Matemáticas II

Marcos Bujosa

04/02/2023

Puede encontrar la última versión de este material en

https://github.com/mbujosab/MatematicasII/tree/main/Esp

Índice

Part VI
Autovalores y autovectores. Diagonalización y formas cuadráticas

LECCIÓN 15: Autovalores y autovectores

$\boxed{\textit{Lección 15}}$

(**Lección** 15) T-**1** Esquema de la Lección 15

Matrices siempre cuadradas en este tema

Esquema de la *Lección 15*

- **Autovalores, autovectores** (eigen, característicos, propios)
- $\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = 0$ *ecuación característica*
- $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$, $\det \mathbf{A}$ (demo en la próxima lección)

F1

(**Lección** 15) T-**2** Autovalores y autovectores

Considere la ecuación

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \qquad (\text{con} \quad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0})$$

- *Autovalor* es cualquier λ para el que existan soluciones.
- Dichas soluciones *no nulas* $\boldsymbol{x}$ se llaman *autovectores*.

$$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \text{ tales que } \mathbf{A}\boldsymbol{x} \text{ es un múltiplo de } \boldsymbol{x}$$

Cuando λ es 0, ¿quienes son los auto-vectores?

F2

(**Lección** 15) T-**3** Un ejemplo: matriz de proyección

- Proyección ortogonal
- ¿Qué vectores son autovectores?
  ¿qué vectores quedan en la misma dirección?
- ¿Cuanto valen sus autovalores?
- ¿Hay más autovectores? ¿Con qué autovalor?
- Dos autoespacios

F3

(**Lección** 15) T-4 Otro ejemplo: matriz intercambio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Un vector que no cambie tras el intercambio?
- ¿Cuál es su autovalor?
- ¿Algún autovector asociado a $\lambda_2 = -1$?

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_2$$

Nótese: $\text{tr}\left(\mathbf{A}\right) = 0 = \lambda_1 + \lambda_2$; $\quad\det \mathbf{A} = -1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

F4

La *traza* de $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ es la suma de los elementos de su diagonal principal, es decir,

$$\text{tr}\left(\mathbf{A}\right) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

(**Lección** 15) T-5 ¿Cómo calcular los autovalores y los autovectores?

¿Cómo resolver

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \overbrace{\lambda}^{?}\,\overbrace{\boldsymbol{x}}^{?}\ ?$$

Reescribamos ...

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{x} =$$

idea Para que esto ocurra ¿cómo debe ser la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$?
¿Cuánto debe valer el determinante? $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| =$

F5

(**Lección** 15) T-6 ¿Cómo calcular los autovalores y los autovectores?

1. Autovalores son los λ's tales que: $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| =$

   $\Big($ Polinomio característico $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$ $\Big)$

2. ¿Cómo calcular los $\boldsymbol{x}$ tales que $\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

Autoespacio (conjunto de autovectores + $\mathbf{0}$):

$$\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \right\}$$

Espectro: conjunto $\{\lambda_1, \dots \lambda_k\}$ de autovalores $\big($raíces de $P_{\mathbf{A}}(\lambda)\big)$

F6

(**Lección** 15) T-7 Ejemplo (¡primero los autovalores!)

Buscamos determinante nulo (Polinomio característico)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

Nótese: $\text{tr}\left(\mathbf{A}\right) = 6 = \lambda_1 + \lambda_2$; $\quad\det \mathbf{A} = 8 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

F7

Recuérdese que si $ax^2+bx+c=0$, entonces el valor x que resuelve dicha ecuación cuadrática es

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_equation

```
L = sympy.symbols('\lambda')
A = Matrix([[3,1],[1,3]])
D = Determinante(A-L*I(2),1).valor
display(D)

d = sympy.poly(D)
r = sympy.real_roots(d)
display(r)

ElimG(A-L*I(2), 1)
```

(**Lección** 15) T-8 Ejemplo (después los autoespacios)

y ahora calculamos el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ ... para cada λ.

Para $\lambda_1=4$

$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=\begin{bmatrix}3-4 & 1\\ 1 & 3-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow$

Para $\lambda_2=2$

$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=\begin{bmatrix}3-2 & 1\\ 1 & 3-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$

¿Son los dos únicos autovectores?

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda\boldsymbol{x}_i;\qquad \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_i=\lambda\boldsymbol{x}_i.$$

F8

(**Lección** 15) T-9 Otro ejemplo: Matriz rotación 90º

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

- ¿Cuanto suman los autovalores?
- ¿Cuanto vale el determinante?

Dificultades

$\lambda_1+\lambda_2=0$ y $\lambda_1\cdot\lambda_2=1$ $\qquad (+)\cdot(-)=(+)$?

¿Qué vector es paralelo a si mismo tras una rotación de 90º?

$$\det(\mathbf{Q}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=$$

F9

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\i\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}=-i\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}.$$

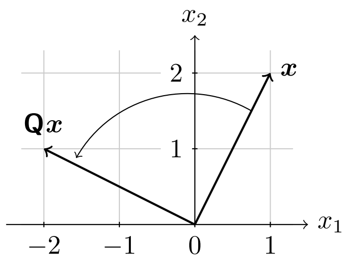


Figure 1: Rotación

De alguna manera estos vectores complejos mantienen la dirección tras la rotación. ¡No me preguntéis cómo!

Si la matriz es *simétrica* los autovalores son *reales* (y los autovectores son perpendiculares —ya lo veremos), pero si es *anti-simétrica* (como $\mathbf{Q}$) los autovalores son números *imaginarios*.

(**Lección** 15) T-10 **Ejemplos aún peores**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

- Autovectores
  - para λ_1: $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1; \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - para λ_2:

$\lambda = 3$ está repetido dos veces, pero $\dim \mathcal{E}_3(\mathbf{A}) = 1$

$$\mu(3) = 2 \neq 1 = \gamma(3)$$

F10

Resumen:

1. Los autovalores λ son aquellos que hacen singular a la matriz $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$, es decir, son las raíces del polinomio característico: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$.
2. Una matriz de orden $n \times n$ tiene polinomio caracteristico de grado n
3. Un polinomio de grado n tiene n raíces (quizá algunas raíces repetidas)
4. La suma de los autovalores es igual a la suma de los elementos de la diagonal de la matriz (traza)
5. El producto de los autovalores es igual al determinante
6. Los autovectores asociados a λ son los vectores no nulos de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right)$.

Fin de la lección

Problemas de la Lección 15

(L-15) Problema 1. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -3 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Los autovalores de $\mathbf{A}$ son -1, 1 y 2; y dos auto-vectores son

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Compruebe que estos vectores son efectivamente auto-vectores de $\mathbf{A}$. ¿Cuales son sus correspondientes autovalores?

(b) Encuentre un tercer auto-vector correspondiente al tercer auto-valor.

(L-15) PROBLEMA 2. Encuentre los valores y vectores característicos de

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 12 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 3. Si $\mathbf{B}$ tiene autovalores 1, 2, 3, $\mathbf{C}$ tiene autovalores 4, 5, 6, y $\mathbf{D}$ tiene autovalores 7, 8, 9, ¿Qué autovalores tiene la matriz de orden 6 por 6 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$? donde $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ son matrices triangulares superiores.
(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 4. Encuentre los autovalores y autovectores de las siguientes matrices

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 5. Los autovalores de $\mathbf{A}$ son iguales a los autovalores $\mathbf{A}^\intercal$. Esto se debe a que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ es igual a $\det(\mathbf{A}^\intercal - \lambda\mathbf{I})$.

(a) Lo anterior es cierto porque ____________

(b) Demuestre con un ejemplo que, sin embargo, los auto-vectores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\intercal$ no son los mismos.

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 6. Sea $\mathbf{B}$ y un autovector $\boldsymbol{x}$ con autovalor asociado λ, es decir $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$; sea también $\mathbf{A} = (\mathbf{B}+\alpha\mathbf{I})$. Demuestre que $\boldsymbol{x}$ es también un autovector de $\mathbf{A}$, pero con el autovalor asociado $(\lambda + \alpha)$.

(L-15) PROBLEMA 7.

(a) Encuentre los autovalores y los auto-vectores de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Compruebe que la traza es igual a la suma de los autovalores, y que el determinante es igual a su producto.

(b) Si consideramos una nueva matriz, generada a partir de la anterior como

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 7\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

¿Cuáles son los autovalores y auto-vectores de la nueva matriz, y como están relacionados con los de $\mathbf{A}$?

(Strang, 2007, ejercicio 1 y 3 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 8. Suponga que λ es un auto-valor de $\mathbf{A}$, y que $\boldsymbol{x}$ es un auto-vector tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

(a) Demuestre que ese mismo $\boldsymbol{x}$ es un auto-vector de $\mathbf{B} = \mathbf{A} - 7\mathbf{I}$, y encuentre el correspondiente auto-valor de $\mathbf{B}$.

(b) Suponga que $\lambda \neq 0$ (y que $\mathbf{A}$ es invertible), demuestre que $\boldsymbol{x}$ también es un auto-vector de $\mathbf{A}^{-1}$, y encuentre el correspondiente auto-valor. ¿Qué relación tiene con λ?

(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 9. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensiones $n \times n$, y que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. ¿Qué posibles valores pueden tomar los autovalores de $\mathbf{A}$?

(L-15) PROBLEMA 10. Suponga la matriz $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ con autovalores 1, 2 y 3. Si $\boldsymbol{v}_1$ es un auto-vector asociado al auto-valor 1, $\boldsymbol{v}_2$ al auto-valor 2 y $\boldsymbol{v}_3$ al auto-valor 3; entonces ¿cuanto es $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3)$?

(L-15) PROBLEMA 11. Proporcione un ejemplo que muestre que los auto-valores pueden cambiar cuando un múltiplo de una columna se resta de otra. ¿Por qué los pasos de eliminación no modifican los autovalores nulos?
(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 12. El polinomio característico de una matriz $\mathbf{A}$ se puede factorizar como

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda).$$

Demuestre, partiendo de esta factorización, que el determinante de $\mathbf{A}$ es igual al producto de sus valores propios (autovalores). Para ello haga una elección inteligente del valor de λ.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 13. Calcule los valores característicos (autovalores o valores propios) y los vectores característicos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^2$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^2$ tiene los mismos ________ que $\mathbf{A}$. Cuando los autovalores de $\mathbf{A}$ son λ_1 y λ_2, los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son ________.
(Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 14. Suponga que los valores característicos de $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ son 1, 2 y 4, ¿cuál es la traza de $\mathbf{A}^2$? ¿Cuál es el determinante de $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\intercal}$?
(Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-15) PROBLEMA 15. The equation $(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has no solution for some right-hand side $\boldsymbol{b}$. Give as much information as possible about the eigenvalues of the matrix $\mathbf{A}$ (the matrix $\mathbf{A}$ is diagonalizable). *MIT Course 18.06 Quiz 3. Spring, 2009*

(L-15) PROBLEMA 16. You are given the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

One of the eigenvalues is $\lambda = 1$. What are the eigenvalues of $\mathbf{A}$? [Hint: Very little calculation required! You should be able to see another eigenvalue by inspection of the form of $\mathbf{A}$, and the third by an easy calculation. You shouldn't need to compute $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ unless you really want to do it the hard way.] *MIT Course 18.06 Quiz 3. Spring, 2009*

Fin de los Problemas de la Lección 15

LECCIÓN 16: Diagonalización en bloques triangulares por semejanza

Lección 16

Esquema de la *Lección 16*

- Matrices semejantes: $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$
- Diagonalizando una matriz por bloques triangulares

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{bmatrix} \xrightarrow[esp(\boldsymbol{\tau}_1^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_p^{-1})]{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{S} \end{bmatrix} \qquad \text{donde} \quad \mathbf{S} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p}.$$

- Matrices diagonalizables: cuando $\mathbf{C}$ es diagonal.

Semejanza
$\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ son semejantes si existe $\mathbf{S}$ invertible tal que

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ son semejantes (*mirar demos en el libro*):

- Mismo determinante: $\det\mathbf{A} = \det\mathbf{C}$
- Mismo polinomio característico: $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = |\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}|$
- Mismos autovalores y con las mismas multiplicidades *algebraica* y *geométrica*.
- La misma traza.

Trans. Elem. inversas *espejo*: $\left(\mathbf{I}_{(\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k)}\right)^{-1} = {}_{esp(\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1})}\mathbf{I}$

$$\mathbf{I} = {}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\underset{[(-\alpha)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}{}_{\boldsymbol{\tau}_{(k+1)}\cdots\boldsymbol{\tau}_p}\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I} = {}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\underset{[(\frac{1}{\alpha})\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}{}_{\boldsymbol{\tau}_{(k+1)}\cdots\boldsymbol{\tau}_p}\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ similar a } {}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}esp(\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k)^{-1}{}_{\boldsymbol{\tau}_{(k+1)}\cdots\boldsymbol{\tau}_p}\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k\mathbf{A}$$

(**Lección** 16) T-3 Diagonalizando por bloques una matriz (matriz dentada)

$$\text{Sea}\qquad \mathbf{A}=\left[\begin{array}{c||c}\mathbf{C} & \\ \hline * & \mathbf{L}\end{array}\right]\in\mathbb{C}^{n\times n}\qquad\text{donde}$$

$\mathbf{C}$ (de orden m) es *singular* y $\mathbf{L}$ es *triangular inferior e invertible*; entonces existe $\mathbf{R}$ invertible tal que

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}\quad=\left[\begin{array}{c|c||ccccc} & 0 & & & & \\ \underset{m\times(m-1)}{*} & \vdots & & & & \\ & 0 & & & & \\ \hline & d_{m+1} & \beta_{m+1} & & & \\ & d_{m+2} & * & \beta_{m+2} & & \\ * & \vdots & * & * & \ddots & \\ & d_n & * & * & \cdots & \beta_n \end{array}\right]$$

$$\underset{\tau_1\cdots\tau_k}{\left(\cdots\underset{[(-\alpha_j)\boldsymbol{m+j}]}{\boldsymbol{\tau}}\cdots\right)}\;\underset{\tau_{(k+1)}\cdots\tau_p}{\left(\cdots\underset{[(\alpha_j)\boldsymbol{j+m}]}{\boldsymbol{\tau}}\cdots\right)}\mathbf{A};\qquad \boldsymbol{j}=1,\dots,m-1.$$

F14

(**Lección** 16) T-4 Diagonalizando por bloques una matriz (matriz dentada)

$$\text{Sea}\qquad \mathbf{A}=\left[\begin{array}{c||c}\mathbf{C} & \\ \hline * & \mathbf{L}\end{array}\right]\in\mathbb{C}^{n\times n}\qquad\text{donde}$$

$\mathbf{C}$ (de orden m) es singular y $\mathbf{L}$ es triangular inferior e invertible, entonces existe $\mathbf{S}=\mathbf{RP}$ (invertible) tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{P}=\left[\begin{array}{c|c||ccccc} & 0 & & & & \\ \underset{m\times(m-1)}{*} & \vdots & & & & \\ & 0 & & & & \\ \hline & 0 & \beta_{m+1} & & & \\ & 0 & * & \beta_{m+2} & & \\ * & \vdots & * & * & \ddots & \\ & 0 & * & * & \cdots & \beta_n \end{array}\right]$$

$$\underset{\tau_1\cdots\tau_k}{\left(\cdots\underset{[(-\alpha_j)\boldsymbol{m+j}]}{\boldsymbol{\tau}}\cdots\right)}\;\underset{\tau_{(k+1)}\cdots\tau_p}{\left(\cdots\underset{[(\alpha_j)\boldsymbol{j+m}]}{\boldsymbol{\tau}}\cdots\right)}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R};\qquad \boldsymbol{j}=m+1,\dots,n.$$

F15

(**Lección** 16) T-5 Un ejemplo muy sencillo

Ejemplo 1. Sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$ con autovalores 0, 1 y 1.

