Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

14/01/2023

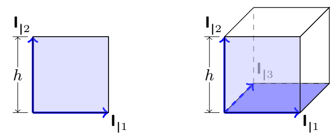
1 Esquema de la **Lección 13**

Esquema de la Lección 13

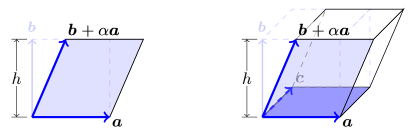
- Determinante: $\det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}|$ $[\det: \quad \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}]$
  - Volumen vs determinante
  - Propiedades: **1, 2, 3**
- Deduciremos las propiedades: **4 – 9**

2 Superficie o Volumen

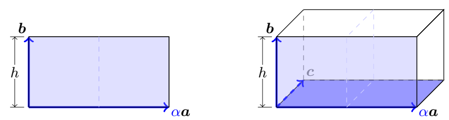
1. $\text{Vol}(\underset{n\times n}{\mathbf{I}}) = 1.$



2. $\text{Vol}(\mathbf{A}) \;=\; \text{Vol}\Big(\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\mathbf{A}_{\tau}}\Big)$ para $i \neq k$.



3. $|\alpha| \cdot \text{Vol}(\mathbf{A}) \;=\; |\alpha| \cdot \text{Vol}\big[\ldots;\mathbf{A}_{|k};\ldots\big] \;=\; \text{Vol}\big[\ldots;\alpha\mathbf{A}_{|k};\ldots\big]$



3 Determinante: 3 propiedades que lo definen

P-1 **Determinante de las matrices identidad:**

$$\det \underset{n\times n}{\mathbf{I}} = 1$$

P-2 **Transf. elem. Tipo I no cambian el determinante**:

$$\det \mathbf{A} = \det\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)$$

P-3 **Multiplicar una columna multiplica el determinante**

$\alpha\cdot\det \mathbf{A} \;=\; \det\left[\ldots;\alpha\mathbf{A}_{|k};\ldots\right]$ para cualquier $k\in\{1:n\}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Valor absoluto de } \det \mathbf{A} = \operatorname{Vol}\mathbf{A}}$$

Ejemplo

Para $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & (b_1+\alpha c_1) & c_1 \\ a_2 & (b_2+\alpha c_2) & c_2 \\ a_3 & (b_3+\alpha c_3) & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\det\left[\boldsymbol{a};\ (\boldsymbol{b}+\alpha\boldsymbol{c});\ \boldsymbol{c};\right] = \det\left[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c};\right];$$

y también

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha\, b_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha\, b_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha\, b_3 & c_3 \end{vmatrix}; = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\det\left[\boldsymbol{a};\ \alpha\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c};\right] = \alpha\ \det\left[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c};\right];$$

4 Determinante de una matriz con una columna nula

P-4 **Det. de una matriz con una columna de ceros**

Si $\mathbf{A}$ *tiene una columna de ceros* $\mathbf{0}$, *entonces*

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = 0}$$

Demuestre **P-4**

5 Matrices elementales

Ya sabemos que

$$\det\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = |\mathbf{A}|; \qquad \det\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \alpha|\mathbf{A}|.$$

Determinante de matrices elementales

$$\det\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = 1 \qquad \text{y} \qquad \det\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right) = \alpha.$$

Así, puesto que $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})$, entonces

$$\left|\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})\right| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}| \tag{1}$$

donde $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ es una matriz elemental

EJERCICIO 1. Demuestre las siguientes proposiciones

(a) $\det(\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}) = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{I}_{\tau_1}| \cdots |\mathbf{I}_{\tau_k}|$.

(b) Si $\mathbf{B}$ es de rango completo, es decir, si $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}$, entonces $|\mathbf{B}| = |\mathbf{I}_{\tau_1}| \cdots |\mathbf{I}_{\tau_k}|$, y por tanto $|\mathbf{B}| \neq 0$.

(c) *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son de orden* n, *y* $\mathbf{B}$ *es de rango completo entonces*

$$\det(\mathbf{AB}) = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \tag{2}$$

6 Determinante tras una sucesión de transformaciones elementales

Ejemplo

Una sucesión $\tau_1 \cdots \tau_k$ de trasformaciones *Tipo I* de la matriz $\mathbf{A}$ no altera el determinante.

$$|\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}| = |\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k})| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}| = |\mathbf{A}| \cdot 1 = |\mathbf{A}|$$

Ejemplo

Pero si lo puede hacer una sucesión de trasformaciones *Tipo II*.

$$\begin{vmatrix} 2a & 3c \\ 2b & 3d \end{vmatrix} = \underline{\ ?\ } \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

7 Propiedad antisimétrica

P-5 **[Propiedad antisimétrica]**
Intercambiar dos columnas cambia el signo del determinante.

