

# Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

15/01/2025

1 / 44

Matrices siempre **cuadradas** en este tema

## Esquema de la Lección 16

- **Autovalores, autovectores** (eigen, característicos, propios)
- $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$  *ecuación característica*
- $\text{tr}(\mathbf{A})$ ,  $\det \mathbf{A}$  (demo en la próxima lección)

2 / 44

Puede encontrar la última versión de este material en

<https://github.com/mbujosab/MatematicasII/tree/main/Esp>

– Marcos Bujosa. Copyright © 2008–2025  
Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

1 / 44

Considere la ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (\text{con } \mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

- **Autovalor** es cualquier  $\lambda$  para el que existan soluciones.
- Dichas soluciones *no nulas*  $\mathbf{x}$  se llaman **autovectores**.  
 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  tales que  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  es un **múltiplo** de  $\mathbf{x}$

Cuando  $\lambda$  es 0, ¿quienes son los auto-vectores?

3 / 44

### 3 Un ejemplo: matriz de proyección

- Proyección ortogonal
- ¿Qué vectores son autovectores?  
¿qué vectores quedan en la misma dirección?
- ¿Cuanto valen sus autovalores?
- ¿Hay más autovectores? ¿Con qué autovalor?
- Dos autoespacios

4 / 44

### 4 Otro ejemplo: matriz intercambio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Un vector que no cambie tras el intercambio?
- ¿Cuál es su autovalor?
- ¿Algún autovector asociado a  $\lambda_2 = -1$ ?

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_2$$

Nótese:  $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0 = \lambda_1 + \lambda_2$ ;  $\det \mathbf{A} = -1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ .

5 / 44

### 5 ¿Cómo calcular los autovalores y los autovectores?

¿Cómo resolver

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \underbrace{\lambda}_{?} \underbrace{\mathbf{x}}_{?} ?$$

Reescribamos ...

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} =$$

**idea** Para que esto ocurra ¿cómo debe ser la matriz  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ ?

¿Cuánto debe valer el determinante?  $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| =$

6 / 44

### 6 ¿Cómo calcular los autovalores y los autovectores?

1. Autovalores son los  $\lambda$ 's tales que:  $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| =$   
( Polinomio característico  $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$  )
2. ¿Cómo calcular los  $\mathbf{x}$  tales que  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ?

Autoespacio (conjunto de autovectores +  $\mathbf{0}$ ):

$$\mathcal{E}_{\lambda}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \right\}$$

*Espectro*: conjunto  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  de autovalores (raíces de  $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$ )

7 / 44

### 7 Ejemplo (¡primero los autovalores!)

Buscamos determinante nulo (Polinomio característico)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\text{Nótese: } \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 6 = \lambda_1 + \lambda_2; \quad \det \mathbf{A} = 8 = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

8 / 44

### 8 Ejemplo (después los autoespacios)

y ahora calculamos el espacio nulo  $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$  ... para cada  $\lambda$ .

Para  $\lambda_1 = 4$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 3 - 4 & 1 \\ 1 & 3 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Para  $\lambda_2 = 2$

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 3 - 2 & 1 \\ 1 & 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

¿Son los dos únicos autovectores?

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_i = \lambda \mathbf{x}_i; \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i = \lambda \mathbf{x}_i.$$

9 / 44

### 9 Otro ejemplo: Matriz rotación $90^\circ$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Cuanto suman los autovalores?
- ¿Cuanto vale el determinante?

Dificultades

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \quad (+) \cdot (-) = (+)?$$

¿Qué vector es paralelo a si mismo tras una rotación de  $90^\circ$ ?

$$\det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 =$$

10 / 44

### 10 Ejemplos aún peores

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(3 - \lambda) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

- Autovectores

- para  $\lambda_1$ :  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1; \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- para  $\lambda_2$ :

$\lambda = 3$  está repetido dos veces, pero  $\dim \mathcal{E}_3(\mathbf{A}) = 1$

$$\mu(3) = 2 \neq 1 = \gamma(3)$$

11 / 44

**Resumen:**

1. Los autovalores  $\lambda$  son aquellos que hacen singular a la matriz  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ , es decir, son las raíces del polinomio característico:  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ .
2. Una matriz de orden  $n \times n$  tiene polinomio característico de grado  $n$ .
3. Un polinomio de grado  $n$  tiene  $n$  raíces (quizá algunas raíces repetidas).
4. La suma de los autovalores es igual a la suma de los elementos de la diagonal de la matriz (traza).
5. El producto de los autovalores es igual al determinante.
6. Los autovectores asociados a  $\lambda$  son los vectores **no nulos** de  $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ .

12 / 44

**Problemas de la Lección 16**

(L-16) PROBLEMA 1. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -3 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Los autovalores de  $\mathbf{A}$  son  $-1$ ,  $1$  y  $2$ ; y dos auto-vectores son

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Compruebe que estos vectores son efectivamente auto-vectores de  $\mathbf{A}$ . ¿Cuales son sus correspondientes autovalores?

(b) Encuentre un tercer auto-vector correspondiente al tercer auto-valor.

(L-16) PROBLEMA 2. Encuentre los valores y vectores característicos de

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

12 / 44

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 12 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-16) PROBLEMA 3. Si  $\mathbf{B}$  tiene autovalores 1, 2, 3,  $\mathbf{C}$  tiene autovalores 4, 5, 6, y  $\mathbf{D}$  tiene autovalores 7, 8, 9, ¿Qué autovalores tiene la matriz de orden 6 por 6 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ ? donde  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  son matrices triangulares superiores.

(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-16) PROBLEMA 4. Encuentre los autovalores y autovectores de las siguientes matrices

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 5.1.)

12 / 44

(L-16) PROBLEMA 5. Los autovalores de  $\mathbf{A}$  son iguales a los autovalores  $\mathbf{A}^T$ . Esto se debe a que  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$  es igual a  $\det(\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{I})$ .

(a) Lo anterior es cierto porque \_\_\_\_\_

(b) Demuestre con un ejemplo que, sin embargo, los auto-vectores de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}^T$  no son los mismos.

