Matemáticas II

Marcos Bujosa

15/01/2025

Puede encontrar la última versión de este material en

https://github.com/mbujosab/MatematicasII/tree/main/Esp

Índice

Part III
Subespacios y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

LECCIÓN 6: Introducción a los espacios y subespacios vectoriales

Lección 6

(**Lección** 6) T-1 Esquema de la Lección 6

Esquema de la *Lección 6*

- Introducción a los espacios y subespacios vectoriales

F1

(**Lección** 6) T-2 Introducción

¿Que operaciones hemos empleado con vectores?

- suma de vectores: $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$
- producto por un escalar: $\lambda \boldsymbol{v}$

F2

(**Lección** 6) T-3 Espacio vectorial: definición

Un *espacio vectorial* es un conjunto $\mathcal{V}$ junto con *dos operaciones*

Suma ($\vec{x} + \vec{y}$): $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$
Asocia a cada par $\vec{x}$, $\vec{y}$ otro elemento de $\mathcal{V}$ llamado $\vec{x} + \vec{y}$

Producto por escalares ($\alpha\vec{x}$): $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$
Asocia a cada par α, $\vec{x}$ otro elemento de $\mathcal{V}$ llamado $\alpha\vec{x}$

que verifican:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$
- Existe un único $\vec{0}$ tal que $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- Para cada $\vec{x}$ hay un único $-\vec{x}$ tal que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
- $(\alpha \cdot \beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $1\vec{x} = \vec{x}$

F3

(**Lección** 6) T-4 **Espacios Vectoriales: resumen**

- Un espacio vectorial es un conjunto de *objetos* matemáticos
  (pueden ser números, listas de números, matrices, funciones, etc. . .)
- y dos operaciones:
  - *suma de vectores*
  - *producto de un escalar por un vector.*

  que deben verificar las ocho propiedades indicadas.
- Los elementos de un espacio vectorial se denominan vectores.

Para nosotros los escalares serán siempre los números reales ($\mathbb{R}$).

F4

(**Lección** 6) T-5 **Ejemplos:** $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$: conjunto de pares de números reales

$$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}\pi\\e\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1^{\underline{a}}\text{ comp.}\\2^{\underline{a}}\text{ comp}\end{pmatrix}$$

Es el plano xy (Todos los vectores bi-dimensionales) dibujo

F5

(**Lección** 6) T-6 **Más ejemplos**

$\mathbb{R}^3$: todas las ternas de números reales

$$\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^1$: listas con un solo número real: $(0,)$ $(\pi,)$ $(a,)$ $(7,)$
$\mathbb{R}^n$: n-tuplas de números reales

F6

(**Lección** 6) T-7 **Subespacios vectoriales**

Un subespacio $\mathcal{W}$ del espacio vectorial $\mathcal{V}$
es un subconjunto no vacío de $\mathcal{V}$ (con las operaciones de $\mathcal{V}$) tal

que para cualesquiera $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$, y cualesquiera escalares c y d:

- $(\vec{v}+\vec{w})$ está en $\mathcal{W}$
- $(c\cdot\vec{v})$ también está $\mathcal{W}$

Cualquier combinación lineal $(c\cdot\vec{v}+d\cdot\vec{w})$ está en $\mathcal{W}$

$\mathcal{W}\subset\mathcal{V}$ es un subespacio si es cerrado para ambas operaciones.
Un subespacio de $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial contenido dentro de $\mathcal{V}$.

F7

(**Lección** 6) T-8 **Ejemplos**

¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son subespacios?

- Primer cuadrante del plano
- Recta en el plano que contiene el cero
- Recta en el plano que no pasa por el origen
- $\{\mathbf{0}\}$: conjunto con únicamente por el vector nulo $\mathbf{0}$

Todo subespacio debe contener el vector "cero"

F8

(**Lección** 6) $\boxed{\text{T-9}}$ **Listado de subespacios de $\mathbb{R}^2$**

1. Todo (el plano) $\mathbb{R}^2$
2.
3.

¿y para $\mathbb{R}^3$? gráfico 3D

F9

(**Lección** 6) $\boxed{\text{T-10}}$ **Unión e Intersección de subespacios**

Sean dos subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$

- $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$: todos los vectores que están en $\mathcal{S}$, en $\mathcal{T}$, o en ambos

  ¿Es un subespacio?

- $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$: los vectores que están simultáneamente en $\mathcal{S}$, y en $\mathcal{T}$

  ¿Es un subespacio? (demo?)

F10

Fin de la lección

Problemas de la Lección 6

(L-6) Problema 1.

(a) Encuentre un subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ ($W \subseteq \mathbb{R}^2$) cerrado para la suma, (si $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$ entonces $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W$), pero no para el producto por un escalar ($c\boldsymbol{v}$ no necesariamente pertenece a W).

(b) Encuentre un subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ ($W \subseteq \mathbb{R}^2$) cerrado para el producto (si $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$, entonces $c\boldsymbol{v} \in W$), pero no para la suma ($\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ no necesariamente pertenece a W).

(Strang, 2007, ejercicio 1 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-6) Problema 2. Considere el plano $\mathbb{R}^2$ como un espacio vectorial. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son también subespacios vectoriales y cuales no?

(a) $\{(a,\ a^2,) \mid a \in \mathbb{R}\}$
(b) $\{(b,\ 0,) \mid b \in \mathbb{R}\}$
(c) $\{(0,\ c,) \mid c \in \mathbb{R}\}$
(d) $\{(m,\ n,) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de números enteros.
(e) $\{(d,\ e,) \mid d, e \in \mathbb{R},\ d \cdot e = 0\}$
(f) $\{(f,\ f,) \mid f \in \mathbb{R}\}$

(L-6) Problema 3. ¿Por qué $\mathbb{R}^2$ no es un sub-espacio de $\mathbb{R}^3$?
(Strang, 2007, ejercicio 31 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-6) Problema 4. Sea P el plano en $\mathbb{R}^3$ formado por el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación

$$x - y - z = 3.$$

Encuentre dos vectores en P y demuestre que su suma no está en P.

(L-6) Problema 5. Demuestre que para $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, el conjunto de soluciones $\{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ **no es** un subespacio.

(L-6) Problema 6. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de matrices de orden 2. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix};$$

(a) Diga un subespacio que contenga $\mathbf{A}$ pero no $\mathbf{B}$.
(b) Diga un subespacio que contenga $\mathbf{B}$ pero no $\mathbf{A}$.
(c) ¿Hay algún subespacio que contenga a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ pero no contenga a la matriz identidad $\underset{n\times n}{\mathbf{I}}$?

(L-6) PROBLEMA 7. Considere el conjunto de matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$ como un espacio vectorial. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios?

(a) El conjunto de matrices simétricas, $\mathcal{S} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid {}_{j|}\mathbf{A} = \mathbf{A}_{|j}\}$
(b) El conjunto de matrices NO simétricas, $\mathcal{NS} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathbf{A}^{\intercal} \neq \mathbf{A}\}$
(c) El conjunto de matrices *anti-simétricas* $\mathcal{AS} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathbf{A}^{\intercal} = -\mathbf{A}\}$

(L-6) PROBLEMA 8.

(a) La intersección de dos planos que pasan por $(0,0,0,)$ probablemente es una ____________, aunque puede ser un ____________.
(b) La intersección de un plano que pasa por $(0,0,0,)$ con una recta que pasa por $(0,0,0,)$ probablemente es ____________, aunque puede ser ____________.
(c) Si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son subespacios de $\mathbb{R}^5$, su intersección $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ (vectores en ambos subespacios) es un subespacio de $\mathbb{R}^5$. Compruebe los requerimientos sobre $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ y $c\boldsymbol{x}$.

(Strang, 2007, ejercicio 18 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-6) PROBLEMA 9. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son realmente subespacios?

(a) el plano de vectores $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3,)$ cuya primera componente es $b_1 = 0$.
(b) el plano de vectores $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3,)$ cuya primera componente es $b_1 = 1$.
(c) Los vectores $\boldsymbol{b}$ con $b_2 b_3 = 0$ (esta es la unión de dos subespacios: el plano de vectores con segundas componentes nulas $b_2 = 0$ y el plano de vectores con terceras componentes nulas $b_3 = 0$).
(d) Únicamente el vector $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.
(e) Todas las combinaciones de dos vectores dados $(1,\ 1,\ 0,)$ y $(2,\ 0,\ 1,)$.
(f) El plano de vectores $(b_1,\ b_2,\ b_3,)$ que satisface $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$.

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 2.1.)

Uno más... un poco más difícil

(L-6) PROBLEMA 10. Para que un conjunto tenga estructura de espacio vectorial, se requiere que la suma y la multiplicación por un escalar cumplan las ocho siguientes condiciones; donde $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ son vectores, y a y b escalares

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$.
2. $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$.
3. Hay un único vector $\mathbf{0}$ ("vector cero") tal que $\boldsymbol{x}+\mathbf{0} = \boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x}$.
4. Para cada $\boldsymbol{x}$, hay un único vector $-\boldsymbol{x}$ ("el opuesto") tal que $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.
5. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.
6. $(a\cdot b)\boldsymbol{x} = a(b\boldsymbol{x})$.
7. $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$.
8. $(a+b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$.

(a) Suponga que la suma en $\mathbb{R}^2$ añade un 1 de más a cada componente, de modo que $(3,1,)+(5,0,) = (9,2,)$ en lugar de $(8,1,)$. Si la multiplicación por un escalar permanece sin cambio, ¿qué reglas se rompen?
(b) Demuestre que el conjunto de todos los números reales positivos con la siguiente nueva definición de suma y producto por un escalar es espacio vectorial:

$$\bullet\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = xy \qquad\qquad \bullet\ \boldsymbol{x} = x^c$$

¿Cuál es el vector $\mathbf{0}$ en este caso?:

(c) Suponga que $(x_1,\ x_2,)+(y_1,\ y_2,)$ se define cómo $\Big((x_1+y_2),\ (x_2+y_1),\Big)$; con el producto usual $c\boldsymbol{x} = (cx_1,\ cx_2,)$. ¿Cuáles de las ocho reglas no se cumplen?

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 2.1.)

Fin de los Problemas de la Lección 6

LECCIÓN 7: Resolviendo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 0$

Lección 7

(**Lección** 7) T-1 Esquema de la Lección 7

Esquema de la *Lección 7*

- Espacio Nulo de $\mathbf{A}$: resolviendo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

Cálculo del Espacio Nulo ($\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$)
mediante eliminación **por columnas**

- Forma (pre)escalonada por columnas
- Variables pivote (*o endógenas*) y variables libres (*o exógenas*)
- Soluciones especiales

F11

(**Lección** 7) T-2 Subespacios asociados a matrices: espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathcal{N}(\mathbf{A}) \text{ es el conjunto de soluciones } \boldsymbol{x} \text{ del sistema } \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.}$

$\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es *subconjunto* de ¿$\mathbb{R}^?$?
Diga algunas soluciones. Dígalas todas

¿Qué aspecto (dimensión) tiene $\mathcal{N}(\mathbf{A})$? (dibujo)

F12

(**Lección** 7) T-3 ¿Es el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ un subespacio?

Debemos comprobar que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$
Si $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ y si $\mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$, entonces

El conjunto de soluciones $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es subespacio

F13

(**Lección** 7) T-**4** **Conjunto de soluciones del sistema no homogéneo**

Cambiemos el lado derecho (sistema NO homogéneo)

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el conjunto de soluciones?

¿Forman las soluciones un subespacio?
¿Pertenece $\mathbf{0}$ al conjunto de soluciones?

F14

(**Lección** 7) T-**5** **Cálculo del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

- ¿Hay columnas que sean combinación lineal del resto?
- La eliminación nos lo dirá. . .

F15

(**Lección** 7) T-**6** **¿Qué columnas son combinación lineal del resto?**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \qquad = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \hline \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

$$\text{Entonces} \qquad \mathbf{A} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow$$

$$\text{y} \qquad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow$$

F16

(**Lección** 7) $\boxed{\text{T-7}}$ **Cálculo del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$: eliminación y "soluciones especiales"**

$$\boxed{\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\right)_{|j} = \left(\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}\right)_{|j}}$$

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ \hline 1 & -2 & -2 & -2 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ 2 & \mathbf{0} & 2 & \mathbf{0} \\ 3 & \mathbf{0} & 2 & \mathbf{0} \\ \hline 1 & -2 & -2 & 2 \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & -2 \\ & 0 & & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{E}}\right]$$

Si $\mathbf{A}\left(\mathbf{E}_{|j}\right) = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{E}_{|j}$ es solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

El número de pivotes de $\mathbf{K}$ es el *rango* de una matriz

F17

(**Lección** 7) $\boxed{\text{T-8}}$ **Cálculo del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$: solución general**

Solución general: $\mathcal{N}(\mathbf{A})$
¿Cuál es el conjunto de TODAS las soluciones?

- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{ \qquad \right\}$
- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \qquad \right\}$

¿Cuántas soluciones especiales?
¿Cuántas columnas nulas tengo?

F18

(**Lección** 7) $\boxed{\text{T-9}}$ **¿Por qué no hay más soluciones?**

Sea $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{K}$ ($\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}$ rango completo)

¿Es $\boldsymbol{x}$ combinación de las col. de $\mathbf{E}$? ($\boldsymbol{x} = \mathbf{E}\boldsymbol{y}$)

Tomando $\boldsymbol{y} = \mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{x}$, *tenemos que* $\boldsymbol{x} = \mathbf{E}\boldsymbol{y}$

¿Necesitamos todas las columnas de $\mathbf{E}$ *para generar* $\boldsymbol{x}$*?*

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] \to \left[\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{E}}\right] = \left[\begin{array}{ccccc} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{E}_{|1} & \mathbf{E}_{|2} & \mathbf{E}_{|3} & \mathbf{E}_{|4} & \mathbf{E}_{|5} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\mathbf{E}\boldsymbol{y} = \mathbf{K}\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \Rightarrow (y_j = ?\ \text{para columnas pivote})$$

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\boldsymbol{x}$ *es combinación de las* soluciones especiales

F19

(**Lección** 7) $\boxed{\text{T-10}}$ **Calculo de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$: Algoritmo completo para resolver $\mathbf{A}x = 0$**

Algoritmo para resolver $\mathbf{A}x = 0$

1. Encuentre una forma pre-escalonada: $\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] \xrightarrow{\tau_1\cdots\tau_k} \left[\begin{array}{c}\mathbf{K}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]$

2. Si hay *soluciones especiales:*

   - Solución completa

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\text{combinaciones lineales de las soluciones especiales }\}$$

3. Si no hay *soluciones especiales* (si $\mathbf{K}$ no tiene columnas nulas)

   - Solución completa:

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$$

F20

(**Lección** 7) $\boxed{\text{T-11}}$ **Otro ejemplo: $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\intercal})$**

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}^{\intercal}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}1&2&3\\2&4&6\\2&6&8\\2&8&10\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\ {[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}} \qquad = \left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]$$

¿Cuántos pivotes?
¿Cuántas columnas libres? ¿Cuántas soluciones especiales?
¿conjunto de soluciones a $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

F21

Fin de la lección

Problemas de la Lección 7

(L-7) Problema 1. Calcule una forma pre-escalonada para obtener los rangos de las siguientes matrices. Describa el espacio nulo con ecuaciones paramétricas, e indique su forma geométrica..

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&2&0&5\\2&3&1&4\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix}1&2&1\\-1&3&4\\2&-1&-3\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{G} = \begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&1\\-2&-1&4\end{bmatrix}$.

(d) $\mathbf{H} = \begin{bmatrix}1&3\\2&1\\-1&-3\end{bmatrix}$.

(L-7) Problema 2. Describa el espacio nulo de las siguientes matrices con ecuaciones paramétricas, e indique su forma geométrica.

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathsf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathsf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$.

(L-7) PROBLEMA 3. Reduzca $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a una forma pre-escalonada para encontrar sus rangos. Encuentre las soluciones especiales de $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Describa todas las soluciones.
(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-7) PROBLEMA 4. Encuentre una forma pre-escalonada y el rango de las siguientes matrices (encuentre además la solución de los sistemas homogéneos $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ en cada caso):

(a) La matriz de 3 por 4 con todos sus componentes iguales a uno.
(b) La matriz de 4 por 4 con $a_{ij} = (-1)^{ij}$.
(c) La matriz de 3 por 4 con $a_{ij} = (-1)^{j}$.

(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-7) PROBLEMA 5. La matriz A tiene dos soluciones especiales:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Describa todas las posibilidades para el número de columnas de A.
(b) Describa todas las posibilidades para el número de filas de A.
(c) Describa todas las posibilidades para el rango de A.

Explique sus respuestas.
(*MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall, 2008*)

(L-7) PROBLEMA 6. Suponga que A tiene como forma escalonada reducida por columnas R

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \clubsuit \\ 2 & a & \clubsuit \\ 1 & 1 & \clubsuit \\ b & 8 & \clubsuit \end{bmatrix}, \quad \mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿Qué puede decir sobre la tercera columna de A?
(b) ¿Qué números son a y b?
(c) Describa el espacio nulo de A si: $\qquad \mathsf{A}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathsf{R}.$

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, March 1, 2004

(L-7) PROBLEMA 7. Encuentre la forma escalonada reducida por columnas de las siguientes matrices

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(L-7) PROBLEMA 8. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Sabiendo que $\mathbf{A}$ es invertible, y sin realizar ningún cálculo ¿puede decir cuál es su forma *escalonada reducida*?
(b) Calcule la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

(L-7) PROBLEMA 9. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Sabiendo que $\mathbf{A}$ es invertible, y sin realizar ningún cálculo ¿puede decir cuál es su forma *escalonada reducida*?
(b) Calcule la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

Fin de los Problemas de la Lección 7

LECCIÓN 8: Resolviendo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Lección 8

(**Lección** 8) T-1 Esquema de la Lección 8

Esquema de la *Lección 8*

- El espacio columna de $\mathbf{A}$: resolviendo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- Estudiaremos solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, ...*si existe.*
  - ¿es $\boldsymbol{x}$ único?
  - ¿o hay toda una familia de soluciones?

$$\left\{ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{A}(\boldsymbol{x}_p) = \boldsymbol{b} \\ \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

F22

(**Lección** 8) T-2 Subespacios asociados a matrices: espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Sus columnas son vectores de

¿Qué debemos añadir al conjunto de columnas para generar un subespacio?

Llamamos a este conjunto *espacio columna de* $\mathbf{A}$*:* $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

Así que $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ es un subespacio de

F23

(**Lección** 8) T-3 Subespacios asociados a matrices: espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{C}(\mathbf{A})$ es un subespacio de

¿Qué hay en $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?

¿Está todo el espacio $\mathbb{R}^3$ incluido en $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?

Para responder volvamos a los sistemas de ecuaciones...

F24

(**Lección** 8) T-4 Conexión entre $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{A}x = b$

¿Tiene $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ solución para cualquier $\boldsymbol{b}$? *(la cuestión de hoy)*

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿Para qué vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema es resoluble?

¿Se puede encontrar una solución para $\boldsymbol{b}_1 = (1, \; 2, \; 3,)$? ¿y para $\boldsymbol{b}_2 = (2, \; 6, \; 8,)$? ¿y para $\boldsymbol{b}_3 = (0, \; 0, \; 0,)$? ¿y para $\boldsymbol{b}_4 = (3, \; 6, \; 9,)$? ¿y para $\boldsymbol{b}_5 = (1, \; 0, \; 0,)$?

F25

(**Lección** 8) T-5 Conexión entre $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{A}x = b$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿podemos desechar alguna columna manteniendo el mismo $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?

y la eliminación mostrará qué columnas son combinación lineal de las que están a su izquierda.

Pero ¿cómo afecta la eliminación a los espacios $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?

F26

(**Lección** 8) T-6 En el próximo ejemplo usaremos la forma escalonada reducida

Eliminación Gauss-Jordan: *pivotes iguales a 1, con ceros a la izda.*

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}] \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(\frac{1}{2})\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{R}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)_{|j} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)_{|j} \\ \\ \left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1}}\right)_{|j} = \mathbf{A}_{|j} \end{array}} \implies \mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right).$$

Sin embargo, en general $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \neq \mathcal{N}\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)$.

F27

(Lección 8) T-7 Ejemplo de sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ \ 2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + \ \ 8x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = b_3 \end{cases}$$

¿Qué descubrirá la eliminación respecto a las columnas?

¿Qué debe cumplir $(b_1, b_2, b_3,)$ para que exista solución?
Si $b_1 = 1$ y $b_2 = 5$, ¿cuánto debe valer b_3 para que exista solución?
¡Veamos!

