

Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

14/01/2023

1 / 44

1 Esquema de la Lección 15

Matrices siempre **cuadradas** en este tema

Esquema de la Lección 15

- **Autovalores, autovectores** (eigen, característicos, propios)
- $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ *ecuación característica*
- $\text{tr}(\mathbf{A})$, $\det \mathbf{A}$ (demo en la próxima lección)

2 / 44

L-15 L-16 L-17 L-18 L-R

– Marcos Bujosa. Copyright © 2008–2023
Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

1 / 44

2 Autovalores y autovectores

Considere la ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (\text{con } \mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

- **Autovalor** es cualquier λ para el que existan soluciones.
- Dichas soluciones *no nulas* \mathbf{x} se llaman **autovectores**.
 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tales que $\mathbf{A}\mathbf{x}$ es un **múltiplo** de \mathbf{x}

Cuando λ es 0, ¿quienes son los auto-vectores?

3 / 44

3 Un ejemplo: matriz de proyección

- Proyección ortogonal
- ¿Qué vectores son autovectores?
¿qué vectores quedan en la misma dirección?
- ¿Cuanto valen sus autovalores?
- ¿Hay más autovectores? ¿Con qué autovalor?
- Dos autoespacios

4 / 44

4 Otro ejemplo: matriz intercambio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Un vector que no cambie tras el intercambio?
- ¿Cuál es su autovalor?
- ¿Algún autovector asociado a $\lambda_2 = -1$?

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_2$$

Nótese: $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0 = \lambda_1 + \lambda_2$; $\det \mathbf{A} = -1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

5 / 44

5 ¿Cómo calcular los autovalores y los autovectores?

¿Cómo resolver

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \underbrace{\lambda}_{?} \underbrace{\mathbf{x}}_{?} ?$$

Reescribamos ...

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} =$$

idea Para que esto ocurra ¿cómo debe ser la matriz $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$?

¿Cuánto debe valer el determinante? $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| =$

6 / 44

6 ¿Cómo calcular los autovalores y los autovectores?

1. Autovalores son los λ 's tales que: $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| =$
(Polinomio característico $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$)
2. ¿Cómo calcular los \mathbf{x} tales que $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

Autoespacio (conjunto de autovectores + $\mathbf{0}$):

$$\mathcal{E}_{\lambda}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \right\}$$

Espectro: conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ de autovalores (raíces de $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$)

7 / 44

7 Ejemplo (¡primero los autovalores!)

Buscamos determinante nulo (Polinomio característico)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\text{Nótese: } \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 6 = \lambda_1 + \lambda_2; \quad \det \mathbf{A} = 8 = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

8 / 44

8 Ejemplo (después los autoespacios)

y ahora calculamos el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$... para cada λ .

Para $\lambda_1 = 4$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 3 - 4 & 1 \\ 1 & 3 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Para $\lambda_2 = 2$

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 3 - 2 & 1 \\ 1 & 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

¿Son los dos únicos autovectores?

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda \mathbf{x}_i; \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i = \lambda \mathbf{x}_i.$$

9 / 44

9 Otro ejemplo: Matriz rotación 90°

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Cuanto suman los autovalores?
- ¿Cuanto vale el determinante?

Dificultades

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \quad (+) \cdot (-) = (+)?$$

¿Qué vector es paralelo a si mismo tras una rotación de 90° ?

$$\det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 =$$

10 / 44

10 Ejemplos aún peores

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(3 - \lambda) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

- Autovectores

- para λ_1 : $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1; \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- para λ_2 :

$\lambda = 3$ está repetido dos veces, pero $\dim \mathcal{E}_3(\mathbf{A}) = 1$

$$\mu(3) = 2 \neq 1 = \gamma(3)$$

11 / 44

Resumen:

1. Los autovalores λ son aquellos que hacen singular a la matriz $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$, es decir, son las raíces del polinomio característico: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$.
2. Una matriz de orden $n \times n$ tiene polinomio característico de grado n .
3. Un polinomio de grado n tiene n raíces (quizá algunas raíces repetidas).
4. La suma de los autovalores es igual a la suma de los elementos de la diagonal de la matriz (traza).
5. El producto de los autovalores es igual al determinante.
6. Los autovectores asociados a λ son los vectores **no nulos** de $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$.

12 / 44

Problemas de la Lección 15

(L-15) PROBLEMA 1. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -3 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Los autovalores de \mathbf{A} son -1 , 1 y 2 ; y dos auto-vectores son

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Compruebe que estos vectores son efectivamente auto-vectores de \mathbf{A} . ¿Cuales son sus correspondientes autovalores?

(b) Encuentre un tercer auto-vector correspondiente al tercer auto-valor.

(L-15) PROBLEMA 2. Encuentre los valores y vectores característicos de

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

12 / 44

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 12 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 3. Si \mathbf{B} tiene autovalores 1, 2, 3, \mathbf{C} tiene autovalores 4, 5, 6, y \mathbf{D} tiene autovalores 7, 8, 9, ¿Qué autovalores tiene la matriz de orden 6 por 6 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$? donde \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} son matrices triangulares superiores.

(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 4. Encuentre los autovalores y autovectores de las siguientes matrices

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 5.1.)

12 / 44

(L-15) PROBLEMA 5. Los autovalores de \mathbf{A} son iguales a los autovalores \mathbf{A}^T . Esto se debe a que $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ es igual a $\det(\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{I})$.

(a) Lo anterior es cierto porque _____

(b) Demuestre con un ejemplo que, sin embargo, los auto-vectores de \mathbf{A} y \mathbf{A}^T no son los mismos.

