

# Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

16/01/2025

1 / 24

L-4

L-5

## 1 Esquema de la Lección 4

### Esquema de la Lección 4

- Transformaciones elementales
- Identificación de matrices singulares por **eliminación**
- Producto de *matrices elementales*

2 / 24

L-4

L-5

Puede encontrar la última versión de este material en

<https://github.com/mbujosab/MatematicasII/tree/main/Esp>

– Marcos Bujosa. Copyright © 2008–2025

Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

1 / 24

L-4

L-5

## 2 Transformaciones elementales de una matriz

Tipo I:  $\mathbf{A}_{\tau_{[(\lambda)i+j]}}$  (con  $i \neq j$ )

suma  $\lambda$  veces la columna  $i$ -ésima a la columna  $j$ -ésima

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{\tau_{[(-2)1+3]}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Tipo II:  $\mathbf{A}_{\tau_{[(\alpha)i]}}$  (con  $\alpha \neq 0$ )

multiplica por  $\alpha$  la  $i$ -ésima columna

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{\tau_{[(10)2]}} = \begin{bmatrix} 1 & -30 & 0 \\ 1 & -60 & 3 \end{bmatrix}$$

3 / 24

### 3 Eliminación y forma pre-escalada de una matriz

- **Pivote**: es el primer componente no nulo de cada columna.
- **Eliminación**: modifica una matriz hasta que los componentes a la derecha de cada pivote son cero

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-3)\tau_1+2]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-2)\tau_2+3]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

4 / 24

### 4 Eliminación

#### Algoritmo de Eliminación sobre $\mathbf{A}$

modifica  $\mathbf{A}$  con una secuencia de transformaciones elementales

#### Objetivo

obtener una forma (pre)escalada de la matriz

- **pre-escalada**: a la derecha de cada pivote solo hay ceros.
- **escalada**: además sus pivotes en disposición descendente y columnas nulas a la derecha.

Toda matriz se puede (pre)escalonar por eliminación

**Rango** (rg):  $n^o$  de pivotes de sus formas pre-escaladas

$\mathbf{A}$  **singular**: sus formas pre-escaladas tienen columnas nulas ( $\text{rg} < n$ )

$n \times n$

5 / 24

### 5 Eliminación: ¿Cuándo no hay suficientes pivotes?

matrices  $n \times n$ : **singulares** si no logramos  $n$  pivotes tras la eliminación

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Y si la matriz fuera?

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Y si la matriz fuera?

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Y si la matriz fuera?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

6 / 24

### 6 Producto de matrices: matrices elementales

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]}_{\mathbf{I}_\tau} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_\tau}$$

La matriz  $\mathbf{I}_\tau$  se denomina *matriz elemental*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{I}_\tau) = \mathbf{A}_\tau$$

Esta matriz elemental  $\mathbf{I}_\tau$  en particular se denota como  $\mathbf{I}_{[(-3)\tau_1+2]}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{I}_{[(-3)\tau_1+2]}) = \mathbf{A}_{[(-3)\tau_1+2]}$$

7 / 24

### 7 Producto de matrices: matrices elementales

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Esta matriz elemental  $\mathbf{I}_{\tau}$  en particular se denota como  $\mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-2)2+3]}}$

$$\mathbf{A} \left( \mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-2)2+3]}} \right) = \mathbf{A}_{\substack{\tau \\ [(-2)2+3]}}$$

8 / 24

### 8 Eliminación mediante matrices elementales

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-3)1+2]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-2)2+3]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

$$\mathbf{A}_{\substack{\tau \\ [(-3)1+2] \\ [(-2)2+3]}} = \mathbf{A}_{\substack{[(-3)1+2] \\ [(-2)2+3]}} = \left( \mathbf{A} \left( \mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-3)1+2]}} \right) \right) \left( \mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-2)2+3]}} \right) = \mathbf{L}$$

hay una matriz que realiza todas las operaciones “de golpe”

$$\mathbf{A}_{\substack{\tau \\ [(-3)1+2] \\ [(-2)2+3]}} = \mathbf{A} \left( \left( \mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-3)1+2]}} \right) \left( \mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-2)2+3]}} \right) \right) = \mathbf{A} \mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-3)1+2] \\ [(-2)2+3]}} = \mathbf{L}$$

$$\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k} = \mathbf{A} \left( \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k} \right)$$

9 / 24

### 9 ¿Cómo volver de $\mathbf{L}$ a $\mathbf{A}$ ? Inversas

¿Cómo deshacer el primer paso? (fue restar 3 veces  $\mathbf{A}_{|1}$  de  $\mathbf{A}_{|2}$ )

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(-\lambda)i+j]}} \text{ “deshace” } \mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(\lambda)i+j]}}$$

¿Qué deshace  $\mathbf{I}_{\substack{\tau \\ [(\alpha)i]}}$ ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10 / 24

### 10 Matrices de intercambio

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}$$

¿Y si queremos intercambiar las filas?

