

# Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

10/01/2025

1 / 27

L-11

L-12

## 1 Esquema de la Lección 11

### Esquema de la Lección 11

- Vectores y subespacios ortogonales
- Espacio nulo  $\perp$  espacio fila  
 $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A}^T)$
- espacio nulo por la izquierda  $\perp$  espacio columna  
 $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$
- De las ecuaciones paramétricas a las cartesianas (o implícitas)

2 / 27

L-11

L-12

Puede encontrar la última versión de este material en

<https://github.com/mbujosab/MatematicasII/tree/main/Esp>

– Marcos Bujosa. Copyright © 2008–2025  
Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

1 / 27

L-11

L-12

## 2 Algunas definiciones

- Producto punto

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

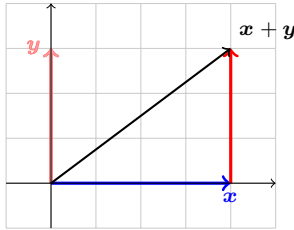
- Longitud de un vector  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$   $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$ .

- Vector unitario:  $\|\mathbf{a}\| = 1$   $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \mathbf{x}$

- Vectores ortogonales (perpendiculares):  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ .

3 / 27

### 3 Vectores ortogonales



$$x \cdot y = 0 \iff x \perp y$$

Tma. Pitágoras:  $x \cdot y = 0 \iff \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$

$$x \cdot x + y \cdot y = (x + y) \cdot (x + y).$$

4 / 27

### 4 Norma al cuadrado de un vector

$$\|v\|^2 = v \cdot v$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \|x\|^2 = \quad ; \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \|y\|^2 = \quad ;$$

¿Son estos vectores ortogonales?

$$x + y = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}; \quad \|x + y\|^2 = \quad ;$$

(Pitágoras)

(Ortogonalidad)

$$x \cdot x + y \cdot y = (x + y) \cdot (x + y) \iff x \cdot y = 0.$$

5 / 27

### 5 Subespacios ortogonales

Cuando el subespacio  $\mathcal{S}$  es **ortogonal** al subespacio  $\mathcal{T}$ :

Cada vector de  $\mathcal{S}$  es ortogonal a cada vector de  $\mathcal{T}$

¿Son ortogonales el plano de la pizarra y el suelo?

6 / 27

### 6 Espacio nulo ortogonal a espacio fila

- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp$  filas de  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}x = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} (1|\mathbf{A}) \cdot x \\ \vdots \\ (m|\mathbf{A}) \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp d\mathbf{A}, \quad \forall d \in \mathbb{R}^m$  (cualquier **combinación lineal de las filas**)

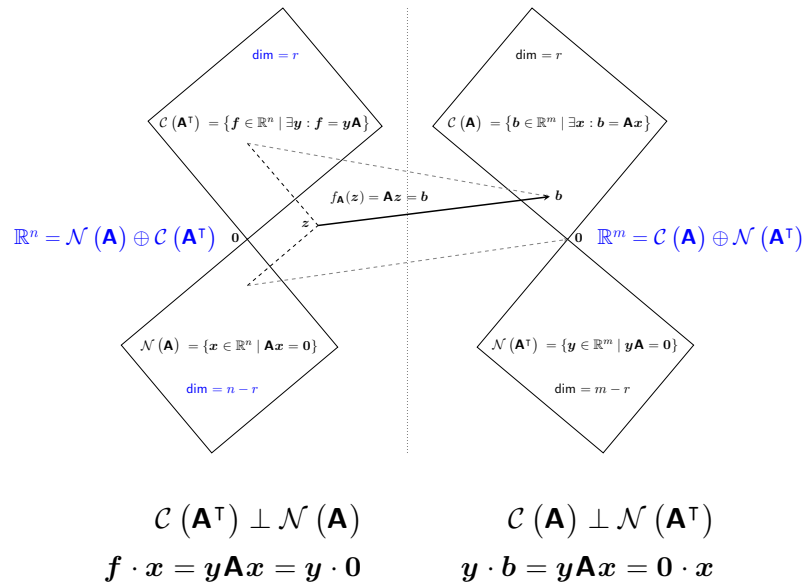
$$x \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \implies d\mathbf{A}x = d \cdot \mathbf{0} = 0.$$

$$\text{espacio nulo} \perp \text{espacio fila} \quad \mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A}^\top)$$