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 6. Sea \mathbf{B} y un autovector \mathbf{x} con autovalor asociado λ , es decir $\mathbf{B}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$; sea también $\mathbf{A} = (\mathbf{B} + \alpha \mathbf{I})$. Demuestre que \mathbf{x} es también un autovector de \mathbf{A} , pero con el autovalor asociado $(\lambda + \alpha)$.

(L-15) PROBLEMA 7.

(a) Encuentre los autovalores y los auto-vectores de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Compruebe que la traza es igual a la suma de los autovalores, y que el determinante es igual a su producto.

(b) Si consideramos una nueva matriz, generada a partir de la anterior como

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 7\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

¿Cuáles son los autovalores y auto-vectores de la nueva matriz, y como están relacionados con los de \mathbf{A} ?

(Strang, 2007, ejercicio 1 y 3 del conjunto de problemas 5.1.)

12 / 44

(L-15) PROBLEMA 8. Suponga que λ es un auto-valor de \mathbf{A} , y que \mathbf{x} es un auto-vector tal que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.

- (a) Demuestre que ese mismo \mathbf{x} es un auto-vector de $\mathbf{B} = \mathbf{A} - 7\mathbf{I}$, y encuentre el correspondiente auto-valor de \mathbf{B} .
 (b) Suponga que $\lambda \neq 0$ (y que \mathbf{A} es invertible), demuestre que \mathbf{x} también es un auto-vector de \mathbf{A}^{-1} , y encuentre el correspondiente auto-valor. ¿Qué relación tiene con λ ?

(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 9. Suponga que \mathbf{A} es una matriz de dimensiones $n \times n$, y que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. ¿Qué posibles valores pueden tomar los autovalores de \mathbf{A} ?

(L-15) PROBLEMA 10. Suponga la matriz \mathbf{A} con autovalores 1, 2 y 3. Si \mathbf{v}_1 es un auto-vector asociado al auto-valor 1, \mathbf{v}_2 al auto-valor 2 y \mathbf{v}_3 al auto-valor 3; entonces ¿cuanto es $\mathbf{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$?

(L-15) PROBLEMA 11. Proporcione un ejemplo que muestre que los auto-valores pueden cambiar cuando un múltiplo de una columna se resta de otra. ¿Por qué los pasos de eliminación no modifican los autovalores nulos?
 (Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 15. The equation $(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has no solution for some right-hand side \mathbf{b} . Give as much information as possible about the eigenvalues of the matrix \mathbf{A} (the matrix \mathbf{A} is diagonalizable).

(L-15) PROBLEMA 16. You are given the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

One of the eigenvalues is $\lambda = 1$. What are the eigenvalues of \mathbf{A} ? [Hint: Very little calculation required! You should be able to see another eigenvalue by inspection of the form of \mathbf{A} , and the third by an easy calculation. You shouldn't need to compute $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ unless you really want to do it the hard way.]

(L-15) PROBLEMA 12. El polinomio característico de una matriz \mathbf{A} se puede factorizar como

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Demuestre, partiendo de esta factorización, que el determinante de \mathbf{A} es igual al producto de sus valores propios (autovalores). Para ello haga una elección inteligente del valor de λ .
 (Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 13. Calcule los valores característicos (autovalores o valores propios) y los vectores característicos de \mathbf{A} y \mathbf{A}^2 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

\mathbf{A}^2 tiene los mismos _____ que \mathbf{A} . Cuando los autovalores de \mathbf{A} son λ_1 y λ_2 , los autovalores de \mathbf{A}^2 son _____.
 (Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 14. Suponga que los valores característicos de \mathbf{A} son 1, 2 y 4, ¿cuál es la traza de \mathbf{A}^2 ? ¿Cuál es el determinante de $(\mathbf{A}^{-1})^T$?
 (Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 5.2.)

1 Esquema de la Lección 16

Esquema de la Lección 16

- Matrices semejantes: $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$
- Diagonalizando una matriz por bloques triangulares

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{esp}(\tau_1^{-1} \dots \tau_p^{-1})]{\tau_1 \dots \tau_p} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \mathbf{S} = \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_p}.$$

- Matrices diagonalizables: cuando \mathbf{C} es diagonal.

2 Matrices semejantes

Semejanza

A y **C** son semejantes si existe **S** invertible tal que

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$$

Si **A** y **C** son semejantes (*mirar demos en el libro*):

- Mismo determinante: $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{C}$
- Mismo polinomio característico: $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = |\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}|$
- Mismos autovalores y con las mismas multiplicidades algebraica y geométrica.
- La misma traza.

Trans. Elem. inversas *espejo*: $(\mathbf{I}_{(\tau_1 \dots \tau_k)})^{-1} = \text{esp}(\tau_k^{-1} \dots \tau_1^{-1}) \mathbf{I}$

$$\mathbf{I} = \tau_1 \dots \tau_k \begin{bmatrix} \tau \\ (-\alpha)j+i \end{bmatrix} \tau_{(k+1)} \dots \tau_p \begin{bmatrix} \tau \\ (\alpha)i+j \end{bmatrix} \mathbf{I} = \tau_1 \dots \tau_k \begin{bmatrix} \tau \\ (\frac{1}{\alpha})j \end{bmatrix} \tau_{(k+1)} \dots \tau_p \begin{bmatrix} \tau \\ (\alpha)j \end{bmatrix} \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A} \text{ similar a } \tau_1 \dots \tau_k$$

14 / 44

3 Diagonalizando por bloques una matriz (matriz dentada)

Sea $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C} & \\ \hline * & \mathbf{L} \end{array} \right] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ donde

C (de orden m) es singular y **L** es triangular inferior e invertible; entonces existe **R** invertible tal que

