Matemáticas II

Marcos Bujosa

21/01/2025

Puede encontrar la última versión de este material en

https://mbujosab.github.io/MatematicasII/

Índice

Part V
Determinantes

LECCIÓN 14: Propiedades de los determinantes

Lección 14

(**Lección** 14) T-**1** Esquema de la Lección 14

Esquema de la *Lección 14*

- Determinante: $\det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}|$ $[\det: \quad \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}]$
  - Volumen vs determinante
  - Propiedades: **1, 2, 3**
- Deduciremos las propiedades: **4 – 9**

F1

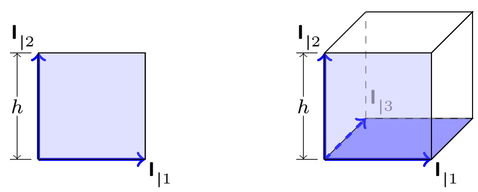
"Pinche aquí" y vea el notebook de Jupyter de la Lección 14. (¡Ojo! están mal numerados los Notebooks)

Definición de la función determinante con tres propiedades relacionadas con el volumen o área

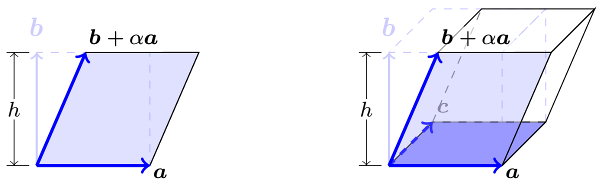
Tres propiedades de la función área (volumen) de un paralelogramo

(**Lección** 14) T-**2** Superficie o Volumen

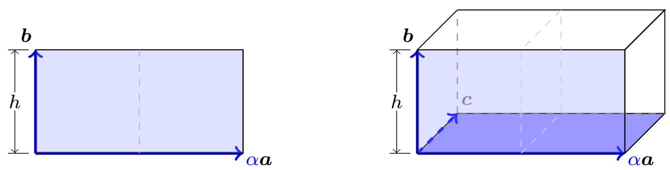
1. $\mathrm{Vol}(\underset{n\times n}{\mathbf{I}}) = 1.$



2. $\mathrm{Vol}(\mathbf{A}) \;=\; \mathrm{Vol}\Big(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\mathbf{k}+\mathbf{j}]}{\tau}}\Big)$ para $j \neq k$.



3. $|\alpha|\cdot\mathrm{Vol}(\mathbf{A}) \;=\; |\alpha|\cdot\mathrm{Vol}\big[\dots;\mathbf{A}_{|k};\dots\big] \;=\; \mathrm{Vol}\big[\dots;\alpha\mathbf{A}_{|k};\dots\big]$



F2

Las tres primeras propiedades (P-1 to P-3)

Por analogía con la función volumen, definimos el determinante del siguiente modo:

Definición 1. *Denominamos* función determinante *a toda función que asigna a cada sistema de n vectores de $\mathbb{R}^n$ (o a cada matriz cuadrada de orden n) un número real*

$$\det: \quad \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

y que verifica las siguientes tres propiedades:

(**Lección** 14) T-3 Determinante: 3 propiedades que lo definen

P-1 **Determinante de las matrices identidad:** **P-1**

$$\det \underset{n\times n}{\mathbf{I}} = 1$$

P-2 **Transf. elem. *Tipo I* no cambian el determinante**: **P-2**

$$\det \mathbf{A} = \det\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)$$

P-3 **Multiplicar una columna multiplica el determinante** **P-3**

$$\alpha \cdot \det \mathbf{A} \;=\; \det\left[\ldots; \alpha\mathbf{A}_{|k}; \ldots\right] \text{ para cualquier } k \in \{1:n\} \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Valor absoluto de } \det \mathbf{A} = \text{Vol}\,\mathbf{A}}$$

F3

Es decir, el valor absoluto de la función determinante es la función volumen. Emplearemos dos notaciones alternativas para el determinante de la matriz $\mathbf{A}$:

$$\text{determinante de } \mathbf{A} \equiv \det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}|$$

Advertencia: Una barra vertical a cada lado de una matriz $|\mathbf{A}|$ significa determinante de la matriz. Una barra vertical a cada lado de un número $|a|$ significa valor absoluto del número. Es decir, el significado de las barras viene dado por el objeto encerrado: si es un número es el *valor absoluto*, y si es una matriz es el *determinante*. Jugando con esto, podemos decir que

$$\text{Vol}\,\mathbf{A} = \text{Valor absoluto de } \det \mathbf{A} = \left|\det \mathbf{A}\right| = \big||\mathbf{A}|\big|.$$

Ejemplo 1. Para $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & (b_1+\alpha c_1) & c_1 \\ a_2 & (b_2+\alpha c_2) & c_2 \\ a_3 & (b_3+\alpha c_3) & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\det\left[\boldsymbol{a};\ (\boldsymbol{b}+\alpha\boldsymbol{c});\ \boldsymbol{c};\right] = \det\left[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c};\right];$$

y también

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha\, b_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha\, b_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha\, b_3 & c_3 \end{vmatrix}; = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\det\left[\boldsymbol{a};\ \alpha\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c};\right] = \alpha \det\left[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c};\right];$$

Resto de propiedades (P-4 a P-11)

Determinante de una matriz con una columna de ceros

(**Lección** 14) T-4 Determinante de una matriz con una columna nula

P-4 **Det. de una matriz con una columna de ceros** P-4

Si $\mathbf{A}$ *tiene una columna de ceros* $\mathbf{0}$*, entonces*

$$\boxed{\det(\mathbf{A})=0}$$

F5

A resolver en clase

EJERCICIO 1. Sea una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden n con una columna de ceros $\mathbf{0}$. Demuestre que su determinante es cero:

Transformaciones elementales por columnas.

(**Lección** 14) T-5 Matrices elementales

Ya sabemos que

$$\det\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=|\mathbf{A}|;\qquad \det\left(\mathbf{A}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\alpha|\mathbf{A}|.$$

Determinante de matrices elementales

$$\det\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=1\qquad\text{y}\qquad \det\left(\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\right)=\alpha.$$

Así, puesto que $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}=\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})$, entonces

$$\left|\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}})\right|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}| \tag{1}$$

donde $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ es una matriz elemental

F6

Sucesión de transformaciones elementales por columnas.

