Matemáticas II

Marcos Bujosa

03/05/2023

Puede encontrar la última versión de este material en

https://github.com/mbujosab/MatematicasII/tree/main/Esp

Índice

Part VII

Visión geométrica de la estadística

LECCIÓN 19: Estadística

Lección 19

(**Lección** 19) T-1 Esquema de la Lección 19

Esquema de la *Lección 19*

- Media
- Desviación típica y varianza
- Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

F1

(**Lección** 19) T-2 Una restrcción en estadística y probabilidad

La norma del vector constante "uno" es 1

Esto no se cumple con el producto punto de $\mathbb{R}^m$ $(m > 1)$

$$\|\mathbf{1}\|^2 = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \sum_{i=1}^{m} 1 = m.$$

Nuevo producto escalar en $\mathbb{R}^m$ para la estadística

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_s = \frac{1}{m}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$$

(de manera que: $\|\mathbf{1}\|^2 = \frac{1}{m}\Big(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}\Big) = 1$)

F2

(**Lección** 19) T-3 La media aritmética

La media aritmética $\mu_{\boldsymbol{y}}$ es el producto escalar de $\boldsymbol{y}$ con 1

$$\mu_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{m}\Big(\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{y}\Big), \qquad \text{es decir,} \quad \mu_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$$

La media aritmética $\mu_{\boldsymbol{y}}$ es el valor por el que multiplicar $\mathbf{1}$ para obtener la proyección ortogonal de $\boldsymbol{y}$ sobre $\mathcal{L}\big([\mathbf{1};]\big)$

$\overline{\boldsymbol{y}}$: proyección de $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ sobre la recta $\mathcal{L}\big([\mathbf{1};]\big) \subset \mathbb{R}^m$

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{y}} = \mathbf{1}\widehat{a}} \quad \text{y} \quad \boxed{(\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}}) \perp \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{m}(\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}}) \cdot \mathbf{1} = 0}$$

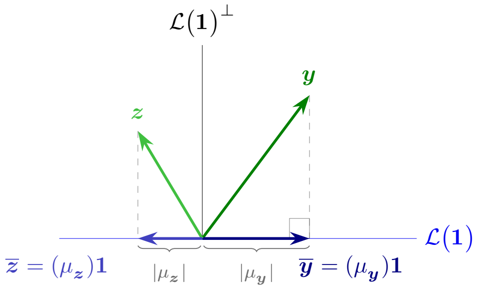
$$\frac{1}{m}(\boldsymbol{y} - \mathbf{1}\widehat{a}) \cdot \mathbf{1} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{m}\Big(\boldsymbol{y} \cdot \mathbf{1}\Big) - \frac{1}{m}\Big(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}\Big)\widehat{a} = 0;$$

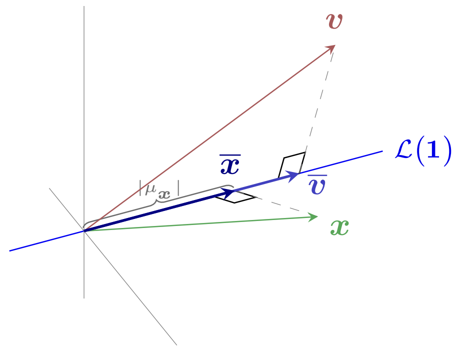
Por tanto

$$\widehat{a} \;=\; \frac{1}{m}\Big(\boldsymbol{y} \cdot \mathbf{1}\Big) \;=\; \mu_{\boldsymbol{y}}$$

F3

(**Lección** 19) T-4 La media aritmética

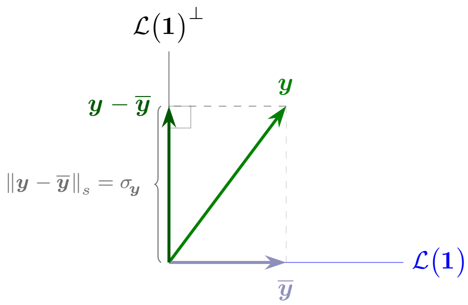


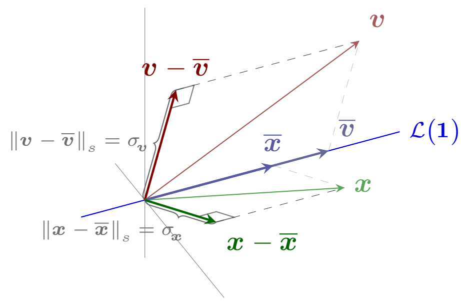


F4

(**Lección** 19) T-5 Desviación típica

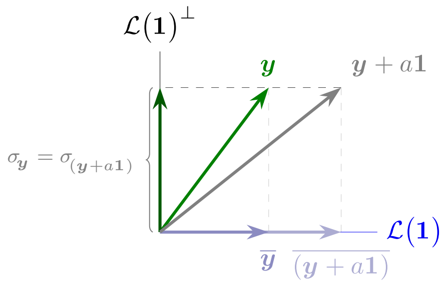
$$\sigma_{\boldsymbol{y}} = \|\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}}\|.$$