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-16) PROBLEMA 6. Sea  $\mathbf{B}$  y un autovector  $\mathbf{x}$  con autovalor asociado  $\lambda$ , es decir  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ; sea también  $\mathbf{A} = (\mathbf{B} + \alpha \mathbf{I})$ . Demuestre que  $\mathbf{x}$  es también un autovector de  $\mathbf{A}$ , pero con el autovalor asociado  $(\lambda + \alpha)$ .

(L-16) PROBLEMA 7.

(a) Encuentre los autovalores y los auto-vectores de la matriz  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ .

Compruebe que la traza es igual a la suma de los autovalores, y que el determinante es igual a su producto.

(b) Si consideramos una nueva matriz, generada a partir de la anterior como

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 7\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

¿Cuáles son los autovalores y auto-vectores de la nueva matriz, y como están relacionados con los de  $\mathbf{A}$ ?

(Strang, 2007, ejercicio 1 y 3 del conjunto de problemas 5.1.)

12 / 44

(L-16) PROBLEMA 8. Suponga que  $\lambda$  es un auto-valor de  $\mathbf{A}$ , y que  $\mathbf{x}$  es un auto-vector tal que  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ .

- (a) Demuestre que ese mismo  $\mathbf{x}$  es un auto-vector de  $\mathbf{B} = \mathbf{A} - 7\mathbf{I}$ , y encuentre el correspondiente auto-valor de  $\mathbf{B}$ .
- (b) Suponga que  $\lambda \neq 0$  ( y que  $\mathbf{A}$  es invertible), demuestre que  $\mathbf{x}$  también es un auto-vector de  $\mathbf{A}^{-1}$ , y encuentre el correspondiente auto-valor. ¿Qué relación tiene con  $\lambda$ ?

(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-16) PROBLEMA 9. Suponga que  $\mathbf{A}$  es una matriz de dimensiones  $n \times n$ , y que  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ . ¿Qué posibles valores pueden tomar los autovalores de  $\mathbf{A}$ ?

(L-16) PROBLEMA 10. Suponga la matriz  $\mathbf{A}$  con autovalores 1, 2 y 3. Si  $\mathbf{v}_1$  es un auto-vector asociado al auto-valor 1,  $\mathbf{v}_2$  al auto-valor 2 y  $\mathbf{v}_3$  al auto-valor 3; entonces ¿cuanto es  $\mathbf{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$ ?

(L-16) PROBLEMA 11. Proporcione un ejemplo que muestre que los auto-valores pueden cambiar cuando un múltiplo de una columna se resta de otra. ¿Por qué los pasos de eliminación no modifican los autovalores nulos?  
(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-16) PROBLEMA 12. El polinomio característico de una matriz  $\mathbf{A}$  se puede factorizar como

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Demuestre, partiendo de esta factorización, que el determinante de  $\mathbf{A}$  es igual al producto de sus valores propios (autovalores). Para ello haga una elección inteligente del valor de  $\lambda$ .  
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-16) PROBLEMA 13. Calcule los valores característicos (autovalores o valores propios) y los vectores característicos de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}^2$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^2$  tiene los mismos \_\_\_\_\_ que  $\mathbf{A}$ . Cuando los autovalores de  $\mathbf{A}$  son  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , los autovalores de  $\mathbf{A}^2$  son \_\_\_\_\_.  
(Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-16) PROBLEMA 14. Suponga que los valores característicos de  $\mathbf{A}$  son 1, 2 y 4, ¿cuál es la traza de  $\mathbf{A}^2$ ? ¿Cuál es el determinante de  $(\mathbf{A}^{-1})^T$ ?  
(Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 15. The equation  $(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{b}$  has no solution for some right-hand side  $\mathbf{b}$ . Give as much information as possible about the eigenvalues of the matrix  $\mathbf{A}$  (the matrix  $\mathbf{A}$  is diagonalizable).

(L-16) PROBLEMA 16. You are given the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

One of the eigenvalues is  $\lambda = 1$ . What are the eigenvalues of  $\mathbf{A}$ ? [Hint: Very little calculation required! You should be able to see another eigenvalue by inspection of the form of  $\mathbf{A}$ , and the third by an easy calculation. You shouldn't need to compute  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$  unless you really want to do it the hard way.]

## 1 Esquema de la Lección 17

### Esquema de la Lección 17

- Matrices semejantes:  $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$
- Diagonalizando una matriz por bloques triangulares

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{esp}(\tau_p^{-1} \dots \tau_1^{-1})]{\tau_1 \dots \tau_p} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \mathbf{S} = \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_p}.$$

- Matrices diagonalizables: cuando  $\mathbf{C}$  es diagonal.

## 2 Matrices semejantes

### Semejanza

**A** y **C** son semejantes si existe **S** invertible tal que

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$$

Si **A** y **C** son semejantes (*mirar demos en el libro*):

- Mismo determinante:  $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{C}$
- Mismo polinomio característico:  $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = |\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}|$
- Mismos autovalores y con las mismas multiplicidades algebraica y geométrica.
- La misma traza.

Trans. Elem. inversas *espejo*:  $(\mathbf{I}_{(\tau_1 \dots \tau_k)})^{-1} = \text{esp}(\tau_k^{-1} \dots \tau_1^{-1}) \mathbf{I}$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \xrightarrow{[(\alpha_j)j+i]} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \xrightarrow{[(\frac{1}{\alpha})j]} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} \text{ similar a } \text{esp}(\tau_1 \dots \tau_k)^{-1} \mathbf{A} \tau_1 \dots \tau_k$$

14 / 44

## 3 Diagonalizando por bloques una matriz (matriz dentada)

Sea  $\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{C} & \\ \hline \mathbf{*} & \mathbf{L} \end{array} \right] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  donde

**C** (de orden  $m$ ) es singular y **L** es triangular inferior e invertible; entonces existe **R** invertible tal que

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} * \\ m \times (m-1) \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline * & \begin{array}{c} d_{m+1} \\ d_{m+2} \\ \vdots \\ d_n \end{array} \end{array} \right] \begin{array}{c} \beta_{m+1} \\ * \quad \beta_{m+2} \\ * \quad * \quad \ddots \\ * \quad * \quad \dots \quad \beta_n \end{array}$$

$$(\dots [(-\alpha_j) \tau_{m+j}] \dots) \mathbf{A} (\dots [(\alpha_j) \tau_{j+m}] \dots); \quad j = 1, \dots, m-1.$$