EJERCICIO 2. Demuestre las siguientes proposiciones

(a) $\det(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k})=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}|\cdots|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}|$.

(b) Si $\mathbf{B}$ es de rango completo, es decir, si $\mathbf{B}=\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$, entonces $|\mathbf{B}|=|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}|\cdots|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}|$, y por tanto $|\mathbf{B}|\neq 0$.

(c) *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son de orden* n*, y* $\mathbf{B}$ *es de rango completo entonces*

$$\det(\mathbf{AB})=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}| \tag{2}$$

(**Lección** 14) T-6 Determinante tras una sucesión de transformaciones elementales

Ejemplo 2. Una sucesión $\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k$ de trasformaciones *Tipo I* de la matriz $\mathbf{A}$ no altera el determinante.

$$|\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}|=|\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k})|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}|=|\mathbf{A}|\cdot 1=|\mathbf{A}|$$

Ejemplo 3. Pero si lo puede hacer una sucesión de trasformaciones *Tipo II*.

$$\begin{vmatrix}2a&3c\\2b&3d\end{vmatrix}=\underline{\ ?\ }\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}$$

F7

Propiedad antisimétrica. Determinante de una matriz singular, de la inversa y del producto de matrices

Permutación (o intercambio) de columnas

(**Lección** 14) T-7 Propiedad antisimétrica

P-5 **[Propiedad antisimétrica]** P-5

Intercambiar dos columnas cambia el signo del determinante.

Demostración. Un intercambio de columnas es una sucesión de transformaciones elementales *Tipo I* y una única de *Tipo II* que multiplica por -1 una columna $\square$

Así que:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

F8

Matrices singulares. Matrices inversas

Nota 1. *Mediante operaciones elementales es posible reducir* $\mathbf{A}$ *a su forma escalonada reducida* $\mathbf{R}$*; y hemos de contemplar dos casos:*

- *Cuando la matriz es singular (rango $< n$) el determinante es cero;*
- *Cuando la matriz es de rango completo* ($\mathbf{R} = \mathbf{I}$)*. En este caso basta con mirar cómo las operaciones* Tipo II *han ido cambiando el valor del determinante de* $\mathbf{A}$ *hasta llegar a la matriz* $\mathbf{I}$ *(las de* Tipo I *no importan!...)*

(**Lección** 14) T-8 Matrices singulares. Matrices inversas

P-6 **Si $\mathbf{A}$ es singular entonces $|\mathbf{A}| = 0$.** P-6

P-7 $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \big(\det \mathbf{A}\big)^{-1}$. P-7

Demostración. Sea $\mathbf{A}_{\tau_1 \cdots \tau_k} = \underset{n\times n}{\mathbf{R}}$ escalonada reducida (y $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\tau_1 \cdots \tau_k}$).

Como $\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{R}$, entonces: $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{E}| = |\mathbf{R}|$; con solo dos casos:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \text{ singular } (\mathbf{R}_{|n} = \mathbf{0}\ ): & |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{E}| = 0 \ \Rightarrow\ |\mathbf{A}| = 0 \\ \\ \mathbf{A} \text{ no singular } (\mathbf{R} = \mathbf{I}): & |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{E}| = 1 \ \Rightarrow\ |\mathbf{E}| = \left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \big(|\mathbf{A}|\big)^{-1} \end{cases}.$$

$\square$

F9

Determinante de la matriz inversa

Además, también podemos calcular mediante la eliminación gaussiana el determinante de la matriz inversa. Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ tenemos $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{E}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{I}| = 1$ y por tanto

$$\boxed{|\mathbf{A}^{-1}| = \big(|\mathbf{A}|\big)^{-1}.}$$

Ejemplo 4. Para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[TipoI]{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ \hline 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[TipoII]{\underset{[(-1/2)\mathbf{2}]}{\tau}} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow[TipoI]{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

Por tanto

$$\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \left|\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\tau}}\right| \cdot \left|\mathbf{I}_{\underset{[(-1/2)\mathbf{2}]}{\tau}}\right| \cdot \left|\mathbf{I}_{\underset{[(-2)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}{\tau}}\right| = 1 \cdot \frac{-1}{2} \cdot 1 = \frac{-1}{2};$$

es decir $\boxed{|\mathbf{A}| = -2.}$

Determinante del producto.

Recuerde que para cualquier $\mathbf{B}$ de orden n, existe $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\tau_1 \cdots \tau_k}$ (de rango completo) tal que $\mathbf{BE} = \mathbf{L}$ es una forma escalonada de $\mathbf{B}$. Si $\mathbf{B}$ es singular entonces $\mathbf{L}_{|n} = \mathbf{0}$. Aplicando las mismas transformaciones elementales por columnas a $\mathbf{AB}$, es decir calculando el producto $\mathbf{ABE}$ tenemos

$$\mathbf{ABE}_{|n} = \mathbf{AL}_{|n} = \mathbf{0};$$

puesto que $\mathbf{E}_{|n} \neq \mathbf{0}$, necesariamente $(\mathbf{AB})$ es singular .

(**Lección** 14) T-**9** Determinante de un producto de matrices

P-8 [**Determinante del producto de matrices**] **P-8**

$$\boxed{\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}).} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B} \text{ singular, también lo es } \mathbf{AB} \Rightarrow & \det(\mathbf{AB}) = 0 = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \\ \mathbf{B} = \mathbf{I}_{\tau_1 \cdots \tau_k} \Rightarrow & \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \end{cases}$$

F10

Determinante de la matriz transpuesta.

A resolver en clase

EJERCICIO 3. [**Matrices transpuestas**]

(a) ¿Qué relación hay entre el determinante de una matriz elemental $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ y el determinante de su transpuesta ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}$?

(b) Sea $\mathbf{B}$ de rango completo, demuestre que $|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}^\intercal|$.

(**Lección** 14) T-**10** Determinante de la transpuesta

P-9 **Determinante de la transpuesta** **P-9**

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^\intercal|.$$

Demostración.

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{A} \text{ singular:} & \mathbf{A}^\intercal \text{ singular } \Rightarrow \det \mathbf{A}^\intercal = \det \mathbf{A} = 0 \\ \text{si } \mathbf{A} \text{ NO singular:} & \mathbf{A} = \mathbf{I}_{\tau_1 \cdots \tau_k} \Rightarrow \det \mathbf{A}^\intercal = \det \mathbf{A} \end{cases}.$$

□

F11

Problemas de la Lección 14

(L-14) Problema 1. Complete las demostraciones (los Ejercicios) de esta lección.

