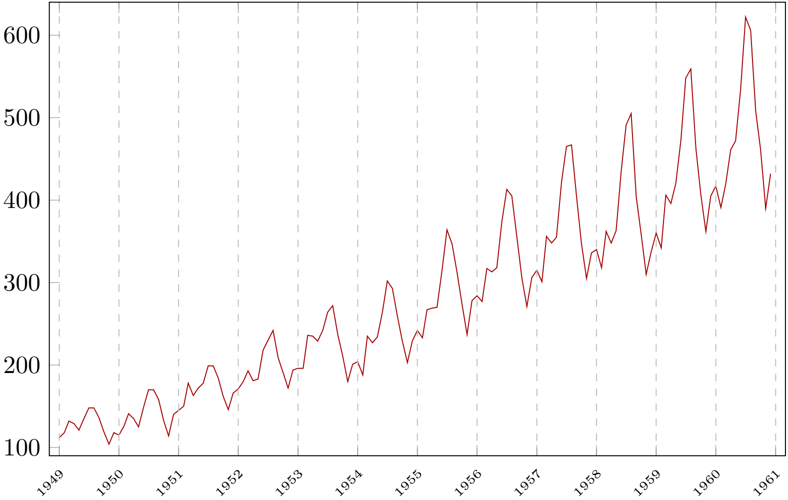
Regresión Armónica Dinámica (DHR)

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

14/02/2023

1 Serie de Lineas Aéreas



2 Modelo de componentes no observables vs ARIMA

Enfoque ARIMA

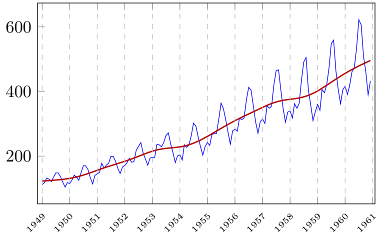
$$\phi(L)y_t = \theta(L)\xi_t, \qquad \xi_t \sim \text{r.b.}\,(0, \sigma^2).$$

Enfoque de componentes no observables

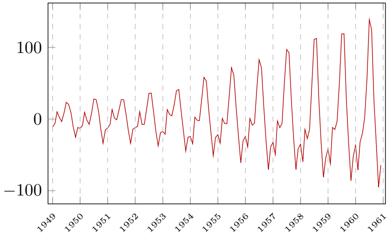
$$y_t \;=\; T_t \;+\; S_t \;+\; e_t$$

3 Componentes DHR estimados

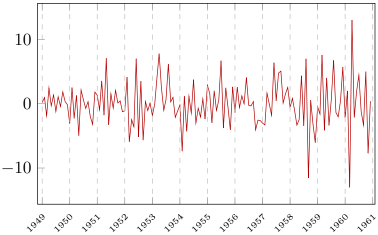
Trendencia (T)



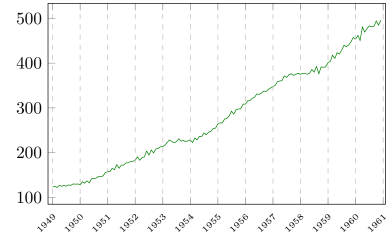
Componente estacional (S)



Componente irregular (I)



Serie desestacionalizada ($T + I$)



4 Pasos a seguir

1. Identificar el tipo de modelo para cada componente

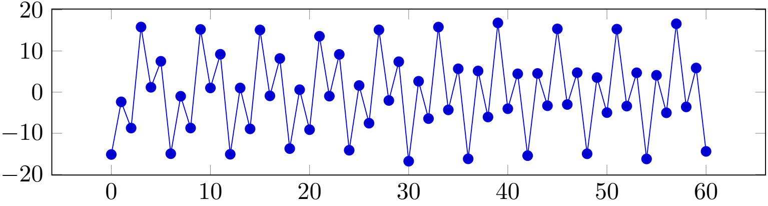
2. Estimar los hiper-parámetros de los modelos identificados

3. "Filtrar" los componentes
   (estimar el valor esperado de cada componente en cada instante)

Regresión Armónica Dinámica Lineal (LDHR) se ocupa de los dos primeros pasos.

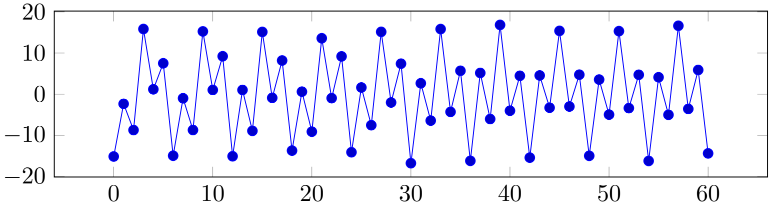
5 Serie estacional simulada

$$y_t = (-0.99)y_{t-3} + \xi_t$$



5 Serie estacional simulada

$$y_t = (-0.99)y_{t-3} + \xi_t$$

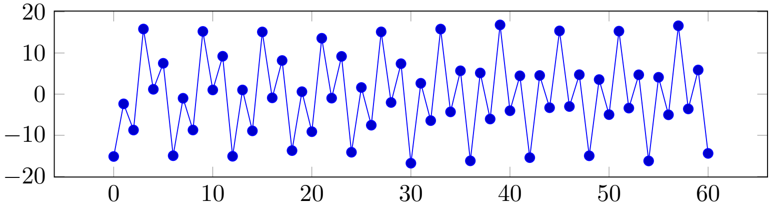


Autocovarianza k-ésima

$$\gamma_k = E\Big((y_t - \mu) \cdot (y_{t-k} - \mu)\Big) \qquad \text{con } E(y_t) = \mu \text{ para todo } t$$

5 Serie estacional simulada

$$y_t = (-0.99)y_{t-3} + \xi_t$$



Autocovarianza k-ésima

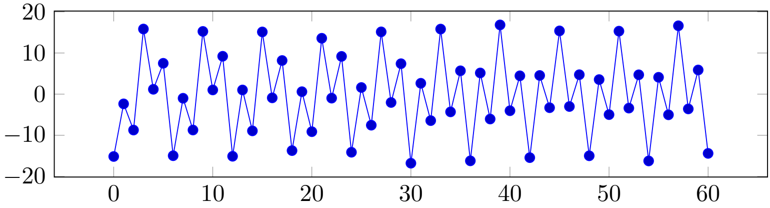
$$\gamma_k = E\Big((y_t - \mu) \cdot (y_{t-k} - \mu)\Big) \qquad \text{con } E(y_t) = \mu \text{ para todo } t$$

Función Generadora de Covarianzas:

$$\Gamma(z) = \{\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2, \ldots\}$$

5 Serie estacional simulada

$$y_t = (-0.99) y_{t-3} + \xi_t$$



Autocovarianza k-ésima

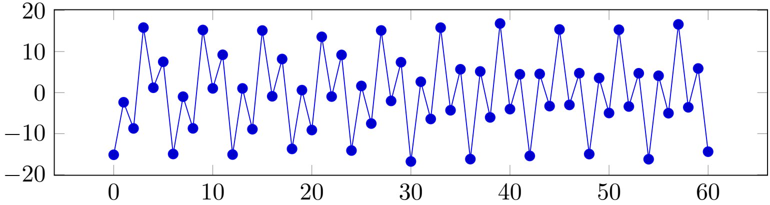
$$\gamma_k = E\Big((y_t - \mu) \cdot (y_{t-k} - \mu)\Big) \qquad \text{con } E(y_t) = \mu \text{ para todo } t$$

