Examenes finales

Actualizado el: 23 de mayo de 2025

Tabla de Contenido

1. Exámenes finales pasados

Examen final.

Nombre: ______________________________ Grupo: ________

Nombre del profesor: ______________________________

- Ponga su nombre en todas las hojas que emplee.
- Resuelva **SOLO DOS** de los tres *EJERCICIOS LARGOS* y **TODAS** las *PREGUNTAS CORTAS*
- Cada ejercicio largo vale 2.5 puntos. Cada apartado de las preguntas cortas 0.5 puntos.
- **Conteste exactamente lo que se le pregunta**.
- Muestre sus cálculos y explique sus respuestas con claridad.
- **Prohibidos** dispositivos electrónicos, calculadoras, libros o notas de cualquier clase.
- Tiempo total: 2 horas

1.1. Final Mayo 24/25

EJERCICIO 1. Sean $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; y sea $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$.

Responda los apartados siguientes SIN HALLAR EXPLÍCITAMENTE la matriz $\mathbf{A}$.

(a) (0.5^{pts}) Halle los autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$ y demuestre que $\mathbf{A}$ es simétrica.
(b) (0.5^{pts}) Resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(c) (0.5^{pts}) Resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ si $\boldsymbol{b}$ es la suma de las columnas de $\mathbf{A}$.
(d) (0.5^{pts}) Halle una base para el subespacio vectorial generado por los vectores columna de $\mathbf{A}$.
(e) (0.5^{pts}) Exprese la forma cuadrática con matriz $\mathbf{A}$ como suma de cuadrados (forma canónica o reducida).

EJERCICIO 2. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & b \\ a & -2 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Halle los autovalores de $\mathbf{A}$ y encuentre el conjunto de valores de los parámetros a y b para los que $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

Para lo siguiente, asuma: $a = 1$ *y* $b = 0$.

(b) (0.5^{pts}) Halle una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de $\mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) Exprese el vector $\boldsymbol{w} = (4, \quad 3, \quad 4,)$ en la base de autovectores hallada en (b).
(d) (0.5^{pts}) ¿Existe $\mathbf{A}^{-1}$? En caso afirmativo calcule $(\mathbf{A}^{-1})\boldsymbol{w}$; siendo $\boldsymbol{w} = (4, \quad 3, \quad 4,)$.
(e) (0.5^{pts}) Calcule $\mathbf{A}^k$ siendo k un número par (no se le pide un ejemplo, se le pide la expresión general de $\mathbf{A}^k$ cuando k es par).

EJERCICIO 3. Considere el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes: $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$. Sean las siguientes listas (o conjuntos) de vectores:

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= [\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}; \quad \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}; \quad \boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}; \quad \boldsymbol{d};\ ] \\ \mathsf{B} &= [\ \boldsymbol{a}; \quad \boldsymbol{b}; \quad \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c};\ ] \\ \mathsf{C} &= [\ \boldsymbol{a}; \quad \boldsymbol{b}; \quad \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b};\ ] \\ \mathsf{D} &= [\ \boldsymbol{a}; \quad \boldsymbol{b}; \quad \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}; \quad \boldsymbol{c};\ ] \end{aligned}$$

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que los vectores en A constituyen una base de $\mathbb{R}^4$.
(b) (0.5^{pts}) Halle la dimensión de cada uno de los subespacios generados por B, C y D.

Para lo siguiente, asuma: $\boldsymbol{a} = (1, \quad 1, \quad 0, \quad 1,)$, $\boldsymbol{b} = (1, \quad 0, \quad 0, \quad 1,)$ *y* $\boldsymbol{c} = (0, \quad 1, \quad 0, \quad 1,)$.

(c) (0.5^{pts}) Uno de los conjuntos (A, B, C ó D) es un sistema generador de un plano en $\mathbb{R}^4$ que pasa por el origen. Identifique dicho conjunto y obtenga unas ecuaciones cartesianas para dicho plano.
(d) (0.5^{pts}) Sea $\boldsymbol{y} = (-3, \quad 1, \quad 0, \quad -3,)$ ¿Es $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}\}$ base de $\mathbb{R}^4$? Si no lo es, encuentre qué condiciones debe cumplir un vector $\boldsymbol{y}$ para que $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}\}$ sea base de $\mathbb{R}^4$ y proponga un vector $\boldsymbol{y}$ que las cumpla.
(e) (0.5^{pts}) Obtenga la tercera columna de la inversa de $\mathbf{A} = [\ \boldsymbol{a}; \quad \boldsymbol{b}; \quad \boldsymbol{c}; \quad \boldsymbol{y};\ ]$ donde $\boldsymbol{y}$ es el vector que usted haya empleado en el apartado anterior para completar la base de $\mathbb{R}^4$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. El conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es

$$\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R}; \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Escriba una base del subespacio vectorial $\mathcal{W} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \right\}$.
(b) Halle unas ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial generado por las filas de $\mathbf{A}$.
(c) Halle una matriz $\mathbf{A}$ y un vector $\boldsymbol{b}$ para los que $\mathcal{S}$ sea el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Sea $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ definida positiva y $\underset{n\times n}{\mathbf{B}}$ definida negativa.

(a) ¿Cuál es el signo de la traza de $\mathbf{C} = \mathbf{BA}(\mathbf{B}^{-1})$?
(b) Si n es par ¿cuál es el signo del determinante de $\mathbf{AB}$? ¿Y si n es impar?

(c) Demuestre que $\mathbf{C} = \mathbf{A} - b\mathbf{I}$ es simétrica para cualquier número real b.
(d) Sea $\lambda = b$ el menor de los autovalores de $\mathbf{A}$. Clasifique la forma cuadrática con matriz $\mathbf{C} = \mathbf{A} - b\mathbf{I}$.
(e) Considere $\mathbf{A}$ (de orden 3) cuyos autovalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. ¿Es $\left(\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}\right)$ invertible?

Conjunto de preguntas 3. Suponga que

(a) $\mathbf{A}$ es de orden n y que existe $\mathbf{A}^{-1}$. Si es posible, escriba una base para
- el subespacio vectorial *generado por las columnas de* $\mathbf{A}$.
- el subespacio vectorial formado por las *soluciones de* $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(b) $\mathbf{B}$ es de orden m por n y con columnas linealmente independientes. ¿Qué relación hay entre m y n?

1.2. Final Julio 23/24

EJERCICIO 1. Sea $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 = -2\boldsymbol{v}_1$, $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_2$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_3$, donde

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable? ¿Es simétrica? Explique su respuesta.
(b) (0.5^{pts}) Resuelva el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{v}_2$.
(c) (0.5^{pts}) Resuelva el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$.
(d) (0.5^{pts}) Calcule $(\mathbf{A}^3)\boldsymbol{x}$ si $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$.
(e) (0.5^{pts}) Clasifique la forma cuadrática asociada a la matriz $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$.
Pista: *No necesita calcular explícitamente* $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ *para contestar*

EJERCICIO 2. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\alpha & \alpha & \alpha\\ \alpha & \alpha & \alpha\\ \alpha & \alpha & \alpha\end{bmatrix}$ con $\alpha \neq 0$.

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que $\lambda = 0$ es un autovalor de $\mathbf{A}$. Calcule todos los autovalores de $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) Calcule los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 0$.
(c) (0.5^{pts}) Si es posible, encuentre $\mathbf{P}$ invertible y $\mathbf{D}$ diagonal tal que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}(\mathbf{P}^{-1})$.
(d) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{B}$ es *semi*definida positiva y $\mathbf{C}$ es definida positiva, demuestre que su suma, $\mathbf{M} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, es una matriz definida positiva.
(e) (0.5^{pts}) Halle la matriz $\mathbf{M}$ asociada a la siguiente forma cuadrática. Use el *resultado del apartado* (d) para clasificar la forma cuadrática

$$q(x, y, z) = x^2 \cdot (1 + \pi) + 2xy + 2xz + 3y^2 + 2yz + 4z^2.$$

La clasificación usando cualquier otro método no será aceptada.
Pista: *Preste atención a la estructura de la matriz correspondiente a la forma cuadrática* $q(x, y, z)$.

EJERCICIO 3. Sea $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ de rango 2 y tal que $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}$ donde $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Halle los valores m y n y demuestre que la primera y última columnas de $\mathbf{A}$ son iguales.
(b) (0.5^{pts}) Halle la dimensión del subespacio vectorial formado por las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Encuentre una base para dicho subespacio que esté formada por alguna(s) columnas de $\mathbf{B}$.
(c) (1^{pts}) ¿Es alguna columna de $\mathbf{B}$ solución del sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (2, \quad 2, \quad 2, \quad 2,)$? Escriba todas las soluciones de dicho sistema.
(d) (0.5^{pts}) Halle unas ecuaciones cartesianas para el subespacio vectorial generado por las filas de $\mathbf{A}$.

Pista: *No es necesario hallar la matriz* $\mathbf{A}$ *para responder estas cuestiones.*

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) Ningún vector puede ser perpendicular a si mismo.
(b) Las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{\intercal}$ siempre tienen el mismo rango.
(c) Si una matriz cuadrada es de rango completo entonces es diagonalizable.
(d) Si $\mathsf{B} = [\ \boldsymbol{u}; \quad \boldsymbol{v}; \quad \boldsymbol{w};\ ]$ es una base de un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^4$ entonces

$$\mathsf{G} = [\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}; \quad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}; \quad \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}; \quad \boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w};\ ]$$

es un sistema generador de $\mathcal{S}$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 4\\ 1 & 1 & 4 & p\end{bmatrix}$.

(a) Escriba los valores de p para los que $\mathbf{A}$ invertible
(b) Escriba los valores de p para los que una de las columnas de $\mathbf{A}^{-1}$ es $(-1, \quad -1, \quad -1, \quad 1,)$?

(c) Clasifique la forma cuadrática con matriz **A** en función del parámetro p.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 3. Considere el siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x + y = 0 \right\}.$$

Escriba lo siguiente:

(a) La dimensión y una base ortonormal del subespacio vectorial $\mathcal{S}$.
(b) Las coordenadas del vector $\begin{pmatrix} -2, & 2, & 1, \end{pmatrix}$ en la base hallada en el apartado anterior.
(c) Unas ecuaciones cartesianas para la recta que pasa por el punto $\mathbf{0}$ y tiene a $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, \end{pmatrix}$ como vector director.

1.3. Final Mayo 23/24

Ejercicio 1. Considere el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$, del que se sabe que las soluciones son un plano P que pasa por el punto $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix}0, & 1, & 0,\end{pmatrix}$ y tiene por vectores directores $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1, & 1, & 0,\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}0, & 1, & 1,\end{pmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Proporcione toda la información posible sobre m, n, $\boldsymbol{b}$ y el rango de $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) Resuelva $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, si $\boldsymbol{c}$ es la suma de la primera y tercera columnas de $\mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) Encuentre una base **ortogonal** para el subespacio vectorial formado por las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y halle las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ respecto de dicha base.
(d) (1^{pts}) Suponga ahora que $m = n$. Halle una matriz $\mathbf{A}$ que cumpla las condiciones anteriores. Halle los autovalores de $\mathbf{A}$ y estudie si $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

Ejercicio 2. Sea $\mathbf{A}$ de orden 3 **simétrica** y **NO invertible** que cumple $\mathbf{A}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & -8\\ 8 & 6\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Halle los autovalores de $\mathbf{A}$ y encuentre una base para el conjunto de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(b) (0.5^{pts}) Encuentre, si es posible, una base **no ortogonal** de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de $\mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) Clasifique la forma cuadrática con matriz $\mathbf{A}$.
(d) (1^{pts}) Exprese la forma cuadrática con matriz $\mathbf{A}$ como suma de cuadrados.

Indicación: *Para contestar a esas cuestiones no necesita hallar $\mathbf{A}$, basta usar las condiciones del enunciado para hallar una base de autovectores de $\mathbf{A}$ y los correspondientes autovalores.*

Ejercicio 3. Suponga que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución (quizá tiene muchas). Puede demostrase que cualquier solución $\boldsymbol{x}$ de dicho sistema puede descomponerse como suma de dos vectores ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_f + \boldsymbol{x}_n$) donde $\boldsymbol{x}_f$ es combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{x}_n$ pertenece al subespacio vectorial de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_f) = \boldsymbol{b}$.
(b) (1^{pts}) Suponga que $\boldsymbol{v}_f$ es combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$ y que además $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_f) = \boldsymbol{b}$. ¿A qué subespacios vectoriales pertenece la diferencia $(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{x}_f)$? Demuestre que $\boldsymbol{x}_f$ y $\boldsymbol{v}_f$ son iguales.
(c) (1^{pts}) Encuentre la solución $\boldsymbol{x}_f$ del subespacio vectorial generado por las filas de $\mathbf{A}$, para el siguiente sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, encontrando los valores c y d que cumplen

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_f = \begin{pmatrix}14\\ 9\end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{x}_f = c\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Conjunto de preguntas 1. Considere $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tales que $\begin{cases}\mathbf{A} \text{ es } 4\times 4 \text{ y } |\mathbf{A}| = 2\\ \mathbf{B} \text{ es } 2\times 4 \text{ y } |\mathbf{B}\mathbf{B}^{\intercal}| = 1\end{cases}$.

Indique, cuando sea posible, cada uno de los siguientes valores:

(a) $\operatorname{rg}\big(\mathbf{B}\big)$ y $\operatorname{rg}\big(\mathbf{BA}\big)$
(b) $|2\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B}|$
(c) $|(\mathbf{A}^{-1})\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B}|$
(d) $\left|\mathbf{A}_{|2};\ \mathbf{A}_{|1} + \mathbf{A}_{|3};\ \mathbf{A}_{|3};\ 2\mathbf{A}_{|4};\right|$ donde $\mathbf{A}_{|j}$ denota la columna j-ésima de $\mathbf{A}$.

Conjunto de preguntas 2. Sea la forma cuadrática $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}x, & y, & z,\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & a\\ 0 & a & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

Halle, si existieran, todos los valores del parámetro a de manera que $f(\boldsymbol{x})$ sea:

(a) Definida negativa.
(b) Indefinida.

Conjunto de preguntas 3. Dada la matriz identidad $\mathbf{I}$ de orden n y $\mathbf{B}$ de orden $4 \times m$. Si

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{B}\big(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B}\big)^{-1}\mathbf{B}^{\intercal}$$

(a) Halle todos los valores de m, n y $\operatorname{rg}\big(\mathbf{B}\big)$ para los que pueda darse la relación anterior.
(b) Demuestre que $\mathbf{A}$ es idempotente (i.e., $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$).
Pista: *¿Es $\mathbf{M} = \mathbf{B}\big(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B}\big)^{-1}\mathbf{B}^{\intercal}$ idempotente?*
(c) Pruebe que las filas de $\mathbf{A}$ son ortogonales a las columnas de $\mathbf{B}$.
(d) Halle la matriz $\mathbf{A}$ si $m = 4$ (es decir, si $\mathbf{B}$ es cuadrada).

1.4. Final Junio 22/23

EJERCICIO 1. El vector $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ constituye una base del subespacio vectorial $\mathcal{W} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ donde $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$. Se pide

(a) (0.5$^{\text{pts}}$) El valor de n (si es posible). El rango de $\mathbf{A}$. El valor de m (si es posible) **(son tres ítems)**.
(b) (0.5$^{\text{pts}}$) Resuelva el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, donde $\boldsymbol{c}$ es la primera columna de $\mathbf{A}$.
(c) (0.5$^{\text{pts}}$) Una matriz $\mathbf{A}$ tal que $\boldsymbol{u}$ constituya una base de $\mathcal{W}$.
(d) (0.5$^{\text{pts}}$) Unas ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{BA}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ donde $\underset{m\times m}{\mathbf{B}}$ y $|\mathbf{B}| \neq 0$.
(e) (0.5$^{\text{pts}}$) Dimensión y unas ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial generado por las filas de $\mathbf{A}$.

EJERCICIO 2. Sea $\underset{m\times n}{\mathbf{C}}$, con $m \geq n$, tal que $\mathbf{C}^\intercal\mathbf{C}$ es invertible y sean $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{z}$ vectores tales que:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \left(\mathbf{C}^\intercal\mathbf{C}\right)^{-1}(\mathbf{C}^\intercal)\boldsymbol{z}.$$

(a) (0.5$^{\text{pts}}$) Demuestre que el rango de $\mathbf{C}$ es n.
Pista: Recuerde la relación entre $\text{rg}(\mathbf{AB})$ y $\text{rg}(\mathbf{B})$; o entre las columnas de $\mathbf{AB}$ y las de $\mathbf{A}$.
(b) (0.5$^{\text{pts}}$) Si $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$, ¿qué relación existe entre $\boldsymbol{z}$ y las columnas de $\mathbf{C}$?
(c) (0.5$^{\text{pts}}$) Si $m = n$ y $\mathbf{C}$ es ortogonal, demuestre que la longitud de $(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u})$ y de $\boldsymbol{z}$ son iguales.
(d) (0.5$^{\text{pts}}$) ¿Es $\mathbf{C}^\intercal\mathbf{C}$ diagonalizable?
(e) (0.5$^{\text{pts}}$) Suponga que $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. Calcule la inversa de $\mathbf{C}^\intercal\mathbf{C}$.

EJERCICIO 3. Sea $\mathbf{A} = \mathbf{PD}(\mathbf{P}^{-1})$ donde $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&0&-2\end{bmatrix}$ y $\mathbf{D} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(a) (0.5$^{\text{pts}}$) Demuestre que las columnas de $\mathbf{P}$ son autovectores de $\mathbf{A}$ (explique su razonamiento).
(b) (0.5$^{\text{pts}}$) Encuentre, si es posible, una matriz $\mathbf{C}$ (con no todas sus columnas perpendiculares entre si) y tal que $\mathbf{A} = \mathbf{CD}(\mathbf{C}^{-1})$.
(c) (0.5$^{\text{pts}}$) Encuentre, si es posible, una matriz $\mathbf{Q}$ ortogonal tal que $\mathbf{A} = \mathbf{QD}(\mathbf{Q}^\intercal)$.
(d) (1$^{\text{pts}}$) Sea $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1}$. Demuestre que $\mathbf{B}$ es la matriz de una forma cuadrática y encuentre una expresión polinómica para ella como suma de cuadrados.

Pista: *Para responder a estas cuestiones es recomendable no hallar explícitamente la matriz* $\mathbf{A}$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1.

(a) Demuestre que las columnas de $\underset{3\times 3}{\mathbf{B}}$ son una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ si $\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B} = \begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$.
(b) La ecuación característica de una matriz $\underset{4\times 4}{\mathbf{A}}$ es $\lambda(\lambda-1)(\lambda^2-4) = 0$. Encuentre todos los valores de β para los que el sistema $(\mathbf{A} - \beta\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene solución única.
(c) Sea $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ donde $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&2\\4&5\\2&7\end{bmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}3&1&3\\1&2&1\end{bmatrix}$. Sin hallar explícitamente $\mathbf{A}$, encuentre una base del subespacio vectorial generado por las columnas de $\mathbf{A}$ (justifique su respuesta).

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Sea $\mathcal{H} = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\right]\right)$ y $\mathcal{G} = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\right]\right)$.

(a) Halle unas ecuaciones cartesianas para $\mathcal{H}$ y para $\mathcal{G}$.
(b) Halle todos los vectores que están simultáneamente en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G}$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 3. Sea $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}-1&-1&0&0\\-1&-2&0&0\\0&0&-1&-1\\0&0&-1&-a\end{bmatrix}$.

(a) Halle los valores de a para los que $\mathbf{P}$ es invertible.

(b) Asumiendo que $\mathbf{P}$ es invertible. ¿Para qué valores de a es $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ la tercera columna de $\mathbf{P}^{-1}$?

(c) Halle, si existen, los valores de a para los que la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{P}\boldsymbol{x}$ es definida negativa.

Conjunto de preguntas 4.

(a) ¿Es cierta la afirmación "Si $\mathbf{BA} = \mathbf{A}$ entonces $\mathbf{B}$ es la matriz identidad"? (Justifique su respuesta).

(b) Sean $\underset{3\times 2}{\mathbf{A}}$ y $\underset{2\times 4}{\mathbf{D}}$; y sea $\mathbf{C}$ de rango completo por filas. ¿Es posible que $\mathbf{C} = \mathbf{AD}$? Razone su respuesta.

1.5. Final Mayo 22/23

EJERCICIO 1. El conjunto de soluciones de $\underset{4\times 5}{\mathbf{A}}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es $\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, \exists a, b \in \mathbb{R} : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$.

(a) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el rango de la matriz $\mathbf{A}$? ¿Es $\boldsymbol{b}$ igual a alguna de las columnas de $\mathbf{A}$?

(b) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{E}$ es invertible y $\mathbf{B} = \mathbf{AE}$, ¿coincide el subespacio generado por las columnas de $\mathbf{A}$ con el subespacio generado por las columnas de $\mathbf{B}$?

(c) (0.5^{pts}) ¿Es $\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}; \right]$ una base del subespacio generado por las filas de $\mathbf{A}$?

(d) (0.5^{pts}) Escriba unas ecuaciones cartesianas para el subespacio formado por las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (¡mejor pensar que calcular!).

(e) (0.5^{pts}) ¿Pertenece el vector $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}-1, & -2, & 1, & 0, & 0,\end{pmatrix}$, al subespacio vectorial formado por las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$? En caso afirmativo, escriba una base de ese subespacio y escriba las coordenadas del vector $\boldsymbol{v}$ en dicha base.

EJERCICIO 2. Sea $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & c \end{bmatrix}$, donde a y c son parámetros, y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Estudie para qué valores de a y c y qué vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema es compatible.

(b) (1^{pts}) Resuelva $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (con $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2, & 1, & -1,\end{pmatrix}$) para los valores a y c tales que el sistema es resoluble.

(c) (0.5^{pts}) Halle, si existen, los valores de a y c para los que $\mathsf{B} = \left[\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}; \right]$ es base del conjunto de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(d) (0.5^{pts}) Halle, si existen, los valores a y c para los que el espacio generado por las filas de $\mathbf{A}$ coincide con el espacio generado por las filas de $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

EJERCICIO 3. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & b & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que existe $\mathbf{A}^{-1}$.

(b) (0.5^{pts}) Halle los valores del parámetro b para los cuales $\mathbf{A}^{-1}$ es diagonalizable (*nótese que es la inversa*).

(c) (0.5^{pts}) Para los valores de b del apartado anterior, encuentre una base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovectores de $\mathbf{A}$ (*nótese que ahora se pregunta por* $\mathbf{A}$).

(d) (1^{pts}) Sea $\underset{4\times 4}{\mathbf{B}}$ con $|\mathbf{B}| = 2$. Calcule: $|2\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{B}|$, $|\mathbf{AB} - \mathbf{B}|$ y $\operatorname{tr}\left(\mathbf{BAB}^{-1}\right)$

Pista: *No necesita calcular* $\mathbf{A}^{-1}$ *para responder a ninguno de los apartados.*

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) Sea $\mathbf{B} = \left[\boldsymbol{v}_1; \boldsymbol{v}_2; \dots \boldsymbol{v}_n;\right]$ una base de autovectores de la matriz $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ y sean $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$ los correspondientes autovalores. Si las coordenadas de $\boldsymbol{x}$ respecto de la base $\mathbf{B}$ son $(a_1, a_2, \dots a_n)$, es decir, si $\boldsymbol{x} = \mathbf{B}\boldsymbol{a}$, entonces las coordenadas de $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ respecto de $\mathbf{B}$ son $(\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \dots \lambda_n a_n,)$

(b) Sea $B = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ una base de un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^n$ y sea $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ invertible. Entonces $B^* = \{\mathbf{A}\boldsymbol{x}, \mathbf{A}\boldsymbol{y}\}$ es una base de $\mathcal{S}$.

(c) Toda matriz $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\intercal})$ es diagonalizable.

(d) Sea $f(\boldsymbol{x})$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ con matriz asociada $\mathbf{A}$. Si $\boldsymbol{v}$ es un autovector de $\mathbf{A}$ con autovalor $\lambda = 3$ y $f(\boldsymbol{v}) = 12$, entonces la longitud de $\boldsymbol{v}$ es 2.

(e) Sea $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ con determinante igual a 1 y tal que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ son dos de sus autovalores. Entonces $\mathbf{A}^{-1}$ y $\mathbf{A}$ tienen la misma traza.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices de orden 3×4. Se sabe que $|\mathbf{A}(\mathbf{B}^\intercal)| = 2$. Calcule:

(a) $\operatorname{rg}\big(\mathbf{A}(\mathbf{B}^\intercal)\big)$, $\operatorname{rg}\big(\mathbf{A}\big)$ y $\operatorname{rg}\big(\mathbf{B}\big)$

(b) $|(\mathbf{B}^\intercal)\mathbf{B}|$, $|(\mathbf{B}^\intercal)\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{B}(\mathbf{A}^\intercal)|$

(c) Resuelva el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}(\mathbf{B}^\intercal)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(d) Sea $\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}^\intercal)$, y denotemos con $\boldsymbol{c}_j$ la columna j-ésima de $\mathbf{C}$. Calcule el determinante de la siguiente matriz descrita por columnas $\big[\boldsymbol{c}_2;\ (\boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{c}_1);\ (2\boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{c}_3);\ \big]$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 3. Sea la forma cuadrática $q\,(x,\ y,\ z) = by^2 + x^2 - 2xy + 2z^2$.

(a) Clasifique $q\,(x,\ y,\ z)$ en función del parámetro b.

1.6. Final Julio 21/22

Ejercicio 1. Se conoce la siguiente información sobre la matriz $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}3\\2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) Muestre que los vectores $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}3\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ forman una base de $\mathbb{R}^4$.
(b) (0.5^{pts}) Encuentre una matriz $\mathbf{C}$ y una matriz invertible $\mathbf{B}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{C}(\mathbf{B}^{-1})$. (No calcule $\mathbf{A}$ ni tampoco $\mathbf{B}^{-1}$. Limítese a indicar las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ y use dicha información en el resto de apartados)
(c) (1^{pts}) Encuentre una base del subespacio generado por las soluciones del sistema $(\mathbf{A}^\intercal)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(d) (0.5^{pts}) ¿Qué son m, n, y el rango r de $\mathbf{A}$?

MIT 18.06 - Quiz 1, October 3, 2007

Ejercicio 2. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que las columnas de $\mathbf{A}$ son ortogonales entre sí.
(b) (0.5^{pts}) Calcule el determinante de $\mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) Demuestre que $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^\intercal$.
(d) (0.5^{pts}) Escriba unas ecuaciones cartesianas del subespacio $\mathcal{S}$ formado por las combinaciones lineales de las dos primeras columnas de $\mathbf{A}$
(e) (0.5^{pts}) Sabiendo que $\mathbf{A}^4 = -4\mathbf{I}$, ¿qué matriz es $\mathbf{A}^9$?

Ejercicio 3. Se dice que una matriz cuadrada es *estocástica* cuando todos sus elementos son mayores o iguales que cero y la suma de las componentes de cada columna es 1. Considere la matriz estocástica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a & 1-b\\1-a & b\end{bmatrix}$, con $0 \leq a \leq 1$ y $0 \leq b \leq 1$.

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que $\begin{pmatrix}1, & 1,\end{pmatrix}$ es autovector de $\mathbf{A}^\intercal$ (de la transpuesta de $\mathbf{A}$) con autovalor asociado $\lambda = 1$. ¿Es $\begin{pmatrix}1, & 1,\end{pmatrix}$ autovector de $\mathbf{A}$?
(b) (0.5^{pts}) Demuestre que si $\boldsymbol{v}$ tiene componentes mayores o iguales que cero y que suman 1, las componentes de $\mathbf{A}\boldsymbol{v}$ también son mayores o iguales que cero y suman 1.
(c) (0.5^{pts}) Demuestre que todos los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen valor absoluto menor o igual que 1. ¿Para qué valores de los parámetros a y b ambos autovalores tienen valor absoluto igual a 1? (*Indicación:* use el apartado a).

Cont. Ejercicio 3. *Para los dos siguientes apartados suponga $a = b$ y que $0 < a < 1$.*

(d) (0.5^{pts}) Halle una base $B = \{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ de $\mathbb{R}^2$ compuesta por autovectores de $\mathbf{A}$.
(e) (0.5^{pts}) Sea B la base del apartado anterior y sea $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Sabiendo que uno de los autovalores es $\lambda_1 = 1$ y que el otro autovalor tiene valor absoluto menor que 1, calcule $\boldsymbol{z} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k\boldsymbol{x}$. Si las componentes de $\boldsymbol{z}$ suman 1 ¿quién es $\boldsymbol{z}$?

Conjunto de preguntas 1. Invente su propio problema:

(a) Dé un ejemplo de una matriz $\mathbf{A}$ y un vector $\boldsymbol{b}$ tal que las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ forme una recta en $\mathbb{R}^3$, con $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ y todas las entradas de $\mathbf{A}$ distintas de cero.
(b) Encuentre las soluciones de su sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Conjunto de preguntas 2. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a&2&1\\2&a&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, donde a es un número real.

(a) ¿Para qué valores del parámetro a es $\mathbf{A}$ definida positiva?
(b) ¿Para qué valores de a es la matriz $-\mathbf{A}$ definida positiva?
(c) ¿Para qué valores de a la matriz $\mathbf{A}$ es singular?

MIT 18.06 - Quiz 3, May 07, 2007

Conjunto de preguntas 3. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) ¿Cuáles son los autovalores de $\mathbf{A}$?

(b) ¿Cuántos autovectores linealmente independientes tiene $\mathbf{A}$? Escriba una lista de autovectores linealmente independientes de $\mathbf{A}$.

MIT 18.06 - Quiz 3, May 07, 2007

Conjunto de preguntas 4.

(a) Sabiendo que: $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$, encuentre la inversa de $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

MIT Course 18.06 Hour exam I, Fall 1996

Conjunto de preguntas 5. Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) Sea $\mathbf{A}$ de orden 2 por 3. Si el conjunto de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es una recta entonces el conjunto de soluciones de $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})\,\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ es un plano.

(b) Si $\mathbf{A}$ es diagonalizable y las columnas de $\mathbf{P}$ son una base de autovectores de $\mathbf{A}$, entonces las filas de $\mathbf{P}^{-1}$ son una base de autovectores de $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

1.7. Final Mayo 21/22

Ejercicio 1. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(a) (0.5^{pts}) ¿Cuál de los sistemas de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ó $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ *nunca* puede tener solución única (suponiendo que existe solución)?

(b) (0.5^{pts}) ¿Cuál de los sistemas de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ó $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ podría no tener solución? Para dicho sistema de ecuaciones, escriba un vector del lado derecho ($\boldsymbol{b}$ ó $\boldsymbol{c}$) con solo dos componentes no nulas tal que el sistema sí tenga solución.

(c) (0.5^{pts}) Escriba una base del subespacio de todas las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(d) (0.5^{pts}) Considere el complemento ortogonal del subespacio anterior (es decir, el conjunto de vectores perpendiculares a las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$). Escriba unas ecuaciones cartesianas para dicho complemento ortogonal.

(e) (0.5^{pts}) Escriba unas ecuaciones cartesianas para el subespacio generado por las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Basado en MIT 18.06 Final Exam, Fall 2018

Ejercicio 2. La matriz $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$ se puede factorizar como $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, donde las columnas de $\mathbf{Q}$ son vectores *ortonormales* en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Dé tanta información como sea posible sobre m, n y el rango de $\mathbf{A}$.

(b) (0.5^{pts}) Escriba la tercera columna de $\mathbf{A}$ como combinación lineal de las columnas de $\mathbf{Q}$, indicando los coeficientes de dicha combinación lineal.

(c) (0.5^{pts}) Calcule la norma de la tercera columna de $\mathbf{A}$..

(d) (0.5^{pts}) ¿Tiene $\mathbf{A}$ columnas que son ortogonales entre si? ¿cuáles? ¿por qué? ¿por qué no? o ¿falta información para saberlo?

(e) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}$ es cuadrada, calcule $|\det \mathbf{A}|$ (el valor absoluto del determinante).

Basado en MIT 18.06 Final Exam, Fall 2018

Ejercicio 3.

(a) (1^{pts}) Encuentre la inversa de $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$.

Para el resto de apartados, considere $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^\intercal$ donde $\mathbf{L}$ es la matriz anterior y $\mathbf{D}$ es la matriz diagonal cuya diagonal es $\left(d, \quad d^2, \quad d^3,\right)$. ¿Cuáles son las condiciones sobre a y d para que $\mathbf{A}$ sea...

(b) (0.5^{pts}) invertible?

(c) (0.5^{pts}) simétrica?

(d) (0.5^{pts}) definida positiva?

MIT 18.06 Final Exam, May 20, 2008

Conjunto de preguntas 1. Sea $\mathbf{A} = \mathbf{XD}(\mathbf{X}^{-1})$, donde $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; y sea la matriz $\mathbf{M} = \mathbf{A}^4 - 2(\mathbf{A}^2) - 8\mathbf{I}$.

(a) Halle los autovalores de $\mathbf{M}$.

(b) Resuelva $\mathbf{M}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Pista: *No necesita encontrar* $\mathbf{M}$*, así que ¡mejor no calcular demasiado!*
Basado en MIT 18.06 Final Exam, Fall 2018

Conjunto de preguntas 2. Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) Si $\mathbf{A}$ es invertible y simétrica, $\mathbf{A}^{-1}$ es simétrica.

(b) Si las columnas de $\underset{m\times n}{\mathbf{Q}}$ (con $m > n$) son ortonormales, entonces $\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^\intercal)$ es invertible.

(c) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de $\mathbf{A}$ entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es compatible indeterminado.

(d) Si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\intercal$ y $|\mathbf{A}| \neq 0$ entonces $\mathbf{A}^2$ es definida positiva.

(e) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son de orden n, con la misma traza ($\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B})$) y el mismo determinante ($\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$) entonces $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.
(f) Toda matriz con autovalores repetidos es no diagonalizable.
(g) El conjunto de vectores que contiene únicamente al vector nulo $\mathbf{0}$ es linealmente independiente.

Conjunto de preguntas 3.

(a) Clasifique la forma cuadrática $f(x, y, z) = 2axz - x^2 - 4z^2$ en función del parámetro a.

1.8. Final Julio 20/21

EJERCICIO 1. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y el vector $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) (1^{pts}) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Es el conjunto de vectores solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ una recta en $\mathbb{R}^4$? Justifique su respuesta.
(c) (0.5^{pts}) Encuentre una base del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$, es decir, del subespacio generado por las filas de $\mathbf{A}$.
(d) (0.5^{pts}) Encuentre una base del subespacio vectorial ortogonal a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ (i.e., su *complemento ortogonal*).

EJERCICIO 2.

(a) (1^{pts}) Encuentre los autovalores de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y una matriz invertible $\mathbf{S}$ cuyas columnas sean autovectores de $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) Explique por qué $\mathbf{A}^{1001} = \mathbf{A}$. Por otra parte, ¿es $\mathbf{A}^{1000} = \mathbf{I}$?
(c) (0.5^{pts}) Al calcular $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ obtenemos $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 8 \\ -4 & 8 & 42 \end{bmatrix}$. ¿Cuántos autovalores de $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ son positivos, cuántos son nulos y cuántos negativos? (No los calcule, pero explique su respuesta).
(d) (0.5^{pts}) ¿Tiene $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ los mismos autovectores que $\mathbf{A}$?

MIT Course 18.06 Quiz 3, Fall 2006

EJERCICIO 3. Considere que $\mathbf{A}$ de orden n tiene n autovectores ortonormales $\boldsymbol{q}_1,\ldots,\boldsymbol{q}_n$ y n autovalores positivos $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Es decir, $\mathbf{A}\boldsymbol{q}_j = \lambda_j\boldsymbol{q}_j$ con $\lambda_j > 0$, para $j = 1 : n$.

(a) (0.5^{pts}) ¿Cuáles son los autovalores y los autovectores de $\mathbf{A}^{-1}$? ***Demuestre que su respuesta es correcta***.
(b) (1^{pts}) Cualquier vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ es una combinación lineal de los autovectores:

$$\boldsymbol{b} = c_1\boldsymbol{q}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{q}_n.$$

Encuentre una forma rápida de calcular c_1 usando la ortonormalidad de los autovectores $\boldsymbol{q}_j$.
(c) (1^{pts}) La solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ también es una combinación lineal de los autovectores:

$$\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b} = d_1\boldsymbol{q}_1 + \cdots + d_n\boldsymbol{q}_n.$$

Encuentre una forma rápida de calcular d_1. Puede usar las c_j incluso si no contestó el apartado (b).

MIT Course 18.06 Quiz 3, Fall 2006

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. Considere la matriz $\mathbf{A}$ de orden 5×3 cuyas columnas son ortonormales.

(a) Calcule $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$
(b) ¿Cual es el máximo valor posible para el rango de $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$?
(c) Calcule $\det\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\intercal\right)$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) Si $\boldsymbol{u} = \left(1, \; 0, \; 0, \; 0,\right)$, $\boldsymbol{w} = \left(1, \; 1, \; 0, \; 0,\right)$ y $\mathcal{V} = \mathcal{L}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\right)$ es el subespacio bidimensional generado por ambos vectores, entonces las ecuaciones cartesianas de $\mathcal{V}$ son:

$$\left\{2x + y = 0\right., \qquad \text{es decir} \quad \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = (0,)\right\}.$$

(b) Si $\mathbf{A}$ es invertible, entonces $\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\intercal$.
(c) Si $\boldsymbol{v}$ es autovector tanto de $\mathbf{A}$ como de la matriz invertible $\mathbf{B}$, entonces $\boldsymbol{v}$ tambien es autovector de $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$.

(d) El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas componentes son números enteros es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Conjunto de preguntas 3. Sea la forma cuadrática $q(x, y) = 4xy$.

(a) Clasifíque la forma cuadrática $q(x, y)$.

(b) Exprese $q(x, y)$ como suma ponderada de cuadrados (en forma reducida).

1.9. Final Junio 20/21

EJERCICIO 1. Sean las matrices $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Halle el conjunto de valores de a para los que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son diagonalizables.
(b) (0.5^{pts}) Calcule: $\operatorname{tr}\left(\mathbf{BAB}^{-1}\right)$ y $|\mathbf{AB}^2|$ (donde $\operatorname{tr}\left(\mathbf{M}\right)$ es la traza $\mathbf{M}$).
(c) (0.5^{pts}) Clasifique la forma cuadrática asociada a $\mathbf{A}$ en función del parámetro a.
(d) (0.5^{pts}) Para $a = 1$, halle una matriz diagonal $\mathbf{D}$ y una matriz $\mathbf{S}$ de manera que $\mathbf{B}^3 = \mathbf{SDS}^{-1}$. (*Fíjese en el exponente* 3)
(e) (0.5^{pts}) Para $a = 1$, halle (si es posible) una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de $\mathbf{B}$, o explique por qué es imposible.

EJERCICIO 2. Sea $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$; donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Halle el conjunto de valores de a y de c para los que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución. ¿Para qué valores de los parámetros a y c la solución es única?
(b) (1^{pts}) Resuelva el sistema para aquellos valores de los parámetros a y c para los que el sistema tiene solución (exprese el conjunto de soluciones en función de a y c si es necesario).
(c) (0.5^{pts}) ¿es posible expresar el conjunto de soluciones de manera que las variables exógenas sean...

A) x_2 y x_3?

B) x_4 y x_5?

(d) (0.5^{pts}) Calcule el valor de $|\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}|$.

EJERCICIO 3. Suponga que la matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 satisface $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{UL}$ donde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 9 \\ 13 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -17 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -12 & 1 \end{bmatrix}.$$

Importante: ¡No calcule $\mathbf{A}^{-1}$!

(a) (0.5^{pts}) Sea $\boldsymbol{c}$ la segunda columna de $\mathbf{A}^{-1}$ ¿para qué vector $\boldsymbol{b}$ se cumple $\mathbf{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$?
(b) (1^{pts}) El vector $\boldsymbol{c}$ también satisface el sistema $\mathbf{UL}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$ para un $\boldsymbol{d}$ en particular. Encuentre $\boldsymbol{d}$.
(c) (1^{pts}) Encuentre $\boldsymbol{c}$ resolviendo el citado sistema $\mathbf{UL}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$ (o algún otro sistema equivalente a este).

Pista: *tenga en cuenta el hecho de que* $\mathbf{U}$ *y* $\mathbf{L}$ *son matrices triangulares* <u>invertibles</u>.

MIT 18.06 - Quiz 1, Fall 2017

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. Sea $\mathbf{A}$ de orden 2×5 tal que $|\mathbf{AA}^\intercal| = 3$. (*justifique sus respuestas*)

(a) ¿Existe algún $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $(\mathbf{A}^\intercal)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$? ¿Existe algún $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?
(b) Calcule $|2\,(\mathbf{AA}^\intercal)^{-1}|$.
(c) Calcule $\det\left[\boldsymbol{c}_2;\ (3\boldsymbol{c}_1 + 2\boldsymbol{c}_2)\right]$ donde $\boldsymbol{c}_j$ es la columna j-ésima de $\mathbf{AA}^\intercal$.
(d) Indique la dimensión de $\mathcal{S} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{A}\,(\mathbf{A}^\intercal)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\right\}$.
(e) Indique la dimensión de $\mathcal{W} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid (\mathbf{A}^\intercal)\,\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\right\}$.
(f) Indique la dimensión de $\mathcal{Z} = \mathcal{L}\left(\left[\boldsymbol{f}_1;\ \dots\boldsymbol{f}_5;\right]\right)$, donde $\boldsymbol{f}_i$ es la fila i-ésima de $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$.
(g) ¿Es $\lambda = 0$ un autovalor de $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$? En caso afirmativo, ¿cuál es su multiplicidad geométrica y su multiplicidad algebraica? En caso contrario, ¿por qué $\lambda = 0$ no es autovalor de $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$?
(h) Demuestre que la forma cuadrática asociada a $\mathbf{AA}^\intercal$ es definida positiva.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Considere el plano P que contiene $\boldsymbol{q} = \left(1,\ \ 0,\ \ 1,\right)$ y que es paralelo a $\boldsymbol{u} = \left(1,\ \ -1,\ \ 1,\right)$ y $\boldsymbol{v} = \left(2,\ \ 1,\ \ -1,\right)$.

(a) Escriba unas ecuaciones cartesianas para P.
(b) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenecen a P? $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.10. Final Junio 18/19

EJERCICIO 1. Sea $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, donde $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que la tercera columna de $\mathbf{C}$ coincide con una de las columnas de la matriz $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Es $\mathbf{A}$ es invertible? Justifique su respuesta.
(c) (0.5^{pts}) Halle todas las soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{C}_{|5}$ donde $(\mathbf{C}_5)_{|d}$ enota la quinta columna de $\mathbf{C}$.
(d) (0.5^{pts}) ¿Son las filas de $\mathbf{C}$ una base del subespacio generado por los vectores fila de $\mathbf{B}$?
(e) (0.5^{pts}) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable? (justifique su respuesta). Si lo es, encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de $\mathbf{A}$ e indique los autovalores de $\mathbf{A}$. (*Pista:* observe las últimas columnas de $\mathbf{B}$ y de $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$).

Indicación: *ninguna de las cuestiones anteriores requiere hallar explícitamente las matrices* $\mathbf{A}^{-1}$ *o* $\mathbf{A}$*; basta tener en cuenta que* $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ *y cómo son las columnas de* $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C}$.

EJERCICIO 2. Sea $\mathbf{A}$ de orden 3 tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1$, $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$, y $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_3$; donde

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sin calcular explícitamente la matriz $\mathbf{A}$, conteste a los siguientes apartados:

(a) (0.5^{pts}) Halle todas las soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Es $\mathbf{A}$ simétrica? ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable? (justifique su respuesta).
(c) (0.5^{pts}) Halle una base ortonormal para el autoespacio asociado al autovalor doble de la matriz $\mathbf{A}$.
(d) (0.5^{pts}) Calcule $\mathbf{A}^k\boldsymbol{x}$ para todo $k \neq 0$ si $\boldsymbol{x} = (2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3)$.
(e) (0.5^{pts}) Halle $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$, si $\boldsymbol{x} = (2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3)$.

EJERCICIO 3. Sea $\mathbf{P}$ la matriz de proyección sobre el subespacio generado por las columnas de la matriz $\mathbf{X}$ de orden m por n (con $n < m$) cuyo rango es n.

¿Son ciertas las siguientes propiedades? En cada apartado demuestre la propiedad en caso de ser cierta, o justifique por qué es falsa.

(a) (0.5^{pts}) $\mathbf{P}$ es ortogonal.
(b) (0.5^{pts}) $\mathbf{P}$ es simétrica.
(c) (0.5^{pts}) $\mathbf{P}$ es idempotente.
(d) (1^{pts}) $(\boldsymbol{v} - \mathbf{P}\boldsymbol{v})$ es ortogonal a $\mathbf{P}\boldsymbol{v}$ para cualquier $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

Basado en una propuesta de Manuel Morán

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1.

(a) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices ortogonales tales que $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ es una matriz simétrica. Demuestre que $\mathbf{C}$ es *unipotente* (es decir, que $\mathbf{C}^2 = \mathbf{I}$)
(b) ¿Es el sistema formado por los vectores $(1, -2, 0, 1)$ y $(1, 0, 2, 1)$ una base del subespacio de soluciones del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 \qquad\qquad - x_4 & = 0 \end{cases}$? Justifique su respuesta.
(c) Obtenga unas ecuaciones cartesianas (o ímplícitas) para el subespacio vectorial generado por los vectores $\{(1, \; 2, \; 0,), \; (2, \; 1, \; 1,), \; (1, \; -1, \; 1,)\}$.
(d) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $(1, \; -3, \; 1,)$ y $(-2, \; 4, \; 5,)$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, y sea $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) ¿Es $\mathbf{A}$ invertible? Justifique su respuesta. Si es invertible, halle el elemento $(3, 2)$ de la matriz inversa.
(b) Halle la coordenada x_3 de la solución del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 3. Considere la forma cuadrática $q(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + 2xz + az^2$ donde a es un parámetro.

(a) Halle la matriz $\mathbf{A}$ asociada a $q(x, y, z)$. ¿Para qué valores del parámetro a es $\mathbf{A}$ diagonalizable?

(b) ¿Son los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovectores de $\mathbf{A}$?

(c) Clasifique la forma cuadrática en función de los valores del parámetro a.

(d) Suponga que $a = 2$. Exprese $q(x, y, z)$ en una forma reducida (es decir, como suma de cuadrados).

1.11. Final Mayo 18/19

EJERCICIO 1. Sea $\mathcal{S} = \mathcal{L}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \subset \mathbb{R}^3$, el subespacio de todos los vectores que son combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, y sea $\mathcal{S}^\perp \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio de todos los vectores que son perpendiculares a todos los vectores de $\mathcal{S}$; es decir

$$\mathcal{S}^\perp = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{w} = 0 \text{ para todo } \boldsymbol{w} \in \mathcal{S}\right\} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbf{S}^\intercal \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ donde } \mathbf{S} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\end{bmatrix}\right\}.$$

(a) (0.5^{pts}) Halle una base ortonormal de $\mathcal{S}$.
(b) (0.5^{pts}) Encuentre unas ecuaciones paramétricas para $\mathcal{S}^\perp$.

Para el resto del ejercicio, sea $\mathbf{P}$ la matriz de proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathcal{S}$

(c) ($0.5 + 0.5^{\text{pts}}$) Demuestre que tanto los vectores no nulos de $\mathcal{S}$ como los de $\mathcal{S}^\perp$ son autovectores de $\mathbf{P}$.
(d) (0.5^{pts}) Halle una matriz $\mathbf{Q}$ ortogonal y una matriz $\mathbf{D}$ diagonal tal que $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\intercal$

Indicación: *para responder a los dos últimos apartados no es necesario que halle* $\mathbf{P}$*. Basta con que recuerde que* $\mathbf{P}$ *es la matriz que proyecta ortogonalmente los vectores de* $\mathbb{R}^3$ *sobre* $\mathcal{S}$ *y que estudie quién es* $\mathbf{P}\boldsymbol{w}$ *tanto para* $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ *como para* $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}^\perp$*.*

EJERCICIO 2. Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = b \\ x_1 \qquad\; + x_3 + 2x_4 = 0 \\ ax_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

(a) (0.5^{pts}) Discuta para qué valores de los parámetros a y b el sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado.

Para el resto del ejercicio $a = 1$ y $b = 0$.

(b) (0.5^{pts}) Resuelva dicho sistema.
(c) ($0.5{+}0.5^{\text{pts}}$) Halle una *base* del subespacio de soluciones y calcule las coordenadas del vector $(1, 0, 1, -1)$ respecto de la base hallada[1].
(d) (0.5^{pts}) ¿Cuántas variables pueden tomarse como exógenas (es decir, variables libres o independientes)? ¿Pueden simultáneamente tomarse como exógenas las variables x_1 y x_4? Justifique su respuesta.

EJERCICIO 3. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$ y los sistemas de ecuaciones (S1) y (S2):

$$\text{(S1):} \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{x} - \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \qquad\qquad \text{(S2):} \qquad \Big(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}\Big)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

cuyo vector de incógnitas es (en ambos casos) $\boldsymbol{x}$, y donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores α y vectores $\boldsymbol{b}$, el conjunto de soluciones de (S1) es un subespacio de $\mathbb{R}^4$?
(b) (0.5^{pts}) Halle el rango de $\mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) Estudie si $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ son solución del sistema (S2) para algún valor α.
(d) (0.5^{pts}) Sea $\boldsymbol{u} = p\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{w}$, donde $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son los vectores del apartado anterior y p y q son constantes. Demuestre que, independientemente de p y q; el vector $\mathbf{A}^3\boldsymbol{u}$ pertenece a la recta generada por $\boldsymbol{v}$.
(e) (0.5^{pts}) Halle la expresión polinómica de la forma cuadrática correspondiente a $\mathbf{A}$ y clasifíquela.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1.

(a) Halle la matriz de proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre la recta generada por el vector $\begin{pmatrix}1, & 1, & -1, & 1\end{pmatrix}$.
(b) Escriba unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $\begin{pmatrix}0, & 0, & 1\end{pmatrix}$ y que es paralela a la recta generada por el vector $\begin{pmatrix}1, & 2, & 4\end{pmatrix}$.

[1] es decir, los coeficientes de la combinación lineal de la base que es igual a $(1, 0, 1, -1)$

(c) Sea $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3. Encuentre dos matrices $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ y explique cómo deben multiplicar a la matriz $\mathbf{A}$ para efectuar las dos operaciones siguientes: sumar a la segunda **fila** de $\mathbf{A}$ la primera **fila** multiplicada por -1; y después multiplicar la segunda **columna** de la matriz resultante por 4. ¿Se obtendría el mismo resultado si se cambiara el orden de las operaciones (primero multiplicando la segunda **columna** de $\mathbf{A}$ por 4 y después restando de la segunda **fila** la primera? Justifique su respuesta.

(d) Verifique si 2 es un autovalor de $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Si lo es, halle el correspondiente autoespacio.

Conjunto de preguntas 2. Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices simétricas y $\mathbf{B}$ es invertible, entonces $\mathbf{A}\left(\mathbf{B}^{-1}\right)$ también es simétrica.

(b) Sea $\mathbf{A}$ de orden n. Si el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es compatible indeterminado entonces la matriz $\mathbf{A}$ no es ortogonal.

(c) Si $\mathbf{P}$ de orden n es simétrica e idempotente entonces $\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}\right)$ es también simétrica e idempotente.

(d) Si $[\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{u}]$ es una base de un subespacio vectorial $\mathcal{S}$ entonces también es una base de $\mathcal{S}$ el sistema de vectores $[2\boldsymbol{v},\ (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}),\ (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u})]$.

(e) Si $\mathbf{A}$ es simétrica y definida positiva entonces existe su inversa $\mathbf{A}^{-1}$; que también es simétrica y definida positiva.

(f) Sea $\mathbf{A}$ de orden m por n y sea $\mathbf{R}$ una matriz escalonada de $\mathbf{A}$ *que se obtiene realizando operaciones elementales sobre las* ***filas*** de $\mathbf{A}$. Entonces el espacio generado por los vectores **columna** de la matriz $\mathbf{A}$ coincide con el espacio generado por los vectores **columna** de $\mathbf{R}$.

1.12. Final Junio 17/18

Ejercicio 1. Considere el conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes entre sí.

(a) (0.5^{pts}) Demuestre, que los vectores $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \big(\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_4\big)\}$ constituyen una base de $\mathbb{R}^4$.

(b) (0.5^{pts}) Indique la dimensión del subespacio generado por los vectores $\{\boldsymbol{v}_1,\ (\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_4)\}$. Justifique su respuesta.

(c) (0.5^{pts}) Pruebe que el conjunto $\{(1,1,0,0),\ (0,0,0,1),\ (1,0,-1,1),\ (1,0,0,0)\}$ constituye una base de $\mathbb{R}^4$ y obtenga la tercera coordenada del vector $(1,1,1,1)$ respecto de dicha base.

(d) (0.5^{pts}) Obtenga una ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial generado por $(0,0,0,1)$ y $(1,0,-1,1)$.

(e) (0.5^{pts}) Obtenga unas ecuaciones paramétricas del *hiper*plano perpendicular al vector $(1,1,0,0)$ que pasa por el punto $(1,-1,0,1)$.

Ejercicio 2. Considere la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

(a) (0.5^{pts}) Reduzca esta matriz a una matriz escalonada cuando $a=0$, indicando en cada paso las matrices elementales que ha utilizado.

(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores del parámetro a la matriz $\mathbf{A}$ es invertible y $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ es la segunda columna de su matriz inversa?

(c) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores del parámetro a se cumple que $\lambda=3$ es autovalor de $\mathbf{A}$?

(d) (0.5^{pts}) Para $a=2$ se sabe que dos de sus autovalores son $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=2$. Halle el tercer autovalor y los autovectores asociados a este tercer autovalor.

