

# Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

15/01/2025

1 / 33

L-11

L-12

L-13

## 1 Esquema de la Lección 11

### Esquema de la Lección 11

- Vectores y subespacios ortogonales
- Espacio nulo  $\perp$  espacio fila  
 $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A}^T)$
- espacio nulo por la izquierda  $\perp$  espacio columna  
 $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$

2 / 33

L-11

L-12

L-13

Puede encontrar la última versión de este material en

<https://github.com/mbujosab/MatematicasII/tree/main/Esp>

– Marcos Bujosa. Copyright © 2008–2025  
Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

1 / 33

L-11

L-12

L-13

## 2 Algunas definiciones

- Producto punto

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

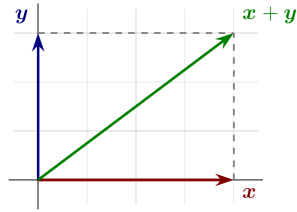
- Longitud de un vector  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$   $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$ .

- Vector unitario:  $\|\mathbf{a}\| = 1$   $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \mathbf{x}$

- Vectores ortogonales (perpendiculares):  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ .

3 / 33

### 3 Vectores ortogonales



$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \iff \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$$

Tma. Pitágoras:  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \iff \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

4 / 33

### 4 Norma al cuadrado de un vector

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \|\mathbf{x}\|^2 = \quad ; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \|\mathbf{y}\|^2 = \quad ;$$

¿Son estos vectores ortogonales?

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}; \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \quad ;$$

(Pitágoras)

(Ortogonalidad)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

5 / 33

### 5 Subespacios ortogonales

Cuando el subespacio  $\mathcal{S}$  es **ortogonal** al subespacio  $\mathcal{T}$ :

Cada vector de  $\mathcal{S}$  es ortogonal a cada vector de  $\mathcal{T}$

¿Son ortogonales el plano de la pizarra y el suelo?

### 6 Espacio nulo ortogonal a espacio fila

- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp$  filas de  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} (\mathbf{1}|\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ (\mathbf{m}|\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp d\mathbf{A}, \quad \forall d \in \mathbb{R}^m$  (cualquier **combinación lineal de las filas**)

$$\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \Rightarrow d\mathbf{A}\mathbf{x} = d \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

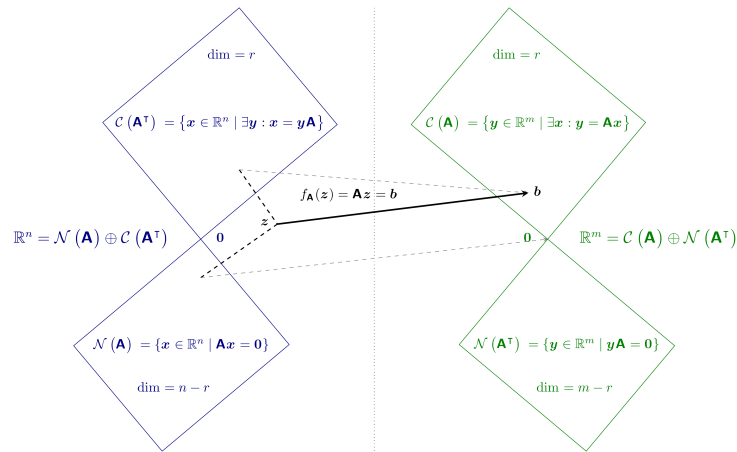
$$\text{espacio nulo} \perp \text{espacio fila} \quad \mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A}^\top)$$

También:  $\mathbf{x}\mathbf{A} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top) \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$

6 / 33

7 / 33

## 7 El gran esquema: suma directa de complementos ortogonales



$$\mathcal{C}(\mathbf{A}^\top) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{0}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$$

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{x}$$

8 / 33

## 8 Revisitando la eliminación gaussiana

Algoritmo que encuentra una base del complemento ortogonal

Dame varios vectores y los escribo como filas de una matriz  $\mathbf{M}$  ...

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \tau \\ [(3)1+2] \\ [(1)1+4] \\ [(1)2+3] \\ [(1)2+4] \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{N} \end{bmatrix}$$

Base del espacio generado por los vectores (fila):  $\mathcal{V}$

Base del complemento ortogonal:  $\mathcal{V}^\perp$

$$\mathbf{M}\mathbf{N} = \mathbf{0}$$

Pero si me das  $\mathbf{N}_{|1}$  y  $\mathbf{N}_{|2}$  y empiezo de nuevo... obtendré una base de...