(L-14) Problema 2. Sabiendo que el determinante del producto de dos matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ cualesquiera es $|\mathbf{BC}| = |\mathbf{B}||\mathbf{C}|$; demuestre que para toda matriz $\mathbf{A}$ invertible (y por tanto con $\det \mathbf{A} \neq 0$)

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \Big(\det(\mathbf{A})\Big)^{-1}.$$

(L-14) Problema 3. Sean $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ y $\underset{3\times 3}{\mathbf{B}}$ tales que $\det(\mathbf{A}) = 2$ y $\det(\mathbf{B}) = -2$

(a) (0.5^{pts}) Calcule los determinantes de $\mathbf{A}(\mathbf{B})^2$ y $(\mathbf{AB})^{-1}$

(b) (0.5^{pts}) ¿Es posible calcular el rango de $\mathbf{A}+\mathbf{B}$? ¿y de $\mathbf{AB}$?

(L-14) Problema 4. Aplique el método de Gauss-Jordan para calcular el determinante de las siguientes matrices

(a) $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(L-14) Problema 5. La matriz $\mathbf{A}$ de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad $\mathbf{I}$ mediante las siguientes tres operaciones elementales sobre las columnas (en el siguiente orden):

$\underset{[(-4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 4 veces columna 1 de la columna 2.

$\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta 3 veces columna 1 de la columna 3.

$\underset{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}$: Resta columna 3 de la columna 2.

Calcule el determinante de $\mathbf{A}$.

(L-14) Problema 6.

(a) Calcule el determinante de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Encuentre el determinante de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$ por Gauss-Jordan.

Fin de los Problemas de la Lección 14

LECCIÓN 15: Cofactores y fórmulas para el cálculo del determinante

Lección 15

(**Lección** 15) T-1 Esquema de la Lección 15

Esquema de la *Lección 15*

- Cálculo de $|\mathbf{A}|$ por eliminación gaussiana
- **P-10** — Propiedad multilineal
- Desarrollo del determinante por cofactores (Expansión de Laplace).
- Aplicaciones de la función determinante
  - Regla de Cramer para la resolución de un sistema de ecuaciones
  - Calculo de la inversa de una matriz

F12

"Pinche aquí" y vea el notebook de Jupyter de la Lección 15

(**Lección** 15) T-2 Matriz extendida

$$\text{Matriz extendida de } \mathbf{B}: \quad \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

1. Dada $\boldsymbol{\tau}$: $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\tau}} & \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \\ & 1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}}$.
2. Como $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & 1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}}$ y $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ Mat. Elem. mismo *tipo* $\Rightarrow$ mismo det.

Aplicando 1. k veces y luego 2.

$$\left|\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} & \\ & 1 \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & 1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right| = \left|\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & 1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}_1}\cdots\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & 1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right| = \left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right|\cdots\left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right| = \left|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right|.$$

$$\text{Si } \mathbf{A} \text{ matriz extendida de } \mathbf{B} \begin{cases} \text{Si } \mathbf{B} \text{ singular} & |\mathbf{B}| = 0 = |\mathbf{A}| \\ \text{Si } \mathbf{B} \text{ invertible} & |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \end{cases}$$

F13

Matrices triangulares

EJERCICIO 4. [**Matrices triangulares**]
(a) ¿Cómo es el determinante de una matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ de rango completo?
(b) ¿Cuál es el determinante de una matriz cuadrada y triangular con algún elemento nulo en su diagonal?
(c) ¿Cómo es el determinante de una matriz triangular superior? $\mathbf{U}$

$$\text{Además} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \underset{m\times n}{\mathbf{0}} \\ \underset{n\times m}{\mathbf{C}} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

Cálculo del determinante por eliminación Gaussiana

(**Lección** 15) T-3 Cálculo por eliminación Gaussiana

Ejemplo 5. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&5\\2&3\end{bmatrix}$: $\left[\begin{array}{cc|c}1&5&\\2&3&\\\hline &&1\end{array}\right]\xrightarrow[]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-5)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&\\2&-7&\\\hline &&1\end{array}\right]$ $\boxed{|\mathbf{A}|=-7}$

Ejemplo 6.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&1&0\\9&6&3&0\\0&1&1&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(\frac{1}{2})\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(2)\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&0&0\\9&6&0&0\\0&1&1&0\\\hline 0&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow[\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{4}]}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&0\\6&9&0&0\\1&0&1&0\\\hline 0&0&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix}0&2&1\\9&6&3\\0&1&1\end{vmatrix}=-9,$$

F14

```
A =  Matrix([ [0,2,1], [9,6,3], [0,1,1] ])
Determinante(A,1)
```

Fórmulas sencillas para matrices de orden menor que 4

Matrices de orden 1, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a\end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{c|c}a&0\\\hline 0&1\end{array}\right]\Rightarrow|\mathbf{A}|=a.$$

Matrices de orden 2:

$$\left[\begin{array}{cc|c}a&b&0\\c&d&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-\frac{b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cc|c}a&0&0\\c&d-\frac{bc}{a}&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]$$

$$|\mathbf{A}|\;=ad-bc\;=\;a\det\begin{bmatrix}d\end{bmatrix}-b\det\begin{bmatrix}c\end{bmatrix}.$$

Matrices de orden 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}a&b&c&0\\d&e&f&0\\g&h&i&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-\frac{b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-\frac{c}{a})\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc|c}a&0&0&0\\d&e-\frac{bd}{a}&f-\frac{cd}{a}&0\\g&h-\frac{bg}{a}&i-\frac{cg}{a}&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(\frac{-af+cd}{ae-bd})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{ccc|c}a&0&0&0\\d&e-\frac{bd}{a}&0&0\\g&h-\frac{bg}{a}&\frac{aei-afh-bdi+bfg+cdh-ceg}{ae-bd}&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$|\mathbf{A}|\;=\;\underbrace{aei-afh-bdi+bfg+cdh-ceg}_{\text{(Regla de Sarrus)}}\;=\;a\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}.$$