También:  $x\mathbf{A} = \mathbf{0} \implies \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$

7 / 27

## 7 El gran esquema: suma directa de complementos ortogonales



8 / 27

## 8 Revisitando la eliminación gaussiana

Algoritmo que encuentra una base del complemento ortogonal

Dame varios vectores y los escribo como filas de una matriz  $\mathbf{M} \dots$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \tau \\ [(3)1+2] \\ [(1)1+4] \\ [(1)2+3] \\ [(1)2+4] \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{N} \end{bmatrix}$$

Base del espacio generado por los vectores (fila):  $\mathcal{V}$

Base del complemento ortogonal:  $\mathcal{V}^\perp$

$$\mathbf{M}\mathbf{N} = \mathbf{0}$$

Pero si me das  $\mathbf{N}_{|1}$  y  $\mathbf{N}_{|2}$  y empiezo de nuevo... obtendré una base de...

9 / 27

## 9 Ecuaciones cartesianas (implícitas) y paramétricas de rectas y planos

Ecuaciones cartesianas (implícitas)  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}x = b\}$ :

Por ejemplo

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{c. sol. de } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas:

Para el conjunto del ejemplo anterior

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists p \in \mathbb{R}^1 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} p \right\}$$

En este caso dimensión 1      Una **recta** (sólo hay un parámetro  $a$ )  
**recta** **recta**

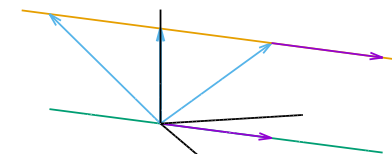
10 / 27

o bien

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists p \in \mathbb{R}^1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} p \right\}$$

o bien

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists p \in \mathbb{R}^1 : x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} p \right\}$$



11 / 27

# 10 Ecuaciones cartesianas (implícitas) y paramétricas de rectas y planos

Ecuaciones cartesianas (implícitas)  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ :

Por ejemplo

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid [1 \quad -1 \quad 1] x = (1,)\} = \text{c. sol. de } \{x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$$

Ecuaciones paramétricas:

Para el conjunto del ejemplo anterior

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists p \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p \right\}$$

En este caso dimensión 2 Un plano (hay dos parámetros  $a$  y  $b$ )  
plano plano

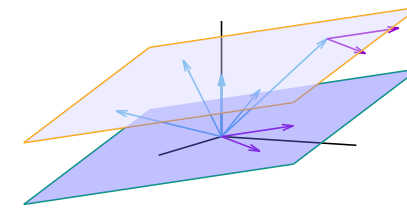
12 / 27

o bien

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists p \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p \right\}$$

pero también

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists p \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p \right\}$$



13 / 27

# 11 De las ecuaciones paramétricas a las cartesianas

$$\mathcal{C}(A^T) \perp \mathcal{N}(A)$$

Considere

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists p \in \mathbb{R}^k : x = s + [n_1; \dots; n_k] p \right\}.$$

Si encontramos  $A$  tal que  $An_i = 0$  entonces si  $x \in H$

$$Ax = As + \underbrace{A[n_1; \dots; n_k]}_0 p \Rightarrow Ax = b, \text{ donde } b = As.$$

Por tanto

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}.$$

14 / 27

# 12 De la solución al sistema de ecuaciones

Ecuaciones implícitas del plano  $P$  paralelo al generado por  $(1, 2, 0, -2)$  y  $(0, 0, 1, 3)$  que pasa por  $s = (1, 3, 1, 1)$ .