9 / 33

## Problemas de la Lección 11

(L-11) PROBLEMA 1. Describa el conjunto de vectores en  $\mathbb{R}^3$  ortogonales a  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.15 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 2. ¿Hay algún vector que sea perpendicular a sí mismo?

(L-11) PROBLEMA 3. Calcule la longitud de cada uno de estos vectores

(a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . (b)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . (c)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(d)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . (e)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.11 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 4. Encuentre un vector unitario (de norma uno) con la misma dirección que  $\mathbf{v} = (2, -1, 0, 4, -2)$ .

(L-11) PROBLEMA 5. Encuentre el valor de  $k$  de manera que estos vectores sean perpendiculares.

$$(k, 1), \quad (4, 3).$$

9 / 33

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.14 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 6. Escriba una matriz con las propiedades requeridas, o explique por qué es imposible:

(a) El espacio columna contiene  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , el espacio nulo contiene  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) El espacio fila contiene  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , y el espacio nulo contiene  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c)  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  tiene solución, y  $\mathbf{A}^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) Cada fila es ortogonal a cada columna (y  $\mathbf{A}$  no es la matriz cero)

(e) La suma de columnas da una columna de ceros, la suma de filas suma una fila de unos.

(Strang, 2003, ejercicio 3 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 7. Si  $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , las columnas de  $\mathbf{B}$  pertenecen a \_\_\_\_\_ de  $\mathbf{A}$ . Las filas de  $\mathbf{A}$  están contenidas en el \_\_\_\_\_ de  $\mathbf{B}$ . Por qué no es posible que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  sean matrices 3 por 3 de rango 2?

(Strang, 2003, ejercicio 4 del conjunto de problemas 4.1.)

9 / 33

(L-11) PROBLEMA 8. Suponga que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$  y que  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ . ¿Debe ocurrir que  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ?

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.20 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 9.

(a) Si  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene solución y  $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{y}$  es perpendicular a \_\_\_\_.

(b) Si  $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}$  tiene solución y  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{x}$  es perpendicular a \_\_\_\_.

(Strang, 2003, ejercicio 5 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 10. Demuestre, para  $\mathbb{R}^n$ , que si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son perpendiculares, entonces  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.33 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 11. Encuentre una matriz de 1 por 3 cuyo espacio nulo conste de todos los vectores de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$ . Encuentre una matriz de 3 por 3 con el mismo espacio nulo.

(Strang, 2007, ejercicio 9 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-11) PROBLEMA 12. Consider  $\mathbf{A}$  with exactly two special solutions for  $\mathbf{x}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ :

$\mathbf{s}_1 = (3, 1, 0, 0,)$ , and  $\mathbf{s}_2 = (6, 0, 2, 1,)$ .

(a) Find the reduced row echelon form  $\mathbf{R}$  of  $\mathbf{A}$ .

(b) What is the row space of  $\mathbf{A}$ ?

(c) What is the complete solution to  $\mathbf{x}\mathbf{R} = (3, 6,)$ ?

9 / 33

(d) Find a combination of rows 2, 3, 4 that equals  $\mathbf{0}$ . (Not OK to use  $0(2|\mathbf{A}) + 0(3|\mathbf{A}) + 0(4|\mathbf{A})$ . The problem is to show that these rows are dependent.)

(L-11) PROBLEMA 13. Suponga que  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene solución (quizá tiene muchas). Puede demostrarse que cualquier solución  $\mathbf{x}$  de dicho sistema puede descomponerse como suma de dos vectores ( $\mathbf{x} = \mathbf{x}_f + \mathbf{x}_n$ ) donde  $\mathbf{x}_f$  es combinación lineal de las filas de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{x}_n$  pertenece al subespacio vectorial de soluciones de  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

(a) (0.5pts) Demuestre que  $\mathbf{A}(\mathbf{x}_f) = \mathbf{b}$ .

(b) (1pts) Suponga que  $\mathbf{v}_f$  es combinación lineal de las filas de  $\mathbf{A}$  y que además  $\mathbf{A}(\mathbf{v}_f) = \mathbf{b}$ . ¿A qué subespacios vectoriales pertenece la diferencia  $(\mathbf{v}_f - \mathbf{x}_f)$ ? Demuestre que  $\mathbf{x}_f$  y  $\mathbf{v}_f$  son iguales.

