

# Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

20/01/2025

1 / 37

## 1 Esquema de la Lección 1

### Esquema de la Lección 1

- Operaciones con vectores y matrices
  - sumas y productos por escalares
  - Propiedades de estas operaciones

2 / 37

Puede encontrar la última versión de este material en

<https://mbujosab.github.io/MatematicasII/>

– Marcos Bujosa. Copyright © 2008–2025  
 Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

1 / 37

## 2 Vectores de $\mathbb{R}^n$

Vector de  $\mathbb{R}^n$  es una lista ordenada de  $n$  números reales

### Ejemplo

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ : primer componente: 5, segundo componente: 1 y tercer componente: 10

$$\mathbf{v} = \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_2 = 1 \\ v_3 = 10 \end{cases} ; \quad \mathbf{v} = (5, 1, 10) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

### Notación

- $\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{0}$
- $\text{elem}_3(\mathbf{v}) \equiv {}_3|\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_{|3} \equiv v_3 = 10$

El paréntesis alrededor de una lista de números denota un vector.

3 / 37

### 3 Operaciones básicas con vectores

Suma de vectores:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_{|i} = \mathbf{a}_{|i} + \mathbf{b}_{|i}$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ suman } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Producto por un escalar:  $(\lambda \mathbf{a})_{|i} = \lambda(\mathbf{a}_{|i})$

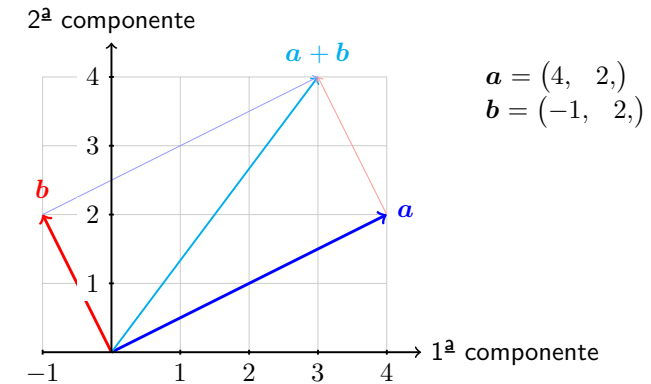
$$2\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (-1)\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} \equiv -\mathbf{a}$$

(Por tanto, el operador “ $|i$ ” es lineal)

$\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  (con  $n$  componentes) son iguales si:  $\mathbf{a}_{|i} = \mathbf{b}_{|i}$ ,  $i = 1 : n$ .

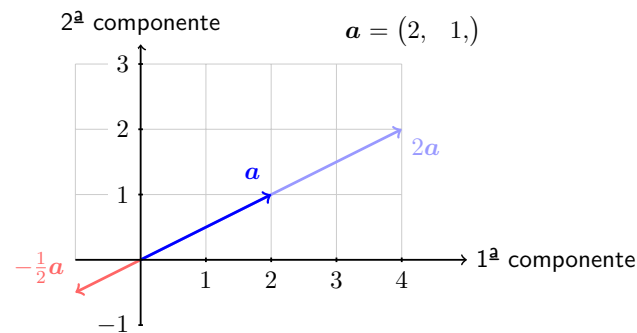
4 / 37

### 4 Suma de vectores



5 / 37

### 5 Producto de un vector por un escalar



¿Qué forman el conjunto de todos los múltiplos de  $\mathbf{a}$ ?  
¿Pertenece el  $\mathbf{0}$  a dicho conjunto?