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \exists a, b \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \exists p \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} p \right\}$$

Necesitamos vectores perpendiculares a  $(1, 2, 0, -2)$  y a  $(0, 0, 1, 3)$

15 / 27

### 13 De la solución al sistema de ecuaciones

$$\mathbf{x} = (x, y, z, w,); \quad \mathbf{s} = (1, 3, 1, 1,).$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ x & y & z & w & \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{[(-2)\mathbf{1}+2] \\ [(2)\mathbf{1}+4]}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ x & y-2x & z & w+2x & \end{array} \right] \xrightarrow{[(-3)\mathbf{3}+4]} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ x & y-2x & z & w+2x-3z & \end{array} \right]$$

Así  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ ; y entonces  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2x + y \\ 2x + w - 3z \end{pmatrix}$  y

$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Por tanto  $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 2x - 3z + w = 0 \end{cases}$

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

16 / 27

### Problemas de la Lección 11

(L-11) PROBLEMA 1. Describa el conjunto de vectores en  $\mathbb{R}^3$  ortogonales a  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$   
(Hefferon, 2008, ejercicio 2.15 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 2.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos

$$\mathbf{x}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{x}_Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Encuentre una representación implícita de la recta anterior.

(L-11) PROBLEMA 3.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos

$$\mathbf{x}_P = (1, -3, 1) \text{ y } \mathbf{x}_Q = (-2, 4, 5).$$

(b) Encuentre una representación implícita (ecuaciones Cartesianas) de la recta.

(L-11) PROBLEMA 4. ¿Hay algún vector que sea perpendicular a sí mismo?

(L-11) PROBLEMA 5.

(a) Ecuación paramétrica de la recta paralela a  $2x - 3y = 5$  que pasa por el punto  $(1, 1)$ .

(b) Encuentre una representación implícita de la recta.

16 / 27

(L-11) PROBLEMA 6. Calcule la longitud de cada uno de estos vectores

(a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . (b)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . (c)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(d)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . (e)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.11 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 7. Encuentre un vector unitario (de norma uno) con la misma dirección que  $\mathbf{v} = (2, -1, 0, 4, -2)$ .

(L-11) PROBLEMA 8. Encuentre el valor de  $k$  de manera que estos vectores sean perpendiculares.

$$(k, 1), \quad (4, 3).$$

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.14 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 9. Escriba una matriz con las propiedades requeridas, o explique por qué es imposible:

(a) El espacio columna contiene  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , el espacio nulo contiene  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) El espacio fila contiene  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , y el espacio nulo contiene  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c)  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  tiene solución, y  $\mathbf{A}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) Cada fila es ortogonal a cada columna (y  $\mathbf{A}$  no es la matriz cero)

(e) La suma de columnas da una columna de ceros, la suma de filas suma una fila de unos.

(Strang, 2003, ejercicio 3 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 10. Si  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ , las columnas de  $\mathbf{B}$  pertenecen a \_\_\_\_\_ de  $\mathbf{A}$ . Las filas de  $\mathbf{A}$  están contenidas en el \_\_\_\_\_ de  $\mathbf{B}$ . Por qué no es posible que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  sean matrices 3 por 3 de rango 2?

(Strang, 2003, ejercicio 4 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 11. Suponga que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$  y que  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ . ¿Debe ocurrir que  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ?

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.20 del conjunto de problemas II.2.)

16 / 27

16 / 27

## (L-11) PROBLEMA 12.

- (a) Si  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tiene solución y  $\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{y}$  es perpendicular a \_\_\_\_.
- (b) Si  $\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}$  tiene solución y  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{x}$  es perpendicular a \_\_\_\_.
- (Strang, 2003, ejercicio 5 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 13. Demuestre, para  $\mathbb{R}^n$ , que si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son perpendiculares, entonces  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .  
(Hefferon, 2008, ejercicio 2.33 del conjunto de problemas II.2.)