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c} * & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline * & \begin{matrix} d_{m+1} & \beta_{m+1} \\ d_{m+2} & * & \beta_{m+2} \\ \vdots & * & * & \ddots \\ d_n & * & * & \dots & \beta_n \end{matrix} \end{array} \right]$$

$$\tau_1 \dots \tau_k \begin{pmatrix} \dots & [(-\alpha_j) \tau_{m+j}] \dots \end{pmatrix} \tau_{(k+1)} \dots \tau_p \begin{pmatrix} \dots & [(\alpha_j) \tau_{j+m}] \dots \end{pmatrix} \mathbf{A}; \quad j = 1, \dots, m-1.$$

15 / 44

4 Diagonalizando por bloques una matriz (matriz dentada)

Sea $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C} & \\ \hline * & \mathbf{L} \end{array} \right] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ donde

C (de orden m) es singular y **L** es triangular inferior e invertible, entonces existe **S** = **RP** (invertible) tal que

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} * & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline * & \begin{matrix} 0 & \beta_{m+1} \\ 0 & * & \beta_{m+2} \\ \vdots & * & * & \ddots \\ 0 & * & * & \dots & \beta_n \end{matrix} \end{array} \right]$$

$$\tau_1 \dots \tau_k \begin{pmatrix} \dots & [(-\alpha_j) \tau_{m+j}] \dots \end{pmatrix} \tau_{(k+1)} \dots \tau_p \begin{pmatrix} \dots & [(\alpha_j) \tau_{j+m}] \dots \end{pmatrix} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}; \quad j = m+1, \dots, n.$$

16 / 44

5 Un ejemplo muy sencillo

Ejemplo

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ con autovalores 0, 1 y 1.

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-) \\ 0\mathbf{I} \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \tau \\ [(1)1+2] \\ [(2)3+2] \\ [2 \Rightarrow 3] \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \tau \\ [2 \Rightarrow 3] \\ [(-2)2+3] \\ [(-1)2+1] \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (+) \\ 0\mathbf{I} \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{diagonal}}$$

17 / 44

6 Un ejemplo no tan sencillo

Ejemplo

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -9 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ con autovalores 1, 1 y 0.

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow[II]{(-)} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & -9 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [(1)1+3] \\ [(-2)2+3] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [(2)3+2] \\ [(-1)3+1] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[II]{(+)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \xrightarrow[II]{(-)} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{[(-1)1+2]} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{[(1)2+1]} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[II]{(+)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \xrightarrow[OI]{(-)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [(-1)2+1] \\ [(4)3+1] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [(-4)1+3] \\ [(1)1+2] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[OI]{(+)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

18 / 44

7 Toda matriz es semejante a otra matriz dentada

Para toda \mathbf{A} existe \mathbf{S} tal que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{C}$$

donde \mathbf{C} , dentada, tiene los autovalores en la diagonal

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -9 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{dentada}}$$

Consecuencias

- $\sum \lambda_i = \text{tr}(\mathbf{A})$ y $\prod \lambda_i = \det \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}\mathbf{S}_{|j} = \mathbf{S}\mathbf{C}_{|j} \Rightarrow$ para j tal que $\mathbf{C}_{|j} = \lambda_i \mathbf{I}_{|j}$:
 $\mathbf{A}(\mathbf{S}_{|j}) = \lambda_i(\mathbf{S}_{|j}) \Rightarrow \mathbf{S}_{|j}$ es un autovector.

19 / 44

8 De vuelta al ejemplo sencillo y “desdentado”

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ con autovalores 0, 1 y 1.

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow[OI]{(-)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [(1)1+2] \\ [(2)3+2] \\ [2=3] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [2=3] \\ [(-2)2+3] \\ [(-1)2+1] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[OI]{(+)} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{S}_{|j}) = \lambda_i(\mathbf{S}_{|j}) \Rightarrow \mathbf{S}_{|j} \text{ es un autovector.}$$

20 / 44

9 Matrices diagonalizables

- La matriz es diagonalizable **si y solo si** las multiplicidades algebraicas son iguales a las geométricas para cada autovalor
- Si no hay autovalores repetidos tampoco hay “dientes”
- Cuando no hay autovalores repetidos \mathbf{A} es diagonalizable
 $n \times n$

21 / 44

10 Diagonalizando una matriz

- Encuentre el espectro: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$
- Encuentre la *multiplicidad algebraica* de cada autovalor: $\mu(\lambda_i)$

luego elija una de estas alternativas:

1. Datar la matrix (implementado en NAcAL)
2. ...o para cada λ_i
 - encuentre el autoespacio

$$\mathcal{E}_{\lambda_i}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x} \right\} = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}).$$

- revise $\mu(\lambda_i) = \dim \mathcal{E}_{\lambda_i}(\mathbf{A})$ (multiplicidades algebraica y geométrica iguales)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = [\text{base de } \mathcal{E}_{\lambda_1}(\mathbf{A}) \# \dots \# \text{base de } \mathcal{E}_{\lambda_k}(\mathbf{A})]$$

$$\mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{D} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1}$$

11 Potencias de una matriz diagonalizable

Si $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ entonces $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} =$

- ¿Qué relación hay entre los autovectores de \mathbf{A} y los de \mathbf{A}^2 ?
- ¿Qué relación hay entre los autovalores de \mathbf{A} y los de \mathbf{A}^2 ?

Dicho en forma matricial (si \mathbf{A} es diagonalizable, $\mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1}$):

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \mathbf{D}^2 \mathbf{S}^{-1}$$

En general para, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. . . $\mathbf{A}^n =$
¿y si \mathbf{A} es invertible?

Problemas de la Lección 16

(L-16) PROBLEMA 1. Factorice las siguientes matrices en $\mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1}$;

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 15 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 2. ¿Cuáles de las siguientes matrices no se pueden diagonalizar?

(a)

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 3. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ encuentre \mathbf{A}^{100} diagonalizando \mathbf{A} .