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$$

¡El producto de matrices no es conmutativo!

11 / 24

## 11 Intercambios entre columnas

Intercambio de columnas:

$\mathbf{A}_{\tau_{[i \rightleftharpoons j]}} \rightarrow$  intercambia las columnas  $i$  y  $j$  de  $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{\tau_{[2 \rightleftharpoons 3]}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Podemos intercambiar dos columnas con una sucesión de transformaciones elementales

La matriz  $\mathbf{I}_{\tau_{[i \rightleftharpoons j]}}$  se denomina matriz intercambio

12 / 24

## 12 Permutaciones

Producto de matrices intercambio  $\mathbf{I}_{\tau_{[i \rightleftharpoons j]}}$  es una matriz permutación  $\mathbf{I}_{\tau_{[\sigma]}}$ .

$\mathbf{I}_{\tau_{[\sigma]}} =$  Matriz identidad  $\mathbf{I}$  con columnas reordenadas

Veamos el caso  $3 \times 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{\tau_{[1 \rightleftharpoons 2]}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

¿Cuántos posibles reordenamientos o permutaciones hay?

¿Qué obtenemos con el producto de dos matrices permutación?

13 / 24

## Problemas de la Lección 4

(L-4) PROBLEMA 1.

(a) ¿Cuáles son las matrices  $\mathbf{I}_{\tau_{[(x)1+2]}}$ ,  $\mathbf{I}_{\tau_{[(y)1+3]}}$  y  $\mathbf{I}_{\tau_{[(z)2+3]}}$  que transforman

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ en una forma escalonada?}$$

(b) Multiplique dichas matrices elementales  $\mathbf{I}_{\tau_i}$  para obtener una matriz  $\mathbf{E}$  que realice la eliminación:  $\mathbf{AE} = \mathbf{K}$ .

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 24 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) PROBLEMA 2. Considere la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

¿Para que valor(es) de  $c$  la matriz es singular (no es posible encontrar tres pivotes)?

13 / 24

(L-4) PROBLEMA 3. Suponga las siguientes matrices de orden 3 por 3.

(a)  $(\mathbf{I}_{\tau_{[(-1)1+2]}})$  resta la columna 1 de la columna 2, y luego  $(\mathbf{I}_{\tau_{[2 \rightleftharpoons 3]}})$  intercambia las columnas 2 y 3. ¿Qué matriz  $\mathbf{E}$  realiza ambos cambios a la vez?

(b)  $(\mathbf{I}_{\tau_{[2 \rightleftharpoons 3]}})$  intercambia las columnas 2 y 3 y luego  $(\mathbf{I}_{\tau_{[(-1)1+3]}})$  resta la columna 1 de la columna 3. ¿Qué matriz  $\mathbf{N} = (\mathbf{I}_{\tau_{[2 \rightleftharpoons 3]}})(\mathbf{I}_{\tau_{[(-1)1+3]}})$  realiza ambos cambios a la vez?

Explique por qué las matrices  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{N}$  son iguales en ambos casos, pero las matrices elementales  $\mathbf{I}_{\tau}$  son distintas.

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 28 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) PROBLEMA 4. Las matrices elementales  $\mathbf{I}_{\tau_{[(?)1+2]}}$  y  $\mathbf{I}_{\tau_{[(?)2+3]}}$  reducen la matriz  $\mathbf{A}$  a su forma escalonada por columnas. Encuentre la matriz  $\mathbf{E}$  tal que  $\mathbf{AE} = \mathbf{L}$  es dicha forma escalonada (triangular inferior), si  $\mathbf{A}$  es

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

13 / 24

(L-4) PROBLEMA 5. Aunque aquí sólo contemplamos como transformaciones elementales las de *Tipo I* y *II*, en la mayoría de manuales de Álgebra Lineal aparece como tercera operación elemental el *intercambio*:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[p \leftrightarrow s]{\tau} \text{ intercambia las columnas } p \text{ y } s \text{ de } \mathbf{A}.$$

Demuestre que un intercambio de columnas es en realidad una sucesión de transformaciones elementales de *Tipo I* y *II*. Hágalo transformando la matriz identidad

$$\mathbf{I}_{2 \times 2} \text{ en } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ mediante transformaciones elementales por columnas.}$$