## (L-11) PROBLEMA 14.

- (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto  $(0, 1, 1)$  y tiene por vectores directores  $(0, 1, 2)$  y  $(1, 1, 0)$ .
- (b) Escriba la ecuación implícita del mismo plano.

## (L-11) PROBLEMA 15.

- (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto  $(2, 1, 3)$  y es perpendicular a  $(3, 1, 1)$ .
- (b) Escriba la ecuación implícita del mismo plano.

(L-11) PROBLEMA 16. Encuentre una matriz de 1 por 3 cuyo espacio nulo conste de todos los vectores de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$ . Encuentre una matriz de 3 por 3 con el mismo espacio nulo.  
(Strang, 2007, ejercicio 9 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-11) PROBLEMA 17. Considere el sistema de ecuaciones  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) (1pts) Obtenga la solución al sistema.
- (b) (0.5pts) Explique por qué el conjunto de vectores solución al sistema anterior es una recta en  $\mathbb{R}^5$ . Indique un vector director y un punto por el que pasa la recta.
- (c) (1pts) Encuentre los vectores perpendiculares al vector director anterior. Pruebe que el conjunto de vectores perpendiculares a dicho vector forman un subespacio vectorial de dimensión 4. Encuentre una base de dicho subespacio.

(L-11) PROBLEMA 18. Consider  $\mathbf{A}$  with exactly two special solutions for  $\mathbf{x}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{s}_1 = (3, 1, 0, 0), \text{ and } \mathbf{s}_2 = (6, 0, 2, 1).$$

- (a) Find the reduced row echelon form  $\mathbf{R}$  of  $\mathbf{A}$ .
- (b) What is the row space of  $\mathbf{A}$ ?
- (c) What is the complete solution to  $\mathbf{x}\mathbf{R} = (3, 6)$ ?
- (d) Find a combination of rows 2, 3, 4 that equals  $\mathbf{0}$ . (Not OK to use  $0_{(2)}\mathbf{A} + 0_{(3)}\mathbf{A} + 0_{(4)}\mathbf{A}$ ). The problem is to show that these rows are dependent.)

## 1 Esquema de la Lección 12

## Esquema de la Lección 12

- Proyecciones
- Matrices proyección

## 2 Suma directa de subespacios

$\mathbb{R}^n$  es suma directa de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  ( $\mathbb{R}^n = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ )

si todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tiene una descomposición única  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,

con  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$  y  $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ .

## Ejemplo

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{C}(\mathbf{A}^T) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$$

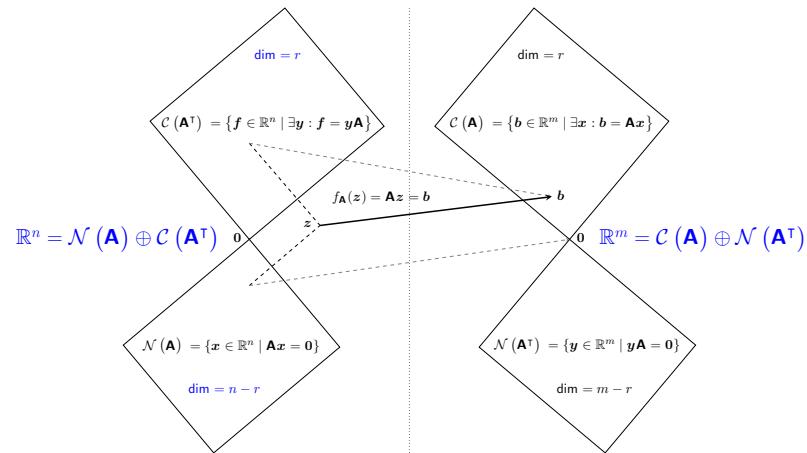
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Base de } \mathbb{R}^3; \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \exists c_1, c_2, c_3 \left| \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \right.$$

donde  $\mathbf{a} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}^T)$  y  $\mathbf{b} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ .

$$\text{También } \mathbb{R}^m = \mathcal{C}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$$