15 / 44

## 4 Diagonalizando por bloques una matriz (matriz dentada)

Sea  $\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{C} & \\ \hline \mathbf{*} & \mathbf{L} \end{array} \right] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  donde

**C** (de orden  $m$ ) es singular y **L** es triangular inferior e invertible, entonces existe **S** = **RP** (invertible) tal que

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{P} = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} * \\ m \times (m-1) \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline * & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array} \right] \begin{array}{c} \beta_{m+1} \\ * \quad \beta_{m+2} \\ * \quad * \quad \ddots \\ * \quad * \quad \dots \quad \beta_n \end{array}$$

$$(\dots [(-\alpha_j) \tau_{m+j}] \dots) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} (\dots [(\alpha_j) \tau_{j+m}] \dots); \quad j = m+1, \dots, n.$$

16 / 44

## 5 Un ejemplo muy sencillo

### Ejemplo

Sea  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$  con autovalores 0, 1 y 1.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-) \\ \text{OI} \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \tau \\ [(1)1+2] \\ [(2)3+2] \\ [2 \rightleftharpoons 3] \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \tau \\ [2 \rightleftharpoons 3] \\ [(-2)2+3] \\ [(-1)2+1] \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (+) \\ \text{OI} \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{diagonal}}$$

17 / 44

## 6 Un ejemplo no tan sencillo

### Ejemplo

Sea  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -9 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$  con autovalores 1, 1 y 0.

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow[II]{(-)} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & -9 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [(1)1+3] \\ [(-2)2+3] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [(2)3+2] \\ [(-1)3+1] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[II]{(+)} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
 \xrightarrow[II]{(-)} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{[(-1)1+2]} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{[(1)2+1]} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[II]{(+)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
 \xrightarrow[OI]{(-)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [(-1)2+1] \\ [(4)3+1] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [(-4)1+3] \\ [(1)1+2] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[OI]{(+)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [(-4)1+3] \\ [(1)1+2] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

18 / 44

## 7 Toda matriz es semejante a otra matriz dentada

Para toda  $\mathbf{A}$  existe  $\mathbf{S}$  tal que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{C}$$

donde  $\mathbf{C}$ , dentada, tiene los autovalores en la diagonal

### Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -9 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{dentada}}$$

### Consecuencias

- $\sum \lambda_i = \text{tr}(\mathbf{A})$  y  $\prod \lambda_i = \det \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}\mathbf{S}_{|j} = \mathbf{S}\mathbf{C}_{|j} \Rightarrow$  para  $j$  tal que  $\mathbf{C}_{|j} = \lambda_i \mathbf{I}_{|j}$ :  
 $\mathbf{A}(\mathbf{S}_{|j}) = \lambda_i(\mathbf{S}_{|j}) \Rightarrow \mathbf{S}_{|j}$  es un autovector.

19 / 44

## 8 De vuelta al ejemplo sencillo y “desdentado”

Sea  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$  con autovalores 0, 1 y 1.

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow[OI]{(-)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [(1)1+2] \\ [(2)3+2] \\ [2=3] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\tau]{\begin{bmatrix} [2=3] \\ [(-2)2+3] \\ [(-1)2+1] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[OI]{(+)} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{S}_{|j}) = \lambda_i(\mathbf{S}_{|j}) \Rightarrow \mathbf{S}_{|j} \text{ es un autovector.}$$

20 / 44

## 9 Matrices diagonalizables

- La matriz es diagonalizable **si y solo si** las multiplicidades *algebraicas* son iguales a las *geométricas* para cada autovalor
- Si no hay autovalores repetidos tampoco hay “dientes”
- Cuando no hay autovalores repetidos  $\mathbf{A}$  es diagonalizable  
 $n \times n$

21 / 44

## 10 Diagonalizando una matriz

- Encuentre el espectro:  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$
- Encuentre la *multiplicidad algebraica* de cada autovalor:  $\mu(\lambda_i)$

luego elija una de estas alternativas:

1. Datar la matrix (implementado en NAcAL)
2. ...o para cada  $\lambda_i$ 
  - encuentre el autoespacio

$$\mathcal{E}_{\lambda_i}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x} \right\} = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}).$$

- revise  $\mu(\lambda_i) = \dim \mathcal{E}_{\lambda_i}(\mathbf{A})$  (multiplicidades algebraica y geométrica iguales)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = [\text{base de } \mathcal{E}_{\lambda_1}(\mathbf{A}) \# \dots \# \text{base de } \mathcal{E}_{\lambda_k}(\mathbf{A})]$$

$$\mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{D} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1}$$

## 11 Potencias de una matriz diagonalizable

Si  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  entonces  $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} =$

- ¿Qué relación hay entre los autovectores de  $\mathbf{A}$  y los de  $\mathbf{A}^2$ ?
- ¿Qué relación hay entre los autovalores de  $\mathbf{A}$  y los de  $\mathbf{A}^2$ ?

Dicho en forma matricial (si  $\mathbf{A}$  es diagonalizable,  $\mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1}$ ):

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \mathbf{D}^2 \mathbf{S}^{-1}$$

En general para,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ . . .  $\mathbf{A}^n =$   
¿y si  $\mathbf{A}$  es invertible?

## Problemas de la Lección 17

(L-17) PROBLEMA 1. Factorice las siguientes matrices en  $\mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1}$ ;

(a)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b)  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 15 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-17) PROBLEMA 2. ¿Cuáles de las siguientes matrices no se pueden diagonalizar?

(a)

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-17) PROBLEMA 3. Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  encuentre  $\mathbf{A}^{100}$  diagonalizando  $\mathbf{A}$ .

(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-17) PROBLEMA 4. Si los autovalores de  $\mathbf{A}$  son 1, 1 y 2, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones sabemos que son ciertas?

- (a)  $\mathbf{A}$  es invertible.
- (b)  $\mathbf{A}$  es diagonalizable.
- (c)  $\mathbf{A}$  no es diagonalizable

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-17) PROBLEMA 5. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) (1<sup>pts</sup>) Determine si la matriz  $\mathbf{A}$  es diagonalizable. En caso de que lo sea, encuentre una matriz diagonal  $\mathbf{D}$  y una matriz  $\mathbf{S}$  tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1}$ .
- (b) (0.5<sup>pts</sup>) Calcule  $(\mathbf{A}^6)\mathbf{v}$ , donde  $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 1)^T$ .
- (c) (0.5<sup>pts</sup>) Use los valores obtenidos en el primer apartado para justificar que  $\mathbf{A}$  es regular (invertible).