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)}\left[\begin{array}{ccc}1&-1&0\\0&0&0\\0&-2&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\underset{[(2)\mathbf{3+2}]}{\underset{[(1)\mathbf{1+2}]}{\boldsymbol{\tau}}}}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\ \hline 1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{array}\right]\xrightarrow[{\underset{[(-1)\mathbf{2+1}]}{\underset{[(-2)\mathbf{2+3}]}{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}}}]{}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\ \hline 1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{array}\right]\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\ \hline 1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{C}\\ \hline \mathbf{S}\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{\text{diagonal}}$$

F16

(**Lección** 16) T-6 Un ejemplo no tan sencillo

Ejemplo 2. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -9 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ con autovalores *1*, *1* y *0*.

$$\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{rrr} -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & -9 \\ -1 & 2 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1+3}] \\ [(-2)\mathbf{2+3}]}} \left[\begin{array}{rrr} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{3+2}] \\ [(-1)\mathbf{3+1}]}]{} \left[\begin{array}{rrr} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{rrr} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{rrr} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1+2}]}} \left[\begin{array}{rrr} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2+1}]}]{} \left[\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2+1}] \\ [(4)\mathbf{3+1}]}} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ \hline 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-4)\mathbf{1+3}] \\ [(1)\mathbf{1+2}]}]{} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ \hline 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ \hline 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

F17

(**Lección** 16) T-7 Toda matriz es semejante a otra matriz dentada

Para toda $\mathbf{A}$ existe $\mathbf{S}$ tal que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{C} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{C}$$

donde $\mathbf{C}$, dentada, tiene los autovalores en la diagonal

Ejemplo 3.

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -9 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{dentada}}$$

Consecuencias

- $\sum \lambda_i = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$ y $\prod \lambda_i = \det \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}\mathbf{S}_{|j} = \mathbf{S}\mathbf{C}_{|j} \quad \Rightarrow \quad$ para j tal que $\mathbf{C}_{|j} = \lambda_i \mathbf{I}_{|j}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{S}_{|j}) = \lambda_i(\mathbf{S}_{|j}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{|j} \text{ es un autovector.}$$

F18

(**Lección** 16) T-**8** De vuelta al ejemplo sencillo y "desdentado"

Sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$ con autovalores 0, 1 y 1.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{bmatrix}\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)}\left[\begin{array}{ccc}1&-1&0\\0&0&0\\0&-2&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\\hline 1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{\tau\\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\\hline 1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{array}\right]\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\\hline 1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\\hline\mathbf{S}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{S}_{|j})=\lambda_i(\mathbf{S}_{|j})\quad\Rightarrow\quad\mathbf{S}_{|j}\text{ es un autovector.}$$

F19

(**Lección** 16) T-**9** Matrices diagonalizables

- La matriz es diagonalizable **si y solo si** las multiplicidades *algebraicas* son iguales a las *geométricas* para cada autovalor
- Si no hay autovalores repetidos tampoco hay "dientes"
- Cuando no hay autovalores repetidos $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ es diagonalizable

F20

(**Lección** 16) T-**10** Diagonalizando una matriz

- Encuentre el espectro: $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\}$
- Encuentre la *multiplicidad algebraica* de cada autovalor: $\mu(\lambda_i)$

luego elija una de estas alternativas:

1. Dentar la matrix (implementado en NAcAL)
2. ...o para cada λ_i
   - encuentre el autoespacio

$$\mathcal{E}_{\lambda_i}(\mathbf{A})=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\lambda_i\boldsymbol{x}\right\}\;=\;\mathcal{N}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}).$$

   - revise $\mu(\lambda_i)=\dim\mathcal{E}_{\lambda_i}(\mathbf{A})$ (multiplicidades algebráica y geométrica iguales)

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_k\end{bmatrix};\quad\mathbf{S}=\left[\text{base de }\mathcal{E}_{\lambda_1}(\mathbf{A})+\!\!\!+\cdots+\!\!\!+\text{ base de }\mathcal{E}_{\lambda_k}(\mathbf{A})\right]$$

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}=\mathbf{D}\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{A}=\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$$

F21

(**Lección** 16) T-**11** Potencias de una matriz diagonalizable

Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ entonces $\mathbf{A}^2\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\mathbf{A}\boldsymbol{x} =$

- ¿Qué relación hay entre los autovectores de $\mathbf{A}$ y los de $\mathbf{A}^2$?

- ¿Qué relación hay entre los autovalores de $\mathbf{A}$ y los de $\mathbf{A}^2$?

Dicho en forma matricial (si $\mathbf{A}$ es diagonalizable, $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$):

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{D}^2\mathbf{S}^{-1}$$

En general para, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0\ldots$ $\mathbf{A}^n =$

¿y si $\mathbf{A}$ es invertible?

F22

Fin de la lección

Problemas de la Lección 16

(L-16) Problema 1. Factorice las siguientes matrices en $\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$;

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 15 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 2. ¿Cuáles de las siguientes matrices no se pueden diagonalizar?

(a)
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}2 & -2\\2 & -2\end{bmatrix}$$

(b)
$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix}2 & 0\\2 & -2\end{bmatrix}$$

(c)
$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix}2 & 0\\2 & 2\end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 3. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$ encuentre $\mathbf{A}^{100}$ diagonalizando $\mathbf{A}$.

(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 4. Si los autovalores de $\underset{3\times3}{\mathbf{A}}$ son 1, 1 y 2, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones sabemos que son ciertas?

(a) $\mathbf{A}$ es invertible.

(b) $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

(c) $\mathbf{A}$ no es diagonalizable

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 5. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\0 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\1 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Determine si la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable. En caso de que lo sea, encuentre una matriz diagonal $\mathbf{D}$ y una matriz $\mathbf{S}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.
(b) (0.5^{pts}) Calcule $\left(\mathbf{A}^6\right)\boldsymbol{v}$, donde $\boldsymbol{v} = \left(0, \quad 0, \quad 0, \quad 1,\right)$.
(c) (0.5^{pts}) Use los valores obtenidos en el primer apartado para justificar que $\mathbf{A}$ es regular (invertible).
(d) (0.5^{pts}) ¿Qué relación hay entre los autovalores y los autovectores de $\mathbf{A}$ y los de $\mathbf{A}^{-1}$?

(L-16) Problema 6. Si $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$; entonces $\mathbf{A}^3 = (\quad)(\quad)(\quad)$ y $\mathbf{A}^{-1} = (\quad)(\quad)(\quad)$.
(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 7. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre los autovalores de $\mathbf{A}$
(b) Encuentre los auto-vectores de $\mathbf{A}$
(c) Diagonalice $\mathbf{A}$: escríbalo como $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.

(L-16) Problema 8. ¿Falso o verdadero? Si los autovalores de $\mathbf{A}$ son 2, 2 y 3 entonces sabemos que la matriz es
(a) Invertible
(b) Diagonalizable
(c) No diagonalizable.

(L-16) Problema 9. Sean las matrices

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 8 & \\ & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -5 & \end{bmatrix}$$

(a) Complete dichas matrices de modo que en los tres casos $\det \mathbf{A}_i = 25$. Así, la traza es en todos los casos igual a 10, y por tanto para las tres matrices el único auto-valor $\lambda = 5$ está repetido dos veces ($\lambda^2 = 25$ y $\lambda + \lambda = 10$ implica $\lambda = 5$).
(b) Encuentre un vector característico con $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x}$. Estas tres matrices no son diagonalizable porque no hay un segundo auto-vector linealmente independiente del primero.
(Strang, 2007, ejercicio 27 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 10. Factorice las siguientes matrices en $\mathbf{S}\ \mathbf{D}\ \mathbf{S}^{-1}$
(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
(Strang, 2007, ejercicio 1 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 11. Encuentre la matriz $\mathbf{A}$ cuyos autovalores son 1 y 4, cuyos autovectores son $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente.
(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 12. Si los elementos diagonales de una matriz triangular superior de orden 3×3 son 1, 2 y 7, ¿puede saber si la matriz es diagonalizable? ¿Quién es $\mathbf{D}$?
(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 13.
(a) Encuentre los autovalores y auto-vectores de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
(b) Explique por qué (o por qué no) la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

(L-16) Problema 14. Sea $\mathbf{A}$ una matriz 3×3. Asuma que sus autovalores son 1 y 0, que una base de los autovectores asociados a $\lambda = 1$ son $[1, 0, 1]$ y $[0, 0, 1]$; mientras que los asociados a $\lambda = 0$ son paralelos a $[1, 1, 2]$.
(a) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable? En caso afirmativo escriba la matriz diagonal $\mathbf{D}$ y la matriz $\mathbf{S}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.
(b) Encuentre $\mathbf{A}$.

(L-16) PROBLEMA 15. Sea $\mathbf{A}$ una matriz 2×2 tal que $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un autovector de $\mathbf{A}$ con autovalor 2, y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es otro autovector de $\mathbf{A}$ con autovalor -2. Si $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, calcule $\left(\mathbf{A}^3\right)\boldsymbol{v}$.

Fin de los Problemas de la Lección 16

LECCIÓN 17: Matrices simétricas y diagonalización ortogonal

Lección 17

(**Lección** 17) T-1 Esquema de la Lección 17

Esquema de la *Lección 17*

- Matrices simétricas $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$
  - Autovalores y autovectores
- Introd. formas cuadráticas y matrices definidas positivas

F23

(**Lección** 17) T-2 Matrices simétricas $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

¿que hay de especial en $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ cuando $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ es simétrica?

1. Los autovalores son REALES
2. n autovectores *pueden elegirse* PERPENDICULARES

(¡siempre diagonalizable!)

Caso diagonalizable usual:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$$

Caso simétrico:
Puedo elegir autovectores orto*normales* (columnas de $\mathbf{S} = \mathbf{Q}$)

$$(\text{Si } \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \qquad \text{Teorema espectral}$$

Diagonalizable *ortogonalmente*.

F24

(**Lección** 17) T-3 Autoespacios ortogonales en las matrices simétricas

Los autovectores (correspondientes a autovalores distintos) de una matriz simétrica son ortogonales.

Demostración. Suponga $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \lambda_2\boldsymbol{y}$ (con $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Entonces

$$\lambda_1\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \;=\; \mathbf{A}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \;=\; \boldsymbol{x}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})\boldsymbol{y} \;=\; \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{y} \;=\; (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\lambda_2.$$

Puesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ necesariamente:

$$\lambda_1(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) - \lambda_2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = 0 \quad\Longrightarrow\quad (\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0.$$

□

F25

(**Lección** 17) T-4 Formas cuadráticas

Forma cuadrática:

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}; \quad \text{con} \quad \mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{A}$$

Como $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^{\intercal}$ (con $\mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{Q} = \mathbf{QQ}^{\intercal} = \mathbf{I}$), entonces

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{QDQ}^{\intercal}\boldsymbol{x} = (\mathbf{Q}^{\intercal}\boldsymbol{x})\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{\intercal}\boldsymbol{x}) \text{ (suma ponderada de cuadrados)}$$

Forma cuadrática definida positiva:

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda_i > 0, \quad i = 1:n.$$

entonces también decimos que $\mathbf{A}$ es definida positiva.

F26

(**Lección** 17) T-5 Matrices definidas positivas

Significado:

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0 \qquad (\text{excepto para } \boldsymbol{x} = \mathbf{0})$$

Algunas propiedades

Suponga $\mathbf{A}$ simétrica definida positiva: ¿lo es también $\mathbf{A}^{-1}$?

$\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^{-1} = \mathbf{QDQ}^{\intercal}$

Suponga $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ simétricas definidas positivas: ¿lo es $\mathbf{A} + \mathbf{B}$?

por tanto la respuesta es...

F27

(**Lección** 17) T-6 Producto de matrices $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$

Supongamos $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ rectangular. ¿Es $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ definida positiva?

$$\boldsymbol{x}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})\boldsymbol{x} =$$

Sólo puede ser 0 si $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es $\mathbf{0}$
¿Cómo garantizar que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ cuando $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$?

F28

(**Lección** 17) T-7 Matrices simétricas: signo de los autovalores

¿Son todos los λ_i positivos? ¿Son todos negativos?
Calcular autovalores de $\underset{5\times 5}{\mathbf{A}}$ es imposible en general

Buenas noticias: Signo de los pivotes de la forma escalonada coincide con el de los λ_i
(si no hemos cambiado el signo del determinante con transformaciones *Tipo II*)

$$\text{núm. pivotes positivos} = \text{núm. autovalores positivos}$$

F29

- Todos los autovalores son:
- Todos los pivotes son:

$$\begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$$

Pivotes:

¿Signo de los autovalores?

$$\lambda^2 - 8\lambda + 11 = 0 \rightarrow \qquad \lambda = 4 \pm \sqrt{5} > 0$$

F30

Resumen (para matrices simétricas):

1. Matrices simétricas tienen *autovalores reales* y *autovectores* que se pueden elegir *perpendiculares*
2. $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^\intercal$ con $\mathbf{Q}$ ortogonal
3. $\mathbf{A}$ es simétricas si y solo si es *ortogonalmente* diagonalizable.
4. El signo de los autovalores coincide con el de los pivotes[1]

Fin de la lección

Problemas de la Lección 17

(L-17) PROBLEMA 1. Escriba las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ en la forma $\mathbf{QDQ}^\intercal$ del teorema espectral.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-17) PROBLEMA 2. Encuentre los autovalores y los autovectores unitarios (de longitud igual a uno) de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(Strang, 2003, ejercicio 3 del conjunto de problemas 6.4.)