### 3 El gran esquema: suma directa de complementos ortogonales



$$C(A^T) \perp N(A) \\ f \cdot x = yAx = y \cdot 0$$

$$C(A) \perp N(A^T) \\ y \cdot b = yAx = 0 \cdot x$$

19 / 27

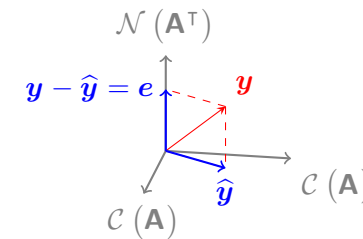
### 4 Proyección ortogonal sobre $C(A)$

Sea  $A$  ; como  $\mathbb{R}^m = C(A) \oplus N(A^T)$ , para todo  $y \in \mathbb{R}^m$

 $m \times n$ 

$$y = \hat{y} + e; \quad (e = y - \hat{y})$$

con  $\hat{y} \in C(A)$  y  $e \perp \hat{y}$ , así que  $e \in N(A^T)$ .



¿Cómo calcular  $\hat{y} \in C(A)$ ?

20 / 27

### 5 Ecuaciones normales

Sea  $A$  . Buscamos la descomposición  $y = \hat{y} + e$  donde

 $m \times n$ 

$$\hat{y} \in C(A) \quad \text{y} \quad (\hat{y} - y) \in N(A^T)$$

Por tanto

$$A\hat{x} = \hat{y} \quad \Leftrightarrow \quad (A\hat{x} - y) \in N(A^T)$$

Es decir

$$A\hat{x} = \hat{y} \quad \Leftrightarrow \quad A^T(A\hat{x} - y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A^TA)\hat{x} = A^Ty$$

¡Sistemas equivalentes!  $\Rightarrow N(A) = N(A^TA) \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^TA)$

solución única  $\hat{x}$  si y sólo si  $A$  tiene columnas independientes

21 / 27

### 6 Solución a las ecuaciones normales (rango completo por columnas)

$$A^TA\hat{x} = A^Ty \quad (A \text{ de rango completo por columnas})$$

La solución

$$\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Ty$$

La proyección

$$\hat{y} = A\hat{x} = A(A^TA)^{-1}A^Ty$$

La matriz de proyección

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T$$

$$\hat{y} = Py$$

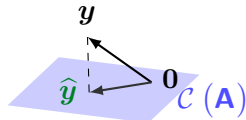
$P$ : Simétrica e idempotente.

22 / 27

## 7 Matriz proyección

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

La proyección  $\mathbf{P}\mathbf{y}$  es el punto  $\hat{\mathbf{y}}$  de  $\mathcal{C}(\mathbf{A})$  más próximo a  $\mathbf{y}$

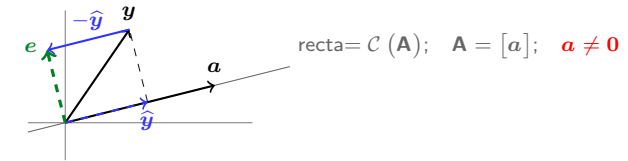


Casos extremos:

- Si  $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$  entonces  $\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}$
- Si  $\mathbf{y} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$  entonces  $\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{0}$

23 / 27

## 8 Proyección sobre una recta



Queremos encontrar el punto  $\hat{\mathbf{y}}$  sobre la línea más próximo a  $\mathbf{y}$

$$\hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{C}([\mathbf{a}]) \quad \perp \quad \mathbf{e} = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \in \mathcal{N}([\mathbf{a}]^T).$$

$$\hat{\mathbf{y}} \text{ es algún múltiplo de } \mathbf{a}: \quad \hat{\mathbf{y}} = [\mathbf{a}](\hat{x},)$$

Cómo:

$$[\mathbf{a}]^T [\mathbf{a}] \hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{a}]^T \mathbf{y}$$

La solución

$$\hat{\mathbf{x}} = ([\mathbf{a}]^T [\mathbf{a}])^{-1} [\mathbf{a}]^T \mathbf{y}$$