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{A}\boldsymbol{x} - 1\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\ \mathsf{A} \ \middle|\ -\boldsymbol{b}\ \right] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

F28

(Lección 8) T-8 Sistema de ecuaciones lineales: condición de resolubilidad

$$\left[\ \mathsf{A} \ \middle|\ -\boldsymbol{b}\ \right] (\boldsymbol{x}, \quad 1,) = \boldsymbol{0}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathsf{I} & \boldsymbol{0} \\ \hline & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -b_3 \\ \hline 3 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(b_2)\mathbf{2+5}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(b_1)\mathbf{1+5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b_1+b_2-b_3 \\ \hline 3 & -1 & -2 & 2 & 3b_1-b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 & -b_1+\frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{R} & \boldsymbol{0} \\ \hline \mathsf{E} & \boldsymbol{x}_p \\ \hline & 1 \end{array}\right]$$

Condición para que el sistema sea resoluble :

Si $b_1 = 1$ y $b_2 = 5$ entonces $b_3 =$
Si $\boldsymbol{b} = \big(1, \quad 5, \quad 6,\big)$ ¿cómo es la última columna?
Resuelva para $\boldsymbol{b} = \big(2, \quad 2, \quad 4,\big)$

F29

Comprobemos:

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x}_p = \big(3b_1 - b_2\big)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} + \big(-b_1 + \frac{1}{2}b_2\big)\begin{pmatrix}2\\6\\8\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\8\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_1+b_2\end{pmatrix};$$

que es resoluble si $b_1 + b_2 = b_3$. Si $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix}$, entonces

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x}_p = -2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}2\\6\\8\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\8\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\9\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

¡Pruebe con otro $\boldsymbol{b}$!

```
b1,b2,b3 = sympy.symbols('b1 b2 b3')
A  = Matrix([[1,2,2,2],[2,4,6,8],[3,6,8,10]])
b  = Vector([b1,b2,b3])
SEL(A, b, 1)
SEL(A, b.subs(b1,2).subs(b2,2).subs(b3,4), 1)
```

(**Lección** 8) T-**9** Algoritmo de resolución del sistema de ecuaciones $\mathbf{A}x = b$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix};\qquad \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&2&2&-2\\2&4&6&8&-2\\3&6&8&10&-4\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&0&2&4&2\\3&0&2&4&2\\\hline 1&-2&-2&-2&2\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&0&2&0&0\\3&0&2&0&0\\\hline 1&-2&-2&2&4\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-2&-1\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{existe } \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

F30

Otra forma de expresar el mismo conjunto

$$\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-2&2\\1&0\\0&-2\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

(**Lección** 8) T-**10** Algoritmo de resolución completa (o general) del sistema $\mathbf{A}x = \boldsymbol{b}$

Aplicamos la eliminacion para resolver $\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ -\boldsymbol{b}\ \right]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}&\text{-}\boldsymbol{b}\\\hline \mathbf{I}&\mathbf{0}\\\hline 0\cdots0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{Eliminación}}\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}&\boldsymbol{c}\\\hline \mathbf{E}&\boldsymbol{x}_p\\\hline 0\cdots0&1\end{array}\right],\quad \text{donde}\quad \mathbf{K}=\mathbf{AE}.$$

- Si $\boldsymbol{c}\neq\mathbf{0}$, el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ NO tiene solución.
- Si $\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{b}\in\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y el conjunto de soluciones es

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \text{existe } \boldsymbol{y}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \text{ tal que } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+\boldsymbol{y}\right\}.$$

Si $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\{\mathbf{0}\}$, entonces $\boldsymbol{x}_p$ es la única solución.

F31

Nótese que

$$\begin{cases}\mathbf{A}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{b}\\\mathbf{A}\boldsymbol{y}&=\mathbf{0}\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{b}$$

Así que

$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ es otra solución del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

Nótese también que

$$\begin{cases}\mathbf{A}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{b}\\\mathbf{A}\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{b}\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\mathbf{0}$$

Así que si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son soluciones a $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ entonces

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right).$$

(**Lección** 8) $\boxed{\text{T-11}}$ **Teorema de Rouché-Frobenius**

$$\left[\mathbf{A}|-\boldsymbol{b}\right] \xrightarrow{\tau_1\cdots\tau_k} \left[\mathbf{K}\,|\,\boldsymbol{c}\right] \qquad \text{¿pivote en la última columna?}$$

$\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$**:** $\operatorname{rg}\left(\left[\mathbf{A}|-\boldsymbol{b}\right]\right) > \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) \iff$ sistema SIN solución.

$\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$**:** $\operatorname{rg}\left(\left[\mathbf{A}|-\boldsymbol{b}\right]\right) = \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) \iff$ sistema CON solución.

- Si $\operatorname{rg}\mathbf{A} = n$, (si $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \{\mathbf{0}\}$): solución única
- Si $\operatorname{rg}\mathbf{A} < n$: infinitas soluciones

Si $\operatorname{rg}\mathbf{A} = m$, sistema resoluble para cualquier $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$

$$\boxed{\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) \text{ y } \operatorname{rg}\left(\left[\mathbf{A}|-\boldsymbol{b}\right]\right) \text{ determinan el } \textit{número} \text{ de soluciones}}$$

F32

Fin de la lección

Problemas de la Lección 8

(L-8) PROBLEMA 1. ¿Cuáles de las siguientes reglas proporcionan una definición correcta del rango de $\mathbf{A}$?

(a) El número de columnas diferentes de cero en $\mathbf{R}$ (forma reducida por columnas).
(b) El número de columnas menos el número total de filas
(c) El número de columnas menos el número de columnas libres
(d) El número de unos en $\mathbf{R}$.

(Strang, 2007, ejercicio 12 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 2. Encuentre la solución completa (o *solución general*) a

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Strang, 2003, ejercicio 4 del conjunto de problemas 3.4.)

(L-8) PROBLEMA 3. Encuentre la solución completa (o *solución general*) a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(L-8) PROBLEMA 4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(L-8) Problema 5.
Sean
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentre la forma escalonada por columnas de $\mathbf{A}$
(b) Encuentre las variables libres
(c) Encuentre las soluciones especiales:
(d) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es consistente (tiene solución) cuando la segunda componente de $\boldsymbol{b}$ satisface $b_2 =$ ____.
(e) Encuentre la solución completa del sistema lineal de ecuaciones cuando b_2 satisface la condición.

(Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) Problema 6. Calcule lo mismo que en el problema anterior para encontrar la solución completa de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) Problema 7. Describa el conjunto de vectores $\boldsymbol{b}$ que hacen el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ resoluble (el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$) para el caso
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$
encontrando las restricciones necesarias sobre $\boldsymbol{b}$ tras realizar el procedimiento de eliminación. ¿Cual es el rango de $\mathbf{A}$? Indique un posible lado derecho y la una solución particular al sistema. Describa también el espacio nulo.
(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) Problema 8. Suponga una compañía que pinta coches, trenes y aviones:
Cada coche supone 10 horas de trabajo de preparación, 30 de pintado y 12 de retoques finales.
Cada tren supone 20 horas de trabajo de preparación, 75 de pintado y 36 de retoques finales.
Cada avión supone 40 horas de trabajo de preparación, 135 de pintado y 64 de retoques finales.
Dada la plantilla de la empresa, decide dedicar los siguientes recursos cada semana, 760 horas de trabajo a la preparación, 2595 al pintado, y 1224 a retoques finales. ¿Cuantos aviones, trenes y coches puede pintar la empresa a la semana?.

(L-8) Problema 9. Para el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dado por
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 20 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre el valor de c que hace a la matriz $\mathbf{A}$ no invertible. Use dicho valor en los apartados siguientes.
(b) Encuentre la solución completa al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(c) Describa el sistema de ecuaciones mediante la visión por columnas (columnas de $\mathbf{A}$ y el vector $\boldsymbol{b}$), o bien mediante la visión por filas (las tres ecuaciones del sistema).

(L-8) Problema 10. Construya (si es que es posible) una matriz cuyo espacio columna contenga a $(1, 1, 5)$ y a $(0, 3, 1)$ y cuyo espacio nulo conste de todas las combinaciones de $(1, 1, 2)$.
(Strang, 2007, ejercicio 62 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) Problema 11. ¿Para qué vectores $\boldsymbol{b}$ los siguientes sistemas tienen solución?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 24 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-8) Problema 12. ¿Cuáles deben ser las condiciones sobre b_1 y b_2 (en caso de haber alguna) para que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenga solución?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre dos vectores en el espacio nulo de $\mathbf{A}$; así como la solución completa al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) Problema 13. Sea la matriz

$$\underset{3\times 4}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Sin realizar la multiplicación, diga una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{B}\right)$, y el rango de $\mathbf{B}$. Explique su respuesta.

(b) ¿Cuál es la solución completa a $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(L-8) Problema 14. ¿Para qué miembros derechos $\boldsymbol{b}$ los siguientes sistemas son resolubles? Dicho de otra forma ¿qué condición debe cumplir $\boldsymbol{b}$ para que sea solución del sistema?

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿Cubre el espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ todo el espacio $\mathbb{R}^3$ o sólo un subespacio? Si es un subespacio, ¿es un plano en $\mathbb{R}^3$? ¿es una recta, o es un punto?

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿Cubre el espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ todo $\mathbb{R}^3$ o sólo un subespacio? Si es un subespacio, ¿es un plano en $\mathbb{R}^3$? ¿es una recta, o es un punto? *Basado en (Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 2.1.)*

(L-8) Problema 15. La solución completa a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ es:

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \qquad \text{¿Cómo es } \mathbf{A}\text{?}$$

(L-8) Problema 16. Ana, Belén, y Carlos deciden que no les gusta el color de las paredes del aula donde estudian Matemáticas II. Ana compra un bote de pintura roja, seis de pintura azul, y un bote de pintura verde. La factura es de 44 euros; Belén compra dos botes azules y tres verdes la factura es de 24 euros; y por último Carlos compra un bote rojo y cinco azules por un importe de 33 euros.

(a) ¿Cuanto vale cada bote de pintura?
(b) ¿Qué no tiene sentido en la respuesta a la pregunta anterior?
(c) Cuando Ana, Belén, y Carlos comparan las facturas se dan cuenta de que a uno de ellos le han cobrado 4 euros de menos. ¿A quién?
(d) Tras intentar dar respuesta a la pregunta anterior, se habrá dado cuenta de que es un tanto "trabajoso" dar con el resultado. Intente lo siguiente: genere la matriz ampliada $\left[\mathbf{A}|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c}\right]$ donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones, y $\boldsymbol{a}$ es el vector de precios suponiendo que a Ana deberían haberle cobrado 4 euros más (es decir 48 en lugar de 44), $\boldsymbol{b}$ el vector de precios suponiendo que sólo a Belén deberían haberle cobrado 4 euros más, y $\boldsymbol{c}$ lo mismo para Carlos. Calcule la forma escalonada reducida de la matriz ampliada. A la vista de lo obtenido ¿cuanto vale cada bote de pintura? y ¿a quien han cobrado 4 euros de menos?

(L-8) Problema 17. Suponga que el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es consistente (que tiene solución), donde $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ y $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$. **Demuestre** las siguientes afirmaciones:

(a) $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.
(b) Si $\boldsymbol{x}_0$ es una solución particular del sistema, entonces cualquier vector de la forma $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}$, donde $\boldsymbol{z} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, es también solución del sistema.
(c) Demuestre que si hay dependencia lineal entre las columnas de $\mathbf{A}$, entonces hay más de una solución.

(L-8) PROBLEMA 18. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de eliminación Gaussiano.

$$\begin{cases} 3x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & y & - & z & = & -2 \\ & & 4y & + & z & = & 3 \end{cases}$$

(L-8) PROBLEMA 19. Escriba los siguientes problemas clásicos en forma matricial 2 por 2 para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, y resuélvalos:
(a) X es dos veces más viejo que Y, y la suma de la edad de ambos es igual a 39.
(b) Los puntos $(x, y,) = (2, 5,)$ y $(x, y,) = (3, 7,)$ están en la recta $y = mx + c$. Encuentre los valores de m y de c.
(Strang, 2007, ejercicio 32 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-8) PROBLEMA 20. La parábola $y = a + bx + cx^2$ pasa por los puntos $(x, y,) = (1, 4,)$, $(2, 8,)$ y $(3, 14,)$. Encuentre y resuelva una ecuación matricial para las incógnitas $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a, & b, & c, \end{pmatrix}$.
(Strang, 2007, ejercicio 33 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-8) PROBLEMA 21. Explique por qué el sistema

$$\begin{cases} u & + & v & + & w & = & 2 \\ u & + & 2v & + & 3w & = & 1 \\ & & v & + & 2w & = & 0 \end{cases}$$

es singular y no tiene solución.

¿Por qué valor debe sustituirse el último cero del lado derecho para que el sistema sea resoluble? Indique una de las soluciones al sistema.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 1.2.)

(L-8) PROBLEMA 22. Escoja un coeficiente b que haga singular este sistema. Luego, escoja un valor para g que permita resolver el sistema. Encuentre dos soluciones del caso singular

$$\begin{cases} 2x + by & = 16 \\ 4x + 8y & = g \end{cases}$$

Basado en (Strang, 2003, ejercicio 6 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 23. Resuelva el siguiente sistema para encontrar una combinación de las columnas que sea igual a $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1, & b_2, & b_3, \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} u - v + w &= b_1 \\ v + w &= b_2 \\ w &= b_3. \end{aligned}$$

Verifique que su respuesta es correcta multiplicando la matriz de coeficientes del sistema por su vector solución para obtener $\boldsymbol{b}$.
(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 1.2.)

(L-8) PROBLEMA 24. Encuentre las siguiente matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, o bien, explique por qué no es posible encontrar tales matrices.
(a) La única solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(b) La única solución a $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(Strang, 2007, ejercicio 49 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 25. La solución completa de $\mathbf{A}x = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Encuentre $\mathbf{A}$.

(Strang, 2007, ejercicio 50 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 26. Suponga que la columna quinta de $\mathbf{L}$ no tiene pivote. Entonces x_5 es una variable ___________ . En este caso el vector cero (es) (no es) la única solución al sistema homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Además, si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene una solución, entonces tiene ___________ soluciones.

(Strang, 2007, ejercicio 40 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 27. Considere un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$; donde la matriz $\mathbf{A}$ tiene tres filas y cuatro columnas.

(a) Un sistema como este ¿tiene siempre solución? Si no es así, escriba un ejemplo de sistema que no tenga solución.
(b) ¿Es posible que el sistema tenga una única solución? Si es así, proporcione un ejemplo.
(c) Formule, si es posible, una condición necesaria y suficiente sobre $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{b}$ que garantice que el sistema tiene al menos una solución.
(d) Formule, si es posible, una condición necesaria y suficiente sobre $\mathbf{A}$ que garantice que el sistema tiene al menos una solución para cualquier vector $\boldsymbol{b}$.

(L-8) PROBLEMA 28. Mediante eliminación sobre la matriz $\mathbf{A}$ de orden 4×7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & -7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hemos obtenido la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{donde } \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$? Resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(b) Exprese, si es posible, la solución en función de las variables x_2, x_4 y x_6.
(c) Encuentre, si es posible, un $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tenga solución.
(d) Proporcione un vector $\boldsymbol{b}$ tal que el vector $\boldsymbol{x} = \mathbf{I}_{|1}$ sea solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(e) Si $\boldsymbol{b}$ es la suma de todas las columnas de $\mathbf{A}$. Escriba, si es posible, la solución completa del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Versión modificada de MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2004

(L-8) PROBLEMA 29. $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ es una matriz de rango r. Suponga que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución para algunos vectores $\boldsymbol{b}$, pero infinitas soluciones para otros vectores $\boldsymbol{b}$.

(a) Decida si el espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ contiene sólo el vector cero, y explique porqué.
(b) Decida si el espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es todo $\mathbb{R}^m$ y explique porqué.
(c) Para esta matriz $\mathbf{A}$, encuentre las relaciones entre los números r, m; y entre r y n.
(d) ¿Puede existir un lado derecho $\boldsymbol{b}$ para el que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenga una y sólo una solución? ¿Porqué es posible o porqué no?

(L-8) PROBLEMA 30. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 9 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre un conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y describa con él el espacio nulo de $\mathbf{A}$.
(b) Encuentre la solución completa— es decir todas las soluciones (x_1, x_2, x_3, x_4) — de

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

(c) Cuando una matriz $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ tiene rango $r = m$ ¿para qué vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ puede resolverse? ¿Cuantas soluciones especiales tiene $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (dimensión del espacio nulo)?

(L-8) PROBLEMA 31. Considere el sistema de ecuaciones,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & cz & = & 2 \end{array}\right.$$

¿Para qué valores de c este sistema no tiene solución? ¿sólo una solución? ¿e infinitas soluciones?

(L-8) PROBLEMA 32. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y + 2z & = 1 \\ 2x - 3y + mz & = 3 \\ -x + 2y + 3z & = 2m \end{cases}$$

(a) Demuestre que tiene solución para cualquier valor del parámetro m.
(b) Halle la solución del sistema anterior si $m = -1$.
(c) ¿Corresponde la solución obtenida a las ecuaciones de una recta en $\mathbb{R}^3$?¿Existe algún valor del parámetro m para el que la solución del sistema anterior sea un plano en $\mathbb{R}^3$? ¿Y un punto en $\mathbb{R}^3$?
(d) Halle la solución del sistema anterior cuando $m = 1$.

(L-8) PROBLEMA 33. ¿Cuáles de las siguientes descripciones son correctas? Las soluciones $\boldsymbol{x}$ del sistema

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

constituyen:

(a) Un plano
(b) Una recta (c) Un punto (d) Un subespacio
(e) El espacio nulo de $\mathbf{A}$. (f) El espacio columna de $\mathbf{A}$.

(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-8) PROBLEMA 34. Considere la ecuación $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿Para que vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema tiene solución?
Basado en *MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall 2008*

(L-8) PROBLEMA 35. En un teatro de barrio, tres grupos están haciendo cola. Hay cuatro tipos de tarifas; tercera edad (t), adulto (a), infantil (i) y tarifa con descuento para empleados del teatro y familiares (d).

El primer grupo compra tres entradas de adulto y tres infantiles por 39 euros.
El segundo grupo compra tres entradas de adulto y cuatro de la tercera edad por 44 euros
El tercer grupo compra dos entradas con descuento y dos entradas infantiles por 22 euros

(a) Si intenta descubrir el precio de cada entrada ¿cuantas soluciones puede encontrar? Ninguna, una, o infinitas
(b) Si las entradas de la tercera edad valen lo mismo que las infantiles. ¿Cuánto vale cada tipo de entrada?

(L-8) PROBLEMA 36. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -5 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - 7x_4 = 7 \end{cases}$$

(a) (0.5 pts) ¿Cuál es el rango de la matriz de coeficientes?
(b) (1.5 pts) Resuelva el sistema de ecuaciones

(c) (0.5 pts) Describa la forma geométrica del conjunto de vectores solución a este sistema de ecuaciones (considerando el conjunto como un subconjunto de $\mathbb{R}^4$).

(L-8) PROBLEMA 37. Considere el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) Encuentre los valores del parámetro a de manera que la solución del sistema sea una recta.
(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de a el conjunto de soluciones es un plano?

(L-8) PROBLEMA 38. Encuentre la solución completa del sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 6 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(L-8) PROBLEMA 39. Sea la matriz $\underset{3\times 4}{\mathbf{A}}$ y el vector columna $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre todas la soluciones al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (si es que existen soluciones). Describa el conjunto de soluciones geométricamente. ¿Es dicho conjunto un sub-espacio vectorial?
(b) ¿Quién es el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$? Cambie el 7 de la esquina inferior derecha por un número que conduzca a un espacio columna más pequeño de la nueva matriz (digamos $\mathbf{M}$). Dicho número es ____.
(c) Encuentre un lado derecho $\boldsymbol{b}$ tal que, para la nueva matriz, el sistema $\mathbf{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenga solución; y otro lado derecho $\boldsymbol{b}$ tal que $\mathbf{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tenga solución.

Fin de los Problemas de la Lección 8

LECCIÓN 9: Independencia, base y dimensión

$\boxed{\textit{Lección 9}}$

(**Lección** 9) T-1 Esquema de la Lección 9

Esquema de la *Lección 9*

- *Independencia* lineal
- *Sistema generador* de un espacio
- **BASE** y dimensión

F33

(**Lección** 9) T-2 Sistema de ecuaciones homogéneo: nuestro punto de partida

Suponga $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ con $m < n$ y el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(más incógnitas que ecuaciones ($m < n$), *columnas libres*)
Entonces *hay* soluciones no nulas a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
Hay combinaciones lineales no triviales $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ que son $\mathbf{0}$

F34

(**Lección** 9) T-3 Independencia lineal

Vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ son (*linealmente*) independientes si:
la única combinación lineal que es igual a $\vec{0}$ es

$$(\vec{v}_1)0 + (\vec{v}_2)0 + \cdots + (\vec{v}_n)0$$

es decir

$$\boxed{(\vec{v}_1)p_1 + \cdots + (\vec{v}_n)p_n = \vec{0} \quad \text{solo ocurre cuando todos los } p_i \text{ son cero}}$$

$$\boxed{[\vec{v}_1; \ \ldots \ \vec{v}_n;]\boldsymbol{p} = \vec{0} \quad \text{si y solo si } \boldsymbol{p} = \mathbf{0}}$$

F35

(**Lección** 9) $\boxed{\text{T-4}}$ **independencia lineal: ejemplos en $\mathbb{R}^2$**

¿Puede encontrar números a y b tales que $a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$?

- $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v}$
- $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$
- 2 vectores no alineados
- 3 vectores en $\mathbb{R}^2$

F36

(**Lección** 9) $\boxed{\text{T-5}}$ **independencia lineal y rango de una matriz**

Las columnas de $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ son:

- independientes:

  Si el espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es

- dependientes si:

  $\mathbf{A}\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ para algún $\boldsymbol{c}$ distinto del vector cero.

- independientes si: $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right)$
- dependientes si: $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right)$

F37

(**Lección** 9) T-**6** **Espacio generado por un sistema de vectores: Sistema generador**

Sistema generador
El sistema $\mathsf{Z} = \left[\vec{z}_1; \dots \vec{z}_j;\right]$ genera el subespacio $\mathcal{W}$ si sus combinaciones lineales "llenan" $\mathcal{W}$

- $\mathcal{W}$ consiste en todas las combinaciones lineales de $\vec{z}_1, \dots \vec{z}_j$.
- $\mathcal{W}$ es el menor subespacio que contiene Z.