(c) (1pts) Encuentre la solución  $\mathbf{x}_f$  del subespacio vectorial generado por las filas de  $\mathbf{A}$ , para el siguiente sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , encontrando los valores  $c$  y  $d$  que cumplen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_f = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{x}_f = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9 / 33

## 1 Esquema de la Lección 12

### Esquema de la Lección 12

- De las ecuaciones paramétricas a las cartesianas (o implícitas)
- Escogiendo ente las ecuaciones paramétricas

## 2 Ecuaciones cartesianas (implícitas) y paramétricas de rectas y planos

Ecuaciones cartesianas (implícitas)  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ :

Por ejemplo

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{c. sol. de } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas:

Para el conjunto del ejemplo anterior

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^1 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{p} \right\}$$

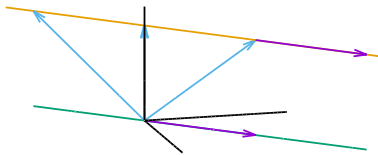
En este caso dimensión 1 Una **recta** (sólo hay un parámetro  $a$ )  
recta recta

o bien

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^1 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{p} \right\}$$

o bien

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^1 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{p} \right\}$$



12 / 33

### 3 Ecuaciones cartesianas (implícitas) y paramétricas de rectas y planos

Ecuaciones cartesianas (implícitas)  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ :

Por ejemplo

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid [1 \quad -1 \quad 1] \mathbf{x} = (1,)\} = \text{c. sol. de } \{x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$$

Ecuaciones paramétricas:

Para el conjunto del ejemplo anterior

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} \right\}$$

En este caso dimensión 2 Un plano (hay dos parámetros  $a$  y  $b$ )  
plano plano

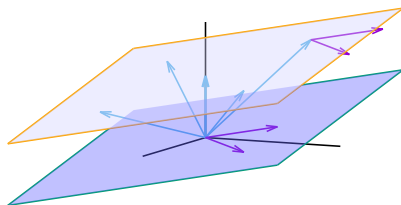
13 / 33

o bien

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} \right\}$$

pero también

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} \right\}$$



14 / 33

### 4 De las ecuaciones paramétricas a las cartesianas

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}^\top) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$$

Considere

$$H = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^k : \mathbf{x} = \mathbf{s} + [\mathbf{n}_1; \dots; \mathbf{n}_k] \mathbf{p} \right\}.$$

Si encontramos  $\mathbf{A}$  tal que  $\mathbf{A}\mathbf{n}_i = \mathbf{0}$  entonces si  $\mathbf{x} \in H$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \underbrace{\mathbf{A}[\mathbf{n}_1; \dots; \mathbf{n}_k]}_{\mathbf{0}} \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ donde } \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{s}.$$

Por tanto

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

15 / 33

### 5 De la solución al sistema de ecuaciones

Ecuaciones implícitas del plano  $P$  paralelo al generado por  $(1, 2, 0, -2)$  y  $(0, 0, 1, 3)$  que pasa por  $s = (1, 3, 1, 1)$ .

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \exists a, b \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \exists p \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} p \right\}$$

Necesitamos vectores perpendiculares a  $(1, 2, 0, -2)$  y a  $(0, 0, 1, 3)$

16/33

### 6 De la solución al sistema de ecuaciones

$$x = (x, y, z, w,); \quad s = (1, 3, 1, 1,).$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ \hline x & y & z & w & \\ 1 & 3 & 1 & 1 & \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} [(-2)\mathbf{1}+2] \\ [(2)\mathbf{1}+4] \end{matrix}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ \hline x & y-2x & z & w+2x & \\ 1 & 1 & 1 & 3 & \end{array} \right] \xrightarrow{[(-3)\mathbf{3}+4]} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ \hline x & y-2x & z & w+2x-3z & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array} \right]$$

$$\text{Así } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}; \text{ y entonces } \mathbf{A}x = \begin{pmatrix} -2x + y \\ 2x + w - 3z \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$b = \mathbf{A}s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto } \begin{cases} -2x + y = 1 \\ 2x - 3z + w = 0 \end{cases}$$