(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 4. Si los autovalores de \mathbf{A} son 1, 1 y 2, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones sabemos que son ciertas?

- (a) \mathbf{A} es invertible.
(b) \mathbf{A} es diagonalizable.
(c) \mathbf{A} no es diagonalizable

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 5. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) (1^{pts}) Determine si la matriz \mathbf{A} es diagonalizable. En caso de que lo sea, encuentre una matriz diagonal \mathbf{D} y una matriz \mathbf{S} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1}$.
(b) (0.5^{pts}) Calcule $(\mathbf{A}^6)\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 1)^T$.
(c) (0.5^{pts}) Use los valores obtenidos en el primer apartado para justificar que \mathbf{A} es regular (invertible).

(d) (0.5pts) ¿Qué relación hay entre los autovalores y los autovectores de \mathbf{A} y los de \mathbf{A}^{-1} ?

(L-16) PROBLEMA 6. Si $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$; entonces $\mathbf{A}^3 = (\quad)(\quad)(\quad)$ y $\mathbf{A}^{-1} = (\quad)(\quad)(\quad)$.
(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 7. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Encuentre los autovalores de \mathbf{A}
- (b) Encuentre los auto-vectores de \mathbf{A}
- (c) Diagonalice \mathbf{A} : escríbalo como $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.

(L-16) PROBLEMA 8. ¿Falso o verdadero? Si los autovalores de \mathbf{A} son 2, 2 y 3 entonces sabemos que la matriz es

- (a) Invertible
- (b) Diagonalizable
- (c) No diagonalizable.

(L-16) PROBLEMA 9. Sean las matrices

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 8 & \\ & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -5 & \end{bmatrix}$$

23 / 44

- (a) Complete dichas matrices de modo que en los tres casos $\det \mathbf{A}_i = 25$. Así, la traza es en todos los casos igual a 10, y por tanto para las tres matrices el único auto-valor $\lambda = 5$ está repetido dos veces ($\lambda^2 = 25$ y $\lambda + \lambda = 10$ implica $\lambda = 5$).
- (b) Encuentre un vector característico con $\mathbf{A}\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$. Estas tres matrices no son diagonalizables porque no hay un segundo auto-vector linealmente independiente del primero.

(Strang, 2007, ejercicio 27 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 10. Factorice las siguientes matrices en $\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 1 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 11. Encuentre la matriz \mathbf{A} cuyos autovalores son 1 y 4, cuyos autovectores son $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente.

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 12. Si los elementos diagonales de una matriz triangular superior de orden 3×3 son 1, 2 y 7, ¿puede saber si la matriz es diagonalizable? ¿Quién es \mathbf{D} ?
(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 13.

23 / 44

(a) Encuentre los autovalores y auto-vectores de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Explique por qué (o por qué no) la matriz \mathbf{A} es diagonalizable.

(L-16) PROBLEMA 14. Sea \mathbf{A} una matriz 3×3 . Asuma que sus autovalores son 1 y 0, que una base de los autovectores asociados a $\lambda = 1$ son $[1, 0, 1]$ y $[0, 0, 1]$; mientras que los asociados a $\lambda = 0$ son paralelos a $[1, 1, 2]$.

- (a) ¿Es \mathbf{A} diagonalizable? En caso afirmativo escriba la matriz diagonal \mathbf{D} y la matriz \mathbf{S} tales que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.
- (b) Encuentre \mathbf{A} .

(L-16) PROBLEMA 15. Sea \mathbf{A} una matriz 2×2 tal que $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un autovector de \mathbf{A}

con autovalor 2, y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es otro autovector de \mathbf{A} con autovalor -2. Si

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, calcule $(\mathbf{A}^3)\mathbf{v}$.

23 / 44

1 Esquema de la Lección 17

Esquema de la Lección 17

- Matrices simétricas $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
 - Autovalores y autovectores
- Introd. formas cuadráticas y matrices definidas positivas

24 / 44

2 Matrices simétricas $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

¿que hay de especial en $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ cuando \mathbf{A} es simétrica?
 $n \times n$

1. Los autovalores son **REALES**
2. n autovectores *pueden elegirse* **PERPENDICULARES**

(¡siempre diagonalizable!)

Caso diagonalizable usual:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D} \iff \mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$$

Caso simétrico:

Puedo elegir autovectores orto**normales** (columnas de $\mathbf{S} = \mathbf{Q}$)

$$(\text{Si } \mathbf{A} = \mathbf{A}^T) \quad \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T \quad \text{Tma. espectral}$$

Diagonalizable *ortogonalmente*.

25 / 44

3 Autoespacios ortogonales en las matrices simétricas

Los autovectores (correspondientes a autovalores distintos) de una matriz simétrica son ortogonales.

Demostración.

Suponga $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$ y $\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda_2\mathbf{y}$ (con $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Entonces

$$\lambda_1\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{A}^T)\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\lambda_2.$$

Puesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ necesariamente:

$$\lambda_1(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) - \lambda_2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = 0 \implies (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \implies \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

□

26 / 44

4 Formas cuadráticas

Forma cuadrática:

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}; \quad \text{con } \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$$

Como $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$ (con $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$), entonces

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T\mathbf{x} = (\mathbf{Q}^T\mathbf{x})\mathbf{D}(\mathbf{Q}^T\mathbf{x}) \quad (\text{suma ponderada de cuadrados})$$

Forma cuadrática definida positiva:

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \iff \lambda_i > 0, \quad i = 1 : n.$$

entonces también decimos que \mathbf{A} es definida positiva.

27 / 44

5 Matrices definidas positivas

Significado:

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \quad (\text{excepto para } \mathbf{x} = \mathbf{0})$$

Algunas propiedades

Suponga \mathbf{A} simétrica definida positiva: ¿lo es también \mathbf{A}^{-1} ?