(d) (0.5pts) ¿Qué relación hay entre los autovalores y los autovectores de  $\mathbf{A}$  y los de  $\mathbf{A}^{-1}$ ?

(L-17) PROBLEMA 6. Si  $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$ ; entonces  $\mathbf{A}^3 = (\quad)(\quad)(\quad)$  y  $\mathbf{A}^{-1} = (\quad)(\quad)(\quad)$ .  
(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-17) PROBLEMA 7. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Encuentre los autovalores de  $\mathbf{A}$
- (b) Encuentre los auto-vectores de  $\mathbf{A}$
- (c) Diagonalice  $\mathbf{A}$ : escríbalo como  $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$ .

(L-17) PROBLEMA 8. ¿Falso o verdadero? Si los autovalores de  $\mathbf{A}$  son 2, 2 y 3 entonces sabemos que la matriz es

- (a) Invertible
- (b) Diagonalizable
- (c) No diagonalizable.

(L-17) PROBLEMA 9. Sean las matrices

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 8 & \\ & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -5 & \end{bmatrix}$$

23 / 44

(a) Encuentre los autovalores y auto-vectores de la matriz  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(b) Explique por qué (o por qué no) la matriz  $\mathbf{A}$  es diagonalizable.

(L-17) PROBLEMA 14. Sea  $\mathbf{A}$  una matriz  $3 \times 3$ . Asuma que sus autovalores son 1 y 0, que una base de los autovectores asociados a  $\lambda = 1$  son  $[1, 0, 1]$  y  $[0, 0, 1]$ ; mientras que los asociados a  $\lambda = 0$  son paralelos a  $[1, 1, 2]$ .

- (a) ¿Es  $\mathbf{A}$  diagonalizable? En caso afirmativo escriba la matriz diagonal  $\mathbf{D}$  y la matriz  $\mathbf{S}$  tales que  $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$ .
- (b) Encuentre  $\mathbf{A}$ .

(L-17) PROBLEMA 15. Sea  $\mathbf{A}$  una matriz  $2 \times 2$  tal que  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  es un autovector de  $\mathbf{A}$

con autovalor 2, y  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  es otro autovector de  $\mathbf{A}$  con autovalor -2. Si

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , calcule  $(\mathbf{A}^3)\mathbf{v}$ .

- (a) Complete dichas matrices de modo que en los tres casos  $\det \mathbf{A}_i = 25$ . Así, la traza es en todos los casos igual a 10, y por tanto para las tres matrices el único auto-valor  $\lambda = 5$  está repetido dos veces ( $\lambda^2 = 25$  y  $\lambda + \lambda = 10$  implica  $\lambda = 5$ ).
- (b) Encuentre un vector característico con  $\mathbf{A}\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ . Estas tres matrices no son diagonalizables porque no hay un segundo auto-vector linealmente independiente del primero.

(Strang, 2007, ejercicio 27 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-17) PROBLEMA 10. Factorice las siguientes matrices en  $\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 1 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-17) PROBLEMA 11. Encuentre la matriz  $\mathbf{A}$  cuyos autovalores son 1 y 4, cuyos autovectores son  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  respectivamente.

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-17) PROBLEMA 12. Si los elementos diagonales de una matriz triangular superior de orden  $3 \times 3$  son 1, 2 y 7, ¿puede saber si la matriz es diagonalizable? ¿Quién es  $\mathbf{D}$ ? (Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-17) PROBLEMA 13.

23 / 44

## 1 Esquema de la Lección 18

### Esquema de la Lección 18

- Matrices simétricas  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ 
  - Autovalores y autovectores
- Introd. formas cuadráticas y matrices definidas positivas

## 2 Matrices simétricas $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

¿que hay de especial en  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  cuando  $\mathbf{A}$  es simétrica?  
 $n \times n$

1. Los autovalores son **REALES**

2. n autovectores *pueden elegirse* **PERPENDICULARES**

(¡siempre diagonalizable!)

Caso diagonalizable usual:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D} \iff \mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$$

Caso simétrico:

Puedo elegir autovectores orto**normales** (columnas de  $\mathbf{S} = \mathbf{Q}$ )

$$(\text{Si } \mathbf{A} = \mathbf{A}^T) \quad \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T \quad \text{Tma. espectral}$$

Diagonalizable *ortogonalmente*.

25 / 44

## 3 Autoespacios ortogonales en las matrices simétricas

Los autovectores (correspondientes a autovalores distintos) de una matriz simétrica son ortogonales.

**Demostración.**

Suponga  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$  y  $\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda_2\mathbf{y}$  (con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ). Entonces

$$\lambda_1\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{A}^T)\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\lambda_2.$$

Puesto que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  necesariamente:

$$\lambda_1(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) - \lambda_2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = 0 \implies (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \implies \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

□

26 / 44

## 4 Formas cuadráticas

Forma cuadrática:

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}; \quad \text{con } \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$$

Como  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$  (con  $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ ), entonces

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T\mathbf{x} = (\mathbf{Q}^T\mathbf{x})\mathbf{D}(\mathbf{Q}^T\mathbf{x}) \quad (\text{suma ponderada de cuadrados})$$

Forma cuadrática definida positiva:

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \iff \lambda_i > 0, \quad i = 1 : n.$$

entonces también decimos que  $\mathbf{A}$  es definida positiva.

27 / 44

## 5 Matrices definidas positivas

**Significado:**

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \quad (\text{excepto para } \mathbf{x} = \mathbf{0})$$

**Algunas propiedades**

Suponga  $\mathbf{A}$  simétrica definida positiva: ¿lo es también  $\mathbf{A}^{-1}$ ?

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$$

Suponga  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  simétricas definidas positivas: ¿lo es  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ?

por tanto la respuesta es...

28 / 44

## 6 Producto de matrices $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

Supongamos  $\mathbf{A}$  rectangular. ¿Es  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  definida positiva?  
 $m \times n$

$$x(\mathbf{A}^T \mathbf{A})x =$$

Sólo puede ser 0 si  $\mathbf{A}x$  es 0

¿Cómo garantizar que  $\mathbf{A}x \neq 0$  cuando  $x \neq 0$ ?

