis for the column space is

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 2(b) The column space can be described by

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x; y \in \mathbb{R} \right\};$$

so the basis of $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ is the set of any two independent vectors $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. This means that the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}$$

es de rango completo (es decir, que $x_4 - x_2x_3/x_1 \neq 0 \quad$ ó $\quad x_1x_4 - x_2x_3 \neq 0$).

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 2(c) We observe that $(-3, 0, 1, 0,)$ and $(0, -3, 0, 1,)$ are two independent vectors belonging to the null space. Since the column space has dimension 2, the null space has dimension $4 - 2 = 2$, so any basis of $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ has two elements. Hence, $\{(-3, 0, 1, 0,);\ (0, -3, 0, 1,)\}$ is a basis for $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 2(d) We start by looking for $\boldsymbol{x}_{particular}$ via elimination. Note that the matrix is already in a reduced row echelon form:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

So $\boldsymbol{x}_{particular} = (5; 4; 0; 0)$. Then the complete solution is given by

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{particular} + \boldsymbol{x}_{espacionulo} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 3a \\ 4 - 3b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

for any $a; b \in \mathbb{R}$.

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 3(a) La traza debe valer 0; por tanto $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ x & -a \end{bmatrix}$ y el determinante -1; por tanto

$$-a^2 - x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - a^2;$$

es decir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 - a^2 & -a \end{bmatrix}.$$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 3(b) Porque los autovalores son distintos.

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 3(c) Los que hacen la matriz simétrica, es decir, aquellos para los que $1 - a^2 = 1$, por tanto, sólo para $a = 0$. En tal caso

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{que tiene los autovectores ortogonales} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 4(a) $\begin{bmatrix} .1 & .7 & .1 & .7 \\ .5 & .5 & .5 & .5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad$ y $\qquad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1.$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 4(b) Puesto que la matriz de coeficientes tiene rango 2 (los vectores fila apuntan en direcciones distintas), el conjunto de soluciones al primer sistema de ecuaciones es un espacio vectorial de dimensión 2 (hay todo un plano de puntos posibles, es decir, hay infinitas posibilidades para la elección de estos números). Así pues, hay infinitos vectores de longitud uno en el plano, que son los situados en la circunferencia de radio uno, centrada en el origen.

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 5(a) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}; \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 5(b) Necesitamos encontrar un vector ortogonal a $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

$$\left[\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} x & y-x & z \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} x & y-x & z-2y+2x \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]; \quad \text{es decir} \quad 2x - 2y + z = -1.$$

□

(Grupo E curso 11/12) Ejercicio 6. $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \{\mathbf{0}\}$ so $\mathbf{A}$ has full column rank $r = n = 3$: the columns are linearly independent.

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 1.

$$[\mathbf{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [\mathbf{R}|\boldsymbol{d}]$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 2(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por tanto, el conjunto de "soluciones especiales" está compuesto por los siguientes tres vectores:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 2(b)

Empezaremos por la pregunta:

- **c)** Las dos cosas a probar son que el conjunto de vectores genera el conjunto de todas las soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (que es un sistema generador); y que los vectores del sistema generador son linealmente independiestes.
- **b) Primera parte de la demo** (*El conjunto genera todo el espacio de soluciones*). Lo que hay que demostrar es que todo vector $\boldsymbol{x}$ combinación de las soluciones especiales es una solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (pertenece a $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$); es decir:

$$\text{Si} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{entonces} \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Veamoslo

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-3&-4\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Segunda parte de la demo (*los vectores son linealmente independientes*). Por eliminación Gaussiana es inmediato ver que las cuatro columnas de

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix}-2&-3&-4\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

son columnas pivote, y por tanto que en el sistema $\mathbf{N}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ no hay columnas libres; así pues, la única combinación de dichas columnas que es igual al vector cero $\mathbf{0}$ es la solución trivial ($\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$), es decir, los vectores columna de $\mathbf{N}$ son linealmente independientes.

