Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

14/01/2023

1 Esquema de la **Lección 11**

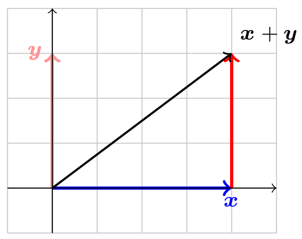
Esquema de la Lección 11

- Vectores y subespacios ortogonales
- Espacio nulo $\perp$ espacio fila
$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$$
- espacio nulo por la izquierda $\perp$ espacio columna
$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$$
- De las ecuaciones paramétricas a las cartesianas (o implícitas)

2 Algunas definiciones

- Producto punto
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$
- Longitud de un vector $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ $\qquad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2.$
- Vector unitario: $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ $\qquad \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\cdot\boldsymbol{x}$
- Vectores ortogonales (perpendiculares): $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0.$

3 Vectores ortogonales



$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0 \iff \boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$$

Tma. Pitágoras: $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0 \iff \|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}).$$

4 Norma al cuadrado de un vector

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \|\boldsymbol{x}\|^2 = \qquad ; \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \|\boldsymbol{y}\|^2 = \qquad ;$$

¿Son estos vectores ortogonales?

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}; \qquad \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \qquad ;$$

(Pitágoras) (Ortogonalidad)

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \iff \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0.$$

5 Subespacios ortogonales

Cuando el subespacio $\mathcal{S}$ es ortogonal al subespacio $\mathcal{T}$:

$\boxed{\text{Cada vector de } \mathcal{S} \text{ es ortogonal a cada vector de } \mathcal{T}}$

¿Son ortogonales el plano de la pizarra y el suelo?

6 Espacio nulo ortogonal a espacio fila

- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp$ filas de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \implies \begin{pmatrix}({}_{1|}\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{x}\\ \vdots \\ ({}_{m|}\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

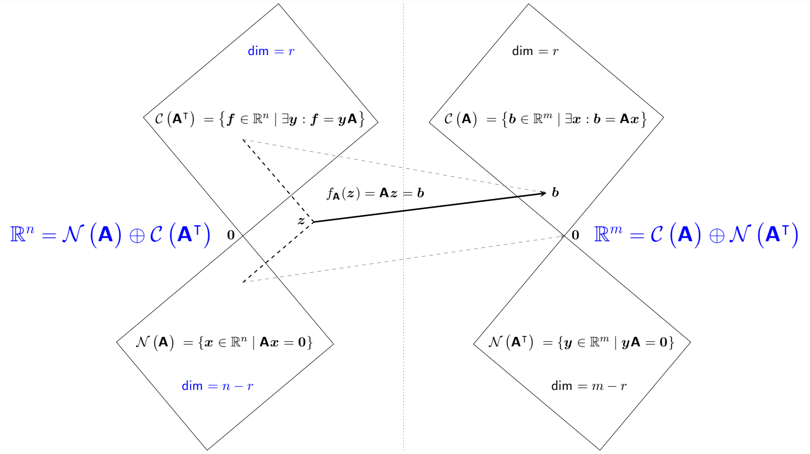
- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \boldsymbol{d}\mathbf{A}, \quad \forall \boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^m$ (cualquier combinación lineal de las filas)

$$\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}(\mathbf{A}) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{d}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{0} = 0.$$

$\boxed{\text{espacio nulo} \perp \text{espacio fila} \qquad \mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A}^{\intercal})}$

También: $\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \boldsymbol{0} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\intercal}) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$

7 El gran esquema: suma directa de complementos ortogonales



$$\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}) \qquad \qquad \mathcal{C}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$$

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\cdot\mathbf{0} \qquad \qquad \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{x}$$

8 Revisitando la eliminación gaussiana

Algoritmo que encuentra una base del complemento ortogonal

Dame varios vectores y los escribo como filas de una matriz $\mathbf{M}$ ...

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 1 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ \hline 1 & 3 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{D} & \mathbf{N}\end{array}\right]$$

Base del espacio generado por los vectores (fila): $\mathcal{V}$

Base del complemento ortogonal: $\mathcal{V}^\perp$ $\qquad \mathbf{MN} = \mathbf{0}$

Pero si me das $\mathbf{N}_{|1}$ y $\mathbf{N}_{|2}$ y empiezo de nuevo. . . obtendré una base de. . .