6 / 37

### 6 Suma y producto por escalares

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})_{|i} = \mathbf{a}_{|i} + \mathbf{b}_{|i}$$

$$(\lambda \mathbf{a})_{|i} = \lambda(\mathbf{a}_{|i})$$

Recordemos algunas propiedades de los escalares

#### Escalares

1.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2.  $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3.  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4.  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5.  $\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}$
6.  $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}$
7.  $\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c}$
8.  $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

#### Vectores

1.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2.  $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3.  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4.  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5.  $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$
6.  $(\lambda + \eta)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \eta\mathbf{a}$
7.  $\lambda(\eta\mathbf{a}) = (\lambda\eta)\mathbf{a}$
8.  $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

7 / 37

## 7 Matrices

Matriz de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  es una lista ordenada de  $n$  vectores de  $\mathbb{R}^m$

### Ejemplo

Tres vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \neq [\mathbf{c}; \mathbf{b}; \mathbf{a}]$$

Dos vectores de  $\mathbb{R}^3$ :  $\mathbf{x} = (4, -1, 0)$  e  $\mathbf{y} = (2, 2, 7)$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{x}; \mathbf{y}]$$

### Notación

- $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{0}$
- $\mathbf{A}, \mathbf{B};$   
 $\begin{matrix} 2 \times 3 & 3 \times 2 \end{matrix}$        $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$   
 $\begin{matrix} 2 \times 3 & 3 \times 2 \end{matrix}$

El corchete alrededor de una lista de vectores denota una matriz.

8 / 37

## 8 Más notación

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

### Operadores que seleccionan

- $\text{elem}_{21}(\mathbf{A}) = {}_2|\mathbf{A}|_1 = a_{21} : 7$
- $\text{fila}_1(\mathbf{A}) = {}_1|\mathbf{A} : (1, 2, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\text{col}_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}|_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = (1, 7)$

9 / 37

## 9 Operaciones básicas con matrices

Suma de matrices:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})|_j = \mathbf{A}|_j + \mathbf{B}|_j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ suman } \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Producto por un escalar:  $(\lambda \mathbf{A})|_j = \lambda(\mathbf{A}|_j)$

$$7\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7a_{11} & 7a_{12} \\ 7a_{21} & 7a_{22} \end{bmatrix} \text{ y } (-1)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} = -\mathbf{A}.$$

(Por tanto, el operador “ $|_j$ ” es lineal)

$\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  (del mismo orden) son iguales si:  $\mathbf{A}|_j = \mathbf{B}|_j$

10 / 37

## 10 Suma y producto por escalares

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})|_j = \mathbf{A}|_j + \mathbf{B}|_j;$$

$$(\lambda \mathbf{A})|_j = \lambda(\mathbf{A}|_j)$$

### Vectores

1.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2.  $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3.  $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
4.  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5.  $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$
6.  $(\lambda + \eta)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \eta\mathbf{a}$
7.  $\lambda(\eta\mathbf{a}) = (\lambda\eta)\mathbf{a}$
8.  $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

### Matrices

1.  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
2.  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
3.  $\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$
4.  $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$
5.  $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$
6.  $(\lambda + \eta)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \eta\mathbf{A}$
7.  $\lambda(\eta\mathbf{A}) = (\lambda\eta)\mathbf{A}$
8.  $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

11 / 37

## 11 Reglas de reescritura

### Reglas distributivas

$$\begin{aligned} (a + b)_{|i} &= a_{|i} + b_{|i} & i_{|} (a + b) &= i_{|} a + i_{|} b \\ (A + B)_{|j} &= A_{|j} + B_{|j} & i_{|} (A + B) &= i_{|} A + i_{|} B \end{aligned}$$

Si además aceptamos que  $\lambda a = a\lambda$  y  $\lambda A = A\lambda$ , tenemos

### Reglas asociativas (desplazando el paréntesis)

$$\begin{aligned} (\lambda b)_{|i} &= \lambda (b_{|i}) & i_{|} (b\lambda) &= (i_{|} b)\lambda \\ (\lambda A)_{|j} &= \lambda (A_{|j}) & i_{|} (A\lambda) &= (i_{|} A)\lambda \end{aligned}$$

### Intercambio entre el escalar y el operador

$$\begin{aligned} (b\lambda)_{|i} &= (b_{|i})\lambda & i_{|} (\lambda b) &= \lambda (i_{|} b) \\ (A\lambda)_{|j} &= (A_{|j})\lambda & i_{|} (\lambda A) &= \lambda (i_{|} A) \end{aligned}$$

12 / 37

**Problemas de la Lección 1** — Siempre debe completar los ejercicios de las notas correspondientes a las secciones teóricas previas a cada lección

- Demuestre las propiedades de las operaciones con vectores.
- Demuestre las propiedades de las operaciones con matrices.