29 / 44

## 8 Matrices simétricas definidas positivas

- Todos los autovalores son:
- Todos los pivotes son:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**Pivotes:**

¿Signo de los autovalores?

$$\lambda^2 - 8\lambda + 11 = 0 \rightarrow \lambda = 4 \pm \sqrt{5} > 0$$

31 / 44

## 7 Matrices simétricas: signo de los autovalores

¿Son todos los  $\lambda_i$  positivos? ¿Son todos negativos?

Calcular autovalores de  $\mathbf{A}$  es imposible en general  
 $5 \times 5$

**Buenas noticias:** Signo de los pivotes de la forma escalonada coincide con el de los  $\lambda_i$   
(si no hemos cambiado el signo del determinante con transformaciones *Tipo II*)

núm. pivotes positivos = núm. autovalores positivos

30 / 44

**Resumen** (para matrices simétricas):

1. Matrices simétricas tienen *autovalores reales* y *autovectores* que se pueden elegir *perpendiculares*
2.  $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T$  con  $\mathbf{Q}$  ortogonal
3.  $\mathbf{A}$  es simétrica si y solo si es *ortogonalmente* diagonalizable.
4. El signo de los autovalores coincide con el de los pivotes<sup>1</sup>

32 / 44

## Problemas de la Lección 18

(L-18) **PROBLEMA 1.** Escriba las matrices **A**, **B** y **C** en la forma  $\mathbf{QDQ}^T$  del teorema espectral.

(a)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(b)  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c)  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-18) **PROBLEMA 2.** Encuentre los autovalores y los autovectores unitarios (de longitud igual a uno) de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2003, ejercicio 3 del conjunto de problemas 6.4.)

(L-18) **PROBLEMA 3.** Encuentre una matriz ortonormal **Q** que diagonalice la siguiente matriz simétrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

32 / 44

(Strang, 2003, ejercicio 5 del conjunto de problemas 6.4.)

(L-18) **PROBLEMA 4.** Suponga que **A** es una matriz simétrica de 3 por 3 con autovalores 0, 1 y 2.

- (a) ¿Qué propiedades pueden garantizarse para los autovectores unitarios **u**, **v** y **w** correspondientes a los respectivos autovalores 0, 1 y 2?
- (b) En términos de **u**, **v** y **w**, describa el espacio nulo  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ , el espacio nulo por la izquierda  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$ , el espacio fila  $\mathcal{C}(\mathbf{A}^T)$  y el espacio columna  $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ .
- (c) Encuentre un vector **x** tal que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ . ¿Es único?
- (d) ¿Qué condiciones debemos imponer sobre **b** para que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tenga solución?
- (e) Si **u**, **v** y **w** son las columnas de **S**, y **v** es ortogonal a **w**; escriba las matrices  $\mathbf{S}^{-1}$  y  $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$ .

(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-18) **PROBLEMA 5.** Escriba un hecho destacado sobre los valores característicos de cada uno de estos tipos de matrices:

- (a) Una matriz simétrica real.
- (b) Una matriz diagonalizable tal que  $\mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{0}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- (c) Una matriz no diagonalizable
- (d) Una matriz singular

(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 5.5.)

32 / 44

(L-18) **PROBLEMA 6.** Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Encuentre los valores característicos de **A** (recuerde que  $i^2 = -1$ ).
- (b) Encuentre los valores característicos de **B** (en este caso quizá le resulte más sencillo encontrar primero los autovectores, y deducir entonces los autovalores).

(Strang, 2007, ejercicio 14 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-18) **PROBLEMA 7.** Si  $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$  entonces los autovalores de **A** deben ser \_\_\_\_\_. De un ejemplo tal que  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ . Ahora bien, si **A** es además simétrica, demuestre que entonces  $\mathbf{A}^3$  es necesariamente **0**.

(L-18) **PROBLEMA 8.** Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Demuestre que **A** no es diagonalizable cuando  $a = 3$ .
- (b) ¿Es **A** diagonalizable cuando  $a = 2$ ? (explique su respuesta). En caso afirmativo calcule una matriz diagonal de autovalores **D** y una de autovectores **S** tales que  $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$ .
- (c) ¿Es  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  diagonalizable para cualquier valor de  $a$ ? ¿Es posible encontrar una base ortonormal de autovectores de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ?
- (d) Encuentre todos los valores de  $a$  para los cuales existe  $\mathbf{A}^{-1}$  y además la matriz es diagonalizable.

(L-18) **PROBLEMA 9.** Sea la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

- (a) Expresé **B** en la forma  $\mathbf{B} = \mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^T$  del teorema espectral.
- (b) ¿Es **B** diagonalizable? Si no lo es, diga las razones; y en caso contrario genere una matriz **S** que diagonalice a **B**.

32 / 44

32 / 44

(L-18) PROBLEMA 10. Suponga que  $q_1, q_2$  y  $q_3$  forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  y que  $\mathbf{A}$  es tal que  $\mathbf{A}q_1 = (1, 0, 0, )$ ,  $\mathbf{A}q_2 = (0, 1, 0, )$ , y  $\mathbf{A}q_3 = (0, 0, 1, )$ .

- (a) (0.5pts) Escriba  $\mathbf{A}$  explícitamente en términos de los vectores  $q_1, q_2, q_3$ .  
 (b) (1pts) Escriba todos los posibles valores de  $\det \mathbf{A}$ .  
 (c) Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas: Los autovalores de  $\mathbf{A}$  tienen que...
- ser números reales.
  - ser números reales y positivos.
  - ser números imaginarios.
  - tener valor absoluto  $|\lambda| = 1$ .

32 / 44

## 2 Formas cuadráticas

- Definida positiva:  $\forall x \neq 0 \Rightarrow x\mathbf{A}x > 0$ .
- Semi-definida positiva:  $\forall x \neq 0 \Rightarrow x\mathbf{A}x \geq 0$ .
- Definida negativa:  $\forall x \neq 0 \Rightarrow x\mathbf{A}x < 0$ .
- Semi-definida negativa:  $\forall x \neq 0 \Rightarrow x\mathbf{A}x \leq 0$ .
- Indefinida: ni semi-definida positiva ni semi-definida negativa.