Demostración.
Un intercambio de columnas es una sucesión de transformaciones elementales *Tipo I* y una única de *Tipo II* que multiplica por -1 una columna □

Así que:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

8 Matrices singulares. Matrices inversas

P-6 **Si $\mathbf{A}$ es singular entonces $|\mathbf{A}| = 0$.**

P-7 $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \big(\det \mathbf{A}\big)^{-1}$.

Demostración.
Sea $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{AE} = \mathbf{R}$ (donde $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}$).

Entonces: $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{E}| = |\mathbf{R}|$ con dos casos:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \text{ singular } (\mathbf{R}_{|n} = \mathbf{0}\ ): & |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{E}| = 0 \ \Rightarrow\ |\mathbf{A}| = 0 \\ \mathbf{A} \text{ no singular } (\mathbf{R} = \mathbf{I}): & |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{E}| = 1 \ \Rightarrow\ |\mathbf{E}| = \big|\mathbf{A}^{-1}\big| = \big(|\mathbf{A}|\big)^{-1} \end{cases}.$$

□

Ejemplo

Para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[Tipo I]{\boldsymbol{\tau}_{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ \hline 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[Tipo II]{\boldsymbol{\tau}_{[(-1/2)\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow[Tipo I]{\boldsymbol{\tau}_{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

Por tanto

$$\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \left|\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right| \cdot \left|\mathbf{I}_{\underset{[(-1/2)\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right| \cdot \left|\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right| = 1 \cdot \frac{-1}{2} \cdot 1 = \frac{-1}{2};$$

es decir $\boxed{|\mathbf{A}| = -2.}$

9 Determinante de un producto de matrices

P-8 **[Determinante del producto de matrices]**

$$\boxed{\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}).} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B} \text{ singular, también lo es } \mathbf{AB} \Rightarrow & \det(\mathbf{AB}) = 0 = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \\ \mathbf{B} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k} \Rightarrow & \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \end{cases}$$

EJERCICIO 2. **[Matrices transpuestas]**

(a) ¿Qué relación hay entre el determinante de una matriz elemental $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ y el determinante de su transpuesta ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}$?

(b) Sea $\mathbf{B}$ de rango completo, demuestre que $|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}^{\intercal}|$.

10 Determinante de la transpuesta

P-9 **Determinante de la transpuesta**

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{\intercal}|.$$

Demostración.

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{A} \text{ singular:} & \mathbf{A}^{\intercal} \text{ singular } \Rightarrow \det \mathbf{A}^{\intercal} = \det \mathbf{A} = 0 \\ \text{si } \mathbf{A} \text{ NO singular:} & \mathbf{A} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_k} \Rightarrow \det \mathbf{A}^{\intercal} = \det \mathbf{A} \end{cases} .$$

$\square$

Problemas de la Lección 13

(L-13) Problema 1. Complete las demostraciones (los Ejercicios) de esta lección.

(L-13) Problema 2. Sabiendo que el determinante del producto de dos matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ cualesquiera es $|\mathbf{BC}| = |\mathbf{B}||\mathbf{C}|$; demuestre que para toda matriz $\mathbf{A}$ invertible (y por tanto con $\det \mathbf{A} \neq 0$)

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \Big(\det(\mathbf{A})\Big)^{-1}.$$

(L-13) Problema 3. Sean $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ y $\underset{3\times 3}{\mathbf{B}}$ tales que $\det(\mathbf{A}) = 2$ y $\det(\mathbf{B}) = -2$

(a) (0.5^{pts}) Calcule los determinantes de $\mathbf{A}(\mathbf{B})^2$ y $(\mathbf{AB})^{-1}$
(b) (0.5^{pts}) ¿Es posible calcular el rango de $\mathbf{A}+\mathbf{B}$? ¿y de $\mathbf{AB}$?

(L-13) Problema 4. Aplique el método de Gauss-Jordan para calcular el determinante de las siguientes matrices

(a) $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

(L-13) Problema 5. La matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad $\mathbf{I}$ mediante las siguientes tres operaciones elementales sobre las columnas (en el siguiente orden):

$\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 4 veces columna 1 de la columna 2.

$\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 3 veces columna 1 de la columna 3.

$\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta columna 3 de la columna 2.

Calcule el determinante de $\mathbf{A}$.

(L-13) Problema 6.

(a) Calcule el determinante de $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&c\\0&0&1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

(b) Encuentre el determinante de $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\a&b&c&d\end{bmatrix}$ por Gauss-Jordan.