(e) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores del parámetro a la forma cuadrática con matriz $\mathbf{A}$ es definida positiva?

Ejercicio 3. Esta pregunta es acerca de una matriz $\mathbf{A}$ de orden m por n para la cual

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\text{no tiene solución; y}\quad \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad\text{tiene una única solución.}$$

(a) (0.5^{pts}) Dé tanta información como sea posible sobre m, n y el rango r de $\mathbf{A}$.

(b) (0.5^{pts}) Si para el vector $\boldsymbol{x}$ se cumple que $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, indique cuáles son todos los posibles valores para las componentes de $\boldsymbol{x}$.

(c) (1^{pts}) Escriba un ejemplo de matriz $\mathbf{A}$ que se ajuste a la descripción de la matriz del enunciado.

(d) (0.5^{pts}) *(No relacionado con las partes (a)–(c))* ¿Cómo sabe usted que el rango de una matriz $\mathbf{B}$ no cambia si intercambiamos la primera y última columnas de la matriz?

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 10, 1995

Conjunto de preguntas 1. Considere el sistema de ecuaciones $\begin{bmatrix}1 & a\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$; donde a, b_1 y b_2 son parámetros.

(a) Calcule la versión escalonada del sistema anterior y decida para qué valores de los parámetros el sistema es compatible.

(b) ¿Para qué valores de los parámetros la solución del sistema anterior es un subespacio vectorial de dimensión uno?

(c) ¿Para qué valores del parámetro a la proyección ortogonal del vector $(a,\ 1)$ sobre el vector $(1,-1)$ es el vector nulo?

(d) ¿Para qué valores del parámetro a la matriz de coeficientes tiene un autovalor doble? ¿Es la matriz diagonalizable en este caso?

Conjunto de preguntas 2. Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) Si el determinante de una matriz 4×4 es 4, entonces el rango de la matriz tiene que ser 4.

(b) Si los vectores $\{\boldsymbol{e}_{n},\ldots,\boldsymbol{e}_{n}\}$ (las columnas de la matriz identidad $\mathbf{I}$) son autovectores de una matriz de orden $n\times n$, entonces la matriz es diagonal.

(c) Si $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}$ y ambos son autovectores de la misma matriz $\mathbf{A}$, entonces son linealmente independientes.

(d) Si $\mathbf{A}$ es de orden $n \times n$ y tiene menos de n autovalores distintos (si algunos se repiten), entonces $\mathbf{A}$ no es diagonalizable.

(e) Si -3 es un autovalor de la matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$, entonces debe existir algún vector $\boldsymbol{v}$ en $\mathbb{R}^n$ para el que es sistema de ecuaciones $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ no tiene solución.

(f) Si $\boldsymbol{u} = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{v} = (1, 1, 0, 0)$ y $\mathcal{V}$, es el subespacio bidimensional que generado por ambos vectores, entonces la matriz proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathcal{V}$ es $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.13. Final Mayo 17/18

Ejercicio 1. Considere $\underset{2\times 2}{\mathbf{A}}$ *simétrica* con autovalores 2, 5 y autovectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ respectivamente.

(a) (0.5$^{\text{pts}}$) Si $\boldsymbol{x}$ es $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$. Encuentre $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$.
(b) (0.5$^{\text{pts}}$) Ahora de un paso más y encuentre $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ (teniendo en cuenta tanto la simetría de $\mathbf{A}$, como que $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$). Debe encontrar una expresión en función de las normas de $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$.
(c) (0.5$^{\text{pts}}$) Demuestre que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$ para todos los valores de c_1 y c_2 salvo cuando $c_1 = c_2 = 0$.
(d) (0.5$^{\text{pts}}$) Suponga que los autovectores $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ tienen longitud 1 (vectores unitarios), y suponga además que

$$\mathbf{B} = 2\cdot[\boldsymbol{v}_1][\boldsymbol{v}_1]^\intercal + 5\cdot[\boldsymbol{v}_2][\boldsymbol{v}_2]^\intercal.$$

Demuestre que $\mathbf{B}$ tiene los mismos autovalores y los mismos autovectores que $\mathbf{A}$.
(e) (0.5$^{\text{pts}}$) ¿Es $\mathbf{B}$ necesariamente la misma matriz que $\mathbf{A}$ (si o no)? Justifique su respuesta.

Basado en MIT 18.06 - Quiz 3, December 5, 2005

Ejercicio 2. Considere los vectores

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Se sabe que $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{v}_1$, $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2$, y $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_3$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de orden 3 por 3.

(a) (0.5$^{\text{pts}}$) Halle todas las soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(b) (0.5$^{\text{pts}}$) Halle unas ecuaciones implícitas (o cartesianas) para el autoespacio asociado al autovalor doble.
(c) (0.5$^{\text{pts}}$) Razone, sin hallar la matriz $\mathbf{A}$; si $\mathbf{A}$ es simétrica. ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?
(d) (0.5$^{\text{pts}}$) Demuestre que $B = \{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y halle las coordenadas de $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ respecto de la base B.
(e) (0.5$^{\text{pts}}$) Calcule, sin hallar $\mathbf{A}$, el valor de $\mathbf{A}^3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Ejercicio 3. Considere

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

(a) (0.5$^{\text{pts}}$) ¿Son las columnas de $\mathbf{H}$ una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$? ¿Son una base ortonormal?
(b) (1$^{\text{pts}}$) Encuentre $\mathbf{H}^{-1}$ por el siguiente procedimiento: primero multiplique $\mathbf{H}$ por una matriz diagonal $\mathbf{D}$ para que las columnas de la matriz producto $\mathbf{Q}$ sean una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (es decir $\mathbf{HD} = \mathbf{Q}$ con $\mathbf{Q}$ ortogonal). Después invierta en la igualdad $\mathbf{HD} = \mathbf{Q}$ y despeje $\mathbf{H}^{-1}$.
(c) (0.5$^{\text{pts}}$) Halle las ecuaciones cartesianas de la recta generada por la primera columna de $\mathbf{H}$.
(d) (0.5$^{\text{pts}}$) Calcule la matriz de proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio generado por la primera y tercera columna de $\mathbf{H}$.

Conjunto de preguntas 1. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$. Se pide:

(a) Calcule un cofactor C_{ij} no nulo de un elemento a_{ij} de la matriz $\mathbf{A}$.
(b) Indique por qué matrices elementales hay que multiplicar $\mathbf{A}$ para obtener una matriz escalonada. Exprese explícitamente en qué orden deben ser mutiplicadas esas matrices para obtener la matriz escalonada.
(c) Calcule una base y la dimensión del subespacio de soluciones del sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(d) Analice si la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable.
(e) Calcule el determinate: $|\mathbf{A} - \mathbf{A}^\intercal|$.
(f) Encuentre una base ortonormal para el espacio generado por las *filas* 2 y 3 de $\mathbf{A}$.

Conjunto de preguntas 2. Sea $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ con determinante igual a 10 y sea la matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}2a_{11} & (a_{12}+7a_{11}) & -a_{13}\\ 2a_{21} & (a_{22}+7a_{21}) & -a_{23}\\ 2a_{31} & (a_{32}+7a_{31}) & -a_{33}\end{bmatrix}$. Calcule:

(a) el determinante de $\mathbf{B}$.
(b) el determinante de $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{\top})^{-1}$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 3. Considere la forma cuadrática $f(x,y) = ax^2 + ay^2 + 6xy$ donde a es un parámetro.

(a) Clasifique la forma cuadrática en función del parámetro a.
(b) Sea $\mathbf{A}$ la matriz asociada a la forma cuadrática. Halle el valor (valores) del parámetro a para el que las soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ son los puntos de la diagonal del primer y tercer cuadrantes del plano $\mathbb{R}^2$ (es decir, los puntos (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tales que $x = y$).

1.14. Final Julio 16/17

EJERCICIO 1. Sea $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ una matriz de rango completo por filas ($\text{rg}\left(\mathbf{A}\right) = m$) tal que el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : \boldsymbol{x} = a\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\1\end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R}\right\}$.

(a) (0.5$^{\text{pts}}$) ¿Indique el número de filas y de columnas de la matriz $\mathbf{A}$? (Explique su respuesta).
(b) (1$^{\text{pts}}$) Encuentre un ejemplo de una matriz como $\mathbf{A}$.
(c) (0.5$^{\text{pts}}$) ¿Existen vectores $\boldsymbol{b}$ para los cuales el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución? Si es así, diga cuáles (justifique su respuesta).
(d) (0.5$^{\text{pts}}$) Las filas de $\mathbf{A}$ pertenecen a $\mathbb{R}^n$. ¿Podemos hallar vectores en $\mathbb{R}^n$ que no sean combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$? En caso afirmativo, dé un ejemplo.

Ejercicio propuesto por Haydee Lugo

EJERCICIO 2. Sea el conjunto $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$, donde

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\\4\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\\-3\end{pmatrix},$$

y sea $\underset{4\times 4}{\mathbf{A}}$ tal que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

(a) (0.5$^{\text{pts}}$) Demuestre que B es una base de $\mathbb{R}^4$.
(b) (1$^{\text{pts}}$) Sea $\mathbf{B} = \left[\boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{u}_3, \quad \boldsymbol{u}_4\right]$, la matriz cuyas columnas son los vectores del conjunto B. Resuelva por eliminación gaussiana el sistema $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$. ¿Cuáles son las coordenadas de $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ respecto de la base B?
(c) (0.5$^{\text{pts}}$) Compruebe que el producto $\mathbf{AB}$ es una matriz diagonal. Use esta información para demostrar que $\mathbf{A}$ es invertible y halle $\mathbf{A}^{-1}$.
(d) (0.5$^{\text{pts}}$) Sea la forma cuadrática $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$. Calcule $f(\boldsymbol{u}_1)$ y $f(\boldsymbol{u}_4)$. ¿Le permite esta información clasificar la forma cuadrática? (Explique su respuesta)

EJERCICIO 3. Este problema se refiere a la matriz $\mathbf{A} = \mathbf{B} + b\mathbf{I}$ donde $\mathbf{B}$ es una matriz llena de unos:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + b\cdot\mathbf{I} = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix} + b\cdot\mathbf{I} = \begin{bmatrix}1+b&1&1&1\\1&1+b&1&1\\1&1&1+b&1\\1&1&1&1+b\end{bmatrix}.$$

(a) (0.5$^{\text{pts}}$) Compruebe que $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}$ es autovector de $\mathbf{B}$. ¿Quiénes son todos los autovalores de $\mathbf{B}$? (recuerde que $\mathbf{B}$ es la matriz llena de unos).
(b) (0.5$^{\text{pts}}$) Encuentre los autovalores de $\mathbf{A}$
Pista: ¿Qué es $(\mathbf{B} + b\mathbf{I})\boldsymbol{x}$ cuando $\boldsymbol{x}$ es un autovector de $\mathbf{B}$ y λ el correspondiente autovalor?
(c) (0.5$^{\text{pts}}$) Cuando $b = 2$, ¿cuánto vale el determinante de $\mathbf{A}$?
(d) (0.5$^{\text{pts}}$) Suponga que sabe que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$ para todo vector $\boldsymbol{x}$ no nulo (donde $\mathbf{A}$ es la matriz del enunciado). ¿Cuáles son los valores posibles para b en este caso?
(e) (0.5$^{\text{pts}}$) Cuando $b = 1$ entonces la inversa de $\mathbf{A}$ es de la forma $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} + c\mathbf{B}$. Deduzca cómo es $\mathbf{B}^2$ y entonces elija el numero c de manera que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

Basado en MIT 18.06 - Final Exam, December 19, 2005

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. *Los apartados a) y b) de este conjunto de preguntas piden indicar la veracidad o no de una afirmación; los apartados c) y d) piden una demostración.*

Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

Sea el conjunto $B = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ una base de un subespacio vectorial $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^4$.

(a) El vector $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ tiene coordenadas $(1, -1)$ respecto de los vectores de la base B.
(b) El vector $\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$ pertenece a $\mathcal{S}$.

Para los dos siguientes apartados considere que B es además una base ortonormal. *En este caso, si $\mathbf{X} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{v}, & \boldsymbol{w}\end{bmatrix}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores de B, la matriz de proyección de $\mathbb{R}^4$ sobre S es $\mathbf{P} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\intercal$.*

(c) **Demuestre** que $\mathbf{P}$ es una matriz simétrica e idempotente.
(d) Use el hecho de que $\mathbf{P}$ es simétrica e idempotente para ***demostrar*** que $\mathbf{P}\boldsymbol{y}$ es ortogonal a $(\boldsymbol{y} - \mathbf{P}\boldsymbol{y})$ para cualquier vector $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine, cuando sea posible, los valores del parámetro a para los cuales:

(a) Existe la matriz $\mathbf{A}^{-1}$
(b) El determinante de $\left[(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal\right]$ es igual a $\frac{1}{4}$.
(c) Las columnas de la matriz $\mathbf{A}$ generan un subespacio vectorial de dimensión 3.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 3. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) ¿Para qué valores de los parámetros existen matrices $\mathbf{P}$ (invertible) y $\mathbf{D}$ (diagonal y real) tales que $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$?
(b) Suponga que $a = 3$ y $b = 4$. Clasifique la forma cuadrática con matriz $\mathbf{A}$.
(c) Suponga que los valores de los parámetros garantizan que $\mathbf{A}$ es diagonalizable ortogonalmente. Encuentre en este caso un vector $\boldsymbol{v}$ de longitud 1 que cumpla que $\mathbf{A}\boldsymbol{v}$ tiene longitud 5 y la misma dirección y sentido que $\boldsymbol{v}$.

1.15. Final Mayo 16/17

EJERCICIO 1. Considere los vectores de $\mathbb{R}^4$: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\b\end{pmatrix}$, donde a y b son parámetros.

(a) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de a y b estos cuatro vectores forman una base de $\mathbb{R}^4$?
(b) (1^{pts}) Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1, & \boldsymbol{v}_2, & \boldsymbol{v}_3, & \boldsymbol{v}_4\end{bmatrix}$, cuyas columnas son los vectores dados. Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ cuando $a = b$, o explique por qué es imposible encontrar dicha matriz.

Para los siguientes dos apartados considere que $a = 0$ y $b = 1$, y que $\mathcal{S}$ es el subespacio generado por los cuatro vectores.

(c) (0.5^{pts}) Indique la dimensión de $\mathcal{S}$ y encuentre una base para dicho espacio.
(d) (0.5^{pts}) Calcule las coordenadas del vector $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$ respecto de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$.
(coordenadas de $\boldsymbol{b}$ son los coeficientes de la combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ que es igual a $\boldsymbol{b}$).

EJERCICIO 2. Esta matriz 4 por 4 se llama matriz Hadamard:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{Propiedades clave: } \begin{cases}\mathbf{H}^{\mathsf{T}} = \mathbf{H}\\ \mathbf{H}^2 = 4\mathbf{I}\end{cases}$$

Pista. *¡No trabaje demasiado!*
Para contestar los apartados a) y b) es mejor usar el hecho de que $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}\mathbf{H} = 4\mathbf{I}$.
Y para resolver c) tenga en cuenta que $\mathbf{H}^{\mathsf{T}} = \mathbf{H}$.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre los autovalores de $\mathbf{H}$. Explique su razonamiento.
(b) (1^{pts}) Encuentre $\mathbf{H}^{-1}$ y el determinante de $\mathbf{H}$. Explique su respuesta.
(c) (1^{pts}) La siguiente matriz $\mathbf{S}$ contiene en sus columnas tres autovectores de $\mathbf{H}$. Encuentre un cuarto autovector $\boldsymbol{v}_4$ linealmente independiente de los otros tres y explique su razonamiento:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

MIT 18.06 - Quiz 3, December 5, 2005

EJERCICIO 3. El conjunto de soluciones del sistema $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ es

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\}$$

(**Pista.** *!No trabaje demasiado! No es necesario hallar explícitamente $\mathbf{A}$ para responder a ninguno de los apartados que siguen a continuación*)

(a) (0.5^{pts}) Demuestre:
1. que $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ es una solución al sistema y
2. que el conjunto $\mathcal{N} = \left\{ \boldsymbol{z} \;\middle|\; \boldsymbol{z} = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\}$ es la solución del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(b) (0.5^{pts}) Halle unas ecuaciones implícitas o cartesianas para el subespacio vectorial $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\right\}$.
(c) (0.5^{pts}) Escoja una base para el espacio $\mathcal{N} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\right\}$ y encuentre la matriz proyección ortogonal $\mathbf{P}$ de $\mathbb{R}^3$ sobre dicho espacio.

(d) (1^{pts}) ¿Pertenece $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{N} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\right\}$? En caso afirmativo halle sus coordenadas respecto de la base escogida en c) y en caso negativo halle el vector de $\mathcal{N}$ que está más próximo a $\boldsymbol{d}$.

Conjunto de preguntas 1. Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) Si $\underset{n\times n}{\mathbf{Q}}$ es una matriz cuyas columnas son autovectores ortonormales de $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$, entonces $\mathbf{A}$ es simétrica.

(b) Si $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica con $a_{11} > 0$ y $\det \mathbf{A} < 0$, entonces la forma cuadrática asociada no es ni definida positiva ni definida negativa.

(c) Sea la matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 y sean $\mathcal{S}_{\lambda=1} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{S}_{\beta=2} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ los autoespacios asociados a los autovalores $\lambda = 1$ y $\beta = 2$ respectivamente. Entonces $\mathbf{A}$ es simétrica.

(d) Si $\mathbf{A}$ es simétrica e invertible, entonces la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{A}^2\boldsymbol{x}$ es definida positiva.

Conjunto de preguntas 2. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$.

(a) Encuentre los determinantes de $\mathbf{A}$ y de $\mathbf{A}^{-1}$.

(b) Encuentre el elemento $(1, 2)$ de la matriz $\mathbf{A}^{-1}$.

Basado en MIT 18.06 - Quiz 2, April 1, 2005

Conjunto de preguntas 3.

(a) Demuestre que si $\mathbf{M}$ es idempotente e invertible, entonces $\mathbf{M}$ es la matriz identidad.

(b) Se sabe que el polinomio característico de la matriz $\mathbf{N}$ es $P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2$. Calcule los autovalores. ¿Podemos asegurar que $\mathbf{N}$ es diagonalizable?

(c) Considere la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\intercal}$. Demuestre que es $\mathbf{B}$ es simétrica.

(d) Supongamos que el polinomio característico de la matriz $\mathbf{B}$ del apartado anterior es $P(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$. Demuestre que el rango de $(\mathbf{B} - 2\mathbf{I})$ es dos.

1.16. Final Junio 15/16

EJERCICIO 1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones , $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 2\alpha \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4\alpha \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) (1^{pts}) ¿Qué condiciones sobre α hacen el sistema compatible (resoluble)?
(b) (1^{pts}) Resuelva el sistema para aquellos casos en que es posible.
(c) (0.5^{pts}) Sin necesidad de calcular el determinante de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones anterior ¿por qué se sabe que es cero? (no tiene que calcular el determinante de dicha matriz, sólo explicar por qué se conoce su valor a la luz de los resultados anteriores)

EJERCICIO 2. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) Calcule $\det(\mathbf{A})$.
(b) (1^{pts}) Encuentre $\mathbf{A}^{-1}$.
(c) (0.5^{pts}) Para la misma matriz $\mathbf{A}$:

- ¿Es resoluble $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ para cualquier vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$?
- Puede el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tener soluciones para algunos vectores $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, pero infinitas para otros vectores $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$?

(d) (0.5^{pts}) Para la misma matriz $\mathbf{A}$, Encuentre un vector $\boldsymbol{b}$ tal que la solución del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sea $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

EJERCICIO 3.

(a) (0.5^{pts}) Sea $\mathbf{A}$ la siguiente matriz 5 por 5 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable? Explique su respuesta.
(b) (1^{pts}) Encuentre sus cinco autovalores teniendo en cuenta que $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ tiene rango 1 y que la traza de $\mathbf{A}$ es ____________.
(c) (1^{pts}) Encuentre cinco autovectores de $\mathbf{A}$ linealmente indepedientes.

Basado en MIT Course 18.06. Final Exam. Professor Strang. May 16, 2005

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1.

(a) Encuentre una representación implícita (cartesiana) de la recta que pasa por el punto $\boldsymbol{p} = (1, -3, 1)$ y es perpendicular al plano generado por los vectores $\boldsymbol{u} = (7, 3, 0)$ y $\boldsymbol{v} = (4, 0, 3)$.
(b) Encuentre una representación paramétrica de la misma recta.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Demuestre la siguiente afimación:

> *Si $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ es un conjunto de vectores ortogonales entre sí, entonces esos tres vectores son linealmente independientes.*

CONJUNTO DE PREGUNTAS 3. Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) Cualesquiera tres vectores de $\mathbb{R}^3$ generan $\mathbb{R}^3$.
(b) Las columnas de una matriz son independientes si y sólo si el rango es igual al número de columnas.
(c) Si el determinante de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es 1 o -1, entonces $\mathbf{A}$ tiene que ser necesariamente una matriz ortogonal (ortonormal).
(d) Si $\mathbf{A}$ es una matriz ortogonal (ortonormal), su determinante debe ser 1 ó -1.
(e) Si una matriz $\mathbf{A}$ de orden 10×10 tiene 6 autovalores distintos, entonces, el rango es como mínimo 5.

Conjunto de preguntas 4. Considere el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre los valores del parámetro a de manera que la solución del sistema sea una recta.
(b) ¿Para qué valores de a el conjunto de soluciones es un plano?

1.17. Final Mayo 15/16

Ejercicio 1. Considere los puntos $\boldsymbol{a} = (1, 0, 3)$ y $\boldsymbol{b} = (-\frac{1}{3}, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) (0.5^{pts}) Halle unas ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
(b) (0.5^{pts}) Halle unas ecuaciones cartesianas (ó implícitas) para la recta que pasa por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
(c) (0.5^{pts}) ¿Es dicha recta un subespacio de $\mathbb{R}^3$? Razone su respuesta.
(d) (0.5^{pts}) Escriba la matriz proyección que proyecta ortogonalmente cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ sobre la recta del primer apartado.
(e) (0.5^{pts}) Sobre dicha recta, halle el punto más cercano al punto $\boldsymbol{z} = (2, 2, 2)$.

Ejercicio propuesto por Rafael Lopez.

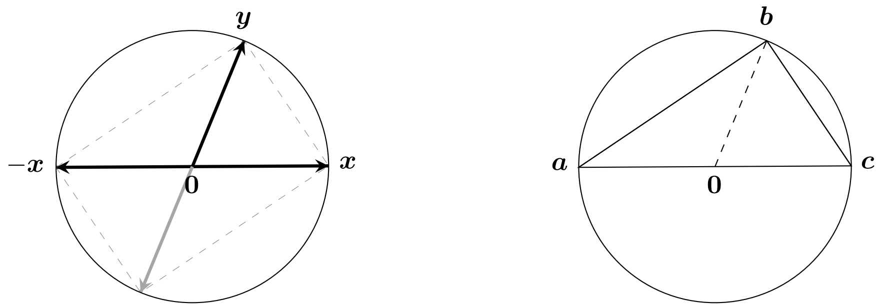
Ejercicio 2. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1-m & 0 \\ 1-m & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Calcule $\det(\mathbf{A})$ en función de m. ¿Para qué valor de m la matriz es singular?
(b) (1^{pts}) Mediante transformaciones de $\mathbf{A}$, encuentre dos matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ de orden 3 por 3, tales que $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{C}| = \frac{1}{2}|\mathbf{A}|$.
(c) (1^{pts}) Para $m = 1$, **y usando la regla de Cramer**, calcule la solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ siendo $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$.

Ejercicio propuesto por Haydee Lugo

Ejercicio 3.

(a) (1^{pts}) Sean $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ vectores del plano con $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|$. Demuestre que los vectores $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ son ortogonales.
(b) (0.5^{pts}) Dibuje en la figura de la izquierda los vectores $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$.



(c) (1^{pts}) Pruebe que los segmentos $[\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b}]$ y $[\boldsymbol{b} \leftrightarrow \boldsymbol{c}]$ del triángulo inscrito en la circunferencia de la figura de la derecha son ortogonales.

Conjunto de preguntas 1. Suponga que $\mathbf{C}$ es $n \times n$, simétrica y definida positiva. Si $\mathbf{A}$ es $n \times m$ y $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}$:

(a) Demuestre que $\mathbf{M}$ es simétrica.
(b) Demuestre que $\boldsymbol{x}\mathbf{M}\boldsymbol{x} \geq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$.
(c) Si $\boldsymbol{x}\mathbf{M}\boldsymbol{x} = 0$ para algunos $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ ¿cúal es su menor autovalor? Razone su respuesta

Pregunta propuesta por Manuel Morán

Conjunto de preguntas 2. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(a) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?
(b) ¿Es $\mathbf{A}$ invertible? En caso afirmativo, halle su inversa.

Pregunta propuesta por Haydee Lugo

Conjunto de preguntas 3. Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) Si $\mathcal{V}$ es el espacio vectorial generado por $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, entonces $\dim(\mathcal{V}) \leq k$.
(b) Si $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_k$ son vectores linealmente independientes en el espacio vectorial $\mathcal{V}$, entonces $\dim(\mathcal{V}) \geq k$.
(c) Un sistema con tres ecuaciones y cuatro incógnitas no puede tener una única solución.
(d) Un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas no puede tener más de una solución.
(e) El producto escalar (producto punto) de dos vectores de $\mathbb{R}^3$ es otro vector de $\mathbb{R}^3$.

1.18. Final Junio 14/15

Ejercicio 1. Considere un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$; donde la matriz $\mathbf{A}$ tiene tres filas y cuatro columnas.

(a) (0.5^{pts}) Un sistema como este ¿tiene siempre solución? Si no es así, escriba un ejemplo de sistema que no tenga solución.
(b) (0.5^{pts}) ¿Es posible que el sistema tenga una única solución? Si es así, proporcione un ejemplo.
(c) (0.5^{pts}) Formule, si es posible, una condición necesaria y suficiente sobre $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{b}$ que garantice que el sistema tiene al menos una solución.
(d) (0.5^{pts}) Formule, si es posible, una condición necesaria y suficiente sobre $\mathbf{A}$ (*sólo sobre* $\mathbf{A}$) que garantice que el sistema tiene al menos una solución para cualquier vector $\boldsymbol{b}$.
(e) (0.5^{pts}) Considere ahora el sistema $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ ¿Es posible que el sistema tenga infinitas soluciones? Si es así, proporcione un ejemplo.

Ejercicio 2. Suponga que la matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 tiene la siguiente propiedad (que llamaremos $\mathcal{Z}$): *los números de cada fila suman cero.*

(a) (0.5^{pts}) Encuentre una solución distinta de la trivial ($\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$) para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(b) (1^{pts}) Demuestre que $\mathbf{A}^2$ también posee la propiedad $\mathcal{Z}$.
(c) (0.5^{pts}) ¿Qué puede decir acerca de la dimensión del conjunto de soluciones para $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y por qué?
(d) (0.5^{pts}) Encuentre un autovalor para la matriz $\mathbf{A}^3$.

Basado en MIT Course 18.06 Ejercicio 9 Final Spring 1999

Ejercicio 3. Sea
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) Encuentre los autovalores de la matriz singular $\mathbf{A}$.
(b) (1^{pts}) Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de $\mathbf{A}$.
(c) (1^{pts}) Calcule
$$\mathbf{A}^{99}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Puede hacerlo escribiendo el vector $(1, 1, 1)$ como combinación de los autovectores, o bien empleando la diagonalización $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.

MIT Course 18.06 Quiz 2, Ejercicio 2 Final Fall 1999

Conjunto de preguntas 1. Considere las siguientes matrices
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & b \\ 1 & 2 & 1 \\ b & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) ¿Cuál es la razón por la que no es posible diagonalizar $\mathbf{A}$ en la forma $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$?
(b) (0.5^{pts}) Encuentre *todos* los autovectores de la matriz $\mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) Clasifica la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{B}\boldsymbol{x}$ en función del parámetro b.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 3. May 6, 2011

Conjunto de preguntas 2. Considere la matriz:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & c & 2 \\ c & 2 & c \\ 1 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) Para que valor(es) de c el determinante de $\mathbf{A}$ es 0.
(b) (0.5^{pts}) Si $c = 0$, halle la inversa de $\mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) Si $c = 1$, halle la solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Conjunto de preguntas 3. Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces $\mathbf{A}^2$ también lo es.
(b) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}^2$ es simétrica, entonces $\mathbf{A}$ también lo es.
(c) (0.5^{pts}) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz $\mathbf{A}$ entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es compatible determinado.
(d) (0.5^{pts}) Si la matriz $\mathbf{A}$ es invertible, entonces $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

1.19. Final Mayo 14/15

EJERCICIO 1.

Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz de orden 5 por 7, y que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución para cualquier vector $\boldsymbol{b}$. Entonces,

(Tenga en cuenta que sus respuestas deben estar justificadas y hacer referencia a alguno de los conceptos dimensión/base/independencia lineal/sistema generador/$\mathbb{R}^n$ (especificando el valor de n),...)

(a) (0.5^{pts}) ¿Cómo es el espacio generado por las columnas de $\mathbf{A}$?
(b) (0.5^{pts}) ¿Qué puede decir acerca de la dependencia o independencia de las filas de $\mathbf{A}$?
(c) (0.5^{pts}) ¿Cómo es el espacio generado por el conjunto de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?
(d) (0.5^{pts}) ¿Cómo es el espacio generado por el conjunto de soluciones de $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?
(e) (0.5^{pts}) Justifique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Las columnas de $\mathbf{A}$ son una base del espacio generado por las columnas de $\mathbf{A}$.

Basado en Ejercicio 2 Final Spring 1999

EJERCICIO 2.

Suponga que $\mathbf{A}$ tiene autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 0$ con los respectivos autovectores

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) Sin calcular $\mathbf{A}$, ¿cómo sabe que la tercera columna de $\mathbf{A}$ está llena de ceros?
(b) (1^{pts}) Encuentre la matriz $\mathbf{A}$.
(c) (1^{pts}) Encuentre los autovectores de $\mathbf{A}^{\intercal}$.

Ejercicio 4 Final Spring 1999

EJERCICIO 3. Dado el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&a&c\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}$. Encuentre (si es posible) los valores de los parámetros a y c tales que:

(a) (0.5^{pts}) La expresión de $\boldsymbol{b}$, como combinación lineal de los vectores columna de $\mathbf{A}$, no sea única.
(b) (0.5^{pts}) El sistema no tenga solución.
(c) (0.5^{pts}) El sistema tenga dos variables exógenas (dos variables libres).
(d) (0.5^{pts}) Todas las variables del sistema sean endógenas (todas sean variables pivote).
(e) (0.5^{pts}) La variable x_2 pueda tomarse como libre (es decir, que la segunda columna no tenga pivote).

Ejercicio propuesto por Rafael Lopez

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. Considere las siguentes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}x&2&3\\-x&x&0\\3&2&5\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&1\end{bmatrix};$$

(a) (0.5^{pts}) ¿Para qué valor(es) de x el determinante de $\mathbf{A}$ es nulo
(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué valor(es) de x la matriz $\mathbf{B}$ es definida positiva.
(c) (0.5^{pts}) ¿Para qué valor(es) de x dicha matriz $\mathbf{B}$ es definida negativa.

basado en MIT Course 18.06 Quiz 2, April 10, 1996

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Verdadero o falso (*solo puntuan respuestas correctamente justificadas; una respuesta sin explicación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) (0.5^{pts}) Si el polinomio característico de una matriz $\mathbf{A}$ de orden 7×7 es $f_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda^2-1)(\lambda^2-2)(\lambda^2-3)$, entonces $\mathbf{A}$ es diagonalizable.
(b) (0.5^{pts}) Suponga que sabe que -3, 2 y 7 son auntovalores de una matrix $\mathbf{A}$ de orden 5×5. Si para alguno de estos autovalores hay asociado un auto-espacio de dimensión 3 (esto es, $\dim\mathcal{N}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = 3$), entonces $\mathbf{A}$ tiene que ser invertible.
(c) (0.5^{pts}) Si el producto de dos matrices cuadradas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es invertible, entonces $\mathbf{A}$ debe ser invertible también.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 3. Considere la recta que pasa por los puntos $(2,4,1)$ y $(1,3,1)$.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre una representación paramétrica de dicha recta.
(b) (0.5^{pts}) Encuentre una representación implícita de la recta anterior.

Conjunto de preguntas 4. Sea $\mathcal{W} = \left\{(\boldsymbol{x}_4, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{R}^4 \text{ tales que } x_4 = bx_1\right\}$

(a) (0.5^{pts}) ¿Para qué valor(es) de b se cumple que $\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.
(b) (0.5^{pts}) Para $b = 1$, halle la dimensión y una base de $\mathcal{W}$.

Ejercicio propuesto por Rafael Lopez

1.20. Final Julio 13/14

EJERCICIO 1. Dada la forma cuadrática $q(x,y,z) = ax^2 + 4y^2 - 2z^2 + 8yz$:

(a) (0.5^{pts}) Clasifique la forma cuadrática en función de a.

$\boxed{\text{Para los apartados (b), (c) y (d) considere } a = 0}$

(b) (0.5^{pts}) Sea $\mathbf{A}$ la matriz asociada a la forma cuadrática $q(x,y,z)$. Halle los autovalores de $\mathbf{A}$.

(c) (0.5^{pts}) Encuentre tres autovectores de $\mathbf{A}$ linealmente independientes.

(d) (0.5^{pts}) Halle una matriz diagonal $\mathbf{D}$ y una matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^{\intercal}$

(e) (0.5^{pts}) Tiene la forma cuadrática $q(x,y,z)$ un mínimo en $(x,y,z) = (0,0,0)$? Explique su respuesta.

Variación de un ejercicio propuesto por Maria Jesus Moreta

EJERCICIO 2. Considere la matriz real $\mathbf{A}$ de orden m por n.

(a) (1^{pts}) Demuestre que la matriz simétrica $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ verifica que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \geq 0$, para cualquier vector $\boldsymbol{x}$ en $\mathbb{R}^n$. Explique cada paso de su razonamiento.

(b) (1^{pts}) De acuerdo con el apartado (a), la matriz $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ es *semi*definida positiva — y posiblemente definida positiva. ¿Qué condición debe cumplir $\mathbf{A}$ para que $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ sea definida positiva?

(c) (0.5^{pts}) Si $m < n$, demuestre que $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ no es definida positiva.

MIT Course 18.06 Quiz 3. May 6, 2011

EJERCICIO 3.

Sea $\mathcal{S} = \mathrm{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ el espacio vectorial generado por $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\\3\end{pmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Halle una base para $\mathcal{S}$

(b) (0.5^{pts}) ¿Está el vector $(1,0,-1,1)$ en ese subespacio? En caso afirmativo encuentre sus coordenadas respecto de la base elegida en el apartado (a); es decir, escriba el vector $(1,0,-1,1)$ como combinación lineal de la base elegida en el apartado (a).

(c) (0.5^{pts}) Halle las ecuaciones implícitas o cartesianas de $\mathcal{S}$.

(d) (0.5^{pts}) Halle una base para el subespacio de todos los vectores que son perpendiculares a los vectores de $\mathcal{S}$.

(e) (0.5^{pts}) Halle un vector $\boldsymbol{z}$ tal que la matriz con columnas $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}]$ tenga rango 3.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas de orden n tales que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ y $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$, entonces:

(a) (0.5^{pts}) $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$.

(b) (0.5^{pts}) Si $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces $\mathbf{A}$ es ortogonal (ortonormal).

(c) (0.5^{pts}) El rango de $\mathbf{B}$ es n.

(d) (0.5^{pts}) $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \implies \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B} \implies \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1} \implies \mathbf{B} = \mathbf{I}$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

(a) (0.5^{pts}) Si 0 es un autovalor de una matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$, entonces $\mathrm{rg}\left(\mathbf{A}\right) < n$.

(b) (0.5^{pts}) Si -3 es un autovalor de una matriz de orden $n \times n$, entonces existirá cierto vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ para el cual el sistema $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ no tiene solución.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 3. Considere

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 & a^2 \\ 1 & -1 & 8 & a^3 \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de a el determinante de la matriz $\mathbf{M}_a$ es cero?

(b) (0.5^{pts}) ¿Cuál es el determinante de la matriz $\mathbf{M}_a$?

(c) (0.5^{pts}) ¿Cuál es, dependiendo de los valores de a, la dimensión del espacio de soluciones del sistema homogéneo $\left(\mathbf{M}_a\right)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

(d) (0.5^{pts}) Suponga que $a = 0$, halle todas las soluciones del sistema $\left(\mathbf{M}_a\right)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Basado en MIT Course 18.06 Quiz 2, April 11, 2012

1.21. Final Mayo 13/14

EJERCICIO 1. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) ¿Para qué valor(es) de a se verifican las siguientes propiedades de $\mathbf{A}$, respectivamente?

1. La matriz $\mathbf{A}$ es invertible.
2. La matriz $\mathbf{A}$ es simétrica.
3. La matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué valor(es) de a la matriz $\mathbf{A}$ es definida positiva?

(c) (0.5^{pts}) ¿Para qué valor(es) de a la matriz $\mathbf{A}$ tiene un autovalor nulo ($\lambda = 0$)? Halle, además, el autovector correspondiente a dicho autovalor.

$\boxed{\text{Para los apartados (d) y (e) considere } a = 3.}$

(d) (0.5^{pts}) Encuentre un autovalor y un autovector de la matriz $\mathbf{A}^2$.

(e) (0.5^{pts}) Obténga las ecuaciones implícitas (cartesianas) del Subespacio Vectorial generado por las columnas de la matriz $\mathbf{A}$. ¿Cual es la dimensión de este espacio?

Variación de un ejercicio propuesto por Maria Jesus Moreta y Mercedes Vazquez

EJERCICIO 2. Sea el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ n \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Halle el rango de $\mathbf{A}$ en función de m.

(b) (0.5^{pts}) Encuentre los valores de los parámetros para los cuales el sistema es Incompatible, Compatible Indeterminado o Compatible Determinado (obtener la forma escalonada mediante eliminación gaussiana le puede ayudar a encontrar la respuesta)

(c) (0.5^{pts}) Asuma que $m = 0$ y $n = 2$, y resuelva (si es posible) el sistema por el método de Gauss.

(d) (0.5^{pts}) Encuentre (si es posible) los valores de los parámetros para los cuales la solución tiene dimensión dos.

(e) (0.5^{pts}) Calcule el determinante de $\mathbf{A}$ desarrollando por la primera columna.

Variación de un ejercicio propuesto por Maria Jesus Moreta y Mercedes Vazquez

EJERCICIO 3. Considere el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (1^{pts}) ¿Tiene solución el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$? En caso afirmativo, halle la solución.

(b) (0.5^{pts}) Complete el cuadrado de $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$, es decir, trate de escribir la forma cuadrática como suma de cuadrados. ¿Es la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ definida positiva?

(c) (0.5^{pts}) ¿Es $\lambda = 0$ un autovalor de la matriz $\mathbf{A}$? Justifique su respuesta.

(d) (0.5^{pts}) ¿Es el vector $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ un autovector de $\mathbf{A}$? En caso afirmativo, indique a qué autovalor está asociado dicho autovector.

Ejercicio propuesto por Haydee Lugo

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. Escriba las ecuaciones implícitas (cartesianas) del plano generado por los vectores $(1, 1, 0, 1)$ y $(0, 0, 1, 1)$ que pasa por el punto $(0, 0, 0, 1)$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

(a) Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada $n \times n$ con $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, entonces el rango de $\mathbf{A}$ es n.

(b) Si $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$ entonces $\mathbf{B} = \mathbf{I}$.

(c) Si $\lambda = 0$ es autovalor de la matriz $\mathbf{A}$ entonces el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es compatible indeterminado.

Conjunto de preguntas 3. Encuentre una base del subespacio vectorial

$$\mathcal{W} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } \ 3x + 2y - z = 0 \ \text{ y } \ 2y + 4z = 0 \right\}.$$

Conjunto de preguntas 4. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & 1/2 \\ 1/2 & y \end{bmatrix}$

(a) Calcule los valores de x e y para los cuales la matriz es definida positiva

(b) Calcule los valores de x e y para los cuales la matriz es ortogonal.

Conjunto de preguntas 5. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

Para los tres apartados considere que $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada 2×2 tal que $\det(\mathbf{A}) = -1$; entonces:

(a) $\det(\mathbf{A}^n) = (-1)^n$.

(b) La matriz $\mathbf{A}$ no puede ser idempotente.

(c) La matriz $\mathbf{A}$ es indefinida.

1.22. Final Julio 12/13

Ejercicio 1. Sea el sistema de ecuaciones, $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Calcule la versión escalonada de la matriz ampliada.
(b) (0.5^{pts}) Analice la existencia y unicidad de solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en función de los valores del parámetro a.
(c) Considere $a = 1$.

1. (0.5^{pts}) ¿Cuántas variables pueden ser tomadas como endógenas, dependientes o variables pivote? ¿cuáles?
2. (0.5^{pts}) Halle la dimensión y una base del subespacio vectorial que tiene por ecuaciones cartesianas (implícitas) el sistema homogéneo: $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
3. (0.5^{pts}) Halle la solución (soluciones) de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Ejercicio 2. Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & b \\ 5 & 3 & b & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & b \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & b \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) (1^{pts}) Para cada una de estas matrices, halle los valores del parámetro b que hacen a la matriz diagonalizable.
(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué matrices será posible encontrar una base ortonormal de autovectores?
(c) (0.5^{pts}) Calcule, cuando sea posible, la matriz diagonal asociada a la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ y una base de autovectores.
(d) (0.5^{pts}) Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ para el caso del apartado anterior.

Ejercicio 3. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de orden m por n para la cual

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ **no** tiene **soluciones** y } \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tiene **una única solución**.}$$

(a) (1^{pts}) Proporcione toda la información posible sobre m y n, y el rango r de $\mathbf{A}$.
(b) (1^{pts}) Encuentre todas las soluciones a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y **explique su respuesta**.
(c) (0.5^{pts}) Escriba un ejemplo de matriz $\mathbf{A}$ que concuerde con la descripción del apartado (a).

MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall 2008

Conjunto de preguntas 1.

(a) (0.5^{pts}) Si sabemos que $\det \mathbf{A} = 5$, donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ x & y & z \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, ¿Cuál es el determinante de

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 8 & 3 \\ -3-4x & 7-4y & 2-4z \end{bmatrix}?$$

(b) (0.5^{pts}) Halle algún autovalor de la matriz $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ u & v & w \\ u+1 & v+8 & w+3 \end{bmatrix}$.

Conjunto de preguntas 2.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que contiene a los puntos $\boldsymbol{a} = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (0, 0, 1)$ y $\boldsymbol{c} = (1, 1, 1)$
(b) (0.5^{pts}) Encuentre un vector perpendicular al plano obtenido en el apartado (a).

Conjunto de preguntas 3. Sean los vectores: $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (a, 1, 1)$ y $\boldsymbol{u}_3 = (1, c, 1)$.

(a) (0.5^{pts}) Halle los valores de a y c de manera que los vectores sean un sistema generador de un subespacio vectorial de dimensión 1.

(b) (0.5^{pts}) Halle los valores de a y c de manera que el espacio generado por los vectores $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, y $\boldsymbol{u}_3$ sea todo $\mathbb{R}^3$.

Conjunto de preguntas 4. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de orden 2×2 con polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$.

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que la matriz diagonal $\mathbf{D}$ que tiene los autovalores de $\mathbf{A}$ en la diagonal satisface $\mathbf{D}^2 - 2\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

(b) (0.5^{pts}) Demuestre que $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Conjunto de preguntas 5. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Halle la expresión de la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ asociada a la matriz $\mathbf{A}$.

(b) (0.5^{pts}) Clasifique dicha forma cuadrática

1.23. Final Mayo 12/13

EJERCICIO 1.

(a) (1^{pts}) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano Π :

$$\Pi : \qquad 3x - 5y + z + 3 = 0.$$

(b) (1^{pts}) Halle el valor del parámetro a para el cual la recta r con ecuaciones paramétricas

$$r : \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$$

está contenida en el plano Π.

(c) (0.5^{pts}) Halle las ecuaciones implícitas (cartesianas) de la recta r.

EJERCICIO 2.

(a) (1^{pts}) Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ a & b \end{bmatrix}$. Halle los valores de los parámetros a y b para que $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sean autovectores de $\mathbf{A}$.

(b) (1^{pts}) Encuentre otra matriz $\mathbf{B}$ diferente a la anterior, pero con los mismos autovectores $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, y con autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$. Calcule $\mathbf{B}^{10}$.

(c) (0.5^{pts}) Halle el valor (valores) del parámetro a para los que la matriz $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

EJERCICIO 3. Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$ que satisface las siguientes condiciones:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) ¿Son los vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathbb{R}^3$?

(b) (1^{pts}) Halle una matriz $\mathbf{C}$ y una matriz invertible $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$. *Indicación:* No es necesario que calcule $\mathbf{B}^{-1}$ o que proporcione $\mathbf{A}$.

(c) (0.5^{pts}) Halle una base para el subespacio vectorial de las soluciones del sistema $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(d) (0.5^{pts}) Halle el orden $m \times n$ de la matriz $\underset{m \times n}{\mathbf{A}}$ y también su rango.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Calcule su determinante.

(b) (0.5^{pts}) Halle la componente x_3 de la solución del sistema: $\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Sea la forma cuadrática

$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 7z^2 - 2xy + 4xz - 8yz.$$

(a) (0.5^{pts}) Encuentre la matriz simetrica $\mathbf{A}$ asociada a $f(x, y, z)$.

(b) (0.5^{pts}) Demuestre que dicha matriz $\mathbf{A}$ es definida positiva.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 3.

(a) (0.5$^{\text{pts}}$) Demuestre que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices ortogonales (es decir $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\intercal} = \mathbf{I}$) entonces $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ también es ortogonal.

(b) (0.5$^{\text{pts}}$) Sea $\mathbf{B}$ una matriz $m{\times}n$ tal que $\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B}$ es invertible. Halle el orden de la matriz $\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\intercal}$ y demuestre que $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C}$ (es decir, que $\mathbf{C}$ es idempotente).

(c) (0.5$^{\text{pts}}$) Encuentre un vector de norma uno y misma dirección que el vector $\boldsymbol{v} = (2, -1, 0, 4, -2)$.

(d) (0.5$^{\text{pts}}$) Escriba un ejemplo de matriz 5×4 con rango 3.

Conjunto de preguntas 4. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

(a) (0.5$^{\text{pts}}$) El conjunto $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ es una base del subespacio de soluciones del sistema $x - y - z = 0$.

(b) (0.5$^{\text{pts}}$) Si una matriz cuadrada tiene autovalores repetidos, no puede ser diagonalizable.

MIT Course 18.06 Final Exam, December 13, 1993

1.24. Final Septiembre 11/12

Ejercicio 1. Sea $\mathbf{A}$ una matriz diagonalizable. Se sabe que los subespacios:

$$\mathcal{V}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } y+z=0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_{1/2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } x=0, y=0\}$$

están asociados respectivamente a los autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$. Calcule:

(a) (1^{pts}) La matriz diagonal $\mathbf{D}$ y la inversa de la matriz de autovectores $\mathbf{P}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.
(b) (1^{pts}) La matriz $\mathbf{A}$.
(c) (0.5^{pts}) La matriz $\mathbf{M} = 2\mathbf{A}^4 - 7\mathbf{A}^3 + 9\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + \mathbf{I}$. (*Indicación: tenga en cuenta que* $2(\frac{1}{2})^4 - 7(\frac{1}{2})^3 + 9(\frac{1}{2})^2 - 5(\frac{1}{2}) + 1 = 0$ *y que también* $2(1)^4 - 7(1)^3 + 9(1)^2 - 5(1) + 1 = 0$).

Ejercicio 2.

(a) (0.5^{pts}) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cualesquiera con el mismo número de filas. ¿Qué puede usted decir (*y explique el motivo*) acerca de la comparación entre

$$\text{rango de } \mathbf{A} \qquad \text{y} \qquad \text{rango de la matriz por bloques } \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{bmatrix}.$$

(b) (1^{pts}) Suponga que en particular $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2$. En este caso, ¿cambiaría su respuesta? Explique su razonamiento.
(c) (1^{pts}) Sea $\mathbf{A}$ una matriz m por n de rango r; y considere además la matriz por bloques $[\mathbf{A}\,\mathbf{A}]$. ¿Cuáles son las dimensiones de los conjuntos de soluciones de los sistemas

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad [\mathbf{A}\,\mathbf{A}]\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \ \ ?$$

MIT Course 18.06 Final, Fall 2006

Ejercicio 3. Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x-y+z &= 1\,; \\ 2x+az &= b \end{cases}$ donde a y b son parámetros. Se pide:

(a) (0.5^{pts}) Calcule, si existen, los valores de los parámetros para los cuales el sistema es incompatible.
(b) (0.5^{pts}) Calcule, si existen, los valores de los parámetros para los cuales la solución es un plano.
(c) (1^{pts}) Calcule, si existen, los valores de los parámetros para los cuales la solución es una recta. ¿Qué variables pueden ser tomadas como libres o exógenas en este caso? Calcule, si es posible, una base para el espacio solución.
(d) (0.5^{pts}) Resuelva el sistema si $a = 3$ y $b = 4$. ¿Pertenece la solución que ha encontrado al espacio solución del apartado anterior? (explique su respuesta).

Problemas de Álgebra Lineal. Paloma Sanz, Francisco José Vázquez y Pedro Ortega. *Editorial: Pearson*

Conjunto de preguntas 1.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $(-1,2)$ y $(0,3)$.
(b) Encuentre una representación implícita de la recta anterior.

Conjunto de preguntas 2. ¿Para qué valores de b tiene la matriz $\mathbf{C}$ tres autovalores positivos?

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & b & 3 \\ b & 2 & b \\ 3 & b & 4 \end{bmatrix}$$

MIT Course 18.06 Final Exam, May 16, 2005, y MIT Course 18.06 Quiz 3, December 5, 2005

Conjunto de preguntas 3. Suponga que la matriz $\mathbf{A}$ de orden 5 por 3 tiene columnas ortonormales. Calcule los siguientes determinantes:

(a) $\det \mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$
(b) $\det \mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$
(c) $\det \mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal$

MIT Course 18.06 Quiz 2, April 10, 1996

Conjunto de preguntas 4. ¿Para qué valor(es) de x el determinante de $\mathbf{A}$ es nulo, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ -x & x & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}?$$

MIT Course 18.06 Quiz 2, April 10, 1996

Conjunto de preguntas 5. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Demuestre que $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un autovector de $\mathbf{A}$.

Conjunto de preguntas 6. *Verdadero o falso* (justifique su respuesta):
Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas e invertibles. Entonces

(a) $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1})^{\mathsf{T}}$.

(b) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son además ortonormales entonces $\mathbf{AB}$ también es ortonormal.

1.25. Final Junio 11/12

Ejercicio 1. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) (1^{pts}) Obtenga la versión escalonada de la matriz $\mathbf{A}$. ¿Son sus columnas linealmente independientes? Calcule el rango de $\mathbf{A}$.
(b) (1^{pts}) Describa el subespacio vectorial generado por las tres primeras columnas de $\mathbf{A}$. Indique la dimensión de dicho subespacio ¿Cómo cambia su respuesta si se añade la cuarta columna?
(c) (0.5^{pts}) Resuelva por el método de Gauss el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. ¿Cuántas variables podemos tomar como exógenas (o libres)? ¿Cuáles? ¿Cuál es la dimensión del espacio solución obtenido?

Propuesto por Mercedes Vazquez.

Ejercicio 2. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Analice en función de los parámetros a y b cuándo $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{-1}$ son diagonalizables.
(b) Considere $a = 1$ y $b = 0$.
   1. (1^{pts}) Diagonalize $\mathbf{A}$ empleando una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$
   2. (0.5^{pts}) Halle una base de $\mathbb{R}^3$ donde la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ sea diagonalizable y halle la matriz diagonal asociada.
   3. (0.5^{pts}) Demuestre que $\boldsymbol{u} = (0, 2, 2)$ es un autovector de $\mathbf{A}$ y calcule $\mathbf{A}^{10}\boldsymbol{u}$.

Propuesto por Rafael Lopez Zorzano.

Ejercicio 3. (Note que este Ejercicio 3 no requiere realizar demasiados cálculos.!)

(a) (0.5^{pts}) ¿Son los vectores $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linealmente independientes? ¿Son estos vectores perpendiculares entre si? Explique su respuesta.
(b) (0.5^{pts}) ¿Son los vectores $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, una base de $\mathbb{R}^4$? Explique su respuesta.
(c) (0.5^{pts}) ¿Son los vectores $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, solución del sistema de ecuaciones $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0$? ¿Forman estos vectores una base del sub-espacio tridimensional de soluciones del anterior sistema homogeneo? Explique su respuesta.
(d) (1^{pts}) Encuentre un valor de q para el cual los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} q \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, no generan $\mathbb{R}^3$.

MIT Course 18.06 March, 1996

Conjunto de preguntas 1.

(a) Encuentre el determinante de la matriz $\mathbf{A}$ y el determinante de $\mathbf{A}^{-1}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

(b) Calcule el elemento $(1, 2)$ de $\mathbf{A}^{-1}$

MIT Course 18.06 Quiz 1, April 1, 2005

Conjunto de preguntas 2. Suponga que conoce la siguiente información acerca de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

Para cada una de las siguientes preguntas debe explicar correctamente la razonamiento de su respuesta para obtener los puntos.

(a) Encuentre los autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$
(b) ¿Es $\mathbf{A}$ una matriz diagonalizable? ¿Es $\mathbf{A}$ una matriz invertible?
(c) Cuanto valen la traza y el determinante de $\mathbf{A}$?
(d) ¿Es $\mathbf{A}$ una matriz simétrica?