34 / 44

## 1 Esquema de la Lección 19

### Esquema de la Lección 19

- Matrices (semi)definidas positivas, (semi)definidas negativas
- Completando el cuadrado
- Diagonalización por congruencia

33 / 44

### Ejemplo

¿Qué número debo poner para que la matriz  $\mathbf{A}$  sea singular?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & \end{bmatrix}$$

- Autovalores:
- Menores principales:
- Para la forma cuadrática

$$q_{\mathbf{A}}(x) = x\mathbf{A}x = (x, y) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + y^2$$

¿Existe  $x \neq 0$  tal que  $x\mathbf{A}x = 0$ ?

35 / 44

## Ejemplo

Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$  entonces  $(x, y) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + ? y^2$

- ¿Hay números  $x$  y  $y$  que hagan  $\mathbf{xAx}$  negativa?
- ¿Pasa por el origen?
- Si  $y = 0$  y  $x = 1$ , ¿es positiva? (¿y si  $x = -1$ ?)
- Si  $x = 0$  y  $y = 1$ , ¿es positiva? (¿y si  $y = -1$ ?)
- ¿Es siempre positiva?

$(0, 0, )$  **punto de silla**: mínimo en unas direcciones, y máximo en otras.

$$\lambda_1 = -2, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 11, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

36 / 44

## Ejemplo

Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$  entonces  $(x, y) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + 20y^2$

**Definida positiva.**

Pruebas de que  $\mathbf{A}$  es definida positiva

- ¿Son los menores principales positivos?
- ¿Son los autovalores positivos?

$$q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{xAx} > 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

37 / 44

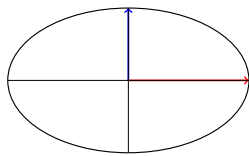
### 3 Completando el cuadrado

Si pudiéramos expresar  $q(\mathbf{x})$  como suma de cuadrados, sabríamos si  $q(\mathbf{x})$  es definida positiva.

Completemos el cuadrado!

- $q(x, y) = 2x^2 + 12xy + 20y^2 = 2(x + ?y)^2 + ?$
- $q(x, y) = 2x^2 + 12xy + 7y^2$
- $q(x, y) = 2x^2 + 12xy + 18y^2$
- $q(x, y) = 2x^2 + 12xy + 20y^2$  (gráfico)

Si definida positiva:  $q(x, y) = a$ ;  $a > 0$ : elipse



¿es

$$q(x, y, z, w, t) = 2t^2 - 2tx - 2tz + w^2 - 2wy + 2x^2 - 2xy + 2y^2 + z^2$$

definida positiva? 😞😞😞😞😞!!!!???

38 / 44

### 4 Matrices congruentes

$\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$  son congruentes si existe  $\mathbf{B}$  invertible tal que  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$

**Diagonalización por congruencia**

Para toda  $\mathbf{A}$  (simétrica) existe  $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}$  (invertible) tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \text{es diagonal} \quad (\mathbf{B}^T = \tau_k \dots \tau_1 \mathbf{I})$$

**Teorema Espectral:** ¡Diagonalización por semejanza y congruencia!

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}.$$

Toda forma cuadrática se puede expresar como suma de cuadrados

$$\mathbf{xAx} = \mathbf{x}(\mathbf{B}^{-1})^T \mathbf{DB}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{yDy}; \quad \text{donde} \quad \mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}.$$

39 / 44

### 5 Completar el cuadrado

$$2x^2 + 12xy + 20y^2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-3)1+2]} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-3)1+2]} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

por tanto tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{D} = \mathbf{E}^T \mathbf{A} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

así  $\mathbf{A} = (\mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{E}^{-1}$  y por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} &= (x, y) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{x} (\mathbf{E}^{-1})^T) \mathbf{D} (\mathbf{E}^{-1} \mathbf{x}) \\ &= ((x + 3y), y) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x + 3y \\ y \end{pmatrix} = 2(x + 3y)^2 + 2y^2 \end{aligned}$$

40 / 44

### 6 Ejemplo 3 por 3

$$\text{¿Es } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ definida positiva?}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(\frac{1}{2})1+2]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(\frac{2}{3})2+3]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

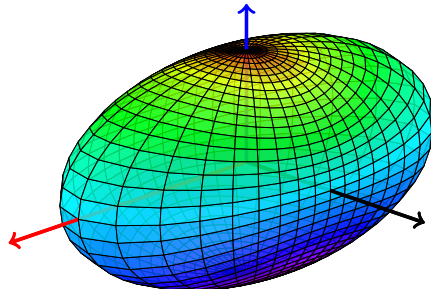
$$\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz > 0$$

$\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} = 1$  : (elipsoide) Ejes en la dirección de los autovectores  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{Q}$

41 / 44

### 7 Matrices definidas positivas y elipsoides: ejemplo 3 por 3

- La región  $(\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} = a)$  es un (elipsoide).
- Los autovectores son los ejes principales  $\mathbf{Q}$ .
- Longitud de los ejes determinada por los autovalores



42 / 44

### 8 Otro ejemplo 3 por 3

$$\text{¿Es } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ definida positiva?}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(1)3+1]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(\frac{1}{2})1+3]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{[2 \rightleftharpoons 3]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz indefinida

43 / 44

## 9 "Clasificación" de formas cuadráticas

$$x^T A x \leq 0; \quad \text{para todo } x \neq 0$$

### Métodos

Mirar el signo de

1. Elem. diag.:  $D = B^T A B$  (Diagonalización por congruencia) 😊
2. Calcular los autovalores: (Raíces de un polinomio) 😞
3. Menores principales: (Criterio de Sylvester) 😞

### Ley de inercia

el número de componentes positivas, negativas y nulas de la diagonal de  $D$  es un invariante de  $A$ , i.e., no depende de  $B$

(La diagonalización ortogonal  $D = Q^T A Q$  es un caso especial)

44 / 44

## Problemas de la Lección 19

(L-19) PROBLEMA 1. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas, y escriba las formas cuadráticas  $f = x^T A x$  correspondientes:

- (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$   
 (b)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$   
 (c)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$   
 (d)  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

(e) El determinante del apartado (b) es cero; ¿a lo largo de que recta se verifica que en todos sus puntos  $f(x, y) = 0$ ?