(L-4) PROBLEMA 6. Escriba las matrices de 3 por 3 que producen los siguientes pasos de eliminación:

- (a)  $\mathbf{I} \xrightarrow{[(-5)1+2]} \tau$  resta 5 veces la columna 1 de la columna 2.  
 (b)  $\mathbf{I} \xrightarrow{[(-7)2+3]} \tau$  resta 7 veces la columna 2 de la columna 3.  
 (c) la matriz permutación  $\mathbf{I} \xrightarrow{[2 \leftrightarrow 3]} \tau$  que intercambia las columna 1 y 2, y después las columnas 2 y 3.

(Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 1.4.)

13 / 24

(L-4) PROBLEMA 10. Si cada columna de  $\mathbf{A}$  es un múltiplo de  $(1, 1, 1,)$ , entonces  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  siempre es un múltiplo de  $(1, 1, 1,)$ . Escriba un ejemplo de 3 por 3. ¿Cuántos pivotes se producen por eliminación?  
 (Strang, 2007, ejercicio 26 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) PROBLEMA 7. En referencia a las matrices del PROBLEMA 6:

(a) Al aplicar  $\xrightarrow{[(-5)1+2]} \tau$  y luego  $\xrightarrow{[(-7)2+3]} \tau$  a las columnas de la matriz  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  se obtiene  $\mathbf{A} \xrightarrow{[(-5)1+2]} \tau \xrightarrow{[(-7)2+3]} \tau = \begin{bmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{bmatrix}$ .

(b) Pero aplicando  $\xrightarrow{[(-7)2+3]} \tau$  antes de  $\xrightarrow{[(-5)1+2]} \tau$  se obtiene  $\mathbf{A} \xrightarrow{[(-7)2+3]} \tau \xrightarrow{[(-5)1+2]} \tau = \begin{bmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{bmatrix}$ .

(c) Cuando se aplica  $\xrightarrow{[(-7)2+3]} \tau$  primero, la columna \_\_\_\_ no se ve afectada por la columna \_\_\_\_\_. ¡Este hecho es central para que la factorización LU funcione como lo hace!

(Strang, 2007, ejercicio 23 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-4) PROBLEMA 8. ¿Qué matriz  $\mathbf{M}$  transforma el vector  $\mathbf{v} = (1, 0,)$  en  $(0, 1,)$ , es decir  $\mathbf{v}\mathbf{M} = (0, 1,)$ ; y también el vector  $\mathbf{w} = (0, 1,)$  en  $(1, 0,)$ , es decir  $\mathbf{w}\mathbf{M} = (1, 0,)$ ?

(L-4) PROBLEMA 9. Hemos visto que para una matriz de intercambio,  $\mathbf{I} \xrightarrow{[i \leftrightarrow j]} \tau$ , el producto  $\mathbf{A}(\mathbf{I} \xrightarrow{[i \leftrightarrow j]} \tau)$  tiene las mismas componentes que  $\mathbf{A}$ , pero las columnas están intercambiadas. ¿Qué pasaría si alteramos el orden del producto, es decir, si multiplicamos  $(\mathbf{I} \xrightarrow{[i \leftrightarrow j]} \tau)\mathbf{A}$ ? Verifique su respuesta para el caso 2 por 2.

13 / 24

## 1 Esquema de la Lección 5

### Esquema de la Lección 5

- Inversa de  $\mathbf{A}$
- eliminación Gauss-Jordan / encontrando  $\mathbf{A}^{-1}$
- Inversa de  $\mathbf{AB}$ ,  $\mathbf{A}^T$

## 2 Inversa de una matriz (matrices cuadradas)

**A** **cuadrada** de orden  $n$  tiene inversa (es *invertible*) si existe **B** tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Entonces

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}.$$

No todas las matrices tienen inversa

Las *matrices cuadradas sin inversa* se denominan *singulares*

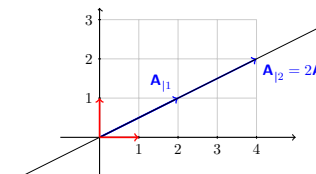
15 / 24

## 3 Caso singular (no inversa)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Es posible encontrar una matriz **B** tal que  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ ?

... columnas de **I** deben ser combinaciones lineales de columnas de **A**... pero las columnas están alineadas.