Función Generadora de Covarianzas:

$$\Gamma(z) = \{\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2, \ldots\} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k\ z^k.$$

$\boxed{6}$ Estimación de las autocovarianzas para la serie simulada

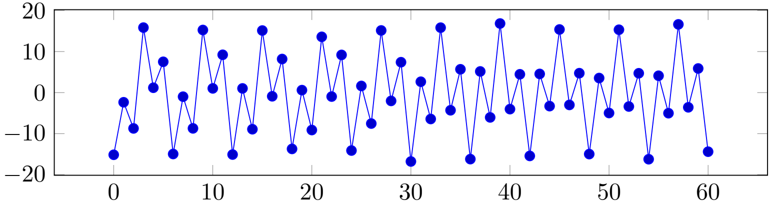
$$y_t = (-0.99)y_{t-3} + \xi_t$$



$$\widehat{\Gamma(z)} = \{\widehat{\gamma}_0, \quad \widehat{\gamma}_1, \quad \widehat{\gamma}_2, \quad \widehat{\gamma}_3, \quad \widehat{\gamma}_4, \quad \widehat{\gamma}_5, \quad \widehat{\gamma}_6 \ldots\}$$

6 Estimación de las autocovarianzas para la serie simulada

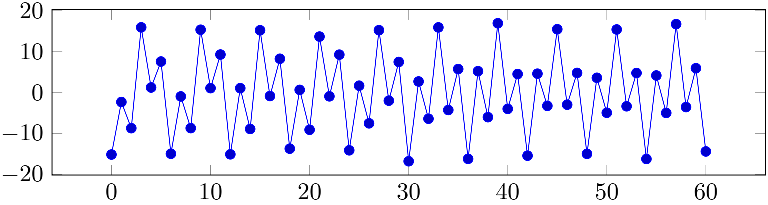
$$y_t = (-0.99)y_{t-3} + \xi_t$$



$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma(z)} &= \{\widehat{\gamma}_0, \quad \widehat{\gamma}_1, \quad \widehat{\gamma}_2, \quad \widehat{\gamma}_3, \quad \widehat{\gamma}_4, \quad \widehat{\gamma}_5, \quad \widehat{\gamma}_6 \ldots\} \\ &= \{\mathbf{45.3},\ -3.6,\ 3.6,\ \mathbf{-44.9},\ 3.8,\ -3.5,\ \mathbf{44.4},\ -3.9,\ 3.4\ldots\}\end{aligned}$$

6 Estimación de las autocovarianzas para la serie simulada

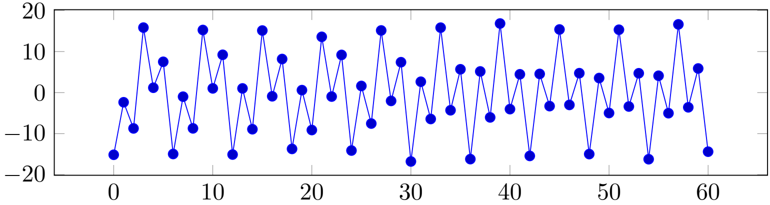
$$y_t = (-0.99)y_{t-3} + \xi_t$$



$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma(z)} &= \{\widehat{\gamma}_0, \quad \widehat{\gamma}_1, \quad \widehat{\gamma}_2, \quad \widehat{\gamma}_3, \quad \widehat{\gamma}_4, \quad \widehat{\gamma}_5, \quad \widehat{\gamma}_6 \ldots\}\\ &= \{\mathbf{45.3},\ -3.6,\ 3.6,\ \mathbf{-44.9},\ 3.8,\ -3.5,\ \mathbf{44.4},\ -3.9,\ 3.4\ldots\}\\ &= \mathbf{45.3}\cdot z^0\ - 3.6\cdot z^1\ + 3.6\cdot z^2\ \mathbf{-44.9}\cdot z^3\ + 3.8\cdot z^4\ldots\end{aligned}$$

6 Estimación de las autocovarianzas para la serie simulada

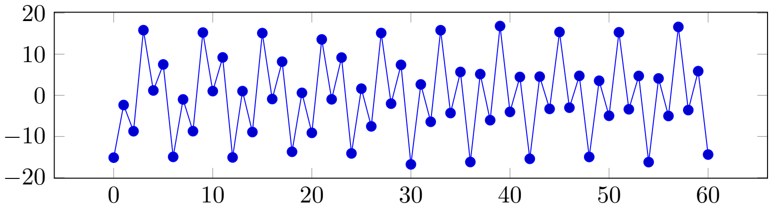
$$y_t = (-0.99)y_{t-3} + \xi_t$$



$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma(z)} &= \{\widehat{\gamma}_0, \quad \widehat{\gamma}_1, \quad \widehat{\gamma}_2, \quad \widehat{\gamma}_3, \quad \widehat{\gamma}_4, \quad \widehat{\gamma}_5, \quad \widehat{\gamma}_6 \ldots\} \\ &= \{\mathbf{45.3},\ -3.6,\ 3.6,\ \mathbf{-44.9},\ 3.8,\ -3.5,\ \mathbf{44.4},\ -3.9,\ 3.4\ldots\} \\ &= \mathbf{45.3}\cdot z^0\ -3.6\cdot z^1\ +3.6\cdot z^2\ \mathbf{-44.9}\cdot z^3\ +3.8\cdot z^4\ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\gamma}_k\ z^k\end{aligned}$$

6 Estimación de las autocovarianzas para la serie simulada

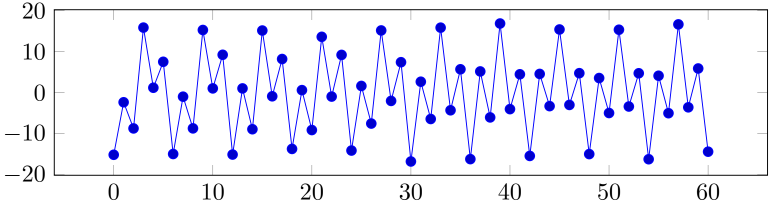
$$y_t = (-0.99)y_{t-3} + \xi_t$$



$$\begin{aligned}
\widehat{\Gamma(z)} &= \{\color{red}{\widehat{\gamma}_0}, \quad \widehat{\gamma}_1, \quad \widehat{\gamma}_2, \quad \widehat{\gamma}_3, \quad \widehat{\gamma}_4, \quad \widehat{\gamma}_5, \quad \widehat{\gamma}_6 \ldots\} \\
&= \{\color{red}{\mathbf{45.3}}, \ -3.6, \ 3.6, \ \mathbf{-44.9}, \ 3.8, \ -3.5, \ \mathbf{44.4}, \ -3.9, \ 3.4 \ldots\} \\
&= \color{red}{\mathbf{45.3} \cdot z^0} \ -3.6 \cdot z^1 \ +3.6 \cdot z^2 \ \mathbf{-44.9} \cdot z^3 \ +3.8 \cdot z^4 \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\gamma}_k \ z^k
\end{aligned}$$

