Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

14/01/2023

1 Esquema de la **Lección 4**

Esquema de la Lección 4

- Transformaciones elementales
- Identificación de matrices singulares por eliminación
- Producto de *matrices elementales*

2 Transformaciones elementales de una matriz

Tipo *I*: $\mathbf{A}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ (con $i \neq j$)

suma λ veces la columna i-ésima a la columna j-ésima

$$\begin{bmatrix}1&-3&0\\1&-6&3\end{bmatrix}_{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}1&-3&-2\\1&-6&1\end{bmatrix}$$

Tipo *II*: $\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ (con $\alpha \neq 0$)

multiplica por α la i-ésima columna

$$\begin{bmatrix}1&-3&0\\1&-6&3\end{bmatrix}_{\underset{[(10)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix}1&-30&0\\1&-60&3\end{bmatrix}$$

3 Eliminación y forma pre-escalonada de una matriz

- *Pivote*: es el primer componente no nulo de cada columna.
- *Eliminación*: modifica una matriz hasta que los componentes a la derecha de cada pivote son cero

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&0\\2&8&4\\1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&4\\1&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&-2&5\end{bmatrix}=\mathbf{L}$$

4 Eliminación

Algoritmo de Eliminación sobre **A**

modifica **A** con una secuencia de *transformaciones elementales*

Objetivo

obtener una forma *(pre)escalonada* de la matriz

- *pre-escalonada*: a la derecha de cada pivote solo hay ceros.
- *escalonada*: además sus pivotes en disposición descendente y columnas nulas a la derecha.

Toda matriz se puede (pre)escalonar por eliminación

Rango (rg): nº de pivotes de sus formas pre-escalonadas

$\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ *singular*: sus formas pre-escalonadas tienen columnas nulas $(\mathrm{rg}<n)$

5 Eliminación: ¿Cuando no hay suficientes pivotes?

matrices $n\times n$: **singulares** si no logramos n pivotes $\rightarrow$ ☹

$$\begin{bmatrix}0&1&3\\4&2&8\\1&1&1\end{bmatrix}$$

¿Y si la matriz fuera? $\begin{bmatrix}1&3&0\\2&6&4\\1&1&1\end{bmatrix}$

¿Y si la matriz fuera? $\begin{bmatrix}1&3&0\\2&6&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

¿Y si la matriz fuera? $\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&-4\end{bmatrix}$

6 Producto de matrices: matrices elementales

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&3&0\\2&8&4\\1&1&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ &&\\ &&\end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&4\\1&-2&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}}$$

La matriz $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ se denomina *matriz elemental*:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}\right)=\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}$$

Esta matriz elemental $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ en particular se denota como $\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}$

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\mathbf{A}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}$$

7 Producto de matrices: matrices elementales

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&4\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} &&\\ & & \\ & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&-2&5\end{bmatrix}$$

Esta matriz elemental $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ en particular se denota como $\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\mathbf{A}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$$

8 Eliminación mediante matrices elementales

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&0\\2&8&4\\1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&4\\1&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&-2&5\end{bmatrix}=\mathbf{L}$$

$$\mathbf{A}_{\underset{\substack{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}{\boldsymbol{\tau}}}=\mathbf{A}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}][(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}=\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\mathbf{L}$$

hay una matriz que realiza todas las operaciones "de golpe"

$$\mathbf{A}_{\underset{\substack{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}{\boldsymbol{\tau}}}=\mathbf{A}\left(\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)\right)=\mathbf{A}\mathbf{I}_{\underset{\substack{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}{\boldsymbol{\tau}}}=\mathbf{L}$$

$$\boxed{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}=\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)}$$

9 ¿Cómo volver de L a A? Inversas

¿Cómo deshacer el primer paso? (fue restar 3 veces $\mathbf{A}_{|1}$ de $\mathbf{A}_{|2}$)

$$\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$\mathbf{I}_{\underset{[(-\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ "deshace" $\mathbf{I}_{\underset{[(\lambda)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$

¿Qué deshace $\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}$?

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1& & \\ &1& \\ & &1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

10 Matrices de intercambio

$$\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&\\ & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&a\\d&b\end{bmatrix}$$

¿Y si queremos intercambiar las filas?

$$\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\qquad\qquad=\begin{bmatrix}b&d\\a&c\end{bmatrix}$$

¡El producto de matrices no es conmutativo!