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$$

Suponga \mathbf{A}, \mathbf{B} simétricas definidas positivas: ¿lo es $\mathbf{A} + \mathbf{B}$?

por tanto la respuesta es...

28 / 44

6 Producto de matrices $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

Supongamos \mathbf{A} rectangular. ¿Es $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ definida positiva?
 $m \times n$

$$x(\mathbf{A}^T \mathbf{A})x =$$

Sólo puede ser 0 si $\mathbf{A}x$ es 0

¿Cómo garantizar que $\mathbf{A}x \neq 0$ cuando $x \neq 0$?

29 / 44

8 Matrices simétricas definidas positivas

- Todos los autovalores son:
- Todos los pivotes son:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Pivotes:

¿Signo de los autovalores?

$$\lambda^2 - 8\lambda + 11 = 0 \rightarrow \lambda = 4 \pm \sqrt{5} > 0$$

31 / 44

7 Matrices simétricas: signo de los autovalores

¿Son todos los λ_i positivos? ¿Son todos negativos?

Calcular autovalores de \mathbf{A} es imposible en general
 5×5

Buenas noticias: Signo de los pivotes de la forma escalonada coincide con el de los λ_i
(si no hemos cambiado el signo del determinante con transformaciones *Tipo II*)

núm. pivotes positivos = núm. autovalores positivos

30 / 44

Resumen (para matrices simétricas):

1. Matrices simétricas tienen *autovalores reales* y *autovectores* que se pueden elegir *perpendiculares*
2. $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T$ con \mathbf{Q} ortogonal
3. \mathbf{A} es simétricas si y solo si es *ortogonalmente* diagonalizable.
4. El signo de los autovalores coincide con el de los pivotes¹

32 / 44

Problemas de la Lección 17

(L-17) **PROBLEMA 1.** Escriba las matrices **A**, **B** y **C** en la forma \mathbf{QDQ}^T del teorema espectral.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-17) **PROBLEMA 2.** Encuentre los autovalores y los autovectores unitarios (de longitud igual a uno) de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2003, ejercicio 3 del conjunto de problemas 6.4.)

(L-17) **PROBLEMA 3.** Encuentre una matriz ortonormal **Q** que diagonalice la siguiente matriz simétrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

32 / 44

(L-17) **PROBLEMA 6.** Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Encuentre los valores característicos de **A** (recuerde que $i^2 = -1$).
- (b) Encuentre los valores característicos de **B** (en este caso quizá le resulte más sencillo encontrar primero los autovectores, y deducir entonces los autovalores).
- (c) De los siguientes tipos de matrices: ortogonales, invertibles, permutación, hermíticas, de rango 1, diagonalizables, de Markov ¿a qué tipos pertenece **A**?
- (d) ¿y **B**?

(Strang, 2007, ejercicio 14 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-17) **PROBLEMA 7.** Si $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$ entonces los autovalores de **A** deben ser _____. De un ejemplo tal que $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Ahora bien, si **A** es además simétrica, demuestre que entonces \mathbf{A}^3 es necesariamente **0**.

32 / 44

(Strang, 2003, ejercicio 5 del conjunto de problemas 6.4.)

(L-17) **PROBLEMA 4.** Suponga que **A** es una matriz simétrica de 3 por 3 con autovalores 0, 1 y 2.

- (a) ¿Qué propiedades pueden garantizarse para los autovectores unitarios **u**, **v** y **w** correspondientes a los respectivos autovalores 0, 1 y 2?
- (b) En términos de **u**, **v** y **w**, describa el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$, el espacio fila $\mathcal{C}(\mathbf{A}^T)$ y el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.
- (c) Encuentre un vector **x** tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$. ¿Es único?
- (d) ¿Qué condiciones debemos imponer sobre **b** para que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tenga solución?
- (e) Si **u**, **v** y **w** son las columnas de **S**, y **v** es ortogonal a **w**; escriba las matrices \mathbf{S}^{-1} y $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$.

(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-17) **PROBLEMA 5.** Escriba un hecho destacado sobre los valores característicos de cada uno de estos tipos de matrices:

- (a) Una matriz simétrica real.
- (b) Una matriz diagonalizable tal que $\mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- (c) Una matriz no diagonalizable
- (d) Una matriz singular

(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 5.5.)

32 / 44

(L-17) **PROBLEMA 8.** Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Demuestre que **A** no es diagonalizable cuando $a = 3$.
- (b) ¿Es **A** diagonalizable cuando $a = 2$? (explique su respuesta). En caso afirmativo calcule una matriz diagonal de autovalores **D** y una de autovectores **S** tales que $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$.
- (c) ¿Es $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ diagonalizable para cualquier valor de a ? ¿Es posible encontrar una base ortonormal de autovectores de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$?
- (d) Encuentre todos los valores de a para los cuales existe \mathbf{A}^{-1} y además la matriz es diagonalizable.

(L-17) **PROBLEMA 9.** Sea la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

- (a) Expresé **B** en la forma $\mathbf{B} = \mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^T$ del teorema espectral.
- (b) ¿Es **B** diagonalizable? Si no lo es, diga las razones; y en caso contrario genere una matriz **S** que diagonalice a **B**.

32 / 44

1 Esquema de la Lección 18

Esquema de la Lección 18

- Matrices (semi)definidas positivas, (semi)definidas negativas
- Completando el cuadrado
- Diagonalización por congruencia

33 / 44

Ejemplo

¿Qué número debo poner para que la matriz \mathbf{A} sea singular?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & ? \end{bmatrix}$$

- Autovalores:
- Menores principales:
- Para la forma cuadrática

$$q_{\mathbf{A}}(x) = x\mathbf{A}x = (x, y) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & ? \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + ?y^2$$

¿Existe $x \neq 0$ tal que $x\mathbf{A}x = 0$?