Matrices de orden 4:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}a&b&c&d&0\\e&f&g&h&0\\i&j&k&l&0\\m&n&o&p&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-\frac{b}{a})\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-\frac{c}{a})\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-\frac{d}{a})\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(\frac{-ag+ce}{af-be})\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(\frac{-ah+de}{af-be})\mathbf{2}+\mathbf{4}]\\ [(\frac{-afl+ahj+bel-bhi-dej+dfi}{afk-agj-bek+bgi+cej-cfi})\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}a&0&0&0&0\\e&f-\frac{be}{a}&0&0&0\\i&j-\frac{bi}{a}&\frac{afk-agj-bek+bgi+cej-cfi}{af-be}&0&0\\m&n-\frac{bm}{a}&\frac{afo-agn-beo+bgm+cen-cfm}{af-be}&p+\frac{\left(-l+\frac{\left(h-\frac{de}{a}\right)\left(j-\frac{bi}{a}\right)}{f-\frac{be}{a}}+\frac{di}{a}\right)\left(-o+\frac{\left(g-\frac{ce}{a}\right)\left(n-\frac{bm}{a}\right)}{f-\frac{be}{a}}+\frac{cm}{a}\right)}{-k+\frac{\left(g-\frac{ce}{a}\right)\left(j-\frac{bi}{a}\right)}{f-\frac{be}{a}}+\frac{ci}{a}}-\frac{\left(h-\frac{de}{a}\right)\left(n-\frac{bm}{a}\right)}{f-\frac{be}{a}}-\frac{dm}{a}&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$|\mathbf{A}| = afkp-aflo-agjp+agln+ahjo-ahkn-bekp+belo+bgip-bglm-bhio+bhkm+cejp-celn-cfip+cflm+chin-chjm-dejo+dekn+dfio-dfkm-dgin+dgjm = a\begin{vmatrix} f & g & h\\ j & k & l\\ n & o & p\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h\\ i & k & l\\ m & o & p\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h\\ i & j & l\\ m & n & p\end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g\\ i & j & k\\ m & n & o\end{vmatrix}$$

Desarrollo del determinante por cofactores (Expansión de Laplace).

Propiedad multilineal

(**Lección** 15) T-**4** Propiedad multilineal

P-10 **Propiedad multilineal** **P-10**

$$\det\left[\ldots;(\beta\boldsymbol{b}+\psi\boldsymbol{c});\ldots\right] = \beta\det\left[\ldots;\boldsymbol{b};\ldots\right] + \psi\det\left[\ldots;\boldsymbol{c};\ldots\right]$$

Ejemplo 7. Para $\mathbb{R}^2$

$$\begin{vmatrix} a+\alpha & c\\ b+\beta & d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c\\ b & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & c\\ \beta & d\end{vmatrix};$$

es decir

$$\begin{vmatrix} a & c\\ b & d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c\\ 0 & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & c\\ & d\end{vmatrix}.$$

F17

Demostración. En el libro (`https://mbujosab.github.io/CursoDeAlgebraLineal/libro.pdf`) □

Menores y cofactores

Nueva notación y definición de menores y cofactores

Sea $\boldsymbol{q} = (q_1,\ldots q_n,)$ de $\mathbb{R}^n$, si quitamos la j-ésima componente, q_j, denotamos al nuevo vector de $\mathbb{R}^{(n-1)}$ como

$$\boldsymbol{q}^{\Rsh j} = \left(q_1,\ldots,\ q_{j-1},\quad q_{j+1},\ \ldots,q_n\right) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Análogamente, si $\mathbf{A}$ es de orden m por n, denotamos a la submatriz que resulta de quitar la i-ésima fila con ${}^{i\Lsh}\mathbf{A}$, y a la submatriz que resulta de quitar la j-ésima columna con $\mathbf{A}^{\Rsh j}$. Así, ${}^{i\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh j}$, es la submatriz de orden $m-1$ por $n-1$ que resulta de quitar la fila i-ésima y la columna j-ésima.

(**Lección** 15) T-**5** menores y cofactores

Definición 2 (menores y cofactores)**.** *Denotamos la submatriz resultante de eliminar la fila i y la columna j con*

$${}^{i\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh j}.$$

Su determinante $\det\left({}^{i\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh j}\right)$, *se denomina* menor *de a_{ij}.*
Los menores con los signos alternados en función de si $(i+j)$ es par (en cuyo caso el signo no cambia) o impar (en cuyo caso se invierte el signo) se denominan cofactores*.*
Así, el cofactor *de a_{ij} es*

$$\operatorname{cof}_{ij}\left(\mathbf{A}\right) = (-1)^{i+j}\det\left({}^{i\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh j}\right).$$

F18

Ejemplo 8. Para $\quad\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$, tenemos

$${}^{1\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh 2} = \begin{bmatrix} 4 & 6\\ 7 & 9\end{bmatrix}, \qquad {}^{3\Lsh}\mathbf{A}^{\Rsh 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

así

$$\operatorname{cof}_{12}(\mathbf{A}) = (-1)^{1+2}\det\left({}^{1\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner 2}\right) = (-1)\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix}.$$

y

$$\operatorname{cof}_{33}(\mathbf{A}) = (-1)^{3+3}\det\left({}^{3\urcorner}\mathbf{A}^{\ulcorner 3}\right) = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}.$$

Desarrollo del determinante por cofactores (Expansión de Laplace).

(**Lección** 15) T-6 Desarrollo del determinante por cofactores

Teorema 0.1 (**[Expansión de Laplace]**). *Para cualquier matriz de orden n, $\det(\mathbf{A})$ se puede expresar como suma de los productos de los elementos de cualquier columna (fila) de $\mathbf{A}$ por sus correspondientes cofactores:*

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}_{ij}(\mathbf{A}), \qquad \textit{expansión por la columna } j\textit{-ésima}$$

o bien

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}_{ij}(\mathbf{A}), \qquad \textit{expansión por la fila } i\textit{-ésima}$$

F20

Demostración. En el libro (`https://mbujosab.github.io/CursoDeAlgebraLineal/libro.pdf`) □

A resolver en clase

EJERCICIO 5. Calcule $\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix}2 & 0 & 3 & 2\\ 5 & 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$