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-19) PROBLEMA 2. ¿Cuál es la forma cuadrática  $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$  para cada una de las siguientes matrices? Complete el cuadrado con la finalidad de escribir  $f$  como una suma de uno o dos cuadrados  $d_1(\quad)^2 + d_2(\quad)^2$ .

- (a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$   
 (b)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 15 del conjunto de problemas 6.1.)

44 / 44

(L-19) PROBLEMA 3. ¿Cuales de la siguientes matrices tienen dos autovalores positivos? Pruebe  $a > 0$  y  $ac > b^2$  (determinante mayor que cero); no calcule los autovalores.  $x^T A x < 0$ .

- (a)  $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$   
 (b)  $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$   
 (c)  $C = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix}$   
 (d)  $D = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 14 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-19) PROBLEMA 4. Demuestre que  $f(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2$  no tiene un mínimo en  $(0, 0)$  a pesar de que todos sus coeficientes son positivos. Escriba  $f(x, y)$  como una diferencia de cuadrados y encuentre un punto  $(x, y)$  donde  $f(x, y)$  sea negativa.  
 (Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-19) PROBLEMA 5. Demuestre a partir de los valores característicos que si  $A$  es definida positiva, entonces también lo son  $A^2$  y  $A^{-1}$ .  
 (Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 6.2.)

44 / 44

(L-19) PROBLEMA 6. Sean las formas cuadráticas

$$\begin{aligned} q_1(x, y, z) &= x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy. \\ q_2(x, y, z) &= -x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy - 2axz. \end{aligned}$$

- (a) Demuestre que  $q_1(x, y, z)$  es semi-definida positiva.  
 (b) Halle, si existiese, un valor de  $a$  de manera que  $q_2(x, y, z)$  sea definida negativa.

(L-19) PROBLEMA 7. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas o no.

- (a)  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$   
 (b)  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$   
 (c)  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2$

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 6.2.)

44 / 44



(L-19) PROBLEMA 8. Clasifique la forma cuadrática (ie., definida positiva, negativa, semidefinida, no definida, etc.)

$$q(x, y, z) = x^2 + 6xy + y^2 + az^2;$$

en función del parámetro  $a$ .

(L-19) PROBLEMA 9. Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$  es definida positiva, pruebe que  $\mathbf{A}^{-1}$  es definida positiva.  
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-19) PROBLEMA 10. Si una matriz simétrica de 2 por 2 satisface  $a > 0$ , y  $ac > b^2$ , demuestre que sus autovalores son reales y positivos (definida positiva). Emplee la ecuación característica y el hecho de que el producto de los autovalores es igual al determinante.  
(Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-19) PROBLEMA 11. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas, definidas negativas, semi-definidas, o indefinidas.

(a)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

(b)  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(c)  $\mathbf{C} = -\mathbf{B}$

(d)  $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}$

(L-19) PROBLEMA 12. Una matriz definida positiva no puede tener un cero (o incluso peor; un número negativo) en su diagonal principal. Demuestre que esta matriz no cumple  $\mathbf{xAx} > 0$ , para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{no es positiva cuando} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 21 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-19) PROBLEMA 13. Demuestre que si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son definidas positivas entonces  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  también es definida positiva. Para esta demostración los pivotes y los valores característicos no son convenientes. Es mejor emplear  $\mathbf{x}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} > 0$   
(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-19) PROBLEMA 14. Factorice las siguientes matrices simétricas en la forma  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}^T$ .

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(L-19) PROBLEMA 15. La forma cuadrática  $f(x, y) = 3(x + 2y)^2 + 4y^2$  es definida positiva. Encuentre la matriz  $\mathbf{A}$ , factorícela en  $\mathbf{LDL}^T$ , y relacione los elementos en  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{L}$  con 3, 2 y 4 en  $f$ .  
(Strang, 2007, ejercicio 9 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-19) PROBLEMA 16. Considere las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se pide:

- (a) (0.5pts) Calcule los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$ .
- (b) (0.5pts) Pruebe que si  $a = 2$  la matriz  $\mathbf{A}$  NO es diagonalizable.
- (c) (1pts) Para la matriz  $\mathbf{B}$ , encuentre una matriz diagonal  $\mathbf{D}$  y una matriz  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{B} = \mathbf{PDP}^T$ .
- (d) (0.5pts) Obtenga la expresión polinómica de la forma cuadrática asociada a la matriz  $\mathbf{B}$  y pruebe que es definida positiva.

(L-19) PROBLEMA 17. Dada la matriz  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ b & 4/5 \end{pmatrix}$ , calcule valores (si existen) de  $a$  y  $b$  para los cuales

- (a) (0.5pts) La matriz  $\mathbf{A}$  es orto-normal.
- (b) (0.5pts) Las columnas de la matriz  $\mathbf{A}$  son independientes.
- (c) (0.5pts)  $\lambda = 0$  es un autovalor de  $\mathbf{A}$ .
- (d) (0.5pts)  $\mathbf{A}$  es simétrica y definida negativa.

## (L-19) PROBLEMA 18.

- (a) Obtenga la matriz  $\mathbf{Q}$  asociada a la forma cuadrática  $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + ay^2 + 8z^2$  y clasifique la matriz  $\mathbf{Q}$  (es decir, diga en que casos la matriz es no definida, definida o semidefinida, de manera positiva o negativa) para el caso en el que  $a$  es igual a uno ( $a = 1$ ).
- (b) Clasifique la matriz  $\mathbf{Q}$  cuando  $a \neq 1$ .

44 / 44

- (f) Si 1 es el único autovalor de una matriz  $\mathbf{A}$  de orden  $2 \times 2$ , entonces  $\mathbf{A}$  necesariamente tiene que ser la matriz identidad  $\mathbf{I}$ .

(L-OPT-2) PROBLEMA 3. complete los blancos, o responda Verdadero/Falso.

- (a) Cualquier sistema generador de un espacio vectorial contiene una base del espacio (V/F)

\_\_\_\_\_.

- (b) Que los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sean linealmente independientes significa que

\_\_\_\_\_.

- (c) El conjunto que sólo contiene el vector  $\mathbf{0}$  es un conjunto linealmente independiente. (V/F)

\_\_\_\_\_.

- (d) Una matriz cuadrada de orden  $n$  por  $n$  es diagonalizable cuando:

\_\_\_\_\_.