Basado en un ejercicio de MIT Course 18.06 Quiz 3, May 8, 1996

Conjunto de preguntas 3. Para la forma cuadrática

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2a\,x_1x_2 + 2a\,x_2x_3 + x_3^2,$$

halle (si es posible) todos los valores de a para los cuales $f(\boldsymbol{x})$ es definida negativa.
Propuesto por el profesor Rafael A. Lopez Zorzano

Conjunto de preguntas 4. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

(a) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$, entonces $\operatorname{rg}\big(\mathbf{A}\big) < n$.
(b) Si $\lambda = -3$ es un autovalor de $\mathbf{A}$ de orden n, entonces existirá cierto vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ para el cual el sistema $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución.
(c) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz $\mathbf{A}$ entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es compatible determinado.

1.26. Final Septiembre 10/11

Ejercicio 1. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que $\mathbf{A}$ es invertible si y sólo si $a \neq 0$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Es la matriz $\mathbf{A}$ definida positiva cuando $a = 1$? Justifique su respuesta.
(c) (1^{pts}) Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ cuando $a = 2$.
(d) (0.5^{pts}) ¿Cuantas variables pueden ser tomadas como exógenas (o libres) en el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ cuando $a = 0$? ¿Cuales?

Ejercicio 2. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Determine si la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable. En caso de que lo sea, encuentre una matriz diagonal $\mathbf{D}$ y una matriz $\mathbf{S}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.
(b) (0.5^{pts}) Calcule $\left(\mathbf{A}^6\right)\boldsymbol{v}$, donde $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(c) (0.5^{pts}) Use los valores obtenidos en el primer apartado para justificar que $\mathbf{A}$ es regular (invertible).
(d) (0.5^{pts}) ¿Qué relación hay entre los autovalores y los autovectores de $\mathbf{A}$ y los de $\mathbf{A}^{-1}$?

Ejercicio 3. Considere el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) (1^{pts}) Obtenga la solución al sistema.
(b) (0.5^{pts}) Explique por qué el conjunto de vectores solución al sistema anterior es una recta en $\mathbb{R}^5$. Indique un vector director y un punto por el que pasa la recta.
(c) (1^{pts}) Encuentre todos los vectores perpendiculares al vector director anterior. Pruebe que el conjunto de vectores perpendiculares a dicho vector forman un subespacio vectorial de dimensión 4. Encuentre una base de dicho subespacio vectorial.

Conjunto de preguntas 1. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o veracidad de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

(a) Si $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces $\mathbf{A}^2$ también lo es.
(b) Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ entonces $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})$ donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.
(c) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$, entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es compatible determinado.
(d) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$, entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ puede ser incompatible.
(e) Si una matriz es ortogonal (columnas perpendiculares y de norma uno) entonces su inversa también es ortogonal.
(f) Si 1 es el único autovalor de una matriz $\mathbf{A}$ de orden 2×2, entonces $\mathbf{A}$ necesariamente tiene que ser la matriz identidad $\mathbf{I}$.

Conjunto de preguntas 2. La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -7 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -16 & 3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ es transformada a su forma escalonada reducida por filas mediante operaciones elementales por filas resultando la siguiente matrix:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) ¿Cuál es el mínimo número de columnas de $\mathbf{A}$ que forman un conjunto linealmente dependiente?.
(b) ¿Cuál es el máximo número de columnas de $\mathbf{A}$ que forman un conjunto linealmente *in*dependiente de vectores.

Versión del ejercicio: MIT Course 18.06 Quiz 2. Spring, 2009

Conjunto de preguntas 3.

(a) Obtenga la matriz $\mathbf{Q}$ asociada a la forma cuadrática $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + ay^2 + 8z^2$ y clasifique la matriz $\mathbf{Q}$ (es decir, diga en que casos la matriz es no definida, definida o semidefinida, de manera positiva o negativa) para el caso en el que a es igual a uno ($a = 1$).
(b) Clasifíque la matriz $\mathbf{Q}$ cuando $a \neq 1$.

1.27. Final Junio 10/11

EJERCICIO 1. Considere las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se pide:

(a) (0.5^{pts}) Calcule los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$.
(b) (0.5^{pts}) Prueba que si $a = 2$ la matriz $\mathbf{A}$ NO es diagonalizable.
(c) (1^{pts}) Para la matriz $\mathbf{B}$, encuentre una matriz diagonal $\mathbf{D}$ y una matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{B} = \mathbf{PDP}^{\mathsf{T}}$.
(d) (0.5^{pts}) Obtenga la expresión polinómica de la forma cuadrática asociada a la matriz $\mathbf{B}$ y pruebe que es definida positiva.

Versión de un ejercicio proporcionado por Mercedes Vazquez

EJERCICIO 2. Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \text{y el vector} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) Calcule los valores de a para los que $\mathbf{A}$ es invertible.
(b) (1^{pts}) Considere $a = 5$. Usando la regla de Cramer calcule la cuarta coordenada x_4 de la solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(c) (1^{pts}) Calcule $\mathbf{B}^{-1}$. Use dicha matriz para resolver el sistema $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Proporcionado por Mercedes Vazquez

EJERCICIO 3. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) Obtenga la forma escalonada de la matriz de coeficientes. Halle los valores del parámetro a para los cuales el sistema tiene solución única.
(b) (1^{pts}) Sea $a = 2$. ¿Cuantas variables pueden ser tomadas en este caso como exógenas (o libres)? ¿Cuáles? Resuelva el sistema (ecuaciones paramétricas), encontrando la dimensión y una base para el espacio de soluciones.
(c) (1^{pts}) Sea el sistema no lineal

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} + 4\sqrt{z} & = 5.5 \\ 2x^2 + y + 2z & = 5 \end{cases}$$

¿Es solución del sistema el punto (1,1,1)? Calcule la solución aproximada si $z = 1.1$.

Versión de un ejercicio proporcionado por Mercedes Vazquez

EJERCICIO 4. Sea el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{cuya solución completa es } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) (1^{pts}) ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial generado por las filas de $\mathbf{A}$? Explique su respuesta.
(b) (1^{pts}) ¿Quién es $\mathbf{A}$ (escriba la matriz completa)? Explique su respuesta.
(c) (0.5^{pts}) ¿Para qué vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución?

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. Considere las matrices $\underset{3\times3}{\mathbf{A}}$ y $\underset{3\times3}{\mathbf{B}}$ tales que $\det(\mathbf{A}) = 2$ y $\det(\mathbf{B}) = -2$

(a) (0.5^{pts}) Calcule los determinantes de $\mathbf{AB}^2$ y $(\mathbf{AB})^{-1}$
(b) (0.5^{pts}) ¿Es posible calcular el rango de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$? ¿y de $\mathbf{AB}$?

Conjunto de preguntas 2. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ b & 4/5 \end{pmatrix}$, calcule valores (si existen) de a y b para los cuales

(a) (0.5^{pts}) La matriz $\mathbf{A}$ es orto-normal.
(b) (0.5^{pts}) Las columnas de la matriz $\mathbf{A}$ son independientes.
(c) (0.5^{pts}) $\lambda = 0$ es un autovalor de $\mathbf{A}$.
(d) (0.5^{pts}) $\mathbf{A}$ es simétrica y definida negativa.

Conjunto de preguntas 3. Considere el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) Encuentre los valores del parámetro a de manera que la solución del sistema sea una recta.
(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de a el conjunto de soluciones es un plano?

Conjunto de preguntas 4.

(a) (0.5^{pts}) Encuentra un sistema lineal homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ cuyas soluciones sean

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \right\}$$

(b) (0.5^{pts}) Si el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$ es $p(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 - 24\lambda^3 + 28\lambda^2 - 3\lambda + 10$, encuentre el rango de $\mathbf{A}$.

1.28. Final Septiembre 09/10

EJERCICIO 1. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (0.5 pts) Demuestre que $\mathbf{A}$ no es diagonalizable cuando $a = 3$.
(b) (1 pt) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable cuando $a = 2$? (explique su respuesta). En caso afirmativo calcule una matriz diagonal de autovalores $\mathbf{D}$ y una de autovectores $\mathbf{S}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$.
(c) ¿Es $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ diagonalizable para cualquier valor de a? ¿Es posible encontrar una base ortonormal de autovectores de $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$?
(d) Encuentre todos los valores de a para los cuales existe $\mathbf{A}^{-1}$ y además la matriz es diagonalizable.

EJERCICIO 2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -5 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - 7x_4 = 7 \end{cases}$$

(a) (0.5 pts) ¿Cuál es el rango de la matriz de coeficientes?
(b) (1.5 pts) Resuelva el sistema de ecuaciones
(c) (0.5 pts) Describa la forma geométrica del conjunto de vectores solución a este sistema de ecuaciones (considerando el conjunto como un subconjunto de $\mathbb{R}^4$).

EJERCICIO 3. Tenemos una matriz de orden 3×3, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$ con $\det \mathbf{A} = 3$. Calcule el determinante de las siguientes matrices.:

(a) (0.5 pts)

$$\begin{bmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ b-4 & 3 & 4 \\ c-6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) (0.5 pts)

$$\begin{bmatrix} 7a & 7 & 14 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(c) (1 pts)

$$(2\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}$$

(d) (0.5 pts)

$$\begin{bmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. Considere un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$; donde la matriz $\mathbf{A}$ tiene tres filas y cuatro columnas.

(a) Un sistema como este ¿tiene siempre solución? Si no es así, escriba un ejemplo de sistema que no tenga solución.
(b) ¿Es posible que el sistema tenga una única solución? Si es así, proporcione un ejemplo.
(c) Formule, si es posible, una condición necesaria y suficiente sobre $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{b}$ que garantice que el sistema tiene al menos una solución.
(d) Formule, si es posible, una condición necesaria y suficiente sobre $\mathbf{A}$ que garantice que el sistema tiene al menos una solución para cualquier vector $\boldsymbol{b}$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2.

(a) Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcule $\mathbf{A}^{-1}$.

(b) Encuentre un vector unitario (de norma uno) con la misma direccción que $\boldsymbol{v} = (2, -1, 0, 4, -2)$.

(c) Clasifique la forma cuadrática (ie., definida positiva, negativa, semidefinida, no definida, etc.)

$$q(x, y, z) = x^2 + 6xy + y^2 + az^2;$$

en función del parámetro a.

(d) Calcule el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

(e) Sea $\mathbf{A}$ una matriz 2×2 tal que $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un autovector de $\mathbf{A}$ con autovalor 2, y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es otro autovector de $\mathbf{A}$ con autovalor -2. Si $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, calcule $\left(\mathbf{A}^3\right)\boldsymbol{v}$.

(f) Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

Si $\mathbf{A}^\mathsf{T} = 2\mathbf{A}$, entonces las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes.

1.29. Final Junio 09/10

EJERCICIO 1. Mediante eliminación gaussiana por filas sobre la matriz $\mathbf{A}$ de orden 4×7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & -7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hemos obtenido la matriz $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$?
(b) Resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(c) Exprese, si es posible, la solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ en función de las variables x_2, x_4 y x_6.
(d) ¿Es posible encontrar un vector $\boldsymbol{b}$ en $\mathbb{R}^4$ para el que el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tenga solución? Si es posible dé un ejemplo.
(e) Proporcione un vector $\boldsymbol{b}$ tal que el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sea solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

versión modificada de un ejercicio de MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2004

EJERCICIO 2. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule los autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$.
(b) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?
(c) ¿Es posible encontrar una matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{\intercal}$, siendo $\mathbf{D}$ una matriz diagonal?
(d) Calcule $|\mathbf{A}^{-1}|$.

EJERCICIO 3. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 1 \\ 2x - 3y + mz &= 3 \\ -x + 2y + 3z &= 2m \end{cases}$$

(a) Demuestre que tiene solución para cualquier valor del parámetro m.
(b) Halle la solución del sistema anterior si $m = -1$.
(c) ¿Corresponde la solución obtenida a las ecuaciones de una recta en $\mathbb{R}^3$?¿Existe algún valor del parámetro m para el que la solución del sistema anterior sea un plano en $\mathbb{R}^3$? ¿Y un punto en $\mathbb{R}^3$?
(d) Halle la solución del sistema anterior cuando $m = 1$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 1. Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ matrices cuadradas. Justifique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*).

(a) Si $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$ entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.
(b) $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$.
(c) $|\mathbf{A}\mathbf{A}^{\intercal}| = |\mathbf{A}|^2$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 2. Sea $\mathbf{A}$ una matriz 3×3 y sean $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$ sus autovalores. Sean $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1)$ y $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 1)$ los autovectores asociados a λ_1 y λ_2.

(a) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?
(b) ¿Podría ser $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 0, -1)$ un autovector asociado al autovalor $\lambda_3 = -1$.
(c) Calcule $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 3. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 2 & 2a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Demuestre que $\mathbf{A}$ es invertible para todo valor del parámetro a.
(b) Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ cuando $a = 0$.

CONJUNTO DE PREGUNTAS 4. Sean las formas cuadráticas

$$\begin{aligned} q_1(x, y, z) &= x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy. \\ q_2(x, y, z) &= -x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy - 2axz. \end{aligned}$$

(a) Demuestre que $q_1(x, y, z)$ es semi-definida positiva.
(b) Halle, si existiese, un valor de a de manera que $q_2(x, y, z)$ sea definida negativa.

Referencias

Strang, G. (). 18.06 linear algebra. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare. License: Creative Commons BY-NC-SA.
URL http://ocw.mit.edu

Soluciones

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 1(a) Como $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$, sabemos que $\mathbf{AP}_{|j} = \mathbf{PD}_{|j}$; y como $\mathbf{D}$ es diagonal, es decir, de la forma $\mathbf{D}_{|j} = a\mathbf{I}_{|j}$, tenemos que $\mathbf{PD}_{|j} = a\mathbf{PI}_{|j} = a\mathbf{P}_{|j}$. Por tanto:

$$\mathbf{A}(\mathbf{P}_{|1}) = 4(\mathbf{P}_{|1});\quad \mathbf{A}(\mathbf{P}_{|2}) = 0(\mathbf{P}_{|2});\quad \mathbf{A}(\mathbf{P}_{|3}) = 0(\mathbf{P}_{|3});\quad \mathbf{A}(\mathbf{P}_{|4}) = 1(\mathbf{P}_{|4}).$$

Así que, las columnas de $\mathbf{P}$ son autovectores de $\mathbf{A}$ (por simple inspección es evidente que son linealmente independientes) y los elementos de la diagonal de $\mathbf{D}$ son los correspondientes autovalores.

Para comprobar que es simétrica, basta verificar que los autovectores correspondientes a autovalores distintos son perpendiculares. Por ejemplo, una forma de verlo es verificar que $\mathbf{P}^\intercal\mathbf{P}$ es diagonal:

$$\mathbf{P}^\intercal\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Efectivamente, } \mathbf{A} \text{ es simétrica.}$$

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 1(b) Las columnas $\mathbf{P}_{|2}$ y $\mathbf{P}_{|3}$ (correspondientes al autovalor $\lambda = 0$) son una base del conjunto de soluciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Por tanto, $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$.

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 1(c) El enunciado ya nos indica que una solución particular es, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, \end{pmatrix}$. Por tanto,

$$\text{el conjunto de soluciones del sistema } \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ es} \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 1(d) Como $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, y como las columnas 2 y 3 de $\mathbf{D}$ son nulas, las columnas de $\mathbf{A}$ son combinación lineal de las columnas $\mathbf{P}_{|1}$ y $\mathbf{P}_{|4}$ (correspondientes a los autovalores no nulos). Por tanto,

$$\text{Base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \right].$$

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 1(e) Dado que $\mathbf{A}$ es simétrica, es diagonalizable ortogonalmente. Para ello, podemos aprovechar la matriz $\mathbf{P}$, pues sus columnas son ortogonales entre si. Solo necesitamos normalizarlas. En el primer apartado, hemos calculado $\mathbf{P}^\intercal\mathbf{P}$, así que en la diagonal de dicha matriz podemos ver el cuadrado de la norma de cada una de las columnas de $\mathbf{P}$. Así pues, definamos la siguiente matriz ortogonal:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} =& \begin{pmatrix} x, & y, & z, & w, \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}(x+2y)}{5}, & \frac{\sqrt{5}(-2x+y)}{5}, & \frac{\sqrt{2}(w-z)}{2}, & \frac{\sqrt{2}(w+z)}{2}, \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}(x+2y)}{5} \\ \frac{\sqrt{5}(-2x+y)}{5} \\ \frac{\sqrt{2}(w-z)}{2} \\ \frac{\sqrt{2}(w+z)}{2} \end{pmatrix} \\
=& \frac{(w+z)^2}{2} + \frac{4\,(x+2y)^2}{5}.
\end{aligned}
$$

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 2(a) Los autovalores son aquellos valores que, al ser restados en la diagonal principal arrojan una matriz singular. Podemos encontrarlos reduciendo la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ vía eliminación:

$$
\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & b \\ a & -\lambda-2 & a \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {\left[\left(\frac{b}{\lambda-2}\right)\mathbf{1+3}\right]}}} \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ a & -\lambda-2 & \frac{a(\lambda+b-2)}{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {\left[\left(\frac{a(\lambda+b-2)}{(\lambda-2)(\lambda+2)}\right)\mathbf{2+3}\right]}}} \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ a & -\lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}
$$

o calculando las raices del polinomio característico $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = -(\lambda-2)^2(\lambda+2)$. En ambos casos deducimos que dichos valores son $\lambda = -2$ (raiz simple) y $\lambda = 2$ (raiz doble). Por tanto, la matriz será diagonalizable, si y solo si, $\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ a & -4 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tiene rango 1; es decir, si $\boxed{b=0}$.

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 2(b) Conocemos los autovalores por el apartado anterior. Encontremos ahora bases para los correspondientes autoespacios $\mathcal{E}_{\lambda_i}(\mathbf{A})$:

$$
(\lambda = 2): \quad \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {[(4)\mathbf{1+2}]} \\ {[(-1)\mathbf{1+3}]}}} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \text{Base de } \mathcal{E}_2(\mathbf{A}): \quad \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \right]
$$

$$
(\lambda = -2): \quad \left[\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \text{Base de } \mathcal{E}_{-2}(\mathbf{A}): \quad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \right]
$$

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 2(c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {[(4)\mathbf{2}]} \\ {[(1)\mathbf{1+2}]} \\ {[(1)\mathbf{1+4}]}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {[(-1)\mathbf{2+3}]} \\ {[(2)\mathbf{2+4}]}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ {[(1)\mathbf{3+4}]}}}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Por tanto las coordenadas de $\boldsymbol{w}$ respecto de la base son $\begin{pmatrix} 2, & 4, & 1, \end{pmatrix}$; es decir, $\boldsymbol{w} = 2\mathbf{S}_{|1} + 4\mathbf{S}_{|2} + 1\mathbf{S}_{|3}$ donde las columnas de $\mathbf{S}$ son los autovectores de $\mathbf{A}$.

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 2(d) Dado que $\mathbf{A}$ no tiene autovalores nulos, la matriz es invertible. Además es diagonalizable, por tanto los autovalores de $\mathbf{A}^{-1}$ son:

- $\lambda = \frac{1}{2}$ (con autoespacio $\mathcal{E}_2(\mathbf{A})$) y
- $\lambda = \frac{-1}{2}$ (con autoespacio $\mathcal{E}_{-2}(\mathbf{A})$).

Por tanto, y dado que $\begin{pmatrix}2, & 4, & 1,\end{pmatrix}$ son las coordenadas de $\boldsymbol{w}$ respecto de la base de autovectores,

$$(\mathbf{A}^{-1})\boldsymbol{w} = (\mathbf{A}^{-1})\left(2\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}.$$

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 2(e) Como $\mathbf{D}^k$ es múltiplo de la identidad ($\mathbf{D}^k = 2^k\,\mathbf{I}$), tenemos que $\mathbf{A}^k = \mathbf{S}(\mathbf{D}^k)(\mathbf{S}^{-1}) = \mathbf{S}(2^k\mathbf{I})(\mathbf{S}^{-1}) = 2^k\mathbf{S}(\mathbf{S}^{-1}) = 2^k\mathbf{I}$.

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 3(a) Aplicando eliminación de derecha a izquierda sobre la lista de vectores

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}; & \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}; & \boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}; & \boldsymbol{d}; \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{4}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}; & \boldsymbol{b}; & \boldsymbol{c}; & \boldsymbol{d}; \end{bmatrix}$$

que sabemos por el enunciado que son una lista de vectores linealmente independientes.

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 3(b) Mediante operaciones de eliminación de izquierda a derecha sobre B, C y D:

$$\text{Para } \mathsf{B}: \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}; & \boldsymbol{b}; & \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}; \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}; & \boldsymbol{b}; & \boldsymbol{c}; \end{bmatrix}; \qquad \text{por tanto, } \dim \mathcal{L}(\mathsf{B}) = 3.$$

$$\text{Para } \mathsf{C}: \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}; & \boldsymbol{b}; & \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}; \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}; & \boldsymbol{b}; & 0; \end{bmatrix}; \qquad \text{por tanto, } \dim \mathcal{L}(\mathsf{C}) = 2.$$

$$\text{Para } \mathsf{D}: \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}; & \boldsymbol{b}; & \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}; & \boldsymbol{c}; \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}; & \boldsymbol{b}; & 0; & \boldsymbol{c}; \end{bmatrix}; \qquad \text{por tanto, } \dim \mathcal{L}(\mathsf{D}) = 3.$$

Fíjese que, de hecho, $\mathcal{L}(\mathsf{D}) = \mathcal{L}(\mathsf{B})$.

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 3(c) De los tres subespacios, el único con dimensión 2 es $\mathcal{L}(\mathsf{C})$. Sustituyendo $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ por los vectores indicados podemos encontar una base del complemento ortogona a $\mathcal{L}(\mathsf{C})$ cuyos vectores usaremos como filas de la matriz que emplearemos para escribir unas ecuaciones cartesianas:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ \hline 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}}.$$

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 3(d) Escribiendo los vectores del conjunto $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}\}$ como columnas de una matriz (junto a una columna genérica adicional para deducir la condición general que debe cumplir un vector para completar una base de $\mathbb{R}^4$), y aplicando la eliminación por columnas de izquierda a derecha, tenemos que: $\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 0 & -3 & a\\ 1 & 0 & 1 & 1 & b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\\ 1 & 1 & 1 & -3 & d \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(3)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(-a)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 4 & -a+b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\\ 1 & 0 & 1 & 0 & -a+d \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(4)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(-a+b)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\\ 1 & 0 & 1 & 0 & -a+d \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(a-d)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Vemos que el vector propuesto **no** completa la base, pues es combinación lineal de las tres primeras columnas (se ha anulado en la eliminación de izquierda a derecha).

Por otra parte, la última columna de la forma pre-escalonada nos indica que la condición necesaria es que la tercera componente del vector sea distinta de cero. Así, por ejemplo, podemos completar la base con el vector $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}0, & 0, & 1, & 0,\end{pmatrix}$.

□

(Final Mayo 24/25) Ejercicio 3(e) No es necesario calcular la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ completa. Basta resolver $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (\mathbf{I}_{|3})$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&-1\\ 1&1&1&0&0\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{4}+\mathbf{5}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&1&1&0&0\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right]. \text{ Por tanto, } (\mathbf{A}^{-1})_{|3} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

□

(Final Mayo 24/25) Conjunto de preguntas 1(a) $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix};\right]$

□

(Final Mayo 24/25) Conjunto de preguntas 1(b) Dicho subespacio está formado por todos los vectores perpendiculares a $\begin{pmatrix}1, & 1, & 2,\end{pmatrix}$, por tanto, es el conjunto de vectores $\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1&1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{v} = (0,)\right\}$
□

(Final Mayo 24/25) Conjunto de preguntas 1(c) Como $\left[\begin{array}{ccc} 1&1&2\\ \hline x&y&z\\ \hline 1&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1&0&0\\ \hline x&-x+y&-2x+z\\ \hline 1&-1&-1\end{array}\right]$; unas ecuaciones cartesianas para el conjunto $\mathcal{S}$ son $\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}-1&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Es decir, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

□

(Final Mayo 24/25) Conjunto de preguntas 2(a) Puesto que $\mathbf{C}$ y $\mathbf{A}$ son matrices semejantes, tiene la misma traza. Dicha traza coincide con la suma de los autovalores. Por tanto la traza es positiva por ser $\mathbf{A}$ definida positiva.

□

(Final Mayo 24/25) Conjunto de preguntas 2(b) El determinante de una matriz es igual al producto de sus autovalores:

- Si n es par, el determinante de la matriz es el producto de un número par de autovalores. En tal caso el determinante es positivo tanto si la matriz es definida positiva (producto de números positivos) como si es definida negativa (pues se multiplica un número par de valores negativos): $|\mathbf{AB}| = \underbrace{|\mathbf{A}|}_{>0}\underbrace{|\mathbf{B}|}_{>0} > 0$
- Pero si n es impar y la matriz es definida negativa, su determinante es el producto de un número impar de valores negativos; por tanto. $|\mathbf{AB}| = \underbrace{|\mathbf{A}|}_{>0}\underbrace{|\mathbf{B}|}_{<0} < 0$.

□

(Final Mayo 24/25) Conjunto de preguntas 2(c) Una matriz $\mathbf{M}$ es simétrica cuando ${}_{j|}\mathbf{M} = \mathbf{M}_{|j}$. Dado $\mathbf{A}$ y $\mathbf{I}$ son simétricas, tenemos que

$${}_{j|}\mathbf{C} = {}_{j|}\big(\mathbf{A} - b\mathbf{I}\big) = {}_{j|}\mathbf{A} - b\big({}_{j|}\mathbf{I}\big) = \mathbf{A}_{|j} - b\big(\mathbf{I}_{|j}\big) = \big(\mathbf{A} - b\mathbf{I}\big)_{|j} = \mathbf{C}_{|j}.$$

□

(Final Mayo 24/25) Conjunto de preguntas 2(d) Sea $\big[\lambda_n;\ \lambda_{n-1};\dots\ \lambda_2;\ b\big]$ la lista de autovalores de $\mathbf{A}$ ordenados de mayor a menor. Sabemos que al restar uno de estos λ_k a los elementos de la diagonal de $\mathbf{A}$, obtenemos una matriz $(\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{I})$ que es singular. Por tanto, $\mathbf{C} = \mathbf{A} - b\mathbf{I}$ es singular y consecuentemente uno de los autovalores de $\mathbf{C}$ es *cero*.

Es más, la lista de autovalores de $\mathbf{C}$ resulta ser $\big[(\lambda_n - b);\ (\lambda_{n-1} - b);\dots\ (\lambda_2 - b);\ b - b\big]$ puesto que $\mathbf{C} - (\lambda_k - b)\mathbf{I} = \mathbf{A} - b\mathbf{I} - (\lambda_k - b)\mathbf{I} = \mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{I}$ es una matriz singular.

Así pues, y dado que $\big[(\lambda_n - b);\ (\lambda_{n-1} - b);\dots\ (\lambda_2 - b);\ 0\big]$ es una lista de números NO negativos, $\boxed{\mathbf{C} \text{ es semi-definida positiva}}$.

□

(Final Mayo 24/25) Conjunto de preguntas 2(e) La matriz no es invertible puesto que $\left(\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}\right) = \left(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}\right)\mathbf{A}$ donde la primera matriz del producto es singular, pues 2 es uno de los autovalores de $\mathbf{A}$.

□

(Final Mayo 24/25) Conjunto de preguntas 3(a) Puesto que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}^n$, el sistema $[\mathbf{I}_{|1}; \dots \mathbf{I}_{|n}]$ de columnas de la matriz identidad $\underset{n\times n}{\mathbf{I}}$ es una base para $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$. Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \{\mathbf{0}\}$, el sistema vacío, [ ], es una base para $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

□

(Final Mayo 24/25) Conjunto de preguntas 3(b) Puesto que el rango es n, entonces $m \geq n$.

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 1(a) Como hay tres autovectores linealmente independientes, $\mathbf{A}$ es *diagonalizable*. Como existen autovectores correspondientes a $\lambda = 2$ que no son perpendiculares a los correspondientes a $\lambda = -2$ (pues $\boldsymbol{v}_1 \not\perp \boldsymbol{v}_2$) la matriz *NO es simétrica*.

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 1(b) Como $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_2$, tenemos que $\mathbf{A}(2\boldsymbol{v}_2) = 4\boldsymbol{v}_2$. Y como la matriz es de rango completo, $2\boldsymbol{v}_2$ es la única solución.

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 1(c) Como $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ constituyen una base del autoespacio correspondiente al autovalor 2, cualquier combinación de ellos es otro autovector asociado a $\lambda = 2$; por tanto $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists a, b \in \mathbb{R} :\ \boldsymbol{x} = a\boldsymbol{v}_2 + b\boldsymbol{v}_3\right\}$.

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 1(d) Dado que $\boldsymbol{x}$ es una combinación de autovectores asociados a $\lambda = 2$, $\boldsymbol{x}$ es un autovector asociado a $\lambda = 2$. Dado que la potencia n-ésima de una matriz tiene los mismos autovectores, pero los autovalores elevados a la n-ésima potencia, concluimos que

$$(\mathbf{A}^3)\boldsymbol{x} = (2^3)\boldsymbol{x} = 8\left(2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 8\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-24\\16\\8\end{pmatrix}.$$

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 1(e) La forma cuadrática es $\boldsymbol{x}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})\boldsymbol{x} = (\mathbf{A}\boldsymbol{x})\cdot(\mathbf{A}\boldsymbol{x}) = \|\mathbf{A}\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$ (para $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$). Pero dado que $\mathbf{A}$ es de rango completo, dicha expresión nunca podrá ser igual a cero. Por tanto esta forma cuadrática es $\boxed{\text{definida positiva}}$.

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 2(a) Dado que las columnas de $\mathbf{A}$ son iguales, la matriz es singular, así que uno de sus autovalores es $\lambda = 0$; y como tenemos que

$$\left[\begin{array}{ccc}\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc}\alpha&0&0\\\alpha&0&0\\\alpha&0&0\\\hline 1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathcal{E}_{\lambda=0} = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};\right]\right)}.$$

La multiplicidad algebraica de $\lambda = 0$ es como mínimo 2. Pero como la suma de los autovalores es igual a la traza, el tercer autovalor es 3α. Por tanto los autovalores son $\boxed{\lambda = 0 \text{ (doble) y } \lambda = 3\alpha}$.

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 2(b) Véase la solución al apartado anterior.

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 2(c) Dado que $\mathbf{A}$ es simétrica, sabemos que se puede diagonalizar.

Para calcular el autoespacio $\mathcal{E}_{\lambda=3\alpha}$ basta notar que la suma de las columnas de $\mathbf{A} - (3\alpha)\mathbf{I}$ es cero.

$$\begin{bmatrix}-2\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&-2\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&-2\alpha\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathcal{E}_{\lambda=3\alpha} = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\right]\right)}.$$

Por ejemplo, empleando los autovectores encontrados como columnas; tenemos $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Consecuentemente $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\alpha \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right)$.

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 2(d) Dado que $\boldsymbol{x}\mathbf{B}\boldsymbol{x} \geq 0$ y $\boldsymbol{x}\mathbf{C}\boldsymbol{x} > 0$ para cualquier $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, entonces para cualquier $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tenemos que $\boldsymbol{x}(\mathbf{B} + \mathbf{C})\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{x}\mathbf{B}\boldsymbol{x}}_{\geq 0} + \underbrace{\boldsymbol{x}\mathbf{C}\boldsymbol{x}}_{>0} > 0$.

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 2(e)

$$q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x, & y, & z, \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1+\pi & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x, & y, & z, \end{pmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

donde la segunda matriz es evidentemente definida positiva, y la primera es semidefinida positiva, pues ya hemos visto que sus autovalores son $\lambda = 0$ (doble) y $\lambda = 3$.

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 3(a) Sabemos que $m = 4$ porque $\mathbf{C}$ tiene 4 filas y sabemos que $n = 5$ porque $\mathbf{B}$ tiene 5 filas.

Dado que $\mathbf{AB}_{|1} = \mathbf{C}_{|1} = \mathbf{0}$ tenemos que $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{|1} - \mathbf{A}_{|5} = \mathbf{0}$; por tanto $\mathbf{A}_{|1} = \mathbf{A}_{|5}$.

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 3(b) Dado que $\mathbf{A}$ tiene 5 columnas y su rango es 2, la dimensión de su $\boxed{\text{espacio nulo es 3}}$.

Dado que (por inspección) es evidente que las tres primeras columnas de $\mathbf{B}$ son linealmente independientes y al mutiplicar $\mathbf{A}$ por esas tres columnas obtenemos las tres primeras columnas de $\mathbf{C}$, que son nulas, concluimos que

$$\text{Una base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \text{ es: } \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \right].$$

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 3(c) Dado que $\mathbf{AB}_{|4} = \mathbf{C}_{|4}$, la cuarta columna de $\mathbf{B}$ es solución. Por tanto, el conjunto de soluciones es

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(Final Julio 23/24) Ejercicio 3(d) Dado que el espacio fila de $\mathbf{A}$ es el complemento ortogonal a su espacio nulo, el espacio fila es el conjunto de vectores perpendiculares a las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; por tanto

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \right\}.$$

□

(Final Julio 23/24) Conjunto de preguntas 1(a) **Falso**. Si $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a}$ entonces debe ocurrir que $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Consecuentemente cualquier vector nulo, $\boldsymbol{0}$, es perpendicular a si mismo.

$\square$

(Final Julio 23/24) Conjunto de preguntas 1(b) **Verdadero**. El rango es igual al máximo número de filas (y de columnas) linealmente independientes, evidentemente ese máximo no cambia al transponer la matriz.

$\square$

(Final Julio 23/24) Conjunto de preguntas 1(c) **Falso**. La matriz $\mathsf{A} = \left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ es de rango completo y con autovalor $\lambda = 1$ repetido pero el autoespacio asociado es solo de dimensión 1, pues $\mathsf{A} - 1\mathsf{I} = \left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right]$. Por tanto, A no es diagonalizable.

$\square$

(Final Julio 23/24) Conjunto de preguntas 1(d) **Verdadero.** Basta comprobar que los vectores de B son combinación lineal de los de G y que la dimensión del espacio generado por G también es tres. Una forma de comprobarlo es aplicando la eliminación de izquierda a derecha directamente sobre el siguiente sistema de vectores

$$\left[\mathsf{G} \mid \mathsf{B}\right] = \left[\; \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}; \quad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}; \quad \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}; \quad \boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}; \;\middle|\; \boldsymbol{u}; \quad \boldsymbol{v}; \quad \boldsymbol{w}; \;\right];$$

pero también podemos hacerlo sobre el sistema formado por las coordenadas de dichos vectores respecto de la base B. Ambos procedimientos son equivalentes. A continuación se muestra la eliminación aplicada a ambos sistemas simultaneamente (para que así se vea la equivalencia de ambas vías).

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} \underset{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{u}}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{v}}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} \underset{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}} & \underset{-\boldsymbol{v}}{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{v}}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{5}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{6}]}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} \underset{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}} & \underset{-2\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} & \underset{-\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{3}+\mathbf{4}\right]\\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{3}+\mathbf{5}\right]\\ \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\mathbf{3}+\mathbf{6}\right]\\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{3}+\mathbf{7}\right]}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} \underset{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} & \underset{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}} & \underset{-2\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}} & \underset{0}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} & \underset{0}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} & \underset{0}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} & \underset{0}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} \end{array}\right]$$

Como se puede ver, la dimensión del espacio generado por G es tres (únicamente los tres primeros vectores no se han anulado); y además los vectores de B son combinación de los de G, pues todos ellos han sido anulados.

$\square$

(Final Julio 23/24) Conjunto de preguntas 2(a)

$$\left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&1\\ 0&1&0&1\\ 0&0&4&4\\ 1&1&4&p\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&4&4\\ 1&1&4&p-1\\ \hline 1&0&0&-1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&4&4\\ 1&1&4&p-2\\ \hline 1&0&0&-1\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&4&0\\ 1&1&4&p-6\\ \hline 1&0&0&-1\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&0&1 \end{array}\right].$$

Por tanto para $p \neq 6$.

$\square$

(Final Julio 23/24) Conjunto de preguntas 2(b) A la luz de los cálculos del apartado anterior, para $p = 7$.

$\square$

(Final Julio 23/24) Conjunto de preguntas 2(c) A la luz de los pasos del primer apartado, tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&0&1\\ 0&0&4&4\\ 1&1&4&p \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&4&0\\ 0&0&0&p-6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p > 6 & \text{Definida positiva}\\ p = 6 & \textit{Semi}\text{definida positiva}\\ p < 6 & \text{Ni (semi)definida positiva ni (semi)definida negativa} \end{cases}$$

$\square$

(Final Julio 23/24) Conjunto de preguntas 3(a) Puesto que $\mathcal{S}$ es el conjunto de soluciones de sistema de ecuaciones $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, cuya matriz de coeficientes tiene tres columnas y rango 1, la $\boxed{\text{dimensión de } \mathcal{S} \text{ es } 2}$. Por tanto, necesitamos dos vectores que sean solución de dicho sistema y que sean ortonormales. Por ejemplo

$$\text{Base de } \mathcal{S}: \left[\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\right].$$

□

(Final Julio 23/24) Conjunto de preguntas 3(b) Como $2\sqrt{2}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, las coordenadas respecto a la base del apartado anterior son $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}, & 1, \end{pmatrix}$.

□

(Final Julio 23/24) Conjunto de preguntas 3(c) Como $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ \hline x & y & z \end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline x & -x+y & z \end{array}\right]$; unas ecuaciones cartesianas son

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

(Final Mayo 23/24) Ejercicio 1(a) Puesto que $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, necesariamente $\mathbf{A}$ tiene 3 columnas ($n = 3$). Y puesto que la dimensión de su espacio nulo es 2, el rango de $\mathbf{A}$ es 1. Por tanto $m \geq 1$. Por último, puesto que $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{I}_{|2}$, tenemos que $\boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{|2}) = \mathbf{A}_{|2}$, es decir, $\boldsymbol{b}$ es la segunda columna de $\mathbf{A}$.

□

(Final Mayo 23/24) Ejercicio 1(b) Conjunto solución: $\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}$.

□

(Final Mayo 23/24) Ejercicio 1(c) Como primer vector de la base, escojamos uno de los vectores directores. Por ejemplo $\boldsymbol{v}$. Como segundo vector necesitamos encontrar una combinación de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ que sea ortogonal al primer vector escogido. Es decir, literalmente necesitamos lo siguiente:

$$\boldsymbol{v} \cdot \big(\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}\big) = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2, & 1, \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 2\alpha + \beta = 0$$

Por ejemplo, si $\alpha = 1$ entonces $\beta = -2$. Así pues una base que cumple lo requerido es

$$\big[\boldsymbol{v};\ (\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w});\big] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix};\right].$$

Las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ respecto a la anterior base son el vector $(1, 0,)$.

□

(Final Mayo 23/24) Ejercicio 1(d) El espacio fila de $\mathbf{A}$ debe ser ortogonal a los vectores directores. Un vector perpendicular a ambos es $(1, -1, 1,)$. Si no lo vemos podemos encontrar uno empleando la eliminación:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como $\mathbf{A}$ es de rango 1, todas sus filas deben ser múltiplos del vector perpendicular a los vectores directores. Lo más sencillo es añadir dos filas de ceros.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es triangular, por lo que los elementos de su diagonal principal son sus autovalores: $\lambda = 1$ y $\lambda = 0$ (con multiplicidad algebraica igual a 2).

La matriz es diagonalizable puesto que $\dim\big(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}\big) = 2$ (las multiplicidades algebraica y geométrica son iguales para el único autovalor repetido).

$\square$

(Final Mayo 23/24) Ejercicio 2(a) Los vectores $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}$ son autovectores de $\mathbf{A}$ con autovalor $\lambda = 2$. Y por ser $\mathbf{A}$ simétrica, los autovectores asociados a $\lambda = 0$ deben ser perpendiculares a los correspondientes al autovalor $\lambda = 2$. Por ejemplo $\big(0, \quad 0, \quad 1,\big)$. Así, una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$: $\Big[\ \big(0, \quad 0, \quad 1,\big);\ \Big]$

$\square$

(Final Mayo 23/24) Ejercicio 2(b) Basta escoger dos autovectores correspondientes a $\lambda = 2$ que no sean perpendiculares. Por ejemplo sumando dos los que ya conocemos, tenemos:

$$\left[\ \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\ \right].$$

$\square$

(Final Mayo 23/24) Ejercicio 2(c) Como los autovalores de $\mathbf{A}$ son 2 y 0, la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es *semi*-definida positiva.

$\square$

(Final Mayo 23/24) Ejercicio 2(d) Una matriz ortogonal formada por autovectores de $\mathbf{A}$ es $\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, de manera que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} =& \boldsymbol{x}\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\intercal\boldsymbol{x}\\
=& \big(x, \quad y, \quad z,\big)\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
=& \big(\tfrac{3x}{5} + \tfrac{4y}{5}, \quad -\tfrac{4x}{5} + \tfrac{3y}{5}, \quad z,\big)\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\big(\tfrac{3x}{5} + \tfrac{4y}{5}, \quad -\tfrac{4x}{5} + \tfrac{3y}{5}, \quad z,\big)\\
=& 2\left(-\frac{4x}{5} + \frac{3y}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5}\right)^2
\end{aligned}$$

$\square$

(Final Mayo 23/24) Ejercicio 3(a)

$$\boldsymbol{b} \;=\; \mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \mathbf{A}\big(\boldsymbol{x}_f + \boldsymbol{x}_n\big) \;=\; \mathbf{A}(\boldsymbol{x}_f) + \mathbf{A}(\boldsymbol{x}_n) \;=\; \mathbf{A}(\boldsymbol{x}_f) + \mathbf{0}.$$

$\square$

(Final Mayo 23/24) Ejercicio 3(b) Si $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_f) = \boldsymbol{b}$ y $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_f) = \boldsymbol{b}$, entonces $\mathbf{A}\big(\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{v}_f\big) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.

Por tanto $\big(\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{v}_f\big)$ pertenece simultáneamente al conjunto de soluciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y al subespacio generado por las filas de $\mathbf{A}$ (pues tanto $\boldsymbol{x}_f$ como $\boldsymbol{v}_f$ son combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$).

Dado que las soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ son perpendiculares a las filas de $\mathbf{A}$, el vector $\mathbf{0}$ es el único vector que simultáneamente es solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$. Por tanto, $\big(\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{v}_f\big) = \mathbf{0}$. Es decir $\boldsymbol{x}_f$ y $\boldsymbol{v}_f$ son iguales.

$\square$

(Final Mayo 23/24) Ejercicio 3(c) Resolvamos $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_f = \begin{pmatrix}14\\9\end{pmatrix}$. Como $\boldsymbol{x}_f = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$, tenemos que

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_f \;=\; \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}14\\9\end{pmatrix}$$

es decir $\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix}$, que implica $c = 1$ y $d = 3$. Así que $\boldsymbol{x}_f = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

□

(Final Mayo 23/24) Conjunto de preguntas 1(a) El rango de $\mathbf{B}$ no puede ser mayor a 2 (pues $\mathbf{B}$ solo tiene dos filas) y tampoco ser menor que 2, puesto que $\mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal$ es de rango completo; Por tanto, $\boxed{\text{el rango de } \mathbf{B} \text{ solo puede ser } 2}$

Como las transformaciones elementales no cambian el rango, y puesto que $\mathbf{A}^{-1}$ es invertible, existe una secuencia de transformaciones elementales tales que $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}$. Consecuentemente tenemos que $\mathbf{B}\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k} = \mathbf{B}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{B}$. Por tanto $\boxed{\operatorname{rg}(\mathbf{B}\mathbf{A}) = \operatorname{rg}(\mathbf{B}) = 2}$.

□

(Final Mayo 23/24) Conjunto de preguntas 1(b) $|2\mathbf{A}| = 2^4|\mathbf{A}| = 2^5$ y $|\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B}| = 0$ (por ser una matriz 4 por 4 de rango 2).

□

(Final Mayo 23/24) Conjunto de preguntas 1(c) $|(\mathbf{A}^{-1})\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B}| = |\mathbf{A}^{-1}| \cdot |\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B}| = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

□

(Final Mayo 23/24) Conjunto de preguntas 1(d) $|\mathbf{A}_{|2};\ \mathbf{A}_{|1} + \mathbf{A}_{|3};\ \mathbf{A}_{|3};\ 2\mathbf{A}_{|4};| = |\mathbf{A}_{|2};\ \mathbf{A}_{|1};\ \mathbf{A}_{|3};\ 2\mathbf{A}_{|4};| = -|\mathbf{A}_{|1};\ \mathbf{A}_{|2};\ \mathbf{A}_{|3};\ 2\mathbf{A}_{|4};| = -2\det\mathbf{A} = -4$.

□

(Final Mayo 23/24) Conjunto de preguntas 2(a) Puesto que

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}]{\substack{\tau \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{\substack{\tau \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}}]{\substack{\tau \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{\substack{\tau \\ [(a)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}]{\substack{\tau \\ [(a)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$f(\boldsymbol{x})$ no puede ser definida negativa en ningún caso.

□

(Final Mayo 23/24) Conjunto de preguntas 2(b) Si $a \neq 0$ entonces $f(\boldsymbol{x})$ puede tomar valores tanto positivos como negativos (solo sería cero en el caso $f(\mathbf{0})$).

□

(Final Mayo 23/24) Conjunto de preguntas 3(a)

- $n = 4$ (de lo contrario la diferencia de matrices no estaría definida).
- $m \leq 4$ (de lo contrario $\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B}$ sería singular).
- $\operatorname{rg}(\mathbf{B}) = 4$ (de lo contrario $\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B}$ sería singular).

□

(Final Mayo 23/24) Conjunto de preguntas 3(b) Lo más sencillo es demostrar primero que $\mathbf{B}(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\intercal$ es idempotente:

$$\left(\mathbf{B}(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\intercal\right)\left(\mathbf{B}(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\intercal\right) = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B})^{-1}\underbrace{\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B}(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B})^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\intercal = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\intercal$$

Por tanto (y denotando la matriz $\mathbf{B}(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\intercal$ con $\mathbf{M}$ para que sea más sencillo): $\mathbf{A}\mathbf{A} = (\mathbf{I}-\mathbf{M})(\mathbf{I}-\mathbf{M}) = \mathbf{I}-\mathbf{M}-\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{M} = \mathbf{I}-2\mathbf{M}+\mathbf{M} = \mathbf{I}-\mathbf{M} = \mathbf{A}$.

□

(Final Mayo 23/24) Conjunto de preguntas 3(c) Puesto que ${}_{i|}\mathbf{A}\mathbf{B}_{|j} = ({}_{i|}\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B}_{|j}) = 0$, basta comprobar que $\mathbf{A}\mathbf{B}$ es nula. Y efectivamente $\mathbf{A}\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\intercal)\mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{B}(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

□

(Final Mayo 23/24) Conjunto de preguntas 3(d) Ahora que $\mathbf{A}$ es cuadrada, existe $\mathbf{B}^{-1}$. Por tanto ahora $(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{B}^{-1})\left((\mathbf{B}^\intercal)^{-1}\right)$ y

$$\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\intercal = \mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{B}^{-1})\left((\mathbf{B}^\intercal)^{-1}\right)\mathbf{B}^\intercal = \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 1(a) Dado que $\boldsymbol{u} \in \mathcal{W}$, los vectores de $\mathcal{W}$ pertenecen a $\mathbb{R}^3$, por tanto, $\boxed{n=3}$. Dado que la dimensión de $\mathcal{W} = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es 1, el $\boxed{\text{rango de } \mathbf{A} \text{ es } 2}$. Es imposible saber el número de filas de $\mathbf{A}$, tan solo se puede decir que $\boxed{m \geq 2}$ (en caso contrario el rango no podría ser 2).

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 1(b) El conjunto solución es $\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$, pues $\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{A}_{|1}$, y por el enunciado sabemos que $\left[\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\ \right]$ es una base del subespacio $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{W}$.

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 1(c) Basta con que sus filas (de $\mathbb{R}^3$) sean perpendiculares a $\boldsymbol{u}$. Por ejemplo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 1(d) Dado que $\mathbf{BA}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{B}^{-1}\mathbf{BA} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ tenemos que $\mathcal{N}\left(\mathbf{BA}\right) \subset \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. Y dado que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{BA} = \mathbf{B0} = \mathbf{0}$, tenemos que $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \subset \mathcal{N}\left(\mathbf{BA}\right)$.
Así, $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{B}\right)$, es decir, $\mathcal{W} = \mathcal{V}$. Por tanto $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$.

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 1(e) Dado que el rango es 2, la dimensión de su espacio fila es 2. Dado que las filas deben ser perpendicules a $\boldsymbol{u}$, unas ecuaciones cartesianas son $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} \boldsymbol{v} = (0,) \right\}$.

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 2(a) Empleando la primera pista:

$$n = \operatorname{rg}(\mathbf{C}^\intercal\mathbf{C}) \leq \operatorname{rg}(\mathbf{C}) \leq n \quad\Rightarrow\quad \operatorname{rg}(\mathbf{C}) = n.$$

Empleando la segunda pista: *Como las columnas de* $\mathbf{C}^\intercal\mathbf{C}$ *son combinación lineal de las de* $\mathbf{C}^\intercal$:

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{C}^\intercal\mathbf{C}\right) \subset \mathcal{C}\left(\mathbf{C}^\intercal\right) \quad\Rightarrow\quad n = \dim \mathcal{C}\left(\mathbf{C}^\intercal\mathbf{C}\right) \leq \dim \mathcal{C}\left(\mathbf{C}^\intercal\right) \leq n \quad\Rightarrow\quad \dim \mathcal{C}\left(\mathbf{C}^\intercal\right) = \operatorname{rg}(\mathbf{C}) = n.$$

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 2(b)

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \quad\Rightarrow\quad \left(\mathbf{C}^\intercal\mathbf{C}\right)^{-1}(\mathbf{C}^\intercal)\boldsymbol{z} = \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{C}^\intercal)\boldsymbol{z} = (\mathbf{C}^\intercal\mathbf{C})\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{C}_{|j} \perp \boldsymbol{z} \quad \text{para } j = 1:n.$$

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 2(c) Puesto que $\mathbf{C}$ es ortogonal, $\mathbf{C}(\mathbf{C}^\intercal) = \mathbf{I} = (\mathbf{C}^\intercal)\mathbf{C}$; por tanto

$$\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}\|^2 \;=\; \|(\mathbf{C}^\intercal)\boldsymbol{z}\|^2 \;=\; (\mathbf{C}^\intercal)\boldsymbol{z} \cdot (\mathbf{C}^\intercal)\boldsymbol{z} \;=\; \boldsymbol{z}(\mathbf{C})(\mathbf{C}^\intercal)\boldsymbol{z} \;=\; \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z} \;=\; \|\boldsymbol{z}\|^2.$$

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 2(d) Es diagonalizable porque *es simétrica*, ya que $\left((\mathbf{C}^\intercal)\mathbf{C}\right)^\intercal = (\mathbf{C}^\intercal)\left((\mathbf{C}^\intercal)^\intercal\right) = (\mathbf{C}^\intercal)\mathbf{C}$.

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 2(e)

$$\left[\begin{array}{ccc}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \quad\Rightarrow\quad \left((\mathbf{C}^\intercal)\mathbf{C}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 3(a) Dado que $\mathbf{D}$ es diagonal, cada una de sus columnas es de la forma: $\mathbf{D}_{|j} = d_{jj}(\mathbf{I}_{|j})$. Así, multiplicando por $\mathbf{P}$ a ambos lados de $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ tenemos que $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}$. Por tanto

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{|j} = \mathbf{P}\mathbf{D}_{|j} = d_{jj}\mathbf{P}(\mathbf{I}_{|j}) = (d_{jj})\mathbf{P}_{|j};$$

es decir, que al multiplicar $\mathbf{A}$ por cada columna de $\mathbf{P}$ obtenemos un múltiplo de dicha columna.

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 3(b) Dado que las dos primeras columnas de $\mathbf{P}$ son autovectores que corresponden al autovalor $\lambda = 1$, basta cambiar una de ellas por una combinación lineal de ambas, para que las dos primeras columnas dejen de ser perpendiculares entre si. Por ejemplo sumando a la segunda columna la primera $\mathbf{C} = \left[\mathbf{P}_{|1};\ (\mathbf{P}_{|2} + \mathbf{P}_{|1});\ \mathbf{P}_{|3};\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 3(c) Basta dividir cada columna de $\mathbf{P}$ por su longitud para que las nuevas columnas tengan longitud 1. Por tanto $\mathbf{Q} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{P}_{|1});\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{P}_{|3});\ \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{P}_{|3});\right] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$.

□

(Final Junio 22/23) Ejercicio 3(d) Basta demostrar que $\mathbf{B}$ es simétrica. Sabemos que $\mathbf{A}$ es simétrica, ya que se puede factorizar como $\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\intercal}$. Y como la inversa de una matriz simétrica es simétrica, tenemos que $\mathbf{B}^{\intercal} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1}\right)^{\intercal} = \mathbf{A}^{\intercal} - (\mathbf{A}^{-1})^{\intercal} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$. Así pues,

$$q_{\mathbf{B}}(x,y,z) = \boldsymbol{x}\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(\mathbf{A}^{-1})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\intercal}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\mathbf{Q}(\mathbf{D}^{-1})\mathbf{Q}^{\intercal}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{Q}\left(\mathbf{D} - \mathbf{D}^{-1}\right)\mathbf{Q}^{\intercal}\boldsymbol{x};$$

es decir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{Q}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\mathbf{Q}^{\intercal}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x, & y, & z, \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}(x+y+z)}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(-x+y)}{2} \\ \frac{\sqrt{6}(x+y-2z)}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \frac{\sqrt{6}(x+y-2z)}{4}, \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}(x+y+z)}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(-x+y)}{2} \\ \frac{\sqrt{6}(x+y-2z)}{6} \end{pmatrix} \\ = \frac{(x+y-2z)^2}{4}.\end{aligned}$$

□

(Final Junio 22/23) Conjunto de preguntas 1(a) Dado que la matriz $\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B}$ es diagonal y que ${}_{i|}\left(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B}\right)_{|j} = \left(\mathbf{B}_{|i}\right)\cdot\left(\mathbf{B}_{|j}\right)$, sabemos que $\mathbf{B}_{|i} \perp \mathbf{B}_{|j}$ cuando $i \neq j$ (las columnas de $\mathbf{B}$ son ortogonales entre si). Además, como las columnas de $\mathbf{B}$ pertenencen a $\mathbb{R}^3$, tenemos que $3 \geq \operatorname{rg}\left(\mathbf{B}\right) \geq \operatorname{rg}\left(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B}\right) = 3$. Por tanto las 3 columnas de $\mathbf{B}$ son una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores perpendiculares entre si.