6 Estimación de las autocovarianzas para la serie simulada

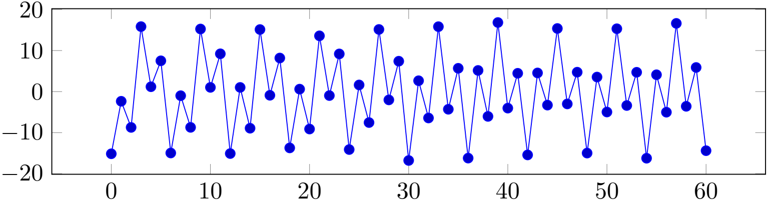
$$y_t = (-0.99)y_{t-3} + \xi_t$$



$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma(z)} &= \{\widehat{\gamma}_0, \quad \widehat{\gamma}_1, \quad \widehat{\gamma}_2, \quad \widehat{\gamma}_3, \quad \widehat{\gamma}_4, \quad \widehat{\gamma}_5, \quad \widehat{\gamma}_6 \ldots\} \\ &= \{\mathbf{45.3},\ -3.6,\ 3.6,\ \mathbf{-44.9},\ 3.8,\ -3.5,\ \mathbf{44.4},\ -3.9,\ 3.4\ldots\} \\ &= \mathbf{45.3}\cdot z^0\ -3.6\cdot z^1\ +3.6\cdot z^2\ \mathbf{-44.9}\cdot z^3\ +3.8\cdot z^4 \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\gamma}_k\ z^k\end{aligned}$$

6 Estimación de las autocovarianzas para la serie simulada

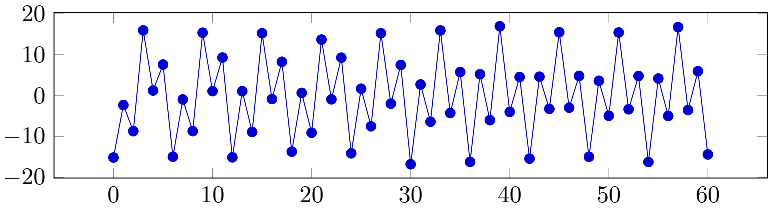
$$y_t = (-0.99) y_{t-3} + \xi_t$$



$$\begin{aligned}
\widehat{\Gamma(z)} &= \{\widehat{\gamma}_0, \quad \widehat{\gamma}_1, \quad {\color{red}\widehat{\gamma}_2}, \quad \widehat{\gamma}_3, \quad \widehat{\gamma}_4, \quad \widehat{\gamma}_5, \quad \widehat{\gamma}_6 \ldots\} \\
&= \{\mathbf{45.3},\ -3.6,\ {\color{red}3.6},\ \mathbf{-44.9},\ 3.8,\ -3.5,\ \mathbf{44.4},\ -3.9,\ 3.4\ldots\} \\
&= \mathbf{45.3} \cdot z^0\ - 3.6 \cdot z^1\ {\color{red}+ 3.6 \cdot z^2}\ \mathbf{-44.9} \cdot z^3\ + 3.8 \cdot z^4 \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\gamma}_k\ z^k
\end{aligned}$$

6 Estimación de las autocovarianzas para la serie simulada

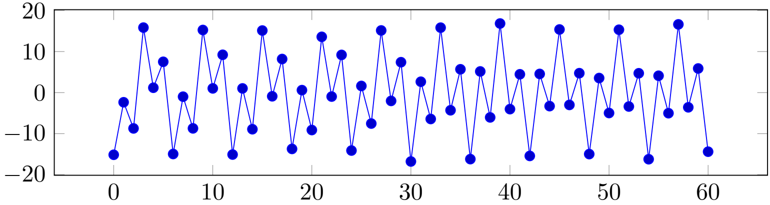
$$y_t = (-0.99)y_{t-3} + \xi_t$$



$$\begin{aligned}
\widehat{\Gamma(z)} &= \{\widehat{\gamma}_0, \quad \widehat{\gamma}_1, \quad \widehat{\gamma}_2, \quad {\color{red}\widehat{\gamma}_3}, \quad \widehat{\gamma}_4, \quad \widehat{\gamma}_5, \quad \widehat{\gamma}_6 \ldots\} \\
&= \{\mathbf{45.3},\ -3.6,\ 3.6,\ {\color{red}\mathbf{-44.9}},\ 3.8,\ -3.5,\ \mathbf{44.4},\ -3.9,\ 3.4\ldots\} \\
&= \mathbf{45.3}\cdot z^0\ -3.6\cdot z^1\ +3.6\cdot z^2\ {\color{red}\mathbf{-44.9}\cdot z^3}\ +3.8\cdot z^4 \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\gamma}_k\ z^k
\end{aligned}$$

6 Estimación de las autocovarianzas para la serie simulada

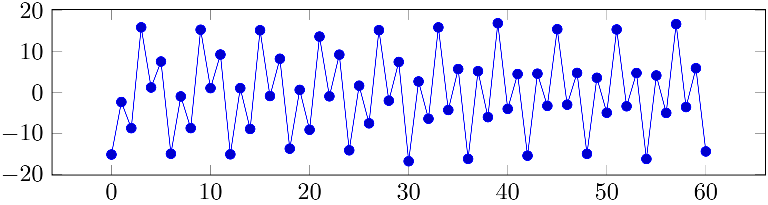
$$y_t = (-0.99)y_{t-3} + \xi_t$$



$$\widehat{\Gamma(z)} = \{\widehat{\gamma}_0, \quad \widehat{\gamma}_1, \quad \widehat{\gamma}_2, \quad \widehat{\gamma}_3, \quad {\color{red}\widehat{\gamma}_4}, \quad \widehat{\gamma}_5, \quad \widehat{\gamma}_6 \ldots\}$$
$$= \{\mathbf{45.3},\ -3.6,\ 3.6,\ \mathbf{-44.9},\ {\color{red}3.8},\ -3.5,\ \mathbf{44.4},\ -3.9,\ 3.4\ldots\}$$
$$= \mathbf{45.3}\cdot z^0\ -3.6\cdot z^1\ +3.6\cdot z^2\ \mathbf{-44.9}\cdot z^3\ {\color{red}+3.8\cdot z^4}\ldots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\gamma}_k\ z^k$$

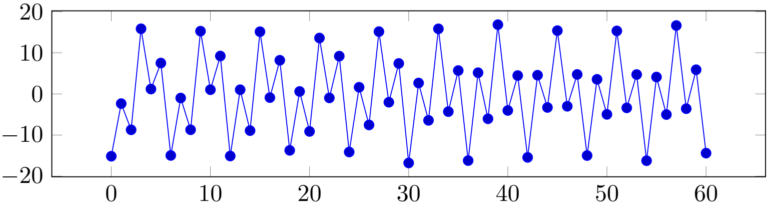
6 Estimación de las autocovarianzas para la serie simulada

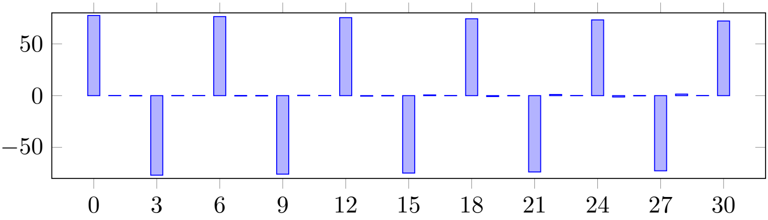
$$y_t = (-0.99)y_{t-3} + \xi_t$$



$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma(z)} &= \{\widehat{\gamma}_0, \quad \widehat{\gamma}_1, \quad \widehat{\gamma}_2, \quad \widehat{\gamma}_3, \quad \widehat{\gamma}_4, \quad \widehat{\gamma}_5, \quad \widehat{\gamma}_6 \ldots\} \\ &= \{\mathbf{45.3},\ -3.6,\ 3.6,\ \mathbf{-44.9},\ 3.8,\ -3.5,\ \mathbf{44.4},\ -3.9,\ 3.4\ldots\} \\ &= \mathbf{45.3}\cdot z^0\ -3.6\cdot z^1\ +3.6\cdot z^2\ \mathbf{-44.9}\cdot z^3\ +3.8\cdot z^4\ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\gamma}_k\ z^k\end{aligned}$$