$\boxed{1}$ Esquema de la **Lección 14**

Esquema de la Lección 14

- Cálculo de $|\mathbf{A}|$ por eliminación gaussiana
- **P-10** — Propiedad multilineal
- Desarrollo del determinante por cofactores (Expansión de Laplace).
- Aplicaciones de la función determinante
  - Regla de Cramer para la resolución de un sistema de ecuaciones
  - Calculo de la inversa de una matriz

$\boxed{2}$ Matriz extendida

Matriz extendida de $\mathbf{B}$: $\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \\ & 1\end{bmatrix}$

1. Dada $\boldsymbol{\tau}$: $\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{\boldsymbol{\tau}} & \\ & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \\ & 1\end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}}$.

2. Como $\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \\ & 1\end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}}$ y $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ Mat. Elem. mismo *tipo* $\Rightarrow$ mismo det.

Aplicando 1. k veces y luego 2.

$$\left|\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} & \\ & 1\end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \\ & 1\end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right| = \left|\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \\ & 1\end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}_1}\cdots\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \\ & 1\end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right|$$
$$= \left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right|\cdots\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right| = \left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right|.$$

$$\text{Si } \mathbf{A} \text{ matriz extendida de } \mathbf{B} \begin{cases}\text{Si } \mathbf{B} \text{ singular} & |\mathbf{B}| = 0 = |\mathbf{A}| \\ \text{Si } \mathbf{B} \text{ invertible} & |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\end{cases}$$

EJERCICIO 7. [Matrices triangulares]

(a) ¿Cómo es el determinante de una matriz triangular inferior **L** de rango completo?
(b) ¿Cuál es el determinante de una matriz cuadrada y triangular con algún elemento nulo en su diagonal?
(c) ¿Cómo es el determinante de una matriz triangular superior? **U**

Además $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \underset{m\times n}{\mathbf{0}} \\ \underset{n\times m}{\mathbf{C}} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$

3 Cálculo por eliminación Gaussiana

Ejemplo

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&5\\2&3\end{bmatrix}:\quad \left[\begin{array}{cc|c}1&5&\\2&3&\\\hline&&1\end{array}\right]\xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&\\2&-7&\\\hline&&1\end{array}\right]\quad \boxed{|\mathbf{A}|=-7}$$

Ejemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&1&0\\9&6&3&0\\0&1&1&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(\frac{1}{2})\mathbf{4}]}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{\substack{[(2)\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}}\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&0&0\\9&6&0&0\\0&1&1&0\\\hline 0&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow[\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{4}]}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&0\\6&9&0&0\\1&0&1&0\\\hline 0&0&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix}0&2&1\\9&6&3\\0&1&1\end{vmatrix}=-9,$$

Matrices de orden 1, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a\end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{c|c}a&0\\\hline 0&1\end{array}\right]\Rightarrow |\mathbf{A}|=a.$$

Matrices de orden 2:

$$\left[\begin{array}{cc|c}a&b&0\\c&d&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cc|c}a&0&0\\c&d-\frac{bc}{a}&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]$$

$$|\mathbf{A}| = ad-bc = a\det\begin{bmatrix}d\end{bmatrix}-b\det\begin{bmatrix}c\end{bmatrix}.$$

Matrices de orden 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}a&b&c&0\\d&e&f&0\\g&h&i&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{\substack{[(-\frac{b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-\frac{c}{a})\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}}\left[\begin{array}{ccc|c}a&0&0&0\\d&e-\frac{bd}{a}&f-\frac{cd}{a}&0\\g&h-\frac{bg}{a}&i-\frac{cg}{a}&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(\frac{-af+cd}{ae-bd})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}a&0&0&0\\d&e-\frac{bd}{a}&0&0\\g&h-\frac{bg}{a}&\frac{aei-afh-bdi+bfg+cdh-ceg}{ae-bd}&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$|\mathbf{A}| = \underbrace{aei-afh-bdi+bfg+cdh-ceg}_{\text{(Regla de Sarrus)}} = a\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}.$$