□

(Final Junio 22/23) Conjunto de preguntas 1(b) $(\mathbf{A} - \beta\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene solución única si y solo si $(\mathbf{A} - \beta\mathbf{I})$ es invertible. Como los valores λ que satistacen la ecuación característica son aquellos que hacen singular a la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, los valores de β tienen que ser aquellos tales que $\beta(\beta-1)(\beta^2-4) \neq 0$. En particular β tiene que ser distinto de 0, distinto de 1, distinto de 2 y distinto de -2.

□

(Final Junio 22/23) Conjunto de preguntas 1(c) Como las columnas de $\mathbf{A}$ son combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{B}$, sabemos que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \subset \mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$. Y como $\mathbf{B}$ (con dos columnas) y $\mathbf{C}$ (con dos filas) tienen rango 2, necesariamente $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = \dim\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \dim\mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right) = 2$. Por tanto $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$. Consecuentemente, las columnas de $\mathbf{B}$ forman una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

□

(Final Junio 22/23) Conjunto de preguntas 2(a)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline x & y & z \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline x & -x+y & -x+z \end{array}\right] \Rightarrow \mathcal{H} = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v} = (0,)\right\}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline x & y & z \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(3)\mathbf{3}] \\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \hline x & -2x+3y & -4x+3z \end{array}\right] \Rightarrow \mathcal{G} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left[\begin{array}{ccc} -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \boldsymbol{v} = (0,) \right\}.$$

□

(Final Junio 22/23) Conjunto de preguntas 2(b) Son los vectores de la intersección de los planos $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G}$. Es decir, son aquellos que satisfacen simultáneamente sus correspondientes ecuaciones cartesianas. Así, los vectores pedidos deben satisfacer el sistema de ecuaciones: $\left[\begin{array}{ccc} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; por tanto

$$\left[\begin{array}{ccc} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{2}] \\ [(3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \right] \right)}$$

□

(Final Junio 22/23) Conjunto de preguntas 3(a) $\left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -a \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -a \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}$ $\left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{array}\right]$ por tanto $\boxed{a \neq 1}$.

□

(Final Junio 22/23) Conjunto de preguntas 3(b) Puesto que $\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{I}$ sabemos que $\mathbf{P}\left(\mathbf{P}^{-1}\right)_{|j} = \mathbf{I}_{|j}$. Por tanto basta multiplicar $\mathbf{P}\boldsymbol{v}$ y comprobar si hay valores de a para los que $\mathbf{P}\boldsymbol{v}$ es la segunda columna de la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -a \end{array}\right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{4}{3} - \frac{a}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{si } a = 4, \text{ entonces } \boldsymbol{v} = \left(\mathbf{P}^{-1}\right)_{|3}.$$

□

(Final Junio 22/23) Conjunto de preguntas 3(c) Necesariamente $\boxed{a > 1}$. Lo podemos ver diagonalizando por congruencia:

$$\left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -a \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -a \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{array}\right]$$

o por menores principales superiores, pues si $\mathbf{P}$ es def. negativa, entonces $-\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right]$ es def. positiva: $\det\left[\begin{array}{c} 1 \end{array}\right] = 1;\quad \det\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right] = 1;\quad \det\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = 1;\quad \det(-\mathbf{P}) = a - 1.$

□

(Final Junio 22/23) Conjunto de preguntas 4(a) Es falso. Por ejemplo si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, siempre tenemos que $\mathbf{B0} = \mathbf{0}$.

□

(Final Junio 22/23) Conjunto de preguntas 4(b) Es imposible. Tanto $\mathbf{A}$ como $\mathbf{D}$ tienen rango 2 como máximo. No es posible que el producto sea de rango 3.

□

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 1(a) Como $\mathbf{A}$ tiene 5 columnas y la dimensión de su espacio nulo es 2: $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 5 - 2 = 3$,

Dado que la solución particular indicada en las ecuaciones paramétricas del enunciado es la primera columna de la matriz identidad de orden 5, tenemos que $\mathbf{A}\left(\mathbf{I}\right)_{|1} = \mathbf{A}_{|1} = \boldsymbol{b}$.

□

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 1(b) Dado que $\mathbf{B}_{|j} = \mathbf{A}\mathbf{E}_{|j} = \mathbf{A}\big(\mathbf{E}_{|j}\big)$, cada columna de $\mathbf{B}$ es combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$, es decir $\mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right) \subset \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$. Y dado que $\mathbf{A}_{|j} = \mathbf{B}(\mathbf{E}^{-1})_{|j} = \mathbf{B}\big(\mathbf{E}^{-1}{}_{|j}\big)$, cada columna de $\mathbf{A}$ es combinación lineal de las columnas de $\mathbf{B}$, es decir $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \subset \mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$. Por tanto $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathcal{C}\left(\mathbf{B}\right)$.

□

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 1(c) Dado que cada fila de $\mathbf{A}$ tiene 5 componentes y que el rango de $\mathbf{A}$ es 3, una base del espacio fila de $\mathbf{A}$ estará formada por tres vectores de $\mathbb{R}^5$ linealmente independientes y que sean perpendiculares al espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$. Los tres vectores dados pertenencen a $\mathbb{R}^5$ y son linealmente independientes (basta fijarse en sus últimas componentes). Además son perpendiculares a las dos soluciones especiales empleadas en el enunciado, por tanto $\boxed{\text{son una base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)}$.

□

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 1(d) Basta usar los vectores del apartado (c) como filas de la matriz de coeficientes

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \right\}.$$

□

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 1(e) Efectivamente $\boldsymbol{v} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$, pues $\boldsymbol{v}$ satisface las ecuaciones cartesianas encontradas en el apartado anterior: $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Como base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ nos basta emplear las soluciones especiales indicadas en las ecuaciones paramétrices del enunciado, por tanto solo necesitamos saber qué combinación lineal de los vectores de dicha base es igual a $\boldsymbol{v}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \text{Coordenadas: } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

□

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 2(a) Aplicando eliminación por columnas:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & a & -b_1 \\ 1 & 1 & 0 & a & -b_2 \\ 0 & 1 & -1 & c & -b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-a)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & b_1-b_2 \\ 0 & 1 & -1 & c & -b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(-b_1+b_2)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c & -b_1+b_2-b_3 \end{array}\right]$$

o bien, aplicando eliminación por filas:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & a & -b_1 \\ 1 & 1 & 0 & a & -b_2 \\ 0 & 1 & -1 & c & -b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & a & -b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b_1-b_2 \\ 0 & 1 & -1 & c & -b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & a & -b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b_1-b_2 \\ 0 & 0 & 0 & c & -b_1+b_2-b_3 \end{array}\right]$$

concluimos que tanto si $c \neq 0$ como si $-b_1 + b_2 - b_3 = 0$ el sistema tiene solución.

□

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 2(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & a & -2 \\ 1 & 1 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & -1 & c & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-a)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & c & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Si $c \neq 0$ el conjunto de soluciones es $\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}.$

Y si $c = 0$ el conjunto de soluciones es $\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & -a\\1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}.$

□

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 2(c) El subespacio de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ debe ser de dimensión 2. Por tanto, necesariamente $c = 0$. Además, los vectores de B tienen que ser perpendiculares a las filas de $\mathbf{A}$. Por tanto, el producto de $\mathbf{A}$ por la matriz $\mathbf{B}$ cuyas columnas son los vectores de B *debe ser una matriz nula*:

$$\begin{bmatrix}1&0&1&a\\1&1&0&a\\0&1&-1&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&a+1\\0&a+1\\0&c\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}c=0\\a=-1\end{cases}.$$

□

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 2(d) Basta ver cómo deben ser los parámetros para que las filas de $\mathbf{A}$ sean combinación lineal de las filas de $\mathbf{C}$. Podemos hacerlo mediante eliminación por columnas (transponiendo las matrices $\mathbf{C}$ y $\mathbf{A}$)It is enough to see how the parameters must be so that the rows of $\mathbf{A}$ are a linear combination of the rows of $\mathbf{C}$. We can do this by column elimination (transposing the matrices $\mathbf{C}$ and $\mathbf{A}$).

$$\left[\begin{array}{cc|ccc}1&1&1&1&0\\-1&-2&0&1&1\\2&3&1&0&-1\\4&4&a&a&c\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc|ccc}1&0&0&0&0\\-1&-1&1&2&1\\2&1&-1&-2&-1\\4&0&a-4&a-4&c\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\[(2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\[(1)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc|ccc}1&0&0&0&0\\-1&-1&0&0&0\\2&1&0&0&0\\4&0&a-4&a-4&c\end{array}\right],$$

o mediante eliminación por filas:

$$\left[\begin{array}{cccc}1&-1&2&4\\1&-2&3&4\\\hline 1&0&1&a\\1&1&0&a\\0&1&-1&c\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc}1&-1&2&4\\0&-1&1&0\\\hline 0&1&-1&a-4\\0&2&-2&a-4\\0&1&-1&c\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{5}]\\[(2)\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc}1&-1&2&4\\0&-1&1&0\\\hline 0&0&0&a-4\\0&0&0&a-4\\0&0&0&c\end{array}\right]. \text{ Así que}$$

La respuesta es $\boxed{a = 4 \text{ y } \quad c = 0}$.

□

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 3(a) Como $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}\big(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\big) = \mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}^{-1}$. Basta comprobar que mediante transformaciones elementales se llega a la matriz identidad:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&2&0&0\\0&0&1&0\\2&b&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\2-b&b&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{[(b-2)\mathbf{4}+\mathbf{1}]\\[(-b)\mathbf{4}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(\frac{1}{2})\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

□

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 3(b) Dado que si las columnas de la matriz invertible $\mathbf{S}$ son autovectores de $\mathbf{A}$ tenemos que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}(\mathbf{S}^{-1})$, entonces si $\mathbf{A}$ es invertible, tenemos que $\mathbf{A}^{-1} = \Big(\mathbf{S}\mathbf{D}(\mathbf{S}^{-1})\Big)^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{S}^{-1})$; es decir $\mathbf{A}^{-1}$ también es diagonalizable, tiene los mismos autovectores que $\mathbf{A}$ y sus autovalores son los inversos de los de $\mathbf{A}$. Por tanto, podemos trabajar directamente con $\mathbf{A}$. Como los autovectores de $\mathbf{A}$ son los números de la diagonal (por ser $\mathbf{A}$ triangular), tenemos que $\lambda = 1$ está repetido tres veces, veamos cuando $\mathbf{A}$ (y por tanto $\mathbf{A}^{-1}$) es diagonalizable:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}-(1)\mathbf{I}\\\hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc}0&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&0&0\\2&b&0&0\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(2)\mathbf{2}]\\[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc}0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&0\\2&2(b-1)&0&0\\\hline 1&-1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right],$$

es decir, para que la dimensión del autoespacio $\mathcal{E}_{\lambda=1}$ sea 3, es necesario que $\boxed{b=1}$.

$\square$

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 3(c) Ya sabemos que $\left[\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};\right]$ es una base de $\mathcal{E}_{\lambda=1}$ cuando $b=1$.

Por otra parte, como $\left[\begin{array}{c}\mathsf{A}-(2)\mathsf{I}\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc}-1&0&0&0\\2&0&0&0\\0&0&-1&0\\2&1&0&-1\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc}-1&0&0&0\\2&0&0&0\\0&0&-1&0\\2&1&0&0\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$, entonces

$\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};\right]$ es una base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovectores de A.

$\square$

(Final Mayo 22/23) Ejercicio 3(d)

- $|2\mathsf{A}^\intercal\mathsf{B}| = |2\mathsf{A}||\mathsf{B}| = 2^4\times 2\times 2 = 2^6 = 64.$
- $|\mathsf{AB}-\mathsf{B}| = |(\mathsf{A}-\mathsf{I})\mathsf{B}| = 0\times 2 = 0.$
- $\operatorname{tr}\left(\mathsf{BAB}^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left(\mathsf{A}\right) = 5$ por ser BAB^{-1} semejante a A.

$\square$

(Final Mayo 22/23) Conjunto de preguntas 1(a) **Verdadero**: Como $\mathsf{AB}_{|j} = \mathsf{BD}_{|j} = \mathsf{B}\lambda_j(\mathsf{I}_{|j}) = \lambda_j\mathsf{B}_{|j}$, donde D es una matriz diagonal, cuya diagonal contiene los correspondientes autovalores λ_j, y como $\boldsymbol{x}=\mathsf{B}\boldsymbol{a}$, entonces

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{AB}\boldsymbol{a} = \mathsf{BD}\boldsymbol{a} = \mathsf{B}\begin{pmatrix}\lambda_1 a_1\\ \vdots\\ \lambda_n a_n\end{pmatrix}.$$

Otra demo: Como las columnas de B son una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathsf{A}=\mathsf{BDB}^{-1}$, donde D es diagonal con los correspondientes autovalores en su diagonal principal, de manera que $\mathsf{D}\boldsymbol{a} = (\lambda_1 a_1,\dots\lambda_n a_n,)$. Por tanto, como $\boldsymbol{x}=\mathsf{B}\boldsymbol{a}$, tenemos que $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{BDB}^{-1}\boldsymbol{x} = \mathsf{BDB}^{-1}\mathsf{B}\boldsymbol{a} = \mathsf{B}(\mathsf{D}\boldsymbol{a})$.

$\square$

(Final Mayo 22/23) Conjunto de preguntas 1(b) **Falso**: Sea $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ (es decir, una base del subespacio de vectores cuya **última** componente es nula) y sea $\mathsf{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$; entonces,

$$B^* = \left\{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

es base del subespacio de vectores cuya **primera** componente es nula.

$\square$

(Final Mayo 22/23) Conjunto de preguntas 1(c) **Verdadero**: Como ${}_{j|}\mathsf{C} = {}_{j|}\left(\mathsf{A}+\mathsf{A}^\intercal\right) = {}_{j|}\mathsf{A} + {}_{j|}(\mathsf{A}^\intercal) = (\mathsf{A}^\intercal)_{|j} + \mathsf{A}_{|j} = \mathsf{C}_{|j}$, la matriz C es simétrica y, por tanto, diagonalizable.

$\square$

(Final Mayo 22/23) Conjunto de preguntas 1(d) **Verdadero**: Como $\mathsf{A}\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{v}$, tenemos que $12 = f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot(3\boldsymbol{v}) = 3\big(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\big) = 3\|\boldsymbol{v}\|^2$; por tanto $\|\boldsymbol{v}\|^2=4$; es decir $\boxed{\|\boldsymbol{v}\|=2}$.

$\square$

(Final Mayo 22/23) Conjunto de preguntas 1(e) **Verdadero**: Como $1 = |\mathsf{A}| = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 1 \times 2 \times \lambda_3$, tenemos que $\lambda_3 = \frac{1}{2}$; y como los autovalores de A^{-1} son los inversos de los autovalores de A, sabemos que A y A^{-1} tienen los mismos autovalores, por tanto, tienen la misma traza.

□

(Final Mayo 22/23) Conjunto de preguntas 2(a) Como $\operatorname{rg}\big(\underset{3\times 3}{\mathsf{A}(\mathsf{B}^\intercal)}\big) = 3$, necesariamente $\operatorname{rg}\big(\underset{3\times 4}{\mathsf{A}}\big) = \operatorname{rg}\big(\underset{3\times 4}{\mathsf{B}}\big) = 3$.

□

(Final Mayo 22/23) Conjunto de preguntas 2(b) Por una parte, $\left|\underset{4\times 4}{(\mathsf{B}^\intercal)\mathsf{B}}\right| = 0 = \left|\underset{4\times 4}{(\mathsf{B}^\intercal)\mathsf{A}}\right|$ (pues no pueden tener rango 4), y por otra $|\mathsf{B}(\mathsf{A}^\intercal)| = \left|\big(\mathsf{B}(\mathsf{A}^\intercal)\big)^\intercal\right| = |\mathsf{A}(\mathsf{B}^\intercal)| = 2$.

□

(Final Mayo 22/23) Conjunto de preguntas 2(c) Dado que $\mathsf{A}(\mathsf{B}^\intercal)$ es de rango completo (invertible) la única solución es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

□

(Final Mayo 22/23) Conjunto de preguntas 2(d)

$$\begin{aligned}\det\left[\mathsf{C}_{|2};\ (\mathsf{C}_{|2} - \mathsf{C}_{|1});\ (2\mathsf{C}_{|2} + \mathsf{C}_{|3});\ \right] &= \det\left[\mathsf{C}_{|2};\ -\mathsf{C}_{|1};\ \mathsf{C}_{|3};\ \right] = -\det\left[\mathsf{C}_{|2};\ \mathsf{C}_{|1};\ \mathsf{C}_{|3};\ \right]\\ &= \det\left[\mathsf{C}_{|1};\ \mathsf{C}_{|2};\ \mathsf{C}_{|3};\ \right] = |\mathsf{C}| = |\mathsf{A}\mathsf{B}^\intercal| = 2.\end{aligned}$$

□

(Final Mayo 22/23) Conjunto de preguntas 3(a) Diagonalizando por congruencia podemos saber los signos de los autovalores. Así, como $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ concluimos que

- si $b < 1$, no es nada (puede tomar valores tanto positivos como negativos).
- si $b = 1$, es semidefinida positiva.
- si $b > 1$, es definida positiva.

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 1(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-4)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & -7 & -15 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -7 & -1 \end{bmatrix}$ por tanto son 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes.

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 1(b) Por el enunciado tenemos que $\mathsf{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 10 & 2 \end{bmatrix}$.

Por tanto, si $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 10 & 2 \end{bmatrix}$, entonces $\mathsf{A} = \mathsf{C}(\mathsf{B}^{-1})$, ya que por el primer apartado sabemos que B es invertible.

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 1(c) Como $\mathsf{A}^\intercal = \big(\mathsf{C}(\mathsf{B}^{-1})\big)^\intercal = (\mathsf{B}^{-1})^\intercal(\mathsf{C}^\intercal)$, donde $(\mathsf{B}^{-1})^\intercal = \big(\mathsf{B}^\intercal\big)^{-1}$ es rango completo; y puesto que para cualquier E invertible, $(\mathsf{A}^\intercal)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ si y solo si $\mathsf{E}(\mathsf{A}^\intercal)\boldsymbol{x} = \mathsf{E}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, el conjunto de vectores que son solución de $(\mathsf{A}^\intercal)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es el mismo que el conjunto de vectores que son solución de $\mathsf{E}(\mathsf{A}^\intercal)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Así, tomando $\mathsf{E} = \mathsf{B}^\intercal$ tenemos que el conjunto de vectores que son solución de

$(\mathbf{A}^\intercal)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es el mismo que el conjunto de vectores que son solución de $\mathbf{B}^\intercal(\mathbf{A}^\intercal)\boldsymbol{x} = \mathbf{B}^\intercal\Big((\mathbf{B}^\intercal)^{-1}(\mathbf{C}^\intercal)\Big)\boldsymbol{x} = (\mathbf{C}^\intercal)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Así que

$$\left[\begin{array}{cc} 2 & 4\\ 0 & 0\\ 5 & 10\\ 1 & 2\\ \hline 1 & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc} 2 & 0\\ 0 & 0\\ 5 & 0\\ 1 & 0\\ \hline 1 & -2\\ 0 & 1 \end{array}\right] \quad\Rightarrow\quad \text{una base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \text{ es: } \left[\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix};\right]$$

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 1(d) Puesto que $\mathbf{A} = \underset{2\times 4}{\mathbf{C}}\ \underset{4\times 4}{(\mathbf{B}^{-1})}$ tenemos que $m = 2$ y $n = 4$. Y del anterior apartado, la dimensión de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ es 1, pero como dicha dimensión es igual a $m-r$, tenemos que $r = 1$.

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 2(a) $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$
Las componentes fuera de la diagonal son nulas $({}_{i|}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}_{|j} = 0$ con $i \neq j)$, así que las columnas de $\mathbf{A}$ son ortogonales entre si.

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 2(b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}}$
$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$. Por tanto, $\boxed{\det \mathbf{A} = 4}$

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 2(c) Como $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A} = 2\mathbf{I}$ tenemos que $\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}^\intercal\right)\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 2(d) Como $\mathcal{S}$ es un subespacio, los vectores de $\mathcal{S}$ deben ser soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones. Las filas de la matriz coeficiente de ese sistema homogéneo deben ser ortogonales a las dos primeras columnas de $\mathbf{A}$. Como las dos últimas columnas de $\mathbf{A}$ son perpendiculares a las dos primeras, tenemos que

$$\mathcal{S} = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 2(e)

$$\mathbf{A}^9 = (\mathbf{A}^4)(\mathbf{A}^4)\mathbf{A} = (-4\mathbf{I})(-4\mathbf{I})\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 16 & 0\\ 0 & 16 & 0 & 16\\ -16 & 0 & 16 & 0\\ 0 & -16 & 0 & 16\end{bmatrix}.$$

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 3(a) $\mathbf{A}^\intercal\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1-a\\ 1-b & b\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; consecuentemente el autovalor asociado es $\lambda = 1$. Por otra parte $\begin{pmatrix}1, & 1,\end{pmatrix}$ no es autovector de $\mathbf{A}$ salvo cuando $\mathbf{A}$ es simétrica puesto que

$$\text{Si}\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-b+1\\-a+b+1\end{pmatrix} \text{es múltiplo de } \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad a-b = -a+b \quad\Rightarrow\quad 2a = 2b.$$

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 3(b) Por una parte, puesto que las componentes de $\mathbf{A}$ no son negativas, y como las componentes de $\boldsymbol{v}$ tampoco son negativas: $v_i \geq 0$

$$_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{v}) = {}_{i|}\Big((\mathbf{A}_{|1})v_1 + (\mathbf{A}_{|2})v_2\Big) = ({}_{i|}\mathbf{A}_{|1})v_2 + ({}_{i|}\mathbf{A}_{|2})v_2 \geq 0$$

pues es una suma de números no negativos. Por otra parte, como $v_1 + v_2 = 1$ y puesto que el producto punto de un vector $\boldsymbol{v}$ por un vector de unos es la suma las componentes de $\boldsymbol{v}$, tenemos que

$$\boldsymbol{v} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = v_1 + v_2 = 1.$$

Así pues, como $\mathbf{A}^\intercal \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; y como $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\mathbf{A}^\intercal)$ entonces la suma de las componentes de $\mathbf{A}\boldsymbol{v}$ es: $\boldsymbol{v}(\mathbf{A}^\intercal)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{v} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1.$

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 3(c) La traza de $\mathbf{A}$ es $(a+b)$ y por tanto la suma de autovalores $1 + \lambda_2 = a + b$; es decir, $\boxed{\lambda_2 = a + b - 1}$, donde $0 \leq a \leq 1$ y $0 \leq b \leq 1$. Por tanto, los casos extremos son:

$$\begin{cases} \lambda_2 = 1 & \text{cuando } a = b = 1, \text{ en cuyo caso } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ \lambda_2 = -1 & \text{cuando } a = b = 0, \text{ en cuyo caso } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases},$$

en el resto de casos $-1 < \lambda_2 < 1$. Por tanto, en todos los casos $|\lambda_2| \leq 1$.

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 3(d) Como $\mathbf{A}$ es simétrica, sabemos (parte a) que $\begin{pmatrix}1, & 1,\end{pmatrix}$ es autovector y que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ no nulo y perpendicular será otro autovector, por ejemplo $\begin{pmatrix}-1, & 1,\end{pmatrix}$. Pero también podemos calcularlos:

$$\begin{cases} \text{Para } \lambda_1 = 1: & \mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-a & a-1 \end{bmatrix} \implies \mathcal{E}_{(1)}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\right]\right) \\ \\ \text{Para } \lambda_2 = 2a-1: & \mathbf{A} - (2a-1)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1-a & 1-a \\ 1-a & 1-a \end{bmatrix} \implies \mathcal{E}_{(2a-1)}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix};\right]\right). \end{cases}$$

Por tanto, $\mathsf{B} = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix};\right]$ es una base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores de $\mathbf{A}$ es.

□

(Final Julio 21/22) Ejercicio 3(e) $\mathbf{A}^k\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^k(\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{w}) = \alpha(\mathbf{A}^k)\boldsymbol{v}+\beta(\mathbf{A}^k)\boldsymbol{w} = \alpha(\lambda_1^k)\boldsymbol{v}+\beta(\lambda_2^k)\boldsymbol{w}$. Como $\lambda_1 = 1$ y como $|\lambda_2| < 1$, resulta que: $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{v} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Y como las componentes de $\boldsymbol{z}$ suman 1, necesariamente $\alpha = \frac{1}{2}$, por tanto

$$\boldsymbol{z} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

□

(Final Julio 21/22) Conjunto de preguntas 1(a) Dicha matriz debe ser una matriz m cuyo espacio nulo es unidimensional. En otras palabras, el rango es $3 - 1 = 2$. Podemos tomar $\mathbf{A}$ como una matriz de 2×3 cuyas filas son linealmente independientes. Como ejemplo, tomamos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

□

(Final Julio 21/22) Conjunto de preguntas 1(b) Para encontrar todas las soluciones, aplicamos la eliminación:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(Final Julio 21/22) Conjunto de preguntas 2(a) Calculando los menores principales superiores tenemos:

$$\det\begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = a > 0; \quad \det\begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix} = (a-2)(a+2) > 0; \quad \det\begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2(a-2)(a+1) > 0.$$

Por tanto la condición es $a > 2$.

□

(Final Julio 21/22) Conjunto de preguntas 2(b) Como hay un elemento positivo en la diagonal principal, $\mathbf{A}$ nunca podría ser definida negativa.

□

(Final Julio 21/22) Conjunto de preguntas 2(c) Puesto que $|\mathbf{A}| = 2(a-2)(a+1) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{A}$ es singular si y solo si $a = -1$ ó $a = 2$.

□

(Final Julio 21/22) Conjunto de preguntas 3(a) $\mathbf{A}$ es triangular superior, por lo que los valores propios son las entradas en la diagonal: $0, 0, 0, 0$.

□

(Final Julio 21/22) Conjunto de preguntas 3(b) $\mathbf{A}$ tiene rango 3, por lo que sólo hay un autovector linealmente independiente. $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\right]$.

□

(Final Julio 21/22) Conjunto de preguntas 4(a) $\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\intercal} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\intercal} = \boxed{\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}}.$

□

(Final Julio 21/22) Conjunto de preguntas 5(a) **Falso.** Si el conjunto de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es una recta, entonces el rango de $\mathbf{A}$ es 2. Por tanto, la única solución de $\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ es el punto $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.

□

(Final Julio 21/22) Conjunto de preguntas 5(b) **Verdadero.** $\mathbf{A} = \mathbf{PD}\left(\mathbf{P}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{\intercal} = \left(\mathbf{P}^{-1}\right)^{\intercal}\mathbf{D}\mathbf{P}^{\intercal} = \left(\mathbf{P}^{\intercal}\right)^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}^{\intercal}$.

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 1(a)

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Puesto que el rango de $\mathbf{A}$ es 3, entonces $\mathbb{R}^3 \subset \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y por tanto $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tendrá *infinitas* soluciones para cualquier $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ (pues hay columnas libres). Pero como $\mathbb{R}^4 \not\subset \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$, entonces $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ *podría no tener solución* para algún $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^4$, pero en caso de tenerla, será única (puesto que no hay filas libres en $\mathbf{A}$).

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 1(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como la última fila pertenece a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ y tan solo dos de sus componentes son nulas, dicho vector es una posible respuesta es: $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$, donde $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}0, & 0, & 2, & 2,\end{pmatrix}$.

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 1(c) De la eliminación en el apartado (a) deducimos que una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ es $\left[\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\right]$.

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 1(d) Dicho complemento ortogonal es el conjunto de vectores ortogonales a $\begin{pmatrix}5, & -2, & -1, & 1,\end{pmatrix}$, es decir

$$\left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0,\end{pmatrix}\right\}.$$

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 1(e) …¿de qué color es el caballo blanco de santiago?…Unas ecuaciones cartesianas son

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\right\}, \text{ es decir } \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right).$$

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 2(a) Puesto que $\mathbf{R}$ tiene tres columnas, $\mathbf{A}$ también: $\boxed{n = 3}$. Puesto que el rango de $\mathbf{R}$ es tres y las columnas de $\mathbf{Q}$ son linealmente independientes, el rango de $\mathbf{A}$ es 3: $\boxed{\operatorname{rg} \mathbf{A} = 3}$. Por tanto, no puede haber menos de tres filas: $\boxed{m \geq 3}$.

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 2(b) $\mathbf{A}_{|3} = \mathbf{Q}\mathbf{R}_{|3} = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, $\mathbf{A}_{|3} = 0\mathbf{Q}_{|1} + 1\mathbf{Q}_{|2} + 1\mathbf{Q}_{|3}$.

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 2(c) Como las colummnas de $\mathbf{Q}$ son *ortonormales*

$$\|\mathbf{A}_{|3}\|^2 = (\mathbf{Q}_{|2} + \mathbf{Q}_{|3}) \cdot (\mathbf{Q}_{|2} + \mathbf{Q}_{|3}) = (\mathbf{Q}_{|2}) \cdot (\mathbf{Q}_{|2}) + (\mathbf{Q}_{|3}) \cdot (\mathbf{Q}_{|3}) = 1 + 1 = 2.$$

Por tanto $\|\mathbf{A}_{|3}\| = \sqrt{2}$.

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 2(d) Como $\mathbf{A}_{|1} = \mathbf{Q}_{|1}$, como $\mathbf{A}_{|3} = \mathbf{Q}_{|2} + \mathbf{Q}_{|3}$ y como las columnas de $\mathbf{Q}$ son ortogonales, entonces sabemos que la primera y tercera columnas de $\mathbf{A}$ son perpendicuales.

$$(\mathbf{A}_{|1}) \cdot (\mathbf{A}_{|3}) = (\mathbf{Q}_{|1}) \cdot (\mathbf{Q}_{|2} + \mathbf{Q}_{|3}) = (\mathbf{Q}_{|1}) \cdot (\mathbf{Q}_{|2}) + (\mathbf{Q}_{|1}) \cdot (\mathbf{Q}_{|3}) = 0 + 0 = 0 \;\Rightarrow \mathbf{A}_{|1} \perp \mathbf{A}_{|3}.$$

Sin embargo, el resto de productos punto entre las columnas de $\mathbf{A}$ son distintos de cero; por ejemplo

$$(\mathbf{A}_{|2}) \cdot (\mathbf{A}_{|3}) = (-3\mathbf{Q}_{|1} + 2\mathbf{Q}_{|2}) \cdot (\mathbf{Q}_{|2} + \mathbf{Q}_{|3}) = 2(\mathbf{Q}_{|2}) \cdot (\mathbf{Q}_{|2}) = 2.$$

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 2(e) Si $\mathbf{A}$ es cuadrada, $\mathbf{Q}$ también lo es. Por tanto $\mathbf{Q}$ es una *matriz ortogonal*, es decir $\mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Consecuentemente $\det(\mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{Q}) = (\det \mathbf{Q})^2 = 1$. Por tanto $\det \mathbf{Q}$ solo puede ser 1 ó -1. Así,

$$|\det \mathbf{A}| = |\det(\mathbf{Q}\mathbf{R})| = |\det \mathbf{Q} \cdot \det \mathbf{R}| = |\det \mathbf{R}| = 2.$$

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 3(a)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-a)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a^2 & a & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(a^2)\mathbf{3}+\mathbf{1}]\\ [(-a)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \mathsf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{bmatrix}.$$

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 3(b) Puesto que L es invertible, basta que D tambiénlo sea. Por tanto solo es necesario que $d \neq 0$.

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 3(c) A es simétrica independientemente de los valores de a y d: $\mathsf{A}^\intercal = \left(\mathsf{LDL}^\intercal\right)^\intercal = \left(\mathsf{L}^\intercal\right)^\intercal \mathsf{D}^\intercal \mathsf{L}^\intercal = \mathsf{LDL}^\intercal = \mathsf{A}$.

□

(Final Mayo 21/22) Ejercicio 3(d) A es definida positiva si y solo si $\boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{x} > 0$ para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Si llamamos $\boldsymbol{y}$ al vector $\mathsf{L}^\intercal\boldsymbol{x}$ tenemos que

$$\boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathsf{LDL}^\intercal\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\mathsf{D}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^3 \end{bmatrix}\boldsymbol{y},$$

que es mayor que cero si y solo si $d > 0$.

□

(Final Mayo 21/22) Conjunto de preguntas 1(a) Puesto que A y D son similares, tienen los mismos autovalores. Y puesto que A es diagonalizable, entonces $\mathsf{A}^k = \mathsf{X}(\mathsf{D}^k)(\mathsf{X}^{-1})$. Por tanto

$$\mathsf{M} \;=\; \mathsf{A}^4 - 2(\mathsf{A}^2) - 8\mathsf{I} \;=\; \mathsf{X}\big(\mathsf{D}^4 - 2(\mathsf{D}^2) - 8\mathsf{I}\big)\mathsf{X}^{-1} \;=\; \mathsf{X}\begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}(\mathsf{X}^{-1}).$$

Por tanto, los autovalores son -9 (doble) y 0 (doble).

□

(Final Mayo 21/22) Conjunto de preguntas 1(b) Las soluciones no nulas de $\mathsf{M}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ son los autovectores correspondientes a $\lambda = 0$. Por tanto, una base del correspondiente autoespacio está formada por las columas 2 y 3 de X, así que

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(Final Mayo 21/22) Conjunto de preguntas 2(a) **Verdadero:** Sabemos que $(\mathsf{A}^{-1})\mathsf{A} = \mathsf{I}$, y sustituyendo $\mathsf{A} = \mathsf{A}^\intercal$ tenemos que $(\mathsf{A}^{-1})(\mathsf{A}^\intercal) = \mathsf{I}$; transponiendo tenemos que $\mathsf{A}(\mathsf{A}^{-1})^\intercal = \mathsf{I}$, es decir, $(\mathsf{A}^{-1})^\intercal = \mathsf{A}^{-1}$.

□

(Final Mayo 21/22) Conjunto de preguntas 2(b) **Falso:** El rango de Q es n, pues sus n columnas son linealmente independientes por ser perpendiculares entre si. Por tanto las m filas de Q son linealmente dependientes (pues $m > \operatorname{rg}\big(\mathsf{Q}\big)$; es decir, existe $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^m$ tal que $\boldsymbol{y}\mathsf{Q} = \mathbf{0}$. Por tanto $\mathsf{Q}(\mathsf{Q}^\intercal)\boldsymbol{y} = \mathsf{Q}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, es decir, las columnas de $\mathsf{Q}(\mathsf{Q}^\intercal)$ son linealmente dependientes (i.e., la matriz cuadrada $\mathsf{Q}(\mathsf{Q}^\intercal)$ es singular).

□

(Final Mayo 21/22) Conjunto de preguntas 2(c) **Verdadero:** Si $\lambda = 0$, entonces $\mathbf{A} - 0\mathbf{I}$ es singular, es decir, $\mathbf{A}$ es singular. Por tanto las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes, es decir, existe $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

□

(Final Mayo 21/22) Conjunto de preguntas 2(d) **Verdadero:** Si $\mathbf{A}$ es simétrica, es ortogonalmente diagonalizable: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^\intercal\mathbf{D}\mathbf{Q}$; Por tanto $\mathbf{A}^2 = \mathbf{Q}^\intercal(\mathbf{D}^2)\mathbf{Q}$ es una diagonalización ortogonal de $\mathbf{A}^2$ donde los elementos de la diagonal de $\mathbf{D}^2$ son los autovalores de $\mathbf{A}^2$; que necesariamente son todos positivos por ser el cuadrado de los autovalores de $\mathbf{A}$ (todos distintos de cero puesto que $\mathbf{A}$ es invertible).

□

(Final Mayo 21/22) Conjunto de preguntas 2(e) **Falso:** Por ejemplo, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

□

(Final Mayo 21/22) Conjunto de preguntas 2(f) **Falso:** Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

□

(Final Mayo 21/22) Conjunto de preguntas 2(g) **Falso:**. Es posible encontrar combinaciones lineales de $\mathbf{0}$ distintas de la trivial, $0(\mathbf{0})$, que son el vector nulo. Por ejemplo: $1492(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Por tanto, dicho conjunto es linealmente dependiente.

□

(Final Mayo 21/22) Conjunto de preguntas 3(a) Diagonalizando por congruencia:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(a)\overset{\tau}{\mathbf{1}}+\mathbf{3}]}]{{[(a)\overset{\tau}{\mathbf{1}}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a+2) \end{bmatrix} \xrightarrow[{[\mathbf{2}\overset{\tau}{\rightleftharpoons}\mathbf{3}]}]{{[\mathbf{2}\overset{\tau}{\rightleftharpoons}\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (a-2)(a+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La forma cuadrática $f(x,y,z)$ $\begin{cases} \text{es semi-definida negativa si} & |a| \leq 2 \\ \text{no es ni positiva ni negativa definida si} & |a| > 2 \end{cases}$.

□

(Final Julio 20/21) Ejercicio 1(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{[(1)\overset{\tau}{\mathbf{1}}+\mathbf{5}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{[(-1)\overset{\tau}{\mathbf{3}}+\mathbf{4}] \\ [(3)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right];$$

por tanto el conjunto de soluciones es $\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$. □

(Final Julio 20/21) Ejercicio 1(b) El conjunto de soluciones es una recta, ya que el subespacio de soluciones a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene dimensión 1 (la matriz tiene 4 columnas y su rango es 3). □

(Final Julio 20/21) Ejercicio 1(c) Por ejemplo, las filas 1, 3 y 4 de $\mathbf{A}$:

$$\text{una base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) : \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \right].$$

□

(Final Julio 20/21) Ejercicio 1(d) Las soluciones del sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ son ortogonales a las filas de $\mathbf{A}$, por tanto,

$$\text{una base de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)^{\perp} \left(\text{es decir, una base de } \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)\right): \left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix};\right].$$

□

(Final Julio 20/21) Ejercicio 2(a) Los autovalores son -1, 0, y 1, ya que $\mathbf{A}$ es triangular. Si denotamos por $\mathcal{E}_{\lambda}$ el autoespacio correspondiente al autovalor λ, tenemos que:

$$\text{para } \lambda=-1: \quad \left[\frac{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc}0&2&4\\0&1&5\\0&0&2\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}0&2&0\\0&1&3\\0&0&2\\\hline 1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right]; \quad \mathcal{E}_{-1} = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\right]\right)$$

$$\text{para } \lambda=0: \quad \left[\frac{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc}-1&2&4\\0&0&5\\0&0&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}-1&0&0\\0&0&5\\0&0&1\\\hline 1&2&4\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]; \quad \mathcal{E}_{0} = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix};\right]\right)$$

$$\text{para } \lambda=1: \quad \left[\frac{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc}-2&2&4\\0&-1&5\\0&0&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(5)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\\\hline 1&1&7\\0&1&5\\0&0&1\end{array}\right]; \quad \mathcal{E}_{1} = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix};\right]\right)$$

Por tanto, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ y $\mathbf{S} = \begin{bmatrix}1&2&7\\0&1&5\\0&0&1\end{bmatrix}$. □

(Final Julio 20/21) Ejercicio 2(b) Puesto que $\mathbf{D}^{1001} = \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{1001} = \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{D}$ y $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$ entonces

$$\boxed{\mathbf{A}^{1001} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{1001}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{A}}.$$

Como $\mathbf{I}$ es invertible pero $\mathbf{A}^{1000}$ es singular (por ser $\mathbf{A}$ es singular), necesariamente $\mathbf{A}^{1000} \neq \mathbf{I}$. □

(Final Julio 20/21) Ejercicio 2(c) $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ tiene 2 autovalores positivos (tiene rango 2 y sus autovalores no pueden ser negativos puesto que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \sum_i \left(\mathbf{A}\boldsymbol{x}_{|i}\right)^2 \geq 0$). El autovalor que falta es cero, pues $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ es singular.

(Alternativamente: $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}$ es simétrica, así que los autovalores tienen los mismos signos que los elementos de la diagonal tras diagonalizar por congruencia:

$$\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&4&8\\-4&8&42\end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&0&0\\-4&0&26\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&26\end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&26&0\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}]{} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&26&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

□

(Final Julio 20/21) Ejercicio 2(d) No, por ejemplo: $\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{A}^{\intercal}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$. □

(Final Julio 20/21) Ejercicio 3(a) $\mathbf{A}^{-1}$ tiene autovalores $\frac{1}{\lambda_j}$ y los mismos autovectores. Demostración:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{q}_j = \lambda_j\boldsymbol{q}_j \iff \left(\mathbf{A}^{-1}\right)\mathbf{A}\boldsymbol{q}_j = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)\lambda_j\boldsymbol{q}_j \iff \boldsymbol{q}_j = \lambda_j\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\boldsymbol{q}_j \iff \boxed{\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\boldsymbol{q}_j = \frac{1}{\lambda_j}\boldsymbol{q}_j}.$$

$\square$

(Final Julio 20/21) Ejercicio 3(b) Multiplicando $\boldsymbol{b} = c_1\boldsymbol{q}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{q}_n$ por $\boldsymbol{q}_1$. La ortonormalidad nos da

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q}_1 \;=\; \big(c_1\boldsymbol{q}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{q}_n\big)\cdot\boldsymbol{q}_1 \;=\; c_1\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_1 = c_1 \qquad \text{así que} \qquad \boxed{c_1 = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q}_1}.$$

$\square$

(Final Julio 20/21) Ejercicio 3(c) Multiplicando $\boldsymbol{b}$ por $\mathbf{A}^{-1}$ es como si multiplicaramos cada $\boldsymbol{q}_j$ por $\frac{1}{\lambda_j}$ (apartado (a)).

$$\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b} \;=\; \mathbf{A}^{-1}\big(c_1\boldsymbol{q}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{q}_n\big) \;=\; c_1\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\boldsymbol{q}_1 + \cdots + c_n\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\boldsymbol{q}_n \;=\; \frac{c_1}{\lambda_1}\boldsymbol{q}_1 + \cdots + \frac{c_n}{\lambda_n}\boldsymbol{q}_n.$$

Por tanto, d_1 resulta ser

$$\boxed{d_1 = \frac{c_1}{\lambda_1}} \quad \text{o usando el apartado (b):} \quad d_1 = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q}_1}{\lambda_1}.$$

$\square$

(Final Julio 20/21) Conjunto de preguntas 1(a) Puesto que $\mathbf{A}$ tiene tres columnas ortonormales entre si : $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A} = \underset{3\times3}{\mathbf{I}}$.

$\square$

(Final Julio 20/21) Conjunto de preguntas 1(b) Puesto que $\operatorname{rg}\left(\mathbf{AB}\right) \leq \operatorname{rg}\left(\mathbf{B}\right)$, entonces

$$\boxed{\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal\right) \leq \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = 3}$$

(por tanto $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$, de orden 5, es singular).

De hecho, $\boxed{\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal\right) = \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = 3}$*, pero el argumento para verlo es indirecto: por una parte,* $\mathbf{A}^\intercal$ *y* $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ *tienen* 5 *columnas y por otra* $\dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal\right) = \dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = 2$ *por ser* $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal\right)$*; pues si* $\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ *entonces*

$$\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal\right)$$

y si $\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal\right)$ *entonces*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x}\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cdot\mathbf{0} = 0 \Rightarrow \|\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{x}\|^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right).$$

$\square$

(Final Julio 20/21) Conjunto de preguntas 1(c) $\det\Big(\mathbf{A}\Big(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\Big)^{-1}\mathbf{A}^\intercal\Big) = \det\mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}^\intercal = \det\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal = 0$ ya que la matriz $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$, de orden 5, es singular (por el apartado anterior).

$\square$

(Final Julio 20/21) Conjunto de preguntas 2(a) **Falso:** Ni el vector $\boldsymbol{u}$ ni tampoco el vector $\boldsymbol{w}$ son solución a las ecuaciones cartesianas propuestas en el enunciado; por tanto, dichas ecuaciones cartesianas no corresponden al subespacio $\mathcal{V} = \mathcal{L}\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\right)$.

$\square$

(Final Julio 20/21) Conjunto de preguntas 2(b) **Verdadero:** $\Big(\Big(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\Big)^{-1}\mathbf{A}^\intercal\Big)\mathbf{A} \;=\; \Big(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\Big)^{-1}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A} \;=\; \mathbf{I}$.

$\square$

(Final Julio 20/21) Conjunto de preguntas 2(c) **Verdadero:** Los autovalores de una matriz también lo son de su inversa. Así, si $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ y $\mathbf{B}\boldsymbol{v} = \gamma\boldsymbol{v}$, entonces: $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{v} = \mathbf{A}\Big(\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{v}\Big) = \frac{1}{\gamma}\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \frac{\lambda}{\gamma}\boldsymbol{v}.$

$\square$

(Final Julio 20/21) Conjunto de preguntas 2(d) **Falso.** El conjunto no es cerrado para el producto por escalares. Por ejemplo: $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ no pertence al conjunto.

$\square$

(Final Julio 20/21) Conjunto de preguntas 3(a) Es **indefinida** puesto que $q(x,y) = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$, donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(2)\mathbf{2}]} \\ \overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]} \\ [(2)\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

□

(Final Julio 20/21) Conjunto de preguntas 3(b) En la pregunta anterior hemos visto que

$$\mathbf{D} = {}_{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(2)\mathbf{2}]}\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}\mathbf{A}_{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(2)\mathbf{2}]}\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} = \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B}, \qquad \text{donde } \mathbf{B} = \mathbf{I}_{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(2)\mathbf{2}]}\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}.$$

Aplicando la inversa de las transformaciones de las columnas sobre las columnas de $\mathbf{I}$ tenemos

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]} \\ [(\frac{1}{2})\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1};$$

como $\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2}+\frac{y}{2} \\ -\frac{x}{2}+\frac{y}{2} \end{pmatrix}$; y puesto que$\mathbf{A} = \left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\intercal}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$, concluimos que

$$q(x,y) = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\intercal}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x} = \left(\tfrac{x}{2}+\tfrac{y}{2}, \quad -\tfrac{x}{2}+\tfrac{y}{2},\right)\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \frac{x}{2}+\frac{y}{2} \\ -\frac{x}{2}+\frac{y}{2} \end{pmatrix} = \boxed{4\left(\tfrac{x}{2}+\tfrac{y}{2}\right)^2 - 4\left(-\tfrac{x}{2}+\tfrac{y}{2}\right)^2}.$$

□

(Final Junio 20/21) Ejercicio 1(a) $\mathbf{A}$ es siempre diagonalizable, por ser simétrica. En cuanto a $\mathbf{B}$ hay que verificar para qué valores de a el autoespacio correspondiente al autovalor repetido $\lambda = 1$ tiene dimensión 2.

$$\mathbf{B} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{1}{2})\mathbf{3}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

de donde se deduce que solo cuando $a = 1$ la dimensión de $\mathcal{N}\left(\mathbf{B} - \mathbf{I}\right)$ es 2.

□

(Final Junio 20/21) Ejercicio 1(b) Las matrices $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{A}$ son <u>*semejantes*</u> y, por tanto, tienen la misma traza; es decir $\boxed{\operatorname{tr}\left(\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\right) = 2 + a}$. Por otra parte, como $\mathbf{A}$ es singular ($\mathbf{A}_{|1} = \mathbf{A}_{|3}$), también lo es $\mathbf{A}\mathbf{B}^2$ y por tanto, $\boxed{\text{su determinante es nulo}}$.

□

(Final Junio 20/21) Ejercicio 1(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 1 & \text{Semidefinida positiva} \\ a < 1 & \text{Indefinida} \end{cases}$$

□

(Final Junio 20/21) Ejercicio 1(d) Si denotamos por $\mathcal{E}_{\lambda}$ el autoespacio correspondiente al autovalor λ, tenemos que:

$$\text{para } \lambda = 2: \quad \begin{bmatrix} \mathbf{B} - 2\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]} \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]; \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\right]\right)$$

$$\text{para } \lambda = 1: \quad \begin{bmatrix} \mathbf{B} - \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]; \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\right]\right)$$

$$\text{Por tanto, } \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathsf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

(Final Junio 20/21) Ejercicio 1(e) Puesto que los autoespacios $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ no son perpendiculares, es imposible obtener una base ortonormal de autovectores.

□

(Final Junio 20/21) Ejercicio 2(a) Puesto el $\boldsymbol{b}$ es un múltiplo de la quinta columna de A, el sistema siempre tiene solución.

Puesto que hay más columnas que filas, el rango siempre será menor que el número de columnas, por lo que *siempre habrá infinitas soluciones independientemente del valor de los parámetros*.

□

(Final Junio 20/21) Ejercicio 2(b)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a & 2 & 1 & 1 & -c \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{5+1}] \\ [(-a)\mathbf{5+2}] \\ [(-2)\mathbf{5+3}] \\ [(-1)\mathbf{5+4}] \\ [(c)\mathbf{5+6}]}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -a & -2 & -1 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{4+1}] \\ [(-1)\mathbf{3+2}]}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-a & -2 & -1 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Así que el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones es

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2-a \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}.$$

□

(Final Junio 20/21) Ejercicio 2(c)

A) No, puesto que en cualquier solución $x_3 = -x_2$.

B) Solo cuando $a \neq 2$, entonces basta dividir la segunda solución especial por $2 - a$ y restarla c veces a la solución particular; así obtenemos las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{a-2} \\ -\frac{c}{a-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a-2} \\ 0 & \frac{1}{a-2} \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \right\}$$

□

(Final Junio 20/21) Ejercicio 2(d) Puesto que el rango de A es 3 y el orden de $\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}$ es 5, necesariamente $\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}$ es singular, y por tanto su determinate es 0.

□

(Final Junio 20/21) Ejercicio 3(a) $\boxed{\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$; pues $\boldsymbol{b} = \mathsf{A}\boldsymbol{c} = \mathsf{A}\mathsf{A}^{-1}{}_{|2} = (\mathsf{I}_2)_{|=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

□

(Final Junio 20/21) Ejercicio 3(b) $\boxed{\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$; pues $\boldsymbol{d} = \mathsf{UL}\boldsymbol{c} = \mathsf{UL}\left(\mathsf{A}^{-1}\right)_{|2} = \mathsf{UL}\left(\mathsf{L}^{-1}\mathsf{U}^{-1}\mathsf{B}\right)_{|2} = (\mathsf{B}_2)_{|=} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\square$

(Final Junio 20/21) Ejercicio 3(c) Para encontrar $\boldsymbol{c}$ tan solo necesitamos resolver el sistema $\mathbf{UL}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{d}$. Pero dicho sistema es equivalente a cualquier sistema $\mathbf{EUL}\boldsymbol{c} = \mathbf{E}\boldsymbol{d}$ donde $\mathbf{E}$ es de rango completo. Por tanto, podemos multiplicar por $\mathbf{U}^{-1}$:

$$\left[\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-7)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\underset{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{U}^{-1}}\right]$$

Así, $\boldsymbol{c}$ verifica

$$\mathbf{UL}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}\boldsymbol{c} = \mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{f};$$

por lo que basta con resolver el sistema $\mathbf{L}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f}$ para dar con dicha columna:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{L} & -\boldsymbol{f} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -12 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -12 & 1 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(5)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -12 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Así pues, $\boldsymbol{c}$ (i.e., la segunda columna de $\mathbf{A}^{-1}$) es $\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$.

$\square$

(Final Junio 20/21) Conjunto de preguntas 1(a) **En el primer caso NO**: Puesto que $\mathbf{AA}^\intercal$ es de rango completo y orden 2, el rango tanto de $\mathbf{A}$ como de $\mathbf{A}^\intercal$ es 2; es decir, las 2 columnas de $\mathbf{A}^\intercal$ son linealmente independienes, por lo que la única combinación lineal de ellas que es igual a $\mathbf{0}$ es la trivial.
En el segundo caso SI: $\mathbf{A}$ tiene 5 columnas y su rango es solo 2; por lo que las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes.

$\square$

(Final Junio 20/21) Conjunto de preguntas 1(b) Como $\mathbf{AA}^\intercal$ es de orden 2, entonces $|2\left(\mathbf{AA}^\intercal\right)^{-1}| = 2^2|(\mathbf{AA}^\intercal)^{-1}| = \frac{4}{|\mathbf{AA}^\intercal|} = \frac{4}{3}$.

$\square$

(Final Junio 20/21) Conjunto de preguntas 1(c) Puesto que $\left[\boldsymbol{c}_1;\ \boldsymbol{c}_2\right]$ es la matriz $\mathbf{AA}^\intercal$ de orden 2:

$$\det\left[\boldsymbol{c}_2;\ (3\boldsymbol{c}_1 + 2\boldsymbol{c}_2)\right] = \det\left[\boldsymbol{c}_2;\ 3\boldsymbol{c}_1\right] = 3\det\left[\boldsymbol{c}_2;\ \boldsymbol{c}_1\right] = -3\det\left[\boldsymbol{c}_1;\ \boldsymbol{c}_2\right] = -3|\mathbf{AA}^\intercal| = -9.$$

$\square$

(Final Junio 20/21) Conjunto de preguntas 1(d) Puesto que $\mathbf{AA}^\intercal$ es de orden 2 y rango 2, sus columnas son linealmente independientes; por tanto, $\boxed{\dim\mathcal{S} = 0}$.

$\square$

(Final Junio 20/21) Conjunto de preguntas 1(e) Puesto que $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ es de orden 5 y rango 2, $\boxed{\dim\mathcal{W} = 5 - 2 = 3}$.