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 3(a)

$$\begin{vmatrix}2&0&0&0\\1&1&1&1\\1&1&2&4\\1&1&3&9\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix} = 2\cdot 2 = 4.$$

El elemento (1,1) de la inversa de $\mathbf{A}$ es el primer elemento de la matriz adjunta $\mathbf{Adj(A)}$ dividido por el determinante.

$$\frac{\operatorname{cof}(\mathbf{A})_{11}}{\det \mathbf{A}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 3(b)

$$\begin{vmatrix}2&1&0&0\\1&1&1&1\\1&1&2&4\\1&1&3&9\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 3(c)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix}2&1-x&0&0\\1&1&1&1\\1&1&2&4\\1&1&3&9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&1&0&0\\1&1&1&1\\1&1&2&4\\1&1&3&9\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2&-x&0&0\\1&0&1&1\\1&0&2&4\\1&0&3&9\end{vmatrix} = 2 + x\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix} = 2 + 2x.$$

Por tanto, $\det \mathbf{A} = 2x + 2$; y cuando $x = -1$ la matriz es singular ($\det \mathbf{A} = 0$).

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 4(a)

Debemos resolver la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix}0-\lambda&0&-2\\0&-2-\lambda&0\\-2&0&3-\lambda\end{vmatrix} = (-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) - 4(-2-\lambda) = 0$$

Evidentemente una raiz es $\lambda = -2$; y dividiendo el polinomio por $(-2-\lambda)$ obtenemos las otras dos

$$0 = (-\lambda)(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \Rightarrow \begin{cases}\lambda = 4\\ \lambda = -1\end{cases}.$$

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 4(b)

Y ahora calculamos un autovector para cada autovalor:

- Para $\lambda = -2$

$$[\mathbf{A}+2\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{(-2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Para $\lambda = 4$

$$[\mathbf{A}-4\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1/2)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Para $\lambda = -1$

$$[\mathbf{A}-4\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(2)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{(-1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 4(c)
Por ejemplo:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{(4)}, & \boldsymbol{x}_{(-2)}, & \boldsymbol{x}_{(-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & -2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

de manera que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & & \\ & -2 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & & \\ & -2 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & -2/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

ya que

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1/5)\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 0 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & -2/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 0 & 1/5 \end{array}\right]$$

□

(Grupo H curso 11/12) Ejercicio 5. Por una parte

$$\text{Si} \quad \underset{m\times n}{\mathbf{A}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{no tiene solución} \quad \Rightarrow \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) < m.$$

Por otra

$$\text{Si} \quad \underset{m\times n}{\mathbf{A}^{\intercal}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \quad \text{tiene sólo una solución} \quad \Rightarrow \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = m.$$

Y por tanto ambas condiciones son incompatibles.

□

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 1(a) Norma es $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3.$

□

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 1(b) *<u>Sólo</u> se le pide encontrar un vector ortogonal de norma dos, pero aquí vamos a desarrollar una respuesta un poco más extensa (en el enunciado no se le pide tanto...)*

Mediante la eliminación de Gauss podemos calcular el espacio nulo por la izquierda de $\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}|\boldsymbol{v}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Por tanto cualquier combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix}-2, & 1, & 0,\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-2, & 0, & 1,\end{pmatrix}$ es perpendicular al vector dado; y puesto que ambos tienen norma 5, tomando por ejemplo el doble de la versión normalizada del primero, tenemos $2 \times \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2, & 1, & 0,\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-4, & 2, & 0,\end{pmatrix}$ que tiene norma 2 y es perpendicular al vector del enunciado.