35 / 44

2 Formas cuadráticas

- Definida positiva: $\forall x \neq 0 \Rightarrow x\mathbf{A}x > 0$.
- Semi-definida positiva: $\forall x \neq 0 \Rightarrow x\mathbf{A}x \geq 0$.
- Definida negativa: $\forall x \neq 0 \Rightarrow x\mathbf{A}x < 0$.
- Semi-definida negativa: $\forall x \neq 0 \Rightarrow x\mathbf{A}x \leq 0$.
- Indefinida: ni semi-definida positiva ni semi-definida negativa.

34 / 44

Ejemplo

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ entonces $(x, y) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + ?y^2$

- ¿Hay números x y y que hagan $x\mathbf{A}x$ negativa?
- ¿Pasa por el origen?
- Si $y = 0$ y $x = 1$, ¿es positiva? (¿y si $x = -1$?)
- Si $x = 0$ y $y = 1$, ¿es positiva? (¿y si $y = -1$?)
- ¿Es siempre positiva?

$(0, 0)$ **punto de silla**: mínimo en unas direcciones, y máximo en otras.

$$\lambda_1 = -2, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 11, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

36 / 44

Ejemplo

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$ entonces $(x, y) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + 20y^2$

Definida positiva.

Pruebas de que \mathbf{A} es definida positiva

- ¿Son los menores principales positivos?
- ¿Son los autovalores positivos?

$$q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

37 / 44

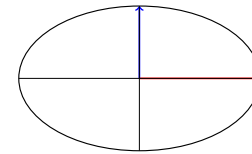
3 Completando el cuadrado

Si pudiéramos expresar $q(\mathbf{x})$ como suma de cuadrados, sabríamos si $q(\mathbf{x})$ es definida positiva.

Completemos el cuadrado!

- $q(x, y) = 2x^2 + 12xy + 20y^2 = 2(x + ?y)^2 + ?$
- $q(x, y) = 2x^2 + 12xy + 7y^2$
- $q(x, y) = 2x^2 + 12xy + 18y^2$
- $q(x, y) = 2x^2 + 12xy + 20y^2$ (gráfico)

Si definida positiva: $q(x, y) = a$; $a > 0$: elipse



¿es

$$q(x, y, z, w, t) = 2t^2 - 2tx - 2tz + w^2 - 2wy + 2x^2 - 2xy + 2y^2 + z^2$$

definida positiva? 😞😞😞😞😞!!!!???

38 / 44

4 Matrices congruentes

\mathbf{A} y \mathbf{C} son congruentes si existe \mathbf{B} invertible tal que $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$

Diagonalización por congruencia

Para toda \mathbf{A} (simétrica) existe $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}$ (invertible) tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \text{es diagonal} \quad (\mathbf{B}^T = \tau_k \dots \tau_1 \mathbf{I})$$

Teorema Espectral: ¡Diagonalización por semejanza y congruencia!

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}.$$

Toda forma cuadrática se puede expresar como suma de cuadrados

$$\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x} (\mathbf{B}^{-1})^T \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{y} \mathbf{D} \mathbf{y}; \quad \text{donde} \quad \mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}.$$

39 / 44

5 Completar el cuadrado

$$2x^2 + 12xy + 20y^2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-3)1+2]} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-3)1+2]} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

por tanto tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{D} = \mathbf{E}^T \mathbf{A} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

así $\mathbf{A} = (\mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{E}^{-1}$ y por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} &= (x, y) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{x} (\mathbf{E}^{-1})^T) \mathbf{D} (\mathbf{E}^{-1} \mathbf{x}) \\ &= ((x + 3y), y) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (x + 3y) \\ y \end{pmatrix} = 2(x + 3y)^2 + 2y^2 \end{aligned}$$

40 / 44

6 Ejemplo 3 por 3

¿Es $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ definida positiva?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} \tau \\ (\frac{1}{2})1+2 \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} \tau \\ (\frac{2}{3})2+3 \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{xAx} = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz > 0$$

41 / 44

$\mathbf{xAx} = 1$: (elipsoide) Ejes en la dirección de los autovectores $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{Q}$

8 Otro ejemplo 3 por 3

¿Es $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ definida positiva?

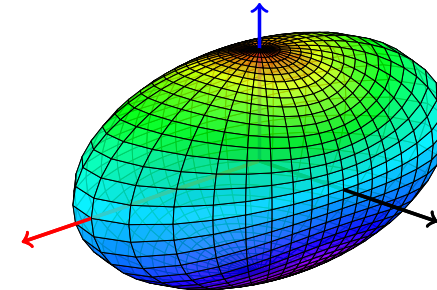
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} \tau \\ (1)3+1 \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} \tau \\ (-\frac{1}{2})1+3 \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} \tau \\ [2 \rightleftharpoons 3] \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz indefinida

43 / 44

7 Matrices definidas positivas y elipsoides: ejemplo 3 por 3

- La región $(\mathbf{xAx} = a)$ es un (elipsoide).
- Los autovectores son los ejes principales \mathbf{Q} .
- Longitud de los ejes determinada por los autovalores



42 / 44

9 "Clasificación" de formas cuadráticas

$$\mathbf{xAx} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0; \quad \text{para todo } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Métodos

Mirar el signo de

1. Elem. diag.: $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$ (Diagonalización por congruencia) 😊
2. Calcular los autovalores: (Raíces de un polinomio) 😞
3. Menores principales: (Criterio de Sylvester) 😞

Ley de inercia

el número de componentes positivas, negativas y nulas de la diagonal de \mathbf{D} es un invariante de \mathbf{A} , i.e., no depende de \mathbf{B}
(La diagonalización ortogonal $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$ es un caso especial)

44 / 44

Problemas de la Lección 18

(L-18) PROBLEMA 1. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas, y escriba las formas cuadráticas $f = \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x}$ correspondientes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

(e) El determinante del apartado (b) es cero; ¿a lo largo de que recta se verifica que en todos sus puntos $f(x, y) = 0$?