$\square$

(Final Junio 20/21) Conjunto de preguntas 1(f) Puesto que $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ es de rango 2, $\boxed{\dim\mathcal{Z} = 2}$.

$\square$

(Final Junio 20/21) Conjunto de preguntas 1(g) Ya sabemos que $\dim\mathcal{W} = 3$, pero $\mathcal{W}$ es precisamente el autoespacio correspondiente a $\lambda = 0$. Por tanto la multiplicidad geométrica de $\lambda = 0$ es 3.

Además, puesto que $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ es simétrica, $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ es diagonalizable. Así pues, las multiplicidades algebráica y geométrica son iguales, y por tanto la multiplicidad algebráica también es 3.

$\square$

(Final Junio 20/21) Conjunto de preguntas 1(h) Como tanto $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\intercal}$ como $\mathbf{A}^{\intercal}$ tienen dos columnas, y como $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\intercal}$ es de rango 2, $\mathbf{A}^{\intercal}$ es de rango completo por columnas (sus columnas son linealmente independientes, es decir, $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ si $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$).

Si denominamos con $\boldsymbol{v}$ al vector $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{x}$, es evidente que para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \sum v_i^2 > 0 \quad \text{pues} \quad \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \quad \text{si} \quad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

$\square$

(Final Junio 20/21) Conjunto de preguntas 2(a) Por ejemplo $\boxed{P = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = (1,) \right\}}$ ya que

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ \hline x & y & z \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{[(1)\overset{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{1}}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ \hline x & x+y & -x+z \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{[(1)\overset{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{2}}+\mathbf{3}]} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline x & x+y & y+z \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\square$

(Final Junio 20/21) Conjunto de preguntas 2(b) Tan solo el vector $\boldsymbol{c}$, pues es el único que es solución a las ecuaciones cartesianas.

$\square$

(Final Junio 18/19) Ejercicio 1(a) $\mathbf{C}_{|3} = \Big(\mathbf{A}\mathbf{B}\Big)_{|3} = \mathbf{A}\Big(\mathbf{B}_{|3}\Big) = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{|1}.$

$\square$

(Final Junio 18/19) Ejercicio 1(b) Puesto que el producto

$$\underset{3\times 5}{\mathbf{C}} = \underset{m\times n}{\mathbf{A}}\;\underset{3\times 5}{\mathbf{B}}$$

está definido y $\mathbf{B}$ tiene tres filas, entonces $\mathbf{A}$ tiene tres columnas ($n = 3$); además, puesto que $\mathbf{C}$ tiene tres filas, también $\mathbf{A}$ tiene tres filas ($m = 3$); es decir, $\mathbf{A}$ es de orden 3.

Por otra parte, como el rango de $\mathbf{C}$ es tres, el rango de $\mathbf{A}$ no puede ser menor a 3; por tanto $\boxed{\mathbf{A} \text{ es invertible}}$.

De hecho, aunque no se le pide, se puede encontrar $\mathbf{A}^{-1}$.

Por columnas: Observando las tres primeras columnas de $\mathbf{C}$ se deduce que

$$\left.\begin{array}{rl} \mathbf{A}\mathbf{B}_{|3} = & 2\mathbf{I}_{|1} \\ \mathbf{A}\mathbf{B}_{|2} = & \mathbf{I}_{|2} \\ \mathbf{A}\mathbf{B}_{|1} = & \mathbf{I}_{|3} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A}\left[\tfrac{1}{2}\mathbf{B}_{|3} \quad \mathbf{B}_{|2} \quad \mathbf{B}_{|1}\right] = \underset{3\times 3}{\mathbf{I}}. \text{ Por tanto } \mathbf{A}^{-1} = \left[\tfrac{1}{2}\mathbf{B}_{|3} \quad \mathbf{B}_{|2} \quad \mathbf{B}_{|1}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por filas: Puesto que $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}$, tenemos que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{B}$. Por tanto, podemos tratar de transformar $\mathbf{C}$ mediante eliminación gaussiana por filas para obtener $\mathbf{B}$. Si lo hacemos empleando la matriz ampliada $\big[\mathbf{C}\,|\,\mathbf{I}\big]$, cuando hayamos transformado $\mathbf{C}$ en $\mathbf{B}$, la matriz $\mathbf{I}$ se habrá transformado en $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(\frac{1}{2})\overset{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{1}}]}]{} \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\overset{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{3}}+\mathbf{1}]}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\overset{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{2}}+\mathbf{1}]}]{} \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\overset{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{3}}]}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(4)\overset{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{2}}+\mathbf{3}]}]{} \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(6)\overset{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{2}}]}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] = \big[\mathbf{B}|\mathbf{A}^{-1}\big].$$

$\square$

(Final Junio 18/19) Ejercicio 1(c) Puesto que $\mathbf{A}$ es invertible, tenemos que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{C}_{|5}$ implica que $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}_{|5}$. Pero como $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$, entonces $\boxed{\boldsymbol{x} = \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\right)_{|5} = \mathbf{B}_{|5} = \begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}}$ (la quinta columna de $\mathbf{B}$).

Si calculó $\mathbf{A}^{-1}$, también se puede calcular así: $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}_{|5} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1 & 1\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}$.

□

(Final Junio 18/19) Ejercicio 1(d) **Si**. Puesto que el rango de $\mathbf{B}$ es tres, la dimensión del espacio generado por sus filas (su espacio fila) es tres. Por otra parte, como $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, las filas de $\mathbf{C}$ son combinaciones lineales de las filas de $\mathbf{B}$. Y como $\mathbf{C}$ es de rango tres, dichas filas son independientes. Por tanto las filas de $\mathbf{C}$ son otra base del espacio generado por las filas de $\mathbf{B}$.

□

(Final Junio 18/19) Ejercicio 1(e) Por simple observación de las últimas columnas de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ se ve que

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{B}_{|3}\right) = 2\cdot\left(\mathbf{B}_{|3}\right); \qquad \mathbf{A}\left(\mathbf{B}_{|4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\mathbf{B}_{|4}\right); \qquad \mathbf{A}\left(\mathbf{B}_{|5}\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(\mathbf{B}_{|5}\right);$$

Por tanto, las tres últimas columnas de $\mathbf{B}$ son autovectores de $\mathbf{A}$, correspondientes respectivamente a los autovalores 2, $\frac{1}{2}$, y $\frac{1}{6}$. Como corresponden a autovalores distintos, dichas columnas son autovectores independientes y por tanto forman una base de $\mathbb{R}^3$.

□

(Final Junio 18/19) Ejercicio 2(a) Puesto que la matriz es de orden 3 y de rango 2 (pues dos autovalores son distintos de cero y solo uno igual cero), el conjunto de soluciones son todos los múltiplos del autovector asociado al autovalor 0; es decirSince the 3 by 3 matrix has rank 2 (only two eigenvalues are nonzero) then $\dim\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = 1$, and the set of solutions is the set of multiples of $\boldsymbol{v}_2$ (eigenvector corresponding to $\lambda = 0$),

$$\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

□

(Final Junio 18/19) Ejercicio 2(b) $\mathbf{A}$ tiene dos autoespacios, el asociado al autovalor $\lambda = 0$, y generado por $\boldsymbol{v}_2$, y el asociado al autovalor $\lambda = 1$, y generado por $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_3$ (que es de dimensión 2 por ser $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_3$ linealmente independientes)There are two eigenspaces, one for $\lambda = 0$ and another one for $\lambda = 1$ (this one with geometric multiplicity 2, since $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ are linearly independent).

La matriz es simétrica cuando los autespacios asociados a autovalores distintos son ortogonales entre si. Por tanto, esta matriz será simétrica si $\boldsymbol{v}_2$ es ortogonal a $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_3$. Veamos si es así:

$$\boldsymbol{v}_2\left[\boldsymbol{v}_1;\quad \boldsymbol{v}_3\right] = \begin{pmatrix}-1, & 2, & 1,\end{pmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 1,\end{pmatrix}$$

por tanto $\boxed{\mathbf{A}\text{ NO es simétrica}}$.

Para comprobar que es diagonalizable basta verificar que $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ son independientes y por tanto forman una base de $\mathbb{R}^3$.

$$\left[\boldsymbol{v}_1;\quad 2\boldsymbol{v}_2;\quad \boldsymbol{v}_3\right] = \begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}} \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

□

(Final Junio 18/19) Ejercicio 2(c) Aunque podríamos aplicar la proyección ortogonal de un vector sobre el espacio generado por el otro y tomar el vector diferencia; tenemos otra forma más sencilla de hacerlo. El segundo autovector $\boldsymbol{w}$ asociado a $\lambda = 1$ tiene que ser combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_3$, es decir $\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_3$, por tantoAlthough we could apply the orthogonal projection of one vector onto the spam of the other, and then we can take take the difference vector; we are going to proceed in other way. We need a vector $\boldsymbol{w}$ in the eigenspace corresponding to $\lambda = 1$ (a linear combination of $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_3$)

$$\boldsymbol{w} = \left[\boldsymbol{v}_1;\quad \boldsymbol{v}_3\right]\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix};$$

además $\boldsymbol{w}$ tiene que ser perpendicular a uno de los dos vectores, por ejemplo a $\boldsymbol{v}_1$, así

$$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{w}=0;\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}2, & 1, & 0,\end{pmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0;\quad\Rightarrow\quad 5\,(a+b)=0;\quad\Rightarrow\quad b=-a.$$

Así, para todo $a\neq 0$, resulta que $(a\boldsymbol{v}_1-a\boldsymbol{v}_3)$ es un autovector correspondiente a $\lambda=1$ y ortogonal a $\boldsymbol{v}_1$. Si particularizamos para $a=1$, obtenemos $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}0, & 0, & -1,\end{pmatrix}$. Solo nos falta normalizar $\boldsymbol{v}_1$ para obtener una base ortonormal como la pedida en el enunciado: $\left[\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}\\\frac{\sqrt{5}}{5}\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix};\right]$.

□

(Final Junio 18/19) Ejercicio 2(d) Como $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_3$ pertenecen al autoespacio asociado a $\lambda=1$, cualquier combinación de ellos también pertenece a dicho espacio. Por tanto $\mathbf{A}(2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_3)=1(2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_3)$ y

$$\mathbf{A}^k(2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_3)=1^k(2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_3)=(2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_3)=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

□

(Final Junio 18/19) Ejercicio 2(e) $(2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_3)\mathbf{A}(2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_3)=\begin{pmatrix}2, & 1, & -1,\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=6.$

□

(Final Junio 18/19) Ejercicio 3(a) Es **Falso** por varias razones:

- $\mathbf{P}$ tiene la expresión $\mathbf{P}=\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^\intercal$; y por tanto es una matriz de orden m, que se obtiene multiplicando las matrices $\mathbf{X}$, de $\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)^{-1}$ y de $\mathbf{X}^\intercal$, todas ellas de rango $n<m$. Así pues, el rango de $\mathbf{P}$ es necesariamente menor que m.
- $\mathbf{X}$ tiene rango n, por lo que el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por sus columnas tiene dimensión $n<m$. Por tanto, en $\mathbb{R}^m$ existen vectores $\boldsymbol{y}$ no nulos que son ortogonales a las columnas de $\mathbf{X}$, y cuya proyección será el vector cero $\mathbf{0}$. Es decir, $\mathbf{P}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ con $\boldsymbol{y}\neq\mathbf{0}$, por tanto $\mathbf{P}$ *es singular* (tiene autovalores nulos correspondientes a los vectores perpendiculares a las columnas de $\mathbf{X}$).

□

(Final Junio 18/19) Ejercicio 3(b) **Verdadero**:

$$\mathbf{P}^\intercal=\left(\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^\intercal\right)^\intercal=\left(\mathbf{X}^\intercal\right)^\intercal\left(\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)^{-1}\right)^\intercal\mathbf{X}^\intercal=\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^\intercal=\mathbf{P};$$

como $\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}$ es simétrica y la inversa de una matriz simétra es simétrica $\Rightarrow$ $\left(\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)^{-1}\right)^\intercal=\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)^{-1}$.

□

(Final Junio 18/19) Ejercicio 3(c) **Verdadero**:

$$\mathbf{PP}=\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^\intercal\cdot\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^\intercal=\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^\intercal=\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^\intercal=\mathbf{P}$$

□

(Final Junio 18/19) Ejercicio 3(d) **Verdadero**: Basta ver que el producto escalar entre el vector diferencia $(\boldsymbol{v}-\mathbf{P}\boldsymbol{v})$ y el vector proyección $\mathbf{P}\boldsymbol{v}$ es igual a cero:

$$\mathbf{P}\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}-\mathbf{P}\boldsymbol{v})\quad=\quad\boldsymbol{v}\mathbf{P}^\intercal\cdot(\boldsymbol{v}-\mathbf{P}\boldsymbol{v})\quad=\quad\boldsymbol{v}\mathbf{P}^\intercal\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\mathbf{P}^\intercal\mathbf{P}\boldsymbol{v}\quad=\quad\boldsymbol{v}\mathbf{P}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\mathbf{P}\boldsymbol{v}\quad=\quad 0.$$

donde hemos usado que $\mathbf{P}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\mathbf{P}^\intercal$ y que $\mathbf{P}$ es simetrica e idempotente, por lo que $\mathbf{P}^\intercal\mathbf{P}=\mathbf{PP}=\mathbf{P}$.

□

(Final Junio 18/19) Conjunto de preguntas 1(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^2 &=\mathbf{CC}=\mathbf{CC}^\intercal && \text{pues } \mathbf{C}=\mathbf{C}^\intercal \text{por ser } \mathbf{C} \text{ simétrica}\\ &=\mathbf{AB}(\mathbf{AB})^\intercal=\mathbf{ABB}^\intercal\mathbf{A}^\intercal && \text{pues } (\mathbf{AB})^\intercal=\mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}^\intercal\\ &=\mathbf{AIA}^\intercal && \text{pues } \mathbf{BB}^\intercal=\mathbf{I} \text{ por ser } \mathbf{B} \text{ una matriz ortogonal}\\ &=\mathbf{AA}^\intercal=\mathbf{I} && \text{pues } \mathbf{A} \text{ también es ortogonal.}\end{aligned}$$

$\square$

(Final Junio 18/19) Conjunto de preguntas 1(b) **SÍ.** Por una parte el rango de la matriz de coeficientes del sistema es 2, y como el sistema tiene 4 incógnitas (hay 4 columnas), **la dimensión del espacio de soluciones es dos** $(4-2)$. Por otra parte, los dos vectores de satisfacen el sistema, pues,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & & & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & & & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

por lo que **ambos vectores son solución. Y ambos vectores son linealmente independientes** (nótese que las dos componentes nulas de ambos vectores están en posiciones distintas). Como son **dos vectores independientes** y pertenecen a un subespacio de **dimensión dos**, necesariamente forman una base de dicho subespacio.

$\square$

(Final Junio 18/19) Conjunto de preguntas 1(c) El subespacio es el conjunto de combinaciones lineales de los tres vectores:

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Necesitamos eliminar la parte paramétrica (multiplicando las ecuaciones paramétricas por vectores que formen una base del complemento otogonal a dicho subespacio). Un modo sencillo es aplicar la eliminación gaussiana (si escribimos los vectores en horizontal y mediante eliminación por columnas logramos alguna columna de ceros, eso querrá decir que hemos multiplicado por un vector ortogonal a todos los vectores escritos en horizontal).

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline x & y & z \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ \hline x & -2x+y & z \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(3)\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hline x & -2x+y & -2x+y+3z \end{array}\right]$$

por tanto $\Rightarrow$ $\boxed{-2x+y+3z=0}$.

$\square$

(Final Junio 18/19) Conjunto de preguntas 1(d)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + a \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$

(Final Junio 18/19) Conjunto de preguntas 2(a) El determinate de A es $\det \mathsf{A} = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$ $-4 \neq 0$, por tanto la matriz es invertible. Usando cofactores es sencillo calcular el elemento $(3,2)$ de A^{-1}:

$$\frac{1}{\det \mathsf{A}} \cdot C_{23} = \frac{-1}{4} \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-2}{4} = \boxed{\frac{-1}{2}}.$$

$\square$

(Final Junio 18/19) Conjunto de preguntas 2(b) Podemos obtener dicha coordenada por Cramer:

$$x_3 = \frac{1}{\det \mathsf{A}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \cdot 2 \cdot 4 = \boxed{-2}.$$

$\square$

(Final Junio 18/19) Conjunto de preguntas 3(a) Puesto que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$; es simétrica, siempre es diagonalizable.

$\square$

(Final Junio 18/19) Conjunto de preguntas 3(b) Puesto que

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = (a+1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}; \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

ambos son autovectores de $\mathbf{A}$, el primero asociado al autovalor $(a+1)$ y el segundo al autovalor a.

$\square$

(Final Junio 18/19) Conjunto de preguntas 3(c) Como dos autovalores son $(a+1)$ y a; y como la traza es $3a$, el tercer autovalor tiene que ser $(a-1)$, de manera que $(a+1) + a + (a-1) = 3a$. Puesto que los tres autovalores son $(a-1)$, a y $(a+1)$:

$$\begin{cases} a > 1 & q(\boldsymbol{x}) > 0 \quad \text{definida positiva} \\ a = 1 & q(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad \text{semidefinida positiva} \\ -1 < a < 1 & q(\boldsymbol{x}) \lesseqgtr 0 \quad \text{nada (indefinida)} \\ a = -1 & q(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad \text{semidefinida negativa} \\ a < -1 & q(\boldsymbol{x}) < 0 \quad \text{definida negativa} \end{cases}$$

donde el símbolo $\lesseqgtr$ indica que puede ser mayor, igual o menor.

$\square$

(Final Junio 18/19) Conjunto de preguntas 3(d) Podemos hacerlo mediante la diagonalización por congruencia: puesto que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{\tau}{[(-\frac{1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-\frac{1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{3}]_\tau}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{D};$$

entonces $\mathbf{A} = {}_{\overset{\tau}{[(-1/2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}\mathbf{I} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{I}_{\overset{\tau}{[(-1/2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}$ y por tanto

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{2\left(x-\tfrac{z}{2}\right)^2 + 2\left(y\right)^2 + \tfrac{3}{2}\left(z\right)^2}.$$

Otra forma es empleando la diagonalización ortogonal. Calculamos un tercer autovector que, por ser $\mathbf{A}$ simétrica, es perpendicular a los otros dos del apartado b).

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\tau}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Y ahora construimos una matriz ortogonal cuyas columnas son autovectores de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\intercal}$, donde $\mathbf{D}$ es diagonal con los autovalores 3, 2, 1 en su diagonal principal (véase apartado el c); así

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \boxed{\tfrac{3}{2}\left(x+z\right)^2 + 2\left(y\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(-x+z\right)^2}.$$

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 1(a) Los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ no son perpendiculares, así que necesitamos encontrar una combinación lineal de ambos, $\big(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}\big)$, que sea perpendicular a uno de ellos, por ejemplo al primero. Así, se tiene que cumplir la restricción:

$$\boldsymbol{u}\cdot\big(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}\big)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}1, & 1, & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}2, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad b=-2a.$$

Por tanto, si $a=1$, sabemos que $\big(\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}\big)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ es perpendicular a $\boldsymbol{u}$. Ya solo nos falta normalizar ambos vectores $\quad\rightarrow\quad$ $\boxed{\text{Base ortonormal de } \mathcal{S}\text{:}\quad \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}.}$

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 1(b) Basta resolver $\mathsf{S}^{\intercal}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, (donde $\mathsf{S}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\end{bmatrix}$):

$$\left[\begin{array}{ccc}1&1&0\\0&1&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}]{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\\hline 1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{array}\right]\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix};\ \forall a\in\mathbb{R}.}$$

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 1(c) Si denotamos con S a la matriz $\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\end{bmatrix}$, entonces $\mathsf{P}=\mathsf{S}\big(\mathsf{S}^{\intercal}\mathsf{S}\big)^{-1}\mathsf{S}^{\intercal}$. Como los vectores no nulos de $\mathcal{S}$ son de la forma $\boldsymbol{y}=\mathsf{S}\boldsymbol{x}$ (con $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$), necesariamente:

$$\boxed{\mathsf{P}\boldsymbol{y}=\mathsf{S}\big(\mathsf{S}^{\intercal}\mathsf{S}\big)^{-1}\mathsf{S}^{\intercal}\boldsymbol{y}=\mathsf{S}\big(\mathsf{S}^{\intercal}\mathsf{S}\big)^{-1}\mathsf{S}^{\intercal}\mathsf{S}\boldsymbol{x}=\mathsf{S}\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{y}}.$$

Y como los vectores $\boldsymbol{z}$ de $\mathcal{S}^{\perp}$ verifican que $\mathsf{S}^{\intercal}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$, necesariamente:

$$\boxed{\mathsf{P}\boldsymbol{z}=\mathsf{S}\big(\mathsf{S}^{\intercal}\mathsf{S}\big)^{-1}\mathsf{S}^{\intercal}\boldsymbol{z}=\mathsf{S}\big(\mathsf{S}^{\intercal}\mathsf{S}\big)^{-1}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{z}}.$$

Resolución alternativa, si tomamos una matriz X cuyas columnas son una base ortonormal de $\mathcal{S}$ [como la del apartado a)]; entonces la matriz proyección es

$$\mathsf{P}=\mathsf{X}\mathsf{X}^{\intercal}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}.$$

Con esta matriz es inmediato comprobar que $\mathsf{P}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$, donde $\boldsymbol{w}\in\mathcal{S}^{\perp}$ [por ejemplo la solución especial encontrada en el apartado b)].

Y también que $\mathsf{P}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$, $\mathsf{P}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$; Así, si $\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}$ existen $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}$ y entonces $\mathsf{P}\boldsymbol{x}=\mathsf{P}\big(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}\big)=a\mathsf{P}\boldsymbol{u}+b\mathsf{P}\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}$.

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 1(d) Los vectores no nulos de $\mathcal{S}$ son el autoespacio correspondiente a $\lambda=1$ y los vectores no nulos $\mathcal{S}^{\perp}$ son el autoespacio correspondiente a $\lambda=0$. En el apartado (a) hayamos una base ortonormal de $\mathcal{S}$; y del apartado (b) sabemos que el vector $(1,-1,1)$ es una base de $\mathcal{S}^{\perp}$. Así pues

$$\boxed{\mathsf{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix};\qquad \mathsf{D}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}}.$$

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 2(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&-1&1&2&-b\\ 1&0&1&2&-0\\ a&1&1&2&-0\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]\\ (1)\mathbf{1}+\mathbf{2}\\ (-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}\\ (b)\mathbf{1}+\mathbf{5}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&b\\ a&1+a&1-a&0&ab\\ \hline 1&1&-1&0&b\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&-2&0\\ 0&0&0&1&0\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-b)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ a&1+a&1-a&0&-b\\ \hline 1&1&-1&0&0\\ 0&1&0&0&-b\\ 0&0&1&-2&0\\ 0&0&0&1&0\end{array}\right]$$

Discusión: $\boxed{\begin{cases} b=0 & \text{compatible indeterminado}\\ b\neq 0 & \begin{cases} a\neq 1 & \text{compatible indeterminado}\\ a=1 & \text{incompatible}\end{cases}\end{cases}}$

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 2(b) $\boxed{\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R} \right\}.}$

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 2(c) El conjunto $\{(-1,0,1,0),\ (0,0,-2,1)\}$ es una base del subespacio de soluciones puesto que: ambos vectores son independientes y ambos son soluciones al sistema (dos vectores independientes dentro de un espacio de dimensión 2)

Por otra parte

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1&0&-1\\ 0&0&-0\\ 1&-2&-1\\ 0&1&1\\ \hline 1&0&0\\ 0&1&0\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} -1&0&0\\ 0&0&0\\ 1&-2&-2\\ 0&1&1\\ \hline 1&0&-1\\ 0&1&0\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} -1&0&0\\ 0&0&0\\ 1&-2&0\\ 0&1&0\\ \hline 1&0&-1\\ 0&1&-1\end{array}\right]$$

Por lo que $\boxed{\text{las coordenadas son } (-1,-1)}$, es decir, $(-1)\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}.$

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 2(d) Puesto que este sistema de 4 incógnitas es compatible y su rango es 2:
$\boxed{\text{el número de variables exógenas (o libres) es 2}}$.

Si. Anulando las columnas primera y cuarta de la matriz de coeficientes llegamos a una nueva descripción del conjunto de soluciones:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1&-1&1&2\\ 1&0&1&2\\ 1&1&1&2\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]\\ \boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc} 0&-1&1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&1&0\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ -1&0&1&-2\\ 0&0&0&1\end{array}\right] \Rightarrow \left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R} \right\}$$

es decir, $\alpha = x_1$ y $\beta = x_4$ y por tanto $\begin{cases} x_2 & = 0\\ & x_3 = -x_1 - 2x_4\end{cases}.$

Una discusión un poco más larga. Nótese que si formamos una matriz cuyas columnas son los vectores de la base empleada para describir del conjunto de soluciones en el apartado (b), y la ampliamos con una solución particular, podemos expresar las soluciones en función de aquellas variables para las que (tras una serie de transformaciones elementales de las columnas) el correspondiente coeficiente alguna de las columnas es 1 y cero en el resto. Así, para comprobar que x_3 y x_4 pueden ser simultáneamente exógenas (algo que ya sabemos) realizamos la siguiente transformación:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

De donde se deduce (recordando que $b = 0$) que las soluciones se pueden expresar como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (\alpha = x_3,\ \beta = x_4) \begin{cases} x_1 & = -x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Es decir, hemos despejado x_1 y x_2 (variables endógenas) en función de x_3 y x_4 (variables exógenas).

Pero en el enunciado nos piden despejar x_2 y x_3 (variables endógenas) en función de x_1 y x_4 (variables exógenas). Esto será posible si mediante transformaciones elementales podemos convertir el coeficiente correspondiente a cada una de ellas en un 1 en alguna de las columnas y en cero en el resto,

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

De donde se deduce (recordando que $b = 0$) que las soluciones se pueden expresar como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (\alpha = x_1,\ \beta = x_4) \begin{cases} x_2 & = 0 \\ x_3 = -x_1 - 2x_4 \end{cases}$$

Es decir, hemos despejado x_2 y x_3 (variables endógenas) en función de x_1 y x_4 (variables exógenas).

$\boxed{\text{Por tanto la respuesta es que } x_1 \text{ y } x_4 \textbf{ si} \text{ pueden ser simultáneamente exógenas}}$.

Otra alternativa: El rango de $\mathbf{A}$ es dos, y también es dos el rango de la submatriz formada la segunda y tercera columnas de $\mathbf{A}$, luego para cualquier valor de las variables $x_!$ y x_4 se cumple que es

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 3(a) El conjunto de soluciones es un subespacio si el sistema es homogéneo. Como (S1) es equivalente a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dicho conjunto $\boxed{\text{es un subespacio si } \boldsymbol{b} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.}$

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 3(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{4}+\mathbf{3}] \\ (1)\mathbf{3}+\mathbf{2} \\ (-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}}}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \boxed{\operatorname{rg}(\mathbf{A}) = 3}.$

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 3(c) Es lo mismo que preguntar si son autovectores de $\mathbf{A}$. Veamos si lo son

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}; \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{w}.$$

Por tanto $\boxed{\boldsymbol{v} \text{ es solución cuando } \alpha = 2 \text{ y } \boldsymbol{w} \text{ es solución cuando } \alpha = 0}$.

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 3(d) Lo que nos piden es demostrar que $\mathbf{A}^3\boldsymbol{u}$ es un múltiplo de $\boldsymbol{v}$. Como $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son autovectores de $\mathbf{A}$ correspondientes a los autovalores 2 y 0 respectivamente, tenemos que

$$\boxed{\mathbf{A}^3\boldsymbol{u} = \mathbf{A}^3(p\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{w}) = p\mathbf{A}^3\boldsymbol{v} + q\mathbf{A}^3\boldsymbol{w} = p\Big(2^3 \cdot \boldsymbol{v}\Big) + q\Big(0^3 \cdot \boldsymbol{w}\Big) = (8p)\boldsymbol{v}}.$$

□

(Final Mayo 18/19) Ejercicio 3(e) $\begin{pmatrix}x & y & z & w\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x & y & z & w\end{pmatrix} = \boxed{y^2+z^2+2xz+2xw+2yw}$.

Diagonalizando por congruencia:

$$\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{4+1}]}}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{4+1}]}]{}\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{1}{2})\mathbf{2+1}]}\\(-\frac{1}{2})\mathbf{3+1}\\(-\frac{1}{2})\mathbf{4+1}}}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&1/2&-1/2&1/2\\1&-1/2&1/2&-1/2\\1&1/2&-1/2&-1/2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{1}{2})\mathbf{4+1}]}\\(-\frac{1}{2})\mathbf{3+1}\\(-\frac{1}{2})\mathbf{2+1}}]{}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1/2&-1/2&1/2\\0&-1/2&1/2&-1/2\\0&1/2&-1/2&-1/2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(+1)\mathbf{3+2}]}\\(-1)\mathbf{4+2}}}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1/2&0&0\\0&-1/2&0&0\\0&1/2&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{4+2}]}\\(+1)\mathbf{3+2}}}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1/2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

concluimos que es $\boxed{\text{Indefinida}}$

Alterntivamente: de la expresión polinómica se observa que si $y = z = 0$, la forma cuadrática se reduce a $q(x, 0, 0, w) = 2xw$, que evidentemente puede tomar valores tanto positivos como negativos.

□

(Final Mayo 18/19) Conjunto de preguntas 1(a)

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\1&1&-1&1\\-1&-1&1&-1\\1&1&-1&1\end{bmatrix}.$$

□

(Final Mayo 18/19) Conjunto de preguntas 1(b) $\begin{pmatrix}x, & y, & x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 0, & 1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1, & 2, & 4\end{pmatrix}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

□

(Final Mayo 18/19) Conjunto de preguntas 1(c) La operación mediante productos de matrices es $\mathsf{E}_1\mathsf{A}\mathsf{E}_2 = \begin{bmatrix}1&&\\-1&1&\\&&1\end{bmatrix}\mathsf{A}\begin{bmatrix}1&&\\&4&\\&&1\end{bmatrix}$. Como el *producto matricial es **asociativo***, da lo mismo multiplicar antes las dos primera matrices, o las dos últimas: $\Big(\mathsf{E}_1\mathsf{A}\Big)\mathsf{E}_2 = \mathsf{E}_1\Big(\mathsf{A}\mathsf{E}_2\Big)$ (es decir resultado final es idéntico en ambos casos).

(Mostrar un ejemplo no es suficiente, es necesario aludir a la propiedad asociativa del producto)

□

(Final Mayo 18/19) Conjunto de preguntas 1(d) EvidentementeSince $\Big(\mathsf{A}-2\mathsf{I}\Big) = \begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\\2&0&2&-2\end{bmatrix}$ es singular, por tanto $\lambda = 2$ es un autovalor de A.

$$\left[\begin{array}{cccc}1&0&1&-1\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\\2&0&2&-2\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{1+3}]}\\(1)\mathbf{1+4}}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\\\hline 1&0&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{2+3}]}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\\\hline 1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\implies \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)-\mathbf{0}$$

Es decir, el autoespacio correspondiente al autovalor 2, es el espacio generado por los vectores $(-1, 1, 1, 0)$ y $(1, 0, 0, 1)$ excepto el vector nulo.

$\square$

(Final Mayo 18/19) Conjunto de preguntas 2(a) **Falso.** Aunque es cierto que si $\mathbf{B}$ es simétrica e invertible, entonces su inversa también es simétrica, pues $\left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\intercal} = \left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)^{-1} = \left(\mathbf{B}\right)^{-1}$; en general el producto de matrices simétricas no es simétrico. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}.$$

$\square$

(Final Mayo 18/19) Conjunto de preguntas 2(b) **Verdadero.** Una matriz ortogonal es cuadrada y con columnas perpendiculares entre si y de norma uno. Y si las columnas son perpendiculares, entonces *son linealmente independientes*. Pero $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones, por tanto las columnas de $\mathbf{A}$ *son dependientes* (no pueden ser perpendiculares).

$\square$

(Final Mayo 18/19) Conjunto de preguntas 2(c) **Verdadero.**

- $\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)^{\intercal} = \left(\mathbf{I}^{\intercal}-\mathbf{P}^{\intercal}\right) = \left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)$.
- $\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)^{2} = \left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right) = \mathbf{I}-2\mathbf{P}+\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}-2\mathbf{P}+\mathbf{P} = \left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)$.

Si $\mathbf{P}$ es la matriz proyección sobre un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^n$, entonces $\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)$ es la matriz proyección sobre el complemento ortogonal $\mathcal{S}^{\perp}$.

$\square$

(Final Mayo 18/19) Conjunto de preguntas 2(d) **Falso.** Puesto que $[\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{u}]\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} = [2\boldsymbol{v},\ (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}),\ (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u})]$ y la matriz numérica es de rango 2, los vectores son dependientes y no son una base. Lo podemos ver por eliminación gaussiana:

$$[2\boldsymbol{v},\ (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}),\ (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u})] \xrightarrow{\underset{[(1/2)\mathbf{1}]}{\tau}} [\boldsymbol{v},\ (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}),\ (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u})] \xrightarrow[\underset{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}]{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}} [\boldsymbol{v},\ (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}),\ \mathbf{0}]$$

$\square$

(Final Mayo 18/19) Conjunto de preguntas 2(e) **Verdadero.** $\mathbf{A}$ es simétrica se puede diagonalizar ortogonalmente ($\mathbf{A}=\mathbf{QDQ}^{\intercal}$). Como $\mathbf{D}$ es diagonal con todos los elementos de la diagonal positivos (ninguno es cero), es invertible, así que $\mathbf{A}$ es producto de matrices invertible, y por tanto es invertible. De hecho:

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{QDQ}^{\intercal}\right)^{-1} = \left(\mathbf{Q}^{\intercal}\right)^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{QD}^{-1}\mathbf{Q}^{\intercal} \qquad (\text{ya que } \mathbf{Q}^{\intercal}=\mathbf{Q}^{-1})$$

donde $\mathbf{D}^{-1}$ es diagonal y los elementos en su diagonal son los inversos de los elementos de la diagonal de $\mathbf{D}$, por tanto también son todos positivos. Así pues, $\mathbf{A}^{-1}$ es simétrica (pues es diagonalizable ortogonalmente) y definida positiva.

$\square$

(Final Mayo 18/19) Conjunto de preguntas 2(f) **Falso.** Al realizar operaciones elementales con las filas, las filas de las nuevas matrices son combinación lineal de las filas de la matriz original. Como al multiplicar una matriz por otra de rango completo, su rango no cambia, las filas de las sucesivas matrices son un sistema generador del espacio fila de la matriz original. Sin embargo, el espacio generado por las nuevas columnas es distinto en general. Por ejemplo

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{restando la primera fila de la segunda}} \begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

El espacio generado por las columnas de la primera matriz son los múltiplos del vector $(1,1)$, sin embargo el espacio generado por las columnas de la segunda matriz son los múltiplos de $(1,0)$, que es una recta diferente.

$\square$

(Final Junio 17/18) Ejercicio 1(a) Sabemos que el rango de una matriz no cambia al realizar transformaciones elementales, y puesto que mediante transformaciones elementales comprobamos que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1, & \boldsymbol{v}_2, & \boldsymbol{v}_3, & (\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_4) \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ (-2)\mathbf{2}+\mathbf{4}}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1, & \boldsymbol{v}_2, & \boldsymbol{v}_3, & \boldsymbol{v}_4 \end{bmatrix},$$

sabemos que $\mathbf{A}$ es de rango 4 por ser $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ un conjunto linealmente independiente.

Así pues, como $(\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_4)$ también pertenece a $\mathbb{R}^4$ por ser combinación lineal de vectores de $\mathbb{R}^4$, tenemos que el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ (\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_4)\}$ es linealmente independiente y formado por 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ (que es un subespacio de dimension 4).

Por tanto, $\boxed{\text{el conjunto del enunciado es una base de } \mathbb{R}^4}$.

$\square$

(Final Junio 17/18) Ejercicio 1(b) Puesto que, por el apartado anterior, sabemos que ambos vectores son linealmente independientes, $\boxed{\text{el espacio generado por ambos es de dimensión 2}}$.

$\square$

(Final Junio 17/18) Ejercicio 1(c) Podemos contestar usando determinantes: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ $-1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(1) = -1 \neq 0$. Así, tenemos 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independietes, puesto que a dimensión de $\mathbb{R}^4$ es 4, dicho conjunto es una base de $\mathbb{R}^4$. Por otra parte, aplicando la Regla de Cramer tenemos: $x_3 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} = -1.$

$\square$

(Final Junio 17/18) Ejercicio 1(d) El espacio generado es el conjunto $\left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \forall a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Puesto que este es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2, basta con multiplicar $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ por dos vectores de $\mathbb{R}^4$ ortogonales a $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$. Ya sabemos que si aplicamos la eliminación gaussiana por columnas y obtenemos columnas de ceros, es porque hemos multiplicado las filas por vectores ortogonales a las mismas. Así pues, escribiendo $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ como filas y aplicando la eliminación tenemos:

$$\left[\begin{array}{cccc} x & y & z & w \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc} x & y & (z+x) & w \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{rrr} & y & = 0 \\ x & + z & = 0 \end{array} \right.}.$$

$\square$

(Final Junio 17/18) Ejercicio 1(e) Ahora necesitamos encontrar tres vectores de $\mathbb{R}^4$ que sean independientes y perpendiculares al vector $(1, 1, 0, 0)$. Nuevamente el método de eliminación gaussiana por columnas nos da una respuesta:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, una ecuaciones paramétricas de dicho hiperplano son

$$\left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \forall a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Observación adicional: Nótese que $(1,-1,0,1)$ es perpendicular a $(1,1,0,0)$ y que por tanto el punto $(1,-1,0,1)$ es combinación lineal de los tres vectores perpendiculares a $(1,1,0,0)$. En particular, si tomamos $a=b=c=-1$ comprobamos que $\mathbf{0}$ pertenece a dicho hiperplano. Esto quiere decir que el conjunto es un *subespacio* de $\mathbb{R}^4$, y en consecuencia podemos escribir unas ecuaciones paramétricas más sencillas:

$$\left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} ;\forall a,b,c\in\mathbb{R} \right\}.$$

□

(Final Junio 17/18) Ejercicio 2(a) **Operando por filas:** si efectuamos operaciones elementales sobre las filas tenemos que multiplicar por matrices elementales por la izquierda

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[{\underset{[1\rightleftharpoons 2]}{\tau}}]{} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[{\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}}]{} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

luego $\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}\mathbf{I}\;\underset{[1\rightleftharpoons 2]}{\tau}\mathbf{I}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, donde $\underset{[1\rightleftharpoons 2]}{\tau}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Operando por columnas: si efectuamos operaciones elementales sobre las columnas tenemos que multiplicar por matrices elementales por la derecha

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[1\rightleftharpoons 2]}{\tau}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

luego $\mathbf{A}\mathbf{I}_{\underset{[1\rightleftharpoons 2]}{\tau}}\mathbf{I}_{\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, donde $\mathbf{I}_{\underset{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\tau}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

□

(Final Junio 17/18) Ejercicio 2(b) La matriz es invertible si $|\mathbf{A}| = 6a-a-2 = 5a-2 \neq 0$, y para que se cumpla la condición pedida además debe satisfacerse $\mathbf{A}\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}$; luego $\boxed{a=0}$.

□

(Final Junio 17/18) Ejercicio 2(c) Debe cumplirse $|\mathbf{A}-3\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a-3 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(a-4) = 0$, luego $\boxed{a=4}$.

□

(Final Junio 17/18) Ejercicio 2(d) La suma de los autovalores es la traza de la matriz luego $7 = 3+\lambda_3$, es decir, $\boxed{\lambda_3 = 4}$, y $\mathbf{A}-4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Operando por filas: Para resolver el sistema homogéneo asociado podemos quedarnos con las dos últimas ecuaciones y obtenemos $x_2 = 2x_3$ y $x_1 = -x_2 + x_3 = -x_3$ y el autoespacio asociado al tercer autovalor es la recta que pasa por el origen y con vector director $(-1,2,1)$.

Operando por columnas:
$$\left[\begin{array}{ccc} -2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ \hline 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ \hline 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

por lo que $\boxed{\text{el autoespacio asociado al autovalor } \lambda = 4 \text{ es la recta generada por } (-1,2,1)}$.

□

(Final Junio 17/18) Ejercicio 2(e) La matriz $\mathbf{A}$ es definida positiva si y solo si todos sus menores principales $D_1 = a$, $D_2 = 3a-1$, $D_3 = 5a-2$ son positivos, luego $\boxed{a > \frac{2}{5}}$.

Otra forma de verlo es la siguiente, para que sea definida positiva los tres pivotes obtenidos (si no multiplicamos ninguna columna por un número negativo) deben ser positivos; así

$$\begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{con } a>0]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(a)\mathbf{2}] \\ \boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & (3a-1) & 1 \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{con } 3a-1>0]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3a-1)\mathbf{3}] \\ \boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & (3a-1) & 0 \\ 0 & a & (5a-2) \end{bmatrix};$$

es decir, $\quad a>0,\ (3a-1)>0,\ (5a-2)>0 \quad\Rightarrow\quad a>0,\ a>\frac{1}{3},\ a>\frac{2}{5} \quad\Rightarrow\quad \boxed{a>\frac{2}{5}}$.

□

(Final Junio 17/18) Ejercicio 3(a)
El número de filas m es tres. Puesto que el primer sistema no tiene solución, el rango es menor que tres, y puesto que el segundo tiene sólo una solución, no hay columnas libres (todas son pivote). Por tanto el número de columnas n es uno o dos; y el rango también.

□

(Final Junio 17/18) Ejercicio 3(b)
Puesto que la matriz es de rango completo por columnas, el único vector en el espacio nulo es el cero $\mathbf{0}$. Así pues, necesariamente ese vector es el vector nulo: $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

□

(Final Junio 17/18) Ejercicio 3(c) Dos ejemplos son $\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$, y $\begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$; donde $a, c \neq 0$; pero también cualquier matriz que se pueda obtener mediante transformaciones elementales por columnas de ambos ejemplos.

□

(Final Junio 17/18) Ejercicio 3(d)
El rango es el máximo número de vectores columna de la matriz que podemos tomar manteniendo un conjunto linealmente independiente. Es decir, tal que la única combinación de dichos vectores

$$a_1 \cdot \boldsymbol{columna}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{columna}_2 + \cdots + a_p \cdot \boldsymbol{columna}_p$$

que es un vector de ceros es aquella para la que todos los coeficientes son nulos. Pero en esta definición el orden en que sumemos los vectores columna es irrelevante, por lo que el rango no depende del orden en que aparecen las columnas de la matriz..

□

(Final Junio 17/18) Conjunto de preguntas 1(a)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & -b_1 \\ -1 & 1 & -b_2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-a)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -b_1 \\ -1 & 1+a & -b_2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Si } a\neq -1]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\frac{1}{1+a})\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1+a & -b_2 \end{array}\right]$$

El sistema será compatible en dos casos: $\boxed{\begin{cases} \text{Si} \quad a\neq -1 \\ \text{Si} \quad a=-1 \quad \text{y} \quad b_2=-b_1 \end{cases}}$.

□

(Final Junio 17/18) Conjunto de preguntas 1(b) Si $\boxed{b_1=b_2=0}$ (sistema es homogeneo con dos incógnitas) y simultáneamente $\boxed{a=-1}$ (y de rango menor a 2).

□

(Final Junio 17/18) Conjunto de preguntas 1(c) Necesariamente para aquel valor que hace los vectores perpendiculares, es decir: $\boxed{a=1}$.

□

(Final Junio 17/18) Conjunto de preguntas 1(d) Usando la traza y el determinante; y que *los dos autovalores deben ser el mismo valor*: $\begin{cases} 2\lambda = 2 \\ \lambda^2 = 1+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ 1 = 1+a \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=0}$.

$\boxed{\text{En este caso la matriz no es diagonalizable}}$, pues el rango de A es uno.

□

(Final Junio 17/18) Conjunto de preguntas 2(a) Verdadero. Si su rango es distinto de cero, es no singular, y por tanto tiene tantos pivotes como filas y columnas (por ser cuadrada); en este caso 4.

□

(Final Junio 17/18) Conjunto de preguntas 2(b) Verdadero. Puesto que hay una base de autovectores para $\mathbb{R}^n$, la matriz es diagonalizable, y por lo tanto

$$\mathbf{A} = \mathbf{SDS^{-1}} = \mathbf{IDI} = \mathbf{D},$$

donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con los autovalores de $\mathbf{A}$ en la diagonal principal.

□

(Final Junio 17/18) Conjunto de preguntas 2(c) Falso. Si $\boldsymbol{v}$ es un autovector, entonces $a\boldsymbol{v}$ es otro. Si $a \neq 1$ ambos autovectores son distintos, pero dependientes.

□

(Final Junio 17/18) Conjunto de preguntas 2(d) Falso. La matriz identidad de orden mayor que 1 es un contraejemplo: es diagonalizable pero su único autovalor es el 1.

□

(Final Junio 17/18) Conjunto de preguntas 2(e) Verdadero. Que -3 sea un autovalor significa que el espacio nulo de $(\mathbf{A}+3\mathbf{I})$ tiene dimensión mayor que cero, así que, como $\dim(\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)) + \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = n$, se debe tener que $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) < n$: por tanto, existen vectores $\boldsymbol{v}$ que no están en el espacio columna de la matriz.

□

(Final Junio 17/18) Conjunto de preguntas 2(f) Verdadero: Una base ortonormal de $\mathcal{V}$ la forman las dos primeras columnas de la matriz identidad. Si tomamos la matriz $\underset{4\times 2}{\mathbf{Q}}$ cuyas columnas son dicha base ortonormal, tenemos que**True:** The two first columns of $\mathbf{I}_4$ form an orthogonal basis for $\mathcal{V}$. If we consider $\underset{4\times 2}{\mathbf{Q}} = [\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]$, we get

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^\intercal = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\intercal = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 1(a)
$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = c_1\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 + c_2\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2 = 2c_1\cdot\boldsymbol{v}_1 + 5c_2\cdot\boldsymbol{v}_2.$

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 1(b) Puesto que en el caso de una matriz simétrica, los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales, tenemos que $\left[\boldsymbol{v}_1\right]^\intercal\left[\boldsymbol{v}_2\right] = 0$ y entonces

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} =&(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2)\cdot(2c_1\boldsymbol{v}_1 + 5c_2\boldsymbol{v}_2)\\ =&2c_1^2\cdot\left[\boldsymbol{v}_1\right]^\intercal\left[\boldsymbol{v}_1\right] + 5c_2\cdot\left[\boldsymbol{v}_2\right]^\intercal\left[\boldsymbol{v}_2\right]\\ =&2c_1^2\cdot\|\boldsymbol{v}_1\|^2 + 5c_2^2\cdot\|\boldsymbol{v}_2\|^2\end{aligned}$$

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 1(c) Puesto que $\left[\boldsymbol{v}_i\right]^\intercal\left[\boldsymbol{v}_i\right] = \|\boldsymbol{v}_i\|^2 > 0$ y $c_i^2 > 0$ salvo cuando $c_i = 0$, concluimos que

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \ = \ 2c_1^2\cdot\|\boldsymbol{v}_1\|^2 + 5c_2^2\cdot\|\boldsymbol{v}_2\|^2 \ > 0$$

excepto cuando $c_1 = c_2 = 0$, i.e., $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 1(d) Tenemos

$$\mathbf{B}\boldsymbol{v}_1 = \Big(2\cdot\left[\boldsymbol{v}_1\right]\left[\boldsymbol{v}_1\right]^\intercal + 5\cdot\left[\boldsymbol{v}_2\right]\left[\boldsymbol{v}_2\right]^\intercal\Big)\boldsymbol{v}_1 = 2\left[\boldsymbol{v}_1\right]\left[\boldsymbol{v}_1\right]^\intercal\boldsymbol{v}_1 + 5\left[\boldsymbol{v}_2\right]\left[\boldsymbol{v}_2\right]^\intercal\boldsymbol{v}_1 = 2\left[\boldsymbol{v}_1\right](1) + 5\left[\boldsymbol{v}_2\right](0) = 2\boldsymbol{v}_1.$$

puesto que $\left[\boldsymbol{v}_1\right]^\intercal\left[\boldsymbol{v}_1\right] = \|\boldsymbol{v}_1\|^2 = 1$, y $\left[\boldsymbol{v}_i\right]^\intercal\left[\boldsymbol{v}_j\right] = 0$ para $i \neq j$. Así $\boldsymbol{v}_1$ es un autovector de $\mathbf{B}$ con autovalor $\lambda_1 = 2$. De manera similar se demuestra que $\mathbf{B}\boldsymbol{v}_2 = 5\boldsymbol{v}_2$:

$$\mathbf{B}\boldsymbol{v}_2 = \Big(2\cdot\left[\boldsymbol{v}_1\right]\left[\boldsymbol{v}_1\right]^\intercal + 5\cdot\left[\boldsymbol{v}_2\right]\left[\boldsymbol{v}_2\right]^\intercal\Big)\boldsymbol{v}_2 = 2\left[\boldsymbol{v}_1\right]\left[\boldsymbol{v}_1\right]^\intercal\boldsymbol{v}_2 + 5\left[\boldsymbol{v}_2\right]\left[\boldsymbol{v}_2\right]^\intercal\boldsymbol{v}_2 = 2\left[\boldsymbol{v}_1\right](0) + 5\left[\boldsymbol{v}_2\right](1) = 5\boldsymbol{v}_2.$$

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 1(e) Puesto que ambas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen la misma diagonalización Since both $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ have diagonalization

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & \\ & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix}^{-1},$$

son la misma matriz.

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 2(a)

Puesto que $\mathbf{A}$ es de orden 3 por 3 y sus tres autovalores son distintos de cero, $\mathbf{A}$ es una matriz de rango completo. Por tanto la única solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es el vector $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 2(b)

El autoespacio correspondiente a $\lambda = 1$ es el conjunto de combinaciones lineales de $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$:

$$\mathcal{E}_{\lambda=1} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tales que} \quad \boldsymbol{x} = a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Así, aplicando la eliminación gaussiana para multiplicar por el vector perppendicular a $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$, encontramos un sistema de ecuaciones como el pedido:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix} x & \color{red}{y-2x} & z \\ \hline 0 & \color{red}{0} & 0 \\ \hline 1 & \color{blue}{0} & 0 \\ 0 & \color{blue}{0} & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathcal{E}_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{tales que} \quad \left\{-2x + y = 0\right. \right\}.$$

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 2(c)

$\mathbf{A}$ es simétrica si, y sólo si, los autoespacios son ortogonales, pero

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Como $\mathcal{E}_{\lambda=1}$ no es perpendicular a $\mathcal{E}_{\lambda=2}$, $\boxed{\mathbf{A} \text{ no es simétrica}}$.

No obstante, puesto que los tres autovectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ son linealmente independientes (pues la matriz $\mathbf{S} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{bmatrix}$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}; \qquad \text{es de rango completo);}$$

la matriz $\boxed{\mathbf{A} \text{ es diagonalizable}}$.

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 2(d)

Puesto que $\mathbb{R}^3$ es de dimensión 3, y $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes (véase el apartado anterior), B es una base de $\mathbb{R}^3$.

Por otra parte

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0 & -0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ \boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ \hline 2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ \boldsymbol{\tau}\\ [(1/2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ \hline 2 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

Así pues, las coordenadas de $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ respecto de la base B son $x = 2$, $y = -1$ y $z = 1/2$; es decir

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_3.$$

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 2(e)

$$\mathbf{A}^3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\mathbf{A}^3(2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_3)=2\cdot\mathbf{A}^3\boldsymbol{v}_1-\mathbf{A}^3\boldsymbol{v}_2+\frac{1}{2}\cdot\mathbf{A}^3\boldsymbol{v}_3=2\cdot 2^3\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_3;$$

es decir

$$\mathbf{A}^3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=16\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\14\\1\end{pmatrix}.$$

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 3(a)

Puesto que

$$\mathbf{H}^{\intercal}\mathbf{H}=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&9\end{bmatrix}$$

las columnas de $\mathbf{H}$ son perpendiculares entre si y por tanto **son un base ortogonal** de $\mathbb{R}^4$; pero **NO son una base ortonormal** de $\mathbb{R}^4$, pues no son vectores unitarios (las dos primeras columnas de $\mathbf{H}$ tienen norma $\sqrt{2}$ y la última tiene norma 3).