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

17/33

### 7 Un problema de Microeconomía

Resuelva  $Y$  en términos de  $X$  para obtener la FPP

$$\begin{cases} X & & & & = 4L_x \\ & Y & & & = 3L_y \\ & & L_x + L_y & = 80 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X & -4L_x & & & = 0 \\ & Y & -3L_y & & = 0 \\ & & L_x + L_y & = 80 \end{cases}$$

("en términos de"  $X$  significa  $X$  libre)

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -80 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} \tau \\ [(4)\mathbf{1}+3] \\ [(3)\mathbf{2}+4] \end{matrix}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -80 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} \tau \\ [(-1)\mathbf{3}+4] \\ [(80)\mathbf{3}+5] \end{matrix}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & -4 & 320 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 0 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = L_y \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 - 4L_y \\ 3L_y \\ 80 - L_y \\ L_y \end{pmatrix} \text{ "en términos de" } L_y$$

18/33

### 8 Variable libre

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & -4 & 320 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} \tau \\ [(-\frac{1}{4})\mathbf{4}] \\ [(-320)\mathbf{4}+5] \end{matrix}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 240 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 240 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow a = X \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 240 - \frac{3}{4}X \\ \frac{1}{4}X \\ 80 - \frac{1}{4}X \end{pmatrix}$$

"en términos de"  $X$

19/33

## 9 Variables libres

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = -1 \\ -x - 2y + 3z + 5w = -5 \\ -x - 2y - z - 7w = 7 \end{cases}$$

1. Resuelva en función de  $y$  y  $w$
2. Resuelva en función de  $x$  y  $w$
3. Resuelva en función de  $x$  y  $z$
4. Resuelva en función de  $x$  y  $y$

20 / 33

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 5 & -5 \\ -1 & -2 & -1 & -7 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \tau \\ [(-2)1+2] \\ [(1)1+3] \\ [(-1)1+4] \\ [(1)1+5] \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 6 & -6 \\ -1 & 0 & -2 & -6 & 6 \\ \hline 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} \tau \\ [(-3)3+4] \\ [(3)3+5] \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

21 / 33

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\begin{array}{l} \tau \\ [(\frac{-1}{2})1] \\ [(4)1+2] \\ [(-4)1+3] \end{array}} \left[ \begin{array}{cc|c} \frac{-1}{2} & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \tau \\ [(1)2+3] \\ [(\frac{-1}{3})2] \end{array}} \left[ \begin{array}{cc|c} \frac{-1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & 1 \end{array} \right] \\ \\ \xrightarrow{\begin{array}{l} \tau \\ [(\frac{-1}{2})1] \\ [(4)1+2] \\ [(-4)1+3] \end{array}} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \tau \\ [(\frac{-1}{2})2] \\ [(\frac{1}{2})2+1] \\ [(-2)2+3] \end{array}} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & 1 \end{array} \right] \end{array} \right.$$

22 / 33

## Problemas de la Lección 12

(L-12) PROBLEMA 1.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos  $x_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  y  $x_Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(b) Encuentre una representación implícita de la recta anterior.

(L-12) PROBLEMA 2.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos  $x_P = (1, -3, 1)$  y  $x_Q = (-2, 4, 5)$ .

(b) Encuentre una representación implícita (ecuaciones Cartesianas) de la recta.

(L-12) PROBLEMA 3.

(a) Ecuación paramétrica de la recta paralela a  $2x - 3y = 5$  que pasa por el punto  $(1, 1)$ .

(b) Encuentre una representación implícita de la recta.

(L-12) PROBLEMA 4.

(a) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto  $(0, 1, 1)$  y tiene por vectores directores  $(0, 1, 2)$  y  $(1, 1, 0)$ .

(b) Escriba la ecuación implícita del mismo plano.

22 / 33

## (L-12) PROBLEMA 5.

- (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto  $(2, 1, 3)$  y es perpendicular a  $(3, 1, 1)$ .
- (b) Escriba la ecuación implícita del mismo plano.

(L-12) PROBLEMA 6. Considere el sistema de ecuaciones  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) (1pts) Obtenga la solución al sistema.
- (b) (0.5pts) Explique por qué el conjunto de vectores solución al sistema anterior es una recta en  $\mathbb{R}^5$ . Indique un vector director y un punto por el que pasa la recta.
- (c) (1pts) Encuentre los vectores perpendiculares al vector director anterior. Pruebe que el conjunto de vectores perpendiculares a dicho vector forman un subespacio vectorial de dimensión 4. Encuentre una base de dicho subespacio.