(L-17) PROBLEMA 3. Encuentre una matriz ortonornal $\mathbf{Q}$ que diagonalize la siguiente matriz simétrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & -1 & -2\\2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

(Strang, 2003, ejercicio 5 del conjunto de problemas 6.4.)

(L-17) PROBLEMA 4. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica de 3 por 3 con autovalores 0, 1 y 2.

(a) ¿Qué propiedades pueden garantizarse para los autovectores unitarios $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ correspondientes a los respectivos autovalores 0, 1 y 2?

[1]de la forma escalonada y si no se ha cambiado el signo del determinante con trasformaciones elementales de *Tipo II*

(b) En términos de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, describa el espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$, el espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ y el espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.
(c) Encuentre un vector $\boldsymbol{x}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$. ¿Es único?
(d) ¿Qué condiciones debemos imponer sobre $\boldsymbol{b}$ para que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenga solución?
(e) Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son las columnas de $\mathbf{S}$, y $\boldsymbol{v}$ es ortogonal a $\boldsymbol{w}$; escriba las matrices $\mathbf{S}^{-1}$ y $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$.

(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-17) PROBLEMA 5. Escriba un hecho destacado sobre los valores característicos de cada uno de estos tipos de matrices:

(a) Una matriz simétrica real.
(b) Una matriz diagonalizable tal que $\mathbf{A}^n \to \mathbf{0}$ cuando $n \to \infty$.
(c) Una matriz no diagonalizable
(d) Una matriz singular

(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-17) PROBLEMA 6. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre los valores característicos de $\mathbf{A}$ (recuerde que $i^2 = -1$).
(b) Encuentre los valores característicos de $\mathbf{B}$ (en este caso quizá le resulte más sencillo encontrar primero los autovectores, y deducir entonces los autovalores).
(c) De los siguientes tipos de matrices: ortogonales, invertibles, permutación, hermíticas, de rango 1. diagonalizables, de Markov ¿a qué tipos pertenece $\mathbf{A}$?
(d) ¿y $\mathbf{B}$?

(Strang, 2007, ejercicio 14 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-17) PROBLEMA 7. Si $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$ entonces los autovalores de $\mathbf{A}$ deben ser ________. De un ejemplo tal que $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Ahora bien, si $\mathbf{A}$ es además simétrica, demuestre que entonces $\mathbf{A}^3$ es necesariamente $\mathbf{0}$.

(L-17) PROBLEMA 8. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Demuestre que $\mathbf{A}$ no es diagonalizable cuando $a = 3$.
(b) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable cuando $a = 2$? (explique su respuesta). En caso afirmativo calcule una matriz diagonal de autovalores $\mathbf{D}$ y una de autovectores $\mathbf{S}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.
(c) ¿Es $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ diagonalizable para cualquier valor de a? ¿Es posible encontrar una base ortonormal de autovectores de $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$?
(d) Encuentre todos los valores de a para los cuales existe $\mathbf{A}^{-1}$ y además la matriz es diagonalizable.

(L-17) PROBLEMA 9. Sea la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(a) Exprese $\mathbf{B}$ en la forma $\mathbf{B} = \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\intercal$ del teorema espectral.
(b) ¿Es $\mathbf{B}$ diagonalizable? Si no lo es, diga las razones; y en caso contrario genere una matriz $\mathbf{S}$ que diagonalice a $\mathbf{B}$.

Fin de los Problemas de la Lección 17

LECCIÓN 18: Diagonalización por congruencia. Matrices definidas

Lección 18

(**Lección** 18) T-1 Esquema de la Lección 18

Esquema de la *Lección 18*

- Matrices (semi)definidas positivas, (semi)definidas negativas
- Completando el cuadrado
- Diagonalización por congruencia

F32

(**Lección** 18) T-2 Formas cuadráticas

- Definida positiva: $\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0.$
- Semi-definida positiva: $\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \geq 0.$
- Definida negativa: $\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} < 0.$
- Semi-definida negativa: $\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq 0.$
- Indefinida: ni semi-definida positiva ni semi-definida negativa.

F33

Ejemplo 4. ¿Qué número debo poner para que la matriz $\mathbf{A}$ sea singular?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & \end{bmatrix}$$

- Autovalores:
- Menores principales:
- Para la forma cuadrática

$$q_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (x, \quad y,) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + \quad y^2$$

¿Existe $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 0$?

Ejemplo 5.

$$\text{Si} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad (x, \quad y,) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + \quad y^2$$

- ¿Hay números x y y que hagan $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ negativa?
- ¿Pasa por el origen?
- Si $y = 0$ y $x = 1$, ¿es positiva? (¿y si $x = -1$?)
- Si $x = 0$ y $y = 1$, ¿es positiva? (¿y si $y = -1$?)
- ¿Es siempre positiva?

$(0, 0,)$ **punto de silla**: mínimo en unas direcciones, y máximo en otras.

$$\lambda_1 = -2, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_1 = 11, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.

$$\text{Si} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \text{ entonces } \begin{pmatrix} x, & y, \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + 20y^2$$

Definida positiva.

Pruebas de que $\mathbf{A}$ es definida positiva

- ¿Son los menores principales positivos?
- ¿Son los autovalores positivos?

$$q_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0 \qquad \text{para todo } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$$

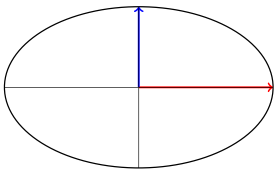
(**Lección** 18) T-3 **Completando el cuadrado**

Si pudiéramos expresar $q(\boldsymbol{x})$ como suma de cuadrados, sabríamos si $q(\boldsymbol{x})$ es defnida positiva.

Completemos el cuadrado!

- $q(x, y) = 2x^2 + 12xy + 20y^2 \; = \; 2(x + \quad y)^2 +$
- $q(x, y) = 2x^2 + 12xy + 7y^2$
- $q(x, y) = 2x^2 + 12xy + 18y^2$
- $q(x, y) = 2x^2 + 12xy + 200y^2$ (gráfico)

Si definida positiva: $q(x, y) = a; \quad a > 0$: elipse



¿es $q(x, y, z, w, t) = 2t^2 - 2tx - 2tz + w^2 - 2wy + 2x^2 - 2xy + 2y^2 + z^2$ definida positiva? ☹☹☹☹☹!!!???

F37

```
x, y, z, w, t  = sympy.symbols('x y z w t')
B = Matrix([[-1,1,0,0,0],[1,0,0,0,-1],[0,-1,0,1,0],[0,0,1,0,-1]])
A = ~B*B
v = Vector([x,y,z,w,t])
q = sympy.factor(v*A*v)
DiagonalizaC(A,1)
q
```

(**Lección** 18) T-4 Matrices congruentes

$\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ son congruentes si existe $\mathbf{B}$ *invertible* tal que $\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B}}$

Diagonalización por congruencia
Para toda $\mathbf{A}$ (simétrica) existe $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ *(invertible)* tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B} \qquad \text{es diagonal} \qquad (\mathbf{B}^{\intercal} = {}_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{I})$$

Teorema Espectral: ¡Diagonalización por semejanza y congruencia!

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{Q}.$$

Toda forma cuadrática se puede expresar como suma de cuadrados

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{x}\left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\intercal}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{y}\mathbf{D}\boldsymbol{y}; \qquad \text{donde} \qquad \boldsymbol{y} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

F38

(**Lección** 18) T-5 Completar el cuadrado

$$2x^2 + 12xy + 20y^2$$

$$\begin{bmatrix}2&6\\6&20\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}2&0\\6&2\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix};$$

por tanto tenemos que:

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix} = \mathbf{D} = \mathbf{E}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{E} = \begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&6\\6&20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}$$

así $\mathbf{A} = (\mathbf{E}^{\intercal})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{E}^{-1}$ y por tanto

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (x, \quad y,)\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{x}\,(\mathbf{E}^{-1})^{\intercal}\right)\mathbf{D}\left(\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{x}\right)$$

$$= \Big((x+3y), \quad y,\Big)\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}(x+3y)\\y\end{pmatrix} = 2(x+3y)^2 + 2y^2$$

F39

(**Lección** 18) T-6 Ejemplo 3 por 3

$$\text{¿Es } \mathbf{A} = \begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix} \text{ definida positiva?}$$

$$\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac{3}{2}&-1\\0&-1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{2}{3})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{2}{3})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz > 0$$

$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 1$: (elipsoide) Ejes en la dirección de los autovectores $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{\intercal}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{Q}$

F40

Si $\mathsf{B} = \mathsf{I}_{\underset{[(\frac{1}{2})\mathbf{1+2}][(\frac{2}{3})\mathbf{2+3}]}{\tau\quad\tau}}$, es decir, si

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(\frac{2}{3})\mathbf{2+3}]}]{\overset{\tau}{[(\frac{1}{2})\mathbf{1+2}]}} \begin{bmatrix}1&-1/2&1/3\\0&1&-2/3\\0&0&1\end{bmatrix} = \mathsf{B} \qquad \Rightarrow \qquad \mathsf{B}^{-1} = \begin{bmatrix}1&-1/2&0\\0&1&-2/3\\0&0&1\end{bmatrix},$$

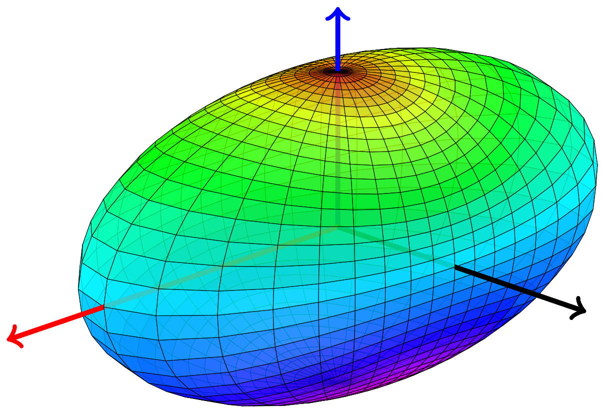
tenemos que la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{x}$ se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{x} &= (x, \quad y, \quad z,) \begin{bmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\0&-2/3&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2&&\\&3/2&\\&&4/3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&-1/2&0\\0&1&-2/3\\0&0&1\end{bmatrix} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &&= \boldsymbol{x}\left(\mathsf{B}^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\mathsf{D}\mathsf{B}^{-1}\boldsymbol{x}\\
&= \Big((x-1/2y), \quad (y-2/3z), \quad z,\Big) \begin{bmatrix}2&&\\&3/2&\\&&4/3\end{bmatrix} \begin{pmatrix}(x-1/2y)\\(y-2/3z)\\z\end{pmatrix} &&= \Big(\mathsf{B}^{-1}\boldsymbol{x}\Big)\cdot\mathsf{D}\cdot\Big(\mathsf{B}^{-1}\boldsymbol{x}\Big)\\
&= 2\,(x-1/2y)^2 \;+\; 3/2\,(y-2/3z)^2 \;+\; 4/3z^2 &&= \sum_{j|}\mathsf{D}_{|j}\cdot\left(y_j\right)^2 \quad (\text{con } \boldsymbol{y} = \mathsf{B}^{-1}\boldsymbol{x});
\end{aligned}$$

es una suma de tres términos al cuadrado, cada uno de ellos multiplicado por uno de los pivotes de D; como todos los pivotes son positivos, la forma cuadrática es evidentemente definida positiva.

(**Lección** 18) T-7 **Matrices definidas positivas y elipsoides: ejemplo 3 por 3**

- La región ($\boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{x} = a$) es un (elipsoide).
- Los autovectores son los ejes principales Q.
- Longitud de los ejes determinada por los autovalores



F41

(**Lección** 18) T-8 **Otro ejemplo 3 por 3**

$$¿\text{Es } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ definida positiva?}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\overset{\tau}{\mathbf{3}}+\mathbf{1}]}]{[(1)\overset{\tau}{\mathbf{3}}+\mathbf{1}]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-\frac{1}{2})\overset{\tau}{\mathbf{1}}+\mathbf{3}]}]{[(-\frac{1}{2})\overset{\tau}{\mathbf{1}}+\mathbf{3}]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[{[\mathbf{2}\overset{\tau}{\rightleftharpoons}\mathbf{3}]}]{[\mathbf{2}\overset{\tau}{\rightleftharpoons}\mathbf{3}]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz indefinida

F42

(**Lección** 18) T-9 **"Clasificación" de formas cuadráticas**

$$\boxed{\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \lesseqqgtr 0; \quad \text{para todo } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}}$$

Métodos
Mirar el signo de

1. Elem. diag.: $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{B}$ (*Diagonalización por congruencia*) ☺
2. Calcular los autovalores: (Raíces de un polinomio) ☹
3. Menores principales: (Critero de Sylvester) ☹

Ley de inercia
el número de componentes positivas, negativas y nulas de la diagonal de $\mathbf{D}$ es un invariante de $\mathbf{A}$, i.e., no depende de $\mathbf{B}$

(La diagonalización ortogonal $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ es un caso especial)

F43

El criterio de los menores de Sylvester indica que si todos los menores principales son positivos, entonces la matriz es definida positiva. Pero este criterio no da pistas sobre el signo de los autovalores cuando alguno de los menores es cero. Así ocurre en el último ejemplo, donde uno de los autovalores es cero (con multiplicidad 1); como la traza es cero pero el rango no es nulo, los otros dos autovalores deben ser no nulos y de signos opuestos. Es decir, la matriz es indefinida, sin embargo ¡los tres menores principales son cero!

Existe una verificación por menores para matrices semidefinidas positivas, pero es más complicada (y si la matriz es negativa, hay una complicación más con la alternancia de los signos de los menores). Por ello, es mucho más práctico completar el cuadrado mediante la diagonalización por congruencia: $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{B}$.

Fin de la lección

Problemas de la Lección 18

(L-18) PROBLEMA 1. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas, y escriba las formas cuadráticas $f = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ correspondientes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

(e) El determinante del apartado (b) es cero; ¿a lo largo de que recta se verifica que en todos sus puntos $f(x, y) = 0$?
(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 2. ¿Cuál es la forma cuadrática $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ para cada una de las siguientes matrices? Complete el cuadrado con la finalidad de escribir f como una suma de uno o dos cuadrados $d_1(\quad)^2 + d_2(\quad)^2$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 15 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 3. ¿Cuales de la siguientes matrices tienen dos autovalores positivos? Pruebe $a > 0$ y $ac > b^2$ (determinante mayor que cero); no calcule los autovalores. $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} < 0$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 14 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 4. Demuestre que $f(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2$ no tiene un mínimo en $(0, 0)$ a pesar de que todos sus coeficientes son positivos. Escriba $f(x, y)$ como una diferencia de cuadrados y encuentre un punto (x, y) donde $f(x, y)$ sea negativa.
(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 5. Demuestre a partir de los valores característicos que si $\mathbf{A}$ es definida positiva, entonces también lo son $\mathbf{A}^2$ y $\mathbf{A}^{-1}$.
(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-18) PROBLEMA 6. Sean las formas cuadráticas

$$\begin{aligned} q_1(x, y, z) &= x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy. \\ q_2(x, y, z) &= -x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy - 2axz. \end{aligned}$$

(a) Demuestre que $q_1(x, y, z)$ es semi-definida positiva.
(b) Halle, si existiese, un valor de a de manera que $q_2(x, y, z)$ sea definida negativa.