Pero ésta no es la única solución posible. Sabemos que cualquier vector de la forma

$$a\begin{pmatrix}-2, & 1, & 0,\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2, & 0, & 1,\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2(a+b), & a, & b,\end{pmatrix}$$

es perpendicular; y que sólo queremos vectores de norma 2. Es decir

$$\Big(-2(a+b)\Big)^2 + a^2 + b^2 = 4;$$

por tanto

$$5a^2 + 5b^2 + 8ab = 4$$

es la condición que deben cumplir los valores de a y b para que el vector perpendicular $\begin{pmatrix}-2(a+b), & a, & b,\end{pmatrix}$ tenga norma 2.

□

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 1(c)

Es sencillo ver que la respuesta es $a = -b$.

□

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 2.

Entonces

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \mathbf{A}\boldsymbol{v} - \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$$

y por tanto el vector diferencia $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

es una solución al sistema homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Así pues

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Es otra solución.

□

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 3(a)

Ecuación característica:

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & -1\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ -1 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) - (3-\lambda) = (3-\lambda)\Big((4-\lambda)^2 - 1\Big) = 0$$

Por tanto una raiz es $\lambda_1 = 3$.

Las otras dos raices las obtenemos de

$$0 = (4-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 8\lambda + 15 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_2 = & 3\\ \lambda_5 = & 5\end{cases}$$

Para $\lambda = 5$

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Por lo que

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

es un autovector para $\lambda = 5$.

Para $\lambda = 3$

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

son dos autovectores linealmente independientes para $\lambda = 3$.

□

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 3(b)

La matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable, ya que es posible encontrar un número suficiente (en este caso 3) de autovectores linealmente independientes (algo que ya sabíamos antes responder al primer apartado, ya que $\mathbf{A}$ es simétrica).

□

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 3(c)

$$\mathbf{A}^{10} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{10}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^{10} & & \\ & 3^{10} & \\ & & 3^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

donde $\mathbf{S}$ es una matriz cuyas columnas son los autovectores, y $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con los correspondientes autovalores.

□

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 3(d)

$$\mathbf{A}^{4} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{4}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{4} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^{4} & & \\ & 3^{4} & \\ & & 3^{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 625 & & \\ & 81 & \\ & & 81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 353 & 0 & -272 \\ 0 & 81 & 0 \\ -272 & 0 & 353 \end{bmatrix};$$

donde $\mathbf{S}$ es una matriz cuyas columnas son los autovectores, y $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con los correspondientes autovalores.

□

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 3(e)

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xz.$$

Y sabemos que es definida positiva, ya que los autovalores de $\mathbf{A}$ son mayores que cero (3, 3 y 5).

□

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 4(a)

Es subespacio vectorial, ya que el conjunto es cerrado para la suma

$$\begin{pmatrix} a, & b, & a, \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c, & d, & c, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c, & b+d, & a+c, \end{pmatrix}$$

y también es cerrado para el producto por un escalar

$$a \begin{pmatrix} b, & c, & d, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab, & ac, & ab, \end{pmatrix}$$

en concreto S_1 es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, y constituye el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0};$$

es decir, que $S_1 = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 4(b)
No es un subespacio. Por ejemplo el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2, & 0, & 0,\end{pmatrix}$ pertenece a S_2, pero $2\boldsymbol{x}$ no. Así pues, el conjunto S_2 no es cerrado para el producto por un escalar (es fácil comprobar que tampoco lo es para la suma).

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 5(a)
$\det \mathbf{A} = -11$.

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 5(b)
Se han intercambiado las dos primeras filas, por tanto

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix} = -\det \mathbf{A} = 11.$$

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 5(c)
Se ha multiplicado la primera fila por 3, por tanto

$$\begin{vmatrix}3 & 6 & -9\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix} = 3\det \mathbf{A} = -33.$$

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 5(d)
Se han multiplicado todas las filas por 2, por tanto

$$\begin{vmatrix}2 & 4 & -6\\ 4 & 2 & 8\\ 0 & 4 & -6\end{vmatrix} = 2^3\det \mathbf{A} = -88.$$

$\square$

(Grupo A curso 10/11) Ejercicio 5(e)
$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} = \frac{-1}{11}$.