## 1 Esquema de la Lección 13

## Esquema de la Lección 13

- Proyecciones
- Matrices proyección

## 2 Suma directa de subespacios

$\mathbb{R}^n$  es suma directa de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  ( $\mathbb{R}^n = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ )

si todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tiene una descomposición única  $x = a + b$ ,

con  $a \in \mathcal{A}$  y  $b \in \mathcal{B}$ .

## Ejemplo

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{C}(\mathbf{A}^\top) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$$

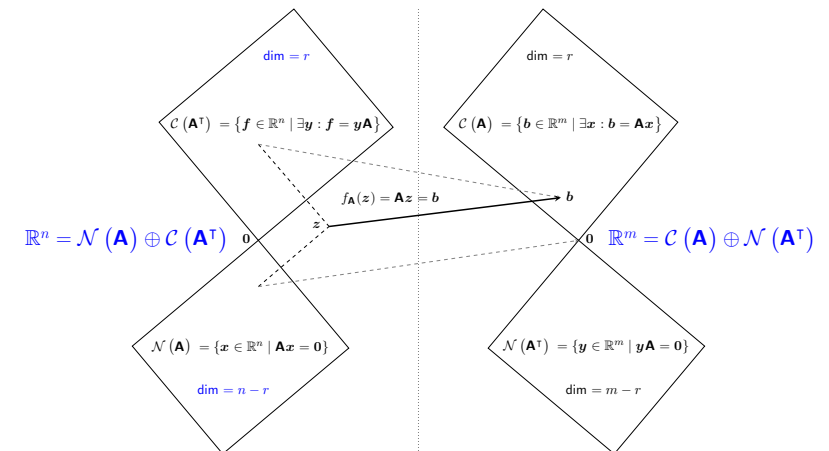
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Base de } \mathbb{R}^3; \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \exists c_1, c_2, c_3 \quad x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a + b$$

donde  $a \in \mathcal{C}(\mathbf{A}^\top)$  y  $b \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ .

$$\text{También } \mathbb{R}^m = \mathcal{C}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$$

## 3 El gran esquema: suma directa de complementos ortogonales



$$\mathcal{C}(\mathbf{A}^\top) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$$

$$f \cdot x = yAx = y \cdot 0$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$$

$$y \cdot b = yAx = 0 \cdot x$$

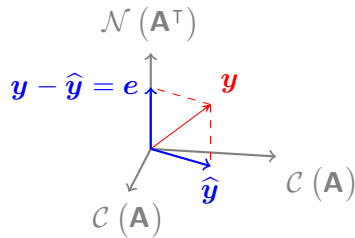


#### 4 Proyección ortogonal sobre $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

Sea  $\mathbf{A}$  ; como  $\mathbb{R}^m = \mathcal{C}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$ , para todo  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e}; \quad (\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

con  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$  y  $\mathbf{e} \perp \hat{\mathbf{y}}$ , así que  $\mathbf{e} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$ .



¿Cómo calcular  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$ ?

26 / 33

#### 5 Ecuaciones normales

Sea  $\mathbf{A}$  . Buscamos la descomposición  $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e}$  donde

$$\hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}) \quad \text{y} \quad (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$$

Por tanto

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$$

Es decir

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A}^\top\mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top\mathbf{y}$$

¡Sistemas equivalentes!  $\Rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) \Rightarrow \text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})$

solución única  $\hat{\mathbf{x}}$  si y sólo si  $\mathbf{A}$  tiene columnas independientes

27 / 33

#### 6 Solución a las ecuaciones normales (rango completo por columnas)

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top\mathbf{y} \quad (\mathbf{A} \text{ de rango completo por columnas})$$

La solución  $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{y}$

La proyección  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{y}$

La matriz de proyección  $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{P}\mathbf{y}$$

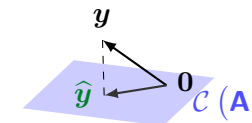
$\mathbf{P}$ : Simétrica e idempotente.