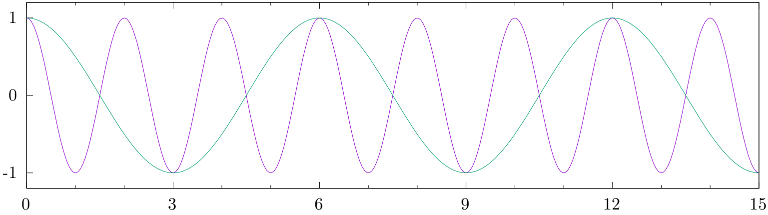
7 Serie estacional simulada



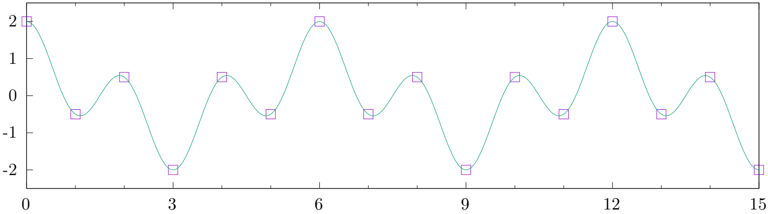


8 Ondas deterministas

Ondas de periodos 2 y 6



Suma de las dos ondas



9 Función Generadora de Covarianzas y Espectro

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \, z^k.$$

9 Función Generadora de Covarianzas y Espectro

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \, z^k.$$

Espectro es Transformada de Fourier de $\Gamma(z)$, es decir:

sustituir z^k por $\cos(k\omega)$, e interpretar $\sum$ como suma

$$f(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \cos(k\omega); \quad -\pi \leq \omega \leq \pi. \quad \text{(suma de funciones coseno)}$$

9 Función Generadora de Covarianzas y Espectro

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k\, z^k.$$

Espectro es Transformada de Fourier de $\Gamma(z)$, es decir:

sustituir z^k *por* $\cos(k\omega)$, *e interpretar* $\sum$ *como suma*

$$f(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \cos(k\omega); \quad -\pi \leq \omega \leq \pi. \quad \text{(suma de funciones coseno)}$$

De la inversa de la transformada de Fourier, $\gamma_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega k} f(\omega)\mathrm{d}\omega$, tenemos que

$$\sigma^2 \equiv \gamma_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\mathrm{d}\omega;$$

10 Espectro estimado de la serie simulada

$$\widehat{f(\omega)} = \sum \widehat{\gamma_k} \cos(k\omega)$$

10 Espectro estimado de la serie simulada

$$\widehat{f(\omega)} = \sum_{k=0}^{0} \widehat{\gamma_k} \cos(k\omega)$$

$$= \mathbf{45.3}$$

10 Espectro estimado de la serie simulada

$$\widehat{f(\omega)} = \sum_{k=0}^{1} \widehat{\gamma_k} \cos(k\omega)$$

$$= \mathbf{45.3} + 3.6 \cos(1\omega)$$

10 Espectro estimado de la serie simulada

$$\widehat{f(\omega)} = \sum_{k=0}^{2} \widehat{\gamma_k} \cos(k\omega)$$

$$= \mathbf{45.3} + 3.6 \cos(1\omega) - 3.6 \cos(2\omega)$$

10 Espectro estimado de la serie simulada

$$\widehat{f(\omega)} = \sum_{k=0}^{3} \widehat{\gamma_k} \cos(k\omega)$$

$$= \mathbf{45.3} + 3.6\cos(1\omega) - 3.6\cos(2\omega)$$
$$-\mathbf{44.9}\cos(3\omega)$$

10 Espectro estimado de la serie simulada

$$\widehat{f(\omega)} = \sum_{k=0}^{4} \widehat{\gamma_k} \cos(k\omega)$$

$$= \mathbf{45.3} + 3.6 \cos(1\omega) - 3.6 \cos(2\omega)$$
$$-\mathbf{44.9} \cos(3\omega) - 3.8 \cos(4\omega)$$

$\boxed{10}$ Espectro estimado de la serie simulada

$$\widehat{f(\omega)} = \sum_{k=0}^{5} \widehat{\gamma_k} \cos(k\omega)$$

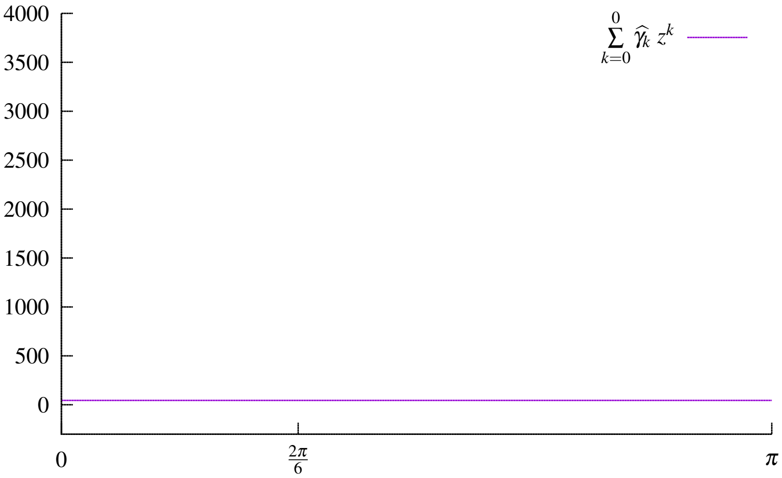
$$= \mathbf{45.3} + 3.6\cos(1\omega) - 3.6\cos(2\omega)$$
$$-\mathbf{44.9}\cos(3\omega) - 3.8\cos(4\omega) + 3.5\cos(5\omega)$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Espectro estimado de la serie simulada

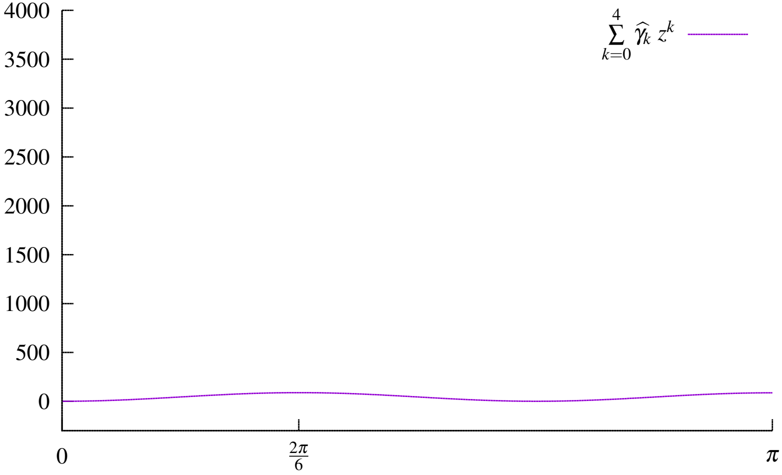
$$\widehat{f(\omega)} = \sum_{k=0}^{N} \widehat{\gamma_k} \cos(k\omega)$$

$$= \mathbf{45.3} + 3.6\cos(1\omega) - 3.6\cos(2\omega)$$
$$-\mathbf{44.9}\cos(3\omega) - 3.8\cos(4\omega) + 3.5\cos(5\omega) + \cdots$$