9 Ecuaciones cartesianas (implícitas) y paramétricas de rectas y planos

Ecuación cartesiana (implícita) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$:

Por ejemplo

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = \text{c. sol. de } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1\\ x_3 = 1\end{cases}$$

Ecuación paramétrica:

Para el conjunto del ejemplo anterior

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

En este caso dimensión 1 $\qquad$ Una recta (sólo hay un parámetro a)

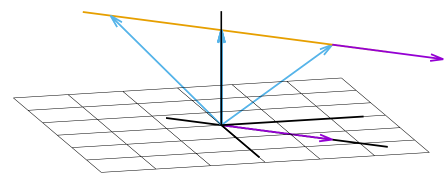
recta $\qquad$ recta

o bien

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

o bien

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$



10 Ecuaciones cartesianas (implícitas) y paramétricas de rectas y planos

Ecuación cartesiana (implícita) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$:

Por ejemplo

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \left(1,\right)\right\} = \text{c. sol. de } \left\{x_1 - x_2 + x_3 = 1\right.$$

Ecuación paramétrica:

Para el conjunto del ejemplo anterior

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

En este caso dimensión 2 plano

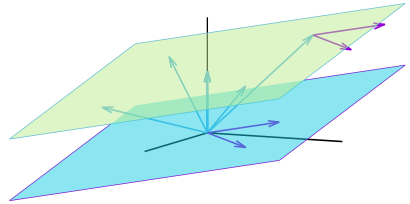
Un plano (hay dos parámetros a y b) plano

o bien

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

pero también

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$



11 De las ecuaciones paramétricas a las cartesianas

$$\boxed{\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) \perp \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)}$$

Considere

$$C = \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^k : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} + \left[\boldsymbol{n}_1; \;\dots\; \boldsymbol{n}_k;\right]\boldsymbol{p}\right\}.$$

Si encontramos $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{0}$ entonces si $\boldsymbol{x} \in C$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{s} + \underbrace{\mathbf{A}\left[\boldsymbol{n}_1; \;\dots\; \boldsymbol{n}_k;\right]}_{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{p} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \text{donde } \boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{s}.$$

Por tanto

$$C = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}.$$

12 De la solución al sistema de ecuaciones

Ecuaciones implícitas del plano P paralelo al generado por $(1,2,0,-2)$ y $(0,0,1,3)$ que pasa por $\boldsymbol{s} = (1,3,1,1)$.

$$P = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \;\middle|\; \exists a,b\in\mathbb{R} : \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\\0 & 1\\-2 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

Necesitamos vectores perpendiculares a $(1,2,0,-2)$ y a $(0,0,1,3)$

13 De la solución al sistema de ecuaciones

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z, w,); \qquad \boldsymbol{s} = (1, 3, 1, 1,).$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline x & y & z & w \\ \hline 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\overset{\tau}{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline x & y-2x & z & w+2x \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\tau}{[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline x & y-2x & z & w+2x-3z \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Así $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$; y entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2x+y \\ 2x+w-3z \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por tanto $\begin{cases} -2x + y & = 1 \\ 2x \quad - 3z + w & = 0 \end{cases}$

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Problemas de la Lección 11

(L-11) PROBLEMA 1. Describa el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.15 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 2.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Encuentre una representación implícita de la recta anterior.

(L-11) PROBLEMA 3.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_P = (1, \quad -3, \quad 1,)$ y $\boldsymbol{x}_Q = (-2, \quad 4, \quad 5,)$.

(b) Encuentre una representación implícita (ecuaciones Cartesianas) de la recta.

(L-11) PROBLEMA 4. ¿Hay algún vector que sea perpendicular a si mismo?

(L-11) PROBLEMA 5.

(a) Ecuación paramética de la recta paralela a $2x - 3y = 5$ que pasa por el punto $(1, 1)$.

(b) Encuentre una representación implícita de la recta.

(L-11) PROBLEMA 6. Calcule la longitud de cada uno de estos vectores

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (e) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.11 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 7. Encuentre un vector unitario (de norma uno) con la misma direccción que $\boldsymbol{v} = (2, \ -1, \ 0, \ 4, \ -2)$.