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 3(b)

En el primer apartado hemos visto que las dos primeras columnas de $\mathbf{H}$ tienen norma $\sqrt{2}$ y la última tiene norma 3; así

$$\mathbf{Q}=\mathbf{HD}=\begin{bmatrix}1&1&\\-1&1&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&&\\&\frac{1}{\sqrt{2}}&\\&&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&\\&&1\end{bmatrix}.$$

Ahora, $\mathbf{Q}^{-1}=(\mathbf{HD})^{-1}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}^{-1}$, y por tanto, multiplicando por $\mathbf{D}$ tenemos: $\mathbf{DQ}^{-1}=\mathbf{H}^{-1}$. Y como $\mathbf{Q}$ es ortogonal, $\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^{\intercal}$, finalmente tenemos que $\mathbf{H}^{-1}=\mathbf{DQ}^{\intercal}$:

$$\mathbf{H}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&&\\&\frac{1}{\sqrt{2}}&\\&&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}&\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2&-1/2&\\1/2&1/2&\\&&1/3\end{bmatrix}.$$

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 3(c)

$$\left[\begin{array}{ccc}x&y&z\\\hline 0&0&0\\\hline 1&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}x&(y+x)&z\\\hline 0&0&0\\\hline 1&0&0\end{array}\right]\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x+y&=0\\ \quad\quad z&=0\end{cases}.$$

□

(Final Mayo 17/18) Ejercicio 3(d)

La matriz proyección $\mathbf{P}$ es $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}$, donde $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}_{|1}&\mathbf{H}_{|3}\end{bmatrix}$; por tanto

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\\&\frac{1}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2&0\\-1/2&0\\0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2&-1/2&0\\-1/2&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

□

(Final Mayo 17/18) Conjunto de preguntas 1(a)

Ya que nos dan a elegir, escojamos un cofactor fácil de ver y calcular:

$$C_{22}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&3\\0&0&2\end{vmatrix}=4.$$

$\square$

(Final Mayo 17/18) Conjunto de preguntas 1(b)

Por ejemplo, si se escalona por filas: se resta el doble de la segunda fila a la tercera. Y luego el doble de la tercera a la cuarta; por tanto ${}_{\underset{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{I}\;{}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{I}\mathsf{A} = \mathsf{U}$:

$$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&-2&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

O si se escalona por columnas: se puede restar el doble de la primera columna a la segunda y restar la primera columna a la última. Y luego la tercera a la cuarta; por tanto

$\mathsf{A}\mathsf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathsf{I}_{\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \mathsf{L}$:

$$\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&-1\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&-1\\&&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}.$$

$\square$

(Final Mayo 17/18) Conjunto de preguntas 1(c)

$$\left[\begin{array}{cccc}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\\hline 1&-2&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\\hline 1&-2&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

Por tanto, la dimensión del espacio de soluciones del sistema $\mathsf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ es uno, y una base de dicho espacio es el conjunto

$$\text{Base de } \mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right)=\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

$\square$

(Final Mayo 17/18) Conjunto de preguntas 1(d)

Es diagonalizable si la dimensión del autoespacio del autovalor $\lambda=2$ (con multiplicidad 2) es también 2; es decir, si $\dim(\mathcal{E}_{\lambda=2})=\dim(\mathcal{N}\left(\mathsf{A}-2\mathsf{I}\right)=2$.

$$\left[\mathsf{A}-2\mathsf{I}\right]=\begin{bmatrix}-1&2&0&1\\0&-2&1&1\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]{\underset{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]{\underset{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}{\boldsymbol{\tau}}}\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Puesto que $(\mathsf{A}-2\mathsf{I})$ es de rango 3, resulta que $\dim(\mathcal{E}_{\lambda=2})=\dim(\mathcal{N}\left(\mathsf{A}-2\mathsf{I}\right)=1$ y por tanto la matriz $\boxed{\mathsf{A}\text{ NO es diagonalizable}}$.

$\square$

(Final Mayo 17/18) Conjunto de preguntas 1(e)

$$\det\left(\mathsf{A}-\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\right)=\begin{vmatrix}0&2&0&1\\-2&0&1&1\\0&-1&0&3\\-1&-1&-3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\-2&-2&1&1\\0&-7&0&3\\-1&-1&-3&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2&-2&1\\0&-7&0\\-1&-1&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&0&1\\0&-7&0\\-7&-7&-3\end{vmatrix}=49.$$

$\square$

(Final Mayo 17/18) Conjunto de preguntas 1(f)

Como las filas (0 0 1 1) y (0 0 2 3) son linealmente independientes, el espacio que generan está compuesto por todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas dos primeras componentes son cero; es decir, los vectores de la forma: (0 0 a b).

Así que primero buscamos un vector de la forma (0 0 a b) que sea perpendicular a (0 0 1 1). Por ejemplo (0 0 1 -1).

Solo queda normalizarlos, como ambos tienen longitud $\sqrt{2}$, una base puede ser

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

(Final Mayo 17/18) Conjunto de preguntas 2(a)

$$|\mathbf{B}| = \det\left[(2\mathbf{A}_{|1}),\, (\mathbf{A}_{|2} + 7\mathbf{A}_{|1}),\, (-\mathbf{A}_{|3})\right] = 2\det\left[\mathbf{A}_{|1},\, (\mathbf{A}_{|2} + 7\mathbf{A}_{|1}),\, (-\mathbf{A}_{|3})\right]$$

$$= 2\det\left[\mathbf{A}_{|1},\, \mathbf{A}_{|2},\, (-\mathbf{A}_{|3})\right] = -2\det\left[\mathbf{A}_{|1},\, \mathbf{A}_{|2},\, \mathbf{A}_{|3}\right] = -2|\mathbf{A}| = -20.$$

□

(Final Mayo 17/18) Conjunto de preguntas 2(b)

$$\det\left[(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{\intercal})^{-1}\right] = \det\left[\left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)^{-1}\mathbf{A}\right] = \det\left[\mathbf{B}^{-1}\right] \cdot \det\left[\mathbf{A}\right] = \frac{(10)}{(-20)} = \frac{-1}{2}.$$

□

(Final Mayo 17/18) Conjunto de preguntas 3(a)

Sea la matriz $\mathbf{A}$ tal que $f(x, y) = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$, aplicando gauss (si $a \neq 0$) tenemos que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 3 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 3 & a - \frac{9}{a} \end{bmatrix}; \qquad (\text{si } a \neq 0)$$

Por una parte, si $a = 0$ la traza de $\mathbf{A}$ es cero pero el determinante es distinto de cero, en cuyo caso un autovalor es positivo y el otro negativo. Además, si a es mayor que cero, almenos un autovalor es positivo y si a es menor que cero, almenos un autovalor es negativo.

Por otra parte, el segundo autovalor es cero si $a - \frac{9}{a} = 0$, es decir cuando $a^2 - 9 = 0$, es decir, cuando $a = \pm 3$

Resumiendo:

$$\begin{cases} a < -3 & \text{definida negativa} \\ a = -3 & \textit{semi}\text{definida negativa} \\ a \in (-3,\ 3) & \text{ni positiva, ni negativa} \\ a = 3 & \textit{semi}\text{definida positiva} \\ a > 3 & \text{definida positiva} \end{cases}$$

□

(Final Mayo 17/18) Conjunto de preguntas 3(b)

Nos piden que el conjunto de soluciones sea el conjunto de puntos que satisface la ecuación $x = y$. Pero esto requiere que $\mathbf{A}$ sea singular, y del apartado anterior sabemos que $\mathbf{A}$ es singular cuando $a = 3$ y cuando $a = -3$, sólo nos falta deducir cuál de los dos casos es el pedido en el enunciado.

El conjunto de vectores que satisfacen $x = y$, es decir, el conjunto de vectores que forma la diagonal del primer y tercer cuadrates son los múltiplos de $(1,\ 1)$. Por tanto nos piden que digamos en qué $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

Así que evidentemente $\boxed{a \text{ tiene que ser } -3}$, de manera que la matriz sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$.

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 1(a)

Puesto que los vectores del conjunto de soluciones pertenecen a $\mathbb{R}^4$, la matriz tiene 4 columnas. Puesto que la dimensión del espacio de soluciones es uno, tan solo una de las columnas de $\mathbf{A}$ no tiene pivote. Por tanto el rango de la matriz es tres; y por ser la matriz de rango completo por filas, $\mathbf{A}$ sólo tiene tres filas: $\underset{3\times 4}{\mathbf{A}}$.

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 1(b)

Para obtener una matriz $\mathbf{A}$ basta encontrar tres vectores de $\mathbb{R}^4$ ortogonales al espacio de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (serán sus tres filas):

$$\left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & -3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ (-3)\mathbf{1}+\mathbf{3} \\ (1)\mathbf{1}+\mathbf{4}}} \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Así, la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ cumple con las condiciones; pero cualquier tranformación de $\mathbf{A}$ mediante tranformaciones elementales de sus filas es una nueva matriz $\mathbf{B}$ que cumple las condiciones; $(\mathbf{B} = \mathbf{E}\mathbf{A}$, donde $\mathbf{E}$ es una matriz invertible, ya que si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{E}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{0})$.

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 1(c)

El sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ siempre tiene solución para cualquier $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ ya que la matriz es de rango completo por filas (el espacio columna de $\mathbf{A}$ es todo $\mathbb{R}^3$).

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 1(d)

Para cualquier sistema homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, los vectores solución $\boldsymbol{x}$ son perpendiculares a los vectores fila de $\mathbf{A}$. Así que cualquier vector solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, es decir, cualquier múltiplo de $\begin{pmatrix} -1, & 2, & -3, & 1 \end{pmatrix}$ distinto de $\mathbf{0}$, no pertenece al conjunto de combinaciones de las filas de $\mathbf{A}$ (no pertenece al espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$).

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 2(a)

Como más abajo se pide resolver un sistema particular, comenzaremos trabajando con la matriz ampliada $\left[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 \,|\, -\boldsymbol{b}\right] \equiv \left[\mathbf{B} \,|\, -\boldsymbol{b}\right]$, donde $\boldsymbol{b}$ es el vector del lado derecho del sistema propuesto en el apartado b) y $\mathbf{B}$ la matriz de coeficientes de dicho sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ \boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}] \\ (-1)\mathbf{2} \\ (-1/2)\mathbf{3} \\ (-1/7)\mathbf{4}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -0 & -0 & 0 \\ -0 & -1 & -0 & -0 & 0 \\ -0 & -0 & -1/2 & 1/7 & 0 \\ -0 & -0 & -0 & -1/7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ \boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{4}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/14 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & -2/7 & -1/7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{5}] \\ \boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{5}] \\ \boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -2 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3/14 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & -2/7 & -1/7 & -1/7 \end{array}\right]$$

puesto que las cuatro columnas de la matriz de $\mathbf{B}$ tienen pivote, los cuatro vectores son linealmente independientes. Como los cuatro pertenecen a $\mathbb{R}^4$ y el espacio $\mathbb{R}^4$ es de dimensión 4, el conjunto B es necesariamente una base de $\mathbb{R}^4$.

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 2(b)

De la solución obtenida con el método de eliminación gaussiana expuesto en el primer apartado, se deduce que las coordenadas son $x = -3$, $y = -2$, $z = \frac{1}{7}$, $w = \frac{-1}{7}$; es decir,

$$-3\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \frac{1}{7}\boldsymbol{u}_1 - \frac{1}{7}\boldsymbol{u}_1$$

lo que se puede verificar fácilmente:

$$-3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\4\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 2(c)

De la segunda parte del enunciado inicial de este problema se desprende que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

Puesto que $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{B}$ son de rango completo, necesariamente $\mathbf{A}$ es de rango completo. Puesto que la tercera columna de $\mathbf{AB}$ es dos veces la tercera columna de la identidad y la cuarta columna de $\mathbf{AB}$ es la cuarta columna de $\mathbf{I}$ multiplicada por -1, se deduce que $\mathbf{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_3 & -\boldsymbol{u}_4\end{bmatrix} = \mathbf{I}$. Por tanto

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_3 & -\boldsymbol{u}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&1&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&-1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}.$$

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 2(d)

Por una parte

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1\mathbf{A}\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1\Big(\mathbf{A}\boldsymbol{u}_1\Big) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = -1 < 0$$

y por otra

$$f(\boldsymbol{u}_4) = \boldsymbol{u}_4\mathbf{A}\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{u}_4\Big(\mathbf{A}\boldsymbol{u}_4\Big) = \begin{pmatrix}0 & 0 & -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = 3 > 0$$

Así pues, esta forma cuadrática no es ni definida positiva ni definida negativa, pues puede tomar tanto valores positivos como negativos.

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 3(a)

Al calcular el producto $\mathbf{B}\boldsymbol{v}$ obtenemos $4\boldsymbol{v}$. Por otra parte, $\mathbf{B}$ es de rango 1 y su traza es 4, así que sus autovalores son 4 and 0 (con multiplicidad algebráica 3).

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 3(b)

$$\Big(\mathbf{B} + b\mathbf{I}\Big)\boldsymbol{x} = \mathbf{B}\boldsymbol{x} + b\mathbf{I}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x} = (\lambda + b)\boldsymbol{x},$$

por tanto, $\mathbf{A}$ tiene los mismos autovectores y sus autovalores son b, b, b y $4 + b$.

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 3(c)

Los autovalores de $\mathbf{A}$ son 2, 2, 2, y $2 + 4 = 6$, por tanto el determinante es $2 * 2 * 2 * 6 = 48$.

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 3(d)
Solo puede ser definida positiva si $b > 0$.

□

(Final Julio 16/17) Ejercicio 3(e)
Puesto que $\mathbf{B}^2 = 4\mathbf{B}$ y $\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{B}+\mathbf{I})(\mathbf{I}+c\mathbf{B}) = \mathbf{B}+4c\mathbf{B}+\mathbf{I}+c\mathbf{B} = \mathbf{I}+(1+5c)\mathbf{B}$ así que $(\mathbf{I}+c\mathbf{B})$ es la inversa de $\mathbf{A}$ cuando $(1+5c) = 0$. Por tanto $c = -1/5$.

□

(Final Julio 16/17) Conjunto de preguntas 1(a)

Falso: $\begin{bmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}.$ Por tanto las coordenadas son el vector $(1,-1,0)$.

□

(Final Julio 16/17) Conjunto de preguntas 1(b)
Verdadero: puesto que es una combinación lineal de los vectores de la base B.

□

(Final Julio 16/17) Conjunto de preguntas 1(c)
Es *simétrica* ya que $\mathbf{P}^\intercal = \left(\mathbf{X}\mathbf{X}^\intercal\right)^\intercal = (\mathbf{X}^\intercal)^\intercal\mathbf{X}^\intercal = \mathbf{X}\mathbf{X}^\intercal = \mathbf{P}$.

Por otra parte, puesto que B es una base ortonormal, las columnas de $\mathbf{X}$ son ortonormales, así pues, $\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X} = \underset{3\times3}{\mathbf{I}}$ y por tanto $\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\mathbf{X}^\intercal = \mathbf{X}\mathbf{I}\mathbf{X}^\intercal = \mathbf{X}\mathbf{X}^\intercal = \mathbf{P}$, por lo que $\mathbf{P}$ es *idempotente*.

□

(Final Julio 16/17) Conjunto de preguntas 1(d)
Que $\mathbf{P}\boldsymbol{y}$ sea ortogonal a $(\boldsymbol{y}-\mathbf{P}\boldsymbol{y})$ significa que el producto escalar $(\mathbf{P}\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{y}-\mathbf{P}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}\mathbf{P}^\intercal)\cdot(\boldsymbol{y}-\mathbf{P}\boldsymbol{y})$ es cero. Veamos si es cierto...

$$(\boldsymbol{y}\mathbf{P}^\intercal)\cdot(\boldsymbol{y}-\mathbf{P}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}\mathbf{P}^\intercal\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}\mathbf{P}^\intercal\mathbf{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\mathbf{P}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}\mathbf{P}\boldsymbol{y} = 0$$

donde hemos empleado que $\mathbf{P}^\intercal = \mathbf{P}$ y que $\mathbf{P}^\intercal\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}$.

□

(Final Julio 16/17) Conjunto de preguntas 2(a)
Puesto que no nos piden calcular la inversa, basta con aplicar operaciones elementales tipo I para tratar de obtener una matriz triangular. Con ella, de manera sencilla, determinaremos el rango de $\mathbf{A}$ para distintos valores de a, así como su determinante en función de a

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&a&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&a&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&a&-a&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&a&-a&a-1\end{bmatrix}$$

Como sólo hemos realizado operaciones elementales tipo I, el determinante de $\mathbf{A}$ es igual al determinante de la última matriz, es decir $\det\mathbf{A} = a-1$, por lo que la matriz es invertible siempre que $a-1 \neq 0$ o, expresado de manera diferente, si $a \neq 1$.

□

(Final Julio 16/17) Conjunto de preguntas 2(b)
Tenemos que resolver la ecuación

$$\det\left[(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal\right] = \frac{\det\mathbf{A}^\intercal}{\det\mathbf{A}^\intercal\det\mathbf{A}} = \frac{\det\mathbf{A}}{(\det\mathbf{A})^2} = \frac{a-1}{(a-1)^2} = \frac{1}{(a-1)} = \frac{1}{4},$$

es decir $a-1 = 4$. Así que la respuesta es: para $a = 5$.

□

(Final Julio 16/17) Conjunto de preguntas 2(c)
Puesto que cuando $a = 1$ la matriz tiene rango 3, la respuesta es: para $a = 1$.

□

(Final Julio 16/17) Conjunto de preguntas 3(a)

Puesto que la matriz es singular (la tercera fila es igual a la primera multiplicada por $\frac{4}{3}$, o bien la tercera columna es igual a la primera multiplicada por $\frac{b}{a}$) sabemos que uno de sus tres autovalores es necesariamente cero. Pero nos falta conocer los otros dos. Encontremos las raíces del polinomio característico:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ a & -\lambda & b \\ 0 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 + 4b\lambda + 3a\lambda = 0$$

Como sabemos, una de las raíces es cero; las dos restantes salen de resolver: $-(\lambda)^2 + 4b + 3a = 0;$ es decir $\lambda^2 = 3a + 4b$. Para que las raíces sean reales debe ocurrir que $3a + 4b \geq 0$ y por tanto se presentan dos casos:

- Si $3a + 4b = 0$ la matriz **no** es diagonalizable: el autovalor cero es triple, pero como el rango de $\mathbf{A}$ no es cero, la dimensión del autoespacio es menor que tres.
- **Si** $3a + 4b > 0$ **la matriz es diagonalizable**, pues aparecen tres raíces distintas: 0 y $\pm\sqrt{3a + 4b}$. Es decir, y dado un b arbitrario, el parámetro a tiene que cumplir $a > \frac{-4}{3}b$.

□

(Final Julio 16/17) Conjunto de preguntas 3(b)

Puesto que $\mathbf{A}$ tiene rango 2, dos autovalores son distintos de cero y uno es igual a cero; y como la traza es cero, necesariamente un autovalor es positivo y el otro negativo. Así que la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ no es ni definida positiva ni definida negativa. En concreto, puesto que $\pm\sqrt{3a + 4b} = \pm\sqrt{25}$, los tres autovalores son 0, -5 y 5.

□

(Final Julio 16/17) Conjunto de preguntas 3(c)

El único caso en que $\mathbf{A}$ es diagonalizable ortogonalmente se da cuando $a = 3$ y $b = 4$, pues es el único que permite que $\mathbf{A}$ sea simétrica. El vector $\boldsymbol{v}$ solicitado es un autovector de norma uno que esté asociado al autovalor $\lambda = 5$. Encontremos primero un autovalor para $\lambda = 5$; luego bastará normalizarlo para dar un $\boldsymbol{v}$ como el solicitado. De

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{A} - 5\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(5)\mathbf{2}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{1}] \\ \boldsymbol{\tau}}} \left[\begin{array}{ccc} -15 & 15 & 0 \\ 9 & -25 & 4 \\ 0 & 20 & -5 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} -15 & 0 & 0 \\ 9 & -16 & 4 \\ 0 & 20 & -5 \\ \hline 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(4)\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} -15 & 0 & 0 \\ 9 & -16 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

se deduce que los autovalores son los multiplos no nulos de $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Como la norma de este último vector es $\sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, una posible respuesta es: $\boldsymbol{v} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. La otra posible respuesta es cambiando el signo (el sentido del vector): $\boldsymbol{v} = \frac{-1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

□

(Final Mayo 16/17) Ejercicio 1(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & b-a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & b-a-1 \end{bmatrix}$$

Los cuatro vectores forman una base cuando $b - a \neq 1$, en caso contrario son dependientes.

□

(Final Mayo 16/17) Ejercicio 1(b)

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0\\
a & 0 & 1 & a\\ \hline
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\mathsf{P}_{12}}
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0\\
0 & a & 1 & a\\ \hline
0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1+2}]\\ (-1)\mathbf{2+4}\\ (-1)\mathbf{3+4}}}
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 1 & 0\\
0 & a & 1 & -1\\ \hline
0 & 1 & 0 & -1\\
1 & -1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{4}]\\ (-1)\mathbf{4+3}\\ (-a)\mathbf{4+2}}}
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1\\ \hline
0 & 1-a & -1 & 1\\
1 & a-1 & 1 & -1\\
0 & -a & 0 & 1\\
0 & a & 1 & -1
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{3+2}]\\ (-1)\mathbf{3+1}}}
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1\\ \hline
1 & -a & -1 & 1\\
0 & a & 1 & -1\\
0 & -a & 0 & 1\\
-1 & a+1 & 1 & -1
\end{array}\right]
\quad\Rightarrow\quad
\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}
1 & -a & -1 & 1\\
0 & a & 1 & -1\\
0 & -a & 0 & 1\\
-1 & a+1 & 1 & -1
\end{bmatrix}
$$

$\square$

(Final Mayo 16/17) Ejercicio 1(c)

La dimensión es tres y el conjunto $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathcal{S}$.

$\square$

(Final Mayo 16/17) Ejercicio 1(d)

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 0 & -1\\
1 & 0 & 0 & -1/2\\
0 & 1 & 1 & -1/2\\
0 & 0 & 1 & 0\\ \hline
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1+2}]\\ (1)\mathbf{1+4}}}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 1/2\\
0 & 1 & 1 & -1/2\\
0 & 0 & 1 & 0\\ \hline
1 & -1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1/2)\mathbf{2+4}]}}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\ \hline
1 & -1 & 0 & 1/2\\
0 & 1 & 0 & 1/2\\
0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

Por tanto, las coordenadas son $\begin{pmatrix}1/2, & 1/2, & 0\end{pmatrix}$, es decir, $\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3$.

$\square$

(Final Mayo 16/17) Ejercicio 2(a)

Considere $\mathsf{H}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ para algún vector $\boldsymbol{v}$ no nulo. Entonces $\mathsf{H}^2\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v} = (4\mathsf{I})\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{v}$, así que $\lambda^2 = 4$, y los autovalores de H son $\lambda = \pm\sqrt{4}$; por tanto cada autovalor de H es igual a 2 o a -2. Como la traza de H es 0, la suma de los autovalores de H también es 0. En conclusión, H tiene autovalores $\lambda = 2, 2, -2, -2$.

$\square$

(Final Mayo 16/17) Ejercicio 2(b)

De $\mathsf{H}^2 = 4\mathsf{I}$ tenemos

$$\mathsf{H}\mathsf{H} = 4\mathsf{I} \quad\Rightarrow\quad \mathsf{H}\frac{1}{4}\mathsf{H} = \mathsf{I} \quad\Rightarrow\quad \mathsf{H}^{-1} = \frac{1}{4}\mathsf{H}$$

El determinante es el producto de sus autovalores: $\det\mathsf{H} = 2\cdot 2\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$.

$\square$

(Final Mayo 16/17) Ejercicio 2(c)

Puesto que H es simétrica y los tres autovectores dados son ortogonales entre si, cualquier vector no nulo y ortogonal a las columnas de S será automáticamente un autovector independiente de los otros tres. Por tanto podemos buscarlo por eliminación gaussiana:

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & -1\\
1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & 1 & 0\\ \hline
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1+2}]\\ (-1)\mathbf{1+3}\\ (1)\mathbf{1+4}}}
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & -1 & 2\\
0 & -1 & 1 & 0\\ \hline
1 & -1 & -1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2+3}]\\ (2)\mathbf{2+4}}}
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0\\
0 & -1 & 2 & -2\\ \hline
1 & -1 & 0 & -1\\
0 & 1 & -1 & 2\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{3+4}]}}
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0\\
0 & -1 & 2 & 0\\ \hline
1 & -1 & 0 & -1\\
0 & 1 & -1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

Así que un autovector es

$$\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, los primeros dos autovectores corresponden a $\lambda = 2$, así que el autovector $\boldsymbol{v}_4$ encontrado corresponde a $\lambda = -2$. Puesto que el autoespacio asociado a $\lambda = -2$ tiene dimensión 2, el cuarto autovector no tiene por qué ser ortogonal a los otros tres: podemos elegir cualquier vector de la forma

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; = \; a\boldsymbol{v}_3 + b\boldsymbol{v}_4$$

con $b \neq 0$.

□

(Final Mayo 16/17) Ejercicio 3(a)

A) El conjunto S contiene todas las soluciones; para cada par de valores reales α y β se obtiene una solución distinta. En particular, $\boldsymbol{y}$ corresponde con el vector para el que tanto α como β son cero; así pues, $\boldsymbol{y}$ pertenece a S y, por tanto, es una solución.

B) En cuanto a la segunda parte. Por un lado, es evidente que el conjunto S de soluciones a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es un plano; y por tanto también tiene que ser un plano el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado: $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Por otro lado, si los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son solución a un sistema (si respectivamente verifican $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$), su vector diferencia $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ es solución del sistema homogéneo asociado ya que

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathbf{A}\boldsymbol{x} - \mathbf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

Así pues, si a cada uno de los vectores $\boldsymbol{x} \in S$ le restamos el vector $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, obtenemos una solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Pero, dada la definición del conjunto S, si a cada uno de los vectores de S le restamos el vector $\boldsymbol{y}$ obtenemos precisamente los vectores del conjunto $\mathcal{N}$.

Por tanto tenemos simultáneamente que:

1. todos los vectores de $\mathcal{N}$ son solución al sistema homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, y además
2. $\mathcal{N}$ es un subespacio de dimensión 2 (un plano que pasa por el origen)

por lo que necesariamente $\mathcal{N}$ es el plano que contiene todas las soluciones del sistema homogéneo.

□

(Final Mayo 16/17) Ejercicio 3(b)

En el apartado anterior hemos visto que

$$\mathcal{N} = \left\{ \boldsymbol{z} \;\middle|\; \boldsymbol{z} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}.$$

Necesitamos encontrar una base del complemento ortogonal, y con ello encontrar los coeficientes que multiplican a las variables x, y y z (para así obtener las ecuaciones cartesianas). Hagámoslo todo de golpe (i.e, multiplicar $\boldsymbol{x}$ por los vectores de la base del complemento ortogonal) empleando la eliminación gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline x & y & z \end{array}\right] \xrightarrow[\;]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ (-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}}} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline x & (-x+y-z) & z \end{array}\right]$$

Que en la parte superior hayamos logrado una columna de ceros significa que hemos multiplicado por un vector perpendicular a las dos primeras filas (en particular por [-1,1,-1]), así que una posible respuesta es

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha 0 + \beta 0 \quad \Rightarrow \quad -x + y - z = 0$$

nótese que como el vector (-1, 1 -1) es ortogonal a los dos vectores con los que se genera el conjunto $\mathcal{N}$, la parte "paramétrica" desaparece al mutiplicar por dicho vector, quedando tan sólo una ecuación cartesiana.
$\square$

(Final Mayo 16/17) Ejercicio 3(c)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix}\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$$

$\square$

(Final Mayo 16/17) Ejercicio 3(d)

Es inmediato ver que el sistema
$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$$
es incompatible. Si no lo ve, puede comprobarlo, por ejemplo, por eliminación gaussiana:
$$\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-3\\1&1&-2\\0&1&-4\\\hline 1&0&0\\0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\1&1&1\\0&1&-4\\\hline 1&0&3\\0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\1&1&0\\0&1&-5\\\hline 1&0&3\\0&1&-1\end{array}\right]$$
o bien calculando el determinante de la matriz ampliada y comprobando que es distinto de cero
$$\begin{vmatrix}1&0&3\\1&1&2\\0&1&4\end{vmatrix}=5.$$
Aunque lo mejor y más sencillo es ver que el vector $(3,2,4)$ sencilamente no verifica la ecuación cartesiana que define al conjunto $-x+y-z=0$.

Debemos, por tanto, calcular la proyección ortogonal para encontrar el vector de $\mathcal{N}$ más próximo. Así pues, empleando la matriz proyección del apartado anterior:
$$\mathbf{P}\boldsymbol{d} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\11\\7\end{pmatrix}.$$

$\square$

(Final Mayo 16/17) Conjunto de preguntas 1(a)

Verdadero: Si las columnas de $\mathbf{Q}$ son autovectores de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{AQ}=\mathbf{QD}$, donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con los autovalores correspondientes a las columnas de $\mathbf{Q}$ en la diagonal. Si además $\mathbf{Q}$ es ortogonal, entonces $\mathbf{QQ}^\intercal = \mathbf{I}$, por lo que multiplicando por $\mathbf{Q}^\intercal$ tenemos $\mathbf{A}=\mathbf{QDQ}^\intercal$; therefore
$$\mathbf{A}^\intercal = \left(\mathbf{QDQ}^\intercal\right)^\intercal = \left(\mathbf{Q}^\intercal\right)^\intercal\mathbf{D}^\intercal\mathbf{Q}^\intercal = \mathbf{QDQ}^\intercal = \mathbf{A}.$$

$\square$

(Final Mayo 16/17) Conjunto de preguntas 1(b)

Verdadero: Para ser definida positiva, todos los determinantes de los menores principales deberían ser positivos (incluyendo $\det\mathbf{A}>0$). Para ser definida negativa, determinantes de los menores de orden par deberían ser positivos y los de orden impar negativos (incluyendo $a_{11}<0$).

$\square$

(Final Mayo 16/17) Conjunto de preguntas 1(c)

Verdadero: Ambos autoespacios son ortogonales ya que
$$\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};$$

Y las dimensiones de ambos autoespacios suman 3.

□

(Final Mayo 16/17) Conjunto de preguntas 1(d)

Verdadero: Si $\mathbf{A}$ es invertible todos sus autovalores son distintos de cero, y los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son el cuadrado de los autovalores de $\mathbf{A}$. Por tanto, todos los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son mayores que cero.

Otra forma de verlo: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\intercal$ por lo que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$; así que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \left[\boldsymbol{y}\right]^\intercal\left[\boldsymbol{y}\right]$, donde $\boldsymbol{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$. Como $\mathbf{A}$ es invertible, $\left[\boldsymbol{y}\right]^\intercal\left[\boldsymbol{y}\right] > 0$ para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

□

(Final Mayo 16/17) Conjunto de preguntas 2(a)

Mirando la primera fila de $\mathbf{A}$ deducimos que

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} = 3.$$

Por tanto, $\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}$.

□

(Final Mayo 16/17) Conjunto de preguntas 2(b)

$$(\mathbf{A}^{-1})_{12} = \frac{\operatorname{cof}(\mathbf{A})_{21}}{\det \mathbf{A}} = \frac{-1}{3} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \frac{-1(-9)}{3} = 3.$$

□

(Final Mayo 16/17) Conjunto de preguntas 3(a)

Puesto que $\mathbf{MM} = \mathbf{M}$, y que $\mathbf{M}$ es invertible, podemos multiplicar ambos lados de la igualdad por $\mathbf{M}^{-1}$ para obtener

$$\mathbf{MM} = \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{MMM}^{-1} = \mathbf{MM}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = \mathbf{I}.$$

□

(Final Mayo 16/17) Conjunto de preguntas 3(b)

Puesto que $P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$; el polinomio $P(\lambda)$ tiene dos raíces iguales a 0, una raíz igual a 1 y una raíz igual a 2.

No podemos saber si es diagonalizable: el autovalor 0 está repetido y desconocemos si la dimensión del autoespacio correspondiente es 1 o si es 2 (en el primer caso no sería diagonalizable, pero en el segundo caso si).

□

(Final Mayo 16/17) Conjunto de preguntas 3(c)

$\mathbf{B}^\intercal = \left(\mathbf{AA}^\intercal\right)^\intercal = \left(\mathbf{A}^\intercal\right)^\intercal\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{AA}^\intercal = \mathbf{B}$.

□

(Final Mayo 16/17) Conjunto de preguntas 3(d)

Los cuatro autovalores de $\mathbf{B}$ son 0, 2, 2 y 4. Así que los autovalores de $(\mathbf{B} - 2\mathbf{I})$ son dos unidades más pequeños, es decir -2, 0, 0 y 2. Como dos autovalores son distintos de cero, el rango es dos.

Otra forma de verlo: por ser $\mathbf{B}$ la matriz del apartado anterior, sabemos que $\mathbf{B}$ es simétrica, y por tanto diagonalizable (aunque el autovalor $\lambda = 2$ esté repetido). Por tanto el auto espacio asociado a $\lambda = 2$ (doble) tiene dimensión dos: $\dim \mathcal{N}\left(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}\right) = 2$. Como el orden de la matriz es 4 (por tener cuatro raíces el polinomio caracteristico), el rango de $(\mathbf{B} - 2\mathbf{I})$ es 2.

□

(Final Junio 15/16) Ejercicio 1(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -2\alpha \\ 4 & 2 & 2 & -4\alpha \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{3}] \\ (-1)\mathbf{1}+\mathbf{2} \\ (-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\alpha \\ 2 & 0 & 0 & -4\alpha \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}] \\ (-3)\mathbf{2}+\mathbf{1}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\alpha \\ 2 & 0 & 0 & -4\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2\alpha)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 6\alpha \\ -2 & 1 & -2 & -4\alpha \end{array}\right]$$

por tanto es resoluble para cualquier α.

$\square$

(Final Junio 15/16) Ejercicio 1(b)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\alpha \\ -4\alpha \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{para todo } a \in \mathbb{R}.$$

$\square$

(Final Junio 15/16) Ejercicio 1(c)
Porque hemos visto que la matriz de coeficientes del sistema anterior tiene sólo rango 2 (dos pivotes), así que es singular y por tanto su determinante es cero.

$\square$

(Final Junio 15/16) Ejercicio 2(a)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]$$

Por tanto $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{L}) = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$.

$\square$

(Final Junio 15/16) Ejercicio 2(b)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{3}]\\ (2)\mathbf{3}+\mathbf{2}\\ (-2)\mathbf{3}+\mathbf{1}}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -3 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{2}]\\ (-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{A}^{-1}\end{array}\right]$$

Por tanto

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\square$

(Final Junio 15/16) Ejercicio 2(c)
Puesto que el rango de la matriz es tres, y tres es el número de filas, este sistema tiene solución para cualquier vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.
Puesto que el rango de la matriz es tres, y tres es el número de columnas, este sistema no puede tener infinitas soluciones.

$\square$

(Final Junio 15/16) Ejercicio 2(d)

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

$\square$

(Final Junio 15/16) Ejercicio 3(a)
Puesto que la matriz es simétrica, sabemos que es posible encontrar 5 autovectores linealmente independientes.

$\square$

(Final Junio 15/16) Ejercicio 3(b)
$\lambda = 1, 1, 1, 1, 6$.
Por una parte, como el rango de $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ es uno, la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda = 1$ es 4, así que dicho autovalor se repite como mínimo cuatro veces. Por otra parte, la traza de $\mathbf{A}$ es 10, por lo que la suma de sus autovalores debe ser 10. Así que el quinto autovalor debe ser $\lambda = 10 - 4 = 6$

$\square$

(Final Junio 15/16) Ejercicio 3(c)

Para el autovalor $\lambda = 1$, puesto que las cinco columnas de $\mathsf{A} - \mathsf{I}$ son iguales, cuatro autovectores linealmente independientes son:

$$\left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\; \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\; \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\; \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Para el quinto autovalor, $\lambda = 6$, tenemos

$$\mathsf{A} - 6\mathsf{I} = \begin{bmatrix}-4&1&1&1&1\\1&-4&1&1&1\\1&1&-4&1&1\\1&1&1&-4&1\\1&1&1&1&-4\end{bmatrix};$$

y puesto que la suma de las columnas de dicha matriz es $\mathbf{0}$, un quinto autovector es

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$\square$

(Final Junio 15/16) Conjunto de preguntas 1(a)

Como buscamos la ecuación cartesiana de una recta en $\mathbb{R}^3$, basta con un sistema de dos ecuaciones. Por una parte, las filas de A deben ser perpendiculares a las soluciones a $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (deben ser vectores perpendiculares a la recta paralela a la solicitada pero que pasa por el origen); por otra parte la recta solicitada debe pasar por $\boldsymbol{p}$ (así que $\mathsf{A}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$). Por tanto, lo más sencillo es escoger $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ como filas de A y calcular el vector del lado derecho $\boldsymbol{b}$ multiplicando A por un punto particular de la recta;

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}7&3&0\\4&0&3\end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \mathsf{A}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix}7&3&0\\4&0&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix};$$

así, una representación implícita (o cartesiana) de la recta es $\begin{cases}7x+3y = -2\\ 4x + 3z = 4\end{cases}.$

$\square$

(Final Junio 15/16) Conjunto de preguntas 1(b)

Necesitamos encontrar un vector director de la recta, es decir, un vector de $\mathbb{R}^3$ perpendicular a $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$

$$\left[\begin{array}{ccc}7&3&0\\4&0&3\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(3)\mathbf{1}]\\ \boldsymbol{\tau}\\[(7)\mathbf{2}]\\ \boldsymbol{\tau}\\[(4)\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc}21&21&0\\12&0&12\\\hline 3&0&0\\0&7&0\\0&0&4\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}}} \left[\begin{array}{ccc}0&21&0\\0&0&12\\\hline 3&0&0\\-7&7&0\\-4&0&4\end{array}\right]$$

Por tanto, una representación paramétrica de la recta es

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + a\begin{pmatrix}3\\-7\\-4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}3\\-7\\-4\end{pmatrix}.$$

$\square$

(Final Junio 15/16) Conjunto de preguntas 2.

Considere que la siguiente combinación es cero: $\mathbf{0} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_1$. Entonces, si calculamos su producto escalar con $\boldsymbol{u}_1$ concluimos que necesariamente

$$0 = \boldsymbol{u}_1\mathbf{0} = \boldsymbol{u}_1(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_1) = c_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Repitiendo el mismo truco con $\boldsymbol{u}_2$ y $\boldsymbol{u}_3$, concluimos que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, es decir, que los vectores son linealmente independientes.

□

(Final Junio 15/16) Conjunto de preguntas 3(a)

Falso. Por ejemplo $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$ y $(0,0,0)$.

□

(Final Junio 15/16) Conjunto de preguntas 3(b)

Verdadero. Si el rango es igual al número de columnas, entonces todas las columnas tienen un pivote tras la eliminación gaussiana. Así que al buscar solución para $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, la única combinación lineal de columnas que es $\mathbf{0}$ es la combinación trivial.

□

(Final Junio 15/16) Conjunto de preguntas 3(c)

Falso. Por ejemplo $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix}2&\\&1/2\end{bmatrix}$.

□

(Final Junio 15/16) Conjunto de preguntas 3(d)

Verdadero. $1 = \det(\mathsf{I}) = \det(\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}) = \det(\mathsf{A}^\intercal)\cdot\det(\mathsf{A}) = \Big(\det(\mathsf{A})\Big)^2$, así, los únicos valores posibles para $\det(\mathsf{A})$ son 1 ó -1.

□

(Final Junio 15/16) Conjunto de preguntas 3(e)

Verdadero. Como mucho cinco de ellos $(\boldsymbol{\lambda}_5,\ldots,\boldsymbol{\lambda}_n)$ son distintos de cero (puesto que hay seis distintos). Por tanto, los autovectores correspondientes $\boldsymbol{v}_5,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ son independientes, y pertenecen a $\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)$ puesto que $\mathsf{A}\frac{\boldsymbol{v}_i}{\lambda_i} = \boldsymbol{v}_i$. Así que $\operatorname{rg}\left(\mathsf{A}\right) = \dim\mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right) \geq 5$.

□

(Final Junio 15/16) Conjunto de preguntas 4(a)

En este caso necesitamos que A tenga rango 3; por tanto, por eliminación gausiana tenemos que

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{A}\\\hline\mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc}1&0&1&1\\1&1&2&3\\a&1&1&2\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\mathbf{4}+\mathbf{1}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{4}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc}0&0&0&1\\-2&1&-1&3\\a-2&1&-1&2\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&0&-1&1\end{array}\right] \xrightarrow[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{1}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc}0&0&0&1\\0&0&-1&3\\a&0&-1&2\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&1&1&0\\1&-1&-1&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathsf{L}\\\hline\mathsf{E}\end{array}\right]$$

y por tanto, si $a \neq 0$ el rango de la matriz es 3.

□

(Final Junio 15/16) Conjunto de preguntas 4(b)

Para aquellos que hacen a la matriz de rango 2; es decir...y visto lo visto...para $a = 0$.

□

(Final Mayo 15/16) Ejercicio 1(a)

Una representación paramétrica de la recta es

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \boldsymbol{a} + \alpha(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}4/3\\0\\4\end{pmatrix}.$$

□

(Final Mayo 15/16) Ejercicio 1(b)

Puesto que $(-3,0,1)$ y $(0,1,0)$ son ortogonales a $(\frac{4}{3},0,4)$, un sistema de ecuaciones cartesianas de la recta es

$$\begin{bmatrix}-3&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}-3&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}-3&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}4/3\\0\\4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-3x & & +z=0\\ & y & =0\end{cases}.$$

□

(Final Mayo 15/16) Ejercicio 1(c)

Si. Dicha recta es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} -3x \quad + z = 0 \\ \quad y \quad = 0 \end{cases};$$

es decir, es una recta que pasa por el origen.

□

(Final Mayo 15/16) Ejercicio 1(d)

Dicha recta está generada por el vector $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ o, dividiendo por 4 y multiplicando por 3, la recta es el conjunto de múltiplos del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; así

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

□

(Final Mayo 15/16) Ejercicio 1(e)

El punto $\boldsymbol{p}$ más cercano es la proyección de $\boldsymbol{z}$ sobre la recta generada por el vector:

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{P}\boldsymbol{z} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

□

(Final Mayo 15/16) Ejercicio 2(a)

$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (1-m) \begin{vmatrix} 1-m & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2(1-m)^2 = (4-2m)m$. La matriz es singular cuando $m = 0$ ó $m = 2$.

□

(Final Mayo 15/16) Ejercicio 2(b)

Puesto que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1-m & 0 \\ 1-m & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, para las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ que vienen dadas por $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-m & 2 & 0 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1-m & 0 \\ 1-m & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tenemos que $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{C}| = \frac{1}{2}|\mathbf{A}|$.

□

(Final Mayo 15/16) Ejercicio 2(c)

Para $m = 1$, el determinate de $\mathbf{A}$ es igual a 2. Por la regla de Cramer, la única solución del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ viene dada por

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{3}{2}; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{2(6)}{2} = 6; \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{2(-2)}{2} = -2.$$

□

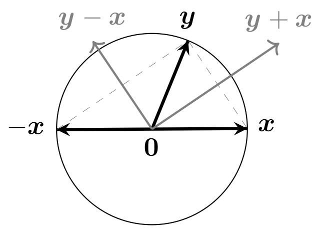
(Final Mayo 15/16) Ejercicio 3(a)

Teniendo en cuenta que $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|$ implica que $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}$; tenemos que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} && \text{puesto que } \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \\ &= 0 && \text{puesto que } \|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|. \end{aligned}$$

□

(Final Mayo 15/16) Ejercicio 3(b)



□

(Final Mayo 15/16) Ejercicio 3(c)

Puesto que por una parte, el segmento $[\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b}]$ es paralelo a $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$, y el segmento $[\boldsymbol{b} \leftrightarrow \boldsymbol{c}]$ es paralelo a $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$; y por otra $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| =$ radio de la circunferencia; entonces sabemos, por el apartado anterior, que ambos segmentos son perpendiculares.

□

(Final Mayo 15/16) Conjunto de preguntas 1(a)

Puesto que $\mathbf{C}$ es simétrica:

$$\mathbf{M}^\intercal = (\mathbf{A}^\intercal\mathbf{C}\mathbf{A})^\intercal = \mathbf{A}^\intercal\mathbf{C}^\intercal\big(\mathbf{A}^\intercal\big)^\intercal = \mathbf{A}^\intercal\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{M}.$$

Por tanto $\mathbf{M}$ es simétrica.

□

(Final Mayo 15/16) Conjunto de preguntas 1(b)

Puesto que $\mathbf{C}$ es simétrica y definida positiva, se puede diagonalizar como $\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\intercal$; donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal, con todos los elementos de la diagonal principal estrictamente mayores que cero. Así

$$\boldsymbol{x}\mathbf{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{C}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{A}\boldsymbol{x}.$$

Si llamamos $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^\intercal\mathbf{A}$ tenemos que

$$\boldsymbol{x}\mathbf{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{B}^\intercal\mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{x} = (\mathbf{B}\boldsymbol{x})^\intercal\mathbf{D}(\mathbf{B}\boldsymbol{x}) \geq 0,$$

pues es una suma de cuadrados, que será definida (i.e., $\boldsymbol{x}\mathbf{M}\boldsymbol{x} = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$) si $\mathbf{B}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, es decir, si la matriz $\mathbf{B}$ es de rango completo.

□

(Final Mayo 15/16) Conjunto de preguntas 1(c)

Si $\mathbf{M}$ no es definida positiva, entonces es semi-definida positiva, es decir, al menos un autovalor es cero, y el resto mayores o iguales a cero. Así pues, el menor autovalor es $\lambda = 0$..

□

(Final Mayo 15/16) Conjunto de preguntas 2(a)

Autovalores: $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$. Para $\lambda = 2$, la dimensión del autoespacio es 1 y su multiplicidad algebraica es 2. Por lo cual la matriz $\mathbf{A}$ no es diagonalizable.

□

(Final Mayo 15/16) Conjunto de preguntas 2(b)

Sí es invertible, puesto que $|\mathbf{A}| = 16 \neq 0$.

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}2&4&2\\0&4&2\\0&0&2\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&4&2\\0&0&2\\ \hline 1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1/2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&4&0\\0&0&2\\ \hline 1&-2&0\\0&1&-1/2\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(1/2)\mathbf{1}]\\(1/4)\mathbf{2}\\(1/2)\mathbf{3}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline 1/2&-1/2&0\\0&1/4&-1/4\\0&0&1/2\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{A}^{-1}\end{array}\right]$$

□

(Final Mayo 15/16) Conjunto de preguntas 3(a)

Verdadero. Si $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$,...,$\boldsymbol{v}_k$ son linealemnte independientes, entonces son una base y $\dim(\mathcal{V}) = k$. De lo contrario podemos generar $\mathcal{V}$ con menos de k vectores, y por tanto $\dim(\mathcal{V}) < k$.

□

(Final Mayo 15/16) Conjunto de preguntas 3(b)

Verdadero. Si $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$,…,$\boldsymbol{v}_k$ generan $\mathcal{V}$, entonces son una base, y $\dim(\mathcal{V}) = k$. De lo contrario, hay vectores en $\mathcal{V}$ que no son combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$,…,$\boldsymbol{v}_k$ y por tanto $\dim(\mathcal{V}) > k$.

□

(Final Mayo 15/16) Conjunto de preguntas 3(c)

Verdadero. Al menos hay una columna libre, así que, si el sistema tiene alguna solución, el conjunto de soluciones contiene infinitos vectores.

□

(Final Mayo 15/16) Conjunto de preguntas 3(d)

Falso. Por ejemplo

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

tiene infinitas soluciones.

□

(Final Mayo 15/16) Conjunto de preguntas 3(e)

Falso. El producto escalar de dos vectores es un un número real (es un escalar).

□

(Final Junio 14/15) Ejercicio 1(a)

No siempre tiene solución; por ejemplo $\begin{bmatrix}1&1&0&0\\2&2&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Nótese que el rango de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es uno, pero el rango de la matriz ampliada $[\mathbf{A}|\boldsymbol{b}]$ es dos.

□

(Final Junio 14/15) Ejercicio 1(b)

Puesto que el sistema tiene más variables que ecuaciones, cuando el sistema tiene solución, ésta nunca puede ser única.

□

(Final Junio 14/15) Ejercicio 1(c)

Que $\boldsymbol{b}$ sea combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$; es decir, que la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, y la matriz ampliada $[\mathbf{A}|\boldsymbol{b}]$ tengan el mismo rango.

□

(Final Junio 14/15) Ejercicio 1(d)

Puesto que el $\boldsymbol{b}$ tiene tres componentes (pertenece a $\mathbb{R}^3$), la condición es que el rango de $\mathbf{A}$ sea tres.

□

(Final Junio 14/15) Ejercicio 1(e)

Por supuesto que si. Basta que algunas columnas de $\mathbf{A}^\intercal$ sean linealmente dependientes, y que vector $\boldsymbol{c}$ sea combinación lineal de dicho grupo de columnas dependientes. Por ejemplo:

$$\text{Si}\ \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&4\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\\0\end{pmatrix},$$

entonces el sistema

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\0&0&3\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\\0\end{pmatrix}$$

tiene multiples soluciones, por ejemplo $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \text{etc...}$

□

(Final Junio 14/15) Ejercicio 2(a)

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \text{suma de las columnas} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

□

(Final Junio 14/15) Ejercicio 2(b)

$$\mathbf{A}^2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

□

(Final Junio 14/15) Ejercicio 2(c)

La dimensión es al menos 1 (porque $\mathbf{A}$ es cuadrada y sabemos que $(1;1;1)$ es solución para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, así que el rango de $\mathbf{A}$ es como máximo 2).

□

(Final Junio 14/15) Ejercicio 2(d)

$\mathbf{A}$ es singular, así que $\lambda = 0$ es un autovalor de $\mathbf{A}$. Por tanto $\lambda^3 = 0$ es un autovalor de $\mathbf{A}^3$.

□

(Final Junio 14/15) Ejercicio 3(a)

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix}3-\lambda & 4 & 6\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ -1 & -2 & -2-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)\lambda,$$ así que los autovalores de $\mathbf{A}$ son 1, 1 y 0.

□

(Final Junio 14/15) Ejercicio 3(b)

Por una parte,

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}3 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad \text{tiene como solución especial } \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Por otra,

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad \text{tiene como soluciones especiales } \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Así que una base es

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix};\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix};\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

□

(Final Junio 14/15) Ejercicio 3(c)

Por el primer método, hemos de resolver $\mathbf{S}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{S} & \text{-}\boldsymbol{b}\\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c}-2 & -2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]\\(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}\\(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ \hline 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -2 & -1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ \hline 1 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -2 & -1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]\\(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -2 & -5\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{S}^{-1} & \boldsymbol{x}_p\end{array}\right]$$

Por tanto, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 6\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 5\boldsymbol{v}_3 = 6\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$. Así que, $\mathbf{A}^{99}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{A}^{99}\left(6\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 5\boldsymbol{v}_3\right)$, es decir,

$$\mathbf{A}^{99}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{A}^{99}(6\boldsymbol{v}_1) + \mathbf{A}^{99}(\boldsymbol{v}_2) + \mathbf{A}^{99}(-5\boldsymbol{v}_3) = 0^{99}(6\boldsymbol{v}_1) + 1^{99}(\boldsymbol{v}_2) + 1^{99}(-5\boldsymbol{v}_3) = \mathbf{0} + \boldsymbol{v}_2 - 5\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}13\\1\\-5\end{pmatrix}.$$

Por el segundo método, la factorización $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$, es en este caso: $\mathbf{A} = \mathbf{S}\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\mathbf{S}^{-1}$.

$$\mathbf{A}^{99} = \mathbf{S}\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}^{99}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\begin{bmatrix}0^{99}&&\\&1^{99}&\\&&1^{99}\end{bmatrix}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{SDS}^{-1} = \mathbf{A}.$$

Así que

$$\mathbf{A}^{99}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\1\\-5\end{pmatrix}.$$

$\square$

(Final Junio 14/15) Conjunto de preguntas 1(a)

No hay suficientes autovectores linealmente independientes. Necesitamos 2, pero la dimensión del autoespacio del único autovalor ($\lambda = \sqrt{2}$) es 1.

$\square$

(Final Junio 14/15) Conjunto de preguntas 1(b)

$\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{2}$. El conjunto de autovectores está formado por el siguiente sub-espacio: $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \sqrt{2}\mathbf{I}) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right) =$ espacio generado por $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

$\square$

(Final Junio 14/15) Conjunto de preguntas 1(c)

$\begin{vmatrix}2\end{vmatrix} > 0$; $\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix} > 0$; $\begin{vmatrix}2&1&b\\1&2&1\\b&1&2\end{vmatrix} = -2b^2 + 2b + 4$; una parábola que corta el eje de las x en -1 y 2.

- Si $-1 < b < 2$ definida positiva
- Si $b = -1$ ó $b = 2$ semi-definida positiva
- No definida en el resto de casos

$\square$

(Final Junio 14/15) Conjunto de preguntas 2(a)

$\det \mathbf{A} = 2 + c^2 + 2c^2 - 4 - c^2 - c^2 = -2 + c^2$, por lo que $\det \mathbf{A} = 0$ para $c = \pm\sqrt{2}$.

$\square$

(Final Junio 14/15) Conjunto de preguntas 2(b)

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}1&0&2\\0&2&0\\1&0&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&2&0\\1&0&-1\\ \hline 1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&2&0\\1&0&1\\ \hline 1&0&2\\0&1&-0\\0&0&-1\end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]\\(1/2)\mathbf{2}}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline -1&0&2\\0&1/2&0\\1&0&-1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}\\ \hline \mathbf{A}^{-1}\end{array}\right].$$

$\square$

(Final Junio 14/15) Conjunto de preguntas 2(c)

Por el primer apartado, ya sabemos que $\mathbf{A}$ es de rango completo si $c = 1$. Así que el sistema sólo tiene una solución:

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \textbf{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{E} & \boldsymbol{x}_p\end{array}\right]$$

Así que la solución es $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

□

(Final Junio 14/15) Conjunto de preguntas 3(a)

Verdadero. $(\mathbf{A}^2)^\intercal = (\mathbf{AA})^\intercal = \mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{AA} = \mathbf{A}^2$.

□

(Final Junio 14/15) Conjunto de preguntas 3(b)

Falso. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no es simétrica, pero $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$ si lo es.

□

(Final Junio 14/15) Conjunto de preguntas 3(c)

Falso. Puesto que $\mathbf{A}$ tiene que ser cuadrada, y además es singular ($\lambda = 0$ es un atovalor), hay columnas libres y el sistema sólo puede compatible indeterminado.

□

(Final Junio 14/15) Conjunto de preguntas 3(d)

Falso. Ejemplo: Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; entonces $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Los autovalores de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, pero el conjunto de autovectores asociados es sólo la recta generada por $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

□

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 1(a)

Las columnas pertenecen a $\mathbb{R}^5$, así que el espacio generado por las columnas es un subespacio de $\mathbb{R}^5$ (es decir, $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \subset \mathbb{R}^5$). Pero como el sistema tiene solución para cualquier vector $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^5$, entonces todo vector de $\mathbb{R}^5$ está contenido en el espacio generado por las columnas (es decir, $\mathbb{R}^5 \subset \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$).