Primera aplicación de los determinantes

Regla de Cramer para la resolución de un sistema de ecuaciones

(**Lección** 15) T-7 Regla de Cramer

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}; \qquad |\mathbf{A}| \neq 0 \quad \text{entonces}$$

$$\boldsymbol{b} = (\mathbf{A}_{|1})x_1 + \cdots + (\mathbf{A}_{|j})x_j + \cdots + (\mathbf{A}_{|n})x_n.$$

$$\det\Big[\mathbf{A}_{|1}; \;\ldots\; \overbrace{\boldsymbol{b}}^{\text{pos. } j}; \;\ldots\; \mathbf{A}_{|n}\Big] = x_j \cdot \det(\mathbf{A}).$$

$$x_j = \frac{\det\Big[\mathbf{A}_{|1}; \;\ldots\; \overbrace{\boldsymbol{b}}^{\text{pos. } j}; \;\ldots\; \mathbf{A}_{|n}\Big]}{\det(\mathbf{A})}.$$

Problemas computacionales cuando $\det\mathbf{A} \simeq 0$ (ángulo pequeño entre vectores)

F21

Segunda aplicación de los determinantes

Cálculo de la inversa de una matriz

Definición 3. *Para* $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ *la matriz* $\mathbf{Adj(A)}$ *(la* matriz adjunta *de* $\mathbf{A}$*) se define como la transpuesta de la matriz resultante de sustituir cada elemento* a_{ij} *de* $\mathbf{A}$ *por su correspondiente cofactor* $\operatorname{cof}_{ij}(\mathbf{A})$*. Es decir,*

$$\mathbf{Adj(A)} = \begin{bmatrix} \operatorname{cof}_{11}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{12}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{1n}(\mathbf{A}) \\ \operatorname{cof}_{21}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{22}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{2n}(\mathbf{A}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cof}_{n1}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{n2}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{nn}(\mathbf{A}) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

¿Qué obtenemos si multiplicamos la matriz adjunta de $\mathbf{A}$ por la matriz $\mathbf{A}$?

(**Lección** 15) T-8 **Cálculo de la inversa de una matriz**

$$[\mathbf{Adj(A)}]\cdot\mathbf{A} =$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{cof}_{11}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{21}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{n1}(\mathbf{A}) \\ \operatorname{cof}_{12}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{22}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{n2}(\mathbf{A}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cof}_{1n}(\mathbf{A}) & \operatorname{cof}_{2n}(\mathbf{A}) & \cdots & \operatorname{cof}_{nn}(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}$$

F22

El primer elemento de la diagonal de la matriz resultante es el desarrollo de $|\mathbf{A}|$ por la primera columna de $\mathbf{A}$. El segundo elemento de la diagonal es el desarrollo de $|\mathbf{A}|$ por la segunda columna, etc. Y en general el componente $j$ésimo de la diagonal es la expansión por la columna j-ésima:

$$a_{1j}\operatorname{cof}_{1j}(\mathbf{A}) + a_{2j}\operatorname{cof}_{2j}(\mathbf{A}) + a_{3j}\operatorname{cof}_{3j}(\mathbf{A}) + \cdots + a_{nj}\operatorname{cof}_{nj}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}_{ij}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$$

Así pues, la diagonal de la matriz resultante está compuesta por el valor del determinante de $\mathbf{A}$.

Los elementos fuera de la diagonal son determinantes de matrices con dos columnas iguales. Por ejemplo, el segundo elemento de la primera fila de $[\mathbf{Adj(A)}]\cdot\mathbf{A}$ es el desarrollo por la primera columna de

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{12}\operatorname{cof}_{11}(\mathbf{A}) + a_{22}\operatorname{cof}_{21}(\mathbf{A}) + a_{32}\operatorname{cof}_{31}(\mathbf{A}) + \cdots + a_{n2}\operatorname{cof}_{n1}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\operatorname{cof}_{i1}(\mathbf{A}) = 0,$$

donde la columna 2 aparece repetida en la primera posición, y por lo tanto el determinante es igual a cero.

Y el elemento $k$ésimo ($k \neq 1$) de la primera fila es

$$\begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{3k} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nk} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1k}\operatorname{cof}_{11}(\mathbf{A}) + a_{2k}\operatorname{cof}_{21}(\mathbf{A}) + a_{3k}\operatorname{cof}_{31}(\mathbf{A}) + \cdots + a_{nk}\operatorname{cof}_{n1}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\operatorname{cof}_{i1}(\mathbf{A}) = 0,$$

donde la columna $k$ésima aparece repetida en primera posición, y por lo tanto el determinante es igual a cero.

Se deduce entonces que $[\mathbf{Adj(A)}] \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I}$; y despejando $\mathbf{I}$ tenemos que:

$$\left[\frac{\mathbf{Adj(A)}}{|\mathbf{A}|}\right] \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I};$$

donde la primera matriz es necesariamente la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

Fin de la lección

Problemas de la Lección 15

(L-15) PROBLEMA 1. Complete las demostraciones (los EJERCICIOS) de esta lección.

(L-15) PROBLEMA 2. Sea $\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_{|1};\quad \mathbf{A}_{|2};\quad \mathbf{A}_{|3};\right]$ con $\det \mathbf{A} = 2$.

(a) Calcule $\det(2\mathbf{A})$ y $\det \mathbf{A}^{-1}$

(b) Calcule $\det\left[(3\mathbf{A}_{|1} + 2\mathbf{A}_{|2});\quad \mathbf{A}_{|3};\quad \mathbf{A}_{|2};\right]$

(L-15) PROBLEMA 3. El determinante de una matriz $\mathbf{A}$ de orden n por n es 12 (donde n es un múltiplo de dos). ¿Cuál es el determinante de $-\mathbf{A}^\intercal$? (Justifique su respuesta).
(*MIT Course 18.06 Quiz 2, Fall, 2008*)

(L-15) PROBLEMA 4. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*).

$|\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal| = |\mathbf{A}|^2$.

(L-15) PROBLEMA 5. Tenemos una matriz de orden 3×3, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$ con $\det \mathbf{A} = 3$. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

(a) (0.5 pts) $\begin{bmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ b-4 & 3 & 4 \\ c-6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(b) (0.5 pts) $\begin{bmatrix} 7a & 7 & 14 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(c) (1 pts) $(2\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal$

(d) (0.5 pts) $\begin{bmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(L-15) PROBLEMA 6.

(a) Escalone la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) ¿Es $\mathbf{A}$ invertible?