(L-1) **PROBLEMA 1.** Proporcione ejemplos de matrices 3 por 3 no nulas de los siguientes tipos de matrices:

- (a) Diagonal:  $i_{|} A_{|j} = 0$  si  $i \neq j$ . (b) Simétrica:  $A_{|j} = j_{|} A$ .  
 (c) Triangular superior:  $i_{|} A_{|j} = 0$  si  $i > j$ . (d) Antisimétrica:  $i_{|} A_{|j} = -j_{|} A_{|i}$ .

(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 1.4.)

12 / 37

## 1 Esquema de la Lección 2

### Esquema de la Lección 2

- Producto punto entre vectores
- Combinación lineal de vectores
- Visión por columnas de la geometría de las ecuaciones lineales

13 / 37

## 2 Producto punto

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

### Simétrico

$$x \cdot y = y \cdot x$$

### Lineal en el primer argumento

$$\begin{aligned} (ax) \cdot y &= a(x \cdot y) \\ (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \end{aligned}$$

### Positivo

$$x \cdot x \geq 0$$

### Definido

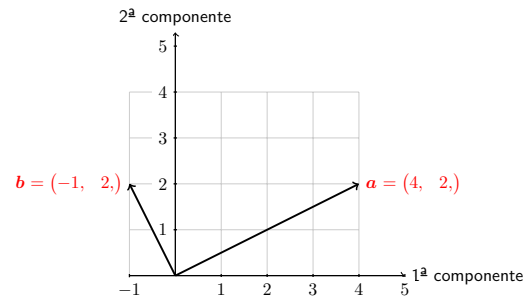
$$x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

14 / 37

### 3 Combinaciones lineales

La suma de  $xa$  y  $yb$  es una **combinación lineal** de  $a$  y  $b$

$$xa + yb = x \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{MATRIZ} \times \text{vector}$$

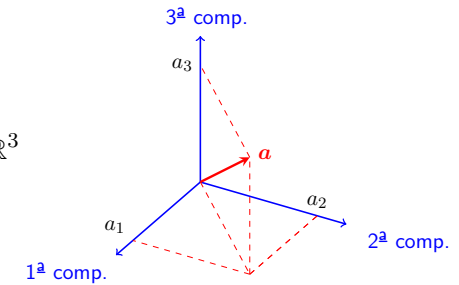


¿Es  $0$  combinación lineal de ambos vectores? ¿Qué forma el conjunto de **todas** las combinaciones lineales de  $a$  y  $b$ ?

15 / 37

### 4 Combinaciones lineales en $\mathbb{R}^3$

$$a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$



¿Qué forman el conjunto de todos los múltiplos de  $a$ ?

¿Qué forman el conjunto de todas las combinaciones lineales de dos vectores en  $\mathbb{R}^3$ ? (**Combinación lineal**)

16 / 37

### 5 Matriz por vector

$$\begin{aligned} \mathbf{A}b &= b_1 \mathbf{A}_{|1} + b_2 \mathbf{A}_{|2} + \dots + b_n \mathbf{A}_{|n} \\ &= b_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + b_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1|\mathbf{A}) \cdot b \\ \vdots \\ (i|\mathbf{A}) \cdot b \\ \vdots \\ (n|\mathbf{A}) \cdot b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así,

$$(i|\mathbf{A}b) = (i|\mathbf{A}) \cdot b$$

si omitimos el punto, podemos escribir sencillamente:  $(i|\mathbf{A}b)$

17 / 37

### 6 Matriz por vector

Si  $b \in \mathbb{R}^n$  entonces  $(\mathbf{A} \ b) \in \mathbb{R}^m$ ; donde  $(i|\mathbf{A}b) = (i|\mathbf{A}) \cdot b$