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}\Big(\left[\vec{z}_1; \dots \vec{z}_j;\right]\Big).$$

Ejemplo

- El espacio columna:
$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \{\boldsymbol{b} \mid \exists \boldsymbol{x} \text{ tal que } \boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}\} = \mathcal{L}\Big(\text{las columnas de } \mathbf{A}\Big).$$
- El espacio nulo:
$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} = \mathcal{L}\Big(\text{soluciones especiales de } \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\Big).$$

F38

(**Lección** 9) T-**7** **Base de un espacio vectorial**

Base de un subespacio $\mathcal{W}$
es un sistema de vectores $\left[\vec{z}_1; \dots \vec{z}_d;\right]$ tales que;

1. generan el subespacio $\mathcal{W}$
2. son linealmente independientes

ejemplos
$\mathbb{R}^3$:

$\left[\boldsymbol{a}_1; \dots \boldsymbol{a}_n;\right]$ es una base de $\mathbb{R}^n$ si es una matriz invertible

Todas las bases de un subespacio $\mathcal{W}$ dado tienen el mismo *número* de vectores

F39

(**Lección** 9) T-**8** **Dimensión**

todas las bases de un subespacio $\mathcal{W}$ tienen el mismo *número* de vectores

La dimensión de un espacio es ese número

Ese número indica como de "grande" es el espacio

F40

(**Lección** 9) T-9 **Ejemplos:** $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

- ¿generan las columnas $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$?
- ¿son las columnas una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$?
- ¿Cuál es el rg $\left(\mathbf{A}\right)$?
- escriba varias bases distintas de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$

$$\boxed{\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = \text{n}^{\text{o}} \text{ pivotes} = \text{dimensión de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)}$$

F41

(**Lección** 9) T-10 **Ejemplos:** $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$

$$\underset{m\times n}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ¿está $\boldsymbol{v}$ en $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?
- ¿Es suficiente $\boldsymbol{v}$ para generar el espacio $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?
- escriba otro vector de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ independiente de $\boldsymbol{v}$.
- ¿generan $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ el espacio $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?
- ¿son $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?
- ¿Cuál es la dimensión del espacio $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?

$$\boxed{n - \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = \text{n}^{\text{o}} \text{ variables libres} = \dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)}$$

F42

Fin de la lección

Problemas de la Lección 9

(L-9) Problema 1. Establezca si los siguientes vectores son o no linealmente independientes, resolviendo $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Decida también, si generan $\mathbb{R}^4$, intentando resolver $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 1, \end{pmatrix}$.
(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-9) Problema 2. Señale la opción correcta. Suponga que $\boldsymbol{v}_1 \dots \boldsymbol{v}_6$ son seis vectores de $\mathbb{R}^4$.
(a) Estos vectores (generan)(no generan)(podrían no generar) $\mathbb{R}^4$.
(b) Estos vectores (son)(no son)(podrían ser) linealmente independientes.
(c) Si esos vectores son las columnas de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (tiene)(no tiene)(podría no tener) solución.
(d) Si esos vectores son las columnas de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (tiene)(no tiene)(podría no tener) una solución única.

(Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-9) PROBLEMA 3. Encuentre una matriz con la siguiente propiedad, o explique por qué no existe tal matriz.

(a) La solución *completa* a $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ es el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Encuentre $\mathbf{B}$, o diga por qué no existe.

(b) La solución *completa* a $\mathbf{C}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ es el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$. Encuentre $\mathbf{C}$, o diga por qué no existe.

(L-9) PROBLEMA 4. Demuestre que $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ son independientes pero que $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ son dependientes:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Resuelva $\mathbf{A}\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ (donde las $\boldsymbol{v}$ s son las columnas de $\mathbf{A}$).
(Strang, 2007, ejercicio 1 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-9) PROBLEMA 5. Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

Si $\mathbf{A}^\intercal = 2\mathbf{A}$, entonces las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes.

(L-9) PROBLEMA 6. ¿cuáles de los siguientes vectores generan el espacio $\mathbb{R}^3$?
(a) $(1, 2, 0,)$ y $(0, -1, 1,)$.
(b) $(1, 1, 0,)$, $(0, 1, -2,)$, y $(1, 3, 1,)$.
(c) $(-1, 2, 3,)$, $(2, 1, -1,)$, y $(4, 7, 3,)$.
(d) $(1, 0, 2,)$, $(0, 1, 0,)$, $(-1, 3, 0,)$, y $(1, -4, 1,)$.

(L-9) PROBLEMA 7. ¿Son linealmente dependientes o independientes los siguientes sistemas de vectores? Si son dependientes, escriba un vector como combinación de los otros.
(a) $(-1, 2, 3,)$, $(2, 1, -1,)$, y $(4, 7, 3,)$ en $\mathbb{R}^3$.
(b) $(1, 2, 0,)$ y $(0, -1, 1,)$ en $\mathbb{R}^3$.
(c) $(1, 2,)$, $(2, 3,)$, y $(8, -2,)$ en $\mathbb{R}^2$.
(d) $t^2 + 2t + 1, \quad t^3 - t^2, \quad t^3 + 1,$ y $t^3 + t + 1$ en P_3.

(L-9) PROBLEMA 8. Suponga que la única solución de $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}\ \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. ¿Cuál es el rango y por qué? Las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente ______________.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-9) PROBLEMA 9. **[Importante]** Si $\mathbf{A}$ es de orden 4×6, demuestre que las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes.

(L-9) PROBLEMA 10. $\mathbf{A}$ is such that $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\1\\4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\1\end{pmatrix};\right]\right)$.

(a) Find a matrix $\mathbf{B}$ such that its column space $\mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. [Thus, any vector $\boldsymbol{y} \in \mathcal{N}\left(A\right)$ satisfies $\mathbf{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y}$ for some $\boldsymbol{u}$.]
(b) Give a different possible answer to (a): another $\mathbf{B}$ with $\mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.
(c) For some vector $\boldsymbol{b}$, you are told that a particular solution to $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ is

$$\boldsymbol{x}_p = \left(1, \quad 2, \quad 3, \quad 4,\right)$$

Now, your classmate Zarkon tells you that a second solution is:

$$\boldsymbol{x}_Z = \left(1, \quad 1, \quad 3, \quad 0,\right)$$

while your other classmate Hastur tells you "No, Zarkon's solution can't be right, but here's a second solution that is correct:"

$$\boldsymbol{x}_H = \left(1, \quad 1, \quad 3, \quad 1,\right)$$

Is Zarkon's solution correct, or Hastur's solution, or are both correct? (Hint: what should be true of $\boldsymbol{x}$ - $\boldsymbol{x}_p$ if $\boldsymbol{x}$ is a valid solution?)

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring, 2009

(L-9) PROBLEMA 11. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre una base del espacio columna (del espacio vectorial generado por las columnas) $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.
(b) Encuentre una base del espacio nulo (del conjunto de soluciones del sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$) $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.
(c) Encuentre las condiciones lineales sobre a, b, c, d que garantizan que el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (a, b, c, d,)$ tiene solución.
(d) Encuentre la solución completa al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 5, 2007

(L-9) PROBLEMA 12. Si a una matriz $\mathbf{A}$ se le "añade" una nueva columna extra $\boldsymbol{b}$, entonces el espacio columna se vuelve más grande, a no ser que ____________. Proporcione un ejemplo en el que espacio columna se haga más grande, y uno en el que no. ¿Por qué $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es resoluble cuando el espacio columna no crece al añadir $\boldsymbol{b}$?

(L-9) PROBLEMA 13. Si el sistema de 9 por 12 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es resoluble para todo $\boldsymbol{b}$, entonces $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) =$ ____ (Strang, 2007, ejercicio 30 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-9) PROBLEMA 14. **[Importante]**[1] Suponga que el sistema $\left[\boldsymbol{v}_1; \;\dots\; \boldsymbol{v}_n\right]$ de vectores de $\mathbb{R}^m$ genera el subespacio $\mathcal{V}$, y suponga que $\boldsymbol{v}_n$ es una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_{n-1}$. Demuestre que el sistema $\left[\boldsymbol{v}_1; \;\dots\; \boldsymbol{v}_{n-1}\right]$ también genera el subespacio $\mathcal{V}$.

(L-9) PROBLEMA 15.

(a) Encuentre la solución completa al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) Encuentre una base del espacio columna de la siguiente matriz por bloques de orden 3 por 9 $\left[\mathbf{A}; \quad 2\mathbf{A}; \quad \mathbf{A}^2;\right]$.

MIT Course 18.06 Final, May 18, 1998

(L-9) PROBLEMA 16. ¿Cuáles de los siguientes vectores generan el espacio de polinomios de, a lo sumo, grado 4; es decir, el conjunto de polinomios $P_3 = \{at^3 + bt^2 + ct + d\}$?

(a) $t + 1$, $t^2 - t$, y t^3.
(b) $t^3 + t$ y $t^2 + 1$.
(c) $t^2 + t + 1$, $t + 1$, 1, y t^3.
(d) $t^3 + t^2$, $t^2 - t$, $2t + 4$, y $t^3 + 2t^2 + t + 4$.

(L-9) PROBLEMA 17. Considere los vectores $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 1,)$ y $\boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 1,)$.

(a) **Demuestre** que $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ son linealmente independientes.
(b) ¿Pertenece $\boldsymbol{v} = (2, 1, 2,)$ al espacio generado por $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$? Explique las razones de su respuesta.
(c) Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a $\boldsymbol{u}_1$ y a $\boldsymbol{u}_2$. Explique su respuesta.

(L-9) PROBLEMA 18.

[1] *pista:* Piense si el espacio $\mathcal{V}$ se puede expresar como el espacio columna de una matriz $\mathbf{V}$ cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$. Una vez expresado de esa manera, recuerde que las operaciones entre columnas no alteran el espacio columna de la matriz. Por último, transforme $\mathbf{V}$ de manera que transforme una de las columnas en un vector de ceros.

(a) ¿Son linealmente independientes los siguientes vectores? Explique su respuesta.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Son los siguientes vectores una base de $\mathbb{R}^4$? Explique su respuesta.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(c) ¿Son los siguientes vectores una base del subespacio descrito por el plano tridimensional $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0$? Explique su respuesta.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Encuentre el valor de q para el que los siguientes vectores no generan $\mathbb{R}^3$.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} q \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(L-9) Problema 19. Suponga que tiene 4 vectores columna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{z}$ en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$.

(a) Dé un ejemplo donde el espacio columna de **A** contenga $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, pero no a $\boldsymbol{z}$. (escriba unos vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{z}$; y una matriz **A** que cumplan lo anterior).

(b) ¿Cuáles son las dimensiones del espacio columna y del espacio nulo de su matriz ejemplo **A** del apartado anterior?

Fin de los Problemas de la Lección 9

LECCIÓN 10: Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz $\mathbf{A}$

Lección 10

(**Lección** 10) T-1 Esquema de la Lección 10

Esquema de la *Lección 10*

- Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz $\mathbf{A}$
  - Espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$
  - Espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$
  - Espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$
  - Espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$

F43

(**Lección** 10) T-2 Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz $\mathbf{A}$

¿Donde están estos subespacios si $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$?

- Espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$
- Espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$
- Espacio fila

  Combinaciones lineales de las filas

  Combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}^{\intercal} = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$
- Espacio nulo por la izquierda de $\mathbf{A}$, $\quad\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$

F44

(**Lección** 10) T-3 Bases de los 4 subespacios: Espacio fila

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1&2&3&1\\ 1&1&2&1\\ 1&2&3&1\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 1&-1&-1&0\\ 1&0&0&0\\ \hline 1&-2&-3&-1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ \hline -1&2&-1&-1\\ 1&-1&-1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{E}}\right]$$

operaciones preservan $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ (pero no el espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$)

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) \neq \mathcal{C}\left(\mathbf{L}^{\intercal}\right) \neq \mathcal{C}\left(\mathbf{R}^{\intercal}\right); \quad (1, \quad 2, \quad 3, \quad 1,) \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) \text{ pero } \notin \mathcal{C}\left(\mathbf{R}^{\intercal}\right)$$

¿Cuál es la dimensión del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$?
¿base del espacio fila de $\mathbf{A}$?
¿base del espacio columna de $\mathbf{A}$?

F45

(**Lección** 10) T-4 Espacio nulo por la izquierda: ¿por qué ese nombre?

$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$

$$(\mathbf{A}^{\intercal})\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{A}^{\intercal} & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir…

$$\boldsymbol{y}\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$(y_1, \quad \dots \quad y_m,) \begin{bmatrix} & \mathbf{A} & \end{bmatrix} = (0, \quad \dots \quad 0,)$$

F46

(**Lección** 10) T-5 Eliminación por columnas no modifica el espacio nulo por la izquierda

Sea $\underset{n\times n}{\mathbf{E}} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ *(invertible)* entonces

- *Si* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$
$$\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}\mathbf{AE} = \mathbf{0E} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^{\intercal}\right);$$
- *Si* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^{\intercal}\right)$
$$\boldsymbol{x}\mathbf{AE} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0E}^{-1} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right).$$

Por tanto,

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^{\intercal}\right) = \mathcal{N}\left(\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^{\intercal}\right).$$

F47

(**Lección** 10) T-6 Encontrando una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ mediante eliminación por columnas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

¿Base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$?

$$\left[(-1, \quad 0, \quad 1,);\right]$$

F48

(**Lección** 10) T-7 Encontrando una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ mediante eliminación por columnas

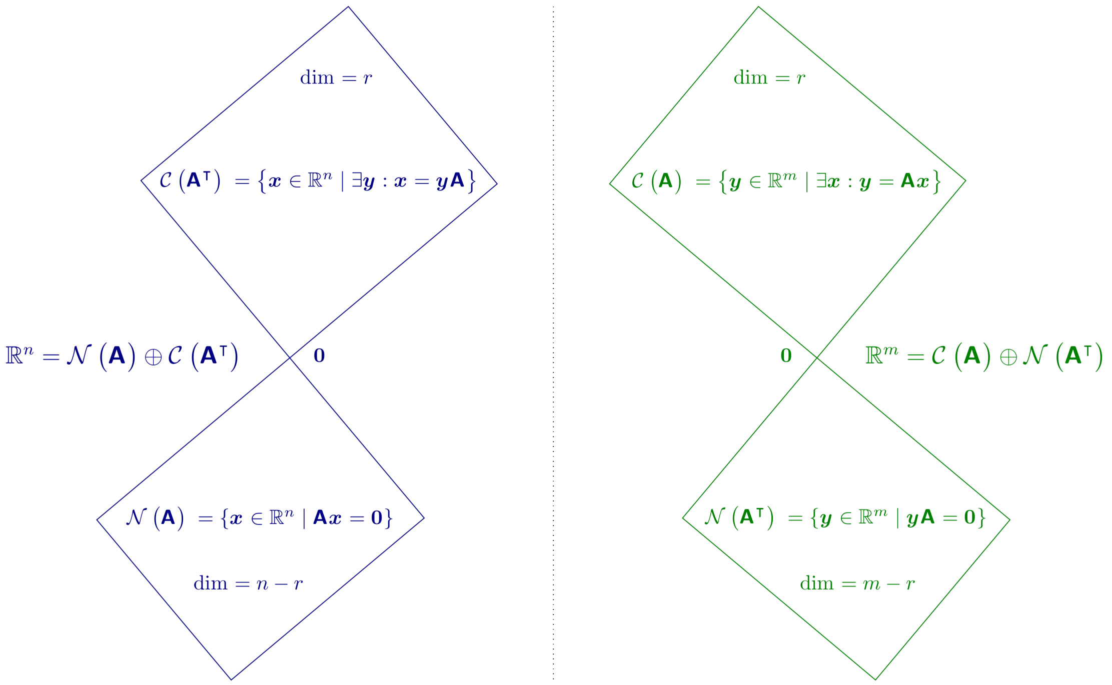
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & a+c \\ d & e & d+f \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+b & b & a+c \\ d+e & e & d+f \end{bmatrix}$$

¿Base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$?

F49

$$\text{Base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = \left[\begin{pmatrix} -a-b \\ -b \\ -a-c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -d-e \\ -e \\ -d-f \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \right]$$

(**Lección** 10) T-8 Los 4 espacios



$\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ ¿dimensiones?

- $\dim\left(\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)\right) =$ $\qquad\qquad\qquad = \dim\left(\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\right)$
- $\dim\left(\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)\right) =$
- $\dim\left(\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\right) =$

F50

Fin de la lección

Problemas de la Lección 10

(L-10) PROBLEMA 1. Encuentre la dimensión, y construya una base para los cuatro subespacios asociados con cada una de las siguientes matrices

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

(b) ¿Cuánto suma $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) + \dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$? ¿Y $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) + \dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?

(c) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) ¿Cuánto suma $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{U}\right) + \dim \mathcal{N}\left(\mathbf{U}^{\intercal}\right)$? ¿Y $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{U}^{\intercal}\right) + \dim \mathcal{N}\left(\mathbf{U}\right)$?

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 2. Describa los cuatro subespacios en el espacio tridimensional asociados con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 3.

(a) Si el rango de una matriz 7 por 9 es 5, ¿Cuáles son las dimensiones de sus cuatro subespacios fundamentales? ¿Cuánto suman las cuatro dimensiones?

(b) Si es rango de una matriz de 3 por 4 es 3, ¿cuáles son el espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$?

(Strang, 2007, ejercicio 20 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 4. Si $\mathbf{A}$ tiene los mismos cuatro subespacios fundamentales que $\mathbf{B}$, ¿Es cierto que $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$?
(Strang, 2007, ejercicio 19 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 5. Encuentre la dimensión y una base para cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{AE}; \quad \text{donde} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 6. Encuentre las dimensiones de los siguientes espacios vectoriales:

(a) El espacio de todos los vectores en $\mathbb{R}^4$ tales que la suma de sus componentes es cero.

(b) El espacio nulo de la matriz identidad de 4 por 4.

(c) El espacio de todas las matrices de 4 por 4

(Strang, 2007, ejercicio 32 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-10) PROBLEMA 7. Sin multiplicar las matrices, encuentre bases de los espacios fila y columna de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

¿Cómo sabe a partir de esta factorización que $\mathbf{A}$ no es invertible?
(Strang, 2007, ejercicio 36 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son sub-espacios vectoriales? Para aquellos casos que no lo son, muestre un ejemplo que viole alguna de las propiedades.

(a) Dada una matriz $\mathbf{A}$ de orden 3×5 con rango completo por filas, el conjunto de soluciones del sistema

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) El conjunto de todos los vectores $\boldsymbol{x}$ tales que $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \mathbf{0}$ y $\langle \vec{x} | \vec{z} \rangle = \mathbf{0}$ para los vectores particulares $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$.

(c) Todas las matrices de orden 3×5 cuyo espacio columna contiene al vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(d) Todas las matrices de orden 5×3 con $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en su espacio nulo.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring, 2009

(L-10) PROBLEMA 9. ¿Cuál es el espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y el espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

MIT Course 18.06 Final. May 18, 1998

(L-10) PROBLEMA 10. Si $\underset{5\times 4}{\mathbf{A}}$ es una matriz con sus cuatro columnas linealmente independientes, escriba explícitamente:

(a) El espacio nulo de $\mathbf{A}$.
(b) La dimensión del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$.
(c) Una solución particular $\boldsymbol{x}_p$ del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}_{|2}$.
(d) La solución general (completa) de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}_{|2}$.
(e) La forma escalonada reducida $\mathbf{R}$ de la matriz $\mathbf{A}$.

(L-10) PROBLEMA 11. Verdadero o falso

(a) Si una matriz es cuadrada ($m = n$), entonces el espacio columna es igual al espacio fila.
(b) La matriz $\mathbf{A}$ y la matriz $(-\mathbf{A})$ comparten los mismos cuatro sub-espacios fundamentales.
(c) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ comparten los mismos cuatro sub-espacios fundamentales, entonces $\mathbf{A}$ es un múltiplo de $\mathbf{B}$.
(d) Indique si la siguiente aseveración es verdadera o falsa. Si es verdadera explique el motivo, si es falsa encuentre un contraejemplo: *"Un sistema con n ecuaciones y n incógnitas es resoluble cuando las columnas de la matriz de coeficientes son independientes."*

(L-10) PROBLEMA 12. Se conoce la siguiente información sobre $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}; \qquad \text{y que} \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\9\end{pmatrix}.$$

De hecho, $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es siempre algún múltiplo del vector $\left(-2, \quad 1,\right)$ sea cual sea el vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$.

(a) ¿Cuál es el orden y el rango de $\mathbf{A}$?
(b) ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?
(c) ¿Cuál es la dimensión del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$?
(d) ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$?
(e) Encuentre una solución $\boldsymbol{x}$ no nula al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

(L-10) PROBLEMA 13. Sea la matriz $\mathbf{A}$ con su forma escalonada reducida por columnas $\mathbf{R}$ calculada mediante eliminación gaussiana sin efectuar permutaciones:

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{rrrrr}1&-1&5&1&0\\2&1&4&2&1\\3&0&9&3&1\\-1&-1&-1&-1&2\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrrrr}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\\hline 3/8&2/8&-3&-1&-1/8\\-5/8&2/8&2&0&-1/8\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\-1/8&2/8&0&0&3/8\end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{E}}\right]$$

(a) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$? ¿y las dimensiones del espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ y del espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?
(b) Encuentre una base del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$.
(c) Encuentre una base del espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.
(d) Encuentre una base del espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.
(e) Exprese $\mathbf{A}_{|3}$ como una combinación lineal de $\mathbf{A}_{|1}$, $\mathbf{A}_{|2}$, $\mathbf{A}_{|4}$ y $\mathbf{A}_{|5}$.

(L-10) PROBLEMA 14. Construya (si es que es posible) una matriz cuyo espacio nulo esté generado por todas las combinaciones de $(2, 2, 1, 0,)$ y $(3, 1, 0, 1,)$.
(Strang, 2007, ejercicio 60 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-10) PROBLEMA 15. Construya (si es que es posible) una matriz cuyo espacio nulo sea todas las combinaciones de $(4, 3, 2, 1)^\intercal$
(Strang, 2007, ejercicio 61 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-10) PROBLEMA 16.

(a) Suponga que el producto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es la matriz nula: $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. Entonces el espacio (I)_______________ de la matriz $\mathbf{A}$ contiene el espacio (II)_______________ de la matriz $\mathbf{B}$. También el espacio (III)_______________ de la matriz $\mathbf{B}$ contiene el espacio (IV)_______________ de la matriz $\mathbf{A}$. (incluya los nombres de los cuatro espacios fundamentales en los lugares apropiados)

(I)_______________, (II)_______________, (III)_______________, (IV)_______________

(b) Suponga que la matriz $\mathbf{A}$ es de dimensiones 5 por 7 con rango r, y $\mathbf{B}$ es de dimensiones 7 por 9 de rango s. ¿Cuáles son las dimensiones de los espacios (I) y (II)? Del hecho de que el espacio (I) contiene el espacio (II), ¿qué sabe acerca de $r + s$?