F5

(**Lección** 19) T-6 Vectores constantes y vectores de media nula



$\sigma_{(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}}$

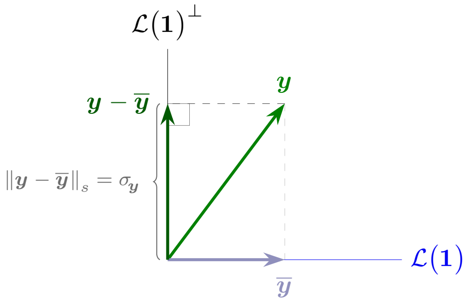
Sumar a $\boldsymbol{y}$ un vector constante $a\mathbf{1}$ no cambia la desviación típica.

$$\sigma_{\boldsymbol{z}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{z} = a\mathbf{1}; \qquad \mu_{\boldsymbol{z}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{z} \perp \mathbf{1}$$

F6

(**Lección** 19) T-7 Varianza y el Teorema de Pitagoras

$$\sigma_{\boldsymbol{y}}^2 \;=\; \|\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2 \;=\; \frac{1}{m}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})\cdot(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}) \;=\; \frac{1}{m}\sum_i (y_i-\mu_{\boldsymbol{y}})^2.$$

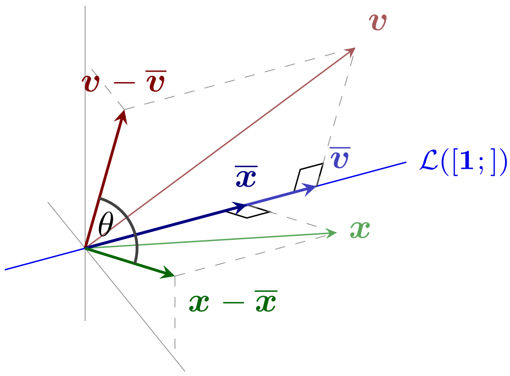


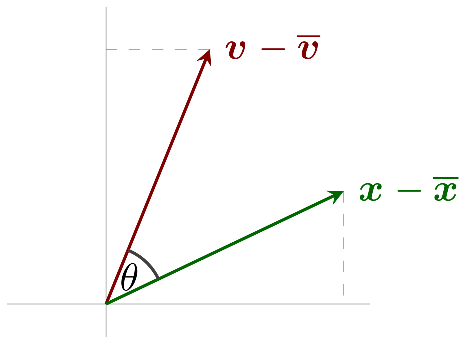
$$\sigma_{\boldsymbol{y}}^2 \;=\; \|\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2 \;=\; \|\boldsymbol{y}\|^2-\|\overline{\boldsymbol{y}}\|^2 \;=\; \frac{1}{m}\Big(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}\Big)-\mu_{\boldsymbol{y}}^2, \;=\; \frac{\sum_i y_i^2}{m}-\mu_{\boldsymbol{y}}^2.$$

F7

(**Lección** 19) T-8 Covarianza y correlación

$$\sigma_{\boldsymbol{xy}} \;=\; \frac{1}{m}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})\cdot(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}});$$





$$\rho_{\boldsymbol{xy}} \;=\; \frac{\frac{1}{m}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})\cdot(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})}{\|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})\|\cdot\|(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})\|} \;=\; \frac{\sigma_{\boldsymbol{xy}}}{\sqrt{\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{y}}}} \;=\; \cos(\theta).$$

F8

(**Lección** 19) T-9 Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

Sea $\mathbf{X}$ tal que $\mathcal{L}\big([\mathbf{1};]\big)\subset\mathcal{C}\left(\mathbf{X}\right)$.
Denotamos con $\widehat{\boldsymbol{y}}$ la proyección ortogonal de $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$ sobre $\mathcal{C}\left(\mathbf{X}\right)$