Ambas condiciones implican que el espacio generado por las columnas es todo $\mathbb{R}^5$ (es decir, $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}^5$); Así que las columnas son un sistema generador de $\mathbb{R}^5$, y la dimensión del espacio generado por las columnas (el rango) es 5.

□

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 1(b)

Puesto que el rango es 5, las filas forman un conjunto de vectores linealmente independientes.

□

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 1(c)

Puesto que hay 7 columnas, y $\mathbf{A}$ es de rango 5, el conjunto de soluciones del sistema homogéneo es de dimensión 2. Es decir, el conjunto de soluciones es un plano en $\mathbb{R}^7$.

□

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 1(d)

Puesto que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\intercal$ son de rango 5, la única solución a $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es el vector $\mathbf{0}$ (es un punto...el origen de coordenadas de $\mathbb{R}^5$).

□

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 1(e)

Falso. Hay 7 columnas, pero el rango es solo 5, así que las columnas son dependientes, es decir, no pueden formar una base (solo un sistema generador).

□

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 2(a)

Por una parte, $\mathbf{A}\boldsymbol{x}_3$ es igual a la tercera columna de $\mathbf{A}$, es decir $\mathbf{A}\boldsymbol{x}_3 = \mathbf{A}_{|3}$.
Por otra parte, $\boldsymbol{x}_3$ está asociado al autovalor 0, por lo que $\mathbf{A}\boldsymbol{x}_3 = 0\boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$.
Así que necesariamente la tercera columna de $\mathbf{A}$ es el vector cero; $\mathbf{A}_{|3} = \mathbf{0}$.

$\square$

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 2(b)

Puesto que la matriz solo tiene tres autovalores (pues ninguno está repetido), es una matriz 3 por 3. Como ya conocemos tres autovectores linealmente independientes, podemos diagonalizar la matriz, y a partir de dicha factoriazación podemos encontrar $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Necesitamos encontrar primero $\mathbf{S}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}] \\ (-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

$\square$

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 2(c)

$$\mathbf{D}^{\intercal} = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S})^{\intercal} = (\mathbf{S}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal}\left(\mathbf{S}^{\intercal}\right)^{-1}) = \mathbf{D}$$

Así pues,

$$\mathbf{A}^{\intercal} = \left(\mathbf{S}^{\intercal}\right)^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S}^{\intercal}$$

es decir, las columnas de $\left(\mathbf{S}^{\intercal}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ son autovectores de $\mathbf{A}^{\intercal}$:

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 3(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -0 \\ 2 & 1 & 2 & -a \\ 1 & a & c & -0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ (-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -a \\ 1 & a-2 & c-1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1/3)\mathbf{2}] \\ (a)\mathbf{2}+\mathbf{4}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (2-a)/3 & c-1 & a(2-a)/3 \\ \hline 1 & 2/3 & -1 & 2a/3 \\ 0 & -1/3 & 0 & -a/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Por una parte, para que la solución no sea única necesitamos que el rango de $\mathbf{A}$ sea 2. Es decir, c tiene que ser igual a uno ($c = 1$).

Por otra parte, si $a = 0$ es sistema es homogéneo, y por tanto tiene solución (la tercera columna menos la primera); pero también hay solución para $a = 2$ (en cuyo caso una solución es 4/3 de la primera columna menos dos tercios de la segunda).

Así pues, $c = 1$; y $a = 0$ ó 2.

$\square$

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 3(b)

Necesitamos que el rango de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ sea sólo 2, pero que el rango de la matriz ampliada sea 3. Es decir $c = 1$, y a distinto de 0 o 2.

$\square$

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 3(c)
Para ello el rango de $\mathbf{A}$ tiene que ser 1. Pero dicho rango es como mínimo dos. Así que no es posible.
□

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 3(d)
Para ello el rango de $\mathbf{A}$ tiene que ser 3. Esto es así cuando c es distinto de 1.
□

(Final Mayo 14/15) Ejercicio 3(e)
No es posible expresar la segunda columna de $\mathbf{A}$ como combinación lineal de las restantes columnas, así que dicha variable siempre será una variable endógena (o pivote).
□

(Final Mayo 14/15) Conjunto de preguntas 1(a)
$\det(\mathbf{A}) = 5x^2 - 6x + 0 - 9x + 10x - 0 = 5x^2 - 5x = 5x(x-1) = 0$. Por tanto, $x = 0, x = 1$.
□

(Final Mayo 14/15) Conjunto de preguntas 1(b)
Los tres subdeterminantes principales deben ser positivos, por tanto

- $|x| > 0 \;\Rightarrow; x > 0$.
- $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} > 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 1 > 0 \;\Rightarrow\; |x| > 1$. Como la condición primera exige que x sea positivo, entonces $x > 1$.
- $\det(\mathbf{B}) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1) > 0$; así que $x > 1$.

Revisando las tres condiciones, es claro que la matriz es definida positiva si y sólo si $x > 1$.
□

(Final Mayo 14/15) Conjunto de preguntas 1(c)
Los subdeterminantes principales primero y tercero deben ser negativos, y el segundo positivo, por tanto

- $|x| < 0 \;\Rightarrow; x < 0$.
- $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} > 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 1 > 0 \;\Rightarrow\; |x| > 1$. Como $x < 0$, entonces es necesario que $x < -1$.
- $\det(\mathbf{B}) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$; pero dicha expresión nunca podrá ser negativa, por lo que la matriz no puede ser definida negativa.

□

(Final Mayo 14/15) Conjunto de preguntas 2(a)
Verdadero. La matriz $\mathbf{A}$ tiene 7 autovalores distintos $\lambda = 0, 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.
□

(Final Mayo 14/15) Conjunto de preguntas 2(b)
Verdadero. Suponga que -3 es el autovalor con autoespacio tridimensional. Entonces (almenos) debe aparecer con multiplicidad 3 en el polinomio característico $p(\cdot)$ así que $p(\lambda)$ contiene los factores $(\lambda + 3)^3(\lambda - 2)(\lambda - 7)$ y, puesto que el grado de $p(\cdot)$ tiene que ser 5, no puede haber más raices. En particular, 0 no puede ser una raíz, así que 0 no es un autovalor y por lo tanto, $\mathbf{A}$ es invertible. [Evidentemente la misma idea funciona para cualquier otro autovalor cuyo autoespacio tiene dimensión 3].
□

(Final Mayo 14/15) Conjunto de preguntas 2(c)
Verdadero. Puesto que $0 \neq \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$; ni $\det(\mathbf{A})$ puede ser cero, ni tampoco $\det(\mathbf{B})$. Así que ambas matrices son invertibles.
Otra forma de verlo es que si $\mathbf{AB}$ es invertible, entonces existe un $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{ABE} = \mathbf{I}$. Por tanto $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{BE}$.
□

(Final Mayo 14/15) Conjunto de preguntas 3(a)
Encontremos primero un vector en la misma dirección que la recta

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así que una representación paramétrica es

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_P + a\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x_1 = 2 + a \\ x_2 = 4 + a \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

□

(Final Mayo 14/15) Conjunto de preguntas 3(b)

Necesitamos "eliminar" la parte de los parámetros ($a\boldsymbol{v}$). Para ello necesitamos encontrar dos vectores de $\mathbb{R}^3$ que sean perpendiculares a $\boldsymbol{v}$. A continuación debemos multiplicar la representación paramétrica de más arriba por cada uno de dichos vectores para obtener sendas ecuaciones sin la parte paramétrica. Una forma rápida de hacer todos estos cálculos es mediante...¡eliminación gaussiana!...tratando de hacer ceros en el vector $\boldsymbol{v}$. Si, además de $\boldsymbol{v}$, ponemos también el vector de variables $\boldsymbol{x}$ y el punto $\boldsymbol{x}_p$, estaremos realizando las mismas operaciones sobre los tres vectores (estaremos multiplicando la representación paramétrica por vectores ortogonales a $\boldsymbol{v}$):

$$\begin{bmatrix} [\boldsymbol{v}]^\intercal \\ \hline [\boldsymbol{x}]^\intercal \\ \hline \boldsymbol{x}_p{}^\intercal \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \hline x_1 & x_2 & {\color{red}x_3} \\ \hline 2 & 4 & {\color{red}1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \hline x_1 & {\color{blue}x_2 - x_1} & {\color{red}x_3} \\ \hline 2 & {\color{blue}2} & {\color{red}1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} {\color{blue}x_2 - x_1} & {\color{blue}= 2} \\ {\color{red}x_3} & {\color{red}= 1} \end{cases}.$$

□

(Final Mayo 14/15) Conjunto de preguntas 4(a)

Dicho conjunto es cerrado para la suma puesto que para todo $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de $\mathcal{W}$:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ bu_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ bv_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ bu_1 + bv_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ b(u_1 + v_1) \end{pmatrix};$$

y tambien es cerrado para el producto por escalares:

$$k\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ bu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_3 \\ kbu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_3 \\ b(ku_1) \end{pmatrix};$$

el conjunto $\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial sea cual sea el valor de b.

□

(Final Mayo 14/15) Conjunto de preguntas 4(b)

Cuando $b = 1$, los vectores de $\mathcal{W}$ son de la forma

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, la dimensión del espacio es 3; y una base es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

(Final Julio 13/14) Ejercicio 1(a)

La matriz simétrica correspondiente es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix};$$

y no es definida sea cual sea el valor de a, pues tiene valores positivos y negativos en la diagonal principal; y por tanto:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 4 > 0; \quad \text{pero} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -2 < 0.$$

Lo mismo se comprueba mediante eliminacion gaussiana

$$\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 4 & -6\end{bmatrix}$$

(pues obtenemos pivotes positivos y negativos); y también calculando los subdeterminantes

$$\begin{vmatrix}a\end{vmatrix} = a; \qquad \begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix} = 4a; \qquad \begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}4 & 4\\ 4 & -2\end{vmatrix} = a(-8-16) = -24a.$$

(pues obtenemos subdeterminantes positivos y negativos).

□

(Final Julio 13/14) Ejercicio 1(b)

$$\det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) = \begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 4-\lambda & 4\\ 0 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda\begin{bmatrix}4-\lambda & 4\\ 4 & -2-\lambda\end{bmatrix} = -\lambda\Big[\lambda^2 - 2\lambda - 24\Big] \to \begin{cases}\lambda = 0\\ \lambda = 6\\ \lambda = -4\end{cases}$$

□

(Final Julio 13/14) Ejercicio 1(c)

Para $\lambda_1 = 0$

$$\mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{es un autovector.}$$

Para $\lambda_2 = 6$

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 4 & -8\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{es un autovector.}$$

Para $\lambda_1 = -4$

$$\mathbf{A} + 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 4\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{es un autovector.}$$

Puesto que cada autovector corresponde a un autovalor distinto, estos autovectores son linealmente independientes.

□

(Final Julio 13/14) Ejercicio 1(d)

Es sencillo ver que $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, y $\boldsymbol{v}_3$ son perpendiculares entre si,

$$\big[\boldsymbol{v}_1\big]^{\mathsf{T}}\big[\boldsymbol{v}_1\big][2]v = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = 0; \quad \big[\boldsymbol{v}_1\big]^{\mathsf{T}}\big[\boldsymbol{v}_1\big][3]v = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} = 0; \quad \big[\boldsymbol{v}_2\big]^{\mathsf{T}}\big[\boldsymbol{v}_2\big][3]v = \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} = 0.$$

Pero necesitamos vectores en esas direcciones que tengan longitud uno. Puesto que las longitudes son

$$\|\boldsymbol{v}_1\|^2 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 = 1, \quad \|\boldsymbol{v}_2\|^2 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 5, \quad \|\boldsymbol{v}_3\|^2 = \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{v}_3 = 5;$$

entonces,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix}0 & & \\ & 6 & \\ & & -4\end{bmatrix}.$$

$\square$

(Final Julio 13/14) Ejercicio 1(e)

No, puesto que esta forma cuadrática no es definida positiva.

$\square$

(Final Julio 13/14) Ejercicio 2(a)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A}\boldsymbol{x} =&(\mathsf{A}\boldsymbol{x})\cdot(\mathsf{A}\boldsymbol{x}) && \text{producto de traspuestas : } \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathsf{A}^\intercal \\ \geq& 0 && \text{por ser la suma del cuadrado de los elementos del vector } \mathsf{A}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

$\square$

(Final Julio 13/14) Ejercicio 2(b)

La forma cuadrática $\boldsymbol{x}(\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A})\boldsymbol{x}$ es definida positiva sólo si $\mathsf{A}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ para todo $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Por tanto la condición es que la matriz A debe ser de rango completo por columnas (sus columnas deben ser linealmente independientes).

$\square$

(Final Julio 13/14) Ejercicio 2(c)

Si $m < n$, entonces el rango como máximo es igual al número de filas ($\operatorname{rg}(\mathsf{A}) \leq m < n$); entonces sus columnas son linealmente dependientes y es posible encontrar un vector $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ tal que $\mathsf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, y por tanto es posible encontrar un vector $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{y}(\mathsf{A}^\intercal\mathsf{A})\boldsymbol{y} = \big[\boldsymbol{0}\big]^\intercal\big[\boldsymbol{0}\big] = 0$.

$\square$

(Final Julio 13/14) Ejercicio 3(a)

Puesto que evidentemente el tercer vector es la suma de los dos primeros, y que también es evidentemente que los dos primeros son independientes, cualesquiera dos forman una base, por ejemplo, $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

$\square$

(Final Julio 13/14) Ejercicio 3(b)

Nos piden expresar el vector $(1, 0, -1, 1)$ como combinación lineal de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, por tando debemos resolver el sistema $x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} = (1, 0, -1, 1)^\intercal$.

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}} \left[\begin{array}{rr|r} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\tau}} \left[\begin{array}{rr|r} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Así pues, el vector pertenece a $\mathcal{S}$, y $x = -1$ e $y = 3$; es decir las coordenadas son $(-1, 3)$.

$\square$

(Final Julio 13/14) Ejercicio 3(c)

Puesto que $\mathcal{S}$ es:

$$\mathcal{S} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{tales que} \quad \boldsymbol{x} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}\right\},$$

para encontrar las ecuaciones cartesianas necesitamos multiplicar la ecuación paramétrica $\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$ por dos vectores de $\mathbb{R}^4$ perpendiculares a $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, de manera que la parte paramétrica de la ecuación se anule. Lo podemos hacer mediante eliminación gaussiana por columnas, trasponiendo los vectores $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{u}$, y logrando dos columnas de ceros en la parte correspondiente a $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ traspuestas:

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{x} & \mathsf{I} \end{array}\right]^\intercal = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline x & y & z & t \\ \hline 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x & y & z & t-x \\ \hline 1 & 0 & & -1 \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & 1 \end{array}\right];$$

y por tanto las ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{cases} y &= 0 \\ t - x &= 0 \end{cases}$$

$\square$

(Final Julio 13/14) Ejercicio 3(d)

Los dos vectores por los que hemos multiplicado las ecuaciones parametricas $\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$, para obtener las implícitas, son precisamente una base del complemento ortogonal de $\mathcal{S}$

$$\text{Base de } \mathcal{S}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

.

$\square$

(Final Julio 13/14) Ejercicio 3(e)

Puesto que $\mathcal{S}$ tiene dimensión 2, basta encontrar un vector que no sea combinación lineal de $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$. Cualquier vector de subespacio del apartado anterior es perpendicular a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

Así, cualquier combinación de los vectores de la base del apartado (d) es una respuesta posible: por ejemplo

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

(Final Julio 13/14) Conjunto de preguntas 1(a)

Verdadero: puesto que la matriz inversa de una matriz cuadrada es única, y puesto que $\mathbf{AA} = \mathbf{I}$, esto significa que la matriz $\mathbf{A}$ es su propia inversa.

$\square$

(Final Julio 13/14) Conjunto de preguntas 1(b)

Verdadero: Una matriz es ortonormal si sus columnas son perpendiculares entre si y, además, la norma de cada columna es uno; por tanto, una matriz $\mathbf{A}$ es ortonormal si y sólo si $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Como en este caso la matriz es simétrica,

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = \mathbf{A}^\intercal\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \text{La matriz } \mathbf{A} \text{ es ortonormal.}$$

$\square$

(Final Julio 13/14) Conjunto de preguntas 1(c)

Falso. Basta con buscar un contraejemplo como la matriz nula $\underset{n\times n}{\mathbf{0}}$, que evidentemente verifica que $\mathbf{0}^2 = \mathbf{0}$; y cuyo rango es cero.

$\square$

(Final Julio 13/14) Conjunto de preguntas 1(d)

Falso. La segunda implicación es falsa. Si la matriz $\mathbf{B}$ es singular (como en el contraejemplo del apartado anterior), entonces no existe la matriz inversa $\mathbf{B}^{-1}$, y consecuentemente no se puede emplear en la deducción. Así pues, la dedución es falsa (pues no tenemos garantía de que $\mathbf{B}$ sea invertible).

$\square$

(Final Julio 13/14) Conjunto de preguntas 2(a)

Verdadero. Si 0 es un autovalor, entonces la matriz tiene determinante nulo, es decir, es singular.

$\square$

(Final Julio 13/14) Conjunto de preguntas 2(b)

Verdadero. Si $\lambda = -3$ es un autovalor, quiere decir que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) = 0$, y por tanto la matriz cuadrada $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})$ es singular. Y si la matriz es singular, el sistema $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ no siempre tiene solución.

$\square$

(Final Julio 13/14) Conjunto de preguntas 3(a)

Para $a = 1, -1, 2$, puesto que para dichos valores la matrix es singular (para $a = 1$ la primera y última columna son iguales, para $a = -1$ la segunda y última columna son iguales, para $a = 2$ la tercera y última columna son iguales).

$\square$

(Final Julio 13/14) Conjunto de preguntas 3(b)

Por elimincíon gaussiana *por filas* tenemos:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&2&a\\1&1&4&a^2\\1&-1&8&a^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&1&a-1\\0&0&3&a^2-1\\0&-2&7&a^3-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&1&a-1\\0&0&3&a^2-1\\0&0&6&a^3-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&1&a-1\\0&0&3&(a-1)(a+1)\\0&0&6&a(a-1)(a+1)\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&1&a-1\\0&0&3&(a-1)(a+1)\\0&0&0&a(a-1)(a+1)-2(a-1)(a+1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&1&a-1\\0&0&3&(a-1)(a+1)\\0&0&0&(a-2)(a-1)(a+1)\end{vmatrix}$$
$$=-6(a-2)(a-1)(a+1).$$

También podemos usar elimincíon gaussiana *por columnas*:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&2&a\\1&1&4&a^2\\1&-1&8&a^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&&&\\1&-2&1&a-1\\1&0&3&a^2-1\\1&-2&7&a^3-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&&&\\1&-2&1&a-1\\1&0&3&(a-1)(1+a)\\1&-2&7&a^3-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&&&\\1&-2&&\\1&0&3&(a-1)(1+a)\\1&-2&6&a^3-a\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1&&&\\1&-2&&\\1&0&3&(a-1)(1+a)\\1&-2&6&a(a-1)(1+a)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&&&\\1&-2&&\\1&0&3&\\1&-2&6&(a-2)(a-1)(1+a)\end{vmatrix}=-6(a-2)(a-1)(a+1). \quad (1)$$

□

(Final Julio 13/14) Conjunto de preguntas 3(c)

Cuando la matriz es de rango completo (para todos los valores de a excepto para $a = 1, -1, 2$) la dimensión del espacio de soluciones es **cero**.

Cuando la matriz es singular (para $a = 1, -1, 2$) la dimensión del espacio de soluciones es **uno** (sólo hay tres columnas linealmente independientes)

□

(Final Julio 13/14) Conjunto de preguntas 3(d)

Puesto que cuando a es cero la dimensión del espacio de soluciones es **cero** (matriz de rango completo), la única solución es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

□

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 1(a)

1. $\det(\mathbf{A}) = 3 - a$ por lo cual $\mathbf{A}$ es invertible si $a \neq 3$.
2. $\mathbf{A}$ es simétrica para cualquier valor de a.
3. Al ser $\mathbf{A}$ simétrica para cualquier valor de a, también es diagonalizable.

□

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 1(b)

La matriz $\mathbf{A}$ no es definida positiva para ningún valor de a. Usando el test de los sub-determinantes tenemos que

- primer sub-determinante $= 1 > 0$,
- segundo sub-determinante $= -1 < 0$,

Al ser el primer sub-determinante positivo y el segundo negativo, la matriz $\mathbf{A}$ es indefinida para cualquier valor de a.

□

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 1(c)

Un autovector correspondiente a $\lambda = 0$ es una solución al sistema homogéneo $(\mathbf{A} - 0\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Por eliminación gaussiana por columnas tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & a-4 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & a-3 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Cuando $a = 3$, tenemos que $\det(\mathbf{A}) = 0$ por lo que $\lambda = 0$ es un autovalor de $\mathbf{A}$ con autovector correspondiente $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\square$

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 1(d)

Puesto que para cualquier matriz cuadrada

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\lambda \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}^2\boldsymbol{v} = \mathbf{A}\boldsymbol{v}\lambda = \boldsymbol{v}\lambda^2,$$

los autovalores de $\mathbf{A}$ al cuadrado son autovalores de $\mathbf{A}^2$ con los mismos autovectores, por lo que $\lambda = 0$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son respectivamente un autovalor y un autovector de $\mathbf{A}^2$.

$\square$

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 1(e)

Si $a = 3$, la tercera fila (columna) es suma de las dos primeras (que evidentemente son independientes), así que en este caso el rango es 2, es decir, la dimensión del espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es 2.

Las ecuaciones paramétricas del espacio columna son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para obtener las ecuaciones implícitas basta con encontrar un vector de $\mathbb{R}^3$ perpendicular a las columnas de la matriz (que son iguales a las filas, por ser la matriz simétrica) y multiplicar por dicho vector ambos lados de las ecuaciones paramétices, para anular la parte de los parámetros.

En el apartado c) ya hemos visto que el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es perpendicular a las filas de $\mathbf{A}$ pero, por ser la matriz simétrica, también es perpendicular a las columnas. Así

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{-x - y + z = 0}$$

Lo mismo obtenemos directamente mediante eliminación gaussiana por columnas:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline x & y & z \end{array}\right] \xrightarrow[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ \hline x & y-x & z-2x \end{array}\right] \xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline x & y-x & z-y-x \end{array}\right]$$

Así, la ecuación implícita de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ es $\{z - y - x = 0$.

$\square$

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 2(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & m & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -n \\ 2 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{(-m)\mathbf{1}+\mathbf{4} \\ (2)\mathbf{1}+\mathbf{5}}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -m & 2-n \\ 2 & 0 & 1 & 3-2m & 2 \\ \hline 1 & -2 & 0 & -m & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{(-2)\mathbf{2}+\mathbf{4} \\ (2)\mathbf{2}+\mathbf{5}}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -m & 2-n \\ 2 & 0 & 1 & 3-2m & 2 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 4-m & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(-2)\mathbf{4}+\mathbf{5}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[\mathbf{3}\rightleftharpoons\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & 0 & 2-n \\ 2 & 0 & 3-2m & 1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 4-m & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Cuando $m=0$ el rango es 3, en cualquier otro caso es 4.

□

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 2(b)

Si $m \neq 0$ es sistema es compatible determinado $(\operatorname{rg}(\mathbf{A}) = 4)$.
Si $m=0$, se presentan dos casos posibles:

- Si $n \neq 2$ el sistema es incompatible
- Si $n = 2$ el sistema es compatible pero indeterminado.

□

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 2(c)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&0&-2\\ 0&1&-1&2&-2\\ 1&2&0&0&-2\\ 2&4&1&3&-2\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\(2)\mathbf{1}+\mathbf{5}}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&1&-1&2&-2\\ 1&0&0&0&0\\ 2&0&1&3&2\\ \hline 1&-2&0&0&2\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\(-2)\mathbf{2}+\mathbf{4}\\(2)\mathbf{2}+\mathbf{5}}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 2&0&1&3&2\\ \hline 1&-2&-2&4&-2\\ 0&1&1&-2&2\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{4}]\\(-2)\mathbf{3}+\mathbf{5}}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 2&0&1&0&0\\ \hline 1&-2&-2&10&2\\ 0&1&1&-5&0\\ 0&0&1&-3&-2\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

En este caso el conjunto de soluciones es $\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2\\0\\-2\\0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 10\\-5\\-3\\1 \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R} \right\}$.

□

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 2(d)

Puesto que $\mathbf{A}$ tiene rango tres o más, en ningun caso el conjunto de soluciones tiene dimensión 2.

□

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 2(e)

$$\begin{vmatrix} 1&2&0&m\\ 0&1&-1&2\\ 1&2&0&0\\ 2&4&1&3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&-1&2\\ 2&0&0\\ 4&1&3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2&0&m\\ 1&-1&2\\ 4&1&3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2&0&m\\ 1&-1&2\\ 2&0&0 \end{vmatrix} = (10) + (5m-10) - 2(2m) = m.$$

□

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 3(a)

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & -\boldsymbol{b}\\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&-2&-2\\ 0&3&0&-3\\ -2&0&6&-1\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}\\(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&0\\ 0&3&0&0\\ -2&0&2&-5\\ \hline 1&0&2&2\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(5/2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&0\\ 0&3&0&0\\ -2&0&2&0\\ \hline 1&0&2&7\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&5/2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{L} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{E} & \boldsymbol{x}_p \end{array}\right]$$

El sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución única, $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 7\\1\\5/2 \end{pmatrix}$.

□

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 3(b)

La matriz es simétrica por lo cual es posible la factorización:

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ -2&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&&\\ &3&\\ &&2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&-2\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$$

donde $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{E}^{-1}$ y $\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{U}}^{\intercal}$. Así, la forma cuadrática $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}\boldsymbol{x}$ se puede escribir com

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = 1(x-2z)^2+3y^2+2z^2 > 0;$$

donde $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}$, así que la forma cuadrática es definida positiva ya que todos sus pivotes (1,3,2) son mayores a cero.

$\square$

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 3(c)

$|\mathbf{A}| = 6 \neq 0$ (producto de los pivotes $= |\mathbf{A}|$), por lo cual, cero no puede ser un autovalor de $\mathbf{A}$ (la matriz es de rango completo).

$\square$

(Final Mayo 13/14) Ejercicio 3(d)

$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1&0&-2\\0&3&0\\-2&0&6\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix} = 3\boldsymbol{v}$. Por lo cual, el vector $\boldsymbol{v}$ es un autovector y $\lambda = 3$ es el autovalor asociado.

$\square$

(Final Mayo 13/14) Conjunto de preguntas 1.

Las ecuaciones paramétricas son

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Tan sólo necesitamos anular la parte paramétrica encontrando una base del complemento ortogonal del espacio vectorial generado por los dos vectores de la parte paramétrica. Y multiplicar las ecuaciones paramétricas por dichos vectores de la base. Lo podemos hacer de un sólo golpe mediante eliminación gaussiana por columnas:

$$\left[\begin{array}{cccc}1&1&0&1\\0&0&1&1\\\hline x&y&z&w\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]{\underset{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&0&1&1\\\hline x&(y-x)&z&(w-x)\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}{\tau}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&0&1&0\\\hline x&(y-x)&z&(w-x-z)\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]$$

Por tanto las ecuaciones implícitas (o cartesianas) son

$$\begin{cases}y-x &= 0\\ w-x-z &= 1\end{cases}$$

$\square$

(Final Mayo 13/14) Conjunto de preguntas 2(a)

Verdadero: Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, entonces $|\mathbf{A}^2| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{A}| = |\mathbf{I}| = 1$; así pues, necesariamente $|\mathbf{A}| \neq 0$, y por tanto la matriz $\mathbf{A}$ es de rango completo.

$\square$

(Final Mayo 13/14) Conjunto de preguntas 2(b)

Falso: Un sencillo contraejemplo es la matriz nula, pues $\mathbf{0}^2 = \mathbf{0}$. Pero hay más, por ejemplo $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, o la matriz proyección $\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\intercal}$. Estas matrices se denominan *idempotentes*.

$\square$

(Final Mayo 13/14) Conjunto de preguntas 2(c)

Verdadero: Si $\lambda = 0$ es autovalor de la matriz $\mathbf{A}$, entonces la matriz es singular, es decir, sus columnas no son linealmente independientes, por lo que existen vectores $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tales que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

$\square$

(Final Mayo 13/14) Conjunto de preguntas 3.

Este subespacio es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - z & = 0 \\ 2y + 4z & = 0 \end{cases},$$

que son las ecuaciones implícitas o cartesianas de $\mathcal{W}$. Para encontrar una base necesitamos vectores solución del sistema que sean linealmente independientes:

$$\left[\begin{array}{rrr} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{(3)\mathbf{3}+\mathbf{1}}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & -1 \\ 12 & 10 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(10)\mathbf{1}] \\ \boldsymbol{\tau} \\ [(12)\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & -1 \\ 120 & 120 & 4 \\ \hline 10 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 30 & 24 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 120 & 4 \\ \hline 10 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 \\ 6 & 24 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, una base de $\mathcal{W}$ es: $\left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$.

□

(Final Mayo 13/14) Conjunto de preguntas 4(a)

- $x > 0$
- $xy - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow y > \frac{1}{4x}$

□

(Final Mayo 13/14) Conjunto de preguntas 4(b)

- Para que las columnas sean perpendiculares: $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow x = -y$.
- Para que las columnas tengan norma uno: $\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3/4}$.

□

(Final Mayo 13/14) Conjunto de preguntas 5(a)

Verdadero:

$$\det(\mathbf{A}^n) = \det(\underbrace{\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{\det(\mathbf{A})\cdots\det(\mathbf{A})}_{n \text{ veces}} = \Big(\det(\mathbf{A})\Big)^n = (-1)^n.$$

□

(Final Mayo 13/14) Conjunto de preguntas 5(b)

Verdadero: Si $\mathbf{A}$ fuera idempotente $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$; y consecuentemente $\det(\mathbf{A})^2 = \det(\mathbf{A})$. Pero esto último sólo puede ocurrir si $\det(\mathbf{A})$ es uno o cero.

□

(Final Mayo 13/14) Conjunto de preguntas 5(c)

Verdadero: Cuando la matriz es definida positiva, el primer elemento a_{11} y $\det(\mathbf{A})$ son positivos. Cuando la matriz es definida negativa, el primer elemento a_{11} es negativo, pero $\det(\mathbf{A})$ es positivo. Por tanto, esta matriz no puede ser definida.

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 1(c)

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & a & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ (-2)\mathbf{1}+\mathbf{3} \\ (1)\mathbf{1}+\mathbf{5} \\ (1)\mathbf{1}+\mathbf{6}}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & a+2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ (1)\mathbf{2}+\mathbf{4} \\ (-a-2)\mathbf{2}+\mathbf{5} \\ (1)\mathbf{2}+\mathbf{6}}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -a & 0 \\ \hline 1 & -1 & -3 & -1 & a+3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -a-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 1(a)

Cualquiera de las siguentes respuestas es correcta:

- Si se opera con las columnas, entonces la versión escalonada por columnas es: $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&0\\ 2&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&-a&0 \end{array}\right]$.
- Si se opera con las filas, entonces la versión escalonada por filas sería:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&2&0&-1&1\\ 2&3&3&-1&a&3\\ 1&2&1&-1&1&2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&2&0&-1&1\\ 0&1&-1&-1&a+2&1\\ 0&1&-1&-1&2&1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&2&0&-1&1\\ 0&1&-1&-1&a+2&1\\ 0&0&0&0&-a&0 \end{array}\right]$$

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 1(b)

El sistema es compatible para cualquier valor de a (nótese que $\boldsymbol{b}$ es igual a la segunda columna de $\mathbf{A}$).

Si $a = 0$ el rango de la matriz $\mathbf{A}$ es dos, por tanto el sistema es compatible indeterminado con tres grados de libertad (y el conjunto de soluciones es un hiperplano tridimensional en $\mathbb{R}^5$).

Si $a \neq 0$ el rango de $\mathbf{A}$ es tres, luego el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad (y el conjunto de soluciones es un plano en $\mathbb{R}^5$).

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 1(c)

Cuando $a = 1$ la matriz es de rango tres, y sólo tres variables pueden ser tomadas como endógenas, dependientes o pivote.

(*La siguiente discusión se refiere a la eliminación gaussiana por columnas, pero se puede llegar a las mismas conclusiones mediante eliminación por filas, o empleando sub-determiantes*)

Tras la eliminación gaussiana la última columna resulta tener pivote, y por tanto esta columna es linealmente independiente de las anteriores; así pues, la última variable x_5 es endógena, dependiente o variable pivote (considerémosla como la tercera variable endógena, dependiente o pivote y busquemos las dos primeras...) Ahora consideremos la submatriz con las cuatro primeras columnas de $\mathbf{A}$; cualquiera de las tres primeras puede ser tomada como pivote, pues sus primeras componentes son distintas de cero. Tras el proceso de eliminación empleando cualquiera de las tres primeras columnas como pivote es fácil ver que las segundas componentes de las restantes columnas son distintas de cero, y por tanto cualquiera de ellas puede ser tomada como segunda columna pivote. Así pues, *la única restricción es que x_5 debe ser tomada como variable dependiente, pudiendo elegir de cualquier manera dos de las otras cuatro variables.*

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 1(c)

La dimension es dos, pues sólo hay dos columnas de ceros en la matriz de coeficientes tras la eliminación gaussiana; y es fácil ver que una base del conjunto de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ la forman los dos vectores que aparecen debajo de las citadas columnas de ceros (tras la eliminación por columnas):

$$\text{Base:} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} -3\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 1(c)

Una solución particular aparece (tras la eliminación por columnas) bajo la última columna de ceros correspondiente al vector del lado derecho del sistema; así pues, el conjunto de vectores $\boldsymbol{x}$ que verifica $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es:

$$\left\{ \text{el conjunto de vectores } \boldsymbol{x} \text{ de } \mathbb{R}^5 \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -3\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \text{ para todo } p, q \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 2(a)

La matriz $\mathbf{B}$ es simétrica y por tanto diagonalizable. La matriz $\mathbf{C}$ es triangular superior y por tanto los autovalores son los elementos de la diagonal; como no hay autovalores repetidos esta matriz también es diagonalizable. Falta por analizar la matriz $\mathbf{A}$. Calculando el polinomio característico $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0$ tenemos:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & b\\ 0 & -1-\lambda & -3\\ 0 & 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=0 \quad\to\quad \begin{cases}\lambda=1 & \text{(doble)}\\ \lambda=2\end{cases}.$$

Puesto que tenemos un autovalor doble, la matriz será diagonalizable sólo si el autoespacio asociado es de dimensión dos, es decir, sólo si el rango de la matriz $(\mathbf{C}-\mathbf{I})=\begin{bmatrix}0&2&b\\0&-2&-3\\0&2&3\end{bmatrix}$ es 1. Así pues, $\mathbf{C}$ es diagonalizable sólo si $b=3$ (ya que en tal caso la tercera columna es un múltiplo de la segunda).

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 2(b)

Para poder encontrar una base ortonormal de autovectores la matriz debe ser simétrica, y por tanto esto sólo será posible para la matriz $\mathbf{B}$.

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 2(c)

Los autovalores de la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ son los inversos de los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$, así que los autovalores de $\mathbf{A}^{-1}$ son $\lambda=1$ (doble) y $\lambda=\frac{1}{2}$.

Los autovectores son los mismos y por tanto $\mathbf{A}^{-1}$ es diagonalizable sólo cuando $\mathbf{A}$ también lo es (en el apartado (a) hemos visto que esto sólo es posible cuando $b=3$). Podemos calcular los autovectores de $\mathbf{A}^{-1}$ calculando los de $\mathbf{A}$ (pues son los mismos). Para $\lambda=1$ (doble):

$$\left[\frac{\mathbf{A}-1\mathbf{I}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{ccc}0&2&3\\0&-2&-3\\0&2&3\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[(2)\mathbf{3}]{\substack{\tau\\ [(3)\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc}0&6&6\\0&-6&-6\\0&6&6\\\hline 1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc}0&6&0\\0&-6&0\\0&6&0\\\hline 1&0&0\\0&3&-3\\0&0&2\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc}6&0&0\\-6&0&0\\6&0&0\\\hline 0&1&0\\3&0&-3\\0&0&2\end{array}\right]=\left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right],$$

y para $\lambda=2$:

$$\left[\frac{\mathbf{A}-2\mathbf{I}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{ccc}-1&2&3\\0&-3&-3\\0&2&2\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[(3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]{\substack{\tau\\ [(2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc}-1&0&0\\0&-3&-3\\0&2&2\\\hline 1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc}-1&0&0\\0&-3&0\\0&2&0\\\hline 1&2&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{array}\right]=\left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right].$$

Por tanto la matriz diagonal asociada es $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/2\end{bmatrix}$, y una base de autovectores es

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 2(d)

Podemos calcular la inversa a partir de lo anterior calculando la inversa de la matriz $\mathbf{S}$ cuyas columnas son los autovectores de $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\left[\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{ccc}1&0&1\\0&-3&-1\\0&2&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-3&-1\\0&2&1\\\hline 1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\tau\\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&-3\\0&1&2\\\hline 1&-1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[(-1)\mathbf{2}]{\substack{\tau\\ [(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&-1\\\hline 1&1&3\\0&-0&1\\0&-1&-3\end{array}\right]\xrightarrow[(-1)\mathbf{3}]{\substack{\tau\\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 1&-2&-3\\0&-1&-1\\0&2&3\end{array}\right]=\left[\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{S}^{-1}}\right],$$

y relizando a continuación el producto matricial

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-3&-1\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&-1&-1\\0&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-3/2\\0&2&3/2\\0&-1&-1/2\end{bmatrix}.$$

O podemos hacerlo directamente a partir de la matriz A:

$$\left[\begin{array}{rrr}1&2&3\\0&-1&-3\\0&2&4\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{rrr}1&0&0\\0&-1&-3\\0&2&4\\\hline 1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-3)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{rrr}1&0&0\\0&-1&0\\0&2&-2\\\hline 1&-2&3\\0&1&-3\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{rrr}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\\\hline 1&1&3\\0&-2&-3\\0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}]\\(-1/2)\mathbf{3}}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{rrr}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 1&-1&-3/2\\0&2&3/2\\0&-1&-1/2\end{array}\right].$$

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 3(a)

En primer lugar, $m=3$ ya que $\mathsf{A}\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$. Además, $\mathsf{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ tiene *una* solución $\implies \mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right)=\{0\}$, y entonces $r=n$ (donde r es el rango de la matriz).

Pero $\mathsf{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ no tiene solución $\implies \mathcal{C}\left(\mathsf{A}\right)\neq\mathbb{R}^3$, y entonces $r<m=3$.

Hay dos posibilidades : $\begin{array}{c}m=3\\r=n=1\end{array}$ o $\begin{array}{c}m=3\\r=n=2\end{array}$.

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 3(b)

Puesto que $\mathcal{N}\left(\mathsf{A}\right)=\{0\}$ (porque $\mathsf{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ tiene 1 solución), hay una única solución a $\mathsf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, que necesariamente es $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. (Puede ser bien $\boldsymbol{x}=(0)$ o bien $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ dependiendo de si $n=1$ o $n=2$.)

□

(Final Julio 12/13) Ejercicio 3(c)

A puede ser $\begin{bmatrix}0\\a\\0\end{bmatrix}$ con $a\neq 0$; o bien $\begin{bmatrix}0&b\\a&c\\0&d\end{bmatrix}$ ó $\begin{bmatrix}b&0\\c&a\\d&0\end{bmatrix}$, con $a\neq 0$ y $b\neq d$, y ambas columnas linealmente independientes.

□

(Final Julio 12/13) Conjunto de preguntas 1(a)

$\det\mathsf{B}=-5$.

□

(Final Julio 12/13) Conjunto de preguntas 1(b)

Puesto que la última fila es suma de las dos primeras $|\mathsf{C}|=0$, y por tanto sabemos que un autovalor de C es $\lambda=0$.

□

(Final Julio 12/13) Conjunto de preguntas 2(a)

Si, por ejemplo, tomamos como vectores directores del plano $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1,-1,1)$ y $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=(0,0,1)$, y como punto en el plano el vector $\boldsymbol{a}$; las ecuaciones paramétricas del plano son:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

□

(Final Julio 12/13) Conjunto de preguntas 2(b)

$$\left[\,\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}\;\middle|\;\mathsf{I}\,\right]^{\intercal}=\left[\begin{array}{rrr}-1&-1&-1\\0&0&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{rrr}-1&0&0\\0&0&1\\\hline 1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right],$$

así que tenemos que los vectores perpendiculares al plano son los múltiplos de $\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}$.

□

(Final Julio 12/13) Conjunto de preguntas 3(a)

Para que el subespacio generado tenga dimensión 1 el rango de la matriz $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 1 & 1\\ 1 & c & 1\end{bmatrix}$ también debe ser 1. Realizando la eliminación gaussiana por columnas (de izquierda a derecha) tenemos

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 1 & 1\\ 1 & c & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]\\(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ a-1 & 0 & 1\\ 0 & c-1 & 1\end{bmatrix},$$

luego, $a = c = 1$.

□

(Final Julio 12/13) Conjunto de preguntas 3(b)

Para que los vectores generen $\mathbb{R}^3$ deben ser linealmente independientes, por tanto tras la eliminación deberíamos tener tres pivotes, es decir $a \neq 1$ y $c \neq 1$.

También podemos verlo forzando a que el determinante sea distinto de cero, es decir

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 1 & 1\\ 1 & c & 1\end{vmatrix} = ac - c - a + 1 = a(c-1) - c + 1 = (c-1)(a-1) \neq 0,$$

luego $a \neq 1, c \neq 1$.

□

(Final Julio 12/13) Conjunto de preguntas 4(a)

Puesto que las raíces de $p(\lambda)$ son cero y dos, la matriz D puede ser $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, y por tanto

$$\mathsf{D}^2 - 2\mathsf{D} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Si se supone $\mathsf{D} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ el resultado es idéntico.

□

(Final Julio 12/13) Conjunto de preguntas 4(b)

Puesto que la matriz A es diagonalizable (no hay autovalores repetidos), podemos emplear la factorización $\mathsf{A} = \mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^{-1}$:

$$\mathsf{A}^2 - 2\mathsf{A} = \mathsf{S}\mathsf{D}^2\mathsf{S}^{-1} - 2\mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^{-1} = \mathsf{S}(\mathsf{D}^2 - 2\mathsf{D})\mathsf{S}^{-1} = \mathsf{S}\mathbf{0}\mathsf{S}^{-1} = \mathbf{0}.$$

□

(Final Julio 12/13) Conjunto de preguntas 5(a)

$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$

□

(Final Julio 12/13) Conjunto de preguntas 5(b)

Los menores dominantes son: $D_1 = 1$, $D_2 = 2$ y $D_3 = 0$. Por tanto es semi-definida positiva.

□

(Final Mayo 12/13) Ejercicio 1(a)

Mediante eliminación gaussiana por columnas tenemos:

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathsf{A} & -\boldsymbol{b}\\ \hline \mathsf{I} & \mathbf{0}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c}3 & -5 & 1 & 3\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -5 & 3 & 3\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}\\(-3)\mathbf{1}+\mathbf{4}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 5 & -3 & -3\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\mathsf{L} & \mathbf{0}\\ \hline \mathsf{E} & \boldsymbol{x}_p\end{array}\right].$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_p + b\cdot\boldsymbol{v} + c\cdot\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 5\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -3\end{pmatrix}, \qquad \text{para todo } b, c \in \mathbb{R}.$$

$\square$

(Final Mayo 12/13) Ejercicio 1(b)

Puesto que la recta está contenida en el plano, el vector $\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$ debe ser combinación lineal de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$. Así pues, resolviendo $\boldsymbol{v}x+\boldsymbol{w}y=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$ tenemos:

$$\left[\begin{array}{c|c}[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}] & -\boldsymbol{b}\\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}0&1&-1\\1&0&1\\5&-3&-a\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cc|c}0&1&0\\1&0&0\\5&-3&-a-8\\ \hline 1&0&-1\\0&1&1\end{array}\right]$$

Este sistema sólo tiene solución si $-a-8=0$; por tanto $\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ (y por tanto la recta r está contenida en Π) sólo si $\boxed{a=-8}$.

$\square$

(Final Mayo 12/13) Ejercicio 1(c)

Aplicando eliminación gaussiana por columnas obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc}1&-1&-8\\ \hline x&y&z\\ \hline 0&0&-3\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\(8)\mathbf{1}+\mathbf{3}}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\ \hline x&x+y&8x+z\\ \hline 0&0&-3\end{array}\right].$$

Así pues, las ecuaciones implícitas de la recta son:

$$\begin{cases}x+y &=0\\ 8x+z &=-3\end{cases}.$$

$\square$

(Final Mayo 12/13) Ejercicio 2(a)

Por una parte

$$\begin{bmatrix}2&6\\a&b\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad 3\cdot2+6\cdot1=\lambda_1\cdot3\quad\Rightarrow\quad 12=\lambda_1\cdot3\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=4;$$

y entonces $3a+b=4$.

Por otra parte

$$\begin{bmatrix}2&6\\a&b\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad 2\cdot2+6\cdot1=\lambda_1\cdot2\quad\Rightarrow\quad 10=\lambda_1\cdot2\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=5$$

y entonces $2a+b=5$.

Así pues, $\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$; y por tanto

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}&-\boldsymbol{b}\\ \hline \mathbf{I}&\mathbf{0}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}3&1&-4\\2&1&-5\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{\mathbf{P_{12}}}\left[\begin{array}{cc|c}1&3&-4\\1&2&-5\\ \hline 0&1&0\\1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\1&-1&-1\\ \hline 0&1&0\\1&-3&4\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\1&-1&0\\ \hline 0&1&-1\\1&-3&7\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{L}&\mathbf{0}\\ \hline \mathbf{E}&\boldsymbol{x}_p\end{array}\right].$$

Es decir, $a=-1$ y $b=7$, por lo que la matriz es $\begin{bmatrix}2&6\\-1&7\end{bmatrix}$.

$\square$

(Final Mayo 12/13) Ejercicio 2(b)

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-6\\1&-2\end{bmatrix}.$$

Por otra parte

$$\mathbf{B}^{10} = \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & 0\end{bmatrix}^{10}\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{10} & \\ & 0^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

□

(Final Mayo 12/13) Ejercicio 2(c)

Puesto que dos autovalores son iguales a 1, la matriz $\mathbf{C}$ es diagonalizable si la dimensión del espacio de soluciones del sistema homogéneo $(\mathbf{C}-\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es dos (es decir, sólo si la matriz $(\mathbf{C}-\mathbf{I})$ es de rango uno). Es sencillo ver que las dos primeras columnas de

$$\mathbf{C}-\mathbf{I} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\1 & a & 0\end{bmatrix}$$

son linealmente dependientes (y por tanto la matriz $\mathbf{C}$ es diagonalizable) sólo si $a = -1$.

□

(Final Mayo 12/13) Ejercicio 3(a)

Puesto que estamos en $\mathbb{R}^3$, que es un espacio tridimensional, tan sólo necesitamos demostrar que los tres vectores son linealmente independientes; lo que es equivalente a mostrar que la matriz de orden tres, cuyas columnas son los tres vectores, es de rango completo. Comprobémoslo mediante eliminación gaussiana por columnas:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\-2 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{[(-2)1+3]}]{\tau} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 2 & 4\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{[(-2)2+3]}]{\tau} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 2 & 0\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}.$$

Puesto que hemos obtenido tres pivotes, las columnas de la matriz son linealmente independientes.

□

(Final Mayo 12/13) Ejercicio 3(b)

Podemos reescribir las tres ecuaciones del enunciado como un producto de matrices, de manera que tenemos:

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\-2 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\4 & 0 & 10\end{bmatrix}.$$

Así, si tomamos

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\4 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\-2 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

tenemos $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$; donde $\mathbf{B}$ es la matriz del apartado anterior, y por tanto invertible.

□

(Final Mayo 12/13) Ejercicio 3(c)

Puesto que $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$, tenemos

$$\mathbf{A}^{\intercal} = \left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)^{-1}\mathbf{C}^{\intercal}.$$

Puesto que si $\mathbf{B}$ es invertible, $\mathbf{B}^{\intercal}$ también lo es (y hemos denotado a la inversa con $\left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)^{-1}$).

Así pues, multiplicando por $\left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)^{-1}$ y operando obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)^{-1}\mathbf{C}^{\intercal}\boldsymbol{x} &= \mathbf{0}\\ \mathbf{B}^{\intercal}\left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)^{-1}\mathbf{C}^{\intercal}\boldsymbol{x} &= \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{0}\\ \mathbf{C}^{\intercal}\boldsymbol{x} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{\intercal}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)^{-1}\mathbf{C}^{\intercal}\boldsymbol{x} &= \left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)^{-1}\mathbf{0}\\ \mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{x} &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

por lo que el conjunto de soluciones de $\mathbf{A}^\intercal \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es igual al conjunto de soluciones de $\mathbf{C}^\intercal \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Esto significa que para conocer las soluciones de $\mathbf{A}^\intercal \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ nos basta con encontrar las soluciones del sistema $\mathbf{C}^\intercal \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 5 & 10 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & 0 \\ \hline 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]$$

por lo que una base de dicho espacio es

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(cualquier otro múltiplo de $\boldsymbol{s}_1$ distinto de $\mathbf{0}$ también sería una base).

□

(Final Mayo 12/13) Ejercicio 3(d)

Puesto que $\mathbf{A}$ multiplicada por un vector de orden 3 es un vector de orden 2, necesariamente tenemos que $m = 2$ y $n = 3$. Además, del apartado anterior sabemos que la dimensión del conjunto de soluciones a $\mathbf{A}^\intercal \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es uno, que debe ser igual a $m - r$, por lo que el rango es $r = 1$.

□

(Final Mayo 12/13) Conjunto de preguntas 1(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-15 + 18) = 9$$

□

(Final Mayo 12/13) Conjunto de preguntas 1(b)

Puesto que $\det \mathbf{A} = 9$,

$$x_3 = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & 3 & \mathbf{1} & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 6 \\ 1 & 2 & \mathbf{1} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-6}{9} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}(3 + 2 - 2) = -2$$

□

(Final Mayo 12/13) Conjunto de preguntas 2(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

□

(Final Mayo 12/13) Conjunto de preguntas 2(b)

Hay varias formas alternativas de demostrarlo, por ejemplo:

- **Criterio de los determinantes:**

$$1 > 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

- **Criterio de los pivotes:** Puesto que evidentemente el primer pivote es 1, y el producto de los dos primeros pivotes es igual al subdeterminante $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$, el segundo pivote es 2. Y puesto que producto de los tres pivotes es igual a $\det \mathbf{A}$, el último pivote es 1. Pero comprovémoslo mediante la eliminación Guassiana.

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(\mathbf{1})\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ (-\mathbf{2})\mathbf{1}+\mathbf{3}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(\mathbf{1})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- **Completando el cuadrado de la forma cuadrática:** del criterio anterior, es evidente que podemos factorizar $\mathbf{A}$ de la forma $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{L}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}$, donde $\dot{\mathbf{L}}$ es la traspuesta de $\dot{\mathbf{U}}$ por ser $\mathbf{A}$ simetrica. De los pasos intermedios en la eliminación sabemos que $\dot{\mathbf{U}}$ es

$$\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1. \end{bmatrix}$$

Así pues, $f(x,y,z) = 1(x-y+2z)^2 + 2(y-z)^2 + 1z^2 > 0$.

- **Verificando el signo de los autovalores de A:** podríamos haber intentado calcular los autovalores encontrando las raíces del polinomio característico

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

pero en este caso resulta un polinomio de grado 3 que no es fácil de resolver (sin ordenador). Este caso es habitual, por lo que en general es mejor emplear cualquiera de los otros criterios si la matriz es de orden mayor a dos.

□

(Final Mayo 12/13) Conjunto de preguntas 3(a)

Puesto que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices ortogonales entonces $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{\intercal}$, y por tanto $\left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)^{-1} = \mathbf{B}$, tenemos que

$$\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})^{\intercal} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{I}.$$

□

(Final Mayo 12/13) Conjunto de preguntas 3(b)

La matriz $\mathbf{C}$ es una matriz cuadrada de orden m:

$$\mathbf{C} = \underset{m\times n}{\mathbf{B}}\ \underset{n\times n}{(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B})^{-1}}\ \underset{n\times m}{\mathbf{B}^{\intercal}}.$$

Y la matriz $\mathbf{C}^2$ es: $\mathbf{C}^2 = \mathbf{B}\underbrace{(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\intercal}\cdot\mathbf{B}}_{\mathbf{I}}(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\intercal} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\intercal} = \mathbf{C}$

□

(Final Mayo 12/13) Conjunto de preguntas 3(c)

$||\boldsymbol{v}||^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = 4+1+0+16+4 = 25$ así que tomamos $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}/||\boldsymbol{v}|| = (2/5, -1/5, 0.4/5, -2/5)$.

□

(Final Mayo 12/13) Conjunto de preguntas 3(d)

El ejemplo más sencillo es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

(Final Mayo 12/13) Conjunto de preguntas 4(a)

Los dos vectores satisfacen la ecuación, luego pertenecen al subespacio de soluciones, además son *linealmente independientes*. Como ese subespacio tiene dimensión 2, el conjunto B es una base de dicho subespacio.

□

(Final Mayo 12/13) Conjunto de preguntas 4(b)

Falso. La matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ tiene autovalor repetido a, y ya es diagonal (y por tanto diagonalizable).