Así pues

**A** es singular

16 / 24

## 4 Caso singular (no inversa)

¿Se puede encontrar  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  tal que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow$  no puede haber  $\mathbf{A}^{-1}$

Suponer  $\mathbf{A}^{-1}$  nos lleva a una contradicción

Si  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$

Cuando existe  $\mathbf{A}^{-1}$

la única solución a  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  es  $\mathbf{x} = \mathbf{0}.$

17 / 24

## 5 Calculando la matriz inversa

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \phantom{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es resolver  $m$  sistemas (de  $m$  ecuaciones cada uno)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \phantom{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \phantom{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18 / 24

## 6 Gauss-Jordan: resolviendo dos sistemas lineales de golpe

### Eliminación Gauss-Jordan (obtención forma escalonada reducida **R**)

aplicar transformaciones elementales hasta lograr una matriz **escalonada** con únicamente **ceros a la izda.** de cada pivote (y pivotes iguales a 1)

Vamos a resolver los sistemas lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aplicando eliminación Gauss-Jordan sobre **A** apilada con **I**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \rightarrow \quad =$$

Si **R = I**, hemos encontrado **A<sup>-1</sup>**

19 / 24

## 8 Inversa de un producto

Si **A** y **B** son invertibles y del mismo orden, **(AB)** es invertible.

¿Cómo es **(AB)<sup>-1</sup>**? Probemos con **(B<sup>-1</sup>A<sup>-1</sup>)**:

$$\mathbf{AB}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) =$$

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB} =$$

21 / 24

## 7 Gauss-Jordan: ¿Por qué funciona?

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-3)\mathbf{I}_1+2]} \quad \xrightarrow{[(-2)\mathbf{I}_2+1]}$$

es decir, puesto que  $\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k})$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}_{\tau_1 \dots \tau_k} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k} \\ \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}) \\ \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k} \end{bmatrix},$$

¿quien es  $\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}$ ?

por tanto **A<sup>-1</sup>** =

20 / 24

## 9 Inversa de la matriz transpuesta

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

Hagamos la transpuesta en ambos lados

$$((\mathbf{A}^{-1})^T)\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$$

por tanto

la inversa de **A<sup>T</sup>** es

22 / 24

## 10 Matrices intercambio y matrices permutación

¿Son invertibles las matrices intercambio,  $\mathbf{I}_{\tau_{[i \Rightarrow j]}}$ ?

Es fácil comprobar que

$$\left(\mathbf{I}_{\tau_{[i \Rightarrow j]}}\right)^T \left(\mathbf{I}_{\tau_{[i \Rightarrow j]}}\right) = \mathbf{I} \quad \Rightarrow$$

23 / 24

## Problemas de la Lección 5

(L-5) PROBLEMA 1. Aplique la eliminación Gauss-Jordan para invertir estas matrices

(a)  $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

(b)  $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

(c)  $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 2.

(a) Si  $\mathbf{A}$  es invertible y  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ , demuestre rápidamente que  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ .

(b) Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , encuentre un ejemplo con  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ , pero  $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$ .

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 3. Calcule la inversa de la matriz genérica  $2 \times 2$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

¿Qué condiciones sobre  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , y  $d$  aseguran que existe la inversa?

24 / 24

## 11 Caracterización de las matrices que tienen inversa

Dada  $\mathbf{A}$  de orden  $n$ , las siguientes propiedades son equivalentes

1.  $\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_p} = \mathbf{K}$  (pre-escalónada) no tiene columnas nulas.
2.  $\mathbf{A}$  tiene inversa.
3.  $\mathbf{A}$  es producto de matrices elementales.

$$\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}) = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = (\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k})^{-1}$$

donde

$$(\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k})^{-1} = ((\mathbf{I}_{\tau_1}) \dots (\mathbf{I}_{\tau_k}))^{-1} = (\mathbf{I}_{\tau_k^{-1}}) \dots (\mathbf{I}_{\tau_1^{-1}}) = \mathbf{I}_{\tau_k^{-1} \dots \tau_1^{-1}}$$

24 / 24

(L-5) PROBLEMA 4. Calcule las inversas de las siguientes matrices, usando Gauss-Jordan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(L-5) PROBLEMA 5. Si la matriz 3 por 3  $\mathbf{A}$  es tal que  $\mathbf{A}_{|1} + \mathbf{A}_{|2} = \mathbf{A}_{|3}$ , demuestre que  $\mathbf{A}$  no es invertible de estas dos formas alternativas:

(a) Encuentre una solución  $\mathbf{x}$  diferente de cero de  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ .

(b) La eliminación preserva la condición  $columna1 + columna2 = columna3$ . Explique por qué no hay un tercer pivote.