(L-18) PROBLEMA 7. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas o no.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2$

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-18) PROBLEMA 8. Clasifique la forma cuadrática (ie., definida positiva, negativa, semidefinida, no definida, etc.)

$$q(x, y, z) = x^2 + 6xy + y^2 + az^2;$$

en función del parámetro a.

(L-18) PROBLEMA 9. Si $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$ es definida positiva, pruebe que $\mathbf{A}^{-1}$ es definida positiva.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 10. Si una matriz simétrica de 2 por 2 satisface $a > 0$, y $ac > b^2$, demuestre que sus autovalores son reales y positivos (definida positiva). Emplee la ecuación característica y el hecho de que el producto de los autovalores es igual al determinante.
(Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 11. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas, definidas negativas, semi-definidas, o indefinidas.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = -\mathbf{B}$

(d) $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}$

(L-18) PROBLEMA 12. Una matriz definida positiva no puede tener un cero (o incluso peor; un número negativo) en su diagonal principal. Demuestre que esta matriz no cumple $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$, para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{no es positiva cuando} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 21 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-18) PROBLEMA 13. Demuestre que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son definidas positivas entonces $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ también es definida positiva. Para esta demostración los pivotes y los valores característicos no son convenientes. Es mejor emplear $\boldsymbol{x}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\boldsymbol{x} > 0$
(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-18) PROBLEMA 14. Factorice las siguientes matrices simétricas en la forma $\dot{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{L}}^{\mathsf{T}}$.

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(L-18) PROBLEMA 15. La forma cuadrática $f(x,y) = 3(x+2y)^2 + 4y^2$ es definida positiva. Encuentre la matriz $\mathbf{A}$, factorícela en $\mathbf{LDL}^{\mathsf{T}}$, y relacione los elementos en $\mathbf{D}$ y $\mathbf{L}$ con 3, 2 y 4 en f.
(Strang, 2007, ejercicio 9 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 16. Considere las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se pide:

(a) (0.5^{pts}) Calcule los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) Prueba que si $a = 2$ la matriz $\mathbf{A}$ NO es diagonalizable.
(c) (1^{pts}) Para la matriz $\mathbf{B}$, encuentre una matriz diagonal $\mathbf{D}$ y una matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{\intercal}$.
(d) (0.5^{pts}) Obtenga la expresión polinómica de la forma cuadrática asociada a la matriz $\mathbf{B}$ y pruebe que es definida positiva.

Versión de un ejercicio proporcionado por Mercedes Vazquez

(L-18) Problema 17. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ b & 4/5 \end{pmatrix}$, calcule valores (si existen) de a y b para los cuales

(a) (0.5^{pts}) La matriz $\mathbf{A}$ es orto-normal.
(b) (0.5^{pts}) Las columnas de la matriz $\mathbf{A}$ son independientes.
(c) (0.5^{pts}) $\lambda = 0$ es un autovalor de $\mathbf{A}$.
(d) (0.5^{pts}) $\mathbf{A}$ es simétrica y definida negativa.

(L-18) Problema 18.

(a) Obtenga la matriz $\mathbf{Q}$ asociada a la forma cuadrática $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + ay^2 + 8z^2$ y clasifique la matriz $\mathbf{Q}$ (es decir, diga en que casos la matriz es no definida, definida o semidefinida, de manera positiva o negativa) para el caso en el que a es igual a uno ($a = 1$).
(b) Clasifíque la matriz $\mathbf{Q}$ cuando $a \neq 1$.

Fin de los Problemas de la Lección 18

LECCIÓN OPCIONAL II: Ejercicios de repaso

Problemas de la Lección opcional 2

(L-Opt-2) Problema 1. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que $\mathbf{A}$ es invertible si y sólo si $a \neq 0$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Es la matriz $\mathbf{A}$ definida positiva cuando $a = 1$? Justifique su respuesta.
(c) (1^{pts}) Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ cuando $a = 2$.
(d) (0.5^{pts}) ¿Cuantas variables pueden ser tomadas como exógenas (o libres) en el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ cuando $a = 0$? ¿Cuales?

(L-Opt-2) Problema 2. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o veracidad de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)
(a) Si $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces $\mathbf{A}^2$ también lo es.
(b) Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ entonces $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})$ donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.
(c) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$, entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es compatible determinado.
(d) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$, entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ puede ser incompatible.
(e) Si una matriz es ortogonal (columnas perpendiculares y de norma uno) entonces su inversa también es ortogonal.
(f) Si 1 es el único autovalor de una matriz $\mathbf{A}$ de orden 2×2, entonces $\mathbf{A}$ necesariamente tiene que ser la matriz identidad $\mathbf{I}$.

(L-Opt-2) Problema 3. complete los blancos, o responda **V**erdadero/**F**also.
(a) Cualquier sistema generador de un espacio vectorial contiene una base del espacio (V/F)

____________.

(b) Que los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sean linealmente independientes significa que

____.

(c) El conjunto que sólo contiene el vector $\mathbf{0}$ es un conjunto linealmente independiente. (V/F)

____________.

(d) Una matriz cuadrada de orden n por n es diagonalizable cuando:

____.

(e) Si $\boldsymbol{u} = (1, 2, -1, 1)$, entonces $||\boldsymbol{u}|| =$ __________.
(f) Si $\boldsymbol{u} = (1, 2, -1, 1)$ y $\boldsymbol{v} = (-2, 1, 0, 0)$, entonces $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} =$ __________.

(L-Opt-2) Problema 4. En las preguntas siguientes $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices $n \times n$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (incluya una breve explicación, o un contra ejemplo que justifique su respuesta):
(a) Si $\mathbf{A}$ no es cero entonces $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
(b) Si $\det(\mathbf{AB}) \neq 0$ entonces $\mathbf{A}$ es invertible.
(c) Si intercambio las dos primeras filas de $\mathbf{A}$ sus autovalores cambian.
(d) Si $\mathbf{A}$ es real y simétrica, entonces sus autovalores son reales **(aquí no es necesaria una justificación)**.
(e) Si la forma reducida de echelon de $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})$ es la matriz identidad, entonces 5 no es un autovalor de $\mathbf{A}$.
(f) Sea $\boldsymbol{b}$ un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Si el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, entonces $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
(g) Sea $\mathbf{C}$ de orden 3×5. El rango de $\mathbf{C}$ puede ser 4.
(h) Sea $\mathbf{C}$ de orden $n \times m$, y $\boldsymbol{b}$ un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, entonces $\operatorname{rg}(\mathbf{C}) < n$.
(i) Toda matriz diagonalizable es invertible.
(j) Si $\mathbf{A}$ es invertible, entonces su forma reducida de echelon es la matriz identidad.

(L-Opt-2) Problema 5. Sean

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&4\\0&0&5\end{bmatrix};\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&1&3\\0&0&2\end{bmatrix};\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0&5\\0&0&4\\0&0&6\end{bmatrix};\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}2&3&0\\3&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Los autovalores de $\mathbf{B}$ son 0 y 2. Use esta información para responder a las siguientes cuestiones. Para cada matriz debe dar una explicación. Puede haber más de una matriz que cumpla la condición:

(a) ¿Qué matrices son invertibles?
(b) ¿Qué matrices tienen un autovalor repetido?
(c) ¿Qué matrices tienen rango menor a tres?
(d) ¿Qué matrices son diagonalizables?
(e) ¿Para qué matrices diagonalizables podemos encontrar tres autovectores ortogonales entre si?

(L-Opt-2) Problema 6. Sea la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

(a) Calcule los autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$.
(b) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?
(c) ¿Es posible encontrar una matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{A}=\mathbf{PDP}^{\intercal}$, siendo $\mathbf{D}$ una matriz diagonal?
(d) Calcule $|\mathbf{A}^{-1}|$.

(L-Opt-2) Problema 7. Sea $\mathbf{A}$ una matriz 3×3 y sean $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ y $\lambda_3=-1$ sus autovalores. Sean $\boldsymbol{v}_1=(1,0,1)^{\intercal}$ y $\boldsymbol{v}_2=(1,1,1)^{\intercal}$ los autovectores asociados a λ_1 y λ_2.

(a) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?
(b) ¿Podría ser $\boldsymbol{v}_3=(-1,0,-1)^{\intercal}$ un autovector asociado al autovalor $\lambda_3=-1$.
(c) Calcule $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)$.

(L-Opt-2) Problema 8.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre un sistema lineal homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ cuyas soluciones sean

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\exists\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\quad\text{tales que}\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.\right\}$$

(b) (0.5^{pts}) Si el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$ es $p(\lambda)=\lambda^5+3\lambda^4-24\lambda^3+28\lambda^2-3\lambda+10$, encuentre el rango de $\mathbf{A}$.

(L-Opt-2) Problema 9. Suponga una matriz cuadrada e *invertible* $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$.

(a) ¿Cuáles son sus espacios columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$? (no responda con la definición, diga qué conjunto de vectores compone cada espacio).
(b) Suponga que $\mathbf{A}$ puede ser factorizada en $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\5&1&0\\7&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{12}&u_{13}\\0&0&u_{13}\end{bmatrix}$$

Describa el primer paso de eliminación en la reducción de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{U}$. ¿porqué sabe que $\mathbf{U}$ es también una matriz invertible? ¿Cuanto vale el determinante de $\mathbf{A}$?

(c) Encuentre una matriz particular de dimensiones 3×3 e invertible $\mathbf{A}$ que no pueda ser factorizada en la forma $\mathbf{LU}$ (sin permutar previamente las filas). ¿Qué factorización es todavía posible en su ejemplo? (no es necesario que realice la factorización). ¿Cómo sabe que su matriz $\mathbf{A}$ es invertible?

Fin de los Problemas de la Lección opcional 2

References

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones.* Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.

Soluciones

(L-15) Problema 1(a)

$$\begin{bmatrix}-3 & 4 & -4\\ -3 & 5 & -3\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Por tanto el auto-valor correspondiente a $\boldsymbol{v}$ es -1. Por otra parte

$$\begin{bmatrix}-3 & 4 & -4\\ -3 & 5 & -3\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Por tanto el auto-valor correspondiente a $\boldsymbol{w}$ es 1.

□

(L-15) Problema 1(b) Necesitamos encontrar un elemento del espacio nulo de $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$, en otras palabras, una solución a

$$\begin{bmatrix}-5 & 4 & -4\\ -3 & 3 & -3\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Podemos resolver esto mediante eliminación gaussiana por filas, o sencillamente observar que la tercera columna es -1 veces la segunda, por lo que es inmediato saber que uno de los auto-vectores debe ser:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

□

(L-15) Problema 2(a) Los autovalores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix}$$

son la solución a la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda)-16 = 0; \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 5;\ \lambda_2 = -5.$$

También podemos emplear el sistema

$$\begin{cases}\lambda_1\cdot\lambda_2 = & \det\mathbf{A} = -25\\ \lambda_1+\lambda_2 = & \operatorname{tr}\mathbf{A} = 0\end{cases}$$

con idéntico resultado.

Para $\lambda_1 = 5$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}3-5 & 4\\ 4 & -3-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 4\\ 4 & -8\end{bmatrix}$$

son los múltiplos de $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Por tanto, los autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_1$

Para $\lambda_2 = -5$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}3+5 & 4\\ 4 & -3+5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

son los múltiplos de $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Por tanto, los autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_2$

□

(L-15) Problema 2(b) Los autovalores de la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$$

son la solución a la ecuación característica

$$\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2-b^2) = 0.$$

Por tanto

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2-b^2)}}{2} = a \pm b.$$

Para $\lambda_1 = a+b$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{B}-\lambda_1\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -b & b \\ b & -b \end{bmatrix}$$

son los múltiplos de $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, los autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_1$.

Para $\lambda_2 = a-b$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathbf{B}-\lambda_2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} b & b \\ b & b \end{bmatrix}$$

son los múltiplos de $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, los autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_2$.

□

(L-15) Problema 3. Los números de la diagonal de $\mathbf{A}$: 1, 2, 3, 7, 8, y 9.

□

(L-15) Problema 4(a) Puesto que es una matriz triangular, los elementos de su diagonal son sus auto-vectores. Para $\lambda_1 = 3$ necesitamos calcular una base del espacio nulo de $(\mathbf{A}-3\mathbf{I})$.

$$\left[\frac{\mathbf{A}-3\mathbf{I}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(\frac{-1}{2})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \qquad \text{Autovectores: los múltiplos no nulos de } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 1$ necesitamos calcular una base del espacio nulo de $(\mathbf{A}-\mathbf{I})$.

$$\left[\frac{\mathbf{A}-\mathbf{I}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \qquad \text{Autovectores: los múltiplos no nulos de } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_3 = 0$ necesitamos calcular una base del espacio nulo de $(\mathbf{A}-0\mathbf{I})$.

$$\left[\frac{\mathbf{A}-0\mathbf{I}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(3)\mathbf{2}] \\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(3)\mathbf{3}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right]$$

Los autovectores son los múltiplos no nulos de $\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Además $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 + 1 + 0 = 4 = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$ y también $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0 = |\mathbf{A}|$.

```
A =  Matrix([[3,4,2],[0,1,2],[0,0,0]])
espectro = {3,1,0}
for l in espectro:
```

```
    display(l)
    L   = Elim(  (A-l*I(3)).apila(I(3),1) ,1)
    cL0 = tuple([c+1 for c,i in enumerate( (1,2,3)|L ) if i.es_nulo()])
    display((4,5,6)|L|cL0)
```

□

(L-15) Problema 4(b) La ecuación característica es

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2)(2-\lambda) - 4(2-\lambda) = 0$$

De la anterior expresión se puede ver que $\lambda_1 = 2$ es un autovalor.