**Matriz por vector**

1.  $\mathbf{I}a = a$
2.  $\mathbf{A}(\mathbf{I}_{|j}) = \mathbf{A}_{|j}$
3.  $\mathbf{A}(b + c) = \mathbf{A}b + \mathbf{A}c$
4.  $\mathbf{A}(\lambda b) = \lambda(\mathbf{A}b)$
5.  $\mathbf{A}(\lambda b) = (\lambda \mathbf{A})b$
6.  $\mathbf{A}(\mathbf{B}c) = [\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|1}); \dots \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|n});] c$
7.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})c = \mathbf{A}c + \mathbf{B}c$

Demuestre las anteriores propiedades (Ejercicios del libro: 14 a 18)  
(use las reglas de reescritura y las propiedades del producto punto)

18 / 37

**7** Ejemplo de sistema lineal: 2 ecuaciones y 2 incógnitas

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\underbrace{\mathbf{Ax}}_{\text{¿qué combinación lineal}} = \underbrace{\mathbf{b}}_{\text{es igual a este vector?}}$$

$$x(\mathbf{A}_{|1}) + y(\mathbf{A}_{|2}) = \mathbf{b}$$

19 / 37

**8** Geometría del sistema lineal: Combinación lineal de columnas

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

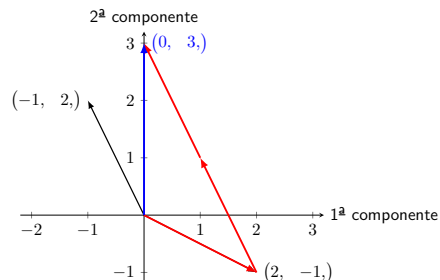
$$x \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

20 / 37

**9** 2 ecuaciones y 2 incógnitas: Visión por columnas

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

¿Qué combinación lineal de  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  da  $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ?



¿qué forma el conjunto de todas las posibles combinaciones?

21 / 37

**10** Ejemplo: 3 ecuaciones y 3 incógnitas

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ -3y + 4z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

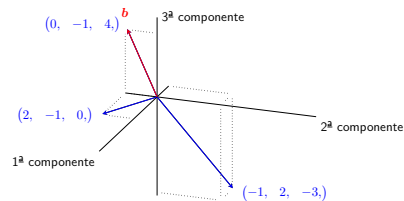
$$\underbrace{\mathbf{Ax}}_{\text{¿qué combinación lineal}} = \underbrace{\mathbf{b}}_{\text{es igual a este vector?}}$$

22 / 37

### 11 3 ecuaciones y 3 incógnitas: Visión por columnas

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

¿Qué combinación lineal de las columnas da **b**?



$$\left\{ x = \quad ; \quad y = \quad ; \quad z = \quad \right\}$$

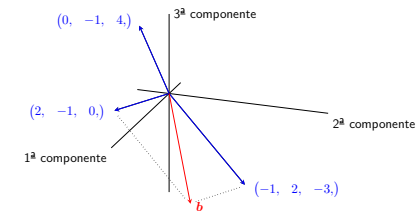
¿Y si **b** es distinto?... veamos

23 / 37

### 12 3 ecuaciones y 3 incógnitas: Visión por columnas

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

¿Qué combinación lineal de las columnas da el nuevo **b**?



$$\left\{ x = \quad ; \quad y = \quad ; \quad z = \quad \right\}$$

24 / 37

### 13 ¿Qué significa $Ax=b$ ?

$Ax$  es una combinación de las columnas de  $A$ :

**Ejemplo**

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

“ $Ax = b$ ” nos pregunta por una combinación lineal:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Para resolver sistemas lineales, antes aprenderemos a transformar las matrices de coeficientes por eliminación (próximas lecciones)

25 / 37

## Problemas de la Lección 2

Siempre debe completar los ejercicios de las secciones correspondientes del libro

(L-2) PROBLEMA 1. Opere con las columnas para calcular los siguientes productos

(a)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 1.4.)