(L-11) PROBLEMA 8. Encuentre el valor de k de manera que estos vectores sean perpendiculares.

$$(k, \quad 1,), \qquad (4, \quad 3,).$$

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.14 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 9. Escriba una matriz con las propiedades requeridas, o explique por qué es imposible:

(a) El espacio columna contiene $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, el espacio nulo contiene $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) El espacio fila contiene $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, y el espacio nulo contiene $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución, y $\mathbf{A}^\intercal \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) Cada fila es ortogonal a cada columna (y $\mathbf{A}$ no es la matriz cero)

(e) La suma de columnas da una columna de ceros, la suma de filas suma una fila de unos.

(Strang, 2003, ejercicio 3 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 10. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, las columnas de $\mathbf{B}$ pertencen a ________ de $\mathbf{A}$. Las filas de $\mathbf{A}$ están contenidas en el __________ de $\mathbf{B}$. Por qué no es posible que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sean matrices 3 por 3 de rango 2?
(Strang, 2003, ejercicio 4 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 11. Suponga que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$ y que $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. ¿Debe ocurrir que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$?
(Hefferon, 2008, ejercicio 2.20 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 12.

(a) Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ tiene solución y $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{y}$ es perpendicular a ____.
(b) Si $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$ tiene solución y $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{x}$ es perpendicular a ____.

(Strang, 2003, ejercicio 5 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 13. Demuestre, para $\mathbb{R}^n$, que si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son perpendiculares, entonces $||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||^2=||\boldsymbol{u}||^2+||\boldsymbol{v}||^2$.
(Hefferon, 2008, ejercicio 2.33 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 14.

(a) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $(0, \ 1, \ 1,)$ y tiene por vectores directores $(0, \ 1, \ 2,)$ y $(1, \ 1, \ 0,)$
(b) Escriba la ecuación implicita del mismo plano.

(L-11) PROBLEMA 15.

(a) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $(2, \ 1, \ 3,)$ y es perpendicular a $(3, \ 1, \ 1,)$.
(b) Escriba la ecuación implicita del mismo plano.

(L-11) PROBLEMA 16. Encuentre una matriz de 1 por 3 cuyo espacio nulo conste de todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $x_1+2x_2+4x_3=0$. Encuentre una matriz de 3 por 3 con el mismo espacio nulo.
(Strang, 2007, ejercicio 9 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-11) PROBLEMA 17. Considere el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, donde

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&1&1\\0&0&2&3&1\\0&0&1&4&2\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

(a) (1^{pts}) Obtenga la solución al sistema.
(b) (0.5^{pts}) Explique por qué el conjunto de vectores solución al sistema anterior es una recta en $\mathbb{R}^5$. Indique un vector director y un punto por el que pasa la recta.
(c) (1^{pts}) Encuentre los vectores perpendiculares al vector director anterior. Pruebe que el conjunto de vectores perpendiculares a dicho vector forman un subespacio vectorial de dimensión 4. Encuentre una base de dicho subespacio.

(L-11) PROBLEMA 18. Consider $\underset{4\times 2}{\mathbf{A}}$ with exactly two special solutions for $\boldsymbol{x}\mathbf{A}=\mathbf{0}$:
$\boldsymbol{s}_1=(3, \ 1, \ 0, \ 0,)$, and $\boldsymbol{s}_2=(6, \ 0, \ 2, \ 1,)$.

(a) Find the reduced row echelon form $\mathbf{R}$ of $\mathbf{A}$.
(b) What is the row space of $\mathbf{A}$?
(c) What is the complete solution to $\boldsymbol{x}\mathbf{R}=(3, \ 6,)$?
(d) Find a combination of rows 2, 3, 4 that equals $\mathbf{0}$. (Not OK to use $0({}_{2|}\mathbf{A})+0({}_{3|}\mathbf{A})+0({}_{4|}\mathbf{A})$. The problem is to show that these rows are dependent.)

1 Esquema de la **Lección 12**

Esquema de la Lección 12

- Proyecciones
- Matrices proyección

2 Suma directa de subespacios

$\mathbb{R}^n$ es *suma directa* de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ $\qquad (\mathbb{R}^n=\mathcal{A}\oplus\mathcal{B})$

si todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ tiene una descomposición **única** $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,

con $\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}$ y $\boldsymbol{b}\in\mathcal{B}$.