Dividiendo la ecuación característica por $(2-\lambda)$ también tenemos $\lambda^2 = 4$; por tanto $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -2$

Para $\lambda = 2$ necesitamos calcular una base del espacio nulo de

$$\big(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}\big) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Obtenemos dos autovectores independientes asociados a los dos primeros autovalores $\lambda = 2$ (una base del espacio nulo de $\big(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}\big)$):

$$\text{Autovectores: todas las combinaciones lineales no nulas de} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_3 = -2$ necesitamos calcular una base del espacio nulo de

$$\big(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}\big) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Los correspondientes autovectores son los múltiplos no nulos de} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Además $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 2 - 2 = 2 = \operatorname{tr}\big(\mathbf{A}\big)$ y también $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot 2 \cdot (-2) = -8 = |\mathbf{A}|$.

```
B = Matrix([[0,0,2],[0,2,0],[2,0,0]])
l = sympy.symbols('\lambda')
d = Determinante( (B-l*I(3)) ,1)
p = sympy.poly(d.valor)
e = sympy.real_roots(p)
display(Sistema([d, e]))
for i in set(e):
    caso = "\lambda = %d\n" % i
    display(Math(caso))
    L   = Elim(  (B-i*I(3)).apila(I(3),1),1 )
    cL0 = tuple([c+1 for c,v in enumerate((1,2,3)|L) if v.es_nulo()])
    display( (4,5,6)|L|cL0 )
```

□

(L-15) Problema 5(a) trasponer una matriz no afecta al determinante y en este caso

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{\intercal} = \det(\mathbf{A}^{\intercal} - \lambda\mathbf{I})$$

□

(L-15) Problema 5(b) Los autovalores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

son la solución a la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0;$$

que son iguales a los elementos de su diagonal (nótese que los auto-valores de una matriz triangular superior (o inferior) son siempre los elementos de la diagonal).

Para $\lambda_1 = 1$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathsf{I}) = \begin{bmatrix} 1-1 & 2 \\ 0 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

son los múltiplos del auto-vector $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 3$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathsf{A} - \lambda_2 \mathsf{I}) = \begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

son los múltiplos del auto-vector $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sin embargo, para la matriz $\mathsf{A}^{\intercal}$

$$\mathsf{A}^{\intercal} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

con los mismos autovalores (misma diagonal), tenemos que

Para $\lambda_1 = 1$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathsf{A}^{\intercal} - \lambda \mathsf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

son los múltiplos del auto-vector $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 3$, el espacio nulo de la matriz

$$(\mathsf{A}^{\intercal} - \lambda \mathsf{I}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

son los múltiplos del auto-vector $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto los auto-vectores de A y de $\mathsf{A}^{\intercal}$ son distintos.

□

(L-15) Problema 6.

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\boldsymbol{x} =& \big(\mathsf{B} + \alpha\mathsf{I}\big)\boldsymbol{x} \\ =& \mathsf{B}\boldsymbol{x} + \alpha\mathsf{I}\boldsymbol{x} \\ =& \lambda\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{x} \\ =& (\lambda + \alpha)\boldsymbol{x}; \end{aligned}$$

por tanto $\boldsymbol{x}$ también es autovector de A, pero con autovalor asociado $(\lambda + \alpha)$.

□

(L-15) Problema 7(a) Primero calculemos los autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0; \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 & = 2 \\ \lambda_2 & = 3 \end{cases}$$

Y ahora los auto-vectores.

Para $\lambda_1 = 2$ buscamos una base del espacio nulo de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Puesto que las dos columnas son iguales, los autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 3$ buscamos una base del espacio nulo de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1-3 & -1 \\ 2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que la primera columna es el doble de la segunda, los correspondientes autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Por último, el determinante de $\mathbf{A}$ es 6 que es igual a 2×3 y la traza es 5 que es igual a $2+3$.

$\square$

(L-15) Problema 7(b) Calculemos los autovalores:

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & -1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)(-3-\lambda)+2 = \lambda^2+9\lambda+20 = 0; \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 & = -5 \\ \lambda_2 & = -4 \end{cases}.$$

Y ahora los auto-vectores.

Para $\lambda_1 = -5$ buscamos una base del espacio nulo de la matriz

$$\begin{bmatrix} -6-(-5) & -1 \\ 2 & -3-(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Al igual que en el apartado anterior, los correspondientes autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = -4$ buscamos una base del espacio nulo de la matriz

$$\begin{bmatrix} -6-(-4) & -1 \\ 2 & -3-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De manera idéntica al apartado (a), los correspondientes autovectores son los múltiplos no nulos de $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Así pues, tras restar 7 veces la matriz identidad ($\mathbf{B} = \mathbf{A} - 7\mathbf{I}$), los autovalores son los de la matriz original menos 7; es decir, $\lambda_1 = 2-7 = -5$ y $\lambda_2 = 3-7 = -4$; y los auto-vectores son idénticos a los de la matriz original $\mathbf{A}$.

$\square$

(L-15) Problema 8(a) Sea un vector $\boldsymbol{x}$ tal que verifica $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$; entonces

$$\mathbf{B}\boldsymbol{x} = (\mathbf{A} - 7\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} - 7\boldsymbol{x} = (\lambda - 7)\boldsymbol{x}$$

por tanto $\boldsymbol{x}$ también es auto-vector de $\mathbf{B}$ con un auto-valor asociado igual a $(\lambda - 7)$.

$\square$

(L-15) Problema 8(b)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{x} &= \lambda\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x} &= \lambda(\mathbf{A}^{-1})\boldsymbol{x} \\ \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x} &= (\mathbf{A}^{-1})\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

La última igualdad $(\mathbf{A}^{-1})\boldsymbol{x} = (1/\lambda)\boldsymbol{x}$ implica que $\boldsymbol{x}$ es también auto-vector de $\mathbf{A}^{-1}$ con un auto-vector asociado igual a $1/\lambda$ para el caso de $\mathbf{A}^{-1}$.

$\square$

(L-15) Problema 9. Si λ es un auto-valor de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Entonces

$$\mathbf{A}^2\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}.$$

Pero, puesto que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ entonces

$$\mathbf{A}^2\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x},$$

por tanto

$$\lambda^2 = \lambda.$$

Los dos únicos valores posibles son, o bien 0, o bien 1.

$\square$

(L-15) Problema 10.

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3)=\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1+\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2-\mathbf{A}\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-3\boldsymbol{v}_3.$$

$\square$

(L-15) Problema 11. La ecuación característica de la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

es $(1-\lambda)^2-1=0$. Por tanto la matriz tiene autovalores $\lambda=0$ y $\lambda=2$.

Sin embargo, la ecuación característica de su forma de escalonada es

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$$

es $(1-\lambda)(-\lambda)=0$. Por tanto los nuevos autovalores son $\lambda=0$ y $\lambda=1$.

Los autovalores nulos no cambian. Hay tantos cómo el número de columnas menos el rango de la matriz (es decir, tantos como numero de columnas libres); y ni el número de columnas ni el rango de la matriz cambia al aplicar transformaciones elementales. Por tanto el número de autovalores nulos se mantiene tras aplicar el método de eliminación.

$\square$

(L-15) Problema 12. Basta con igualar λ a cero.

$\square$

(L-15) Problema 13. Para $\mathbf{A}$, la suma de λ_1 y λ_2 es -1 (la traza) y el producto es -6 (el determinante), por tanto $\lambda_1=-3$ y $\lambda_2=2$

Para $\lambda_1=-3$; una base del espacio nulo de $(\mathbf{A}+3\mathbf{I})=\begin{bmatrix}2&3\\2&3\end{bmatrix}$ es $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$. Sus múltiplos no nulos son los correspondientes autovectores.

Y para $\lambda_2=2$; una base del espacio nulo de $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=\begin{bmatrix}-3&3\\2&-2\end{bmatrix}$ es $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Sus múltiplos no nulos son los correspondientes autovectores.

Por otra parte, para $\mathbf{A}^2$, la suma de λ_1 y λ_2 es 13 (la traza) y el producto es 36 (el determinante), por tanto $\lambda_1=9$ y $\lambda_2=4$

Para $\lambda_1=9$; una base del espacio nulo de $(\mathbf{A}-9\mathbf{I})=\begin{bmatrix}-2&-3\\-2&-3\end{bmatrix}$ es $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$. Sus múltiplos no nulos son los correspondientes autovectores.

Y para $\lambda_2=4$; una base del espacio nulo de $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=\begin{bmatrix}3&-3\\-2&2\end{bmatrix}$ es $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Sus múltiplos no nulos son los correspondientes autovectores.

$\mathbf{A}^2$ tiene los mismos **autovectores** que $\mathbf{A}$. Si los autovalores de $\mathbf{A}$ son λ_1 y λ_2, los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son **el cuadrado de los anteriores** (λ_1^2 y λ_2^2).

$\square$

(L-15) Problema 14. Los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son el cuadrado de los autovalores de $\mathbf{A}$, por lo que

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^2\right)=1^2+2^2+4^2=21$$

Razonando de la misma manera

$$\left|(\mathbf{A}^{-1})^{\intercal}\right|=\det\mathbf{A}^{-1}=(1^{-1})(2^{-1})(4^{-1})=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

$\square$

(L-15) Problema 15. The condition says that $(\mathbf{A}^2-4\mathbf{I})$ is singular. But we know that, if $\lambda_1,\dots\lambda_n$ are eigenvalues of $\mathbf{A}$, then the eigenvalues of $(\mathbf{A}^2-4\mathbf{I})$ are $\lambda_1^2-4,\lambda_1^2-4,\dots,\lambda_n^2-4$. The condition $(\mathbf{A}^2-4\mathbf{I})$ being singular says that one of λ_i^2-4 is zero, and hence $\lambda_i=2$ or $\lambda_i=-2$. That is to say $\mathbf{A}$ has an eigenvalue 2 or -2.

$\square$

(L-15) Problema 16. First, the last two columns of $\mathbf{A}$ are the same. Hence $\mathbf{A}$ is singular and it must have an eigenvalue $\lambda_1=0$. Also, we observe that $\mathbf{A}$ is a Markov matrix. This means that $\lambda_2=1$ is an eigenvalue of $\mathbf{A}$. Finally, we know the trace of $\mathbf{A}$ is the sum of its three eigenvalues. So, $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0.5 + 0.5 + 0.3 = 1.3$ and the last eigenvalue is $\lambda_3 = 1.3 - 1 - 0 = 0.3$.

□

(L-16) Problema 1(a) Del Problema 5 on page 6 (L-19) ya hemos calculado los autovalores y los auto-vectores. Por lo que sabemos que

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}.$$

Calculemos la inversa de $\mathbf{S}$:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{S}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc}1&1\\0&1\\ \hline 1&0\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\ \hline 1&-1\\0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{S}^{-1}\end{array}\right]$$

Por tanto

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix} = \mathbf{SDS}^{-1}.$$

O aplicando el algoritmo de diagonalización por bloques (que en este caso sabemos que arrojará una matriz diagonal, puesto que los autovalores no se repiten)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] \xrightarrow[3\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{cc}-2&2\\0&0\\ \hline 1&0\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc}-2&0\\0&0\\ \hline 1&1\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}]{} \left[\begin{array}{cc}-2&0\\0&0\\ \hline 1&1\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[3\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{cc}1&0\\0&3\\ \hline 1&1\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{cc}0&0\\0&2\\ \hline 1&1\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{cc}1&0\\0&3\\ \hline 1&1\\0&1\end{array}\right]$$

```
A = Matrix([[1,2],[0,3]])
lambdas = [1,3]
D = DiagonalizaS(A,lambdas,1)
display(D)
display(D.S)
```

□

(L-16) Problema 1(b) Primero resolvemos su ecuación característica $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ para encontrar los autovalores

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = 0; \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\lambda_1 &= 0\\ \lambda_2 &= 3\end{cases}$$

(¿porqué podíamos saber que uno de los autovalores era cero entes de resolver la ecuación característica?)

- para $\lambda_1 = 0$, el espacio nulo de la matriz $(\mathbf{B} - 0\mathbf{I}) = \mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$ son los múltiplos del auto-vector

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

- para $\lambda_2 = 3$, el espacio nulo de la matriz $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}-2&1\\2&-1\end{bmatrix}$ son los múltiplos del auto-vector

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Así pues:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}1&-1\\2&1\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix}3&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

O aplicando el algoritmo de diagonalización por bloques (que en este caso sabemos que arrojará una matriz diagonal, puesto que los autovalores no se repiten)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} \xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{cc}1&1\\2&2\\ \hline 1&0\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc}1&0\\2&0\\ \hline 1&-1\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc}3&0\\2&0\\ \hline 1&-1\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{cc}3&0\\2&0\\ \hline 1&-1\\0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[3\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{cc}0&0\\ \hline 2&-3\\ \hline 1&-1\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(3)\mathbf{1}]}}} \left[\begin{array}{cc}0&0\\ \hline 0&-3\\ \hline 1&-1\\2&1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{{[(1/3)\mathbf{1}]}\\{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc}0&0\\ \hline 0&-3\\ \hline 1&-1\\2&1\end{array}\right] \xrightarrow[3\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{cc}3&0\\0&0\\ \hline 1&-1\\2&1\end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{D}\\ \hline \mathbf{S}\end{bmatrix}$$

Calculemos la inversa de $\mathbf{S}$:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{S}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc}1&-1\\2&1\\ \hline 1&0\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}} \left[\begin{array}{cc}1&0\\2&3\\ \hline 1&1\\0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\{[(3)\mathbf{1}]}\\{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}} \left[\begin{array}{cc}3&0\\0&3\\ \hline 1&1\\-2&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\{[(\frac{1}{3})\mathbf{1}]}\\{[(\frac{1}{3})\mathbf{2}]}}} \left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\ \hline \frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{-2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{S}^{-1}\end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3&1/3\\-2/3&1/3\end{bmatrix} = \mathbf{SDS}^{-1}.$$

```
B = Matrix([[1,1],[2,2]])
l = sympy.symbols('\lambda')
d = Determinante( (B-l*I(B.n)) ,1)
p = sympy.poly(d.valor)
e = sympy.real_roots(p)
display(Sistema([d, e]))
S = Sistema([])
D = tuple()
for i in set(e):
    caso = "\lambda = %d\n" % i
    display(Math(caso))
    L   = Elim( (B-i*I(B.n)).apila(I(B.n),1), 1)
    cL0 = tuple([c+1 for c,v in enumerate(slice(1,B.n)|L) if v.es_nulo()])
    S = S.concatena(slice(B.n+1,None)|L|cL0).sis()
    D = D+(i,)*e.count(i)

S = Matrix(S)
D = Vector(D).diag()
display(Sistema([D,S,S**-1]))
display(Sistema([(S**-1)*B*S, S*D*(S**-1)]))
```

$\square$

(L-16) Problema 2(a)

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1\cdot\lambda_2=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=0.$$

Esta matriz sólo se puede diagonalizar si el espacio nulo de $(\mathbf{A}_1 - 0\mathbf{I}) = \mathbf{A}_1$ tiene dimensión 2. $\mathbf{A}_1$ sólo tiene una columna libre $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 1$; por tanto esta matriz no se puede diagonalizar.