□

(Final Septiembre 11/12) Ejercicio 1(a)

Por una parte, $\mathcal{V}_1$ es de dimensión 2 (que es la dimensión del conjunto de soluciones de la ecuación homogénea indicado), es fácil ver que una base de dicho espacio es:

$$\text{una base de } \mathcal{V}_1 \text{ es } \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Por otra parte, $\mathcal{V}_{1/2}$ es de dimensión 1 (que es la dimensión del conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo indicado), es fácil ver que una base de dicho espacio es:

$$\text{una base de } \mathcal{V}_{1/2} \text{ es } \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Así pues,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix};$$

□

(Final Septiembre 11/12) Ejercicio 1(b)

Primero necesitamos calcular $\mathbf{P}^{-1}$:

$$\left[\mathbf{P}|\mathbf{I}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right] = \left[\mathbf{I}|\mathbf{P}^{-1}\right],$$

es decir,

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

□

(Final Septiembre 11/12) Ejercicio 1(c)

$\mathbf{M}$ es una matriz de ceros, ya que:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} =& 2\mathbf{A}^4 - 7\mathbf{A}^3 + 9\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + \mathbf{I}\\ =& 2\mathbf{P}\mathbf{D}^4\mathbf{P}^{-1} - 7\mathbf{P}\mathbf{D}^3\mathbf{P}^{-1} + 9\mathbf{P}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1} - 5\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{P}^{-1}\\ =& \mathbf{P}\left(2\mathbf{D}^4 - 7\mathbf{D}^3 + 9\mathbf{D}^2 - 5\mathbf{D} + \mathbf{I}\right)\mathbf{P}^{-1}\\ =& \mathbf{P}\mathbf{0}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

□

(Final Septiembre 11/12) Ejercicio 2(a)

Todo lo que podemos decir es que rango $\mathbf{A} \leq$ rango $[\mathbf{A}\,\mathbf{B}]$. ($\mathbf{A}$ puede tener r columnas pivote, y esas también serán columnas pivote de $[\mathbf{A}\,\mathbf{B}]$; pero podría haber nuevas columnas pivote entre las de $\mathbf{B}$).

□

(Final Septiembre 11/12) Ejercicio 2(b)

En este caso rango $\mathbf{A} =$ rango $[\mathbf{A}\;\mathbf{A}^2]$. (Cada columna de $\mathbf{A}^2$ es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$. Por ejemplo, si llamamos $\mathbf{A}_{|1}$ a la primera columna de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_{|1}$ es la primera columna de $\mathbf{A}^2$. Así que no puede haber nuevas columnas pivote (nuevas columnas linealmente independientes de las de $\mathbf{A}$) en el bloque (la parte) "$\mathbf{A}^2$" de la matriz por bloques $[\mathbf{A}\;\mathbf{A}^2]$).

□

(Final Septiembre 11/12) Ejercicio 2(c)

El conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene, como siempre, dimensión $n - r$ (donde n es el número de columnas de $\mathbf{A}$ y r su rango). Y la matriz $[\mathbf{A}\;\mathbf{A}]$ sólo tiene r columnas linealmente independientes

(r columnas pivote) — ya que las n columnas que añadimos están todas repetidas. Así pues, $[\mathbf{A}\ \mathbf{A}]$ es una matriz m por $2n$ de rango r, y por tanto, la dimensión del conjunto de soluciones del sistema $[\mathbf{A}\ \mathbf{A}]\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es $2n - r$.

□

(Final Septiembre 11/12) Ejercicio 3(a)

Vamos a resolverlo con el método de eliminación de Gauss pero operando por columnas:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & -\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a & -b \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ (-1)\mathbf{1}+\mathbf{3}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & a-2 & -b \\ \hline 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(3)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & a-2 & -b+6 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & a-2 & -b+4 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema es incompatible cuando: $a = 2$ y $b \neq 4$; ya que no es posible transformar la cuarta columna (la del vector del lado derecho $\boldsymbol{b}$) en una columna de ceros si la tercera columna es nula.

□

(Final Septiembre 11/12) Ejercicio 3(b)

La dimensión del espacio de soluciones coincide con el número de columnas de ceros que hemos logrado encontrar en la parte de la matriz de coeficientes ($\mathbf{A}$) tras la eliminación.

Si $a \neq 2$ entonces no hay ninguna columna de ceros y por tanto la dimensión del espacio de soluciones es 0. Cuando $a = 2$ sólo hay una columna nula y la dimensión del espacio de soluciones es 1. En este ejemplo no puede haber dos columnas de ceros; así pues el conjunto de soluciones nunca puede ser un plano.

□

(Final Septiembre 11/12) Ejercicio 3(c)

Cuando $a = 2$ el sistema es compatible sólo si $b = 4$ (véase la respuesta al primer apartado). Entonces la dimensión del conjunto de soluciones del sistema homogéneo es uno, y por tanto el conjunto de soluciones es una recta.

Puesto que en este caso la primera y la última columnas de $\mathbf{A}$ son iguales, la variable libre (o exógena) puede ser indistintamente la primera o la última.

Cuando $a = 2$ la tercera columna de la parte de la matriz de coeficientes es una columna de ceros.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4+4 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

el vector que aparece debajo, es una base del espacio solución del *sistema homogéneo*.

$$\text{base} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pero el sistema que estamos resolviendo *no es homogéneo* ($\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$), y por tanto este conjunto de soluciones no es una recta que pasa por el origen (no es un espacio vectorial); así que no podemos encontrar una base para el conjunto de soluciones de este sistema con $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$.

□

(Final Septiembre 11/12) Ejercicio 3(d)

En este caso, tras la eliminación gausiana, obtenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Este sistema es compatible (hemos logrado hacer una columna de ceros en la parte del vector del lado derecho, $\boldsymbol{b}$) y determinado (no hay columnas de ceros en la parte de la matriz de coeficientes).

El vector solución aparece debajo del vector de ceros de la derecha.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

es decir, $x = 2$, $y = 1$, y $z = 0$.

Este vector pertenece al conjunto de soluciones del apartado anterior (¡nótese como ya aparecía este vector en el apartado anterior!).

□

(Final Septiembre 11/12) Conjunto de preguntas 1(a)

Necesitamos encontrar un vector en la misma dirección de la recta (un vector del espacio nulo de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones); la diferencia entre los dos puntos nos da dicho vector director:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, una representación paramétrica de la recta es la descripción de la solución general de un sistema de ecuaciones; es decir, una solución particular (uno de los puntos) más cualquier múltiplo del vector del espacio nulo (del vector director)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_P + a\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = 3 - a \end{cases}.$$

□

(Final Septiembre 11/12) Conjunto de preguntas 1(b)

Necesitamos encontrar un vector perpendicular a $\boldsymbol{v}$, de manera que premultiplicando $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_P + a\boldsymbol{v}$ por dicho vector perpendicular, eliminemos la parte paramétrica de dicha expresión.

Una forma de encontrar el vector perpendicular es construir la matriz ampliada $\left[\boldsymbol{v}|\mathbf{I}\right]$ y tratar de hacer ceros en las filas del vector $\boldsymbol{v}$ mediante eliminación gaussiana (por filas). Por cada fila de ceros obtenida en la parte de "$\boldsymbol{v}$", tendremos un vector fila perpendicular en la parte de "$\mathbf{I}$":

$$\left[\begin{array}{c|cc} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

así pues, el vector $\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$ es perpendicular el vector director $\boldsymbol{v}$, por lo que premultiplicando la ecuación parametrica obtendremos la implícita

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 3 \end{cases}.$$

□

(Final Septiembre 11/12) Conjunto de preguntas 2.

Puesto que el determinante es negativo independientemente del valor de b:

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ b & 2 & b \\ 3 & b & 4 \end{vmatrix} = 16 + 6b^2 - 18 - 6b^2 = -2 \quad < 0;$$

esta matriz nunca puede tener sus tres autovalores positivos.

□

(Final Septiembre 11/12) Conjunto de preguntas 3(a)
$\det \mathbf{A}^\intercal\mathbf{A} = \det \underset{3\times 3}{\mathbf{I}} = 1$

□

(Final Septiembre 11/12) Conjunto de preguntas 3(b)
$\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ es de orden 5 por 5 pero su rango es sólo 3 (ya que es una matriz diagonal con tres unos y dos ceros en la diagonal principal); por tanto $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ es singular y $\det \mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal = 0$.
Otro razonamiento para ver que la matriz es singular es:

1. La matriz $\mathbf{A}^\intercal$ de orden 3 por 5 tiene tres filas linealmente independientes (¡ortogonales!) y la dimensión del espacio de soluciones del sistema homogeneo $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ es $5 - r = 5 - 3 = 2$.
2. Entonces $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ tiene columnas dependientes ya que $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}) = 0$ para algún vector $\boldsymbol{y}$ no nulo del conjunto de soluciones del sistema homogeneo $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.
3. Por tanto, $\det \mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal = 0$.

□

(Final Septiembre 11/12) Conjunto de preguntas 3(c)

$$\det \mathbf{A}\,\underbrace{(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}}_{\mathbf{I}}\,\mathbf{A}^\intercal = \det \mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal = 0.$$

□

(Final Septiembre 11/12) Conjunto de preguntas 4.
$\det(\mathbf{A}) = 5x^2 - 6x + 0 - 9x + 10x - 0 = 5x^2 - 5x = 5x(x-1) = 0$. Por tanto, $x = 0, x = 1$.

□

(Final Septiembre 11/12) Conjunto de preguntas 5.

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 10\boldsymbol{v}.$$

□

(Final Septiembre 11/12) Conjunto de preguntas 6(a)

$$(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{B}^\intercal)^{-1} = \Big((\mathbf{A}\mathbf{B})^\intercal\Big)^{-1} = \Big((\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}\Big)^\intercal = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1})^\intercal.$$

Es verdadero.

□

(Final Septiembre 11/12) Conjunto de preguntas 6(b)
Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son además ortonormales entonces $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{I}$ y $\mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal = \mathbf{I}$; así pues,

$$\mathbf{A}\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{B})^\intercal = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{I}.$$

Es verdadero.

□

(Final Junio 11/12) Ejercicio 1(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango es 3; por tanto las columnas son linealmente dependientes.

□

(Final Junio 11/12) Ejercicio 1(b)

$$\mathcal{V} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{tales que} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ésta es una representación paramétrica. Una representación implícita sería el conjunto de soluciones del siguiente sistema homogeneo:

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad -x_2+x_4=0.$$

La dimensión de este sub-espacio de $\mathbb{R}^4$ es tres, puesto que las tres primeras columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes. Nada cambiaría incluyendo la cuarta columna, ya que es suma de las tres primeras.

□

(Final Junio 11/12) Ejercicio 1(c)

En el primer apartado hemos calculado la forma escalonada reducida, de donde es fácil ver que el conjunto de soluciones es:

$$\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \quad \text{tales que} \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{para todo} \quad a\in\mathbb{R}\right\}.$$

Hay una variables exógena (o libre). Podemos elegir como variable libre cualquiera de ellas. La dimensión es uno.

□

(Final Junio 11/12) Ejercicio 2(a)

Puesto que la matriz $\mathbf{A}$ es simétrica (y por tanto también $\mathbf{A}^{-1}$), ambas son siempre diagonalizables[2] (aunque $\mathbf{A}^{-1}$ no existe si $a=0$).

□

(Final Junio 11/12) Ejercicio 2(b)

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(1-\lambda)-(1-\lambda)=0 \quad\longrightarrow\quad \begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=1\\ \lambda=-1\end{cases}$$

Para $\lambda=1$

$$\mathbf{A}-\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}; \qquad \text{Base ortonormal:} \quad \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$$

Para $\lambda=-1$

$$\mathbf{A}-\mathbf{I}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}; \qquad \text{Base ortonormal:} \quad \left\{\begin{pmatrix}0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$$

Por tanto

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

□

(Final Junio 11/12) Ejercicio 2(b)

Respuesta idéntica al apartado anterior, ya que si $\mathbf{A}=\mathbf{SDS}^{-1}$ entonces $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{SD}^{-1}\mathbf{S}^{-1}$; es decir, misma matriz de autovectores $\mathbf{S}$.

Además, en este caso tan particular $\lambda=\lambda^{-1}$ (¡también los mismos autovalores!). Nótese que $\mathbf{AA}=\mathbf{I}$, así que $\boxed{\mathbf{A}=\mathbf{A}^{-1}}$ (puesto que $\mathbf{A}$ es una matriz permutación simétrica cuando $a=1$ y $b=0$).

□

(Final Junio 11/12) Ejercicio 2(b)

[2] Si $\mathbf{A}=\mathbf{A}^\intercal$ y $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$ entonces $\mathbf{AB}=\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}^\intercal=\mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}=\mathbf{I}$; por tanto $\mathbf{B}^\intercal=\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}$, es decir, la inversa también es simétrica.

$$\mathbf{A}\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}; \qquad \text{así pues} \qquad \mathbf{A}^{10}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$$

□

(Final Junio 11/12) Ejercicio 3(a)

Sólo serían dependientes si uno de los vectores fuera un múltiplo del otro, que no es el caso; así pues, son linealmente independientes. También se puede realizar la eliminación Gaussiana sobre la matriz: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1, & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$ comprobando fácilmente que el rango es 2.

Por otra parte

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 12,$$

por lo que no son perpendiculares entre si.

□

(Final Junio 11/12) Ejercicio 3(b)

No, el primer y último vectores son iguales.

□

(Final Junio 11/12) Ejercicio 3(c)

El plano está descrito por el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x4 \end{pmatrix} = 0$$

y los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_3$ deben ser solución a dicho sistema para que puedan ser una base del espacio compuesto por todas las soluciones soluciones de este sistema homogeneo; pero

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0.$$

Únicamente $\boldsymbol{x}_1$ es solución al sistema. Así pues, estos tres vectores no son una base del espacio de soluciones.

□

(Final Junio 11/12) Ejercicio 3(d)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & q \\ 4 & 2 & 12 & 3 \\ 6 & 2 & 10 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & 2 & 16 & 3-4q \\ 0 & 2 & 16 & 1-6q \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & 2 & 16 & 3-4q \\ 0 & 0 & 0 & -2-2q \end{bmatrix}.$$

Por tanto, estos vectores no generan $\mathbb{R}^3$ si $q = -1$ (rango 2).

□

(Final Junio 11/12) Conjunto de preguntas 1(a)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1; \qquad \Rightarrow \qquad \det \mathbf{A}^{-1} = 1.$$

□

(Final Junio 11/12) Conjunto de preguntas 1(b)

El elemento $(1,2)$ de $\mathbf{A}^{-1}$ es $\frac{\text{cof}(\mathbf{A})_{2,1}}{\det \mathbf{A}}$; es decir

$$\frac{\text{cof}(\mathbf{A})_{2,1}}{\det \mathbf{A}} = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{1} = 5.$$

□

(Final Junio 11/12) Conjunto de preguntas 2(a)

Recordando la definición de autovalores y autovectores ($\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$), tenemos que los autovalores son $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 3$; y que $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ son autovectores correspondientes respectivamente a dichos autovalores.

□

(Final Junio 11/12) Conjunto de preguntas 2(b)

La matriz es diagonalizable, ya que los autovectores $\boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_3$, correspondientes al autovalor 3, son linealmente independientes.

La matriz es invertible, ya que sus autovalores son distintos de cero.

□

(Final Junio 11/12) Conjunto de preguntas 2(c)

$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 54$

$\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 12$

□

(Final Junio 11/12) Conjunto de preguntas 2(d)

Si, ya que los tres autovectores son ortogonales.

□

(Final Junio 11/12) Conjunto de preguntas 3.

Puesto que el primer elemento de la matriz asociada es positivo, esta matriz nunca podrá ser definida negativa.

□

(Final Junio 11/12) Conjunto de preguntas 4(a)

Verdadero, puesto que el producto de los autovalores es igual al determinante, y por tanto en tal caso es cero.

□

(Final Junio 11/12) Conjunto de preguntas 4(b)

Verdadero, puesto que si -3 es un autovalor, entonces la matriz cuadrada $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})$ es singular ($(\det(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) = 0)$.

□

(Final Junio 11/12) Conjunto de preguntas 4(c)

Falso. Si $\lambda = 0$ es un autovalor, entonces $\mathbf{A}$ es singular, y por tanto, $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones.

□

(Final Septiembre 10/11) Ejercicio 1(a)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix}1&1&0&1\\1&a&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&a&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&a&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{vmatrix} = -a;$$

por lo que el determinante $|\mathbf{A}|$ es distinto de cero si y sólo si $a \neq 0$.

□

(Final Septiembre 10/11) Ejercicio 1(b)

No, ya que:

$$|1| = 1; \qquad \begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{vmatrix} = -1,$$

cuando todos deberían ser positivos. Por tanto la matriz es no definida.

□

(Final Septiembre 10/11) Ejercicio 1(c)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&1&1&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&-1&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&-1&0&-1&-1&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&-1&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&-2&-2&1&0&1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&-1&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&-1/2&0&-1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&0&0&1/2&0&1/2\\ 0&1&0&0&0&1/2&0&-1/2\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&-1/2&0&-1/2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&1/2&0&-1/2\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&-1/2&0&-1/2 \end{array}\right)$$

Así pues,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&1/2&0&-1/2\\ 0&0&1&0\\ 1&-1/2&0&-1/2 \end{pmatrix}$$

□

(Final Septiembre 10/11) Ejercicio 1(d)

De los pasos tomados en el primer apartado es sencillo ver que, cuando $a = 0$, el rango de $\mathbf{A}$ es tres; y por tanto hay tres variables endógenas (o variables pivote). Así pues, tan sólo una variable puede ser exógena (o libre).

Puesto que cuando $a = 0$ las columnas segunda y cuarta son iguales (y por tanto dependientes), podemos tomar como variable libre (o exógena), o bien la segunda, o bien la cuarta.

□

(Final Septiembre 10/11) Ejercicio 2(a)

Puesto que la matriz es triangular, los autovalores son los elementos de la diagonal principal ($\lambda = 4$ y $\lambda = 2$, ambos con multiplicidad algebráica igual a 2). Entonces, para que la matriz sea diagonalizable, es neceario que el rango de la matriz $\left[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right]$ sea dos en ambos casos. Veamos si efectivamente es así:

$$\text{rg}\left(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}\right) = \text{rg}\left(\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&-2&0\\ 1&0&0&-2 \end{bmatrix}\right) = 2; \quad \text{rg}\left(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}\right) = \text{rg}\left(\begin{bmatrix} 2&0&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Por tanto ya sabemos que $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

Observando la matriz $\mathbf{A}$-4$\mathbf{I}$, es fácil ver que dos autovalores asociados a $\lambda = 4$ son

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};$$

y observando la matriz $\mathbf{A}$-4$\mathbf{I}$, que dos autovalores asociados a $\lambda = 2$ son

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Así pues,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4&&&\\ &4&&\\ &&2&\\ &&&2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

□

(Final Septiembre 10/11) Ejercicio 2(b)

Puesto que hemos visto que $\boldsymbol{v}$ es un autovector de $\mathbf{A}$ asociado al autovalor 2, sabemos que $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}$, y por tanto:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^6\boldsymbol{v} =& \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{v}\\ =&\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot 2\boldsymbol{v}\\ =&\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot 4\boldsymbol{v}\\ =&\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot 8\boldsymbol{v}\\ =&\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot 16\boldsymbol{v}\\ =&\mathbf{A}\cdot 32\boldsymbol{v} = \lambda^6\boldsymbol{v}\\ =&2^6\boldsymbol{v} = 64\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 64\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

(Final Septiembre 10/11) Ejercicio 2(c)
Puesto que ningún autovalor es cero, la matriz es de rango completo, es decir, invertible.

□

(Final Septiembre 10/11) Ejercicio 2(d)
Puesto que $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$, entonces

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{SDS}^{-1}\right)^{-1} = \left(\mathbf{DS}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \left(\mathbf{S}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{SD}^{-1}\mathbf{S}^{-1};$$

es decir, los autovectores $\mathbf{S}$ son los mismos, pero los autovalores $\mathbf{D}^{-1}$, son los inversos de los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$.

□

(Final Septiembre 10/11) Ejercicio 3(a)

$$[\mathbf{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&1&1&1\\0&0&2&3&1&0\\0&0&1&4&2&1\\0&0&0&1&1&2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&1&1&1\\0&0&1&4&2&1\\0&0&2&3&1&0\\0&0&0&1&1&2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&1&1&1\\0&0&1&4&2&1\\0&0&0&-5&-3&-2\\0&0&0&1&1&2\end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&1&1&1\\0&0&1&4&2&1\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&-5&-3&-2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&1&1&1\\0&0&1&4&2&1\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&2&8\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&1&1&1\\0&0&1&4&2&1\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&1&4\end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&1&0&-3\\0&0&1&4&0&-7\\0&0&0&1&0&-2\\0&0&0&0&1&4\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&-2\\0&0&0&0&1&4\end{array}\right] = [\mathbf{R}|\boldsymbol{c}].$$

Por lo que la solución completa es:

$$\textit{todo vector } \boldsymbol{x} \textit{ de la forma:} \quad \boldsymbol{x} = a\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-2\\4\end{pmatrix}; \quad \textit{para cualquier } a \in \mathbb{R}.$$

Es decir, el conjunto de vectores $\boldsymbol{x}$ de la forma:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-a\\a\\1\\-2\\4\end{pmatrix} \textit{ para cualquier } a\in\mathbb{R}; \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-x_2\\x_2\\1\\-2\\4\end{pmatrix} \textit{ para cualquier } x_2\in\mathbb{R}.$$

□

(Final Septiembre 10/11) Ejercicio 3(b)
Puesto que el sistema tiene cinco incognitas, el vector solución tiene cinco elementos (un valor para cada incognita). Así pues, el conjunto de soluciones es un subconjunto de $\mathbb{R}^5$; Y en este caso, dicho conjunto

es una recta, ya que sólo una de las columnas de $\mathbf{A}$ es dependiente de las demás (sólo hay una variable libre o exógena; sólo un parámetro o grado de libertad en la solución). Así pues, un vector director es cualquier múltiplo (excepto el vector nulo $\mathbf{0}$) de la solución al sistema homogéneo que hemos encontrado: $\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Y uno de los puntos por donde pasa la recta es la solución particular que obtuvimos al resolver el sistema: $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$

□

(Final Septiembre 10/11) Ejercicio 3(c)

Primero un razonamiento largo...

Está claro que el vector director $\boldsymbol{x}_a$ (la solución al sistema homogeneo) cumple la siguiente relación:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}_a = \mathbf{0};$$

lo cual significa que los vectores fila de $\mathbf{A}$ son perpendiculares a $\boldsymbol{x}_a$. Así que, al menos, las filas de $\mathbf{A}$ son perpendiculares a $\boldsymbol{x}_a$.

Pero...¿hay más vectores perpendiculares? Veamos si cualquier combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$ es un nuevo vector perpendicular a $\boldsymbol{x}_a$.

Sea $\boldsymbol{z}$ un vector de $\mathbb{R}^4$, entonces $\boldsymbol{z}\mathbf{A}$ es un nuevo vector de $\mathbb{R}^4$ generado como combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$ (donde los elementos z_i de $\boldsymbol{z}$ son los coeficientes de dicha combinación). Por tanto, para todo $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^4$, el producto $\boldsymbol{z}\mathbf{A}$ es una combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$. Comprobar que las combinaciones $\boldsymbol{z}\mathbf{A}$ son siempre perpendiculares al vector director $\boldsymbol{x}_a$ es muy sencillo, ya que si $\mathbf{A}\boldsymbol{x}_a = \mathbf{0}$ entonces, para el producto de cualquier combinación lineal de filas $\boldsymbol{z}\mathbf{A}$ con el vector director $\boldsymbol{x}_a$ siempre resultará que

$$\boldsymbol{z}\mathbf{A}\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{z}\cdot\mathbf{0} = 0.$$

¿Hemos encontrado todos los vectores perpendiculares a $\boldsymbol{x}_a$? o ¿hay algún vector en $\mathbb{R}^5$ que sea perpendicular a $\boldsymbol{x}_a$, pero que no sea combinación de las filas de $\mathbf{A}$?

Para contestar a estas dos preguntas primero vamos a comprobar que el conjunto de vectores perpendiculares a $\boldsymbol{x}_a$ son un espacio vectorial; es decir, que dicho conjunto es cerrado para la suma y el producto por un escalar (o de manera más abreviada, que es cerrado para las combinaciones lineales). Veámoslo:

Sean $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ dos vectores perpendiculares a $\boldsymbol{x}_a$, es decir, dos vectores tales que $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}_a = 0$ y que $\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x}_a = 0$; y sea $\mathbf{B}$ la matriz cuyas filas son $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$.

De nuevo, una combinación de dichas filas es el producto

$$\boldsymbol{c}\mathbf{B} = \mathbf{B}^\intercal\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$$

para cualquier vector $\boldsymbol{c}$ de $\mathbb{R}^2$. Ahora vamos a comprobar que todas las posibles combinaciones de dos vectores perpendiculares al vector $\boldsymbol{x}_a$ son también perpendiculares a dicho vector director (que dicho conjunto es cerrado).

$$\boldsymbol{c}\mathbf{B}\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{x}_a\mathbf{B}^\intercal\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}_a\begin{bmatrix}\boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{bmatrix}\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_a\cdot\boldsymbol{y} & \boldsymbol{x}_a\cdot\boldsymbol{z}\end{bmatrix}\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{c} = 0, \qquad \text{para todo } \boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^2.$$

Así pues, el conjunto de vectores perpendiculares a $\boldsymbol{x}_a$ es un subespacio vectorial. ¿De que dimensión?

Tanto los vectores fila de $\mathbf{A}$ como el vector director $\boldsymbol{x}_a$ tienen cinco componentes, es decir, pertenencen a $\mathbb{R}^5$, que es un espacio vectorial de dimensión cinco. Puesto que $\mathbf{A}$ tiene rango 4, sus cuatro filas son linealmente independientes, y constituyen una base del espacio generado por las filas de $\mathbf{A}$; que es un subespacio de dimensión 4 y que llamaremos espacio fila de $\mathbf{A}$. Por supuesto, la recta generada por el único vector director $\boldsymbol{x}_a$ es de dimensión 1.

Así pues, la unión del espacio fila de $\mathbf{A}$ (dimensión 4) junto con los vectores de la *recta perpendicular* (dimensión 1) tiene necesáriamente dimensión 5, es decir, la unión de los dos subespacios es todo el espacio $\mathbb{R}^5$. Eso significa que cualquier vector de $\mathbb{R}^5$, o está en la recta generada por $\boldsymbol{x}_a$, o está en el espacio fila de $\mathbf{A}$; y por lo tanto, todo vector perpendicular a $\boldsymbol{x}_a$ necesariamente pertenece al espacio filas de $\mathbf{A}$.

Ya podemos contestar a todas las preguntas: el conjunto de vectores perpendiculares es el espacio fila de $\mathbf{A}$*, que es de dimensión 4; y como* $\mathbf{A}$ *tiene rango 4, sus cuatro filas son linealmente independientes, así que constituyen una base del subespacio de vectores perpendiculares a* $\boldsymbol{x}_a$*.*

Y ahora un razonamiento más corto...en el que sólo es necesario resolver el sistema de ecuaciones "apropiado"...del que en este caso particular, y dado lo que ya sabemos del primer apartado...ya conocemos su solución...

Antes hemos recordado que en cualquier sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, los vectores solución $\boldsymbol{x}$ son los vectores ortogonales a las filas de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ ...pero entonces...para contestar a este apartado ¡basta con poner como coeficientes del sistema homogéneo los elementos de vector director $\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, y resolver! Es decir, la pregunta se puede contestar solucionando el sistema

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = 0.$$

El conjunto de vectores solución a este sistema es el conjunto de vectores ortogonales pedidos en el enunciado, y puesto que la matriz de coeficientes tiene rango uno, y hay cinco incógnitas, *la dimensión del conjunto solución es cuatro.*

Probar que dicho conjunto es un subespacio vectorial es fácil: si $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ son soluciones al sistema $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, entonces la combinación lineal $a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{z}$ también es solucion puesto que

$$\mathbf{B}(a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{z}) = a\mathbf{B}\boldsymbol{y} + b\mathbf{B}\boldsymbol{z} = a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Observando el primer apartado de este problema podemos ver que *las cuatro filas del sistema de ecuaciones original* $\mathbf{A}\boldsymbol{x}_a = \mathbf{0}$ (primer apartado del problema) son perpendiculares al vector director, y son independientes, por lo que *forman la base del subespacio pedido en el enunicado.*

...y por último la manera más corta que se me ocurre...por ¡eliminación Gauss-Jordan!...

$$[\boldsymbol{x}_a|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{c|ccccc}-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|ccccc}1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|ccccc}1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = [(\mathbf{I}_1)_{||}\mathbf{E}]$$

Las cuatro últimas filas de la matriz $\mathbf{E}$ (allí donde hay filas de ceros en $(\mathbf{E}_1)_{|-}$–que es la forma escalonada reducida de $\boldsymbol{x}_a$) son vectores perpendiculares a $\boldsymbol{x}_a$; y es evidente que son cuatro, y que son linealmente independientes, así que son una base del subespacio perpendicular a $\boldsymbol{x}_a$.

□

(Final Septiembre 10/11) Conjunto de preguntas 1(a)

Es verdadero. Si $\mathbf{A}$ es simétrica, estonces $\mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{A}$, por tanto

$$\left(\mathbf{A}^2\right)^{\intercal} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}\right)^{\intercal} = \mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal} = \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)^2 = \mathbf{A}^2,$$

es decir, que $\mathbf{A}^2$ también es simétrica.

□

(Final Septiembre 10/11) Conjunto de preguntas 1(b)

Es verdadero. Veamoslo:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$$

A las matrices con esta propiedad se las denomina *"matrices idempotentes"*.

□

(Final Septiembre 10/11) Conjunto de preguntas 1(c)

Es falso. El determinate de una matriz es igual al producto de sus autovaloes; si uno de ellos es cero, necesariamente la matriz es singular. En tal caso sus columnas son linealmente dependientes y es posible encontrar una solución distinta a la trivial ($\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$) para dicho sistema homogeneo; así que hay más de una solución y el sistema es necesariamente *indeterminado.*

□

(Final Septiembre 10/11) Conjunto de preguntas 1(d)

Verdadero. Por el mismo motivo de antes, $\underset{m\times m}{\mathbf{A}}$ es singular, lo que quiere decir que el subespacio generado por las columnas de $\mathbf{A}$ (*que llamaremos espacio columna de* $\mathbf{A}$, $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$) es de dimensión menor que m, pero eso quiere decir que existen vectores de $\mathbb{R}^m$ que no pertenencen a $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$. Si $\boldsymbol{b}$ fuera uno de ellos, entonces no existiría una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$ igual a $\boldsymbol{b}$, es decir, que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ será incompatible para dicho $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.

□

(Final Septiembre 10/11) Conjunto de preguntas 1(e)

Verdadero. Si $\mathbf{Q}$ es ortogonal, entonces $\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{Q} = \mathbf{I}$; lo que quiere decir que su inversa es su traspuesta ($\mathbf{Q}^\intercal = \mathbf{Q}^{-1}$), y por tanto $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\intercal$; pero entonces $\mathbf{Q}^{-1}$ también tiene columnas perpendiculares (puesto que $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\intercal = \mathbf{I}$ sólo tiene ceros fuera de la diagonal) que son de norma uno (ya que $\mathbf{Q}\ \mathbf{Q}^\intercal$ sólo tiene unos en la diagonal).

□

(Final Septiembre 10/11) Conjunto de preguntas 1(f)

Falso. La matriz
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
tiene como único autovalor $\lambda = 1$, pero $\mathbf{A}$ no es la matriz identidad.

□

(Final Septiembre 10/11) Conjunto de preguntas 2(a)

2, puesto que las dos primeras son dependientes.

□

(Final Septiembre 10/11) Conjunto de preguntas 2(b)

2 (= rango de $\mathbf{A}$)

□

(Final Septiembre 10/11) Conjunto de preguntas 3(a)

La matriz simétrica asociada a dicha forma cuadrática es
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
y sus menores principales son
$$\left|1\right| = 1; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 8(a-1);$$
Si $a = 1$ la matriz $\mathbf{Q}$ es semidefinida positiva (los signos son: +,0,0).

□

(Final Septiembre 10/11) Conjunto de preguntas 3(b)

La matriz $\mathbf{Q}$ nunca puede ser definida negativa. Si $a < 1$ es no definida (signos: +,–,–). Si $a > 1$ es definida positiva (+,+,+).

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 1(a)

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$
Por tanto el autovalor $\lambda = a$ está repetido (multiplicidad 2); los otros dos autovalores salen de
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0; \qquad \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$
Por tanto los dos autovalores que faltan son 1 y 3.

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 1(b)

Cuando $\lambda = a = 2$, la matriz
$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

es de rango 3 (de manera inmediata se puede ver que hay tres columnas pivote). Así pues, en este caso el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es de dimensión 1 (cuatro columnas menos el rango); y por tanto NO es posible encontrar dos autovectores linealmente independientes para el autovalor repetido $\lambda = 2$, y consecuentemente la matriz NO ES DIAGONALIZABLE.

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 1(c)

$$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\Big((2-\lambda)^2 - 1\Big) = 0$$

Un autovalor es $\lambda = 1$. Los otros dos son las raíces de

$$\Big((2-\lambda)^2 - 1\Big) = 4 + \lambda^2 - 4\lambda - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

que son $\lambda = 3$ y $\lambda = 1$. Por tanto, $\boxed{\mathbf{D} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right].}$

- Para $\lambda = 3$
$$\mathbf{A} - 3\lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$
por tanto el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un autovector correspondiente a $\lambda = 3$. Como su norma es $\sqrt{2}$, el vector $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovector de norma 1 correspondiente a $\lambda = 3$.

- Para $\lambda = 1$
$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$
por tanto el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un autovector de norma 1 correspondiente a $\lambda = 1$; y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un autovector correspondiente a $\lambda = 3$ de norma es $\sqrt{2}$, así pues un segundo autovector normalizado es $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Es inmediato comprobar que estos tres autovectores de norma uno son ortogonales entre si. Por tanto una posible matriz orto-normal $\mathbf{P}$ es:
$$\boxed{\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 1(d)

La forma cuadrática

$$f(x,y,z) = \boldsymbol{x}\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy,$$

sabemos que es definida positiva, ya que hemos visto que los tres autovalores de $\mathbf{B}$ son positivos (3, 1, y 1).

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 2(a)

$$\begin{bmatrix}1&4&2&3\\2&3&3&7\\0&1&0&3\\0&2&0&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&2&3\\0&-5&-1&1\\0&1&0&3\\0&2&0&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&2&3\\0&1&0&3\\0&-5&-1&1\\0&2&0&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&2&3\\0&1&0&3\\0&0&-1&16\\0&0&0&a-6\end{bmatrix}$$

El parámetro a debe ser distinto de 6 para que la matriz sea de rango completo (algo que se podía ver directamente comparando las filas de $\mathbf{A}$).

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 2(b)

Por una parte

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}1&4&2&3\\2&3&3&7\\0&1&0&3\\0&2&0&5\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}3&3&7\\1&0&3\\2&0&5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}4&2&3\\1&0&3\\2&0&5\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix}-2\cdot(-2)\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix}=-1.$$

Y por otra

$$\begin{vmatrix}1&4&2&1\\2&3&3&0\\0&1&0&0\\0&2&0&0\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}2&3&3\\0&1&0\\0&2&0\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}=0$$

Por tanto, $x_4=\frac{0}{-1}=0.$

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 2(c)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&1&1&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&-1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0&-1\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0&0&-1\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right]$$

Por tanto

$$\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

y la solución al sistema $\mathbf{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ es (premultiplicando por $\mathbf{B}^{-1}$ a ambos lados de la igualdad):

$$\boldsymbol{x}=\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0&1&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 3(a)

$$\begin{bmatrix}2&1&2\\4&1&2\\2&1&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&2\\0&-1&-2\\0&0&a-2\end{bmatrix}$$

Solución única sólo si $a\neq 2$.

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 3(b)

Sólo una variable pude ser tomada como exógena o libre. Puesto que la tercera columna es múltiplo de la segunda; se pueden tomar como exógenas, o bien z, o bien y.

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Por tanto la dimensión del conjunto de soluciones es 1.

Una base de dicho espacio de soluciones la constituye el vector $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$.

El conjunto de soluciones son todos los vectores múltiplos del de la base

$$\text{es solución del sistema homogeneo todo vector } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ que sea múltiplo de } \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix};$$

es decir $\boldsymbol{x} = a\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ para cualquier $\quad a \in \mathbb{R}$.

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 3(c)

Si, el punto (1,1,1) es solución al sistema no lineal.

$$\begin{cases}1^2 + \frac{1^2}{2} + 4\sqrt{1} & = 5.5\\ 2\cdot 1^2 + 1 + 2\cdot 1 & = 5\end{cases}.$$

La matriz Jacobiana del sistema es

$$\begin{bmatrix}2x & y & 2z^{-1/2}\\ 4x & 1 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{evaluada en el punto (1,1,1)}} \begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{por eliminación gaussiana}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\Delta z = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}0.1 = \begin{pmatrix}1\\0.8\end{pmatrix}$$

Es decir, el sistema no lineal evaluado en $\begin{pmatrix}1\\0.8\\1.1\end{pmatrix}$ es aproximadamente igual a $\begin{pmatrix}5.5\\5\end{pmatrix}$.

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 4(a)

Pensemos primero en las dimensiones de $\mathbf{A}$ y en el rango de $\mathbf{A}$ ...Puesto que el "lado derecho" es un vector de orden 3, la matriz $\mathbf{A}$ tiene tres filas, además, las solución al sistema es también un vector con tres componentes (por tanto una combinación de las tres columnas de $\mathbf{A}$); así pues, $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden 3 por 3.

La solución completa está formada por vectores de un espacio nulo de dimensión 2 (dos columnas libres). Entonces, $\operatorname{rg}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$. Se deduce de todo esto que sólo hay una fila pivote, y las otras dos son libres, por tanto $\dim \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) = 1$.

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 4(b)

La solución particular nos dice que 2 veces la primera columna de $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$, por tanto, la primera columna de $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Sabemos además, que $\operatorname{rg}(A) = 1$, y por tanto el resto de columnas son múltiplos de la primera. El primer vector de la base del espacio nulo nos indica que la primera columna más la segunda en es vector nulo, por tanto, la segunda columna de $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$. Por último, es segundo vector de la base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$

no indica que la tercera columna es un vector nulo. Así pues,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(Final Junio 10/11) Ejercicio 4(c)

Para aquellos $\boldsymbol{b}$ que pertenezcan al espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$; por tanto, a los vectores de tipo $\boldsymbol{b} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; para cualquier a (los múltiplos de la primera columna de $\mathbf{A}$).

□

(Final Junio 10/11) Conjunto de preguntas 1(a)

$|\mathbf{AB}^2| = 2 \cdot (-2)^2 = 8.$
$|(\mathbf{AB})^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{AB}|} = \frac{1}{-4}.$

□

(Final Junio 10/11) Conjunto de preguntas 1(b)

No hay información suficiente para saber el rango de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; pero puesto que $|\mathbf{AB}|$ =-4, sabemos que $\underset{3\times 3}{\mathbf{AB}}$ es una matriz de rango completo, es decir, su rango es 3.

□

(Final Junio 10/11) Conjunto de preguntas 2(a)

Hay dos posibilidades:

- $a = -4/5$ y $b = 3/5$
- $a = 4/5$ y $b = -3/5$.

□

(Final Junio 10/11) Conjunto de preguntas 2(b)

Cualesquiera valores de a y b que formen un vector que no sea múltiplo de la segunda columna de $\mathbf{A}$; por ejemplo, $a = 1$ y $b = 0$.

□

(Final Junio 10/11) Conjunto de preguntas 2(c)

Justo lo contrario del apartado anterior; necesitamos que la matriz sea singular, por tanto necesitamos que la primera columna sea un múltiplo de la segunda; por ejemplo: $a = 3$ y $b = 4$.

□

(Final Junio 10/11) Conjunto de preguntas 2(d)

Por ser simétrica necesariamente $b = 3/5$. Además necesitamos que $a < 0$ y que $\det \mathbf{A} > 0$; es decir $a \cdot 4/5 - (3/5)^2 > 0$, o

$$a \cdot 4/5 > (3/5)^2$$

que no es posible si además a tiene que ser negativa. Por tanto No existen tales valores a y b.

□

(Final Junio 10/11) Conjunto de preguntas 3(a)

En este caso necesitamos que $\mathbf{A}$ tenga rango 3; por tanto, por eliminación gausiana tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -a & -a \end{bmatrix},$$

y por tanto, si $a \neq 0$ el rango de la matriz es 3.

□

(Final Junio 10/11) Conjunto de preguntas 3(b)

Para aquellos que hacen a la matriz de rango 2; es decir...y visto lo visto...para $a = 0$.

□

(Final Junio 10/11) Conjunto de preguntas 4(a)

Los dos primeros vectores de la solución son el mismo, así que la dimensión del conjunto de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es dos; y el número de columnas de $\mathbf{A}$ debe ser cuatro, por lo que el rango de la matriz es 2.

El último vector de la solución nos indica que la última columna de $\mathbf{A}$ es una columna de ceros; y el primero que la primera columna de $\mathbf{A}$ es el vector opuesto a la tercera columna de $\mathbf{A}$. Así pues, una posible solución es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x - z & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}.$$

Pero ésta no es la única respuesta posible (por ejemplo, puede haber más de dos filas (ecuaciones) en el sistema). El requisito es que el rango de $\underset{m\times 4}{\mathbf{A}}$ sea 2, que la última columna sea nula, y la primera, el vector opuesto de la tercera.

□

(Final Junio 10/11) Conjunto de preguntas 4(b)

Puesto que el polinomio característico de $\mathbf{A}$ es de grado 5, sabemos que la matriz es de orden 5 ($\underset{5\times 5}{\mathbf{A}}$). Y puesto que 0 no es una raíz de $p(\cdot)$, entonces 0 no es un autovalor de $\mathbf{A}$, así pues, $\mathbf{A}$ es invertible y su rango es 5.

□

(Final Septiembre 09/10) Ejercicio 1(a)

Los autovalores de

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

son los elementos de la diagonal; $\lambda = 3$ (con multiplicidad 2) y $\lambda = 2$. Pero el rango de

$$\mathbf{A} - 3\lambda = \begin{bmatrix} 3-3 & 1 & 1 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{bmatrix}$$

es 2; por tanto la matriz no es diagonalizable.

□

(Final Septiembre 09/10) Ejercicio 1(b)

Los autovalores de

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

son los elementos de la diagonal; $\lambda = 3$ y $\lambda = 2$ (con multiplicidad 2). El rango de

$$\mathbf{A} - 2\lambda = \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 1 \\ 0 & 3-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es 1; por tanto la matriz es diagonalizable.

Dos autovectores independientes correspondientes al autovalor $\lambda = 2$ son $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Por otra parte

$$\mathbf{A} - 3\lambda = \begin{bmatrix} 2-3 & 1 & 1 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Un autovector correspondiente al autovalor $\lambda = 3$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Así pues

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

son matrices tales que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.

$\square$

(Final Septiembre 09/10) Ejercicio 1(c)

Sea como sea $\mathbf{A}$, la matriz $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ siempre es simétrica; y por tanto es diagonalizable, y es posible encontrar una base ortonormal de autovectores de $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$.

$\square$

(Final Septiembre 09/10) Ejercicio 1(d)

Basta con encontrar los valores de a que hacen la matriz de rango completo; es decir, cualquier valor de a distinto de cero ($a \neq 0$) (para que la matriz sea invertible) y simultáneamente distinto de tres ($a \neq 3$) (para que la matriz sea diagonalizable).

$\square$

(Final Septiembre 09/10) Ejercicio 2(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 5 & -5 \\ -1 & -2 & -1 & -7 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{E}_{21}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & -1 & -7 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{E}_{31}(1)}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{E}_{23}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tanto la matriz de coeficientes, cómo la matriz ampliada tienen rango 2.

$\square$

(Final Septiembre 09/10) Ejercicio 2(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{E}_{22}(1/2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{E}_{12}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Una solución particular es

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{es decir,} \quad \begin{array}{c} x_1 = -4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -3 \\ x_4 = 0 \end{array}$$

Solución al sistema homogeneo es cualquier combinación de los vectores

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{es decir,} \quad \begin{array}{c} x_1 = -2a - 4b \\ x_2 = a \\ x_3 = -3b \\ x_4 = b \end{array}$$

para cualesquiera valores a y b.

Así pues, la solución al sistema propuesto es de la forma

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{o bien,} \quad \begin{array}{c} x_1 = -4 - 2a - 4b \\ x_2 = a \\ x_3 = -3 - 3b \\ x_4 = b \end{array}$$

para cualesquiera valores a y b.

$\square$

(Final Septiembre 09/10) Ejercicio 2(c)

Es un **plano** paralelo al generado por las combinaciones lineales de $\boldsymbol{x}_a$ y $\boldsymbol{x}_b$ (que es la solución del sistema homogeneo) pero que pasa por el punto $\boldsymbol{x}_p = (-7, 0, -6, 0)^\intercal$ (que es uno de los infinitos vectores que resuelven el sistema completo).

$\square$

(Final Septiembre 09/10) Ejercicio 3(a)

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ b-4 & 3 & 4 \\ c-6 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{vmatrix} = 3$$

□

(Final Septiembre 09/10) Ejercicio 3(b)

$$\begin{vmatrix} 7a & 7 & 14 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \times 3 = 21$$

□

(Final Septiembre 09/10) Ejercicio 3(c)

$$\left|(2\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right| = \frac{1}{\det 2\mathbf{A}} \det \mathbf{A} = \frac{1}{2^3 \det \mathbf{A}} \det \mathbf{A} = \frac{1}{8}.$$

□

(Final Septiembre 09/10) Ejercicio 3(d)

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$$

□

(Final Septiembre 09/10) Conjunto de preguntas 1(a)

No siempre tiene solución; por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que el rango de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es uno, pero el rango de la matriz ampliada $[\mathbf{A}|\boldsymbol{b}]$ es dos.

□

(Final Septiembre 09/10) Conjunto de preguntas 1(b)

Puesto que el sistema tiene más variables que ecuaciones, cuando el sistema tiene solución, ésta núnca puede ser única.

□

(Final Septiembre 09/10) Conjunto de preguntas 1(c)

Que $\boldsymbol{b}$ sea combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$; es decir, que la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, y la matriz ampliada $[\mathbf{A}|\boldsymbol{b}]$ tengan el mismo rango.

□

(Final Septiembre 09/10) Conjunto de preguntas 1(d)

Puesto que el $\boldsymbol{b}$ tiene tres componentes (pertenece a $\mathbb{R}^3$), la condición es que el rango de $\mathbf{A}$ sea tres.

□

(Final Septiembre 09/10) Conjunto de preguntas 2(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right]$$

Así pues,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$\square$

(Final Septiembre 09/10) Conjunto de preguntas 2(b)
$||\boldsymbol{v}||^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = 4+1+0+16+4 = 25$ así que tomamos $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}/||\boldsymbol{v}|| = (2/5, -1/5, 0.4/5, -2/5)$.

$\square$

(Final Septiembre 09/10) Conjunto de preguntas 2(c)

$$q(x,y,z) = x^2 + 6xy + y^2 + az^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Puesto que $|1| > 0$, y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} < 0$; la forma cuadrática no es definida (sea cual sea el valor de a).

$\square$

(Final Septiembre 09/10) Conjunto de preguntas 2(d)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-2)\cdot(2) = 12$$

$\square$

(Final Septiembre 09/10) Conjunto de preguntas 2(e)

$$\left[\mathbf{A}^3\right]\boldsymbol{v} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \\ & -2 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^3 & \\ & -2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 8 & 32 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$\square$

(Final Septiembre 09/10) Conjunto de preguntas 2(f)
Si $\mathbf{A}^{\intercal} = 2\mathbf{A}$, entonces también $\mathbf{A} = 2\mathbf{A}^{\intercal} = 2(2\mathbf{A}) = 4\mathbf{A}$ por lo que necesariamente $\mathbf{A} = \mathbf{0}$; y, por supuesto, las filas de una matriz nula son dependientes.

$\square$

(Final Junio 09/10) Ejercicio 1(a)
El rango es 4 (hay cuatro pivotes en la forma escalonada reducida de $\mathbf{A}$).

$\square$

(Final Junio 09/10) Ejercicio 1(b)

$$\boldsymbol{x} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{para } a,b,c,d \text{ en } \mathbb{R}.$$

$\square$

(Final Junio 09/10) Ejercicio 1(c)

$$\boldsymbol{x} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_4 + x_6 \\ x_2 \\ -x_4 - x_6 \\ x_4 \\ 0 \\ x_6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

(Final Junio 09/10) Ejercicio 1(d)

No, puesto que $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}^4$ entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución para cualquier vector $\boldsymbol{b}$ en $\mathbb{R}^4$.

$\square$

(Final Junio 09/10) Ejercicio 1(e)

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

(Final Junio 09/10) Ejercicio 2(a)

Por ser la matriz triangular los autovalores coinciden con los números que aparecen en la diagonal principal; es decir, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda = 1$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tres autovectores independientes son

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = 2$

$$(\mathbf{A} - 2\lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Un autovector es

$$\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

(Final Junio 09/10) Ejercicio 2(b)

Puesto que hemos encontrado 4 autovectores independientes, la matriz es diagonalizable.

$\square$

(Final Junio 09/10) Ejercicio 2(c)

La factorización $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{\intercal}$ implica que la matriz $\mathbf{A}$ debe ser simétrica. puesto que en este caso la matriz del enunciado no es simétrica, no es posible encontrar tal factorización.

$\square$

(Final Junio 09/10) Ejercicio 2(d)

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{\text{producto de los autovalores de } \mathbf{A}} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

(Final Junio 09/10) Ejercicio 3(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & m & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2m \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{E}_{21}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & m-4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2m \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{E}_{31}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & m-4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2m+1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{E}_{32}(1)}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & m-4 & 1 \\ 0 & 0 & m+1 & 2m+2 \end{array}\right]$$

Puesto que $2m+2=0$ sólo si $m+1=0$, el sistema siempre tiene solución para cualquier valor de m. □

(Final Junio 09/10) Ejercicio 3(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Un solución particular es $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y las soluciones al sistema homogéneo son los múltiplos del vector $\boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, la solución completa al sistema son todos los vectores que se pueden escribir como $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + a\boldsymbol{x}_n$ para cualquier número real a. □

(Final Junio 09/10) Ejercicio 3(c)

El conjunto de puntos que son solución al sistema del apartado anterior es una recta en $\mathbb{R}^3$.

No es posible que el conjunto de soluciones sea un plano en ningún caso; para que fuera posible sería necesario que la matriz de coeficientes del sistema fuera de rango 1. Pero en este caso el rango es 2 para $m=-1$ o rango 3 cuando $m \neq -1$. En este último caso (rango 3), el conjunto de soluciones es un punto en $\mathbb{R}^3$. □

(Final Junio 09/10) Ejercicio 3(d)

En este caso el sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Procediendo a la sustitución hacia atrás tenemos

$$x_3 = 2; \quad \Rightarrow \quad x_2 = -7; \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 - 7 - 4 = -10;$$

Por tanto la solución en este caso es

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

□

(Final Junio 09/10) Conjunto de preguntas 1(a)

Es cierto; por una parte

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Y por otra

$$\mathbf{CA} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Por tanto **B** y **C** son iguales. □

(Final Junio 09/10) Conjunto de preguntas 1(b)

Es falso

$$(\mathbf{AB})^2 = (\mathbf{AB})(\mathbf{AB}) = \mathbf{ABAB}$$

que en general es distinto de

$$\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 = \mathbf{AABB}.$$

Ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{ABAB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{AABB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

(Final Junio 09/10) Conjunto de preguntas 1(c)

Es cierto ya que
$$|\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^\intercal| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^2.$$

□

(Final Junio 09/10) Conjunto de preguntas 2(a)
Si, puesto que sus autovalores no están repetidos.

□

(Final Junio 09/10) Conjunto de preguntas 2(b)
No, $\boldsymbol{v}_3$ es múltiplo de $\boldsymbol{v}_1$, por lo que es un autovector asociado a λ_1.

□

(Final Junio 09/10) Conjunto de preguntas 2(c)

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)) = \mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 - \mathbf{A}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 - \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = 1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

□

(Final Junio 09/10) Conjunto de preguntas 3(a)
Busquemos el número de pivotes que aparecen tras la eliminación

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&1&a&1\\1&a&0&0\\0&0&1&a\\2&2a&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[{[1\rightleftharpoons2]}]{\boldsymbol{\tau}} \begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&1\\0&0&1&a\\2&2a&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\underset{[(-2)1+3]}{\boldsymbol{\tau}}} \begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&1\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{U}$$

Esta matriz es de rango 4 sea cual sea el valor de a; por lo tanto es invertible.

□

(Final Junio 09/10) Conjunto de preguntas 3(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&1&0&1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\2&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[1\rightleftharpoons2]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\2&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\underset{[(-2)1+3]}{\boldsymbol{\tau}}}$$
$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&-2&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)4+2]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&2&0&-1\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&-2&0&1\end{array}\right]$$

Así pues,
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&-2&0&1\end{bmatrix}$$

□

(Final Junio 09/10) Conjunto de preguntas 4(a)
La matriz asociada es
$$\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}.$$

Desarrollando el determinante de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ por la última columna, e igualando a cero:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&4-\lambda&0\\0&0&5-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda) - 4(5-\lambda) = 0$$

Claramente una de las raíces es $\lambda = 5$; así pues, dividiendo por $(5-\lambda)$, la ecuación característica se reduce a
$$0 = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = 0$$

Por tanto las otras dos raíces son $\lambda = 0$ y $\lambda = 5$.

Dos autovalores positivos y uno nulo: matriz *semi*-definida positiva.

$\square$

(Final Junio 09/10) Conjunto de preguntas 4(b)

La matriz asociada es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -a \\ 1 & 4 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Basta con comprobar que los sucesivos subdetermiantes de $(-\mathbf{A})$ son positivos (comprobar que $(-\mathbf{A})$ es definida positiva) $\left|1\right| = 1$, y $\left|\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{smallmatrix}\right| = -5$. Así pues, la matriz $(-\mathbf{A})$ no puede ser definida positiva, y por tanto $\mathbf{A}$ no es definida negativa para ningún valor de a.

$\square$