- (e) Si  $\mathbf{u} = (1, 2, -1, 1)$ , entonces  $\|\mathbf{u}\| =$  \_\_\_\_\_.

- (f) Si  $\mathbf{u} = (1, 2, -1, 1)$  y  $\mathbf{v} = (-2, 1, 0, 0)$ , entonces  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$  \_\_\_\_\_.

44 / 44

## Problemas de la Lección opcional 2 \_\_\_\_\_

(L-OPT-2) PROBLEMA 1. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) (0.5pts) Demuestre que  $\mathbf{A}$  es invertible si y sólo si  $a \neq 0$ .
- (b) (0.5pts) ¿Es la matriz  $\mathbf{A}$  definida positiva cuando  $a = 1$ ? Justifique su respuesta.
- (c) (1pts) Calcule  $\mathbf{A}^{-1}$  cuando  $a = 2$ .
- (d) (0.5pts) ¿Cuántas variables pueden ser tomadas como exógenas (o libres) en el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  cuando  $a = 0$ ? ¿Cuales?

(L-OPT-2) PROBLEMA 2. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o veracidad de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

- (a) Si  $\mathbf{A}$  es simétrica, entonces  $\mathbf{A}^2$  también lo es.
- (b) Si  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$  entonces  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})$  donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.
- (c) Si  $\lambda = 0$  es un autovalor de la matriz cuadrada  $\mathbf{A}$ , entonces el sistema de ecuaciones  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  es compatible determinado.
- (d) Si  $\lambda = 0$  es un autovalor de la matriz cuadrada  $\mathbf{A}$ , entonces el sistema de ecuaciones  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  puede ser incompatible.
- (e) Si una matriz es ortogonal (columnas perpendiculares y de norma uno) entonces su inversa también es ortogonal.

44 / 44

(L-OPT-2) PROBLEMA 4. En las preguntas siguientes  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son matrices  $n \times n$ . Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (incluya una breve explicación, o un contra ejemplo que justifique su respuesta):

- (a) Si  $\mathbf{A}$  no es cero entonces  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- (b) Si  $\det(\mathbf{AB}) \neq 0$  entonces  $\mathbf{A}$  es invertible.
- (c) Si intercambio las dos primeras filas de  $\mathbf{A}$  sus autovalores cambian.
- (d) Si  $\mathbf{A}$  es real y simétrica, entonces sus autovalores son reales (**aquí no es necesaria una justificación**).
- (e) Si la forma reducida de echelon de  $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})$  es la matriz identidad, entonces 5 no es un autovalor de  $\mathbf{A}$ .
- (f) Sea  $\mathbf{b}$  un vector columna de  $\mathbb{R}^n$ . Si el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  no tiene solución, entonces  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- (g) Sea  $\mathbf{C}$  de orden  $3 \times 5$ . El rango de  $\mathbf{C}$  puede ser 4.
- (h) Sea  $\mathbf{C}$  de orden  $n \times m$ , y  $\mathbf{b}$  un vector columna de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$  no tiene solución, entonces  $\text{rg}(\mathbf{C}) < n$ .
- (i) Toda matriz diagonalizable es invertible.
- (j) Si  $\mathbf{A}$  es invertible, entonces su forma reducida de echelon es la matriz identidad.

44 / 44

(L-OPT-2) PROBLEMA 5. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los autovalores de  $\mathbf{B}$  son 0 y 2. Use esta información para responder a las siguientes cuestiones. Para cada matriz debe dar una explicación. Puede haber más de una matriz que cumpla la condición:

- (a) ¿Qué matrices son invertibles?
- (b) ¿Qué matrices tienen un autovalor repetido?
- (c) ¿Qué matrices tienen rango menor a tres?
- (d) ¿Qué matrices son diagonalizables?
- (e) ¿Para qué matrices diagonalizables podemos encontrar tres autovectores ortogonales entre sí?

(L-OPT-2) PROBLEMA 6. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcule los autovalores y autovectores de  $\mathbf{A}$ .
- (b) ¿Es  $\mathbf{A}$  diagonalizable?

44 / 44

- (c) ¿Es posible encontrar una matriz  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^T$ , siendo  $\mathbf{D}$  una matriz diagonal?
- (d) Calcule  $|\mathbf{A}^{-1}|$ .

(L-OPT-2) PROBLEMA 7. Sea  $\mathbf{A}$  una matriz  $3 \times 3$  y sean  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = -1$  sus autovalores. Sean  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)^T$  y  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)^T$  los autovectores asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

- (a) ¿Es  $\mathbf{A}$  diagonalizable?
- (b) ¿Podría ser  $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, -1)^T$  un autovector asociado al autovalor  $\lambda_3 = -1$ .
- (c) Calcule  $\mathbf{A}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ .

(L-OPT-2) PROBLEMA 8.

- (a) (0.5pts) Encuentre un sistema lineal homogéneo  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  cuyas soluciones sean

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- (b) (0.5pts) Si el polinomio característico de la matriz  $\mathbf{A}$  es  $p(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 - 24\lambda^3 + 28\lambda^2 - 3\lambda + 10$ , encuentre el rango de  $\mathbf{A}$ .

(L-OPT-2) PROBLEMA 9. Suponga una matriz cuadrada e invertible  $\mathbf{A}$ .  
 $n \times n$

44 / 44

- (a) ¿Cuáles son sus espacios columna  $\mathcal{C}(\mathbf{A})$  y espacio nulo  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ ? (no responda con la definición, diga qué conjunto de vectores compone cada espacio).
- (b) Suponga que  $\mathbf{A}$  puede ser factorizada en  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 0 & u_{13} \end{bmatrix}$$

Describe el primer paso de eliminación en la reducción de  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{U}$ . ¿porqué sabe que  $\mathbf{U}$  es también una matriz invertible? ¿Cuanto vale el determinante de  $\mathbf{A}$ ?

- (c) Encuentre una matriz particular de dimensiones  $3 \times 3$  e invertible  $\mathbf{A}$  que no pueda ser factorizada en la forma  $\mathbf{LU}$  (sin permutar previamente las filas). ¿Qué factorización es todavía posible en su ejemplo? (no es necesario que realice la factorización). ¿Cómo sabe que su matriz  $\mathbf{A}$  es invertible?

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*.

Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.