$\square$

(L-16) Problema 2(b) Esta matriz no tiene autovalores repetidos; por tanto se puede diagonalizar.

$\square$

(L-16) Problema 2(c) El autovalor $\lambda = 2$ está repetido; por tanto, para que la matriz sea diagonalizable es necesario que espacio nulo de $\mathbf{A}_3 - 2\mathbf{I}$ tenga dimensión 2 (dos autovectores independientes), pero sólo tiene dimensión 1. No se puede diagonalizar.

$\square$

(L-16) Problema 3. Ecuación característica: $(4-\lambda)(2-\lambda)-3 = \lambda^2-6\lambda+5=0; \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=5; \quad \lambda_2=1.$

$$\lambda_1 = 5 \qquad\Longrightarrow\qquad (\mathbf{A}-5\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}-1&3\\1&-3\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \Longrightarrow \quad (\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O de manera alternativa:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{cc} 5 & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[5\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hline 1 & -4 \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\underset{[(4)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hline 0 & -4 \\ \hline 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(1/4)\mathbf{1}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hline 0 & -4 \\ \hline 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[5\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{cc} 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$$

Así pues,

$$\mathbf{A}^{100} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{100}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^{100} & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5\cdot 5^{100} & 1 \\ 5^{100} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3\cdot 5^{100}-1 & 3\cdot 5^{100}+3 \\ 5^{100}+1 & 5^{100}-3 \end{bmatrix}$$

□

(L-16) Problema 4(a) Si, puesto que no tiene un autovalor igual a cero; de hecho su determinante es $|\mathbf{A}| = 1 \times 1 \times 2 = 2 \neq 0$.

□

(L-16) Problema 4(b) No lo podemos saber, depende de cuantos autovectores linealmente independientes podamos encontrar.

□

(L-16) Problema 4(c) No lo podemos saber, depende de cuantos autovectores linealmente independientes podamos encontrar.

□

(L-16) Problema 5(a) Puesto que la matriz es triangular, los autovalores son los elementos de la diagonal principal ($\lambda = 4$ y $\lambda = 2$, ambos con multiplicidad algebráica igual a 2). Entonces, para que la matriz sea diagonalizable, es neceario que el rango de la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ sea dos en ambos casos. Veamos si efectivamente es así:

$$\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}-4\mathbf{I}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 2; \quad \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}-2\mathbf{I}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Por tanto ya sabemos que $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

Observando la matriz $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})$, es fácil ver que dos autovectores asociados a $\lambda = 4$ son $\left(2, \ 0, \ 0, \ 1,\right)$ y $\left(0, \ 1, \ 0, \ 0,\right)$; y observando la matriz $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$, que dos autovectores asociados a $\lambda = 2$ son $\left(0, \ 0, \ 1, \ 0,\right)$ y $\left(0, \ 0, \ 0, \ 1,\right)$. Así pues, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$; y $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

□

(L-16) Problema 5(b) Puesto que hemos visto que $\boldsymbol{v}$ es un autovector de $\mathbf{A}$ asociado al autovalor $\lambda = 2$, sabemos que $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}$, y por tanto:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A}^6\right)\boldsymbol{v} =& \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{v} \\ =& \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\lambda\boldsymbol{v} \\ =& \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\lambda^2\boldsymbol{v} \\ =& \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\lambda^3\boldsymbol{v} \\ =& \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\lambda^4\boldsymbol{v} \\ =& \mathbf{A}\cdot\lambda^5\boldsymbol{v} \\ =& \lambda^6\boldsymbol{v} = 2^6\boldsymbol{v} = 64\boldsymbol{v} = \left(0, \ 0, \ 0, \ 64,\right). \end{aligned}$$

$\square$

(L-16) Problema 5(c) Puesto que ningún autovalor es cero, la matriz es de rango completo, es decir, invertible.

$\square$

(L-16) Problema 5(d) Puesto que $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$, entonces

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{SDS}^{-1}\right)^{-1} = \left(\mathbf{DS}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \left(\mathbf{S}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{SD}^{-1}\mathbf{S}^{-1};$$

es decir, los autovectores $\mathbf{S}$ son los mismos, pero los autovalores $\mathbf{D}^{-1}$, son los inversos de los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$.

$\square$

(L-16) Problema 6.

$$\mathbf{A}^3 = (\mathbf{S})(\mathbf{D}^3)(\mathbf{S}^{-1}); \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{S})(\mathbf{D}^{-1})(\mathbf{S}^{-1}).$$

$\square$

(L-16) Problema 7(a) Debemos resolver la ecuación característica

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 0\\ -1 & 2-\lambda\end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

Así $\lambda = 1,\ 2$ (por ser una matriz triangular).

$\square$

(L-16) Problema 7(b) Para encontrar los auto-vectores correspondientes a λ, debemos encontrar el espacio nulo de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Hay dos casos:

- $\lambda = 1$. Aquí debemos resolver $\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. Así, un auto-vector es $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.
- $\lambda = 2$. Aquí tenemos que resolver $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. En este caso un auto-vector es $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

$\square$

(L-16) Problema 7(c) De los apartados anteriores concluimos que:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Por ser $\mathbf{S}$ una matriz elemental, sabemos que su inversa es:

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{SDS}^{-1}.$$

Pero también podiamos haberlo hecho así

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] \xrightarrow[2\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{cc}-1 & 0\\ -1 & 0\\ \hline 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[2\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ -1 & 2\\ \hline 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ \hline -1 & 1\\ \hline 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}} \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ \hline 0 & 1\\ \hline 1 & 0\\ 1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}]{} \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ \hline 0 & 1\\ \hline 1 & 0\\ 1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 2\\ \hline 1 & 0\\ 1 & 1\end{array}\right]$$

$\square$

(L-16) Problema 8(a) **Verdadero**. Puesto que ninguno de los autovalores es nulo, el determinante (que es igual al producto de los autovalores) es necesariamente distinto de cero, y por tanto la matriz es invertible.

$\square$

(L-16) Problema 8(b) **Falso**. Si no hay autovalores repetidos, sabemos que necesariamente la matriz es diagonalizable, pues existen suficientes auto-vectores linealmente independientes, como para generar una matriz $\mathbf{S}$ invertible. Puesto que el auto-valor 2 está repetido, no podemos saber si existen suficientes auto-vectores linealmente independientes.

$\square$

(L-16) Problema 8(c) **Falso**. No lo podemos saber. Necesitamos conocer si hay tres auto-vectores linealmente independientes (lo sabríamos si no hubiera autovalores repetidos).

$\square$

(L-16) Problema 9(a)

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 8 & a \\ b & 2 \end{bmatrix}, \quad a = \frac{-9}{b}; \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$\square$

(L-16) Problema 9(b) El espacio nulo de la matriz $(\mathbf{A}_1 - 5\mathbf{I})$; es decir, de $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$; es el conjunto de vectores múltiplos de $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y el es mismo que el espacio nulo de las matrices $(\mathbf{A}_2 - 5\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ y $(\mathbf{A}_2 - 5\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$. Por tanto, en los tres casos no podemos encontrar dos auto-vectores linealmente independientes, y en consecuencia estas matrices no son diagonalizables.

$\square$

(L-16) Problema 10(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$

$\square$

(L-16) Problema 10(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1}.$

$\square$

(L-16) Problema 11.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

Comprobación: Traza $= 5$; determinante $= 4$.

$\square$

(L-16) Problema 12. Sabemos que es diagonalizable, puesto que no tiene autovalores repetidos. La matriz de autovalores $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal; con los valores 1, 2 y 7 es su diagonal principal (en cualquier orden).

$\square$

(L-16) Problema 13(a) Los tres autovalores son iguales a 1 (son los elementos de la diagonal, por ser $\mathbf{A}$ triangular).
Los auto-vectores para el único auto-valor (triple) $\lambda = 1$ se calculan partiendo de la matriz $[\mathbf{A} - 1\mathbf{I}]$:

$$\mathbf{A} - 1\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que tiene sólo dos columnas libres; por tanto debemos encontrar dos soluciones especiales (cuyas combinaciones lineales son el espacio nulo de la matriz anterior y que constituyen los auto-vectores asociados al auto-valor $\lambda = 1$):

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

(L-16) Problema 13(b) La matriz no es diagonalizable ya que como máximo podemos encontrar 2 auto-vectores linealmente independientes (para que lo fuera necesitaríamos encontrar 3).

$\square$

(L-16) Problema 14(a) Es diagonalizable, puesto que tiene tres auto-vectores linealmente independientes. Así pues:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

(L-16) Problema 14(b)

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

$\square$

(L-16) Problema 15.

$$\left(\mathbf{A}^3\right)\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}2&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&\\&-2\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}2&2\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}2&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^3&\\&-2^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}8&32\\0&-8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-24\\8\end{pmatrix}.$$

$\square$

(L-17) Problema 1(a) Ecuación característica:

$$0 = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - \lambda,$$

por tanto $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$

- $\lambda_1 = 0$
$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{0}\right) = \begin{bmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{bmatrix}$$
  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
- $\lambda_1 = 1$
$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{I}\right) = \begin{bmatrix}-1/2&1/2\\1/2&-1/2\end{bmatrix}$$
  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Por tanto
$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\intercal} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\\&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\1&1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\square$

(L-17) Problema 1(b) Ecuación característica:

$$0 = |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 1,$$

por tanto $\lambda = \pm 1$

- $\lambda_1 = 1$
$$\left(\mathbf{B} - \mathbf{I}\right) = \begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$
  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
- $\lambda_2 = -1$
$$\left(\mathbf{B} + \mathbf{I}\right) = \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$
  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Por tanto
$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\intercal} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\square$

(L-17) Problema 1(c) Ecuación característica:

$$0 = |\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}| = (3-\lambda)(-3-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 25,$$

por tanto $\lambda = \pm 5$

- $\lambda_1 = 5$

$$(\mathbf{C} - 5\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda_1 = -5$

$$(\mathbf{C} + 5\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

  Por tanto

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\intercal = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & \\ & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\square$

(L-17) Problema 2. Ecuación característica:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ -\lambda^2 + \lambda + 2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$\lambda = 0, 2, -1$; con autovectores unitarios

$$\boldsymbol{x}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

puesto que

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{A} - 0\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{-1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{A} - 2\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{A} + 1\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(2)\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & \mathbf{-2} \\ 0 & 2 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{array}\right]$$

$\square$

(L-17) Problema 3. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \lambda\left(9-\lambda^2\right) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 3\\ \lambda_3 = -3\end{cases}.$

$$\begin{cases}
\lambda_1 = -3: \quad \begin{bmatrix}\mathbf{A}+3\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc}4&0&2\\0&2&-2\\2&-2&3\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(2)\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{ccc}4&0&0\\0&2&-4\\2&-2&4\\ \hline 1&0&-1\\0&1&0\\0&0&2\end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}4&0&0\\0&2&0\\2&-2&0\\ \hline 1&0&-1\\0&1&2\\0&0&2\end{array}\right]\\[2ex]
\lambda_1 = 0: \quad \begin{bmatrix}\mathbf{A}-0\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc}1&0&2\\0&-1&-2\\2&-2&0\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&-2\\2&-2&-4\\ \hline 1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&0\\2&-2&0\\ \hline 1&0&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]\\[2ex]
\lambda_1 = 3: \quad \begin{bmatrix}\mathbf{A}-3\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc}-2&0&2\\0&-4&-2\\2&-2&-3\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}-2&0&0\\0&-4&-2\\2&-2&-1\\ \hline 1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(2)\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{ccc}-2&0&0\\0&-4&0\\2&-2&0\\ \hline 1&0&2\\0&1&-1\\0&0&2\end{array}\right]
\end{cases}$$

Así, por ejemplo

$$\text{Si} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-2&-1\\2&1&2\\-1&-2&2\end{bmatrix}.$$

```
B = Matrix([[1,0,2],[0,-1,-2],[2,-2,0]])
l = sympy.symbols('\lambda')
d = Determinante( (B-l*I(B.n)) ,1)
p = sympy.poly(d.valor)
e = sympy.real_roots(p)
display(Sistema([d, e]))
S=Sistema([])
D = tuple()
for i in set(e):
    caso = "\lambda = %d\n" % i
    display(Math(caso))
    L = Elim( (B-i*I(B.n)).apila(I(B.n),1), 1)
    cL0 = tuple([c+1 for c,v in enumerate(slice(1,B.n)|L) if v.es_nulo()])
    S = S.concatena(slice(B.n+1,None)|L|cL0).sis()
    D = D+(i,)*e.count(i)

Q = Matrix([v.normalizado() for v in S]).GS()
D = Vector(D).diag()
display(Sistema([D,Q,~Q,Q**-1]))
display(Sistema([(~Q)*B*Q, Q*D*(~Q)]))
~Q*Q
```

O sencillamente

```
B = Matrix([[1,0,2],[0,-1,-2],[2,-2,0]])
espectro = [0,3,-3]
D = DiagonalizaO( B, espectro )
display(Sistema([D, D.Q]))
```

□

(L-17) Problema 4(a) Que se son ortogonales (perpendiculares).

$\square$

(L-17) Problema 4(b) El espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ está generado por $\boldsymbol{u}$, es decir, son todos los múltiplos de $\boldsymbol{u}$; y puesto que la matriz es simétrica, el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es idéntico a $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. Los espacios fila y columna también son iguales entre si ($\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$), y están generados por todas las combinaciones lineales de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \perp \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right).$$

$\square$

(L-17) Problema 4(c) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}$, puesto que

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}) = \mathbf{A}\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\mathbf{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}(2\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w};$$

pero esta solución no es única, podemos añadir cualquier múltiplo de $\boldsymbol{u}$ (vector del espacio nulo) a $\boldsymbol{x}$.

$\square$

(L-17) Problema 4(d) Puesto que $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es perpendicular a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, necesitamos que $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} = 0$.

$\square$

(L-17) Problema 4(e) $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^\intercal$;

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

$\square$

(L-17) Problema 5(a) Autovalores reales.

$\square$

(L-17) Problema 5(b) Todos los autovalores son menores que uno en valor absoluto.

$\square$

(L-17) Problema 5(c) Tiene autovalores repetidos

$\square$

(L-17) Problema 5(d) Tiene al menos un autovalor igual a cero.

$\square$

(L-17) Problema 6(a) La ecuación característica es $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda^4 - 1 = 0$$

por tanto $\lambda = \pm 1$ y $\lambda = \pm i$; es decir cuatro autovalores distintos.