Ejemplo $\boxed{\mathbb{R}^n=\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)\oplus\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)}$

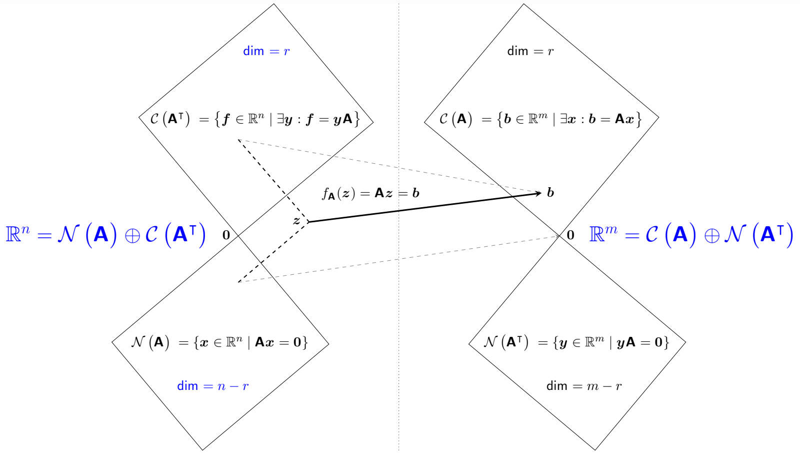
$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{ccc}1&2&5\\2&4&10\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&0&0\\\hline 1&-2&-5\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\Rightarrow \text{Base de } \mathbb{R}^3;\ \left[\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,\ \exists c_1,c_2,c_3\ \Big|\ \boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

donde $\boldsymbol{a}\in\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)$ y $\boldsymbol{b}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

También $\boxed{\mathbb{R}^m=\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)\oplus\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)}$

3 El gran esquema: suma directa de complementos ortogonales



$$\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}) \qquad \mathcal{C}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$$

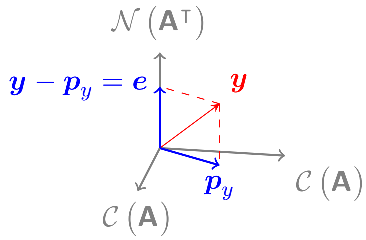
$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{x}$$

4 Proyección ortogonal sobre $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

Sea $\underset{m \times n}{\mathbf{A}}$; como $\mathbb{R}^m = \mathcal{C}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$, para todo $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p_y} + \boldsymbol{e}; \qquad (\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p_y})$$

con $\boxed{\boldsymbol{p_y} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}) \text{ y } \boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{p_y}}$, así que $\boldsymbol{e} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$.



¿Cómo calcular $\boldsymbol{p_y} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$?

5 Ecuaciones normales

Sea $\underset{m \times n}{\mathbf{A}}$. Buscamos la descomposición $\boxed{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p_y} + \boldsymbol{e}}$ donde

$$\boldsymbol{p_y} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}) \qquad \text{y} \qquad (\boldsymbol{p_y} - \boldsymbol{y}) \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$$

Por tanto

$$\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p_y} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}) \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$$

Es decir

$$\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p_y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^\intercal(\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}}$$

¡Sistemas equivalentes! $\Rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}) \Rightarrow \operatorname{rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{rg}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})$

$\boxed{\text{solución única } \widehat{\boldsymbol{x}} \text{ si y sólo si } \mathbf{A} \text{ tiene columnas independientes}}$

6 Solución a las ecuaciones normales (rango completo por columnas))

$\boxed{\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}}$ ($\mathbf{A}$ de rango completo por columnas)

La solución $\widehat{\boldsymbol{x}} = (\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$

La proyección $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$

La matriz de proyección $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal$

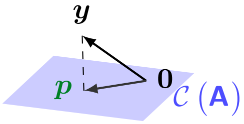
$$\boldsymbol{p} = \mathbf{P}\boldsymbol{y}$$

$\mathbf{P}$: Simétrica e idempotente.