25 / 37

(L-2) PROBLEMA 2. Decida si el sistema de ecuaciones tiene solución:

$$\begin{aligned}x + 2y &= 2 \\x - y &= 2 \\y &= 1.\end{aligned}$$

¿Qué ocurre si todos los miembros de la derecha son cero? ¿Hay otras opciones diferentes de cero para los miembros derechos que permitan que el sistema tenga solución? ¿Cuántas opciones más? (Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 1.2.)

(L-2) PROBLEMA 3. Sean  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Compruebe que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ . ¿Puede encontrar más soluciones para  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ?

### Pista

Intente con un vector  $\mathbf{x}$  con su primera componente igual a 4. Intente también cambiando el signo de  $\mathbf{x}$ . Intente alguna solución más. ¿Cuántas soluciones puede encontrar?

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-2) PROBLEMA 4. Suponga que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tiene dos soluciones  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  (sabiendo además que  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ). Demuestre entonces que  $\frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w})$  es también solución, aunque  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  no lo es.

### Pista

Emplee las propiedades:  $\mathbf{A}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{Ab} + \mathbf{Ac}$  y  $\mathbf{A}(c\mathbf{b}) = c(\mathbf{Ab})$ .

(L-2) PROBLEMA 5. “Es imposible que un sistema de ecuaciones lineales tenga exactamente dos soluciones”. Explique por qué contestando al siguiente apartado:

(a) Si  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son dos soluciones, ¿que otras soluciones existen? diga al menos una más.

(Strang, 2007, ejercicio 18 del conjunto de problemas 1.3.)

(L-2) PROBLEMA 6. Dibuje  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ , junto con  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ,  $2\mathbf{v} + \mathbf{w}$ , y  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  en el plano en cuyos ejes se representan la primera y segunda componentes de los vectores.

(L-2) PROBLEMA 7. Represente gráficamente la visión por columnas del siguiente sistema cuya solución es  $x = 3$  e  $y = -1$ .

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

(L-2) PROBLEMA 8. Represente gráficamente la visión por columnas del siguiente sistema .

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} ; \quad \left( \text{su solución es : } x = 1 + \frac{1}{3}, \quad y = -\frac{1}{3} \right).$$

No deje de hacer los ejercicios del libro.

## 1 Esquema de la Lección 3

### Esquema de la Lección 3

- Producto matricial:  $(\mathbf{AB})_{ij} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{ij})$ 
  - Propiedades
- Transpuesta de una matriz
- $\mathbf{Ax}$  y  $\mathbf{xA}$  (combinaciones lineales)
- Otras formas de calcular el producto
- Transpuesta de  $\mathbf{AB}$



## 2 Multiplicación matricial (por columnas)

Columna  $j$  del producto de  $\mathbf{A}$  con  $\mathbf{B}$  es:

$m \times p$   $p \times n$

$$(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j}) \rightarrow \mathbf{AB}_{|j}$$

Cada columna de  $\mathbf{AB}$  es una combinación de las  $p$  columnas de  $\mathbf{A}$

### Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|1}); & \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|2}); \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 11 & 18 \\ 13 & 24 \end{bmatrix}$$

27 / 37

## 3 Propiedades del producto de matrices

### MATRIZ $\times$ MATRIZ = MATRIZ

1.  $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$  recuerde  $\mathbf{A}(\mathbf{Bc}) = [\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|1}); \dots \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|n});] c$
2.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ .
3.  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ .
4.  $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \lambda(\mathbf{AB})$ .
5.  $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$ .
6.  $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$ .