$\square$

(L-17) Problema 6(b) La matriz tiene un espacio nulo de dimensión 3. Busquemos, por tanto, tres autovectores que sean base del espacio nulo de $\mathbf{B}$ (autovalor igual a cero):

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Además,

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, hay un triple autovalor igual a 0, y otro autovalor igual a 1. Y puesto que hemos encontrado cuatro autovectores linealmente independientes, esta matriz es diagonalizable.

$\square$

(L-17) Problema 6(c) Ortogonal, invertible, permutación, diagonalizable y Markov

$\square$

(L-17) Problema 6(d) Hermítica, de rango uno, diagonalizable y Markov

$\square$

(L-17) Problema 7. Si $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$ entonces para todos los autovalores $\lambda^3 = 0$, es decir $\lambda = 0$ como en

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces es diagonalizable, y por el Teorema espectral, se puede factorizar como

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{Q}\mathbf{D}^3\mathbf{Q}^\intercal = \mathbf{Q}\mathbf{0}\mathbf{Q}^\intercal = \mathbf{0}.$$

$\square$

(L-17) Problema 8(a) Los autovalores de

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

son los elementos de la diagonal; $\lambda = 3$ (con multiplicidad 2) y $\lambda = 2$. Pero el rango de

$$\mathbf{A} - 3\lambda = \begin{bmatrix} 3-3 & 1 & 1 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{bmatrix}$$

es 2; por tanto la matriz no es diagonalizable.

$\square$

(L-17) Problema 8(b) Los autovalores de

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

son los elementos de la diagonal; $\lambda = 3$ y $\lambda = 2$ (con multiplicidad 2). El rango de

$$\mathbf{A} - 2\lambda = \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 1 \\ 0 & 3-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es 1; por tanto la matriz es diagonalizable.

Dos autovectores independientes correspondientes al autovalor $\lambda = 2$ son $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Por otra parte

$$\mathbf{A} - 3\lambda = \begin{bmatrix} 2-3 & 1 & 1 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Un autovector correspondiente al autovalor $\lambda = 3$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Así pues

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

son matrices tales que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.

$\square$

(L-17) Problema 8(c) Sea como sea $\mathbf{A}$, la matriz $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ siempre es simétrica; y por tanto es diagonalizable, y es posible encontrar una base ortonormal de autovectores de $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$.

$\square$

(L-17) Problema 8(d) Basta con encontrar los valores de a que hacen la matriz de rango completo; es decir, cualquier valor de a distinto de cero ($a \neq 0$) (para que la matriz sea invertible) y simultáneamente distinto de tres ($a \neq 3$) (para que la matriz sea diagonalizable).

□

(L-17) Problema 9(a) Ecuación característica:

$$0 = |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 1,$$

por tanto $\lambda = \pm 1$

- $\lambda_1 = 1$

$$\big(\mathbf{B} - \mathbf{I}\big) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

- $\lambda_1 = -1$

$$\big(\mathbf{B} + \mathbf{I}\big) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  Con autovector unitario $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Por tanto

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\intercal} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

□

(L-17) Problema 9(b) Puesto que los dos autovalores son distintos los dos autovectores encontrados son linealmente independientes, y la matriz es diagonalizable. Una matriz $\mathbf{S}$ que diagonaliza $\mathbf{B}$ es

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

ya que $\mathbf{BS} = \mathbf{SD}$, donde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Puesto que la matriz $\mathbf{S}$ es invertible, ya que ambos auto-vectores son linealmente independientes, podemos diagonalizar $\mathbf{B}$ del siguiente modo:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} = \mathbf{D};$$

donde la matriz diagonal contiene los autovalores de $\mathbf{B}$.

□

(L-18) Problema 1(a) No. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$ $\qquad f(x,y) = x^2 + 6xy + 5y^2.$

```
A = Matrix([[1,3],[3,5]])
DiagonalizaC(A,1)
```

□

(L-18) Problema 1(b) No. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$ $\qquad f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2.$

□

(L-18) Problema 1(c) Si. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$ $\qquad f(x,y) = 2x^2 + 6xy + 5y^2.$

□

(L-18) Problema 1(d) No, hay componentes negativos en la diagonal. $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -8\end{bmatrix} \xrightarrow{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]^{\mathsf{T}}} \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\mathsf{T}}$ $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$. $\quad f(x,y) = -x^2 + 4xy - 8y^2.$

□

(L-18) Problema 1(e) A lo largo de la recta $y = x$ la función $f(x,y) = (y-x)^2$ es igual a cero. Nótese que el vector (1,1) es un autovector asociado al autovalor cero.

□

(L-18) Problema 2(a) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 9\end{bmatrix} \xrightarrow{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]^{\mathsf{T}}} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\mathsf{T}} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$. Es decir

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{B}.$$

Así, $\quad \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y & y\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x+2y\\ y\end{pmatrix}.$

Por tanto, $f(x,y) = x^2 + 4\,x\,y + 9\,y^2 = (x+2y)^2 + 5(y)^2.$

□

(L-18) Problema 2(b) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 9\end{bmatrix} \xrightarrow{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]^{\mathsf{T}}} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\mathsf{T}} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. $\quad f(x,y) = x^2 + 6\,x\,y + 9\,y^2 = (x+3y)^2 + 0(y)^2.$

□

(L-18) Problema 3(a) Esta no, puesto que el determinante de $\mathbf{A}$ es negativo.

□

(L-18) Problema 3(b) Esta no, puesto que $a = -1$.

□

(L-18) Problema 3(c) Esta no, puesto que es singular ($\det \mathbf{C} = 0$).

□

(L-18) Problema 3(d) $\mathbf{D}$ es la única que tiene dos autovalores positivos ya que $a = 1$ y $\det \mathbf{A} = 1$.

□

(L-18) Problema 4. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]^{\mathsf{T}}} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\mathsf{T}} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$

$$f(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2 = (x+2y)^2 - y^2.$$

Para los valores $x = 2$ e $y = -1$, es decir, en el punto $(2,-1)$:

$$f(2,-1) = -1.$$

□

(L-18) Problema 5. Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^2\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda^2\boldsymbol{x}.$

Si $\mathbf{A}$ tiene autovalores λ_i positivos entonces los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son λ_i^2 y los de $\mathbf{A}^{-1}$ son $1/\lambda_i$, y por tanto también positivos.

□

(L-18) Problema 6(a) La matriz asociada es

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}^{\mathsf{T}}]{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]^{\mathsf{T}}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix} \xrightarrow[{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}^{\mathsf{T}}]{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]^{\mathsf{T}}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Cuya diagonal está formada por dos números positivos y un cero.

```
A = Matrix([[1,-2,0],[-2,4,0],[0,0,5]])
DiagonalizaC(A,1)
```

$\square$

(L-18) Problema 6(b) La matriz asociada es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -a \\ 1 & 4 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-a)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -a \\ -a & -a & a^2+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau \\ [(-a)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{5} & -a \\ 0 & -a & a^2+1 \end{bmatrix} \dots$$

Hay un 5 (positivo) en la diagonal, por tanto es imposible que sea definida negativa.

$\square$

(L-18) Problema 7(a) No es definida positiva, ya que el vector $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\intercal$ está en su espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, por lo que uno de los autovalores es cero. De hecho, al diagonalizar por congruencia vemos que es semidefinida positiva

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(2)\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\square$

(L-18) Problema 7(b) Es definida positiva

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(2)\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(3)\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(3)\mathbf{3}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}$$

¡Por tanto, aquí el criterio de Sylvester funciona!... $\det(2) = 2$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$; $\det(\mathbf{B}) = 4$.

$\square$

(L-18) Problema 7(c) Los autovalores de $\mathbf{C}$ son el cuadrado de los de la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

así, si esta matriz es de rango completo, entonces $\mathbf{C}$ es definida positivo. Pero veámoslo mediante diagonalización por congruencia:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(2)\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{3}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\tau \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}.$$

Puesto que no hay pivotes nulos, no hay autovalores nulos, así pues el cuadrado de dichos autovalores siempre es positivo, por lo que $\mathbf{C}$ es definida positiva.

$\square$

(L-18) Problema 8.

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&a\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\begin{bmatrix}1&0&0\\3&-8&0\\0&0&a\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-8&0\\0&0&a\end{bmatrix};$$

la forma cuadrática no es definida (sea cual sea el valor de a).

$\square$

(L-18) Problema 9. $\mathbf{A}$ es simétrica y por lo tanto diagonalizable:

$$\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1};$$

y sabemos que en este caso

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{SD}^n\mathbf{S}^{-1};$$

Así pues, como $\mathbf{A}$ es definida positiva, sus autovalores son positivos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ y entonces $\lambda_1^{-1} > 0$ y $\lambda_2^{-1} > 0$ que son los autovalores de $\mathbf{A}^{-1}$.

$\square$

(L-18) Problema 10. La ecuación característica es:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0;$$

cuyas soluciones son

$$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2}$$

pero

$$(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + 4b^2 = a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2 = (a-c)^2 + (2b)^2$$

que es una suma de cuadrados, y por lo tanto, lo que hay dentro de la raíz cuadrada es mayor o igual a cero. Así pues, los **autovalores son reales** (no hay raíces cuadradas de números negativos).

Por otra parte, si $a > 0$ y $ac > b^2$ necesariamente $c \geq 0$. Así que sabemos que $(a+c) > 0$ y por tanto

$$\lambda_1 = \frac{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + (2b)^2}}{2} > 0$$

Además, puesto que $ac > b^2$, sabemos que $\det \mathbf{A} = ac - b^2 > 0$; pero, puesto que $\lambda_1\lambda_2 = \det \mathbf{A} > 0$ y $\lambda_1 > 0$, necesariamente $\lambda_2 > 0$.

$\square$

(L-18) Problema 11(a) Miremos los signos de los pivotes

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&4\\3&4&9\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&-2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{\tau\\ [(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$$

Puesto que hay tanto pivotes positivos como negativos, la matriz **es indefinida.**

$\square$

(L-18) Problema 11(b)

$$\begin{bmatrix}1&2&0&0\\2&6&-2&0\\0&-2&5&-2\\0&0&-2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&2&-2&0\\0&-2&5&-2\\0&0&-2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&2&0&0\\0&-2&3&-2\\0&0&-2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(\frac{2}{3})\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-2&\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

Puesto que aplicando eliminación usando *solo* transformaciones *Tipo I* hemos llegado a una matriz triangular cuyos pivotes son positivos $\rightarrow$ **Definida positiva.**

$\square$

(L-18) Problema 11(c) Puesto que $\mathbf{B}$ es Definida positiva, $-\mathbf{B}$ es **Definida negativa**.

$\square$

(L-18) Problema 11(d) Puesto que $\mathbf{A}$ tiene dos pivotes positivos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ y uno negativo $\lambda_3 < 0$; los pivotes de $\mathbf{D}$ —que son los inversos de los de $\mathbf{A}$— conservan los signos. Por tanto es: **indefinida.**

(ejercicio 14 del conjunto de problemas 6.2 del libro de texto)

$\square$

(L-18) Problema 12. $\begin{pmatrix}0 & a & 0\end{pmatrix}$, con $a \neq 0$

$\square$

(L-18) Problema 13. $\boldsymbol{x}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\mathbf{A}+\boldsymbol{x}\mathbf{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\mathbf{B}\boldsymbol{x} > 0,$ ya que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son definidas positivas.

$\square$

(L-18) Problema 14(a)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&2&3\\1&2&5&9\\1&3&9&19\\ \hline 1&-1&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&3\\1&3&3&10\\ \hline 1&-1&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\\ \hline 1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{L}\\ \hline \dot{\mathbf{E}}\end{bmatrix}$$

Así pues, las trasformaciones de Gauss son

$$\mathbf{G}_{1\triangleright} = \begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_{2\triangleright} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_{3\triangleright} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{bmatrix};$$

$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{G}}_{1\triangleright}\,\dot{\mathbf{G}}_{2\triangleright}\,\dot{\mathbf{G}}_{3\triangleright}$. La matriz $\dot{\mathbf{U}}$ es $\dot{\mathbf{E}}^{-1}$, es decir: $\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{E}}^{-1} = (\dot{\mathbf{G}}_{1\triangleright}\dot{\mathbf{G}}_{2\triangleright}\dot{\mathbf{G}}_{3\triangleright})^{-1} = \dot{\mathbf{G}}^{-1}_{3\triangleright}\dot{\mathbf{G}}^{-1}_{2\triangleright}\dot{\mathbf{G}}^{-1}_{1\triangleright}$, y la factorización $\dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&2&1&\\1&3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&2&3\\&&1&3\\&&&1\end{bmatrix} = \dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}$$

que resulta ser $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{L}}^{\mathsf{T}}$ por ser $\mathbf{A}$ simética.

$\square$

(L-18) Problema 14(b)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&1&2&2\\1&1&2&3\\ \hline 1&-1&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&2\\ \hline 1&-1&0&0\\0&1&-1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\\ \hline 1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{L}\\ \hline \dot{\mathbf{E}}\end{bmatrix}$$

Así pues, las trasformaciones de Gauss son

$$\dot{\mathbf{G}}_{1\triangleright}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};\quad \dot{\mathbf{G}}_{2\triangleright}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};\quad \dot{\mathbf{G}}_{3\triangleright}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix};$$

$\dot{\mathbf{E}}=\dot{\mathbf{G}}_{1\triangleright}\,\dot{\mathbf{G}}_{2\triangleright}\,\dot{\mathbf{G}}_{3\triangleright}$. La matriz $\dot{\mathbf{U}}$ es $\dot{\mathbf{E}}^{-1}$, es decir: $\dot{\mathbf{U}}=\dot{\mathbf{E}}^{-1}=\dot{\mathbf{G}}_{3\triangleright}^{-1}\dot{\mathbf{G}}_{2\triangleright}^{-1}\dot{\mathbf{G}}_{1\triangleright}^{-1}$, y la factorización $\dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}$:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&1&1&\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&1&1\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}=\dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}$$

que resulta ser $\mathbf{A}=\dot{\mathbf{U}}^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}$ por ser $\mathbf{A}$ simética.

□

(L-18) Problema 15.

$$\begin{bmatrix}3&6\\6&16\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\begin{bmatrix}3&0\\6&4\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{}\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}$$

por tanto

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&6\\6&16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

Los coeficientes de los cuadrados son los pivotes en $\mathbf{D}$, y los coeficientes dentro de los cuadrados son las columnas de $\mathbf{L}$.

□

(L-18) Problema 16(a)

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0&0\\1&2-\lambda&0&0\\0&0&a-\lambda&0\\0&0&a&a-\lambda\end{vmatrix}=(a-\lambda)^2\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Por tanto el autovalor $\lambda=a$ está repetido (multiplicidad 2); los otros dos autovalores salen de

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=0;\qquad\Rightarrow\lambda^2-4\lambda+3=0$$

Por tanto los dos autovalores que faltan son 1 y 3.