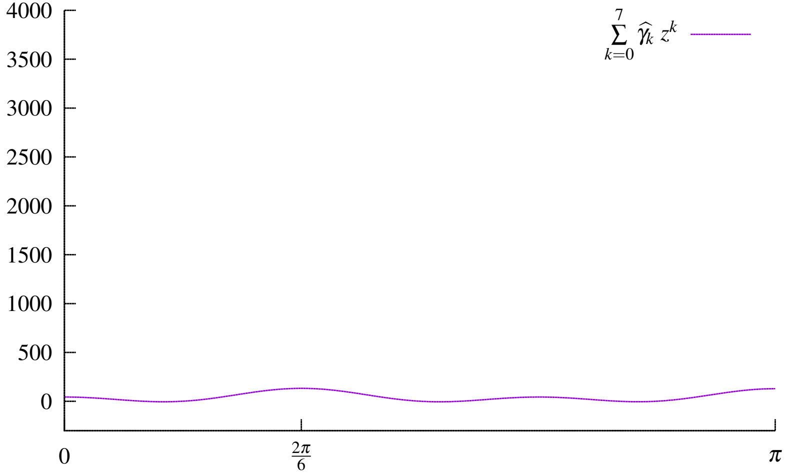
11 Espectro estimado de la serie simulada



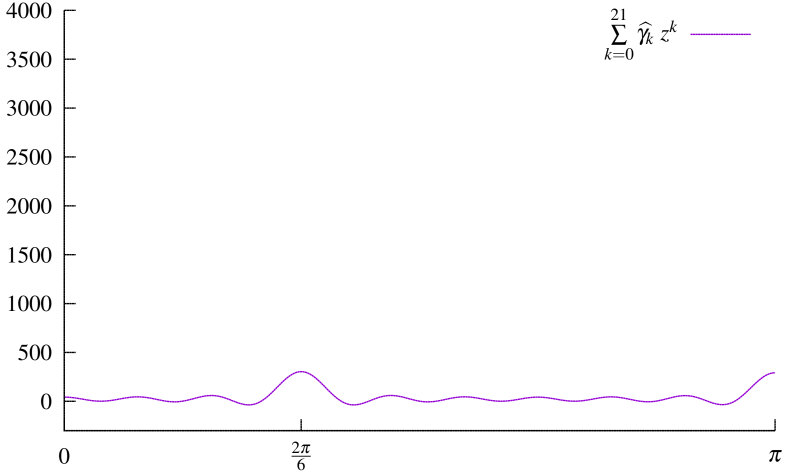
11 Espectro estimado de la serie simulada



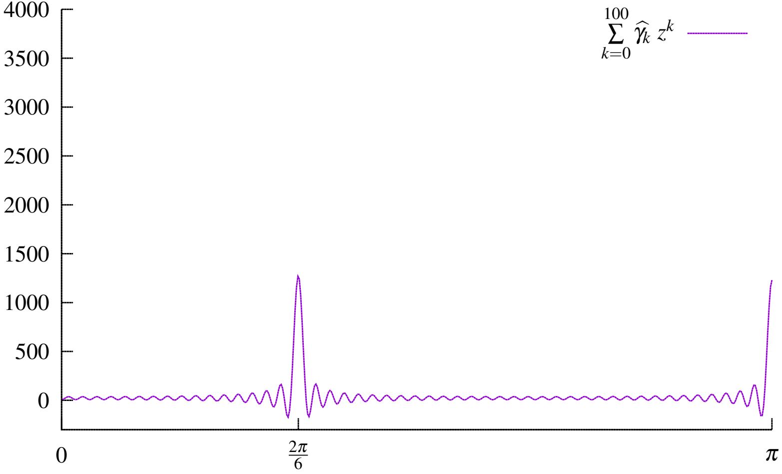
11 Espectro estimado de la serie simulada



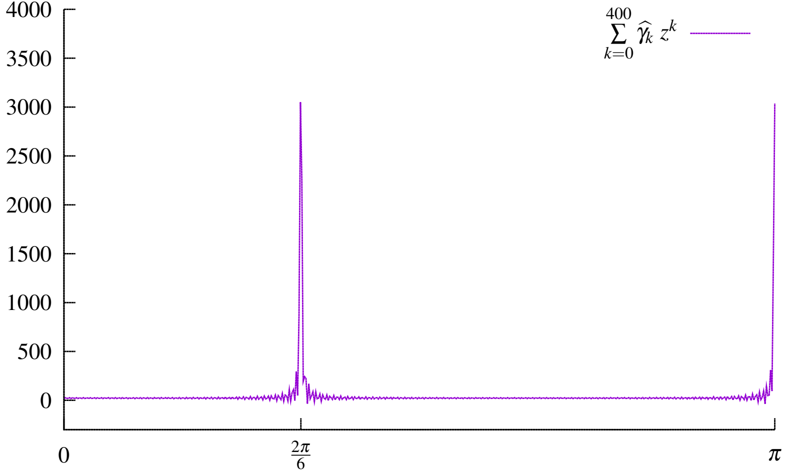
11 Espectro estimado de la serie simulada



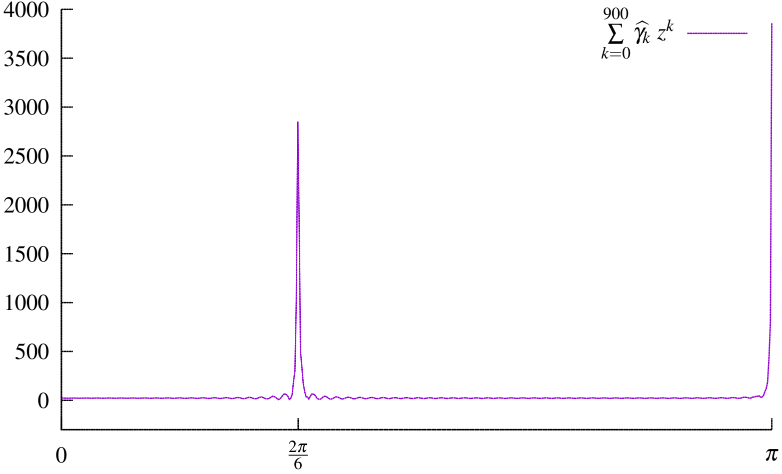
11 Espectro estimado de la serie simulada



11 Espectro estimado de la serie simulada



11 Espectro estimado de la serie simulada



12 Espectro de un proceso ARMA

Sea y_t un proceso estocástico *estacionario* que verifica

$$\phi(L)y_t = \theta(L)\xi_t, \quad \xi_t \sim \text{r.b.}\,(0, \sigma^2).$$

La *función generadora de covarianzas* de y_t es siguiente sucesión:

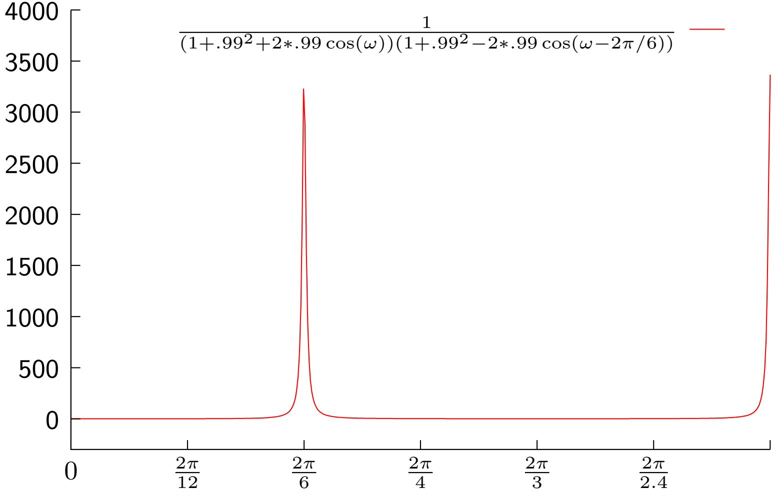
$$\Gamma_y(z) = \sigma_\xi^2 \frac{\theta(z) * \theta(z^{-1})}{\phi(z) * \phi(z^{-1})};$$

y su *espectro* es (sustituyendo z por $e^{-i\omega}$)

$$f_y(\omega) = \sigma_\xi^2 \frac{\theta(e^{-i\omega})\theta(e^{i\omega})}{\phi(e^{-i\omega})\phi(e^{i\omega})};$$

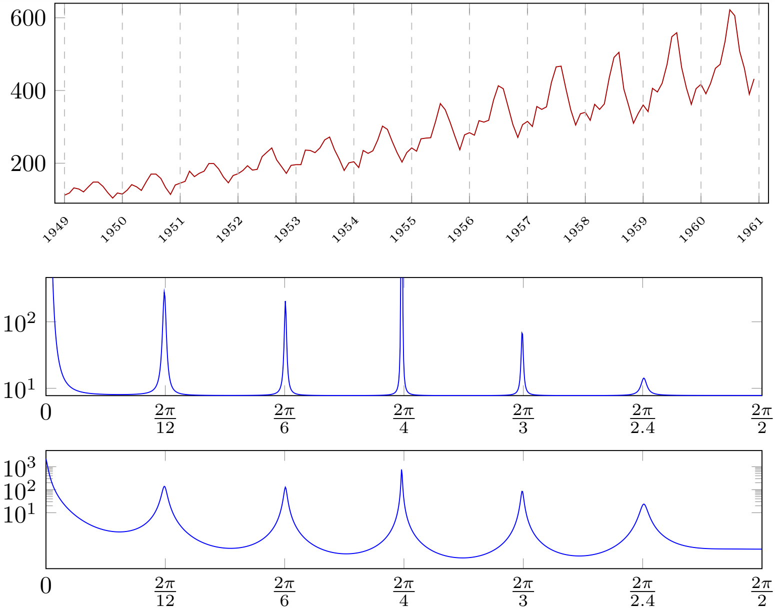
que tiene una expansión como suma de cosenos, ya que $e^{-ik\omega} + e^{ik\omega} = 2\cos(k\omega)$.

13 Espectro Teórico del proceso estacional simulado



- Deducir en la pizarra el espectro de un proceso de ruido blanco.
- Comentar la etimología de la expresión "ruido blanco".
- Explicar que si un proceso no es ruido blanco, se puede inferir su dinámica (extraer información).
- Definir lo que es un filtro (relacionar con un cristal de colores, o con un ecualizador de una cadena musical). Relacionar con los modelos ARMA.

14 AR(17) espectro de la serie de Lineas Aéreas



15 Modelo básico

$$y_t = T_t + S_t + e_t; \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

- *Tendencia* (o ciclo-tendencia): (T_t)
- *Componente estacional*: (S_t)
- *Componente irregular*: (e_t); $\quad \{e_t\} \sim \text{r.b. } N(0, \sigma_e^2)$

16 Modelo teórico de los sub-componentes DHR

$$s_t^{p_j} = a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t), \tag{2}$$

donde $\omega_j = \frac{2\pi}{p_j}$ es la frecuencia y p_j es el periodo.

16 Modelo teórico de los sub-componentes DHR

$$s_t^{p_j} = a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t), \qquad (2)$$

donde $\omega_j = \frac{2\pi}{p_j}$ es la frecuencia y p_j es el periodo.

a_{j_t} y b_{j_t} modulan amplitud oscilaciones

(procesos AR(1) o AR(2) no estacionarios con parámetros conocidos, excepto varianzas).

17 Modelo de la Tendencia

$$T_t = a_{0t}\ \cos(0 \cdot t) + b_{0t}\ \sin(0 \cdot t) = a_{0t}; \qquad (3)$$

17 Modelo de la Tendencia

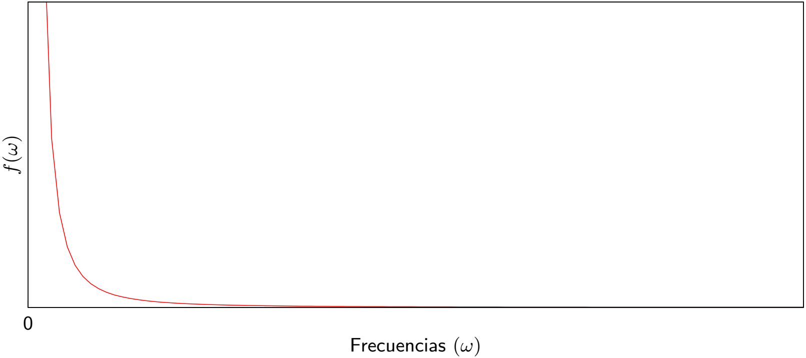
$$T_t = a_{0t}\ \cos(0 \cdot t) + b_{0t}\ \sin(0 \cdot t) = a_{0t}; \tag{3}$$

$$(1 - \alpha L)(1 - L)T_t = \xi_{0t-1}.$$

17 Modelo de la Tendencia

$$T_t = a_{0t}\ \cos(0 \cdot t) + b_{0t}\ \sin(0 \cdot t) = a_{0t}; \qquad (3)$$

$$(1 - \alpha L)(1 - L)T_t = \xi_{0t-1}.$$

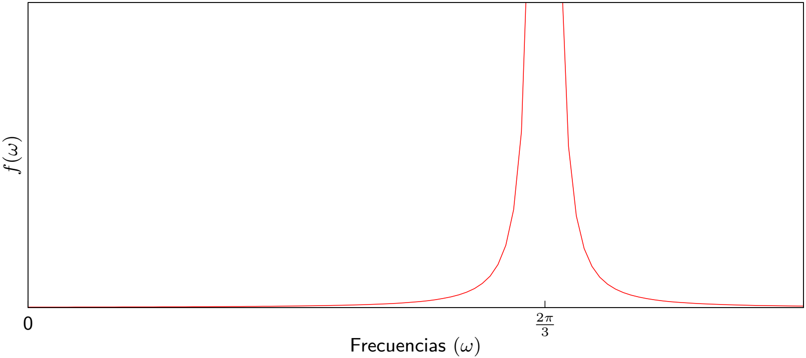


18 Modelo para cada componente estacional DHR

$$s_t^{pj} = a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t) \tag{4}$$

18 Modelo para cada componente estacional DHR

$$s_t^{pj} = a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t) \qquad (4)$$



19 Modelo DHR completo

$$y_t = \sum_{j=0}^{R} \left[a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t) \right] + e_t, \qquad (5)$$

donde $j = 0$ corresponde a la tendencia.