Matrices de orden 4:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}a&b&c&d&0\\e&f&g&h&0\\i&j&k&l&0\\m&n&o&p&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{\substack{[(-\frac{b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-\frac{c}{a})\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-\frac{d}{a})\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(\frac{-ag+ce}{af-be})\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(\frac{-ah+de}{af-be})\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(\frac{-afl+ahj+bel-bhi-dej+dfi}{afk-agj-bek+bgi+cej-cfi})\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}a&0&0&0&0\\e&f-\frac{be}{a}&0&0&0\\i&j-\frac{bi}{a}&\frac{afk-agj-bek+bgi+cej-cfi}{af-be}&0&0\\m&n-\frac{bm}{a}&\frac{afo-agn-beo+bgm+cen-cfm}{af-be}&p+\frac{\left(-l+\frac{\left(h-\frac{de}{a}\right)\left(j-\frac{bi}{a}\right)}{f-\frac{be}{a}}+\frac{di}{a}\right)\left(-o+\frac{\left(g-\frac{ce}{a}\right)\left(n-\frac{bm}{a}\right)}{f-\frac{be}{a}}+\frac{cm}{a}\right)}{-k+\frac{\left(g-\frac{ce}{a}\right)\left(j-\frac{bi}{a}\right)}{f-\frac{be}{a}}+\frac{ci}{a}}-\frac{\left(h-\frac{de}{a}\right)\left(n-\frac{bm}{a}\right)}{f-\frac{be}{a}}-\frac{dm}{a}&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$|\mathbf{A}| =$

$afkp-aflo-agjp+agln+ahjo-ahkn-bekp+belo+bgip-bglm-bhio+bhkm+$
$cejp-celn-cfip+cflm+chin-chjm-dejo+dekn+dfio-dfkm-dgin+dgjm$

$$= a\begin{vmatrix}f&g&h\\j&k&l\\n&o&p\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}e&g&h\\i&k&l\\m&o&p\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}e&f&h\\i&j&l\\m&n&p\end{vmatrix}-d\begin{vmatrix}e&f&g\\i&j&k\\m&n&o\end{vmatrix}$$

4 Propiedad multilineal

P-10 Propiedad multilineal

$$\det\left[\ldots;(\beta\boldsymbol{b}+\psi\boldsymbol{c});\ldots\right]=\beta\det\left[\ldots;\boldsymbol{b};\ldots\right]+\psi\det\left[\ldots;\boldsymbol{c};\ldots\right]$$

Ejemplo

Para $\mathbb{R}^2$

$$\begin{vmatrix}a+\alpha & c\\ b+\beta & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha & c\\ \beta & d\end{vmatrix};$$

es decir

$$\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & c\\ 0 & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} & c\\ & d\end{vmatrix}.$$

5 menores y cofactores

Definición menores y cofactores

Denotamos la submatriz resultante de eliminar la fila i y la columna j con

$${}^{i\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh j}.$$

Su determinante $\det\left({}^{i\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh j}\right)$, *se denomina menor de* a_{ij}.
Los menores con los signos alternados en función de si $(i+j)$ es par (en cuyo caso el signo no cambia) o impar (en cuyo caso se invierte el signo) se denominan cofactores.
Así, el cofactor de a_{ij} es

$$\operatorname{cof}_{ij}\left(\mathbf{A}\right)=(-1)^{i+j}\det\left({}^{i\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh j}\right).$$

Ejemplo

Para $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$, tenemos

$${}^{1\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh 2}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{bmatrix},\qquad {}^{3\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh 3}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

así

$$\operatorname{cof}_{12}\left(\mathbf{A}\right)=(-1)^{1+2}\det\left({}^{1\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh 2}\right)=(-1)\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix}.$$

y

$$\operatorname{cof}_{33}\left(\mathbf{A}\right)=(-1)^{3+3}\det\left({}^{3\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh 3}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}.$$

6 Desarrollo del determinante por cofactores

Teorema [Expansión de Laplace]

Para cualquier matriz de orden n, $\det(\mathbf{A})$ se puede expresar como suma de los productos de los elementos de cualquier columna (fila) de $\mathbf{A}$ por sus correspondientes cofactores:

$$\det(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\operatorname{cof}_{ij}\left(\mathbf{A}\right),\qquad \textit{expansión por la columna } j\textit{ésima}$$

o bien

$$\det(\mathbf{A})=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\operatorname{cof}_{ij}\left(\mathbf{A}\right),\qquad \textit{expansión por la fila } i\textit{ésima}$$

EJERCICIO 8. Calcule $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

7 Regla de Cramer

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}; \qquad |\mathbf{A}| \neq 0 \quad \text{entonces}$$

$$\boldsymbol{b} = (\mathbf{A}_{|1})x_1 + \cdots + (\mathbf{A}_{|j})x_j + \cdots + (\mathbf{A}_{|n})x_n.$$

$$\det\Big[\mathbf{A}_{|1}; \ \ldots \ \overbrace{\boldsymbol{b}}^{\text{pos. } j}; \ \ldots \ \mathbf{A}_{|n}\Big] = x_j \cdot \det(\mathbf{A}).$$

$$x_j = \frac{\det\Big[\mathbf{A}_{|1}; \ \ldots \ \overbrace{\boldsymbol{b}}^{\text{pos. } j}; \ \ldots \ \mathbf{A}_{|n}\Big]}{\det(\mathbf{A})}.$$