(c) En caso afirmativo calcule $|\mathbf{A}^{-1}|$; en caso contrario calcule $|\mathbf{A}|$

(d) La matriz $\mathbf{C}$ es igual al producto de $\mathbf{A}$ con la *traspuesta* de la matriz $\mathbf{B}$, es decir

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}^\intercal \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

¿Cuánto vale el determinante de $\mathbf{C}$? ¿Es $\mathbf{C}$ invertible?

(L-15) PROBLEMA 7. Calcule el determinante de las siguientes matrices empleando la expansión de Laplace.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(L-15) PROBLEMA 8. Calcule el siguiente determinante empleando la expansión de Laplace:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

(L-15) PROBLEMA 9. Calcule $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(L-15) PROBLEMA 10. Calcule el determinante de la siguiente matriz empleando la expansión de Laplace

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

(L-15) PROBLEMA 11. Suponga la matriz $\mathbf{A}_n$ de dimensiones n por n que tiene treses en su diagonal y doses inmediatamente debajo de la diagonal y en la posición $(1, n)$; por ejemplo, para $n = 4$:

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre, empleando los cofactores de la primera fila, el determinante de $\mathbf{A}_4$.
(b) Encuentre el determinante de $\mathbf{A}_n$ para $n > 4$.

(L-15) PROBLEMA 12. Si tiene una matriz por bloques

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

Demuestre que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}||\mathbf{C}|$.

Pista. $\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$

(L-15) PROBLEMA 13. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales, aplicando la regla de Cramer.

(a) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ \ \ x + 4y = 2 \end{cases}.$

(b) $\begin{cases} 2x + y \phantom{{}+ z} = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ \phantom{x+{}} y + 2z = 0 \end{cases}.$

(ejercicio 13 del conjunto de problemas 4.4 de Strang (2007))

(L-15) PROBLEMA 14. Encuentre la inversa de las siguientes matrices empleando la matriz adjunta.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(ejercicio 18 del conjunto de problemas 4.4 de Strang (2007))

(L-15) PROBLEMA 15. Sean las matrices $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; y el vector $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) (0.5^{pts}) Calcule los valores de a para los que $\mathbf{A}$ es invertible.

(b) (1^{pts}) Considere $a = 5$. Usando la regla de Cramer calcule la cuarta coordenada x_4 de la solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(c) (1^{pts}) Calcule $\mathbf{B}^{-1}$. Use dicha matriz para resolver el sistema $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Fin de los Problemas de la Lección 15

References

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones.* Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.

Soluciones

Ejercicio 1. El vector cero $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^n$ es múltiplo de cualquier otro vector $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$, pues $\mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{x}$; y por tanto, por la propiedad P-3 el determinante de $\mathbf{A}$ es cero:

$$\det\left[\mathbf{A}_{|1}\ldots;\mathbf{0};\ldots;\mathbf{A}_{|n}\right] = \det\left[\mathbf{A}_{|1}\ldots;0\boldsymbol{x};\ldots;\mathbf{A}_{|n}\right] = 0\cdot\det\left[\mathbf{A}_{|1}\ldots;\boldsymbol{x};\ldots;\mathbf{A}_{|n}\right] = 0$$

□

Ejercicio 2(a) Puesto que $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}) = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1})\cdots(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k})$, aplicando repetidamente (1) tenemos

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}) &= \left|\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1})\cdots(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k})\right| \\ &= \left|\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1})\cdots(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_{(k-1)}})\right|\cdot|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}| \\ &= \left|\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1})\cdots(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_{(k-2)}})\right|\cdot|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_{(k-1)}}|\cdot|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}| \\ &\vdots \\ &= |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}|\cdots|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}|.\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2(b)

$$|\mathbf{B}| = \det(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}) = |\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}|\cdots|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}|.$$

y como los determinantes de las matrices elementales son distintos de cero, necesariamente $|\mathbf{B}| \neq 0$.

□

Ejercicio 2(c) Si $\mathbf{B}$ es de rango completo entonces es producto de k matrices elementales; por tanto $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$. Así

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}) = \det(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}) = |\mathbf{A}|\cdot\left(|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}|\cdots|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}|\right) = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$$

□

Ejercicio 3(a) Puesto que ambas son matrices elementales del mismo tipo, $\det(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}}) = \det({}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I})$.

□

Ejercicio 3(b) Puesto que $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} = (\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1})\cdots(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k})$, su determinante es el producto de los determinantes $\det(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_i})$

$$|\mathbf{B}| = \det\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\right)\cdots\det\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k}\right) = \prod_{i=1}^{k}\det\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_i}\right).$$

Pero también sabemos que $\mathbf{B}^{\intercal} = {}_{\boldsymbol{\tau}_k\cdots\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{I} = \left({}_{\boldsymbol{\tau}_k}\mathbf{I}\right)\cdots\left({}_{\boldsymbol{\tau}_1}\mathbf{I}\right)$, por lo que su determinante es

$$|\mathbf{B}^{\intercal}| = \prod_{i=1}^{k}\det\left({}_{\boldsymbol{\tau}_i}\mathbf{I}\right) = \prod_{i=1}^{k}\det\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_i}\right) = |\mathbf{B}|.$$

□

(L-14) Problema 2. Puesto que $\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, sabemos que

$$1 = |\mathbf{I}| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}|;$$

de donde se deduce que $\quad \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

□

(L-14) Problema 3(a) $\left|\mathbf{A}(\mathbf{B})^2\right| = 2\cdot(-2)^2 = 8$.
$\left|(\mathbf{AB})^{-1}\right| = \left(|\mathbf{AB}|\right)^{-1} = \frac{1}{-4}$.

□

(L-14) Problema 3(b) No hay información suficiente para saber el rango de $\mathbf{A}+\mathbf{B}$. Al decir que no hay información suficiente, quiero decir que podemos encontrar 2 ejemplos de pares de matrices $(\mathbf{A}_1,\mathbf{B}_1)$ y $(\mathbf{A}_1,\mathbf{B}_1)$ que satisfacen las hipótesis, es decir, $\det\mathbf{A}_1 = 2 = \det\mathbf{B}_1$ y $\det\mathbf{A}_2 = 2 = \det\mathbf{B}_2$; y sin embargo $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}_1+\mathbf{B}_1\right) \neq \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}_2+\mathbf{B}_2\right)$.