19 Modelo DHR completo

$$y_t = \sum_{j=0}^{R} \left[a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t) \right] + e_t, \tag{5}$$

donde $j = 0$ corresponde a la tendencia.

Parámetros

- Conocidos: ω_j

19 Modelo DHR completo

$$y_t = \sum_{j=0}^{R} \left[a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t) \right] + e_t, \tag{5}$$

donde $j = 0$ corresponde a la tendencia.

Parámetros

- Conocidos: ω_j
- “Supuestamente conocido”: modelo AR de procesos $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$

19 Modelo DHR completo

$$y_t = \sum_{j=0}^{R} \left[a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t)\right] + e_t, \qquad (5)$$

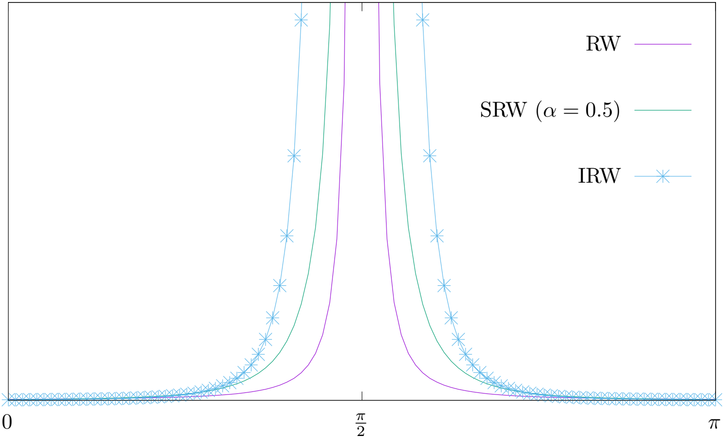
donde $j = 0$ corresponde a la tendencia.

Parámetros

- Conocidos: ω_j
- "Supuestamente conocido": modelo AR de procesos $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$
- **Desconocidos**: Varianzas innovaciones de los procesos $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$.

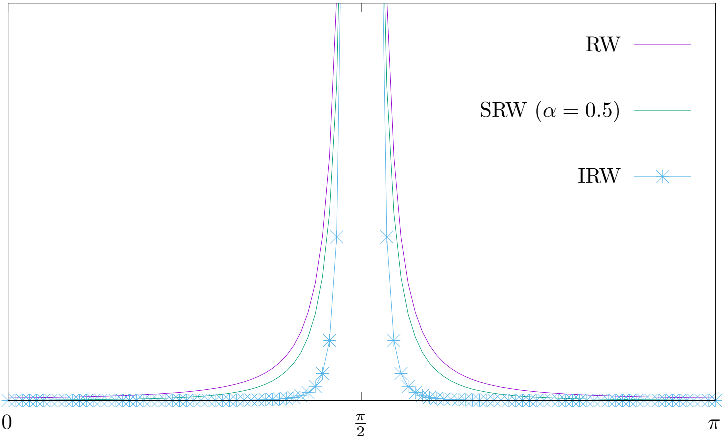
20 Espectro de un componente DHR

Distintos modelos de $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$; (misma varianza innovaciones $\sigma^2_{\omega_j}$)

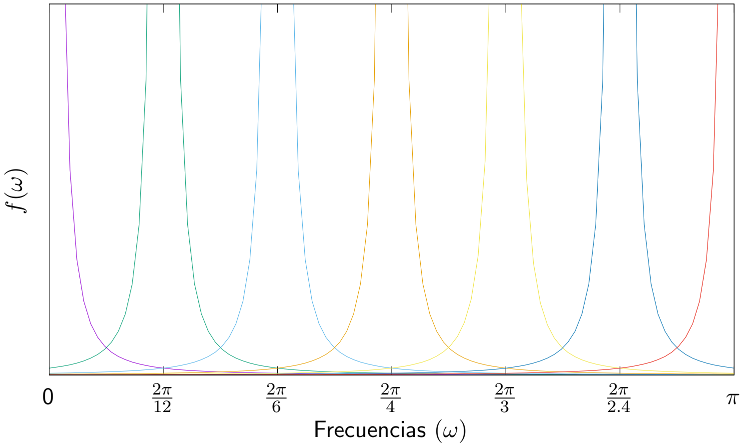


21 Espectro de un componente DHR

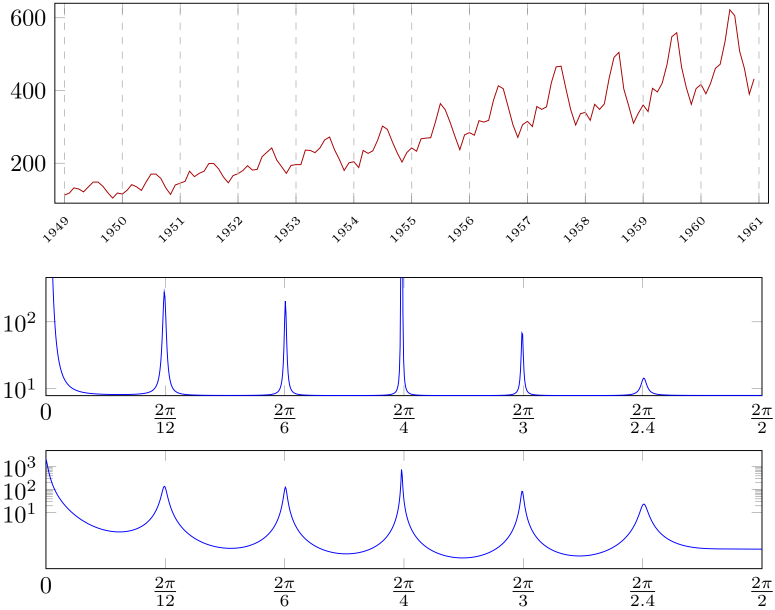
$\sigma^2_{RW} = 1$ $\sigma^2_{SRW} = 0.2$ $\sigma^2_{IRW} = 0.005$



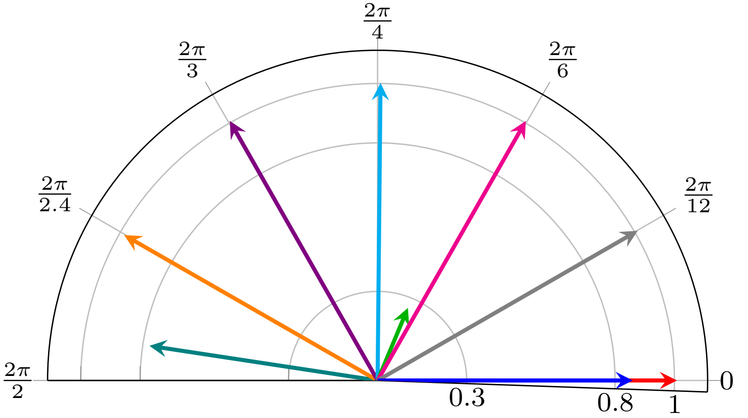
22 Espectro de los componentes DHR de un modelo mensual