(L-10) PROBLEMA 17. Mediante eliminación gausiana por columnas (y posiblemente algún intercambio de columnas) sobre la matriz $\mathbf{A}$ de orden 4×8

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 2 & -2 & 1 & -5 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2/4 & -2 & -2/4 & -3 & 1 & 0 & -2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/4 & 0 & 2/4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2/4 & 0 & -2/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{E}}\right]$$

(a) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$?
(b) ¿Cuáles son las dimensiones de los cuatro espacios fundamentales de $\mathbf{A}$?
(c) ¿Cuantas soluciones tiene el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$? ¿Depende la respuesta de cómo es $\boldsymbol{b}$? Justifique su respuesta.
(d) ¿Son las filas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes? ¿Por qué?
(e) Escriba una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ (del conjunto de soluciones del sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$).
(f) Escriba una base del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.
(g) Escriba, si es posible, la matriz $\left[\mathbf{A}_{|1};\ \mathbf{A}_{|3};\ \mathbf{A}_{|6};\ \mathbf{A}_{|7};\right]^{-1}$
(h) Escriba, si es posible, la matriz $\left[\mathbf{A}_{|1};\ \mathbf{A}_{|3};\ \mathbf{A}_{|6};\ \mathbf{A}_{|8};\right]^{-1}$

Basado en *MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2004*

(L-10) PROBLEMA 18. Sea la matriz $\mathbf{R}$ de dimensiones 5 por 3 (en su forma escalonada reducida por columnas) con tres pivotes ($r = 3$).

(a) ¿Cual es el espacio nulo de $\mathbf{R}$?
(b) Sea la matriz por bloques $\mathbf{B}$ de 10 por 3; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{R} \\ 2\mathbf{R}\end{bmatrix}$. ¿Cuál es la forma escalonada reducida por columnas de esta matriz? ¿y su rango?
(c) Sea la matriz por bloques $\mathbf{C}$ de 10 por 6; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$. ¿Cuál es la forma escalonada reducida por columnas de esta matriz?
(d) ¿Cual es el rango de $\mathbf{C}$?
(e) ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo de $\mathbf{C}^{\intercal}$; $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{C}^{\intercal}\right)$?

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall 1993

(L-10) PROBLEMA 19. Sea el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$

$$\text{cuya solución completa es } \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, c, d \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

(a) (1^{pts}) ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial generado por las filas de $\mathbf{A}$? Explique su respuesta.
(b) (1^{pts}) ¿Quién es $\mathbf{A}$ (escriba la matriz completa)? Explique su respuesta.

(c) (0.5^{pts}) ¿Para qué vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución?

(L-10) PROBLEMA 20. ¿Falso o verdadero? (proporcione una razón aceptable)

(a) Si las columnas de una matriz son dependientes, también lo son las filas.
(b) El espacio columna de una matriz de 2 por 2 es el mismo que su espacio fila.
(c) El espacio columna de una matriz 2 por 2 tiene la misma dimensión que su espacio fila.
(d) Las columnas de una matriz son una base para el espacio columna.

(Strang, 2007, ejercicio 28 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-10) PROBLEMA 21. Si $\mathbf{A}$ es una matriz y $\mathbf{R}$ es su forma escalonada reducida **por filas**. Conteste verdadero o falso a las siguientes afirmaciones. (Si hay contraejemplos a las afirmaciones, debe elegir "falso" como respuesta).

(a) Si $\boldsymbol{x}$ es una solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ entonces también es solución al sistema $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(b) Si $\boldsymbol{x}$ es una solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces también es solución al sistema $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(c) ¿Y si $\mathbf{R}$ fuera la forma reducida **por columnas** de $\mathbf{A}$?

basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall 2008

Fin de los Problemas de la Lección 10

LECCIÓN OPCIONAL I: Repaso

Lección

(**Lección** 10) T-1 Esquema de la Lección

Esquema de la *Lección*

- Bases de nuevos espacios vectoriales
- Matrices de rango uno
- Variables libres

F51

(**Lección** 10) T-2 Un nuevo espacio vectorial

$\mathbb{R}^{3\times 3}$: ¡Todas las matrices 3×3! $\mathbf{A}+\mathbf{B}$; $c\mathbf{A}$; $\underset{3\times 3}{\mathbf{0}}$

subespacios de $\mathbb{R}^{3\times 3}$

- $\mathcal{U}$: Todas las matrices triangulares superiores
- $\mathcal{S}$: Todas las matrices simétricas
- $\mathcal{U}\cap\mathcal{S}$: Intersección de los dos anteriores:

¿Cuál es la dimensión de estos subespacios?
¿Es $\mathcal{U}\cup\mathcal{S}$ un subespacio?
Sea $\mathcal{U}+\mathcal{S}$ el conjunto de todas las sumas de cualquier vector de $\mathcal{U}$ + cualquiera de $\mathcal{S}$; entonces $\mathcal{U}+\mathcal{S} =$?

F52

(**Lección** 10) T-3 Matrices de rango 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ & & \end{bmatrix}$$

- ¿Una base del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$?:
- ¿Una base del espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$?

¿Dimensión de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, dimensión de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ y $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right)$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

Toda matriz de rango uno tiene una descomposición de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_{|1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}_{1|}\mathbf{A}\end{bmatrix}^{\intercal} = \text{matriz columna por matriz fila}$$

F53

- Otra forma de denotar la matriz columna a la izquierda del producto es $\mathbf{A}_{|(1,)}$
- Otra forma de denotar la matriz fila a la derecha del producto es ${}_{(1,)|}\mathbf{A}$

Nótese que el argumento del selector no es un número, sino un vector de $\mathbb{R}^1$, es decir, una lista con un único número (véase el Apéndice 3.B de la Lección 3 del libro).

Por tanto $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_{|1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}_{1|}\mathbf{A}\end{bmatrix}^{\intercal} = \left(\mathbf{A}_{|(1,)}\right)\left({}_{(1,)|}\mathbf{A}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\end{bmatrix}.$

(**Lección** 10) T-4 Matrices de rango 1

Suponga el subconjunto de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \right\}$$

¿Es $\mathcal{S}$ un subespacio?
¿dimensión y base?
$\mathcal{S}$ es espacio nulo de cierta matriz $\mathbf{A}$ $\quad (\mathbf{A}\boldsymbol{v} = 0)\ldots$ ¿Qué matriz?

F54

(**Lección** 10) T-5 Matrices de rango 1

$$\underset{1\times 4}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \operatorname{rg}(\mathbf{A}) = \qquad\qquad \mathcal{S} = \mathcal{N}(\mathbf{A})$$

- $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) =$
- ¿base de $\mathcal{S} = \mathcal{N}(\mathbf{A})$?

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \right]$$

- $\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) =$
- $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal) =$ ¿base $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$?
- $\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}) =$

F55

Fin de la lección

Problemas de la Lección opcional 1

(L-Opt-1) Problema 1.

(a) ¿Cuál es el menor subespacio de matrices de 3 por 3 que contiene a todas las matrices simétricas y a todas las matrices triangulares inferiores?
(b) ¿Cuál es el mayor subespacio que está contenido los dos subespacios anteriores?

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-Opt-1) Problema 2. Para cada una de las siguientes afirmaciones, diga si sin verdaderas o falsas. Justifique su respuesta

(a) **Verdadero/Falso:** El conjunto de matrices 3 por 3 no invertibles es un sub-espacio.
(b) **Verdadero/Falso:** Si el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, entonces $\mathbf{A}$ no es de rango completo por filas.
(c) **True/False:** There exist $n \times n$ matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ such that $\mathbf{B}$ is not invertible but $\mathbf{AB}$ is invertible.
(d) **True/False:** For any permutation matrix $\mathbf{P}$, we have that $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2004

(L-Opt-1) Problema 3.

(a) Sean los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ en $\mathbb{R}^7$ ¿Cuál es la dimensión (o cuáles son las posibles dimensiones) del espacio generado por estos tres vectores?

(b) Sea una matriz cuadrada $\mathbf{A}$. Si su espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ está compuesto únicamente por el vector nulo $\mathbf{0}$, ¿Cuál es el espacio nulo de su traspuesta (espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$?

(c) Piense en el espacio vectorial de todas las matrices de orden 5 por 5, $\mathbb{R}^{5\times 5}$. Piense en el subconjunto de matrices 5 por 5 que son invertibles ¿es este subconjunto un sub-espacio vectorial? Si lo es, explique el motivo; si no lo es encuentre un contraejemplo.

(d) Indique si la siguiente aseveración es verdadera o falsa. Si es verdadera explique el motivo, si es falsa encuentre un contraejemplo: *"Si $\mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$, entonces necesariamente $\mathbf{B} = \mathbf{0}$"*

(e) Si intercambio dos columnas de la matriz $\mathbf{A}$ ¿qué espacios fundamentales siguen siendo iguales?

(f) Si intercambio dos filas de la matriz $\mathbf{A}$ ¿qué espacios fundamentales siguen siendo iguales?

(g) ¿Por qué el vector $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ no puede estar en el espacio nulo de una matriz $\mathbf{A}$ y simultáneamente ser una fila de dicha matriz?

(L-Opt-1) Problema 4. Empleando la definición de sub-espacio vectorial, verifique si los siguientes subconjuntos son sub-espacios vectoriales del espacio vectorial que los contiene.

(a) $\mathcal{V}$ es el espacio vectorial de todas las matrices 2×2 de números reales, con las operaciones habituales de suma y producto por un escalar; y el conjunto $\mathcal{W}$ son todas las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix}a & b\\0 & b\end{bmatrix}$$

donde a y b son números reales.

(b) $\mathcal{V}$ es el espacio vectorial $C[0,1]$ de todas las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$; y el conjunto $\mathcal{W}$ son todas las funciones $f \in C[0,1]$ tales que $f(0) = 2$.

(L-Opt-1) Problema 5. Encuentre una base (de dimensión infinita) para el espacio de todos los polinomios

$$\mathcal{P} = \left\{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid \text{ para todo } n\right\}.$$

(L-Opt-1) Problema 6. ¿Cuál es la dimensión de los siguientes espacios?

(a) El conjunto de matrices simétricas de orden 2×2, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\intercal$.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} a & b\\ b & d\end{array}\right],$$

(b) El conjunto de matrices simétricas de orden 2×2

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} a & b\\ c & d\end{array}\right],$$

tales que $a + d = 0$.

(c) El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$ de la forma $\left\{\Big(x,\ y,\ (x-3y),\ (2y-x),\Big) \ \mid\ x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

Fin de los Problemas de la Lección opcional 1

References

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.

Soluciones

(L-6) Problema 1(a) Todos los puntos (vectores) del cuadrante positivo del plano $\mathbb{R}^2$, es decir $\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. La suma de dos puntos permanece en el cuadrante positivo, pero el producto de cualquiera de ellos por un número negativo "se sale" fuera del cuadrante positivo. ¿Vale con cualquier cuadrante?

$\square$

(L-6) Problema 1(b) Tomemos la unión de dos rectas que pasen por el origen, por ejemplo $\{(x,y) : x = y\}$ y $\{(x,y) : x = -y\}$. Este conjunto es cerrado bajo el producto por un escalar (si tomamos un punto en una de las rectas y lo multiplicamos por un escalar, el nuevo punto está en la recta). Sin embargo, si sumamos los puntos, cada uno perteneciente a una de las rectas, la suma no pertenece a ninguna de las dos rectas. Por ejemplo de $(1,1)$ y $(1,-1)$, tenemos $(2,0)$, que no pertenece a ninguna de las rectas. ¿Y si tomamos el primer y tercer cuadrantes juntos?

$\square$

(L-6) Problema 2(a) No es subespacio. La suma de vectores $(1,1) + (2,4) = (3,5)$ no pertenece al conjunto; por tanto este subconjunto no es cerrado para la suma.

$\square$

(L-6) Problema 2(b) Es subespacio.

$\square$

(L-6) Problema 2(c) Es subespacio.

$\square$

(L-6) Problema 2(d) No es subespacio. No es cerrado bajo el producto por un escalar: considere $\frac{1}{2} \cdot (1,1)$.

$\square$

(L-6) Problema 2(e) No es subespacio. No es cerrado bajo la suma: considere $(1,0) + (0,1)$.

$\square$

(L-6) Problema 2(f) Es subespacio.

$\square$

(L-6) Problema 3. $\mathbb{R}^2$ contiene sólo los vectores con dos componentes; y $\mathbb{R}^3$ contiene sólo los vectores con tres componentes. Por tanto vectores con dos componentes no pertenecen a $\mathbb{R}^3$.

$\square$

(L-6) Problema 4. Los vectores $(1, 0, -2,)$ y $(0, 1, -4,)$ pertenecen a P, pero su suma, $(1, 1, -6,)$, no está en P, ya que $1 - 1 - (-6) = 6 \neq 3$.

$\square$

(L-6) Problema 5. Supongamos que el conjunto de soluciones a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ constituye un subespacio vectorial. Entonces, para cualquier par de soluciones $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$, tendremos que su suma es solución $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{b}$ pero también $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \mathbf{A}\boldsymbol{x}_1 + \mathbf{A}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}$, por lo que $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}$ que contradice el supuesto de que $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$.

Así concluimos que el conjunto de soluciones a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ NO es un subespacio vectorial (salvo cuando $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$).

$\square$

(L-6) Problema 6(a) El conjunto de múltiplos de $\mathbf{A}$

$$\left\{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \exists c \in \mathbb{R}, \mathbf{M} = c\mathbf{A}\right\}$$

forma un subespacio de matrices 2 por 2 que no contiene a $\mathbf{B}$.

También el conjunto de matrices de la forma:

$$\left\{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$\square$

(L-6) Problema 6(b) El conjunto de múltiplos de $\mathbf{B}$

$$\left\{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \exists c \in \mathbb{R}, \mathbf{M} = c\mathbf{B}\right\}$$

forman un subespacio de matrices 2 por 2 que no contiene a $\mathbf{A}$.

También el conjunto de matrices de la forma:

$$\left\{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| \exists f, g, h \in \mathbb{R}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & f \\ g & h \end{bmatrix}\right\}$$

$\square$

(L-6) Problema 6(c) No. Un subespacio debe ser cerrado para las combinaciones lineales de sus elementos, por tanto si contiene a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, entonces debe contener $\frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{3}\mathbf{B}$, pero dicha combinación es la matriz identidad. Por tanto, un subespacio que contenga a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, necesariamente contiene la matriz identidad $\underset{2\times 2}{\mathbf{I}}$.

$\square$

(L-6) Problema 7(a) Es subespacio, puesto que cualquier combinación lineal de matrices de $\mathcal{S}$ es también una matriz simétrica: ${}_{j|}\Big(\big(a\mathbf{A}+b\mathbf{B}\big)^{\mathsf{T}}\Big) = \big(a\mathbf{A}+b\mathbf{B}\big)_{|j} = a\big(\mathbf{A}_{|j}\big) + b\mathbf{B}_{|j} = a\big({}_{j|}\mathbf{A}\big) + b\,{}_{j|}\mathbf{B} = {}_{j|}\big(a\mathbf{A}+b\mathbf{B}\big)$.

$\square$

(L-6) Problema 7(b) No es subespacio. No es cerrado bajo la suma: es fácil encontrar ejemplos de matrices no simétricas cuya suma es una matriz simétrica. Por ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

De hecho, siempre ocurre que la suma $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ es una matriz simétrica sea cual sea la matriz cuadrada $\mathbf{A}$.

$\square$

(L-6) Problema 7(c) Es subespacio, puesto que cualquier combinación lineal

$$c\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1m} \\ a_{12} & 0 & \dots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & -b_{12} & \dots & -b_{1m} \\ b_{12} & 0 & \dots & -b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -ca_{12}-db_{12} & \dots & -ca_{1m}-db_{1m} \\ ca_{12}+db_{12} & 0 & \dots & -ca_{2m}-db_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{1m}+db_{1m} & ca_{2m}+db_{2m} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

es también una matriz anti-simétrica.

Alternativamente; puesto que

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}_{|j} = \big(-\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\big)_{|j} = {}_{j|}\big(-\mathbf{A}\big)$$

entonces ${}_{j|}\Big(\big(a\mathbf{A}+b\mathbf{B}\big)^{\mathsf{T}}\Big) = \big(a\mathbf{A}+b\mathbf{B}\big)_{|j} = \big(a\mathbf{A}\big)_{|j} + \big(b\mathbf{B}\big)_{|j} = {}_{j|}\big(-a\mathbf{A}\big) + {}_{j|}\big(-b\mathbf{B}\big) = {}_{j|}\Big(-\big(a\mathbf{A}+b\mathbf{B}\big)\Big)$.

$\square$

(L-6) Problema 8(a) Una recta. Un plano.

$\square$

(L-6) Problema 8(b) Un punto. Una recta.

$\square$

(L-6) Problema 8(c) Tenemos que comprobar que $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ y que $c\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}\cap\mathcal{T}$.

Puesto que $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ pertenecen a $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$, ambos pertenecen a $\mathcal{S}$ y ambos pertenecen a $\mathcal{T}$. Así pues,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathcal{S} &\quad \text{pues } \mathcal{S} \text{ es un subespacio y } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{S} \\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathcal{T} &\quad \text{pues } \mathcal{T} \text{ es un subespacio y } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

por tanto la suma pertenece a la intersección (pertenece simultáneamente a ambos subespacios). Además

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{x} \in \mathcal{S} &\quad \text{pues } \mathcal{S} \text{ es un subespacio y } \boldsymbol{x} \in \mathcal{S} \\ c\boldsymbol{x} \in \mathcal{T} &\quad \text{pues } \mathcal{T} \text{ es un subespacio y } \boldsymbol{x} \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

por tanto $c\boldsymbol{x}$ pertenece a la intersección (pertenece simultáneamente a ambos subespacios).

$\square$

(L-6) Problema 9(a) Si, puesto que cualquier combinación lineal de vectores con la primera componente nula, es un vector con la primera componente nula.

$\square$

(L-6) Problema 9(b) No. Sea $\boldsymbol{v}$ uno de esos vectores, el vector $2\boldsymbol{v}$ tiene la primera componente igual a 2; y por lo tanto no pertenece al citado plano. El vector nulo $\mathbf{0}$ tampoco pertenece.

□

(L-6) Problema 9(c) No. Suponga los vectores $(1, 0, 1,)$ y $(1, 1, 0,)$, pertenecen al primer y segundo planos respectivamente; pero la suma está fuera de la unión.

□

(L-6) Problema 9(d) Si, la suma de dos vectores nulos es un vector nulo, y el vector nulo multiplicado por cuaquier número es el vector nulo

□

(L-6) Problema 9(e) Si. Por construcción es espacio vectorial.

□

(L-6) Problema 9(f) Si, puesto que cualquier combinación lineal de vectores con dicha característica, hereda la propiedad. Veámoslo:

Sea

$$\boldsymbol{v} = a\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_1 + cd_1 \\ ab_2 + cd_2 \\ ab_3 + cd_3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$(ab_3 + cd_3) - (ab_2 + cd_2) + 3(ab_1 + cd_1) = a(b_3 - b_2 + 3b_1) + c(d_3 - d_2 + 3d_1) = a \cdot 0 + c \cdot 0 = 0.$$

Otra forma de verlo es que es un plano que pasa por el origen (el punto $(0, 0, 0,)$ cumple la condición).

□

(L-6) Problema 10(a)

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \Big(x_1,\ x_2,\Big) + \Big(y_1,\ y_2,\Big) = \Big((x_1 + y_1 + 1),\ (x_2 + y_2 + 1),\Big) = \Big((y_1 + x_1 + 1),\ (y_2 + x_2 + 1),\Big) = \Big(y_1,\ y_2,\Big) + \Big(x_1,\ x_2,\Big) = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$

2. $$\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \Big(x_1,\ x_2,\Big) + \Big((y_1 + z_1 + 1),\ (y_2 + z_2 + 1),\Big) = \Big((x_1 + y_1 + z_1 + 2),\ (x_2 + y_2 + z_2 + 2),\Big) = \\ = \Big((x_1 + y_1 + 1),\ (x_2 + y_2 + 1),\Big) + \Big(z_1 + z_2\Big) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$$

3. La regla no se rompe, aunque el nuevo vector $\mathbf{0}$ resulta ser: $\mathbf{0} = (-1,\ -1,)$ en lugar del usual $(0,\ 0,)$; ya que
$$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = (x_1,\ x_2) + (-1,\ -1) = \Big((x_1 - 1 + 1),\ (x_2 - 1 + 1),\Big) = (x_1, x_2) = \boldsymbol{x}.$$

4. Tampoco se rompe, aunque si $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2,)$ entonces $-\boldsymbol{x}$ tiene que ser $-\boldsymbol{x} = \Big((-x_1 - 2),\ (x_2 - 2),\Big)$ ya que
$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (x_1,\ x_2,) + \Big((-x_1 - 2),\ (x_2 - 2),\Big) = (-1,\ -1,) = \mathbf{0}.$$
recuérdese que en la regla 3 implica en este caso $\mathbf{0} = (-1,\ -1,)$.

5. $1\boldsymbol{x} = 1(x_1,\ x_2,) = (1x_1,\ 1x_2,) = \boldsymbol{x}$

6. $ab\boldsymbol{x} = ab(x_1,\ x_2,) = (abx_1,\ abx_2,) = a(bx_1,\ bx_2,) = a(b\boldsymbol{x})$.