11 Intercambios entre columnas

Intercambio de columnas:

$\mathbf{A}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}} \to$ intercambia las columnas i y j de $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\tau}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Podemos intercambiar dos columnas con una sucesión de transformaciones elementales

La matriz $\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\tau}}$ se denomina matriz intercambio

12 Permutaciones

Producto de matrices intercambio $\mathbf{I}_{\underset{[\cdot\rightleftharpoons\cdot]}{\tau}}$ es una matriz permutación $\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\tau}}$.

$$\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\tau}} = \text{ Matriz identidad } \mathbf{I} \text{ con columnas reordenadas}$$

Veamos el caso 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}{\tau}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

¿Cuantos posibles reordenamientos o permutaciones hay?

¿Qué obtenemos con el producto de dos matrices permutación?

Problemas de la Lección 4

(L-4) PROBLEMA 1.

(a) ¿Cuáles son las matrices $\mathbf{I}_{\underset{[(x)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}$, $\mathbf{I}_{\underset{[(y)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}$ y $\mathbf{I}_{\underset{[(z)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}}$ que transforman

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ en una forma escalonada?

(b) Multiplique dichas matrices elementales $\mathbf{I}_{\tau_i}$ para obtener una matriz $\mathbf{E}$ que realice la eliminación: $\mathbf{AE} = \mathbf{K}$.

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 24 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) PROBLEMA 2. Considere la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

¿Para que valor(es) de c la matriz es singular (no es posible encontrar tres pivotes)?

(L-4) PROBLEMA 3. Suponga las siguientes matrices de orden 3 por 3.

(a) $\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}\right)$ resta la columna 1 de la columna 2, y luego $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\tau}}\right)$ intercambia las columnas 2 y 3. ¿Qué matriz $\mathbf{E}$ realiza ambos cambios a la vez?

(b) $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\tau}}\right)$ intercambia las columnas 2 y 3 y luego $\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}$ resta la columna 1 de la columna 3. ¿Qué matriz $\mathbf{N} = \left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}{\tau}}\right)\left(\mathbf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}}\right)$ realiza ambos cambios a la vez?

Explique por qué las matrices $\mathbf{E}$ y $\mathbf{N}$ son iguales en ambos casos, pero las matrices elementales $\mathbf{I}_{\tau}$ son distintas.

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 28 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) PROBLEMA 4. Las matrices elementales $\mathbf{I}_{\underset{[(\cdot)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}$ y $\mathbf{I}_{\underset{[(\cdot)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}}$ reducen la matriz $\mathbf{A}$ a su forma escalonada por columnas. Encuentre la matriz $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$ es dicha forma escalonada (triangular inferior), si $\mathbf{A}$ es

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(L-4) PROBLEMA 5. Aunque aquí sólo contemplamos como transformaciones elementales las de *Tipo I* y *II*, en la mayoría de manuales de Álgebra Lineal aparece como tercera operación elemental el *intercambio*:

$$\mathbf{A}_{\underset{[\boldsymbol{p}\rightleftharpoons\boldsymbol{s}]}{\boldsymbol{\tau}}} \to \text{intercambia las columnas } p \text{ y } s \text{ de } \mathbf{A}.$$

Demuestre que un intercambio de columnas es en realidad una sucesión transformaciones elementales de *Tipo I* y *II*. Hágalo transformando la matriz identidad $\underset{2\times 2}{\mathbf{I}}$ en $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ mediante transformaciones elementales por columnas.

(L-4) PROBLEMA 6. Escriba las matrices de 3 por 3 que producen los siguientes pasos de eliminación:

(a) $\mathbf{I}_{\underset{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ resta 5 veces la columna 1 de la columna 2.

(b) $\mathbf{I}_{\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ resta 7 veces la columna 2 de la columna 3.

(c) la matriz permutación $\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ que intercambia las columna 1 y 2, y después las columnas 2 y 3.

(Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) PROBLEMA 7. En referencia a las matrices del PROBLEMA 6:

(a) Al aplicar $\underset{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$ y luego $\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$ a las columnas de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ se obtiene $\mathbf{A}_{\underset{\substack{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} \;\; ; & ; & \end{bmatrix}$.

(b) Pero aplicando $\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$ antes de $\underset{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$ se obtiene $\mathbf{A}_{\underset{\substack{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} \;\; ; & ; & \end{bmatrix}$.

(c) Cuando se aplica $\underset{[(-7)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$ primero, la columna ____ no se ve afectada por la columna ____. ¡Este hecho es central para que la factorización LU funcione como lo hace!

(Strang, 2007, ejercicio 23 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) PROBLEMA 8. ¿Qué matriz $\mathbf{M}$ transforma el vector $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1, & 0,\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0, & 1,\end{pmatrix}$, es decir $\boldsymbol{v}\mathbf{M} = \begin{pmatrix}0, & 1,\end{pmatrix}$; y también el vector $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}0, & 1,\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1, & 0,\end{pmatrix}$, es decir $\boldsymbol{w}\mathbf{M} = \begin{pmatrix}1, & 0,\end{pmatrix}$?