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{y}}=\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}} \quad \text{y} \quad \boxed{(\boldsymbol{y}-\widehat{\boldsymbol{y}})\;\perp\;\mathcal{C}\left(\mathbf{X}\right)\;\Rightarrow\;\tfrac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}(\boldsymbol{y}-\widehat{\boldsymbol{y}})=\mathbf{0}}$$

$$\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}(\boldsymbol{y}-\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})=\mathbf{0} \quad\iff\quad \frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\boldsymbol{y}-\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{0}.$$

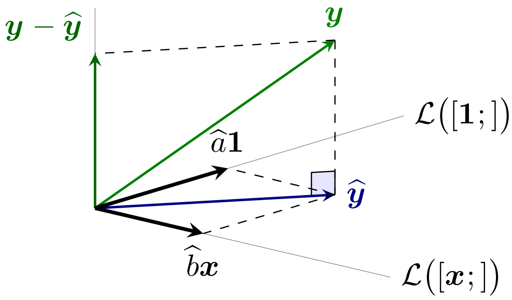
Por tanto

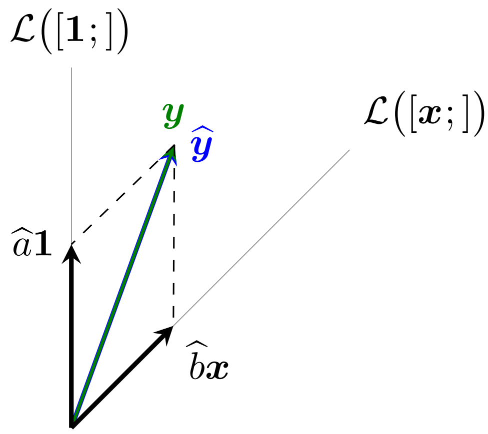
$$\Big(\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\mathbf{X}\Big)\widehat{\boldsymbol{\beta}}=\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\boldsymbol{y}.$$

F9

(**Lección** 19) T-10 Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

Si $\mathbf{X} = [\mathbf{1}; \boldsymbol{x};]$ es de rango 2.





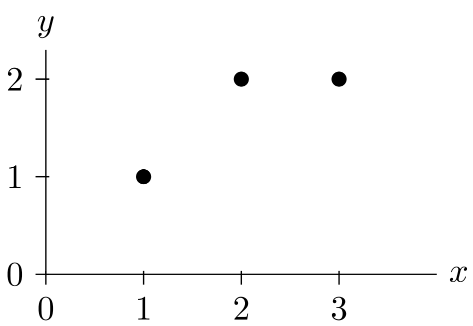
$$\left(\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\mathbf{X}\right)\begin{pmatrix}\widehat{a}\\ \widehat{b}\end{pmatrix} = \frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\boldsymbol{y}.$$

F10

(**Lección** 19) T-11 Aplicación: Mínimos cuadrados (Ajuste lineal)

"buscando la mejor recta de ajuste $\widehat{y} = \widehat{a} + \widehat{b}x$"

Puntos $(x, y,)$: $(1, 1,)$; $(2, 2,)$; $(3, 2,)$



$$\begin{cases} a + 1b & = 1\\ a + 2b & = 2\\ a + 3b & = 2\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix} \quad (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{y} \text{ Sin solución})$$

F11

(**Lección** 19) T-**12** **Aplicación: Mínimos cuadrados (Ajuste lineal)**

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{y} \quad \text{(Sin solución)} \;\rightarrow\; \left(\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\mathbf{X}\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}}=\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\boldsymbol{y} \quad\rightarrow\quad \widehat{\boldsymbol{y}}=\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}.$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{a}\\\widehat{b}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3&6\\6&14\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{a}\\\widehat{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\11\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \widehat{a}=\frac{2}{3};\quad \widehat{b}=\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{Mejor solución: } \tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}x}$$

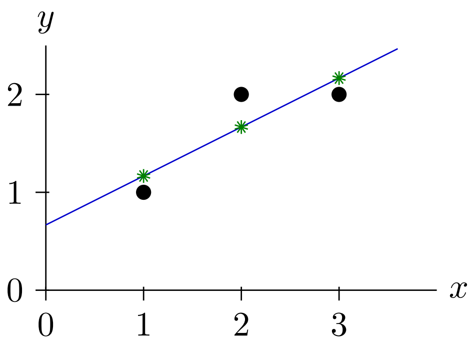
F12

$$\widehat{\boldsymbol{y}}=\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{b}}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2/3\\1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/6\\10/6\\13/6\end{pmatrix}$$

y

$$\widehat{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{y}-\widehat{\boldsymbol{y}}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7/6\\10/6\\13/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/6\\2/6\\-1/6\end{pmatrix}$$