7. La regla $a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$ **se rompe**... por ejemplo
$$2\Big((1,\ 1,) + (1,\ 1,)\Big) = 2(3,\ 3,) = (6,\ 6,) \neq 2(1,\ 1,) + 2(1,\ 1,) = (2,\ 2,) + (2,\ 2,) = (5,\ 5,).$$

8. La regla $(a + b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$ **también se rompe**... por ejemplo
$$(2 + 2)(1,\ 1,) = 4(1,\ 1,) = (4,\ 4,) \neq 2(1,\ 1,) + 2(1,\ 1,) = (2,\ 2,) + (2,\ 2,) = (5,\ 5,).$$

□

(L-6) Problema 10(b)

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=xy=yx=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$.
2. $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=x(yz)=(xy)z=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$.
3. Si $\boldsymbol{0}=1$; entonces $\quad \boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=x1=x=\boldsymbol{x}$;.
4. Si $-\boldsymbol{x}=1/x$; entonces $\quad \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=x/x=1=\boldsymbol{0}$.
5. $1\boldsymbol{x}=x^1=x=\boldsymbol{x}$.
6. $(ab)\boldsymbol{x}=x^{(ab)}=(x^b)^a=(b\boldsymbol{x})^a=a(b\boldsymbol{x})$.
7. $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(xy)^a=x^a\cdot y^a=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$.
8. $(a+b)\boldsymbol{x}=(x)^{a+b}=x^a\cdot x^b=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$.

$\square$

(L-6) Problema 10(c)

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\Big((x_1+y_2),\ (x_2+y_1),\Big)\neq\Big((y_1+x_2),\ (y_2+x_1),\Big)=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$. No se cumple. Por ejemplo
$(-1,\ 1,)+(2,\ 3,)=\Big((-1+3),\ (1+2),\Big)=(2,\ 3,)\neq(3,\ 2,)=\Big((2+1),\ (3-1),\Big)=(2,\ 3,)+(-1,\ 1,)$
2. $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$. No se cumple. Por ejemplo
$(0,\ 0,)+\Big((-1,\ 1,)+(2,\ 3,)\Big)=(0,\ 0,)+(2,\ 3,)=(3,\ 2,)\neq(4,\ 1,)=(1,\ -1,)+(2,\ 3,)=\Big((0,\ 0,)+(-1,\ 1,)\Big)+(2,\ 3,)$
3. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=(x_1,\ x_2,)+(0,\ 0,)=\Big((x_1+0),\ (x_2+0),\Big)=\boldsymbol{x}$;
4. Si $-\boldsymbol{x}=(-x_2,\ -x_1,)$; entonces $\quad \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(x_1,\ x_2,)+(-x_2,\ -x_1,)=(0,\ 0,)=\boldsymbol{0}$.
5. $1\boldsymbol{x}=1(x_1,\ x_2,)=\boldsymbol{x}$.
6. $(ab)\boldsymbol{x}=(abx_1,\ abx_2,)=a(bx_1,\ bx_2,)=a(b\boldsymbol{x})$.
7. $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\Big((x_1+y_2),\ (x_2+y_1),\Big)=(ax_1,\ ax_2,)+(ay_1,\ ay_2,)=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$.
8. No se cumple: $(a+b)\boldsymbol{x}=\Big((a+b)x_1,\ (a+b)x_2,\Big)=\Big((ax_1+bx_1),\ (ax_2+bx_2),\Big)\neq\Big((ax_1+bx_2),\ (ax_2+bx_1),\Big)=(ax_1,\ ax_2,)+(bx_1,\ bx_2,)=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$.

$\square$

(L-7) Problema 1(a)

$$\left[\begin{array}{cccc}1&2&0&5\\2&3&1&4\\-1&-1&-1&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\2&-1&1&-6\\-1&1&-1&6\\\hline 1&-2&0&-5\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-6)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\-1&1&0&0\\\hline 1&-2&-2&7\\0&1&1&-6\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

Dos pivotes, por lo tanto $\operatorname{rg}\big(\mathbf{A}\big)=2$. El espacio nulo,

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-2&7\\1&-6\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\},$$

es un plano en $\mathbb{R}^4$.

```
A = Matrix([[1,2,0,5],[2,3,1,4],[-1,-1,-1,1]])
Homogenea(A,1)
Math( SubEspacio(A).EcParametricas() )
```

$\square$

(L-7) Problema 1(b)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 5 \\ 2 & -5 & -5 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{E}}\right]$$

Dos pivotes, por lo tanto rg $(\mathbf{F}) = 2$. Es una recta en $\mathbb{R}^3$.

$$\text{El espacio nulo,} \quad \mathcal{N}\left(\mathbf{F}\right) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

```
F = Matrix([[1,2,1],[-1,3,4],[2,-1,-3]])
Homogenea(F,1)
Math( SubEspacio(F).EcParametricas() )
```

$\square$

(L-7) Problema 1(c)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 15 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{E}}\right]$$

Tres pivotes, por lo tanto rg $(\mathbf{G}) = 3$.

$$\text{El espacio nulo,} \quad \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{es un punto en } \mathbb{R}^3.$$

```
G = Matrix([[1,2,1],[0,3,1],[-2,-1,4]])
Homogenea(G,1)
```

$\square$

(L-7) Problema 1(d)

$$\left[\frac{\mathbf{H}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & -5 \\ -1 & 0 \\ \hline 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{E}}\right]$$

Dos pivotes, por lo tanto rg $(\mathbf{H}) = 2$; no hay columnas nulas.

$$\text{El espacio nulo,} \quad \mathcal{N}\left(\mathbf{H}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{es un punto en } \mathbb{R}^2.$$

```
H = Matrix([[1,3],[2,1],[-1,-3]])
Homogenea(H,1)
```

$\square$

(L-7) Problema 2(a)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ \hline 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(4)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\text{Por tanto } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\} \text{ es una recta en } \mathbb{R}^3.$$

□

(L-7) Problema 2(b) Todas las columnas de la matriz $\mathbf{F}$ son columnas pivote, por tanto la única solución a $\mathbf{F}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial, por tanto $\mathcal{N}\left(\mathbf{F}\right) = \{\mathbf{0}\}$. Un punto en $\mathbb{R}^2$.

□

(L-7) Problema 2(c)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ \hline 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\text{Por tanto} \quad \mathcal{N}\left(\mathbf{G}\right) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\} \quad \text{es una recta en } \mathbb{R}^3.$$

□

(L-7) Problema 3.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto el rango es 2. x_1 y x_2 son variables pivote.

Las soluciones especiales son

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, La solución completa es

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

□

(L-7) Problema 4(a)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ \hline 1&-1&-1&-1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{bmatrix}$$

Rango 1. Variable pivote x_1. La solución completa es

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \text{existe } \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}-1&-1&-1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a-b-c\\a\\b\\c\end{pmatrix}\right\}$$

□

(L-7) Problema 4(b)

$$\left[\begin{array}{cccc} -1&1&-1&1\\ 1&1&1&1\\ -1&1&-1&1\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} -1&0&0&0\\ 1&2&0&2\\ -1&0&0&0\\ \hline 1&1&-1&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} -1&0&0&0\\ 1&2&0&0\\ -1&0&0&0\\ \hline 1&1&-1&0\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{K}\\ \hline \mathbf{E}\end{bmatrix}$$

Rango 2. Variables pivote x_1 y x_2. La solución completa es

$$\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \text{existe } \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a\\-b\\a\\b\end{pmatrix}\right\}$$

□

(L-7) Problema 4(c)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} -1&1&-1&1\\ -1&1&-1&1\\ -1&1&-1&1\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} -1&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ \hline 1&1&-1&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{K}\\ \hline \mathbf{E}\end{bmatrix}$$

Rango 1. Variable pivote x_1. La solución completa es

$$\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \text{existe } \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-b+c\\a\\b\\c\end{pmatrix}\right\}$$

□

(L-7) Problema 5(a) Puesto que $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{A}$ tiene 3 columnas.

□

(L-7) Problema 5(b) Cualquier número mayor mayor o igual a uno.

□

(L-7) Problema 5(c) Tres columnas y dos soluciones especiales (2 columnas libres) implican rango 1 (una columna pivote).

□

(L-7) Problema 6(a) Puesto que $\mathbf{R}$ sólo tiene dos pivotes, sabemos que la tercera columna es combinación lineal de las dos primeras (es decir, es una columna "libre").

□

(L-7) Problema 6(b) Basta con mirar los pasos de eliminación para las dos primeras columnas

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&a\\1&1\\b&8\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\tau}\begin{bmatrix}1&0\\2&a-4\\1&-1\\b&8-2b\end{bmatrix}\xrightarrow[a=4]{\substack{\tau\\{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}}\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&-1\\8-b&8-2b\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}]}]{\tau}\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&1\\3&2\end{bmatrix}$$

Y puesto que $8-b=3$, necesariamente $b=5$.

□

(L-7) Problema 6(c) Puesto que sólo hay una columna libre, sabemos que $\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ entonces

$$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}))=1;\qquad \mathcal{N}(\mathbf{A})=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\text{existe } c\in\mathbb{R}\text{tal que } \boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

```
a=Vector([1,-2,1])
SubEspacio(Sistema([a]))
```

□

(L-7) Problema 7(a)

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\\{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&2&3\\0&1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}\\{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

```
A = Matrix([[1,1,1,1],[1,1,1,1],[0,1,2,3],[0,1,2,3]])
R = ElimGJ(A,1)
```

□

(L-7) Problema 7(b) $\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&2\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\1&-2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\-1&-2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(-\frac{1}{2})\mathbf{2}]}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$

```
B = Matrix([[1,2,1],[2,2,2],[1,0,1]])
R = ElimGJ(B,1)
```

□

(L-7) Problema 7(c) $\begin{bmatrix}1&2&1&2&1\\2&1&2&1&2\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}\\{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}\\{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\2&-3&0&-3&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(3)\mathbf{1}]}\\{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}\\{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}}}\begin{bmatrix}3&0&0&0&0\\0&-3&0&0&0\\2&1&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(\frac{1}{3})\mathbf{1}]}\\{[(-\frac{1}{3})\mathbf{2}]}}}$
$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0&0&0\end{bmatrix}$

□

(L-7) Problema 7(d) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}\\{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(-1)\mathbf{2}]}}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

□

(L-7) Problema 8(a) La matriz identidad.

□

(L-7) Problema 8(b)

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline 1&0&0\\-1&1&-1\\0&0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathsf{I}\\ \hline \mathsf{E}\end{array}\right]. \text{ Por tanto } \mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

```
A = Matrix([[1,0,0],[1,1,1],[0,0,1]])
InvMat(A,1)
```

□

(L-7) Problema 9(a) La matriz identidad I.

□

(L-7) Problema 9(b)

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\ \hline 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline 0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathsf{I}\\ \hline \mathsf{A}^{-1}\end{array}\right]$$

□

(L-8) Problema 1(a) Verdadero

□

(L-8) Problema 1(b) Falso

□

(L-8) Problema 1(c) Verdadero

□

(L-8) Problema 1(d) Falso

□

(L-8) Problema 2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&1&2&-1\\2&6&4&8&-3\\0&0&2&4&-1\\ \hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&0&2&4&-1\\0&0&2&4&-1\\ \hline 1&-3&-1&-2&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(2)\mathbf{5}]\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&0&2&0&0\\0&0&2&0&0\\ \hline 1&-3&-1&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-2&1\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&2\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(\frac{1}{2})\mathbf{5}]}}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\2&0&2&0&0\\0&0&2&0&0\\ \hline 1&-3&-1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-2&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-3&0\\1&0\\0&-2\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}$$

```
A = Matrix([[1,3,1,2],[2,6,4,8],[0,0,2,4]])
b = Vector([1,3,1])
SEL(A,b,1)
```

□

(L-8) Problema 3.

```
A = Matrix([ [1,2,-1,-2,1], [1,2,0,0,3], [2,4,1,2,9] ])
b = Vector( [0,-1,-4] )
SEL(A,b,1)
```

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2\\0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\\ -2 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

□

(L-8) Problema 4. Para expresar la solución completa del sistema necesitamos una solución particular a la que sumar cualquier combinación de los vectores del espacio nulo (soluciones del sistema homogéneo).

Para obtener una solución particular podríamos aplicar la eliminación gaussiana pero en este caso una solución inmediata es asignar el valor uno a x_3 y x_4; y cero a las demás; es decir, sumar las columnas 3 y 4 de la matriz de coeficientes. Por tanto una solución particular inmediata es

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}$$

Para calcular el espacio nulo aplicaremos el método de eliminación a la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&0\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccccc} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&-1\\ 0&0&1&1&0\\ \hline 1&0&-1&0&-1\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccccc} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&-1\\ 0&0&1&0&0\\ \hline 1&0&-1&1&-1\\ 0&1&0&-1&0\\ 0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

Así pues, la solución completa al sistema es el conjunto de vectores

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1\\-1\\-1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$$

□

(L-8) Problema 5(a)

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \textbf{-}\boldsymbol{b}\\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0&1&0&3&-b_1\\ 0&2&0&6&-b_2\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0&1&0&0&-b_1\\ 0&2&0&0&-b_2\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&-3&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(b_1)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0&1&0&0&0\\ 0&2&0&0&2b_1-b_2\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&-3&b_1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

Por tanto la forma escalonada reducida por columnas es

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\ 0&2&0&0 \end{bmatrix}.$$

□

(L-8) Problema 5(b) las variables x_1, x_3 y x_4 son libres.

□

(L-8) Problema 5(c)

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_c = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

□

(L-8) Problema 5(d) El sistema es consistente cuando $b_2 = 2b_1$. En tal caso, se anula la última columna de la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathsf{R} & \mathbf{0}\\ \hline \mathsf{E} & \boldsymbol{x}_p\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right].$$

□

(L-8) Problema 5(e) En tal caso ($b_2 = 2b_1$) una solución particular es

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}0\\b_1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Por lo que la solución completa es el conjunto de vectores

$$\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \begin{pmatrix}a\\c\\d\end{pmatrix} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\b_1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b_1-3d\\c\\d\end{pmatrix} \right\}$$

```
b1,b2 = sympy.symbols('b1 b2')
A  = Matrix([[0,1,0,3],[0,2,0,6]])
b  = Vector([b1,b2])
SEL(A, b, 1)
```

□

(L-8) Problema 6.

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathsf{A} & -\boldsymbol{b}\\ \hline \mathsf{I} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c}0&0&-b_1\\1&2&-b_2\\0&0&-b_3\\3&6&-b_4\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\ \hline 0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc|c}0&0&-b_1\\1&0&-b_2\\0&0&-b_3\\3&0&-b_4\\ \hline 1&-2&0\\0&1&0\\ \hline 0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(b_2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc|c}0&0&-b_1\\1&0&0\\0&0&-b_3\\3&0&3b_2-b_4\\ \hline 1&-2&b_2\\0&1&0\\ \hline 0&0&1\end{array}\right]$$

Por tanto la forma escalonada reducida es

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\\3&0\\0&0\end{bmatrix};$$

y la variable x_2 es libre. La solución especial es $\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. El sistema es consistente cuando $b_1 = 0$, $b_3 = 0$ y $b_4 = 3b_2$. En tal caso la eliminación nos da

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathsf{R} & \mathbf{0}\\ \hline \mathsf{E} & \boldsymbol{x}_p\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right],$$

y por tanto una solución particular es $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}b_2\\0\end{pmatrix}$. Así pues, la solución general es el conjunto de vectores

$$\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists a\in\mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}b_2\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

□

(L-8) Problema 7.

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & -\boldsymbol{b}\\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -b_1\\ 0 & 1 & -b_2\\ 2 & 3 & -b_3\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(b_2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 2b_1+3b_2-b_3\\ \hline 1 & 0 & b_1\\ 0 & 1 & b_2\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

por tanto la condición es $b_3 - 2b_1 - 3b_2 = 0$; es decir,

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; b_3 - 2b_1 - 3b_2 = 0\right\} = \left\{\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}-2 & -3 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{b} = \mathbf{0}\right\}.$$

El rango de $\mathbf{A}$ es 2. Un posible vector $\boldsymbol{b}$ con la solución particular asociada es

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}.$$

El espacio nulo contiene únicamente al vector $\mathbf{0} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (no hay columnas libres).

□

(L-8) Problema 8. Debemos resolver el sistema

$$c\begin{pmatrix}10\\30\\12\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}20\\75\\36\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}40\\135\\64\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 20 & 40\\ 30 & 75 & 135\\ 12 & 36 & 64\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c\\t\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}760\\2595\\1224\end{pmatrix} \implies \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}4\\6\\15\end{pmatrix};$$

Es decir, 4 coches, 6 trenes y 15 aviones a la semana.

```
A = Matrix([ [10, 20, 40], [30, 75, 135], [12, 36, 64] ])
b = Vector( [760, 2595, 1224] )
SEL(A,b,1)
```

□

(L-8) Problema 9(a)

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & -\boldsymbol{b}\\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 4 & -6\\ 2 & 1 & 10 & -14\\ 3 & 1 & c & -20\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(6)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & c-12 & -2\\ \hline 1 & 0 & -4 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-4)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & c-14 & 0\\ \hline 1 & 0 & -4 & 6\\ -2 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{L} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{E} & \boldsymbol{x}_p\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right]$$

Vamos a operar con la matriz ampliada $\left[\mathbf{A}|-\boldsymbol{b}\right]$, para que los cálculos nos sirvan para el apartado siguiente. Por tanto, $\mathbf{A}$ tendrá menos de 3 pivotes (y por tanto no será invertible) si $c = 14$.

□

(L-8) Problema 9(b) Cuando $c = 14$, las dos primeras variables x_1 y x_2 son pivote, y la tercera es libre. Puesto que solo hay una columna libre, sólo necesitamos una solución del sistema homogéneo para obtener una base del espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. Así pues

$$\text{Sol.} = \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists a\in\mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

□

(L-8) Problema 9(c) Este sistema (con $c = 14$) tiene un espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ de dimensión uno (infinitas soluciones). Así pues, sus filas representan tres planos en $\mathbb{R}^3$ que se cortan en una sola recta. Visto por columnas, y puesto que sólo dos de ellas son pivote —y la tercera es libre— el sistema tiene infinitas soluciones, ya que hay infinitas combinaciones de las tres columnas que general el vector del lado derecho $\boldsymbol{b}$.

□

(L-8) Problema 10. Pongamos las dos primeras columnas en $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 1 & 3 & a_{23} \\ 5 & 1 & a_{33} \end{bmatrix}$$

La tercera columna la podemos deducir a partir de la solución del sistema homogéneo ya que el enunciado nos dice que si tomamos una vez la primera columnas más otra vez la segunda y le restamos el doble de la tercera, el resultado es un vector de ceros, por tanto la tercera columna debe ser la mitad de lo que sumen las dos primeras (con el signo cambiado):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$\square$

(L-8) Problema 11(a) Para todo $\boldsymbol{b}$ el sistema siempre tiene solución (tres pivotes en $\mathbb{R}^3$).

$\square$

(L-8) Problema 11(b) Tiene solución sólo si la tercera componente de $\boldsymbol{b}$ es nula, es decir si $b_3 = 0$.

$\square$

(L-8) Problema 12.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & -b_1 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & -b_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-2)\mathbf{1+2}] \\ [(-3)\mathbf{1+4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -b_2 \\ \hline 1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-2)\mathbf{4+1}]}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_2 \\ \hline 7 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(b_1)\mathbf{1+5}] \\ [(b_2)\mathbf{2+5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 7 & -2 & 0 & -3 & -3b_2+7b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & b_2-2b_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Puesto que el rango de $\mathbf{A}$ es dos, el sistema siempre tiene solución.

La solución completa es el conjunto de vectores

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, a, b \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3b_2+7b_1 \\ 0 \\ 0 \\ b_2-2b_1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(L-8) Problema 13(a) $\mathbf{B}$ es de orden 3 por 4; por tanto los vectores de $\mathcal{N}\left(\mathbf{B}\right)$ pertenecen a $\mathbb{R}^4$.

Por otra parte, puesto que la segunda matriz del producto (llamemosla $\mathbf{E}$) es de rango completo, sabemos que es producto de matrices elementales y por tanto invertible.

Si llamamos a la matriz del producto del enunciado $\mathbf{L}$, tenemos que

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{L}$$

Por tanto, las columnas nulas de $\mathbf{L}$ son combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{B}$, y las columnas de $\mathbf{E}^{-1}$ nos indican qué combinaciones son. Como $\mathbf{L}$ tiene dos pivotes, el rango de $\mathbf{B}$ es dos.

Para encontrar las soluciones del espacio nulo basta con invertir $\mathbf{E}$ y tomar sus dos últimas columnas (las que transforman las columnas de $\mathbf{B}$ en columnas de ceros. Así pues,

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{E}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}1&1&-0&1\\0&1&1&-1\\0&0&1&-0\\0&0&0&1\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\ \hline 1&-1&1&-2\\0&1&-1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{E}^{-1}\end{array}\right]$$

El espacio nulo es

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{B}\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\exists\, a,b\in\mathbb{R}\text{ tales que }\boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\square$

(L-8) Problema 13(b) A la vista de la primera columna de las matrices que intervienen en el producto, sabemos que la primera columna de $\mathbf{B}$ es precisamente $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Por tanto, una solución particular es

$$\boldsymbol{x}_p=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Y dado que conocemos el espacio nulo de $\mathbf{B}$, la solución completa es

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\exists\, a,b\in\mathbb{R}\text{ tales que }\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

$\square$

(L-8) Problema 14(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&2&\text{-}b_1\\2&8&4&\text{-}b_2\\-1&-4&-2&\text{-}b_3\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau\\{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\text{-}b_1\\2&0&0&\text{-}b_2\\-1&0&0&\text{-}b_3\\ \hline 1&-4&-2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\2&0&0&2b_1-b_2\\-1&0&-0&-b_1-b_3\\ \hline 1&-4&-2&b_1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right]$$

La condición es que $\boldsymbol{b}$ sea combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$, y para ello en este caso debe ocurrir $b_2=2b_1$ y $b_3=-b_1$. Nótese que en este caso todas las columnas son múltiplos de la primera (sólo hay un pivote); por tanto el conjunto de soluciones son los múltiplos del primer vector columna. Por tanto, el espacio columna es una recta en $\mathbb{R}^3$

$\square$

(L-8) Problema 14(b)

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&4&\text{-}b_1\\2&9&\text{-}b_2\\-1&-4&\text{-}b_3\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\ \hline 0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\substack{\tau\\{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&\text{-}b_1\\0&1&\text{-}b_2\\-1&0&\text{-}b_3\\ \hline 9&-4&0\\-2&1&0\\ \hline 0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\{[(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&-b_1-b_3\\ \hline 9&-4&9b_1-4b_2\\-2&1&b_2\\ \hline 0&0&1\end{array}\right]$$

La condición es que $\boldsymbol{b}$ sea combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$, y para ello en este caso debe ocurrir $b_1=-b_3$.