28 / 37

## 4 Matrices transpuestas

### Transpuesta

$$(\text{columna } i \text{ de } \mathbf{A}^T) = (\text{fila } i \text{ de } \mathbf{A}) \leftrightarrow (\mathbf{A}^T)_{|i} = {}_i\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^T =$$

$${}_i\mathbf{A}_{|j} = {}_{j|}(\mathbf{A}^T)_{|i}; \quad (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}; \quad {}_{j|}(\mathbf{A}^T) = \mathbf{A}_{|j}$$

### Matrices simétricas $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ & 2 & 9 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

29 / 37

## 5 Vectores, matrices fila y matrices columna

$$(1, 3, -10) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}; \quad \text{pero} \quad [1 \ 3 \ -10] \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}_2\mathbf{A} = (2, 3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_{|1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1, 2, 4)$$

Al encerrar entre corchetes una lista vectores generamos una matriz cuyas columnas son dichos vectores

$$[{}_3\mathbf{A}; \ {}_1\mathbf{A};] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^T = [{}_1\mathbf{A}; \ {}_2\mathbf{A}; \ {}_3\mathbf{A};]$$

30 / 37

## 6 Combinaciones lineales de filas y columnas

### Combinaciones lineales de columnas

$$\begin{bmatrix} \diamond & \clubsuit \\ \heartsuit & \spadesuit \\ \diamond & \clubsuit \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \diamond \\ \heartsuit \\ \diamond \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} \clubsuit \\ \spadesuit \\ \clubsuit \end{pmatrix}$$

**MATRIZ**  $\times$  **vector** = **vector**

### Combinaciones lineales de filas

$$(1, 2, 7) \begin{bmatrix} \diamond & \clubsuit \\ \heartsuit & \spadesuit \\ \diamond & \clubsuit \end{bmatrix} = 1 (\diamond, \clubsuit) + 2 (\heartsuit, \spadesuit) + 7 (\diamond, \clubsuit)$$

**vector**  $\times$  **MATRIZ** = **vector**

Combinaciones lineales  $\longrightarrow$

$$\mathbf{aB} = (\mathbf{B}^T \mathbf{a})$$

31 / 37

## 7 Vector por matriz

Recuerde que  ${}_i(\mathbf{Ab}) = ({}_i\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}$ ; por tanto

$$(\mathbf{aB})_{|j} = {}_j(\mathbf{aB}) = {}_j((\mathbf{B}^T \mathbf{a})) = ({}_j(\mathbf{B}^T)) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{B}_{|j}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{B}_{|j})$$

### Reglas de re-escritura

$${}_i(\mathbf{Ab}) = ({}_i\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}$$

y

$$(\mathbf{aB})_{|j} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{B}_{|j})$$

que, omitiendo el punto, podemos reescribir sencillamente como

$${}_i\mathbf{Ab} \quad \text{y} \quad \mathbf{aB}_{|j}$$

32 / 37

## 8 Multiplicación matricial: filas por columnas

Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , entonces:

$m \times p$     $p \times n$

$${}_i(\mathbf{AB})_{|j} = ({}_i\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B}_{|j})$$

### Demostración.

Recuerde que  ${}_i(\mathbf{Ab}) = ({}_i\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}$ , por tanto

$${}_i(\mathbf{AB})_{|j} = {}_i((\mathbf{AB})_{|j}) = {}_i(\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})) = ({}_i\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B}_{|j})$$

□

Así, si omitimos el punto, podemos escribir sencillamente

$${}_i\mathbf{AB}_{|j}$$

33 / 37

## 9 Multiplicación matricial (por filas)

Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , entonces:

$m \times p$     $p \times n$

$${}_i(\mathbf{AB}) = ({}_i\mathbf{A})\mathbf{B}$$

### Demostración.

Veamos que las componentes  $j$ -ésimas son iguales:

$$({}_i(\mathbf{AB}))_{|j} = {}_i((\mathbf{AB})_{|j}) = ({}_i\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B}_{|j}) = ({}_i\mathbf{A})\mathbf{B}_{|j}$$

por tanto  ${}_i(\mathbf{AB}) = ({}_i\mathbf{A})\mathbf{B}$ .

□

Así pues, podemos escribir sencillamente

$${}_i\mathbf{AB}$$

34 / 37

## 10 Multiplicación matricial (por filas)

Cada fila de  $\mathbf{AB}$  es combinación de las  $p$  filas de  $\mathbf{B}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 11 & 18 \\ 13 & 24 \end{bmatrix} \text{ donde } \begin{cases} (2, 1) \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (3, 12) \\ (3, 8) \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (11, 18) \\ (4, 9) \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (13, 24) \end{cases}$$

35 / 37

## Librería `nacl` para Python

Revise la implementación de las operaciones del álgebra matricial en la librería `nacl` para Python que acompaña al curso:

Sección 1.3 de la documentación (o estudie directamente el código).