7 Matriz proyección

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}}$$

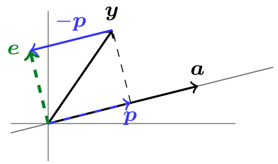
La proyección $\mathbf{P}\boldsymbol{y}$ *es el punto* $\boldsymbol{p}$ *de* $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ *más próximo a* $\boldsymbol{y}$



Casos extremos:

- Si $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ entonces $\mathbf{P}\boldsymbol{y} =$
- Si $\boldsymbol{y} \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ entonces $\mathbf{P}\boldsymbol{y} =$

8 Proyección sobre una recta



recta$=\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$; $\mathbf{A} = [\boldsymbol{a}]$; $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$

Queremos encontrar el punto $\boldsymbol{p}$ sobre la linea más próximo a $\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{p} \in \mathcal{C}\left([\boldsymbol{a}]\right) \quad \perp \quad \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p}) \in \mathcal{N}\left([\boldsymbol{a}]^{\intercal}\right).$

$\boldsymbol{p}$ es algún múltiplo de $\boldsymbol{a}$: $\quad \boldsymbol{p} = [\boldsymbol{a}](\widehat{x},)$

Cómo: $\quad [\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\widehat{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{y}$

La solución $\quad \widehat{\boldsymbol{x}} = \left([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{y}$

La proyección $\quad \boldsymbol{p} = [\boldsymbol{a}]\widehat{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}\boldsymbol{y}$

La matriz de proyección $\quad \mathbf{P} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^{\intercal}[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^{\intercal}$

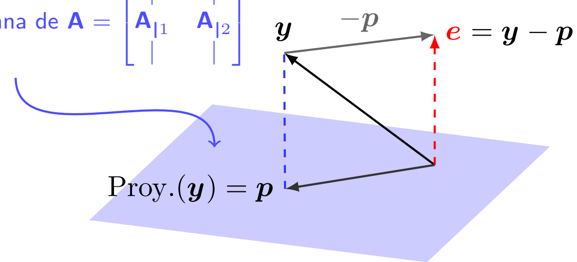
9 Proyección sobre un plano

¿Por qué proyectar?

Así que resolveremos

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \Big(\text{Proy. de } \boldsymbol{y} \text{ sobre } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)\Big).$$

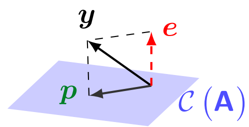
$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$: Espacio columna de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{A}_{|1} & \mathbf{A}_{|2} \\ | & | \end{bmatrix}$



$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{e} \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \qquad$ . . . ese es el hecho fundamental.

10 Ecuaciones normales

¿Qué es la proyección de $\boldsymbol{y}$ sobre el espacio columna de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{A}_{|1} & \mathbf{A}_{|2} \\ | & | \end{bmatrix}$?



$$\boldsymbol{p} = (\mathbf{A}_{|1})\widehat{x_1} + (\mathbf{A}_{|2})\widehat{x_2} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$$

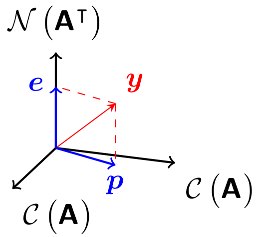
"Encontrar una combinación de columnas tal que $\boldsymbol{e} \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$*"*

$$\boldsymbol{e} \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e} \in$$

$$\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{e} = \mathbf{A}^{\intercal}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p}) \quad = \quad \mathbf{A}^{\intercal}(\boldsymbol{y}-\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y}}$$

11 Dos proyecciones

$\boldsymbol{y}$ tiene un componente $\boldsymbol{p}$ en $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, y otro $\boldsymbol{e}$ en $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)^{\perp}$.



$$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{p}=\mathbf{P}\boldsymbol{y} \qquad \text{es la proyección sobre } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$$

$$\boldsymbol{e}=(\mathbf{I}-\mathbf{P})\boldsymbol{y} \qquad \text{es la proyección sobre } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)^{\perp}$$

Problemas de la Lección 12

(L-12) PROBLEMA 1. Proyecte el primer vector ($\boldsymbol{b}$) sobre la recta generada por el segundo vector ($\boldsymbol{a}$). Compruebe que $\boldsymbol{e}$ es perpendicular a $\boldsymbol{a}$. Encuentre la matriz proyección $\mathbf{P}=\left[\boldsymbol{a}\right]\left(\left[\boldsymbol{a}\right]^{\intercal}\left[\boldsymbol{a}\right]\right)^{-1}\left[\boldsymbol{a}\right]^{\intercal}$ sobre la recta generada por cada vector $\boldsymbol{a}$. Verifique en cada caso que $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$. Multiplique $\mathbf{P}\boldsymbol{b}$ en cada caso para calcular la proyección $\boldsymbol{p}$.