(L-4) PROBLEMA 9. Hemos visto que para una matriz de intercambio, $\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}$, el producto $\mathbf{A}\big(\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\big)$ tiene las mismas componentes que $\mathbf{A}$, pero las columnas están intercambiadas. ¿Qué pasaría si alteramos el orden del producto, es decir, si multiplicamos $\big(\mathbf{I}_{\underset{[\boldsymbol{i}\rightleftharpoons\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\big)\mathbf{A}$? Verifique su respuesta para el caso 2 por 2.

(L-4) PROBLEMA 10. Si cada columna de $\mathbf{A}$ es un múltiplo de $\begin{pmatrix}1, & 1, & 1,\end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ siempre es un múltiplo de $\begin{pmatrix}1, & 1, & 1,\end{pmatrix}$. Escriba un ejemplo de 3 por 3. ¿Cuántos pivotes se producen por eliminación?
(Strang, 2007, ejercicio 26 del conjunto de problemas 1.4.)

1 Esquema de la **Lección 5**

Esquema de la Lección 5

- Inversa de $\mathbf{A}$
- eliminación Gauss-Jordan / encontrando $\mathbf{A}^{-1}$
- Inversa de $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A}^{\intercal}$

2 Inversa de una matriz (matrices cuadradas)

A cuadrada de orden n tiene inversa (es *invertible*) si existe **B** tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Entonces

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}.$$

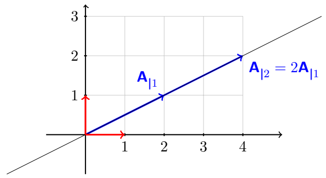
No todas las matrices tienen inversa

Las *matrices cuadradas sin inversa* se denominan *singulares*

3 Caso singular (no inversa)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Es posible encontrar una matriz **B** tal que **AB** $=$**I**?
. . . columnas de **I** deben ser combinaciones lineales de columnas de **A**. . . pero las columnas están alineadas.



Así pues

$$\boxed{\mathbf{A} \text{ es singular}}$$

4 Caso singular (no inversa)

¿Se puede encontrar $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ para $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ $\quad\Rightarrow\quad$ no puede haber $\mathbf{A}^{-1}$

$$\boxed{\text{Suponer } \mathbf{A}^{-1} \text{ nos lleva a una contradicción}}$$

$$\text{Si } \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ y } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Cuando existe $\mathbf{A}^{-1}$

la única solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

5 Calculando la matriz inversa

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es resolver m sistemas (de m ecuaciones cada uno)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6 Gauss-Jordan: resolviendo dos sistemas lineales de golpe

Eliminación Gauss-Jordan (obtención forma escalonada reducida $\mathbf{R}$)
aplicar transformaciones elementales hasta lograr una matriz escalonada con únicamente ceros a la izda. de cada pivote (y pivotes iguales a 1)

Vamos a resolver los sistemas lineales

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

aplicando eliminación Gauss-Jordan sobre $\mathbf{A}$ apilada con $\mathbf{I}$

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{cc}1&3\\2&7\\\hline 1&0\\0&1\end{array}\right]\rightarrow \qquad \rightarrow \qquad =$$

Si $\mathbf{R}=\mathbf{I}$, hemos encontrado $\mathbf{A}^{-1}$

7 Gauss-Jordan: ¿Por qué funciona?

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{cc}1&3\\2&7\\\hline 1&0\\0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \qquad \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}$$

es decir, puesto que $\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}=\mathbf{A}\big(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\big)$:

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]_{\tau_1\cdots\tau_k}=\left[\frac{\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}}{\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}}\right]=\left[\frac{\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k})}{\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}}\right]=\left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}}\right],$$

¿quien es $\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}$?

por tanto $\mathbf{A}^{-1}=$

8 Inversa de un producto

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son invertibles y del mismo orden, $(\mathbf{AB})$ es invertible.

¿Cómo es $(\mathbf{AB})^{-1}$? Probemos con $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})$:

$$\mathbf{AB}\big(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\big)=$$

$$\big(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\big)\mathbf{AB}=$$

9 Inversa de la matriz transpuesta

$$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{I}$$

Hagamos la transpuesta en ambos lados

$$\Big((\mathbf{A}^{-1})^{\intercal}\Big)\mathbf{A}^{\intercal}=\mathbf{I}$$

por tanto

la inversa de $\mathbf{A}^{\intercal}$ es

10 Matrices intercambio y matrices permutación

¿Son invertibles las matrices intercambio, $\mathbf{I}_{\underset{[i\rightleftharpoons j]}{\boldsymbol{\tau}}}$?