Problemas computacionales cuando $\det \mathbf{A} \simeq 0$ (ángulo pequeño entre vectores)

8 Cálculo de la inversa de una matriz

$$[\mathbf{Adj(A)}] \cdot \mathbf{A} =$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{cof}_{11}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{21}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{n1}(\mathbf{A}) \\ \operatorname{cof}_{12}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{22}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{n2}(\mathbf{A}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cof}_{1n}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{2n}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{nn}(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}$$

Problemas de la Lección 14

(L-14) PROBLEMA 1. Complete las demostraciones (los EJERCICIOS) de esta lección.

(L-14) PROBLEMA 2. Sea $\mathbf{A} = \Big[\mathbf{A}_{|1}; \quad \mathbf{A}_{|2}; \quad \mathbf{A}_{|3};\Big]$ con $\det \mathbf{A} = 2$.

(a) Calcule $\det(2\mathbf{A})$ y $\det \mathbf{A}^{-1}$

(b) Calcule $\det \Big[(3\mathbf{A}_{|1} + 2\mathbf{A}_{|2}); \quad \mathbf{A}_{|3}; \quad \mathbf{A}_{|2};\Big]$

(L-14) PROBLEMA 3. El determinante de una matriz $\mathbf{A}$ de orden n por n es 12 (donde n es un múltiplo de dos). ¿Cuál es el determinante de $-\mathbf{A}^{\intercal}$? (Justifique su respuesta).
(*MIT Course 18.06 Quiz 2, Fall, 2008*)

(L-14) PROBLEMA 4. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*).
$|\mathbf{A}\mathbf{A}^{\intercal}| = |\mathbf{A}|^2$.

(L-14) PROBLEMA 5. Tenemos una matriz de orden 3×3, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$ con $\det \mathbf{A} = 3$. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

(a) (0.5 pts) $\begin{bmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ b-4 & 3 & 4 \\ c-6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(b) (0.5 pts) $\begin{bmatrix} 7a & 7 & 14 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(c) (1 pts) $(2\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal$

(d) (0.5 pts) $\begin{bmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(L-14) PROBLEMA 6.

(a) Escalone la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) ¿Es $\mathbf{A}$ invertible?

(c) En caso afirmativo calcule $|\mathbf{A}^{-1}|$; en caso contrario calcule $|\mathbf{A}|$

(d) La matriz $\mathbf{C}$ es igual al producto de $\mathbf{A}$ con la *traspuesta* de la matriz $\mathbf{B}$, es decir

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}^\intercal \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

¿Cuánto vale el determinante de $\mathbf{C}$? ¿Es $\mathbf{C}$ invertible?

(L-14) PROBLEMA 7. Calcule el determinante de las siguientes matrices empleando la expansión de Laplace.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(L-14) PROBLEMA 8. Calcule el siguiente determinante empleando la expansión de Laplace:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

(L-14) PROBLEMA 9. Calcule $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(L-14) PROBLEMA 10. Calcule el determinante de la siguiente matriz empleando la expansión de Laplace

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

(L-14) PROBLEMA 11. Suponga la matriz $\mathbf{A}_n$ de dimensiones n por n que tiene treses en su diagonal y doses inmediatamente debajo de la diagonal y en la posición $(1, n)$; por ejemplo, para $n = 4$:

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre, empleando los cofactores de la primera fila, el determinante de $\mathbf{A}_4$.

(b) Encuentre el determinante de $\mathbf{A}_n$ para $n > 4$.

(L-14) PROBLEMA 12. Si tiene una matriz por bloques

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

Demuestre que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}||\mathbf{C}|$.

Pista

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

(L-14) PROBLEMA 13. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales, aplicando la regla de Cramer.

(a) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$.

(b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$.

(ejercicio 13 del conjunto de problemas 4.4 de Strang (2007))

(L-14) PROBLEMA 14. Encuentre la inversa de las siguientes matrices empleando la matriz adjunta.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(ejercicio 18 del conjunto de problemas 4.4 de Strang (2007))

(L-14) PROBLEMA 15. Sean las matrices

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; y el vector $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Calcule los valores de a para los que $\mathbf{A}$ es invertible.

(b) (1^{pts}) Considere $a = 5$. Usando la regla de Cramer calcule la cuarta coordenada x_4 de la solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(c) (1^{pts}) Calcule $\mathbf{B}^{-1}$. Use dicha matriz para resolver el sistema $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.