28 / 33

#### 7 Matriz proyección

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top$$

La proyección  $\mathbf{P}\mathbf{y}$  es el punto  $\hat{\mathbf{y}}$  de  $\mathcal{C}(\mathbf{A})$  más próximo a  $\mathbf{y}$

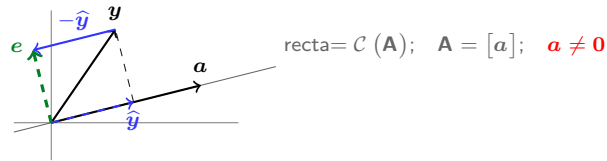


Casos extremos:

- Si  $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$  entonces  $\mathbf{P}\mathbf{y} =$
- Si  $\mathbf{y} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$  entonces  $\mathbf{P}\mathbf{y} =$

29 / 33

### 8 Proyección sobre una recta



Queremos encontrar el punto  $\hat{y}$  sobre la línea más próximo a  $y$

$$\hat{y} \in \mathcal{C}([a]) \quad \perp \quad e = (y - \hat{y}) \in \mathcal{N}([a]^T).$$

$\hat{y}$  es algún múltiplo de  $a$ :  $\hat{y} = [a](\hat{x},)$

Cómo:

$$[a]^T [a] \hat{x} = [a]^T y$$

La solución

$$\hat{x} = ([a]^T [a])^{-1} [a]^T y$$

La proyección

$$\hat{y} = [a] \hat{x} = [a] ([a]^T [a])^{-1} [a]^T y$$

La matriz de proyección

$$P = [a] ([a]^T [a])^{-1} [a]^T$$

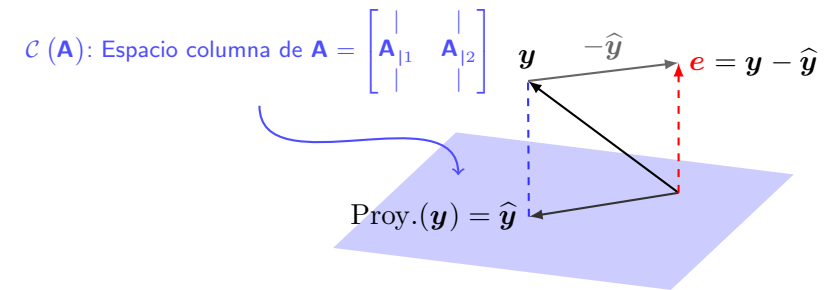
30 / 33

### 9 Proyección sobre un plano

¿Por qué proyectar?

Así que resolveremos

$$Ax = (\text{Proy. de } y \text{ sobre } \mathcal{C}(A)).$$

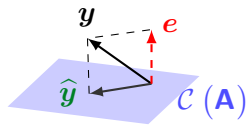


$$(y - \hat{y}) = e \perp \mathcal{C}(A) \quad \dots \text{ese es el hecho fundamental.}$$

31 / 33

### 10 Ecuaciones normales

¿Qué es la proyección de  $y$  sobre el espacio columna de  $A = \begin{bmatrix} | & | \\ A_{|1} & A_{|2} \\ | & | \end{bmatrix}$ ?



$$\hat{y} = (A_{|1})\hat{x}_1 + (A_{|2})\hat{x}_2 = A\hat{x}$$

"Encontrar una combinación de columnas tal que  $e \perp \mathcal{C}(A)$ "

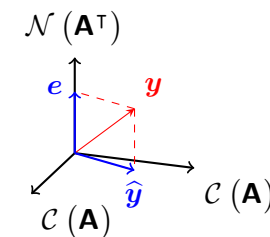
$$e \perp \mathcal{C}(A) \Rightarrow e \in$$

$$A^T e = A^T (y - \hat{y}) = A^T (y - A\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow (A^T A) \hat{x} = A^T y$$

32 / 33

### 11 Dos proyecciones

$y$  tiene un componente  $\hat{y}$  en  $\mathcal{C}(A)$ , y otro  $e$  en  $\mathcal{C}(A)^\perp$ .



$$\hat{y} + e = y$$

$$\hat{y} = Py$$

es la proyección sobre  $\mathcal{C}(A)$

$$e = (I - P)y$$

es la proyección sobre  $\mathcal{C}(A)^\perp$

33 / 33

## Problemas de la Lección 13

(L-13) PROBLEMA 1. Projete el primer vector ( $\mathbf{b}$ ) sobre la recta generada por el segundo vector ( $\mathbf{a}$ ). Compruebe que  $\mathbf{e}$  es perpendicular a  $\mathbf{a}$ . Encuentre la matriz proyección  $\mathbf{P} = [\mathbf{a}]([\mathbf{a}]^T[\mathbf{a}])^{-1}[\mathbf{a}]^T$  sobre la recta generada por cada vector  $\mathbf{a}$ . Verifique en cada caso que  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ . Multiplique  $\mathbf{P}\mathbf{b}$  en cada caso para calcular la proyección  $\widehat{\mathbf{b}}$ .