Nótese que en este caso la segunda columna no es un múltiplo de la primera (hay dos pivotes); el conjunto de soluciones son las combinaciones lineales de dos vectores que no apuntan en la misma dirección, por tanto es un plano en $\mathbb{R}^3$.

□

(L-8) Problema 15. Puesto que las soluciones pertenecen a $\mathbb{R}^3$, la matriz $\mathbf{A}$ tiene dimensiones $n \times 3$. Los vectores del espacio nulo tienen una única componente distinta de cero, es decir, c_1 veces la segunda columna de $\mathbf{A}$ es el vector cero, por tanto, la segunda columna de $\mathbf{A}$ es una columna de ceros. Por el mismo motivo, la tercera columna también está compuesta por ceros. Por último, la solución particular resulta ser la primera fila de $\mathbf{A}$.

Resumiendo, supongamos un $\boldsymbol{b}$ genérico

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

□

(L-8) Problema 16(a) El sistema a resolver es

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ a \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 24 \\ 33 \end{pmatrix}, \qquad \text{cuya solución es :} \qquad v = 2;\ a = 9;\ r = -12.$$

```
A = Matrix([ [1,6,1], [0,2,3], [1,5,0] ])
b = Vector( [44,24,33] )
SEL(A,b,1)
```

□

(L-8) Problema 16(b) ¡Los botes de pintura roja tienen un precio negativo! (el tendero te da 12 euros por cada bote que te llevas)

□

(L-8) Problema 16(c) La solución es generar nuevos vectores del lado "derecho" con el importe corregido. Un nuevo lado derecho con un importe corregido para Ana (sigue dando precios negativos), un lado derecho con cuatro euros más para Belén (que arroja resultados positivos para todos los precios). Y otro alterando la factura de Carlos (que también genera precios negativos). ¡Ojo! Se debe modificar un importe, y sólo uno cada vez.

□

(L-8) Problema 16(d) Se pueden resolver los tres sistemas del apartado anterior de una sola vez siguiendo las instrucciones. Partimos de la matriz ampliada (y aprovechamos los pasos dados en el primer apartado)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 1 & -48 & -44 & -44 \\ 0 & 2 & 3 & -24 & -28 & -24 \\ 1 & 5 & 0 & -33 & -33 & -37 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -48 & -44 & -44 \\ 0 & 1 & 0 & -24 & -28 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & -33 & -33 & -37 \\ \hline -15 & 5 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(48)\mathbf{1+4}] \\ [(24)\mathbf{2+4}] \\ [(33)\mathbf{3+4}] \\ [(44)\mathbf{1+5}] \\ [(28)\mathbf{2+5}] \\ [(33)\mathbf{3+5}] \\ [(44)\mathbf{1+6}] \\ [(24)\mathbf{2+6}] \\ [(37)\mathbf{3+6}]}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -15 & 5 & 16 & -72 & 8 & 52 \\ 3 & -1 & -3 & 21 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -6 & 6 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

como se puede ver, sólo al alterar el importe de la factura de Belén (de 24 a 28 euros), se encuentran tres precios positivos

$$r = 8; \quad a = 5; \qquad v = 6$$

Moraleja: con el método de eliminación Gauss-Jordan se pueden resolver varios sistemas de ecuaciones a la vez; siempre y cuando compartan la misma matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

□

(L-8) Problema 17(a) Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución, ello significa que existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que

$$x_1 \mathbf{A}_{|1} + x_2 \mathbf{A}_{|2} + \cdots + x_n \mathbf{A}_{|n} = \boldsymbol{b}$$

pero entonces, $\boldsymbol{b}$ es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$, y por lo tanto $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

□

(L-8) Problema 17(b) Puesto que $\mathbf{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ y que $\mathbf{A}\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$ sumando ambas ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}\boldsymbol{x}_0 + \mathbf{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} + \mathbf{0} \\ &\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{b} \qquad \text{sacando } \mathbf{A} \text{ como factor común.} \end{aligned}$$

Por tanto el vector $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}$ también es solución del sistema.

□

(L-8) Problema 17(c) Dado el resultado del apartado anterior, basta con demostrar que si hay dependencia lineal entre las columnas de $\mathbf{A}$, el sistema homogéneo tiene soluciones distintas de la trivial ($\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$).

Si hay dependencia lineal entre las columnas significa que al menos una de ellas se puede expresar como combinación lineal de las demás. Supongamos sin pérdida de generalidad que es la primera; entonces

$$\mathbf{A}_{|1} = z_2 \mathbf{A}_{|2} + z_3 \mathbf{A}_{|3} + \cdots + z_m \mathbf{A}_{|m}$$

pasando la expresión de la derecha al lado izquierdo de la igualdad tenemos:

$$\mathbf{A}_{|1} - z_2 \mathbf{A}_{|2} - z_3 \mathbf{A}_{|3} - \cdots - z_m \mathbf{A}_{|m} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{|1} & \mathbf{A}_{|2} & \cdots & \mathbf{A}_{|m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -z_2 \\ \vdots \\ -z_m \end{pmatrix} = \mathbf{0};$$

por tanto el vector $\begin{pmatrix} 1 & -z_2 & \cdots & -z_m \end{pmatrix}$ y cualquier múltiplo de este son solución al sistema de ecuaciones homogéneo (pertenecen a $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$). Este resultado unido al anterior demuestran que el sistema tiene más de una solución (de hecho tiene infinitas, ya que hay infinitos vectores en el espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$).

□

(L-8) Problema 18. Fíjese que la primera columna más tres veces la tercera da $\boldsymbol{b}$. Lleguemos a ese resultado aplicando el método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{3}+\mathbf{1}] \\ [(6)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

(L-8) Problema 19(a)

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 39 \end{cases} \qquad \text{por tanto} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de eliminación

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -39 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -39 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(13)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 26 \\ 0 & 1 & 13 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto $x = 26$ e $y = 13$.

□

(L-8) Problema 19(b) Puesto que ambos puntos están en la recta, ambos verifican la ecuación, es decir, sustituyendo x e y:

$$\begin{cases} 5 = 2m + c \\ 7 = 3m + c \end{cases} \qquad \text{por tanto} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aplicando mediante eliminación

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -7 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(5)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, $c = 1$ y $m = 2$.

□

(L-8) Problema 20. El sistema es

$$\begin{aligned} a + b + c &= 4 \\ a + 2b + 4c &= 8 \\ a + 3b + 9c &= 14 \end{aligned}$$

por eliminación gaussiana tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & -14 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 8 & -10 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(4)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right];$$

así $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$. Por tanto, la parábola es $y = 2 + x + x^2$.

□

(L-8) Problema 21. Asuma que $c = 0$, de manera que $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & (0+c), \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \textbf{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0-c \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0-c \\ \hline 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1-c \\ \hline 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{L} & -\boldsymbol{c} \\ \hline \mathbf{E} & \boldsymbol{x} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]$$

no hay un tercer pivote en $\mathbf{L}$ que permita eliminar la tercera componente de $\boldsymbol{c}$. La solución es que $c = -1$, es decir, sustituir el 0 por un -1 en $\boldsymbol{b}$.

Entonces una solución posible es $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; pero hay otras, por ejemplo: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

□

(L-8) Problema 22. Fijémonos en la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ b & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ b & 8-2b \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

Si b fuera 4, entonces $8 - 2b$ sería cero. En tal caso sólo hay un pivote, pues la segunda columna sería el doble de la primera. Así el sistema quedaría como

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ g \end{pmatrix}$$

es decir

$$x\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\g\end{pmatrix}$$

Este sistema nos pide buscar una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$ que sea igual a $\begin{pmatrix}16\\g\end{pmatrix}$.

Pero como la segunda columna es el doble de la primera (están alineadas), el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}$ es una recta. Sólo si el vector del lado derecho está en dicha recta (sólo si el vector del lado derecho es un múltiplo de la primera columna) el sistema tendrá solución. Esto sólo ocurre cuando $g=32$:

$$\begin{bmatrix}2&4\\4&8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\32\end{pmatrix}$$

Dos soluciones inmediatas son

$$\begin{cases}x=8\\y=0\end{cases}\qquad \text{ó}\qquad \begin{cases}x=0\\y=4.\end{cases}$$

Pero podemos encontrar infinidad de soluciones alternativas.

□

(L-8) Problema 23. Aplicando la sustitución hacia atrás (de la última ecuación hacia arriba)

$$\begin{aligned}w=&b_3\\ v=&b_2-w=b_2-b_3\\ u=&b_1+v-w=b_1+(b_2-b_3)-b_3=b_1+b_2-2b_3\end{aligned}$$

Por tanto b_3 veces la tercera columna, más b_2-b_3 veces la segunda, más $b_1+b_2-2b_3$ veces la primera es igual a $\boldsymbol{b}$.

Comprobación:

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}b_1+b_2-2b_3\\b_2-b_3\\b_3\end{pmatrix}=(b_1+b_2-2b_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(b_2-b_3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(b_1+b_2-2b_3)-(b_2-b_3)+b3\\(b_2-b_3)+b_3\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

□

(L-8) Problema 24(a) Puesto que hay una única solución, las columnas de $\mathbf{A}$ deben ser linealmente independientes (rango 2). Además la solución nos dice que la segunda columna es igual al "lado derecho del sistema". Por tanto , cualquier matriz de la forma

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&1\\b&2\\c&3\end{bmatrix}$$

donde los vectores $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ sean linealmente independientes vale; por ejemplo

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\\0&3\end{bmatrix}$$

□

(L-8) Problema 24(b) No existe la matriz $\mathbf{B}$: el lado derecho nos dice que tenemos dos ecuaciones; pero la solución $\boldsymbol{x}$ nos dice que hay tres incógnitas. . . en tal caso o no hay solución, o hay infinitas. Pero el enunciado dice que la solución es única y eso es imposible.

□

(L-8) Problema 25. El vector del lado derecho es de orden 2, es decir sólo, el sistema tiene sólo dos ecuaciones ($\mathbf{A}$ tiene dos filas). La solución $\boldsymbol{x}$ es de orden 2, por tanto, el sistema tiene sólo dos incógnitas ($\mathbf{A}$ tiene sólo dos columnas). La solución particular nos indica que la primera columna de $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Por otra parte, la solución al sistema homogéneo es un múltiplo de la segunda columna; es decir, la segunda columna es necesariamente un vector nulo. Por tanto

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(L-8) Problema 26. libre
no es
infinitas

□

(L-8) Problema 27(a) No siempre tiene solución; por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que el rango de la matriz de coeficientes A es uno, pero el rango de la matriz ampliada $[\mathsf{A}|\boldsymbol{b}]$ es dos.

□

(L-8) Problema 27(b) Puesto que el sistema tiene más variables que ecuaciones, cuando el sistema tiene solución, ésta nunca puede ser única.

□

(L-8) Problema 27(c) Que $\boldsymbol{b}$ sea combinación lineal de las columnas de A; es decir, que la matriz de coeficientes A, y la matriz ampliada $[\mathsf{A}|\boldsymbol{b}]$ tengan el mismo rango.

□

(L-8) Problema 27(d) Puesto que el $\boldsymbol{b}$ tiene tres componentes (pertenece a $\mathbb{R}^3$), la condición es que el rango de A sea tres.

□

(L-8) Problema 28(a) El rango es 4 (hay cuatro pivotes en la forma escalonada reducida de A).

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^7 \;\middle|\; \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ecuación paramétrica)

□

(L-8) Problema 28(b) Si $a = x_2,\ b = x_4$ y $c = x_6$:

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^7 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_4 + x_6 \\ x_2 \\ -x_4 - x_6 \\ x_4 \\ 0 \\ x_6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es decir, el subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^7$ que satisface el sistema $\begin{cases} x_1 & = x_2 - 2x_4 + x_6 \\ x_3 & = -x_4 - x_6 \\ x_5 & = 0 \\ x_7 & = 0 \end{cases}$, lo que nos permite expresar de nuevo el mismo conjunto con una ecuación cartesiana

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^7 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \right\}$$

(ecuación cartesiana)

□

(L-8) Problema 28(c) No, puesto que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}^4$ entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución para cualquier vector $\boldsymbol{b}$ en $\mathbb{R}^4$.

□

(L-8) Problema 28(d)

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

(L-8) Problema 28(e)

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^7 \;\middle|\; \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

□

(L-8) Problema 29(a) El espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ contiene infinitos vectores, es decir, su dimensión es mayor o igual a uno. Lo sabemos ya que el sistema puede tener infinitas soluciones (una particular mas cualquiera de las del espacio nulo).

□

(L-8) Problema 29(b) El espacio $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ no puede ser todo $\mathbb{R}^m$, pues en ese caso el sistema *siempre* tendría solución, contrariamente a lo que dice el enunciado.

□

(L-8) Problema 29(c) Puesto que el sistema puede no tener solución, no todas las filas son pivote (es posible encontrar ecuaciones (0=1)), es decir, que el rango r es menor que el número de filas m.

$$r < m$$

Por otra parte, cuando hay solución, hay infinitas; es decir, el espacio nulo contiene infinitos vectores, por tanto hay columnas libres, es decir, no todas las columnas son pivote.

$$r < n.$$

□

(L-8) Problema 29(d) No es posible. Si $\boldsymbol{x}_p$ es solución para el lado derecho $\boldsymbol{b}$, también lo es $\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n$ para todo vector $\boldsymbol{x}_n$ del espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

□

(L-8) Problema 30(a)

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 9 & 3 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(2)\mathbf{4}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

El espacio nulo es el conjunto de vectores que son combinación lineal de las soluciones especiales; es decir

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

□

(L-8) Problema 30(b) Una solución particular inmediata es el vector

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(la última columna multiplicada por -1). Así pues, la solución general es cualquier vector $\boldsymbol{x}$ que se pueda expresar como

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z},$$

donde $\boldsymbol{z}$ es un vector del espacio nulo descrito en el apartado anterior. De forma más explícita

$$\text{Conjunto de vectores: } \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(L-8) Problema 30(c) Cuando una matriz $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ tiene rango igual a m, la dimensión del espacio columna es m, es decir, $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}^m$; y puesto que $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ el sistema siempre tiene solución, sea cual sea el vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

El número de soluciones especiales (la dimensión del espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$) es igual al número de columnas libres, es decir, igual a $n - m$ (nótese que sabemos que $n > m$ ya que el rango de matriz es m, si n fuera menor, el rango no podría ser m).

□

(L-8) Problema 31. Apliquemos el método de eliminación

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & c & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]} \\ {[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & c & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {[(-c)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {[(5)\mathbf{4}]}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema siempre tiene una única solución, sea cual sea el valor de c

```
c = sympy.symbols('c')
A = Matrix([[1,1,2],[2,2,-1],[0,1,c]])
b = Vector([-1,-1,-2])
Elim(A.concatena(Matrix([b]),1),1)
```

□

(L-8) Problema 32(a)

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 \\
2 & -3 & m & -3 \\
-1 & 2 & 3 & -2m \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & -1 \\
2 & -1 & m-4 & -3 \\
-1 & 1 & 5 & -2m \\ \hline
1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(-m+4)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & -3 \\
1 & -1 & m+1 & -2m \\ \hline
3 & -1 & m-6 & 0 \\
2 & -1 & m-4 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & m+1 & -2(m+1) \\ \hline
3 & -1 & m-6 & 0 \\
2 & -1 & m-4 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\tau \\ [(2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & m+1 & 0 \\ \hline
3 & -1 & m-6 & 2(m-6) \\
2 & -1 & m-4 & 2(m-4)-1 \\
0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

□

(L-8) Problema 32(b)

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline
3 & -1 & -7 & 0 \\
2 & -1 & -5 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

Una solución particular es $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y las soluciones al sistema homogéneo son los múltiplos del vector $\boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, la solución completa al sistema son todos los vectores que se pueden escribir como $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + a\boldsymbol{x}_n$ para cualquier número real a.

□

(L-8) Problema 32(c) El conjunto de puntos que son solución al sistema del apartado anterior es una recta en $\mathbb{R}^3$.

No es posible que el conjunto de soluciones sea un plano en ningún caso; para que fuera posible sería necesario que la matriz de coeficientes del sistema fuera de rango 1. Pero en este caso el rango es 2 para $m = -1$ o rango 3 cuando $m \neq -1$. En este último caso (rango 3), el conjunto de soluciones es un punto en $\mathbb{R}^3$.

□

(L-8) Problema 32(d) En este caso tenemos

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline
3 & -1 & -5 & -10 \\
2 & -1 & -3 & -7 \\
0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

Por tanto la solución en este caso es

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

□

(L-8) Problema 33(a)

$$
\left[\begin{array}{ccc}
1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 2 \\ \hline
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}
\left[\begin{array}{ccc}
1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 \\ \hline
1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}
\left[\begin{array}{ccc}
1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 \\ \hline
1 & -1 & -2 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

Falso. Puesto que las soluciones son los múltiplos de

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

el conjunto de soluciones es toda la recta que contiene al vector $\boldsymbol{x}_0$; es decir $c\boldsymbol{x}_0$ para todo c. Esta es la descripción de una recta, no de un plano.

□

(L-8) Problema 33(b) Verdadero. Véase el primer apartado.

□

(L-8) Problema 33(c) Falso. Véase el primer apartado.

□

(L-8) Problema 33(d) Verdadero. El conjunto de vectores $c\boldsymbol{x}_0$ para todo c es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\boldsymbol{x}_0$; y por tanto es un subespacio.

□

(L-8) Problema 33(e) Verdadero. Efectivamente, el conjunto de soluciones del sistema homogéneo es la definición de espacio nulo de $\mathbf{A}$.

□

(L-8) Problema 33(f) Falso. El espacio columna es el conjunto de combinaciones lineales de los vectores columna de $\mathbf{A}$, y no un conjunto de soluciones.

□

(L-8) Problema 34(f)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -b_1 \\ 4 & 1 & -b_2 \\ 2 & -1 & -b_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(b_2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\tau \\ [(-4)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -b_2-b_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & b_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 6b_1-b_2-b_3 \\ \hline 1 & 0 & b_1 \\ -4 & 1 & b_2-4b_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Cualquier vector en $\mathbb{R}^3$ que satisfaga $6b_1 - b_2 - b_3 = 0$.

□

(L-8) Problema 35(a)

```
A = Matrix( [ [0,3,3,0], [4,3,0,0], [0,0,2,2] ] )
b = Vector( [39, 44, 22] )
SEL(A,b,1)
```

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 & -39 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & -44 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -22 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 3 & -3 & 19/2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Puesto que el rango es tres (igual al número de filas) siempre hay solución al sistema; pero como hay columnas libres, el sistema tiene infinitas soluciones. (Nota: no es necesario llegar a la forma escalonada reducida, con llegar a la forma pre-escalonada $\mathbf{K}$, es suficiente para ver que hay tres pivotes y una columna libre. Con los pasos anteriores hemos obtenido una solución particular, pero tampoco esto es necesario para responder a la pregunta; bastaba trabajar con la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ y mirar su rango.). □

(L-8) Problema 35(b) En este caso el sistema se reduce a

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ i \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 44 \\ 22 \end{pmatrix}$$

donde en este caso i hace referencia al precio tanto de la entrada infantil como a la de tercera edad (que son iguales).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & -39 \\ 3 & 4 & 0 & -44 \\ 0 & 2 & 2 & -22 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(13)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -22 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(5)\mathbf{2}+\mathbf{4}] \\ [(6)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto los precios son 8 para adultos, 5 para infantiles (y tercera edad) y 6 la tarifa reducida.

$\square$

(L-8) Problema 36(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & -7 & -7 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -2 & -6 & -6 \\ \hline 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-3)\mathbf{3}+\mathbf{4}] \\ [(-3)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tanto la matriz de coeficientes, cómo la matriz ampliada tienen rango 2.

$\square$

(L-8) Problema 36(b) Una solución particular es

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Solución al sistema homogéneo es el conjunto de combinaciones lineales de los vectores

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Así pues, la solución al sistema propuesto es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, a, b \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(L-8) Problema 36(c) Es un **plano** paralelo al generado por las combinaciones lineales de $\boldsymbol{x}_a$ y $\boldsymbol{x}_b$ (que es la solución del sistema homogéneo) pero que pasa por el punto $\boldsymbol{x}_p = (-4, 0, -3, 0,)$ (que es uno de los infinitos vectores que resuelven el sistema completo).

$\square$

(L-8) Problema 37(a) En este caso necesitamos que $\mathbf{A}$ tenga rango 3; por tanto, por eliminación gausiana tenemos que

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1-a & 2-a \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & -a & -a \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & -a & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y por tanto, si $a \neq 0$ el rango de la matriz es 3.

□

(L-8) Problema 37(b) Para aquellos que hacen a la matriz de rango 2; es decir... y visto lo visto... para $a = 0$.

□

(L-8) Problema 38.

```
A = Matrix([[1,3,2,4,-3], [2,6,0,-1,-2], [0,0,6,2,-1], [1,3,-1,4,2]])
b = Vector([-7,0,12,-6])
SEL(A,b,1)
```

$$\text{Conjunto de vectores:}\ \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1\\0\\3\\-2\\2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -3\\1\\0\\0\\0 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

□

(L-8) Problema 39(a)

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & -\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1&3&2&2&-2\\ 2&7&6&8&-7\\ 3&9&6&7&-7\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 2&1&2&4&-3\\ 3&0&0&1&-1\\ \hline 1&-3&-2&-2&2\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-4)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(3)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 2&1&0&0&0\\ 3&0&0&1&-1\\ \hline 1&-3&4&10&-7\\ 0&1&-2&-4&3\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(1)\mathbf{4}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 2&1&0&0&0\\ 3&0&0&1&0\\ \hline 1&-3&4&10&3\\ 0&1&-2&-4&-1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{E} & \boldsymbol{x}_p \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]$$

La solución es el subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3\\-1\\0\\1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 4\\-2\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dicho conjunto de soluciones es una recta, pero puesto que no pasa por el origen de coordenadas (no contiene a $\mathbf{0}$), no es espacio vectorial. Es decir, es una recta en la dirección del vector del espacio nulo $\boldsymbol{x}_a$, que pasa por el punto $\boldsymbol{x}_p$, pero no por el origen.