□

(L-18) Problema 16(b) Cuando $\lambda = a = 2$, la matriz

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

es de rango 3 (de manera inmediata se puede ver que hay tres columnas pivote). Así pues, en este caso el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es de dimensión 1 (cuatro columnas menos el rango); y por tanto NO es posible encontrar dos autovectores linealmente independientes para el autovalor repetido $\lambda = 2$, y consecuentemente la matriz NO ES DIAGONALIZABLE.

□

(L-18) Problema 16(c)

$$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\Big((2-\lambda)^2 - 1\Big) = 0$$

Un autovalor es $\lambda = 1$. Los otros dos son las raíces de

$$\Big((2-\lambda)^2 - 1\Big) = 4 + \lambda^2 - 4\lambda - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

que son $\lambda = 3$ y $\lambda = 1$. Por tanto, $\boxed{\mathbf{D} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right].}$

- Para $\lambda = 3$

$$\mathbf{A} - 3\lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

  por tanto el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un autovector correspondiente a $\lambda = 3$. Como su norma es $\sqrt{2}$, el vector $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovector de norma 1 correspondiente a $\lambda = 3$.

- Para $\lambda = 1$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

  por tanto el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un autovector de norma 1 correspondiente a $\lambda = 1$; y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un autovector correspondiente a $\lambda = 3$ de norma es $\sqrt{2}$, así pues un segundo autovector normalizado es $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Es inmediato comprobar que estos tres autovectores de norma uno son ortogonales entre si. Por tanto una posible matriz orto-normal $\mathbf{P}$ es:

$$\boxed{\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

□

(L-18) Problema 16(d) La forma cuadrática

$$f(x,y,z) = \boldsymbol{b}\mathbf{X}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy,$$

sabemos que es definida positiva, ya que hemos visto que los tres autovalores de $\mathbf{B}$ son positivos (3, 1, y 1).

□

(L-18) Problema 17(a) Hay dos posibilidades:

- $a = -4/5$ y $b = 3/5$
- $a = 4/5$ y $b = -3/5$.

□

(L-18) Problema 17(b) Cualesquiera valores de a y b que formen un vector que no sea múltiplo de la segunda columna de $\mathbf{A}$; por ejemplo, $a = 1$ y $b = 0$.

□

(L-18) Problema 17(c) Justo lo contrario del apartado anterior; necesitamos que la matriz sea singular, por tanto necesitamos que la primera columna sea un múltiplo de la segunda; por ejemplo: $a = 3$ y $b = 4$.

□

(L-18) Problema 17(d) Por ser simétrica necesariamente $b = 3/5$. Además necesitamos que $a < 0$ y que $\det \mathbf{A} > 0$; es decir $a \cdot 4/5 - (3/5)^2 > 0$, o

$$a \cdot 4/5 > (3/5)^2$$

que no es posible si además a tiene que ser negativa. Por tanto No existen tales valores a y b.

□

(L-18) Problema 18(a)

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&a&0\\0&0&8\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\tau} \begin{bmatrix}1&0&0\\1&a-1&0\\0&0&8\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\tau\\{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}]{} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&a-1&0\\0&0&8\end{bmatrix}$$

Si $a = 1$ la matriz $\mathbf{Q}$ es semidefinida positiva.

□

(L-18) Problema 18(b)

- Si $a > 1$ la matriz $\mathbf{Q}$ es definida positiva.
- Si $a < 1$ la matriz $\mathbf{Q}$ es indefinida.

□

(L-Opt-2) Problema 1(a)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix}1&1&0&1\\1&a&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&a&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&a&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{vmatrix} = -a;$$

por lo que el determinante $|\mathbf{A}|$ es distinto de cero si y sólo si $a \neq 0$.

□

(L-Opt-2) Problema 1(b) No, ya que:

$$|1| = 1; \quad \begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{vmatrix} = -1,$$

cuando todos deberían ser positivos. Por tanto la matriz es no definida.

□

(L-Opt-2) Problema 1(c)

$$\left[\begin{array}{cccc}1&1&0&1\\1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}\\{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&-1&0&-2\\\hline 1&-1&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}\\{[(1)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}\\{[(2)\mathbf{2}]}\\{[(-1)\mathbf{4}+\mathbf{2}]}}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-2\\\hline 0&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&-1&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\{[(\frac{1}{2})\mathbf{2}]}\\{[(\frac{-1}{2})\mathbf{4}]}}} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{-1}{2}\\0&0&1&0\\1&\frac{-1}{2}&0&\frac{-1}{2}\end{array}\right]$$

Así pues,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

□

(L-Opt-2) Problema 1(d) De los pasos tomados en el primer apartado es sencillo ver que, cuando $a = 0$, el rango de $\mathbf{A}$ es tres; y por tanto hay tres variables endógenas (o variables pivote). Así pues, tan sólo una variable puede ser exógena (o libre).

Puesto que cuando $a = 0$ las columnas segunda y cuarta son iguales (y por tanto dependientes), podemos tomar como variable libre (o exógena), o bien la segunda, o bien la cuarta.

□

(L-Opt-2) Problema 2(a) *Es verdadero.* Si $\mathbf{A}$ es simétrica, estonces $\mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{A}$, por tanto

$$\left(\mathbf{A}^2\right)^{\intercal} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}\right)^{\intercal} = \mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal} = \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)^2 = \mathbf{A}^2,$$

es decir, que $\mathbf{A}^2$ también es simétrica.

□

(L-Opt-2) Problema 2(b) *Es verdadero.* Veamoslo:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$$

A las matrices con esta propiedad se las denomina *"matrices idempotentes"*.

□

(L-Opt-2) Problema 2(c) *Es falso.* El determinate de una matriz es igual al producto de sus autovaloes; si uno de ellos es cero, necesariamente la matriz es singular. En tal caso sus columnas son linealmente dependientes y es posible encontrar una solución distinta a la trivial ($\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$) para dicho sistema homogeneo; así que hay más de una solución y el sistema es necesariamente *indeterminado.*

□

(L-Opt-2) Problema 2(d) *Verdadero.* Por el mismo motivo de antes, $\underset{m\times m}{\mathbf{A}}$ es singular, lo que quiere decir que el subespacio generado por las columnas de $\mathbf{A}$ (*que llamaremos espacio columna de* $\mathbf{A}$, $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$) es de dimensión menor que m, pero eso quiere decir que existen vectores de $\mathbb{R}^m$ que no pertenencen a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$. Si $\boldsymbol{b}$ fuera uno de ellos, entonces no existiría una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$ igual a $\boldsymbol{b}$, es decir, que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ será incompatible para dicho $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

□

(L-Opt-2) Problema 2(e) *Verdadero.* Si $\mathbf{Q}$ es ortogonal, entonces $\mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$; lo que quiere decir que su inversa es su traspuesta ($\mathbf{Q}^{\intercal} = \mathbf{Q}^{-1}$), y por tanto $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\intercal}$; pero entonces $\mathbf{Q}^{-1}$ también tiene columnas perpendiculares (puesto que $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\intercal} = \mathbf{I}$ sólo tiene ceros fuera de la diagonal) que son de norma uno (ya que $\mathbf{Q}\ \mathbf{Q}^{\intercal}$ sólo tiene unos en la diagonal).

□

(L-Opt-2) Problema 2(f) *Falso.* La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene como único autovalor $\lambda = 1$, pero $\mathbf{A}$ no es la matriz identidad.

□

(L-Opt-2) Problema 3(a) Verdadero.

□

(L-Opt-2) Problema 3(b) $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ si y sólo si todos los coeficientes a_j son iguales a cero.

Es decir, si la única solución a $\left[\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_n\right] \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es un vector de ceros (es decir, si $\mathcal{N}\left(\left[\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_n\right]\right)$ es $\{\mathbf{0}\}$.

□

(L-Opt-2) Problema 3(c) Falso, ya que $a_1\mathbf{0} = \mathbf{0}$ incluso para $a_1 \neq 0$.

□

(L-Opt-2) Problema 3(d) podemos encontrar n autovectores linealmente independientes.

□

(L-Opt-2) Problema 3(e) $\sqrt{7}$

$\square$

(L-Opt-2) Problema 3(f) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$

$\square$

(L-Opt-2) Problema 4(a) Falso. $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right| = 0$

$\square$

(L-Opt-2) Problema 4(b) Verdadero $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \neq 0 \Rightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0 \neq \det(\mathbf{B})$

$\square$

(L-Opt-2) Problema 4(c) Verdadero. El determinante cambia de signo, y el producto de los autovalores es igual al determinante.

$\square$

(L-Opt-2) Problema 4(d) Verdadero

$\square$

(L-Opt-2) Problema 4(e) Verdadero. En tal caso $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})$ es de rango completo, y $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}\right) = 0$, por tanto no hay autovectores asociados al autovalor 5.

$\square$

(L-Opt-2) Problema 4(f) Falso. $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ no tiene solución y $|\mathbf{A}| = 0$.

$\square$

(L-Opt-2) Problema 4(g) Falso. Como máximo puede tener tres pivotes.

$\square$

(L-Opt-2) Problema 4(h) Verdadero. $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ pero $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}\left(\mathbf{C}\right)$; por tanto no todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ están en $\mathcal{C}\left(\mathbf{C}\right)$. Es decir, $\operatorname{rg}\left(\mathbf{C}\right) = \dim \mathcal{C}\left(\mathbf{C}\right) < n = \dim \mathbb{R}^n$.

$\square$

(L-Opt-2) Problema 4(i) Falso. Si algún autovalor es igual a cero, la matriz no es invertible. Por ejemplo una matriz nula y cuadrada.

$\square$

(L-Opt-2) Problema 4(j) Verdadero. Si es invertible tiene rango completo —n pivotes iguales a uno con ceros por encima y por debajo…es decir la identidad).

$\square$

(L-Opt-2) Problema 5(a) $\mathbf{A}$ y $\mathbf{D}$ por tener tres pivotes (para $\mathbf{A}$ se ve directamente, y para $\mathbf{D}$ tras el primer paso de eliminación).

$\square$

(L-Opt-2) Problema 5(b) Sólo $\mathbf{B}$ (puesto que sólo tiene dos autovalores 0 y 2, necesariamente alguno esta repetido).

$\square$

(L-Opt-2) Problema 5(c) $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ por ser no invertibles (ambas tienen un autovalor igual a cero)

$\square$

(L-Opt-2) Problema 5(d) $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ por tener autovalores distintos (además $\mathbf{D}$ es simétrica).

Para $\mathbf{B}$, el autovalor $\lambda = 2$ está repetido:

$$(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sólo una columna libre, y por tanto sólo podemos encontrar una dirección asociada al autovalor repetido $\lambda = 2$. Es decir, *la matriz* $\mathbf{B}$ *no es diagonalizable.*

$\square$

(L-Opt-2) Problema 5(e) Para la matriz simétrica $\mathbf{D}$.

$\square$

(L-Opt-2) Problema 6(a) Por ser la matriz triangular los autovalores coinciden con los números que aparecen en la diagonal principal; es decir, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda = 1$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tres autovectores independientes son

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = 2$

$$(\mathbf{A} - 2\lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Un autovector es

$$\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

(L-Opt-2) Problema 6(b) Puesto que hemos encontrado 4 autovectores independientes, la matriz es diagonalizable. □

(L-Opt-2) Problema 6(c) La factorización $\mathbf{A} = \mathbf{PDP^T}$ implica que la matriz $\mathbf{A}$ debe ser simétrica. puesto que en este caso la matriz del enunciado no es simétrica, no es posible encontrar tal factorización. □

(L-Opt-2) Problema 6(d)

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{\text{producto de los autovalores de } \mathbf{A}} = \frac{1}{2}.$$

□

(L-Opt-2) Problema 7(a) Si, puesto que sus autovalores no están repetidos. □

(L-Opt-2) Problema 7(b) No, $\boldsymbol{v}_3$ es múltiplo de $\boldsymbol{v}_1$, por lo que es un autovector asociado a λ_1. □

(L-Opt-2) Problema 7(c)

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 - \mathbf{A}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 - \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

□

(L-Opt-2) Problema 8(a) Los dos primeros vectores de la solución son el mismo, así que la dimensión del conjunto de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es dos; y el número de columnas de $\mathbf{A}$ debe ser cuatro, por lo que el rango de la matriz es 2.

El último vector de la solución nos indica que la última columna de $\mathbf{A}$ es una columna de ceros; y el primero que la primera columna de $\mathbf{A}$ es el vector opuesto a la tercera columna de $\mathbf{A}$. Así pues, una posible solución es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x - z & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}.$$

Pero ésta no es la única respuesta posible (por ejemplo, puede haber más de dos filas (ecuaciones) en el sistema). El requisito es que el rango de $\underset{m\times 4}{\mathbf{A}}$ sea 2, que la última columna sea nula, y la primera, el vector opuesto de la tercera.

$\square$

(L-Opt-2) Problema 8(b) Puesto que el polinomio característico de $\mathbf{A}$ es de grado 5, sabemos que la matriz es de orden 5 ($\underset{5\times 5}{\mathbf{A}}$). Y puesto que 0 no es una raíz de $p(\cdot)$, entonces 0 no es un autovalor de $\mathbf{A}$, así pues, $\mathbf{A}$ es invertible y su rango es 5.

$\square$

(L-Opt-2) Problema 9(a) Puesto que la matriz es invertible, el rango es 3; y el espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es todo $\mathbb{R}^3$. Por ello no hay columnas libres, es decir, el espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ sólo contiene el vector cero $\mathbf{0}$.

$\square$

(L-Opt-2) Problema 9(b) Puesto que $\mathbf{L}$ es $\mathbf{E}^{-1}$ (la inversa del producto de matrices elementales necesarias para triangularizar $\mathbf{A}$), el 5 en la primera posición de la segunda fila de $\mathbf{L}$ nos dice que el primer paso fue *"restar a la segunda fila cinco veces la primera"*.

Puesto que $\mathbf{U}$ tiene tres pivotes, es de rango completo; y por tanto es invertible.

El determinante es $\det(\mathbf{A}) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33}$.

$\square$

(L-Opt-2) Problema 9(c) La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

no puede ser triangularizada sin permutar las filas previamente.

Sin embargo, permutando la primera fila con la tercera, la matriz ya es triangular. De hecho toda matriz invertible admite la siguiente factorización:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}.$$

La matriz $\mathbf{A}$ es invertible ya que una vez se han permutado las filas, aparecen tres pivotes; es decir, la matriz es de rango completo.

$\square$