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 2. ¿Cuál es la forma cuadrática $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ para cada una de las siguientes matrices? Complete el cuadrado con la finalidad de escribir f como una suma de uno o dos cuadrados $d_1(\quad)^2 + d_2(\quad)^2$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 15 del conjunto de problemas 6.1.)

44 / 44

(L-18) PROBLEMA 6. Sean las formas cuadráticas

$$q_1(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy.$$

$$q_2(x, y, z) = -x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy - 2axz.$$

(a) Demuestre que $q_1(x, y, z)$ es semi-definida positiva.

(b) Halle, si existiese, un valor de a de manera que $q_2(x, y, z)$ sea definida negativa.

(L-18) PROBLEMA 7. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas o no.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2$

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 6.2.)

44 / 44

(L-18) PROBLEMA 3. ¿Cuales de la siguientes matrices tienen dos autovalores positivos? Pruebe $a > 0$ y $ac > b^2$ (determinante mayor que cero); no calcule los autovalores. $\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 14 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 4. Demuestre que $f(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2$ no tiene un mínimo en $(0, 0)$ a pesar de que todos sus coeficientes son positivos. Escriba $f(x, y)$ como una diferencia de cuadrados y encuentre un punto (x, y) donde $f(x, y)$ sea negativa.

(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 5. Demuestre a partir de los valores característicos que si \mathbf{A} es definida positiva, entonces también lo son \mathbf{A}^2 y \mathbf{A}^{-1} .

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 6.2.)

44 / 44

(L-18) PROBLEMA 8. Clasifique la forma cuadrática (ie., definida positiva, negativa, semidefinida, no definida, etc.)

$$q(x, y, z) = x^2 + 6xy + y^2 + az^2;$$

en función del parámetro a .

(L-18) PROBLEMA 9. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ es definida positiva, pruebe que \mathbf{A}^{-1} es definida positiva.

(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 10. Si una matriz simétrica de 2 por 2 satisface $a > 0$, y $ac > b^2$, demuestre que sus autovalores son reales y positivos (definida positiva). Emplee la ecuación característica y el hecho de que el producto de los autovalores es igual al determinante.

(Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 6.1.)

44 / 44

(L-18) PROBLEMA 11. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas, definidas negativas, semi-definidas, o indefinidas.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = -\mathbf{B}$

(d) $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}$

(L-18) PROBLEMA 12. Una matriz definida positiva no puede tener un cero (o incluso peor; un número negativo) en su diagonal principal. Demuestre que esta matriz no cumple $\mathbf{xAx} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{no es positiva cuando} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 21 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-18) PROBLEMA 13. Demuestre que si \mathbf{A} y \mathbf{B} son definidas positivas entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ también es definida positiva. Para esta demostración los pivotes y los valores característicos no son convenientes. Es mejor emplear $\mathbf{x}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} > 0$ (Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-18) PROBLEMA 14. Factorice las siguientes matrices simétricas en la forma $\mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}^T$.

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(L-18) PROBLEMA 15. La forma cuadrática $f(x, y) = 3(x + 2y)^2 + 4y^2$ es definida positiva. Encuentre la matriz \mathbf{A} , factorícela en \mathbf{LDL}^T , y relacione los elementos en \mathbf{D} y \mathbf{L} con 3, 2 y 4 en f . (Strang, 2007, ejercicio 9 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 16. Considere las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se pide:

- (a) (0.5pts) Calcule los autovalores de la matriz \mathbf{A} .
- (b) (0.5pts) Pruebe que si $a = 2$ la matriz \mathbf{A} NO es diagonalizable.
- (c) (1pts) Para la matriz \mathbf{B} , encuentre una matriz diagonal \mathbf{D} y una matriz \mathbf{P} tal que $\mathbf{B} = \mathbf{PDP}^T$.
- (d) (0.5pts) Obtenga la expresión polinómica de la forma cuadrática asociada a la matriz \mathbf{B} y pruebe que es definida positiva.

(L-18) PROBLEMA 17. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ b & 4/5 \end{pmatrix}$, calcule valores (si existen) de a y b para los cuales

- (a) (0.5pts) La matriz \mathbf{A} es orto-normal.
- (b) (0.5pts) Las columnas de la matriz \mathbf{A} son independientes.
- (c) (0.5pts) $\lambda = 0$ es un autovalor de \mathbf{A} .
- (d) (0.5pts) \mathbf{A} es simétrica y definida negativa.

(L-18) PROBLEMA 18.

- (a) Obtenga la matriz \mathbf{Q} asociada a la forma cuadrática $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + ay^2 + 8z^2$ y clasifique la matriz \mathbf{Q} (es decir, diga en que casos la matriz es no definida, definida o semidefinida, de manera positiva o negativa) para el caso en el que a es igual a uno ($a = 1$).
- (b) Clasifique la matriz \mathbf{Q} cuando $a \neq 1$.

Problemas de la Lección opcional 2

(L-OPT-2) PROBLEMA 1. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) (0.5pts) Demuestre que \mathbf{A} es invertible si y sólo si $a \neq 0$.
 (b) (0.5pts) ¿Es la matriz \mathbf{A} definida positiva cuando $a = 1$? Justifique su respuesta.
 (c) (1pts) Calcule \mathbf{A}^{-1} cuando $a = 2$.
 (d) (0.5pts) ¿Cuántas variables pueden ser tomadas como exógenas (o libres) en el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ cuando $a = 0$? ¿Cuales?