La proyección

$$\hat{\mathbf{y}} = [\mathbf{a}] \hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{a}] ([\mathbf{a}]^T [\mathbf{a}])^{-1} [\mathbf{a}]^T \mathbf{y}$$

La matriz de proyección

$$\mathbf{P} = [\mathbf{a}] ([\mathbf{a}]^T [\mathbf{a}])^{-1} [\mathbf{a}]^T$$

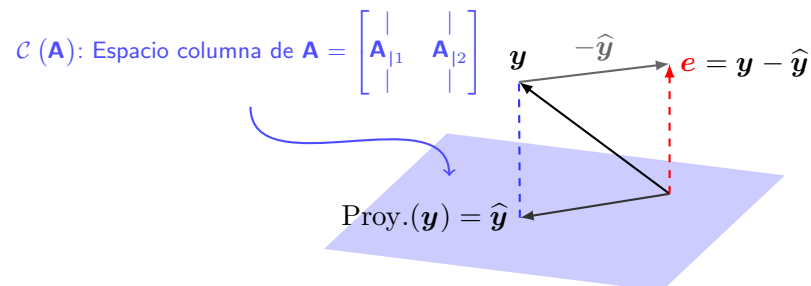
24 / 27

## 9 Proyección sobre un plano

¿Por qué proyectar?

Así que resolveremos

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = (\text{Proy. de } \mathbf{y} \text{ sobre } \mathcal{C}(\mathbf{A})).$$

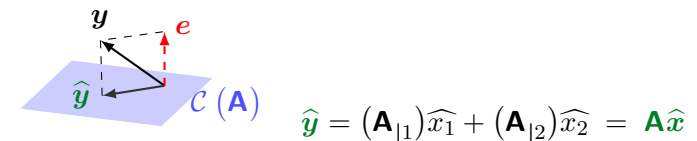


$$(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{e} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A}) \quad \dots \text{ese es el hecho fundamental.}$$

25 / 27

## 10 Ecuaciones normales

¿Qué es la proyección de  $\mathbf{y}$  sobre el espacio columna de  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{A}_{|1} & \mathbf{A}_{|2} \\ | & | \end{bmatrix}$ ?



$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{A}_{|1})\hat{x}_1 + (\mathbf{A}_{|2})\hat{x}_2 = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

“Encontrar una combinación de columnas tal que  $\mathbf{e} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$ ”

$$\mathbf{e} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e} \in$$

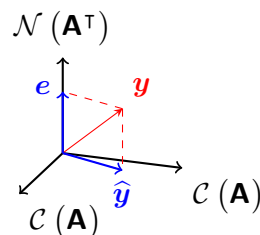
$$\mathbf{A}^T \mathbf{e} = \mathbf{A}^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{A}^T (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

26 / 27



# 11 Dos proyecciones

$y$  tiene un componente  $\hat{y}$  en  $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ , y otro  $e$  en  $\mathcal{C}(\mathbf{A})^\perp$ .



$$\hat{y} + e = y$$

$$\hat{y} = \mathbf{P}y \quad \text{es la proyección sobre } \mathcal{C}(\mathbf{A})$$

$$e = (\mathbf{I} - \mathbf{P})y \quad \text{es la proyección sobre } \mathcal{C}(\mathbf{A})^\perp$$

27 / 27

(L-12) PROBLEMA 3. Aunque los dibujos nos han guiado el desarrollo del tema, no estamos restringidos a espacios que podamos dibujar. En  $\mathbb{R}^4$  proyecte el vector sobre la recta.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \mid \exists p \in \mathbb{R}^1, v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} p \right\}.$$

(L-12) PROBLEMA 4.

(a) Proyecte el vector  $b = (1, 1)$  sobre las rectas generadas por  $a_1 = (1, 0)$  y  $a_2 = (1, 2)$ . Sume las proyecciones:  $\hat{b}_1 + \hat{b}_2$ . Las proyecciones no suman  $b$  porque los vectores  $a_1$  y  $a_2$  no son ortogonales.