□

(L-8) Problema 39(b) Puesto que hay tres columnas pivote (tres columnas linealmente independientes), el espacio columna es todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

Si en lugar de un 7 hubiera un 6, en el segundo paso de eliminación generaríamos una fila de ceros, y por tanto habría sólo dos pivotes y $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ sería tan sólo un plano dentro de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M} & -\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1&3&2&2&-2\\ 2&7&6&8&-7\\ 3&9&6&6&-7\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 2&1&2&4&-3\\ 3&0&0&0&-1\\ \hline 1&-3&-2&-2&2\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-4)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(3)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 2&1&0&0&0\\ 3&0&0&0&-1\\ \hline 1&-3&4&10&-7\\ 0&1&-2&-4&3\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$\square$

(L-8) Problema 39(c) La primera parte es sencilla, basta elegir como lado derecho $\boldsymbol{b}$ cualquiera de las columnas de $\mathbf{M}$. La segunda parte también es fácil empleando lo que sabemos. Si mantenemos el vector derecho $\boldsymbol{b}$ del enunciado, el sistema no tiene solución.

$\square$

(L-9) Problema 1.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1&1&0&0\\ 1&0&0&1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&1\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 1&-1&0&1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&1\\ \hline 1&-1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 1&-1&0&0\\ 0&1&1&1\\ 0&0&1&1\\ \hline 1&-1&0&-1\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 1&-1&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&0\\ \hline 1&-1&0&-1\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&0&1 \end{array}\right]$$

Por tanto solo hay tres variables pivote, es decir, no son linealmente independientes, de hecho, si sumamos la primera y tercera columnas, y restamos la segunda obtenemos la cuarta columna.

Por otra parte, ampliando la matriz $\mathbf{A}$ con (-) el vector del lado derecho $\begin{pmatrix}0, & 0, & 0, & 1,\end{pmatrix}$, tenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&-1\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 1&-1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&-1\\ \hline 1&-1&0&-1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

donde no es posible anular el vector del lado derecho, es decir el sistema no es resoluble. Por tanto al menos un vector de $\mathbb{R}^4$ no es combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$. Así pues, las columnas de $\mathbf{A}$ no generan el espacio $\mathbb{R}^4$.

$\square$

(L-9) Problema 2(a) *podrían no generar* (si no hubiera 4 linealmente independientes).

$\square$

(L-9) Problema 2(b) *no son* independientes (¡hay más de cuatro!).

$\square$

(L-9) Problema 2(c) *podría no tener* solución (si $\boldsymbol{b}$ no es combinación de las columnas de $\mathbf{A}$).

$\square$

(L-9) Problema 2(d) *No tiene* una única solución. Los dos únicos casos posibles son que no haya solución (si $\boldsymbol{b}$ no es combinación de las columnas de $\mathbf{A}$) o que tenga infinitas, ya que como mínimo hay dos columnas libres.

$\square$

(L-9) Problema 3(a) La matriz $\mathbf{B}$ debe tener orden 3×2. Además, la solución completa contiene un único vector (solución única), así que es la solución particular, es decir el espacio nulo solo contiene el vector "cero". Por lo tanto, sabemos que el rango debe ser 2, es decir las dos columnas deben ser linealmente independientes. Una posibilidad es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

pero vale cualquier matriz de la forma

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ 4 & c \end{bmatrix}$$

siempre y cuando la segunda columna sea linealmente independiente de la primera.

$\square$

(L-9) Problema 3(b) No existe tal matriz:

Por una parte, la matriz $\mathbf{B}$ debe ser de orden 2×3. y por lo tanto, al menos una de las columnas debe ser libre. Entonces la solución completa debe incluir una solución particular, más cualquier vector del espacio nulo; que como mínimo es un espacio vectorial de dimensión 1; es decir, $3 - \operatorname{rg}(\mathbf{C})$.

Pero por otra parte, la solución completa del enunciado contiene un único vector (solución única), que es la solución particular, es decir, que según esto el espacio nulo solo contiene el vector "cero" (espacio vectorial de dimensión cero).

Ambas situaciones son incompatibles, por lo que las condiciones del enunciado son imposibles.

□

(L-9) Problema 4. Un sistema de vectores es linealmente independiente si $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$ si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ (no hay columnas libres).

Veamos el primer caso:

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

tiene como única solución $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Por tanto son linealmente independientes.

Pero

$$\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&1&3\\0&0&1&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

tiene infinitas soluciones; por ejemplo $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}$. Por tanto $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 4\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{x}_4 = \mathbf{0}$, y este sistema de vectores es linealmente dependiente.

□

(L-9) Problema 5. Si $\mathbf{A}^\intercal = 2\mathbf{A}$, entonces también $\mathbf{A} = 2\mathbf{A}^\intercal = 2(2\mathbf{A}) = 4\mathbf{A}$ por lo que necesariamente $\mathbf{A} = \mathbf{0}$; y, por supuesto, las filas de una matriz nula son dependientes.

□

(L-9) Problema 6(a) **No.** dos vectores no pueden generar todo $\mathbb{R}^3$.

□

(L-9) Problema 6(b) **Si.** Puesto que podemos encontrar tres pivotes, el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ siempre tiene solución sea cual sea el vector $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&3\\0&-2&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

□

(L-9) Problema 6(c) **No.** Solo dos de los vectores son linealmente independientes (dos pivotes), y no pueden generar todo $\mathbb{R}^3$.

□

(L-9) Problema 6(d) **Si.** Tres de los vectores son linealmente independientes (tres pivotes) por tanto generan $\mathbb{R}^3$.

□

(L-9) Problema 7(a) **Dependientes.** Buscamos encontrar si existe la combinación

$$a\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix}$$

Si generamos una matriz con los vectores en forma de columna, y la reducimos a la forma escalonada $\mathbf{R}$, observamos que

$$\left[\begin{array}{cc|c}-1&2&-4\\2&1&-7\\3&-1&-3\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc|c}-1&0&-4\\2&5&-7\\3&5&-3\\\hline 1&2&0\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc|c}-1&0&0\\2&5&-15\\3&5&-15\\\hline 1&2&-4\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc|c}-1&0&0\\2&5&0\\3&5&0\\\hline 1&2&2\\0&1&3\\\hline 0&0&1\end{array}\right]$$

por tanto $2(-1, 2, 3,) + 3(2, 1, -1,) = (4, 7, 3,)$. ¡Tres vectores y solo dos pivotes!

$\square$

(L-9) Problema 7(b) **Independientes.** Si generamos una matriz con los vectores en forma de columna, y la reducimos a la forma de escalonada reducida $\mathbf{R}$, observamos que no tiene columnas libres.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

$\square$

(L-9) Problema 7(c) **Dependientes.** Si generamos una matriz con los vectores en forma de columna, y la reducimos a la forma de echelon $\mathbf{R}$, observamos que tiene una columna libre.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -8 \\ 2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(8)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 18 \\ \hline 1 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(18)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -28 \\ 0 & 1 & 18 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

por tanto $18(2,\ 3,) - 28(1,\ 2,) = (8,\ -2,)$.

$\square$

(L-9) Problema 7(d) **Dependientes.** Claramente el cuarto vector (polinomio) es suma de los tres primeros. Pero lo podemos resolver como en los casos anteriores: Para ello generamos vectores con los coeficientes de los polinomios. De esta manera, si generamos una matriz con los vectores en forma de columna, y la reducimos a la forma de echelon $\mathbf{R}$, observamos que tiene una columna libre.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(2)\mathbf{4}] \\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\tau \\ [(\frac{1}{2})\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

por tanto el último vector es igual a la mitad de la suma del resto de vectores.

$\square$

(L-9) Problema 8. Esto quiere decir que el espacio nulo es de dimensión cero, por tanto no hay columnas libres, es decir, todas las columnas son pivote. Como hay n columnas, hay n pivotes. Así pues, el rango es n, y las columnas son linealmente INDEPENDIENTES.

$\square$

(L-9) Problema 9. Si las columnas fueran linealmente independientes entonces, mediante operaciones elementales en las columnas, no sería posible hacer una columna de ceros. Es decir, todas las columnas de cualquier forma (pre)escalonada deberían ser columnas pivote. Pero cada pivote se sitúa en una fila distinta, por tanto, si la matriz sólo tiene 4 filas, el máximo número de pivotes es 4, así que las 6 columnas no pueden ser todas columnas pivote.

$\square$

(L-9) Problema 10(a) Since the nullspace is spanned by the given three vectors, we may simply take $\mathbf{B}$ to consist of the three vectors as columns, i.e.,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}$ need not be square.

$\square$

(L-9) Problema 10(b) For example, we may simply add a zero column to $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Or, we could interchange two columns. Or we could multiply one of the columns by -1. For example:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Or we could replace one of the columns by a linear combination of that column with the other two columns (any invertible column operation). Or we could replace $\mathbf{B}$ by $-\mathbf{B}$ or $2\mathbf{B}$. There are many possible solutions. In any case, the solution shouldn't require any significant calculation!

□

(L-9) Problema 10(c) Since any solution $\boldsymbol{x}$ to the equation $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ is of the form $\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{n}$ for some vector $\boldsymbol{n}$ in the nullspace, the vector $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p$ must lie in the nullspace $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. Thus, we want to look at:

$$\boldsymbol{x}_Z - \boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

To determine whether a vector $\boldsymbol{y}$ lies in the nullspace $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, we can just check whether it is in the column space of $\mathbf{B}$, i.e. check whether $\mathbf{B}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ has a solution. As we learned in class, we can check this just by doing elimination:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -a \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & -a-4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -a-4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

We can get a solution if and only if $a = -4$. So Zarkon is correct.

□

(L-9) Problema 11(a)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & -b \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -c \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 & -d \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(a)\mathbf{1}+\mathbf{6}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & a-b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-c \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 2a-d \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}] \\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{5}] \\ [(b-a)\mathbf{3}+\mathbf{6}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-c \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2b-d \\ \hline 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto las columnas 1 y 3 son linealmente independientes y una base es

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \right] \quad \text{ó también} \quad \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \right].$$

□

(L-9) Problema 11(b) Por ejemplo las tres soluciones especiales

$$\left[\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix};\right]$$

□

(L-9) Problema 11(c) $c-a=0$ y $d-2b=0$.

□

(L-9) Problema 11(d)

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5\ \middle|\ \exists\, a,b,c\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

□

(L-9) Problema 12. Si a una matriz $\mathbf{A}$ se le "añade" una nueva columna extra $\boldsymbol{b}$, entonces el espacio columna se vuelve más grande, a no ser que el vector $\boldsymbol{b}$ ya esté en $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

Caso en que se hace más grande

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\qquad [\mathbf{A}\ \boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

En este caso $\mathcal{C}\left([\mathbf{A}\ \boldsymbol{b}]\right)$ es más grande que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$; y el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ no tiene solución por NO pertenecer $\boldsymbol{b}$ al espacio columna de $\mathbf{A}$ (es decir, porque $\boldsymbol{b}\notin\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$). Nótese que en este caso ninguna combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$ puede ser igual a $\boldsymbol{b}$. Nótese que el rango de $\mathbf{A}$ es 1, pero el de la matriz ampliada $[\mathbf{A}\mid -\boldsymbol{b}]$ es 2, así que el método de Gauss visto en clase fallaría.

Caso en el que es igual de grande

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\qquad [\mathbf{A}\ \boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

En este caso $\mathcal{C}\left([\mathbf{A}\ \boldsymbol{b}]\right)=\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$; y el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ tiene solución por pertenecer $\boldsymbol{b}$ al espacio columna de $\mathbf{A}$ (es decir, porque $\boldsymbol{b}\in\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$).

□

(L-9) Problema 13. $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\mathbb{R}^9$.

□

(L-9) Problema 14. Puesto que todo vector $\boldsymbol{a}$ en $\mathcal{V}$, se puede expresar como $x_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{v}_n$; es decir como

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1&\cdots&\boldsymbol{v}_n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\mathbf{V}\boldsymbol{x},\qquad\text{donde}\quad \mathbf{V}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1&\cdots&\boldsymbol{v}_n\end{bmatrix},$$

el espacio vectorial $\mathcal{V}$ resulta ser el espacio columna de la matriz $\mathbf{V}$, es decir $\mathcal{C}\left(\mathbf{V}\right)$.

Por otra parte, sabemos que sumar combinaciones lineales de columnas a otras columnas no altera el espacio columna, $\mathcal{C}\left(\mathbf{V}\right)$; y puesto que $\boldsymbol{v}_n$ es combinación lineal del resto de vectores, tenemos

$$\boldsymbol{v}_n=a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{v}_{n-1}.$$

Sabiendo esto, podemos reducir la matriz $\mathbf{V}$ a una nueva matriz con la última columna compuesta por ceros (sin alterar el espacio columna) del siguiente modo:

$$\left[\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\frac{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n}{\mathbf{I}}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & 0 \\ \hline & & \mathbf{E} & & \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{E}}\right]$$

donde la última columna de $\mathbf{E}$ es $\begin{pmatrix} -a_1, & -a_2, & \dots & -a_{n-1}, & 1, \end{pmatrix}$. Pero $\mathcal{V} = \mathcal{C}\left(\mathbf{V}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{W}\right)$; donde el espacio columna de $\mathbf{W}$ está generado por las combinaciones lineales de las columnas no nulas de la matriz, por tanto está generado por los $n-1$ primeros vectores columna.

Si los vectores $\boldsymbol{v}_j$ pertenecen a $\mathbb{R}^m$ con $m < n$, el razonamiento es el mismo pero $\mathbf{W}$ tiene menos filas y si $m < n-1$ la matriz $\mathbf{W}$ tendrá más columnas de ceros al final.

Si los vectores $\boldsymbol{v}_j$ pertenecen a $\mathbb{R}^m$ con $m > n$, el razonamiento tampoco cambia, $\mathbf{W}$ tiene más filas, pero la última columna seguirá siendo nula.

□

(L-9) Problema 15(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La variable libre es y. La solución completa es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad = \quad \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

(L-9) Problema 15(b) Una base es $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\right]$ y también $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\right]$.

□

(L-9) Problema 16(a) **No.** El espacio P_3 tiene dimensión 4, y tan sólo hay tres vectores en este conjunto.

□

(L-9) Problema 16(b) **No.** De nuevo no hay vectores suficientes para generar un espacio de dimensión 4.

□

(L-9) Problema 16(c) **Si.** Estos cuatro vectores son linealmente independientes (cuatro pivotes).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}] \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}] \\ [\mathbf{3}\rightleftharpoons\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

□

(L-9) Problema 16(d) **No.** El cuarto vector es la combinación de los tres primeros, por lo que no hay suficientes vectores linealmente independientes para generar un espacio de dimensión 4 (sólo tres pivotes)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(L-9) Problema 17(a) Si $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ son linealmente dependientes, entonces existe un número a tal que

$$\boldsymbol{u}_1 = a\boldsymbol{u}_2;$$

es decir, que componente a componente $u_{1i} = a \cdot u_{2i}$. Puesto que las terceras componentes son iguales, dicho número debería ser $a = 1$, pero entonces la primera componente de $\boldsymbol{u}_1$ también debería ser una vez la primera componente de $\boldsymbol{u}_2$. Puesto que no es así, el primer vector no es un múltiplo del segundo. Así pues no existe tal número a y, por tanto, estos vectores son linealmente *independientes.*

Otra forma de verlo es comprobar que el rango de la matriz $\mathbf{M} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix}$ es dos.

□

(L-9) Problema 17(b) La respuesta es sí. Si escribiéramos los vectores en forma de columna, esta pregunta sería equivalente a preguntar si $\boldsymbol{v}$ (en forma de columna) pertenece al espacio columna de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix};$$

es decir, a preguntar si el sistema

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

tiene solución. Puesto que 3 veces la primera columna menos la segunda da el resultado deseado, $\boldsymbol{v} = (2, 1, 2)$ pertenece al espacio generado por $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$.

Otra forma de verlo es comprobar que la matriz

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{v}\end{bmatrix}$$

también tiene rango 2, es decir, que al añadir el vector $\boldsymbol{v}$, el rango de la nueva matriz sigue siendo 2 (como el rango de la matriz $\mathbf{M}$ del primer apartado).

□

(L-9) Problema 17(c) Debemos encontrar un tercer vector linealmente independiente de $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$. Si escribimos de nuevo los vectores en columna, buscamos un vector $\boldsymbol{b}$ que no pertenezca al espacio columna de $\mathbf{A}$. Por tanto queremos un $\boldsymbol{b}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tenga solución.

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \textbf{-}\boldsymbol{b}\\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -b_1\\ 0 & -1 & -b_2\\ 1 & 0 & -b_3\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-b_2)\mathbf{2+3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(b_1)\mathbf{1+3}]}} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & b_1 - b_3\\ \hline 1 & 0 & b1\\ 0 & 1 & -b2\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Por tanto, si $b_1 \neq b_3$ el sistema no tiene solución, es decir, $\boldsymbol{b}$ no es combinación lineal de los otros dos, y por tanto tenemos tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes, es decir, una base de $\mathbb{R}^3$.

□

(L-9) Problema 18(a) Si. Dos vectores son dependientes si uno es un múltiplo del otro; pero en este caso no es así. Por tanto son linealmente independientes.

□

(L-9) Problema 18(b) No, los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_3$ y $\boldsymbol{v}_4$ no son linealmente independientes. Por ejemplo $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_4$.

□

(L-9) Problema 18(c) No, los vectores no son base de dicho sub-espacio.

Los vectores son linealmente independientes, pero no generan el plano descrito en el enunciado ya que $\boldsymbol{v}_3$ no está en dicho plano (no satisface la ecuación $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0$).

□

(L-9) Problema 18(d) Lo resolveremos por eliminación

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -q \\ 4 & 2 & 12 & -3 \\ 6 & 2 & 10 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(q)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 16 & 4q-3 \\ 6 & 2 & 16 & 6q-1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-8)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(2)\mathbf{4}] \\ [(-4q+3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 4q+4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2q \\ 0 & 1 & -8 & -4q+3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Los cuatro vectores generan todo $\mathbb{R}^3$ si $q \neq -1$ (tres pivotes). Pero si $q = -1$, los cuatro vectores solo generan un subespacio de dimensión $r = 2$ (dos pivotes), es decir, generan un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

□

(L-9) Problema 19(a)

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

□

(L-9) Problema 19(b) Son el número de pivotes y el número de columnas libres respectivamente:

$$\dim(\mathcal{C}(\mathbf{A})) = 1; \qquad \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = 1.$$

□

(L-10) Problema 1(a)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-4)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{K}\\ \hline \mathbf{E}\end{bmatrix}$$

Observando su forma pre-escalonada $\mathbf{K}$ podemos ver que sólo la segunda columna es pivote, por tanto:

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}; \quad \boxed{\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}) = 1. \quad \text{Base de } \mathcal{C}(\mathbf{A}) \text{: } \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\right].}$$

Observando las columnas de $\mathbf{E}$ bajo las columnas nulas de $\mathbf{K}$ vemos que $\boxed{\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = 3}$ y

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{a}\right\}. \quad \boxed{\text{Base de } \mathcal{N}(\mathbf{A})\text{: } \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\-4\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};\right].}$$

Observando su forma reducida $\mathbf{K}$ podemos ver que sólo la primera fila es pivote, por tanto: $\boxed{\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}^{\intercal}) = 1}$ y

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}^{\intercal}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}0, & 1, & 4, & 0,\end{pmatrix}\right\}. \quad \boxed{\text{Base de } \mathcal{C}(\mathbf{A}^{\intercal})\text{: } \left[(0,\ 1,\ 4,\ 0,);\right].}$$

Puesto que

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\mathbf{K} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\intercal}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}-2, & 1,\end{pmatrix}\right\}; \quad \boxed{\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\intercal}) = 1. \quad \text{Base de } \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\intercal})\text{: } \left[(-2,\ 1,);\right].}$$

□

(L-10) Problema 1(b) Por una parte, $\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\intercal}) = 1 + 1 = 2 = m.$

Por la otra. $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) + \dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 1 + 3 = 4 = n$

□

(L-10) Problema 1(c)

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-4)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sólo la segunda columna es pivote, por tanto:

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{U}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \quad \boxed{\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = 1. \quad \text{Base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)\text{: } \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\right].}$$

$\mathcal{N}\left(\mathbf{U}\right)$ es idéntico a $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$:

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{U}\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{a} \right\}. \quad \boxed{\text{Base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)\text{: } \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\right].}$$

$\mathcal{C}\left(\mathbf{U}^{\intercal}\right)$ es idéntico a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$:

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{U}^{\intercal}\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\left(0, \quad 1, \quad 4, \quad 0,\right) \right\}. \quad \boxed{\text{Base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\text{: } \left[(0,\ 1,\ 4,\ 0,);\right].}$$

Solo hay una fila libre, la segunda; fijando la variable libre $x_2 = 1$ tenemos

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{U}^{\intercal}\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\left(0, \quad 1,\right) \right\}; \quad \boxed{\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = 1. \quad \text{Base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\text{: } \left[(0,\ 1,);\right].}$$

□

(L-10) Problema 1(d) Por una parte, $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{U}\right) + \dim \mathcal{N}\left(\mathbf{U}^{\intercal}\right) = 1 + 1 = 2 = m$.
Por la otra. $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{U}^{\intercal}\right) + \dim \mathcal{N}\left(\mathbf{U}\right) = 1 + 3 = 4 = n$

□

(L-10) Problema 2. El espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es el subconjunto de combinaciones lineales de las dos últimas columnas

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{a} \right\}$$

es decir todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ con la tercera componente igual a cero (subespacio de dimensión 2).
El espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ está compuesto por los múltiplos del vector

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es decir todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ con la segunda y tercera componentes iguales a cero (subespacio de dimensión 1).
El espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ son todos los vectores de la forma

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es decir todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ con la primera componente igual a cero (subespacio de dimensión 2).
El espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ está compuesto por los múltiplos del vector

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\left(0, \quad 0, \quad 1,\right) \right\}$$

es decir todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ con la primera y segunda componentes iguales a cero (subespacio de dimensión 1).