Por otra parte, puesto que $|\mathbf{AB}| = -4 \neq 0$, sabemos que $\underset{3\times 3}{\mathbf{AB}}$ es una matriz de rango completo, es decir, su rango es 3.

$\square$

(L-14) Problema 4(a)

$$[\mathbf{A}_1]=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=[\mathbf{I}]\quad\Rightarrow\quad\det\mathbf{A}_1=-1$$

```
A =  Matrix([ [1,0,0], [1,1,1], [0,0,1] ])
Determinante(A)      # esta es una opción
A.determinante()     # esta es otra opción
```

$\square$

(L-14) Problema 4(b)

$$\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[{\substack{[(2)\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&3&-1\\0&-2&2\end{bmatrix}\xrightarrow[{\substack{[(3)\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&3&0\\0&-2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[{\substack{[(3)\mathbf{1}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&3&0\\-2&-2&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[{\substack{[(2)\mathbf{1}]\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]\\ [(2)\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{3}+\mathbf{2}]}}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}12&0&0\\0&6&0\\0&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow[{\substack{[(\frac{1}{12})\mathbf{1}]\\ [(\frac{1}{6})\mathbf{2}]\\ [(\frac{1}{4})\mathbf{3}]}}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Por tanto $\det\mathbf{A}_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 6\cdot 4=4$

$\square$

(L-14) Problema 4(c)

$$\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=[\mathbf{I}]\quad\Rightarrow\quad\det\mathbf{A}_3=-1$$

$\square$

(L-14) Problema 5. Todas las transformaciones aplicadas son *Tipo I*, así que $\mathbf{AE}=\mathbf{I}\Rightarrow\det(\mathbf{A})\cdot 1=1$.

$\square$

(L-14) Problema 6(a) La primera es una matriz elemental, cuyo determinante es 1.
La segunda es una matriz permutación que intercambia dos vectores, por lo que su determinante es -1.

$\square$

(L-14) Problema 6(b) $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\a&b&c&d\end{bmatrix}\xrightarrow[{[(\frac{1}{d})\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\a&b&c&1\end{bmatrix}\xrightarrow[{\substack{[(-c)\mathbf{4}+\mathbf{3}]\\ [(-b)\mathbf{4}+\mathbf{2}]\\ [(-a)\mathbf{4}+\mathbf{1}]}}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ Así pues, el determinante es d.

$\square$

Ejercicio 4(a) Como la matriz de orden n es de rango completo, los n elementos de la diagonal principal son pivotes (i.e., distintos de cero).

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}*_1&&&\\ \vdots&*_2&&\\ \vdots&\vdots&\ddots&\\ \vdots&\vdots&\vdots&*_n\end{bmatrix}\qquad\text{donde } *_j \text{ son números distintos de cero.}$$

Dividiendo cada columna j-ésima por su pivote $*_j$ para normalizar los pivotes (y compensando dichas transformaciones multiplicado la última fila por cada pivote); y aplicando, en una segunda fase, la eliminación de izquierda a derecha con transformaciones de Tipo I para anular todo lo que queda a la izquierda de los pivotes (ahora basta multiplicar la última fila por 1), llegamos a:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} *_1 & & & & \\ \vdots & *_2 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & *_n & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(*_1)(\mathbf{n+1})] \\ \vdots \\ [(*_n)(\mathbf{n+1})]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(\frac{1}{*_1})\mathbf{1}] \\ \vdots \\ [(\frac{1}{*_n})\mathbf{n}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ \vdots & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \\ \hline & & & & *_1 \cdot *_2 \cdots *_n \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)(\mathbf{n+1})]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_q \\ \text{(de Tipo I)}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & *_1 \cdot *_2 \cdots *_n \end{array}\right]$$

por tanto, si la matriz es triangular inferior es de rango completo, su determinante es igual al producto de sus pivotes; es decir, al producto de los elementos de la diagonal.

$$\det(\mathbf{L}) = \text{ producto de los elementos de la diagonal}$$

□

Ejercicio 4(b) Una matriz de orden n y triangular solo puede ser de rango completo si los n elementos de la diagonal son distintos de cero. Por tanto, si la matriz tringular es singular, necesariamente tiene algún cero en su diagonal principal. Como su determinante es cero, por ser singular, su determinatne es igual al producto de los elementos de la diagonal (donde uno de ellos es cero).

□

Ejercicio 4(c)

$$\det(\mathbf{U}) = \det\left(\mathbf{U}^\intercal\right) = \text{ producto de los elementos de la diagonal}$$

por ser $\mathbf{U}^\intercal$ triangular inferior.

□

Ejercicio 5. Desarrollando por la segunda columna tenemos

$$\det \mathbf{A} \;=\; -0\begin{vmatrix}5&2&4\\3&1&2\\5&2&1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2&3&2\\3&1&2\\5&2&1\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}2&3&2\\5&2&4\\5&2&1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2&3&2\\5&2&4\\3&1&2\end{vmatrix} \;=\; 0 + 17 - 0 + 3 \times 4 \;=\; 29$$

□

(L-15) Problema 2(a) $\det\big(2 \underset{3\times 3}{\mathbf{A}}\big) = 2^3 \cdot \det \mathbf{A} = 16.$ $\quad \det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} = 1/2.$

□

(L-15) Problema 2(b)

$$\det\left[(3\mathbf{A}_{|1} + 2\mathbf{A}_{|2}); \quad \mathbf{A}_{|3}; \quad \mathbf{A}_{|2};\right] \;=\; \det\left[3\mathbf{A}_{|1}; \quad \mathbf{A}_{|3}; \quad \mathbf{A}_{|2};\right] \;=\; 3\det\left[\mathbf{A}_{|1}; \quad \mathbf{A}_{|3}; \quad \mathbf{A}_{|2};\right] \;=\; -3\det\mathbf{A} \;=\; -6.$$

□

(L-15) Problema 3.

$$\det(-\mathbf{A}^\intercal) = \det(-\mathbf{A}) = (-1)^n\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})$$

puesto que n es un número par.