Es fácil comprobar que

$$\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \mathbf{I} \qquad \Longrightarrow$$

11 Caracterización de las matrices que tienen inversa

Dada **A** de orden n, las siguientes propiedades son equivalentes

1. $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_p} = \mathbf{K}$ (pre-escalonada) no tiene columnas nulas.
2. **A** tiene inversa.
3. **A** es producto de matrices elementales.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \mathbf{I} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A} = \left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^{\text{-}1}$$

donde

$$\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^{\text{-}1} = \left((\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1})\cdots(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k})\right)^{\text{-}1} = (\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k^{\text{-}1}})\cdots(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1^{\text{-}1}}) = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k^{\text{-}1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{\text{-}1}}$$

Problemas de la Lección 5

(L-5) Problema 1. Aplique la eliminación Gauss-Jordan para invertir estas matrices

(a) $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) Problema 2.

(a) Si **A** es invertible y $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, demuestre rápidamente que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.
(b) Si $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, encuentre un ejemplo con $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, pero $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$.

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) Problema 3. Calcule la inversa de la matriz genérica 2×2

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

¿Qué condiciones sobre a, b, c, y d aseguran que existe la inversa?

(L-5) Problema 4. Calcule las inversas de las siguientes matrices, usando Gauss-Jordan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(L-5) Problema 5. Si la matriz 3 por 3 **A** es tal que $\mathbf{A}_{|1} + \mathbf{A}_{|2} = \mathbf{A}_{|3}$, demuestre que $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ no es invertible de estas dos formas alternativas:

(a) Encuentre una solución $\boldsymbol{x}$ diferente de cero de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(b) La eliminación preserva la condición $columna1 + columna2 = columna3$. Explique por qué no hay un tercer pivote.

(Strang, 2007, ejercicio 26 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) Problema 6. Encuentre las inversas de

(a) $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(b) $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix}.$

(c) $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}.$

(Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) Problema 7. Calcule la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

¿Para qué valores de a y b no hay inversa?
(Strang, 2007, ejercicio 42 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) Problema 8. Encuentre $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{E}^8$ y $\mathbf{E}^{-1}$ si $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$
(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.5.)

(L-5) Problema 9. Dada la matriz de permutación

$$\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

escriba la matriz $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)^{-1}$. ¿Que otra relación tiene con la matriz $\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\boldsymbol{\tau}}}$ (aparte de ser su inversa)?

(L-5) Problema 10. La matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad $\mathbf{I}$ mediante las siguientes operaciones elementales sobre las columnas (en este orden):

$\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 4 veces columna 1 de la columna 2.

$\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 3 veces columna 1 de la columna 3.

$\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta columna 3 de la columna 2.

(a) Escriba $\mathbf{A}^{-1}$ en términos de operaciones con matrices elementales $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$. Calcule la matriz $\mathbf{A}^{-1}$.
(b) ¿Cuál es la matriz original $\mathbf{A}$?

(Basado en *MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2006*)

(L-5) Problema 11. La matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad $\mathbf{I}$ mediante las siguientes tres operaciones elementales sobre las **filas** (en el siguiente orden):

$\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 4 veces fila 1 de la fila 2.

$\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 3 veces fila 1 de la fila 3.

$\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta fila 3 de la fila 2.

(a) Escriba $\mathbf{A}^{-1}$ en términos de las matrices elementales $\mathbf{E}$. Calcule la matriz $\mathbf{A}^{-1}$.
(b) ¿Cuál es la matriz original $\mathbf{A}$?

(*MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2006*)

(L-5) PROBLEMA 12.

(a) Encuentre la inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Encuentre la inversa de la siguiente matriz usando el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

(Poole, 2004, ejercicio 36, 38 y 59 del conjunto de problemas 3.3.)

(L-5) PROBLEMA 13. Sean **A**, **B** y **C** matrices cuadradas. Justifique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

(a) Si $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$ entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.
(b) $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$.

(L-5) PROBLEMA 14. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 0 & 2a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$

(a) Demuestre que **A** es invertible para todo valor del parámetro a.
(b) Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ cuando $a = 0$.

(L-5) PROBLEMA 15. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule $\mathbf{A}^{-1}$.

(L-5) PROBLEMA 16. Encuentre las inversas, si existen, de las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(L-5) PROBLEMA 17. Tan solo hay un número finito ($n!$) de matrices de permutación de dimensión $n \times n$. Además, cualquier potencia de una matriz permutación es también una matriz permutación. Emplee este hecho para demostrar que $\left(\mathbf{I}_{\underset{[\mathfrak{S}]}{\tau}}\right)^r = \mathbf{I}$ para algún número entero r.

Poole, D. (2004). *Álgebra lineal. Una introducción moderna*. Thomson Learning, Mexico D.F. ISBN 970-686-272-2.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.