(a) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

(c) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

(d) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\3\\12\end{pmatrix}$.

(Hefferon, 2008, ejercicio 1.6 del conjunto de problemas VI.1.)

(L-12) PROBLEMA 2. Proyecte ortogonalmente el vector sobre la recta.

(a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, La recta : $\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-3\\1\\-3\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$.

(b) $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, la recta descrita por la ecuación $y=3x$.

(L-12) PROBLEMA 3. Aunque los dibujos nos han guiado el desarrollo del tema, no estamos restringidos a espacios que podamos dibujar. En $\mathbb{R}^4$ proyecte el vector sobre la recta.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix};\quad \left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}.$$

(L-12) PROBLEMA 4.

(a) Proyecte el vector $\boldsymbol{b}=(1,\ 1,)$ sobre las rectas generadas por $\boldsymbol{a}_1=(1,\ 0,)$ y $\boldsymbol{a}_2=(1,\ 2,)$. Sume las proyecciones: $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$. Las proyecciones no suman $\boldsymbol{b}$ porque los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ no son ortogonales.

(b) La proyección de $\boldsymbol{b}$ sobre el plano generado por $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ será igual a $\boldsymbol{b}$. Encuentre $\mathbf{P}=\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}$ para $\mathbf{A}=\left[\boldsymbol{a}_1;\ \boldsymbol{a}_2;\right]$.

(Strang, 2003, ejercicio 8–9 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-12) PROBLEMA 5.

(a) Si $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$ demuestre que $(\mathbf{I}-\mathbf{P})^2=\mathbf{I}-\mathbf{P}$. Cuando $\mathbf{P}$ proyecta sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$, $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$ proyecta sobre el ________.

(b) Si $\mathbf{P}^{\intercal}=\mathbf{P}$ demuestre que $(\mathbf{I}-\mathbf{P})^{\intercal}=\mathbf{I}-\mathbf{P}$.

(Strang, 2003, ejercicio 17 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-12) PROBLEMA 6.

(a) Calcule las matrices proyección $\mathbf{P}=\left[\boldsymbol{a}\right]\left(\left[\boldsymbol{a}\right]^{\intercal}\left[\boldsymbol{a}\right]\right)^{-1}\left[\boldsymbol{a}\right]^{\intercal}$ sobre las rectas que pasan por $\boldsymbol{a}_1=(-1,\ 2,\ 2,)$ y $\boldsymbol{a}_2=(2,\ 2,\ -1,)$. Compruebe que $\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{a}_2$. Multiplique esas matrices proyección y explique por qué su producto $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ es lo que es.

(b) Proyecte $\boldsymbol{b}=(1,\ 0,\ 0,)$ sobre las rectas generadas por $\boldsymbol{a}_1$, y $\boldsymbol{a}_2$ y también por $\boldsymbol{a}_3=(2,\ -1,\ 2,)$. Sume las tres proyecciones $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3$.

(c) Encuentre la matriz proyección $\mathbf{P}_3$ sobre $\mathcal{L}\left([\boldsymbol{a}_3;]\right)=\mathcal{L}\left([(2,\ -1,\ 2,);]\right)$. Verifique que $\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_3=\mathbf{I}$. ¡La base $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ es ortogonal!

(Strang, 2003, ejercicio 5–7 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-12) PROBLEMA 7. Proyecte $\boldsymbol{b}$ sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$ resolviendo $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}=\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{p}=\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$. Encuentre $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}$.

(a) $\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix}$

(c) Calcule las matrices proyección $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ sobre los espacios columna. Verifique que $\mathbf{P}_1\boldsymbol{b}_1$ da la primera proyección $\boldsymbol{p}_1$. Verifique también que $\left(\mathbf{P}_2\right)^2=\mathbf{P}_2$.

(Strang, 2003, ejercicio 11–12 del conjunto de problemas 4.2.)

Hefferon, J. (2008). *Linear Algebra*. Jim Hefferon, Colchester, Vermont USA. This text is Free.
URL
ftp://joshua.smcvt.edu/pub/hefferon/book/book.pdf

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.