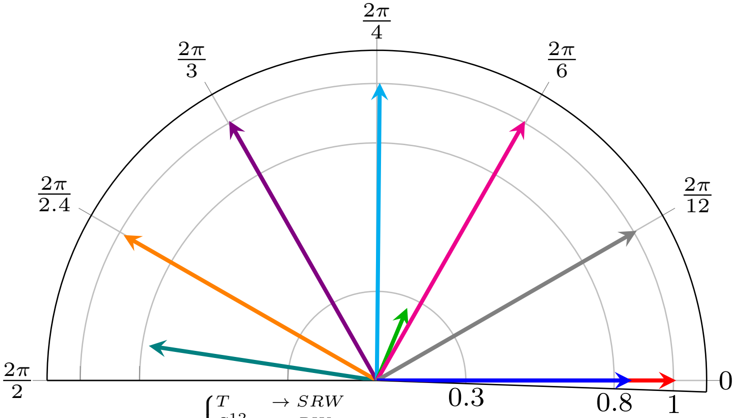
23 AR(17) espectro de la serie de Lineas Aéreas



24 Identificación con las raíces del polinomio AR



24 Identificación con las raíces del polinomio AR



Modelo DHR No estacionario : $\begin{cases} T & \rightarrow SRW \\ S^{12} & \rightarrow RW \\ S^{6} & \rightarrow RW \\ S^{4} & \rightarrow RW \\ S^{3} & \rightarrow RW \\ S^{2.4} & \rightarrow RW \end{cases}$

25 Estimación de los hiperparámentos $\boldsymbol{\sigma}^2$

$$\min_{[\boldsymbol{\sigma}^2]\in\mathbb{R}^{R+1}} \left\| \widehat{f_y(\omega)} - f_{dhr}\left(\omega, \boldsymbol{\sigma}^2\right) \right\|$$

donde

$\widehat{f_y(\omega)}$ es una estimación del espectro de la serie y

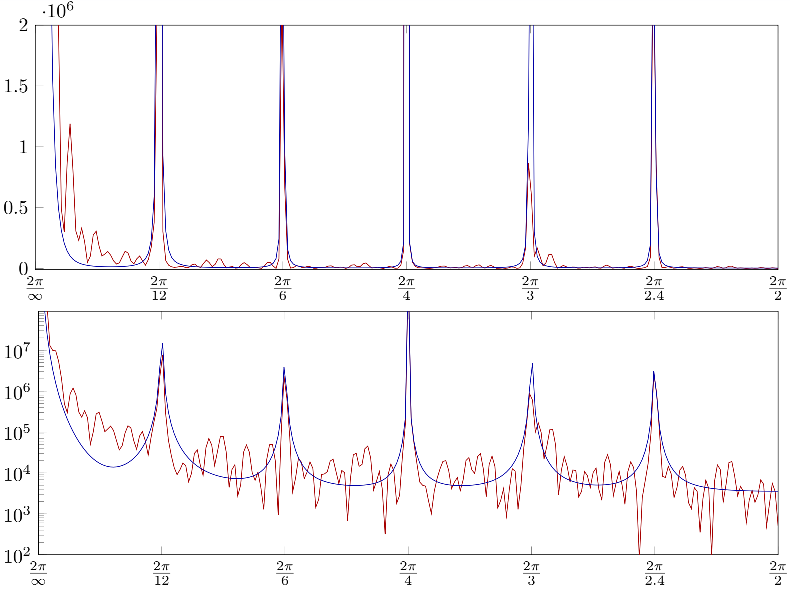
donde el espectro del modelo DHR es

$$f_{dhr}\left(\omega, \boldsymbol{\sigma}^2\right) = \sum_{j=1}^{R} \sigma_j^2 \cdot f_{s^{p_j}}(\omega) \ + \ \sigma_e^2$$

y donde

- $\boldsymbol{\sigma}^2 = \left(\sigma_e^2,\ \sigma_{\omega_0}^2,\ \sigma_{\omega_1}^2,\ \ldots,\ \sigma_{\omega_R}^2\right)$
- $f_{s^{p_j}}(\omega)$ es el espectro del componente j-ésimo.

26 Ajuste del modelo DHR al periodograma



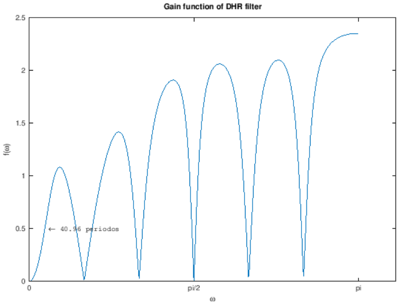
27 Verdadero problema de minimización

Modelo DHR tiene una expresión ARIMA equivalente

$$y_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}\epsilon_t \qquad \text{donde} \quad \phi(L) = \varphi(L) * \Phi(L)$$

donde $\Phi(L)$ es el polinomio con las raíces de módulo uno.

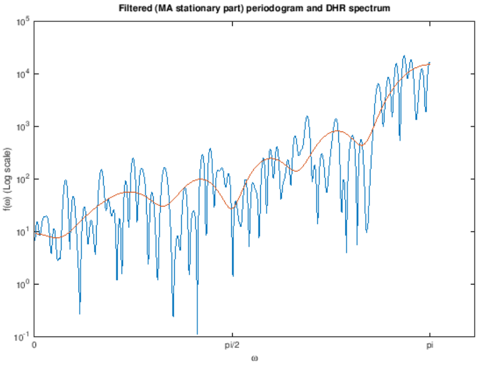
Sea $\Psi(\omega)$ la Transformada de Fourier de $\Phi(L)$



28 Verdadero problema de minimización

Estimación por MCO

$$\min_{\boldsymbol{\sigma}^2 \in \mathbb{R}^{R+2}} \left\| \Psi(\omega) \cdot \left[\widehat{f_y(\omega)} - f_{dhr}\left(\omega, \boldsymbol{\sigma}^2\right) \right] \right\|$$



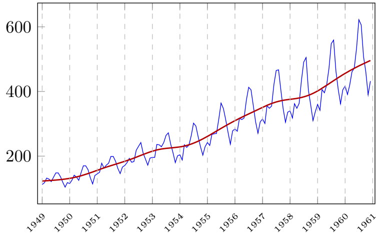
29 Estimación de los componentes $s_t^{p_j}$

Una vez estimadas las varianzas desconocidas (*hiper-parámetros)*

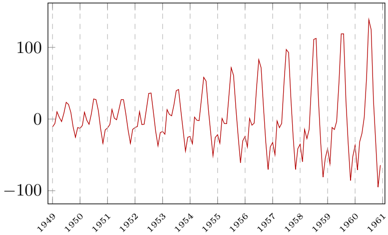
- Formulación del modelo en Espacio de los Estados
- Filtro de Kalman (suavizado de intervalo fijo)

30 Componentes DHR estimados

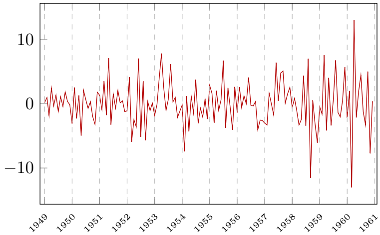
Trendencia (T)



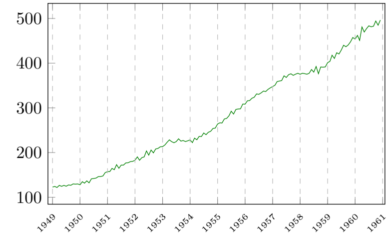
Componente estacional (S)



Componente irregular (I)



Serie desestacionalizada ($T + I$)



31 Componentes estimados: Serie de lineas aéreas