(a)  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

(b)  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(c)  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

(d)  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ .

(Hefferon, 2008, ejercicio 1.6 del conjunto de problemas VI.1.)

(L-13) PROBLEMA 2. Projete ortogonalmente el vector sobre la recta.

(a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ , La recta:  $\left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^1, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \mathbf{p} \right\}$ .

(b)  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , la recta descrita por la ecuación  $y = 3x$ .

33 / 33

(L-13) PROBLEMA 3. Aunque los dibujos nos han guiado el desarrollo del tema, no estamos restringidos a espacios que podamos dibujar. En  $\mathbb{R}^4$  projete el vector sobre la recta.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^1, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} \right\}.$$

(L-13) PROBLEMA 4.

(a) Projete el vector  $\mathbf{b} = (1, 1)$  sobre las rectas generadas por  $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$  y  $\mathbf{a}_2 = (1, 2)$ . Sume las proyecciones:  $\widehat{\mathbf{b}}_1 + \widehat{\mathbf{b}}_2$ . Las proyecciones no suman  $\mathbf{b}$  porque los vectores  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$  no son ortogonales.

(b) La proyección de  $\mathbf{b}$  sobre el plano generado por  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$  será igual a  $\mathbf{b}$ . Encuentre  $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$  para  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2]$ .

(Strang, 2003, ejercicio 8–9 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-13) PROBLEMA 5.

(a) Si  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$  demuestre que  $(\mathbf{I} - \mathbf{P})^2 = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ . Cuando  $\mathbf{P}$  proyecta sobre el espacio columna de  $\mathbf{A}$ ,  $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$  proyecta sobre el \_\_\_\_\_.

(b) Si  $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$  demuestre que  $(\mathbf{I} - \mathbf{P})^T = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ .

(Strang, 2003, ejercicio 17 del conjunto de problemas 4.2.)

33 / 33

(L-13) PROBLEMA 6.

(a) Calcule las matrices proyección  $\mathbf{P} = [\mathbf{a}]([\mathbf{a}]^T[\mathbf{a}])^{-1}[\mathbf{a}]^T$  sobre las rectas que pasan por  $\mathbf{a}_1 = (-1, 2, 2)$  y  $\mathbf{a}_2 = (2, 2, -1)$ . Compruebe que  $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ . Multiplique esas matrices proyección y explique por qué su producto  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$  es lo que es.

(b) Projete  $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$  sobre las rectas generadas por  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$  y también por  $\mathbf{a}_3 = (2, -1, 2)$ . Sume las tres proyecciones  $\widehat{\mathbf{b}}_1 + \widehat{\mathbf{b}}_2 + \widehat{\mathbf{b}}_3$ .

(c) Encuentre la matriz proyección  $\mathbf{P}_3$  sobre  $\mathcal{L}([\mathbf{a}_3;]) = \mathcal{L}([(2, -1, 2);])$ . Verifique que  $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{I}$ . ¡La base  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  es ortogonal!

(Strang, 2003, ejercicio 5–7 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-13) PROBLEMA 7. Projete  $\mathbf{b}$  sobre el espacio columna de  $\mathbf{A}$  resolviendo  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$  y después calculando  $\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}}$ . Encuentre  $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \widehat{\mathbf{b}}$ .

(a)  $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b)  $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(c) Calcule las matrices proyección  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  sobre los espacios columna. Verifique que  $\mathbf{P}_1\mathbf{b}_1$  da la primera proyección  $\widehat{\mathbf{b}}_1$ . Verifique también que  $(\mathbf{P}_2)^2 = \mathbf{P}_2$ .

(Strang, 2003, ejercicio 11–12 del conjunto de problemas 4.2.)

33 / 33

Hefferon, J. (2008). *Linear Algebra*. Jim Hefferon, Colchester, Vermont USA. This text is Free.

URL

<ftp://joshua.smcvt.edu/pub/hefferon/book/book.pdf>

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*.

Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.

33 / 33