(b) La proyección de  $b$  sobre el plano generado por  $a_1$  y  $a_2$  será igual a  $b$ . Encuentre  $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$  para  $\mathbf{A} = [a_1; a_2]$ .

(Strang, 2003, ejercicio 8–9 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-12) PROBLEMA 5.

(a) Si  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$  demuestre que  $(\mathbf{I} - \mathbf{P})^2 = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ . Cuando  $\mathbf{P}$  proyecta sobre el espacio columna de  $\mathbf{A}$ ,  $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$  proyecta sobre el \_\_\_\_\_.

(b) Si  $\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}$  demuestre que  $(\mathbf{I} - \mathbf{P})^\top = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ .

(Strang, 2003, ejercicio 17 del conjunto de problemas 4.2.)

27 / 27

# Problemas de la Lección 12

(L-12) PROBLEMA 1. Proyecte el primer vector ( $b$ ) sobre la recta generada por el segundo vector ( $a$ ). Compruebe que  $e$  es perpendicular a  $a$ . Encuentre la matriz proyección  $\mathbf{P} = [\mathbf{a}]([\mathbf{a}]^\top [\mathbf{a}])^{-1} [\mathbf{a}]^\top$  sobre la recta generada por cada vector  $a$ . Verifique en cada caso que  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ . Multiplique  $\mathbf{P}b$  en cada caso para calcular la proyección  $\hat{b}$ .

$$(a) b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(b) b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(c) b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$(d) b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(Hefferon, 2008, ejercicio 1.6 del conjunto de problemas VI.1.)

(L-12) PROBLEMA 2. Proyecte ortogonalmente el vector sobre la recta.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{La recta: } \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \exists p \in \mathbb{R}^1, v = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} p \right\}.$$

$$(b) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{la recta descrita por la ecuación } y = 3x.$$

27 / 27

(L-12) PROBLEMA 6.

(a) Calcule las matrices proyección  $\mathbf{P} = [\mathbf{a}]([\mathbf{a}]^\top [\mathbf{a}])^{-1} [\mathbf{a}]^\top$  sobre las rectas que pasan por  $a_1 = (-1, 2, 2)$  y  $a_2 = (2, 2, -1)$ . Compruebe que  $a_1 \perp a_2$ . Multiplique esas matrices proyección y explique por qué su producto  $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$  es lo que es.

(b) Proyecte  $b = (1, 0, 0)$  sobre las rectas generadas por  $a_1$  y  $a_2$  y también por  $a_3 = (2, -1, 2)$ . Sume las tres proyecciones  $\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3$ .

(c) Encuentre la matriz proyección  $\mathbf{P}_3$  sobre  $\mathcal{L}([a_3;]) = \mathcal{L}([(2, -1, 2);])$ . Verifique que  $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{I}$ . ¡La base  $a_1, a_2, a_3$  es ortogonal!

(Strang, 2003, ejercicio 5–7 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-12) PROBLEMA 7. Proyecte  $b$  sobre el espacio columna de  $\mathbf{A}$  resolviendo  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \hat{x} = \mathbf{A}^\top b$  y después calculando  $\hat{b} = \mathbf{A} \hat{x}$ . Encuentre  $e = b - \hat{b}$ .

$$(a) \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(c) Calcule las matrices proyección  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  sobre los espacios columna. Verifique que  $\mathbf{P}_1 b_1$  da la primera proyección  $\hat{b}_1$ . Verifique también que  $(\mathbf{P}_2)^2 = \mathbf{P}_2$ .

(Strang, 2003, ejercicio 11–12 del conjunto de problemas 4.2.)

27 / 27

Hefferon, J. (2008). *Linear Algebra*. Jim Hefferon, Colchester, Vermont USA. This text is Free.

URL

<ftp://joshua.smcvt.edu/pub/hefferon/book/book.pdf>

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*.

Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.