<https://github.com/mbujosab/nacllib>

Verá que el código es una traducción literal de las *definiciones* vistas aquí; pero que **no hay ni una línea de código que describa las propiedades** que hemos demostrado en estas tres lecciones. ¡No es necesario! Las definiciones implican las propiedades (como hemos comprobado teóricamente con las demostraciones de estas lecciones). Verifique con ejemplos que todas las propiedades se cumplen. Estudie los *notebooks de Jupyter* correspondientes a las tres primeras lecciones.

37 / 37

## 11 Transpuesta de un producto de matrices

Puesto que

- $(\mathbf{A}^T)_{|j} = {}_j\mathbf{A}$
- $\mathbf{aB} = (\mathbf{B}^T)\mathbf{a}$

resulta que:

$$(\mathbf{AB})^T = (\mathbf{B}^T)(\mathbf{A}^T)$$

Demostración.

$$(\mathbf{AB})^T_{|j} = {}_j\mathbf{AB} = (\mathbf{B}^T)({}_j\mathbf{A}) = (\mathbf{B}^T)(\mathbf{A}^T)_{|j}.$$

□

El producto de una matriz con su transpuesta siempre es simétrico

36 / 37

## Problemas de la Lección 3

No deje de hacer los ejercicios del libro.

(L-3) PROBLEMA 1. Calcule los siguientes productos de matrices (en el orden indicado)  $\mathbf{EF}$ ,  $\mathbf{FE}$  y  $\mathbf{E}^2$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

(Strang, 2007, ejercicio 34 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) PROBLEMA 2. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas (en este caso proporcione además un contraejemplo).

- Si las columnas 1 y 3 de  $\mathbf{B}$  son iguales, también las columnas 1 y 3 de  $\mathbf{AB}$  son iguales.
- Si las filas 1 y 3 de  $\mathbf{B}$  son iguales, también las filas 1 y 3 de  $\mathbf{AB}$  son iguales.
- Si las filas 1 y 3 de  $\mathbf{A}$  son iguales, también las filas 1 y 3 de  $\mathbf{AB}$  son iguales.
- $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$ .

(Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 1.4.)

37 / 37

(L-3) PROBLEMA 3. Sean los vectores

$\mathbf{a} = (1, -2, 7)$  y  $\mathbf{b} = (3, 5, 1)$ . Calcule los siguientes productos

(a)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$  (b)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  (c)  $[\mathbf{a}][\mathbf{b}]^T$

(Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) PROBLEMA 4. Escriba las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  de 2 por 2 cuyos elementos son  $a_{ij} = i + j$  y  $b_{ij} = (-1)^{i+j}$ . Multiplíquelas para encontrar  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{BA}$ .

(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) PROBLEMA 5. El producto de dos matrices triangulares inferiores es nuevamente una matriz triangular inferior (todos sus elementos por encima de su diagonal principal son nulos). Confirme esto con un ejemplo 3 por 3, y luego explique por qué este hecho se deduce de las leyes de multiplicación de matrices.

(Strang, 2007, ejercicio 12 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-3) PROBLEMA 6. Sean  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{F}$  las matrices de más abajo.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule (en particular, ¡note que  $\mathbf{EF} \neq \mathbf{FE}$ !)

(a)  $\mathbf{B} + \mathbf{D}$  (b)  $2\mathbf{E} - \mathbf{F}$  (c)  $\mathbf{AC}$   
 (d)  $\mathbf{BC}$  (e)  $\mathbf{CB}$  (f)  $\mathbf{ACD}$   
 (g)  $\mathbf{EF}$  (h)  $\mathbf{FE}$  (i)  $\mathbf{CEF}$

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomson Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.