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 1(a)
Since $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = -1$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-1-\lambda)(1-\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 1(b)
Trace $(\lambda_1 + \lambda_2)$ must be equal to 0; therefore $b = -2$. In addition $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, so $-4 - a = -1$, or $a = -3$. Then

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 1(c)
For $\lambda_1 = 1$

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -3\end{bmatrix} \qquad \text{with eigenvector} \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$$

For $\lambda_2 = -1$

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix}3 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad \text{with eigenvector} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

Therefore

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}.$$

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 1(d)

Since, in this case, $\mathbf{D}^{101} = \left[\begin{smallmatrix}1 & \\ & -1\end{smallmatrix}\right]^{101} = \left[\begin{smallmatrix}1 & \\ & -1\end{smallmatrix}\right]^{\text{odd number}} = \mathbf{D}$

$$\mathbf{A}^{101} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{101}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{A}.$$

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 1(e)

Suppose $\boldsymbol{z} = c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$. Then $\mathbf{A}\boldsymbol{z} = c\mathbf{A}\boldsymbol{x} + d\mathbf{A}\boldsymbol{y} = c\boldsymbol{x} - d\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$. Since $\mathbf{A}\boldsymbol{z} = \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Therefore

$$\begin{cases} c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y} = & \mathbf{0} \\ c\boldsymbol{x} - d\boldsymbol{y} = & \mathbf{0}. \end{cases} \quad \text{but, since} \quad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \text{ and } \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \quad \text{the only possibility is} \quad c = d = 0.$$

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 2(a)

No. $\mathbf{A}\left[\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right] = \mathbf{0}$. So $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ is in the nullspace of $\mathbf{A}$.

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 2(b)

No. From part (a), $\dim(\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)) > 0$.

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 2(c)

Yes because the eigenvectors of a symmetric matrix are linearly independent (¡all symmetric matrices are diagonalizable!).

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 2(d)

$\mathbf{A}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ gives 2 times the first column and $\mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ gives -1 times the second column of $\mathbf{A}$.

By the symmetry condition (iii), we get $a_{13} = a_{31}$ and $a_{23} = a_{32}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & a_{33} \end{bmatrix}$$

For a_{33} , we know that $\operatorname{tr}\left(A\right) = 1 + 4 + a_{33} = 0$ so $a_{33} = -5$.

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 3(a)

True. Since the matrix is not full rank, $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) > 0$.

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 3(b)

False. Since the matrix is not full rank, $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ is smaller than $\mathbb{R}^3$, that is, there are some $\boldsymbol{b}$ in $\mathbb{R}^3$ that do not belong to $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 3(c)

False. For example

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \mathbf{I}; \quad \text{and then} \quad \det\left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\right) = \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = 0 \neq \det \mathbf{B} = 1.$$

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 3(d)

False. $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = 0 \cdot \det \mathbf{B} = 0$.

$\square$

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 3(e)

True. Since the matrix is not full rank, there are some $\boldsymbol{b}$ in $\mathbb{R}^3$ that do not belong to $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$; therefore there are linearly independent vectors $\boldsymbol{b}$ in $\mathbb{R}^3$, such as $\operatorname{rg}\left([\mathbf{A}|\boldsymbol{b}]\right) = 3$.

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 4(a)

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&-1&1\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}0&-1\\-1&1\end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&1&-1\\0&1&2&-1&1\\0&2&2&0&0\\0&0&0&0&1\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}1&0&1&-1\\1&2&-1&1\\2&2&0&0\\0&0&0&1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}0&1&0&-1\\0&1&2&1\\0&2&2&0\\0&0&0&1\end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&-1\\2&2&0\end{vmatrix} + 0 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&-1&1&0&0&1\\0&0&-1&0&1&0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&0&0&-1\\0&0&1&0&-1&0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&-1&-1\\0&0&1&0&-1&0\end{array}\right]$$

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 4(b)

$\det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{A}^{\intercal} = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{A} = 1$

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 4(b)

$\mathbf{B}^4\mathbf{A}$ is not defined.