(**Lección** 19) T-**13** **Aplicación: Mínimos cuadrados (Ajuste lineal)**



$$\widehat{\boldsymbol{y}}=\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{a}\\\widehat{b}\end{pmatrix}\longrightarrow \widehat{\boldsymbol{y}}=\begin{pmatrix}7/6\\10/6\\13/6\end{pmatrix}\longrightarrow \widehat{\boldsymbol{e}}=\begin{pmatrix}-1/6\\2/6\\-1/6\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=\widehat{\boldsymbol{y}}+\widehat{\boldsymbol{e}} \quad \text{y} \quad \begin{cases}\widehat{\boldsymbol{e}}\cdot\widehat{\boldsymbol{y}} &=0\\ \widehat{\boldsymbol{e}}\mathbf{X} &=\mathbf{0}\end{cases}.$$

F13

$$\widehat{\boldsymbol{e}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}=\begin{pmatrix}-1/6, & 2/6, & -1/6,\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7/6\\10/6\\13/6\end{pmatrix}=0;\qquad \widehat{\boldsymbol{e}}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1/6, & 2/6, & -1/6,\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0, & 0,\end{pmatrix}$$

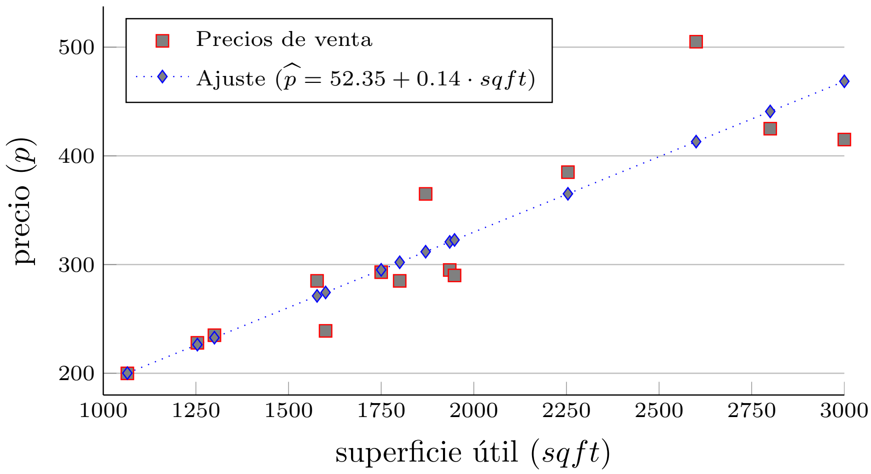
Ejemplo 1. [**precio de las viviendas:**]

Considere los datos del Cuadro 1 on the following page. Precios de venta (miles de dólares) y superficie útil (pies al cuadrado) de 14 casas unifamiliares en la comunidad *University City* de la ciudad de San Diego en California en 1990(**?**, pp. 78)

n	Precio ($\boldsymbol{y}$)	Superficie ($\boldsymbol{x}$)
1	199.9	1065
2	228.0	1254
3	235.0	1300
4	285.0	1577
5	239.0	1600
6	293.0	1750
7	285.0	1800
8	365.0	1870
9	295.0	1935
10	290.0	1948
11	385.0	2254
12	505.0	2600
13	425.0	2800
14	415.0	3000

(**Lección** 19) T-**14** **Aplicación: ajustando por mínimos cuadrados**

Precios de venta (miles de dólares) y superficie útil (pies al cuadrado) de 14 casas unifamiliares en la *University City* de la ciudad de San Diego en California en 1990 (**?**, pp. 78)



F14

Precios de venta (miles de dólares) y superficie útil (pies al cuadrado) de 14 casas unifamiliares en la comunidad

n	Precio	Superficie	Precio ajustado por Mínimos Cuadrados	Error $\widehat{e}$
1	199.9	1065	200.1200	-0.22000
2	228.0	1254	226.3438	1.65619
3	235.0	1300	232.7263	2.27368
4	285.0	1577	271.1602	13.83984
5	239.0	1600	274.3514	-35.35142
6	293.0	1750	295.1640	-2.16397
7	285.0	1800	302.1015	-17.10148
8	365.0	1870	311.8140	53.18600
9	295.0	1935	320.8328	-25.83278
10	290.0	1948	322.6365	-32.63653
11	385.0	2254	365.0941	19.90587
12	505.0	2600	413.1017	91.89826
13	425.0	2800	440.8518	-15.85180
14	415.0	3000	468.6019	-53.60187