(L-OPT-2) PROBLEMA 2. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o veracidad de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

- (a) Si \mathbf{A} es simétrica, entonces \mathbf{A}^2 también lo es.
 (b) Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ entonces $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})$ donde \mathbf{I} es la matriz identidad.
 (c) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz cuadrada \mathbf{A} , entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es compatible determinado.
 (d) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz cuadrada \mathbf{A} , entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede ser incompatible.
 (e) Si una matriz es ortogonal (columnas perpendiculares y de norma uno) entonces su inversa también es ortogonal.

44 / 44

- (f) Si 1 es el único autovalor de una matriz \mathbf{A} de orden 2×2 , entonces \mathbf{A} necesariamente tiene que ser la matriz identidad \mathbf{I} .

(L-OPT-2) PROBLEMA 3. complete los blancos, o responda Verdadero/Falso.

- (a) Cualquier sistema generador de un espacio vectorial contiene una base del espacio (V/F)

- (b) Que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sean linealmente independientes significa que

- (c) El conjunto que sólo contiene el vector $\mathbf{0}$ es un conjunto linealmente independiente. (V/F)

- (d) Una matriz cuadrada de orden n por n es diagonalizable cuando:

- (e) Si $\mathbf{u} = (1, 2, -1, 1)$, entonces $\|\mathbf{u}\| =$ _____.

- (f) Si $\mathbf{u} = (1, 2, -1, 1)$ y $\mathbf{v} = (-2, 1, 0, 0)$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$ _____.

44 / 44

(L-OPT-2) PROBLEMA 4. En las preguntas siguientes \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices $n \times n$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (incluya una breve explicación, o un contra ejemplo que justifique su respuesta):

- (a) Si \mathbf{A} no es cero entonces $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
 (b) Si $\det(\mathbf{AB}) \neq 0$ entonces \mathbf{A} es invertible.
 (c) Si intercambio las dos primeras filas de \mathbf{A} sus autovalores cambian.
 (d) Si \mathbf{A} es real y simétrica, entonces sus autovalores son reales (**aquí no es necesaria una justificación**).
 (e) Si la forma reducida de echelon de $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})$ es la matriz identidad, entonces 5 no es un autovalor de \mathbf{A} .
 (f) Sea \mathbf{b} un vector columna de \mathbb{R}^n . Si el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución, entonces $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
 (g) Sea \mathbf{C} de orden 3×5 . El rango de \mathbf{C} puede ser 4.
 (h) Sea \mathbf{C} de orden $n \times m$, y \mathbf{b} un vector columna de \mathbb{R}^n . Si $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución, entonces $\text{rg}(\mathbf{C}) < n$.
 (i) Toda matriz diagonalizable es invertible.
 (j) Si \mathbf{A} es invertible, entonces su forma reducida de echelon es la matriz identidad.

44 / 44

(L-OPT-2) PROBLEMA 5. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los autovalores de \mathbf{B} son 0 y 2. Use esta información para responder a las siguientes cuestiones. Para cada matriz debe dar una explicación. Puede haber más de una matriz que cumpla la condición:

- (a) ¿Qué matrices son invertibles?
 (b) ¿Qué matrices tienen un autovalor repetido?
 (c) ¿Qué matrices tienen rango menor a tres?
 (d) ¿Qué matrices son diagonalizables?
 (e) ¿Para qué matrices diagonalizables podemos encontrar tres autovectores ortogonales entre sí?

(L-OPT-2) PROBLEMA 6. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcule los autovalores y autovectores de \mathbf{A} .
 (b) ¿Es \mathbf{A} diagonalizable?

44 / 44

(c) ¿Es posible encontrar una matriz \mathbf{P} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^T$, siendo \mathbf{D} una matriz diagonal?

(d) Calcule $|\mathbf{A}^{-1}|$.

(L-OPT-2) PROBLEMA 7. Sea \mathbf{A} una matriz 3×3 y sean $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$ sus autovalores. Sean $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)^T$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)^T$ los autovectores asociados a λ_1 y λ_2 .

(a) ¿Es \mathbf{A} diagonalizable?

(b) ¿Podría ser $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, -1)^T$ un autovector asociado al autovalor $\lambda_3 = -1$.

(c) Calcule $\mathbf{A}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$.

(L-OPT-2) PROBLEMA 8.

(a) (0.5pts) Encuentre un sistema lineal homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ cuyas soluciones sean

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) (0.5pts) Si el polinomio característico de la matriz \mathbf{A} es $p(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 - 24\lambda^3 + 28\lambda^2 - 3\lambda + 10$, encuentre el rango de \mathbf{A} .

(L-OPT-2) PROBLEMA 9. Suponga una matriz cuadrada e invertible $\mathbf{A}_{n \times n}$.

(a) ¿Cuáles son sus espacios columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$? (no responda con la definición, diga qué conjunto de vectores compone cada espacio).

(b) Suponga que \mathbf{A} puede ser factorizada en $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Describe el primer paso de eliminación en la reducción de \mathbf{A} a \mathbf{U} . ¿porqué sabe que \mathbf{U} es también una matriz invertible? ¿Cuanto vale el determinante de \mathbf{A} ?

(c) Encuentre una matriz particular de dimensiones 3×3 e invertible \mathbf{A} que no pueda ser factorizada en la forma \mathbf{LU} (sin permutar previamente las filas). ¿Qué factorización es todavía posible en su ejemplo? (no es necesario que realice la factorización). ¿Cómo sabe que su matriz \mathbf{A} es invertible?

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*.

Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomson Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.