$\square$

(L-10) Problema 3(a) Dimensión de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es 5. La dimensión del espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es $9-5=4$; y la dimensión del espacio fila por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es $7-5=2$. Todas suman $16=m+n$.

$\square$

(L-10) Problema 3(b) $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\mathbb{R}^3;\qquad \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=\{\mathbf{0}\}.$

$\square$

(L-10) Problema 4. **No.** piense en dos matrices n por n invertibles cualesquiera; ambas tiene los mismos cuatro subespacios.

$\square$

(L-10) Problema 5. Puesto que $\mathbf{L}$ tiene dos pivotes, **los espacios fila y columna de ambas matrices tienen dimensión 2**. En ambas matrices sólo hay dos filas pivote, y sólo hay dos columnas pivote.

Debe notarse, no obstante, que los espacios columna de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{L}$ son exactamente el mismo, ya que las operaciones elementales entre columnas para pasar de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{L}$ no alteran el espacio columna; pero los espacios fila son distintos. De hecho, el espacio fila de $\mathbf{L}$ no puede contener vectores con la tercera y/o cuarta componente distintas de cero, y sin embargo, las algunas filas de $\mathbf{A}$ tienen la tercera o cuarta componente distintas de cero. Por tanto, las filas de $\mathbf{A}$ no pueden pertenecer a $\mathcal{C}\left(\mathbf{L}^\intercal\right)$.

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\mathcal{C}\left(\mathbf{L}\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\text{existe } a,b\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\qquad \boxed{\text{Base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \text{ y } \mathcal{C}\left(\mathbf{L}\right)\text{: } \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\right].}$$

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\text{existe } a,b\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\qquad \boxed{\text{Base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)\text{: } \left[\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix};\right].}$$

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{L}^\intercal\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\text{existe } a,b\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\qquad \boxed{\text{Base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{L}^\intercal\right)\text{: } \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\right].}$$

Hay dos columnas libres, así que la dimensión del espacio nulo de ambas matrices es 2.

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\text{existe } a,b\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\qquad \boxed{\text{Base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)\text{: } \left[\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix};\right].}$$

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{L}\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\text{existe } a,b\in\mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\qquad \boxed{\text{Base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)\text{: } \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};\right].}$$

Tan solo hay una fila libre, así pues, la dimensión del espacio nulo por la izquierda es uno y es el mismo para ambas matrices.

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)=\mathcal{N}\left(\mathbf{L}^\intercal\right)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\text{existe } a\in\mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x}=a\begin{pmatrix}1, & 0, & -1,\end{pmatrix}\right\}\qquad \boxed{\text{Base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \text{ y } \mathcal{N}\left(\mathbf{L}^\intercal\right)\text{: } \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\right].}$$

$\square$

(L-10) Problema 6(a) Dimensión 3:

$$\mathcal{V} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

es decir

$$\mathcal{V} = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right); \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\square$

(L-10) Problema 6(b) El único vector del espacio nulo es el vector $\mathbf{0}$, por tanto dimensión 0.

$\square$

(L-10) Problema 6(c) Dimensión 16.

$\square$

(L-10) Problema 7. Una base del espacio fila es

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \right].$$

Una base del espacio columna es

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}; \right].$$

La respuesta anterior significa que la matriz $\mathbf{A}$ de 3 por 3 tiene tan sólo rango 2; y por tanto no es invertible.

$\square$

(L-10) Problema 8(a) No. El conjunto de soluciones no puede ser un subespacio puesto que no contiene el vector nulo ($\mathbf{0}$ no es solución a dicho sistema).

$\square$

(L-10) Problema 8(b) Si. Este conjunto es el espacio nulo por la izquierda de la matriz cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$.

$$\boldsymbol{x}\begin{bmatrix} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

$\square$

(L-10) Problema 8(c) No. Este conjunto no contiene la matrix nula $\mathbf{0}$; así que no puede ser sub-espacio vectorial.

$\square$

(L-10) Problema 8(d) Si, puesto que si los espacios nulos de $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ contienen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces el espacio nulo de cualquier combinación lineal de ambas matrices también contiene a dicho vector:

$$(a\mathbf{A}_1 + b\mathbf{A}_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a\mathbf{A}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\mathbf{A}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

$\square$

(L-10) Problema 9. Si empleamos el método de eliminación gaussiana, encontramos que sólo hay dos pivotes, que corresponden con las dos primeras columnas y las dos primeras filas. Así que sabemos que tanto el espacio columna y el espacio fila tienen dimensión dos. Por tanto, tomemos las dos primeras columnas y las dos primeras filas, puesto que son linealmente independientes.

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, c, d \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} \right\}$$
$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, c, d \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -2\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -4\end{pmatrix} \right\}.$$

□

(L-10) Problema 10(a) $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbf{0}$.

□

(L-10) Problema 10(b) $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = 1$.

□

(L-10) Problema 10(c) $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$

□

(L-10) Problema 10(d) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$

□

(L-10) Problema 10(e)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\a&b&c&d\end{bmatrix},$$

donde la última fila de $\mathbf{R}$ no se puede deducir de los datos del enunciado.

□

(L-10) Problema 11(a) Falso. Por ejemplo para la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$; $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es el sub-espacio de vectores de $\mathbb{R}^3$ con la última componente igual a cero; mientras que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es el sub-espacio de vectores de $\mathbb{R}^3$ con la primera componente nula.

□

(L-10) Problema 11(b) Verdadero.

□

(L-10) Problema 11(c) Falso. Suponga dos matrices invertibles, por ejemplo

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}.$$

$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{I}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{I}^\intercal\right) = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{I}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{I}^\intercal\right) = \{\mathbf{0}\}$.

□

(L-10) Problema 11(d) Verdadero. Sea cual sea el vector $\boldsymbol{b}$, las n columnas (vectores de $\mathbb{R}^n$) son linealmente independientes, por tanto son una base de $\mathbb{R}^n$, puesto que el lado derecho $\boldsymbol{b}$ pertenece a $\mathbb{R}^n$, siempre existe una única combinación lineal de las columnas igual a $\boldsymbol{b}$ (por ser estas una base de $\mathbb{R}^n$). Dicha combinación es *"la"* solución $\boldsymbol{x}$ al sistema de ecuaciones.

Otra forma de verlo es la siguiente: si las n columnas son linealmente independientes, $\mathbf{A}$ es de rango completo y por lo tanto invertible; entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}\\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{x} &= \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

Por tanto sabemos que para cualquier $\boldsymbol{b}$, el vector $\mathbf{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}$ es la solución.

$\square$

(L-10) Problema 12(a) Puesto que cualquier combinación del espacio columna $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es un múltiplo de $\begin{pmatrix}-2, & 1,\end{pmatrix}$, dicho espacio es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1 (una recta en $\mathbb{R}^2$); por tanto el rango de $\mathbf{A}$ es $r = 1$ (una sola columna pivote, y consecuentemente sólo una fila pivote).

Además, sabemos que las dimensiones de $\mathbf{A}$ son $m = 2$ y $n = 4$ es decir: $\underset{2\times 4}{\mathbf{A}}$.

$\square$

(L-10) Problema 12(b) Número de columnas libres, es decir, el número de columnas menos el número de columnas pivote: $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 4 - r = 4 - 1 = 3$.

$\square$

(L-10) Problema 12(c) $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = r = 1$.

$\square$

(L-10) Problema 12(d) El número de filas libres; por tanto $m - r = 2 - 1 = 1$.

$\square$

(L-10) Problema 12(e) Sabemos que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix} \qquad \text{y que} \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\9\end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$-3\mathbf{A}\boldsymbol{v} + \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}18\\-9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-18\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Es decir

$$-3\mathbf{A}\boldsymbol{v} + \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{A}(-3\boldsymbol{v}) + \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{A}(-3\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}.$$

Así pues, una solución al sistema homogéneo es:

$$\boldsymbol{x} = -3\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-9\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\-8\\-1\end{pmatrix}.$$

También es solución cualquier múltiplo de dicho vector $\boldsymbol{x}$.

$\square$

(L-10) Problema 13(a)

$\text{rg}\left(\mathbf{A}\right) =$ número de pivotes $= 3$.

$\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = \text{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 3$.

$\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) =$ número de columnas libres $= 5 - 3 = 2$.

$\square$

(L-10) Problema 13(b) Las filas primera, segunda y cuarta de $\mathbf{A}$ constituyen una base del espacio fila de $\mathbf{A}$ (es decir, las filas pivote de $\mathbf{A}$).

$\square$

(L-10) Problema 13(c) Las columnas pivote de $\mathbf{R}$ (también las columnas pivote de $\mathbf{A}$.

$\square$

(L-10) Problema 13(d) Las columnas tercera y cuarta de $\mathbf{E}$.

$\square$

(L-10) Problema 13(e) $3\mathbf{A}_{|1} - 2\mathbf{A}_{|2} = \mathbf{A}_{|3}$. Nótese que la tercera columna de $\mathbf{E}$ nos indica una posible combinación (no es la única, pero si sería la única si nos limitáramos a emplear únicamente las dos primeras columnas).

$\square$

(L-10) Problema 14. Puesto que las soluciones tienen cuatro componentes, la matriz $\mathbf{A}$ debe tener cuatro columnas. Puesto que el espacio nulo está formado por las combinaciones de sólo dos vectores, sabemos que dos variables son libre, y por tanto las otras dos son pivote (rango 2). Así pues, el espacio fila es de dimensión 2 y ortogonal a los vectores dados.

Calculemos una posible matriz mediante eliminación gaussiana.

$$\left[\begin{array}{cccc}2&2&1&0\\3&1&0&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\boldsymbol{[1\rightleftharpoons3]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&2&2&0\\0&1&3&1\\\hline 0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline 0&0&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\0&1&\mathbf{-3}&\mathbf{-1}\\1&-2&\mathbf{4}&\mathbf{2}\\0&0&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{array}\right]$$

Así hemos obtenido una base del espacio fila; por lo que una matriz que cumple el requisito del enunciado es:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-3&4&0\\0&-1&2&1\end{bmatrix}.$$

La comprobación es muy sencilla...

$$\begin{bmatrix}1&-3&4&0\\0&-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\2&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Pero esta no es la única matriz posible. Si multiplicamos $\mathbf{A}$ por la izquierda manteniendo el rango (si el número de variables libres no cambia) lograremos una nueva matriz. Así pues, cualquier matriz que se pueda obtener mediante transformaciones elementales por filas de $\mathbf{A}$ (operaciones sobre las filas que mantengan el rango de la matriz) también es válida

$$\underset{2\times2}{\mathbf{E}}\ \underset{2\times4}{\mathbf{A}}\begin{bmatrix}2&3\\2&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathbf{E0}=\mathbf{0};$$

donde $\operatorname{rg}\left(\mathbf{EA}\right)=2$.

□

(L-10) Problema 15. Mediante eliminación gaussiana por columnas de derecha a izquierda tenemos

$$\left[\begin{array}{cccc}4&3&2&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{4}+\mathbf{3}]\\[(-3)\mathbf{4}+\mathbf{2}]\\[(-4)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}0&0&0&1\\\hline \mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&0\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&0\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&0\\\mathbf{-4}&\mathbf{-3}&\mathbf{-2}&1\end{array}\right]$$

Entonces:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&-4\\0&1&0&-3\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$$

Pero cualquier matriz que se pueda obtener mediante transformaciones elementales por filas de $\mathbf{A}$ (operaciones sobre las filas que mantengan el rango de la matriz) también es válida.

□

(L-10) Problema 16(a) Suponga que el producto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es la matriz nula: $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$. Entonces el espacio *nulo* de la matriz $\mathbf{A}$ contiene el espacio *columna* de la matriz $\mathbf{B}$. También el espacio *nulo por la izquierda* de la matriz $\mathbf{B}$ contiene el espacio *fila* de la matriz $\mathbf{A}$.

□

(L-10) Problema 16(b) La dimensión del espacio nulo de $\mathbf{A}$ es $n-r=7-r$. La dimensión del espacio columna de $\mathbf{B}$ es s. Puesto que el primero contiene al segundo, $7-r\geq s$, es decir $r+s\leq 7$.

□

(L-10) Problema 17(a) 4. Hay cuatro pivotes en la forma escalonada reducida de $\mathbf{A}$.

□

(L-10) Problema 17(b)

$\dim\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)=\dim\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)=\operatorname{rg}\left(A\right)=4$
$\dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=n-\operatorname{rg}\left(A\right)=8-4=4$
$\dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)=m-\operatorname{rg}\left(A\right)=4-4=0$

$\square$

(L-10) Problema 17(c) El sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene infinitas soluciones, sea cual sea el vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$. Por una parte, no hay ninguna fila de ceros en la forma escalonada reducida, y por lo tanto el espacio columna es todo $\mathbb{R}^4$ (cualquier vector de $\mathbb{R}^4$ es combinación de las columnas de $\mathbf{A}$ y por tanto el sistema siempre tiene solución). Por otra parte, el espacio nulo tiene infinitos elementos (hay columnas libres).

$\square$

(L-10) Problema 17(d) Si, la matriz $\mathbf{R}$ (la forma escalonada reducida de $\mathbf{A}$) tiene pivotes en todas sus filas; por tanto, éstas son linealmente independientes.

$\square$

(L-10) Problema 17(e) Columnas 2, 4, 5 y 7 de $\mathbf{E}$.

$\square$

(L-10) Problema 17(f) Hemos visto que $\dim(\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)) = 0$. Por tanto, el único vector del espacio nulo es el vector nulo; por tanto no es posible encontrar ningún vector linealmente independiente y no se puede encontrar ninguna base del espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$.

$\square$

(L-10) Problema 17(g) Imposible, es una matriz singular.

$\square$

(L-10) Problema 17(h) $\left[\mathbf{E}_{|1};\ \mathbf{E}_{|3};\ \mathbf{E}_{|6};\ \mathbf{E}_{|8};\right]$.

$\square$

(L-10) Problema 18(a) Puesto que las tres columnas son pivote (no hay columnas libres), necesariamente $\mathcal{N}\left(\mathbf{R}\right) = \{\mathbf{0}\}$.

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{R}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(L-10) Problema 18(b) $\mathbf{B}$ ya está en su forma escalonada reducida por columnas. Por tanto el rango de $\mathbf{B}$ sigue siendo 3.

$\square$

(L-10) Problema 18(c)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{las 5 primeras}]{\text{restando a las 5 últimas columnas.}} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{a las primeras}]{\text{sumando las últimas.}} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{últimas por -1}]{\text{multiplicando las.}} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

$\square$

(L-10) Problema 18(d) Es el doble del rango de $\mathbf{R}$, por tanto: rango 6.

$\square$

(L-10) Problema 18(e) Debe ser igual al número de filas nulas de $\underset{10\times 6}{\mathbf{C}}$ (es decir, las columnas nulas de $\mathbf{C}^\intercal$); puesto que las seis columnas $\mathbf{C}$ son pivote (rango 6), sólo 6 de sus filas son pivote, y el resto son libres, por tanto, dimensión $10 - 6 = 4$.

$\square$

(L-10) Problema 19(a) Pensemos primero en las dimensiones de $\mathbf{A}$ y en el rango de $\mathbf{A}$ ... Puesto que el "lado derecho" es un vector de orden 3, la matriz $\mathbf{A}$ tiene tres filas, además, la solución al sistema es también un vector con tres componentes (por tanto una combinación de las tres columnas de $\mathbf{A}$); así pues, $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden 3 por 3.

La solución completa está formada por vectores de un espacio nulo de dimensión 2 (dos columnas libres). Entonces, $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 3 - 2 = 1$. Se deduce de todo esto que sólo hay una fila pivote, y las otras dos son libres, por tanto $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = 1$.

$\square$

(L-10) Problema 19(b) La solución particular nos dice que 2 veces la primera columna de $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, por tanto, la primera columna de $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sabemos además, que rg $(A) = 1$, y por tanto el resto de columnas son múltiplos de la primera. El primer vector de la base del espacio nulo nos indica que la primera columna más la segunda en es vector nulo, por tanto, la segunda columna de $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$. Por último, es segundo vector de la base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ no indica que la tercera columna es un vector nulo. Así pues,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\2 & -2 & 0\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

□

(L-10) Problema 19(c) Para aquellos $\boldsymbol{b}$ que pertenezcan al espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$; por tanto, para los múltiplos de la primera columna de $\mathbf{A}$.

□

(L-10) Problema 20(a) **Falso.** Ejemplo: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

□

(L-10) Problema 20(b) **Falso.** Ejemplo: $\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ En este caso el espacio columna es el conjunto de vectores de orden 2 con la segunda componente nula; mientras que el espacio fila es el conjunto de vectores de orden 2 con la primera componente nula.

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}^{\intercal}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

□

(L-10) Problema 20(c) **Verdadero.** Es el número de pivotes de la matriz; y hay tres casos
dimensión 2 si la matriz es invertible
dimensión 0 si la matriz es nula
dimensión 1 en el resto de casos

□

(L-10) Problema 20(d) **Falso** si hay columnas linealmente dependientes.

□

(L-10) Problema 21(a) Falso.

□

(L-10) Problema 21(b) Verdadero.

□

(L-10) Problema 21(c) Entonces las dos afirmaciones anteriores son falsas en general.

□

(L-Opt-1) Problema 1(a) Es el espacio vectorial $\mathbb{R}^{3\times 3}$ de todas las matrices 3 por 3 ya que cualquier matriz se puede expresar como suma de una matriz simétrica más una matriz triangular.

□

(L-Opt-1) Problema 1(b) Es la intersección de ambos, es decir, el conjunto de todas las matrices 3 por 3 diagonales.

□

(L-Opt-1) Problema 2(a) **Falso.** Por ejemplo

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

La matriz identidad es invertible, las otras dos no lo son.

□

(L-Opt-1) Problema 2(b) **True.** For $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ to have no solution we must have a row of 0's in the reduced row echelon form. Hence, the number of pivots will be less than the number of rows, and so the matrix $\mathbf{A}$ does not have full rank.

$\square$

(L-Opt-1) Problema 2(c) **False.** Suppose $\mathbf{AB}$ is invertible, and consider $\mathbf{C} = (\mathbf{AB})^{-1}\,\mathbf{A}$. Then $\mathbf{CB} = (\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, so $\mathbf{C}$ is an inverse for $\mathbf{B}$.

Otra demostración alternativa: existe una matriz de rango completo $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{BE} = \mathbf{L}$, donde $\mathbf{L}$ es su forma escalonada. Como $\mathbf{B}$ es singular, $\mathbf{L}$ tiene una columna de ceros, entonces $(\mathbf{AB})\mathbf{E} = \mathbf{AL} = \mathbf{M}$ tiene necesariamente una columna de ceros como $\mathbf{L}$ y por tanto $\mathbf{AB}$ es singular.

$\square$

(L-Opt-1) Problema 2(d) **False.** Consider the permutation matrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Then

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}.$$

$\square$

(L-Opt-1) Problema 3(a) Es un sub-espacio de $\mathbb{R}^7$ de dimensión:

cero si los tres son vectores nulos;
uno si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son múltiplos de $\boldsymbol{u}$;
dos si como máximo se pueden elegir dos vectores linealmente independientes;
o tres si los tres vectores son linealmente independientes.

$\square$

(L-Opt-1) Problema 3(b) También es únicamente por el vector nulo $\mathbf{0}$.

$\square$

(L-Opt-1) Problema 3(c) No. Por ejemplo las matrices 5 por 5 identidad ($\mathbf{I}$) y la matriz opuesta a la identidad ($-\mathbf{I}$) son de rango completo, y por tanto son invertibles, pero su suma es la matriz nula, que no es invertible. Por tanto, dicho subconjunto no es cerrado para la suma, es decir, no es un subespacio vectorial.

$$\mathbf{I} + (-\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad \text{que no es invertible.}$$

$\square$

(L-Opt-1) Problema 3(d) Falso. Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\square$

(L-Opt-1) Problema 3(e) El espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$.

$\square$

(L-Opt-1) Problema 3(f) El espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ y el espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

$\square$

(L-Opt-1) Problema 3(g) Si está en el espacio nulo, implica que sumar a la primera columna dos veces la segunda y tres veces la tercera nos da un vector de ceros.

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Que es algo incompatible si el vector $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$ es una fila,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}!$$

$\square$

(L-Opt-1) Problema 4(a) Es espacio vectorial ya que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & b+d \end{bmatrix} \text{ pertecene al conjunto; y}$$

$$c \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & cd \\ 0 & cd \end{bmatrix} \text{ también pertecene al conjunto.}$$

□

(L-Opt-1) Problema 4(b) No es espacio vectorial. Sean $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ dos funciones de dicho conjunto, entonces la suma evaluada en cero es $g(0) + h(0) = 4$, y por tanto no pertenece al conjunto.

□

(L-Opt-1) Problema 5. {Todos los monomios (vectores) de la forma: $a_n x^n$ para $n = 0, 1, 2...$}

□

(L-Opt-1) Problema 6(a) **Tres.** Puesto que las esquinas superior-derecha e inferior-izquierda deben ser iguales, sólo tres variables pueden variar.

□

(L-Opt-1) Problema 6(b) **Tres.** Puesto que podemos re-escribir las matrices como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix},$$

está claro que el espacio es de dimensión tres como en el caso anterior.

□

(L-Opt-1) Problema 6(c) **Dos.** Sólo x e y pueden variar, de hecho, dicho conjunto lo podemos expresar como:

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

□