University City de la ciudad de San Diego en California en 1990 (**?**, pp. 78)

Problemas de la Lección 19

(L-19) PROBLEMA 1. Con las medidas $\boldsymbol{y} = (0, 8, 8, 20,)$ tomadas en los instantes $\boldsymbol{x} = (0, 1, 3, 4,)$,

(a) Plantee y resuelva las ecuaciones normales $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$.
(b) Para el mejor ajuste lineal, encuentre los ajustes p_i y los cuatro errores e_i.
(c) ¿Cuál es el cuadrado de la norma del vector de errores $\|\boldsymbol{e}\|^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2$?
(d) Dibuje la recta de regresión
(e) Sustituya las medidas $\boldsymbol{y}$ por los valores ajustados $\boldsymbol{p} = (1, 5, 13, 17,)$ escriba las cuatro ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{p}$. Encuentre la solución exacta a $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{p}$
(f) Verifique que $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p} = (-1, 3, -5, 3,)$ es perpendicular a las dos columnas de $\mathbf{A}$.
(g) ¿Cuál es la distancia más corta $\|\boldsymbol{e}\|$ desde $\boldsymbol{y}$ al espacio columna de $\mathbf{A}$?

(**?**, ejercicio 1–3 del conjunto de problemas 4.3.)

(L-19) PROBLEMA 2.

(a) Escriba las tres ecuaciones $y = \alpha + \beta x$ dado el conjunto de datos: $y = 7$ para $x = -1$, $y = 7$ para $x = 1$, y $y = 21$ para $x = 2$. Encuentre la solución de mínimos cuadrados $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ y pinte el mejor ajuste lineal.
(b) Encuentre la proyección $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$. Es decir, tres valores del mejor ajuste lineal. Demuestre que el vector de error es $\boldsymbol{e} = (2, -6, 4,)$. ¿Por que es $\mathbf{P}\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$?

(L-19) PROBLEMA 3. Our measurements at times $t = 1, 2, 3$ are $b = 1, 4$, and b_3. We want to fit those points by the nearest line $C + Dt$, using least squares.

(a) Which value for b_3 will put the three measurements on a straight line? *Which line is it?* Will least squares choose that line if the third measurement is $b_3 = 9$? (Yes or no).
(b) What is the linear system $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ that would be solved exactly for $\boldsymbol{x} = (C, D)$ if the three points do lie on a line? Compute the projection matrix $\mathbf{P}$ onto the column space of $\mathbf{A}$.
(c) What is the rank of that projection matrix $\mathbf{P}$? How is the column space of $\mathbf{P}$ related to the column space of $\mathbf{A}$? (You can answer with or without the entries of $\mathbf{P}$ computed in (b).)
(d) Suppose $b_3 = 1$. Write down the equation for the best least squares solution $\widehat{\boldsymbol{x}}$, and show that the best straight line is horizontal.

MIT 18.06 - Quiz 2, November 2, 2005

Fin de los Problemas de la Lección 19

Soluciones

(L-19) Problema 1(a) Para los vectores $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{x}$, la matriz $\mathbf{A}$ viene dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$$

La ecuaciones normales son $\mathbf{A}^\intercal \mathbf{A} \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}^\intercal \boldsymbol{y}$, o

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 112 \end{pmatrix}$$

cuya solución es $\widehat{\alpha} = 1$, $\widehat{\beta} = 4$.

□

(L-19) Problema 1(b) Los cuatro valores ajustados con $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ vienen dados por

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Así, el vector de errores $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$ viene dado por

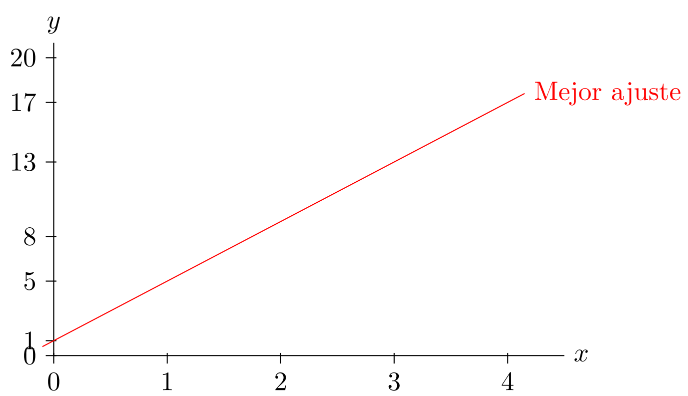
$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

□

(L-19) Problema 1(c) Es el menor valor posible para un ajuste lineal: $\|\boldsymbol{e}\|^2 = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} = (-1)^2 + 3^2 + (-5)^2 + 3^2 = 44$.