□

(L-15) Problema 4. Es cierto ya que

$$|\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^\intercal| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^2.$$

□

(L-15) Problema 5(a)

$$\begin{vmatrix}a-2&1&2\\b-4&3&4\\c-6&5&6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a&1&2\\b&3&4\\c&5&6\end{vmatrix} = 3$$

□

(L-15) Problema 5(b)

$$\begin{vmatrix}7a&7&14\\b&3&4\\c&5&6\end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix}a&1&2\\b&3&4\\c&5&6\end{vmatrix} = 7 \times 3 = 21$$

$\square$

(L-15) Problema 5(c)

$$\left|(2\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\right| = \frac{1}{\det 2\mathsf{A}}\det\mathsf{A} = \frac{1}{2^3\det\mathsf{A}}\det\mathsf{A} = \frac{1}{8}.$$

$\square$

(L-15) Problema 5(d)

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & 2\\ b & 3 & 4\\ c & 5 & 6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 2\\ b & 3 & 4\\ c & 5 & 6\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6\end{vmatrix} = 3+4 = 7$$

$\square$

(L-15) Problema 6(a)

$$\left[\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \hline \mathsf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 4\\ 3 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ \hline 1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathsf{L}\\ \hline \mathsf{E}\end{array}\right]$$

$\square$

(L-15) Problema 6(b) Puesto que L tiene tres pivotes, A es invertible.

$\square$

(L-15) Problema 6(c)

$$|\mathsf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathsf{A}|} = \frac{1}{\text{producto de los pivotes de } \mathsf{L}} = \frac{1}{2(-1)(-2)} = \frac{1}{4}.$$

$\square$

(L-15) Problema 6(d)

$$|\mathsf{C}| = |\mathsf{A}\mathsf{B}^{\mathsf{T}}| = |\mathsf{A}||\mathsf{B}^{\mathsf{T}}| = 4\cdot 0 = 0;$$

ya que B tiene dos filas iguales. Por tanto C no es invertible.

$\square$

(L-15) Problema 7(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\\ -4 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot 3 - (-4)\cdot 2 = 11$$

$\square$

(L-15) Problema 7(b) Desarrollando el determinante por la primera fila tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix} + 0 = -8$$

$\square$

(L-15) Problema 7(c) Lo más rápido es desarrollar el determinante por la segunda columna, puesto que todos sus elementos son nulos excepto uno. Entonces obtenemos un *menor* idéntico al del apartado anterior:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1 & -2\end{vmatrix} = -0 + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix} - 0 + 0 = -8$$

$\square$

(L-15) Problema 8.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-2) \cdot (2) = 12$$

□

(L-15) Problema 9.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Resultado que se podía anticipar a simple vista, pues se puede apreciar que la primera columna es combinación lineal del resto.

□

(L-15) Problema 10. Desarrollando el determinante por la primera columna tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} - 0 + 0 - \cdots 0$$

desarrollando de nuevo por la primera columna de lo que queda

$$= 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & n \end{vmatrix} - 0 + 0 - \cdots 0$$

y repitiendo la misma estrategia llegamos a

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot \begin{vmatrix} (n-1) & (n-1) \\ 0 & n \end{vmatrix} = n!.$$

□

(L-15) Problema 11(a)

$$|\mathbf{A}_4| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 27 - 2 \cdot 8 = 65$$

□

(L-15) Problema 11(b) En general $|\mathbf{A}_n| = 3^n + (-1)^{n-1} 2^n$.

□

(L-15) Problema 12. Repitiendo la técnica del ejercicio anterior de desarrollar los determinantes por cada columna (comenzando por la última para la primera matriz, y comenzando por la primera columna para la segunda matriz) tenemos

$$\begin{vmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{vmatrix} = |\mathbf{B}|$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = |\mathbf{C}|.$$

Por tanto

$$\det \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = \det \mathbf{B} \det \mathbf{C}.$$

□

(L-15) Problema 13(a) Por una parte,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix},$$

por otra,

$$\det(\mathbf{A}) = 3; \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 5 \\ \mathbf{2} & 4 \end{vmatrix} = -6; \qquad \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{2} \end{vmatrix} = 3.$$

Por tanto

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 5 \\ \mathbf{2} & 4 \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{-6}{3} = -2; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{2} \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{3}{3} = 1.$$

$\square$

(L-15) Problema 13(b) Por una parte,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

por otra,

$$\det(\mathbf{A}) = 4; \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \qquad \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 2 \end{vmatrix} = -2; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & 2 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \end{vmatrix} = 1.$$

Por tanto, $\quad x = \frac{3}{4}; \qquad y = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}; \qquad z = \frac{1}{4}.$

$\square$

(L-15) Problema 14(a) $\quad \mathbf{Adj(A)} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -0 & 1 & -0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \det(\mathbf{A}) = 3;$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{Adj(A)}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\square$

(L-15) Problema 14(b) $\quad \mathbf{Adj(B)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \det(\mathbf{B}) = 4$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{\mathbf{Adj(B)}}{|\mathbf{B}|} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nótese que la inversa de una matriz simétrica es simétrica.

$\square$

(L-15) Problema 15(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & a-6 \end{bmatrix}$$

El parámetro a debe ser distinto de 6 para que la matriz sea de rango completo (algo que se podía ver directamente comparando las filas de $\mathbf{A}$).

$\square$

(L-15) Problema 15(b) Por una parte

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix}1&4&2&3\\2&3&3&7\\0&1&0&3\\0&2&0&5\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}3&3&7\\1&0&3\\2&0&5\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}4&2&3\\1&0&3\\2&0&5\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix} - 2\cdot(-2)\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix} = -1.$$

Y por otra

$$\begin{vmatrix}1&4&2&1\\2&3&3&0\\0&1&0&0\\0&2&0&0\end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix}2&3&3\\0&1&0\\0&2&0\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $x_4 = \frac{0}{-1} = 0.$

□

(L-15) Problema 15(c)

$$\left[\begin{array}{cccc}0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&-1&0\\\hline 1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[\mathbf{1}\rightleftharpoons\mathbf{2}]\\ [\mathbf{3}\rightleftharpoons\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&-1\\\hline 0&1&-1&0\\1&0&0&-1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(1)\mathbf{4}+\mathbf{1}]\\ [(-1)\mathbf{4}]}]{\tau} \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline 0&1&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&0&1&0\end{array}\right].$$

Por tanto $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix}0&1&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$ y la solución a $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es (multiplicando por $\mathbf{B}^{-1}$ a ambos lados):

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}0&1&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

□