□

(Grupo E curso 10/11) Ejercicio 4(b)

$\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det\mathbf{A}} = -1$

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 1(a)

$$\begin{bmatrix}1&a\\2&b\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\5\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}-2+a &= -10\\-4+b &= 5\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a &= -8\\b &= 9\end{cases} \Longrightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&-8\\2&9\end{bmatrix}$$

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 1(b)

La suma de los autovalores ($\lambda_1+\lambda_2$) debe ser igual a la traza de la matriz (10), por tanto $\lambda_2 = 5$.

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 1(c)

La matriz no es simétrica, veamos si es diagoonalizable;

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix}-4&-8\\2&4\end{bmatrix}$$

que es de rango 1. Así pues $\dim\mathcal{N}(\mathbf{A}-5\mathbf{I}) = 1$, y entonces sólo podemos encontrar un autovector linealmente independiente para el autovalor $\lambda = 5$ (de multiplicidad 2): por tanto la matriz no es diagonalizable.

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 1(d)

$$f(x,y) = \left(x, \quad y,\right)\begin{bmatrix}1&-8\\2&9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \left(x, \quad y,\right)\begin{bmatrix}x-8y\\2x+9y\end{bmatrix} = x^2 - 8yx + 2xy + 9y^2 = x^2 - 6xy + 9y^2.$$

La matriz asociada a esta forma cuadrática es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&-3\\-3&9\end{bmatrix};$$

que es singular, y por tanto sus autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 10$ (la suma debe ser igual a la traza). Así pues, es *semi*-definida positiva.

$\square$

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 1(e)
No, sólo prodría serlo si la forma cuadrática fuera definida positiva.

$\square$

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 1(f)
Un valle. En ciertas direcciones la función crece, pero en la dirección del autovector correspondiente al autovalor cero ($\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}3, & 1,\end{pmatrix}$), la función es siempre cero.

$\square$

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 2(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

Por tanto el rango es dos, y dos es el máximo número de columnas linealmente independientes.

$\square$

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 2(b)
La dimensión es dos (el número de columnas libres). Las dos soluciones especiales constituyen una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 2(c)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 3.
Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, el espacio columna de $\mathbf{A}$ tiene dimensión menor que m (tiene filas libres). Así que el rango r es $r < m$. Pero puesto que $\mathbf{A}^\intercal \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ tiene sólo una solución, las columnas de $\mathbf{A}^\intercal$ son independientes. Esto quiere decir que el tango de $\mathbf{A}^\intercal$ es $r = m$. Esta contradicción demuestra que no podemos encontrar tales $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

$\square$

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 4.
Entonces

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \mathbf{A}\boldsymbol{v} - \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$$

y por tanto el vector diferencia $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es una solución al sistema homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Así pues

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es otra solución.

$\square$

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 5(a)
$\det \mathbf{A} = -4$

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 5(b)
$\det \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})^2 = (-4)^2 = 16$

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 5(c)
$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} = \frac{-1}{4}$

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 5(d)
$\det 2\mathbf{A} = 2^n \det \mathbf{A} = 2^5 \det \mathbf{A} = 32 * (-4) = -128$

□

(Grupo G curso 10/11) Ejercicio 5(e)
$2(-\det \mathbf{A}) = 8.$

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 1.

$$\det(-\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \det(-\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A} = \det(\mathbf{A})$$

puesto que n es un número par.
(*MIT Course 18.06 Quiz 2, Fall, 2008*)

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 2(a)
Puesto que $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{A}$ tiene 3 columnas.

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 2(b)
Cualquier número mayor mayor o igual a uno.

□

(Grupo F curso 09/10) Ejercicio 2(c)
Tres columnas y dos soluciones especiales (2 columnas libres) implican rango 1 (una columna pivote).

□