□

(L-19) Problema 1(d)



□

(L-19) Problema 1(e) Si los nuevos valores cambian a los dados en el enunciado, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\alpha + 0\beta =& 1\\ \alpha + 1\beta =& 5\\ \alpha + 3\beta =& 13\\ \alpha + 4\beta =& 17\end{aligned}$$

Cuya solución es $\alpha = 1$ y $\beta = 4$.

□

(L-19) Problema 1(f)

$$\boldsymbol{e}\mathbf{A} = \begin{pmatrix}-1, & 3, & -5, & 3,\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 0,\end{pmatrix}.$$

□

(L-19) Problema 1(g) La distancia mínima viene dada por $\|\boldsymbol{e}\| = \sqrt{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}} = \sqrt{44}$.

□

(L-19) Problema 2(a) Las ecuaciones son

$$\begin{aligned}\alpha - \beta =& 7\\ \alpha + \beta =& 7\\ \alpha + 2\beta =& 21\end{aligned}$$

Que se puede escribir como

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\ 7\\ 21\end{pmatrix}$$

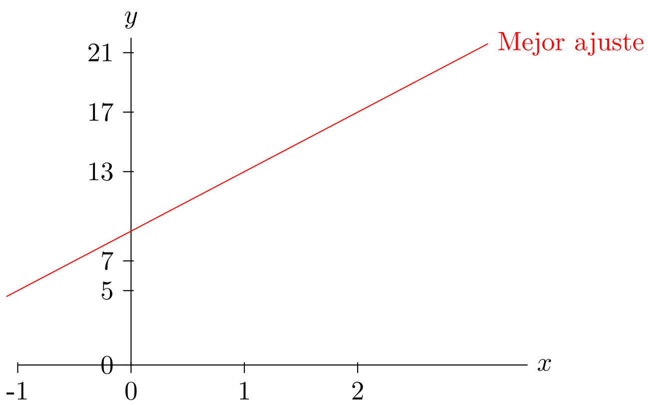
La solución de mínimos cuadrados se obtiene de $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$ que es este caso es

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}\\ \widehat{\beta}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 7\\ 21\end{pmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}\\ \widehat{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}35\\ 42\end{pmatrix}$$

que arroja los siguientes valores $\widehat{\alpha} = 9$, $\widehat{\beta} = 4$. Así que el mejor ajuste lineal es $\widehat{y} = 9 + 4x$.



□

(L-19) Problema 2(b)

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

que nos da los valores del mejor ajuste lineal. El vector de error $\boldsymbol{e}$ es

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La matrix $\mathbf{P}$ proyecta sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$, y $\boldsymbol{e}$ es en el espacio nulo por la izquierda, así que es ortogonal a $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

□

(L-19) Problema 3(a) The three data points lie on the same line when $b_3 = 7$. This line is $-2 + 3t$. If $b_3 = 9$, the least squares method will NOT choose this line. (A quick way to see this is from the fact that the line chosen by least squares will give the average of the given b's at the time equal to the average of the given t's; in this case, the best fit line would take the value $(1 + 3 + 9)/3 = 13/3$ at $t = (1 + 2 + 3)/3 = 2$, whereas our line gives 4 at $t = 2$.)

□

(L-19) Problema 3(b) The linear system for $\boldsymbol{x} = (C, D)$ would be the following:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

We compute the projection matrix $\mathbf{P}$ onto the column space of $\mathbf{A}$ using the projection matrix formula:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} =& \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ =& \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

(L-19) Problema 3(c) The column space of $\mathbf{P}$ is the space consisting of all the vectors $\mathbf{P}\boldsymbol{b}$, i.e. all the projections of vectors in $\mathbb{R}^3$ onto the column space of $\mathbf{A}$, which is precisely the column space of $\mathbf{A}$. Thus the rank of $\mathbf{P}$ is equal to the rank of $\mathbf{A}$, which is 2.

□

(L-19) Problema 3(d) The equation for the best least squares solution $\widehat{\boldsymbol{x}}$ is $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}$, where $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Writing out this system, we get

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

The solution to this system is $\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, so the best fit line is the horizontal line $b = 2$.

□