(Strang, 2007, ejercicio 26 del conjunto de problemas 1.6.)

24 / 24



(L-5) PROBLEMA 6. Encuentre las inversas de

$$(a) \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

(Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 7. Calcule la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

¿Para qué valores de  $a$  y  $b$  no hay inversa?

(Strang, 2007, ejercicio 42 del conjunto de problemas 1.6.)

(L-5) PROBLEMA 8. Encuentre  $\mathbf{E}^2$ ,  $\mathbf{E}^8$  y  $\mathbf{E}^{-1}$  si  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.5.)

(L-5) PROBLEMA 9. Dada la matriz de permutación

$$\mathbf{I}_{\begin{smallmatrix} \tau \\ \mathfrak{S} \end{smallmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

escriba la matriz  $(\mathbf{I}_{\begin{smallmatrix} \tau \\ \mathfrak{S} \end{smallmatrix}})^{-1}$ . ¿Que otra relación tiene con la matriz  $\mathbf{I}_{\begin{smallmatrix} \tau \\ \mathfrak{S} \end{smallmatrix}}$  (aparte de ser su inversa)?

(L-5) PROBLEMA 10. La matriz  $\mathbf{A}$  de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad  $\mathbf{I}$  mediante las siguientes operaciones elementales sobre las columnas (en este orden):

$\begin{smallmatrix} \tau \\ [(-4)1+2] \end{smallmatrix}$  : Resta 4 veces columna 1 de la columna 2.

$\begin{smallmatrix} \tau \\ [(-3)1+3] \end{smallmatrix}$  : Resta 3 veces columna 1 de la columna 3.

$\begin{smallmatrix} \tau \\ [(-1)3+2] \end{smallmatrix}$  : Resta columna 3 de la columna 2.

(a) Escriba  $\mathbf{A}^{-1}$  en términos de operaciones con matrices elementales  $\mathbf{I}_{\begin{smallmatrix} \tau \\ \mathfrak{S} \end{smallmatrix}}$ . Calcule la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$ .

(b) ¿Cuál es la matriz original  $\mathbf{A}$ ?

(Basado en MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2006)

(L-5) PROBLEMA 11. La matriz  $\mathbf{A}$  de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad  $\mathbf{I}$  mediante las siguientes tres operaciones elementales sobre las filas (en el siguiente orden):

$\begin{smallmatrix} \tau \\ [(-4)1+2] \end{smallmatrix}$  : Resta 4 veces fila 1 de la fila 2.

$\begin{smallmatrix} \tau \\ [(-3)1+3] \end{smallmatrix}$  : Resta 3 veces fila 1 de la fila 3.

$\begin{smallmatrix} \tau \\ [(-1)3+2] \end{smallmatrix}$  : Resta fila 3 de la fila 2.

(a) Escriba  $\mathbf{A}^{-1}$  en términos de las matrices elementales  $\mathbf{E}$ . Calcule la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$ .

(b) ¿Cuál es la matriz original  $\mathbf{A}$ ?

(MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2006)

## (L-5) PROBLEMA 12.

(a) Encuentre la inversa de  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Encuentre la inversa de la siguiente matriz usando el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

(Poole, 2004, ejercicio 36, 38 y 59 del conjunto de problemas 3.3.)

(L-5) PROBLEMA 13. Sean  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  matrices cuadradas. Justifique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

(a) Si  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$  entonces  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ .

(b)  $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$ .

(L-5) PROBLEMA 14. Considere la matriz  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 0 & 2a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$

(a) Demuestre que  $\mathbf{A}$  es invertible para todo valor del parámetro  $a$ .

(b) Calcule  $\mathbf{A}^{-1}$  cuando  $a = 0$ .

(L-5) PROBLEMA 15. Considere la matriz  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ . Calcule  $\mathbf{A}^{-1}$ .

(L-5) PROBLEMA 16. Encuentre las inversas, si existen, de las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(L-5) PROBLEMA 17. Tan solo hay un número finito ( $n!$ ) de matrices de permutación de dimensión  $n \times n$ . Además, cualquier potencia de una matriz permutación es también una matriz permutación. Emplee este hecho para demostrar que  $(\mathbf{I}_{\tau})_{[\mathfrak{S}]}^r = \mathbf{I}$  para algún número entero  $r$ .

Poole, D. (2004). *Álgebra lineal. Una introducción moderna*.

Thomson Learning, Mexico D.F. ISBN 970-686-272-2.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom

Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN

970686609-4.