ODR modely v 1D

Sociální systémy a jejich simulace

Jana Vacková

29.9.2021

Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze

Náplň dnešní přednášky

- Úvod do modelů s ODR
- Numerický výpočet
- Modely s ODR v 1D

ODR modely - obecně

- Dimenze $d \in \mathbb{N}$ (např. $d = 1$ doprava, $d = 2$ chodci, $d = 3$ ponorky)

ODR modely - obecně

- Dimenze $d \in \mathrm{N}$ (např. $d = 1$ doprava, $d = 2$ chodci, $d = 3$ ponorky)
- Počet částic N
- Index $\alpha \in \hat{N}$

ODR modely - obecně

- Dimenze $d \in \mathrm{N}$ (např. $d = 1$ doprava, $d = 2$ chodci, $d = 3$ ponorky)
- Počet částic N
- Index $\alpha \in \hat{N}$
- Čas $t > 0$

ODR modely - obecně

- Dimenze $d \in \mathrm{N}$ (např. $d = 1$ doprava, $d = 2$ chodci, $d = 3$ ponorky)
- Počet částic N
- Index $\alpha \in \hat{N}$
- Čas $t > 0$
- **Poloha** agenta $x_\alpha(t) \in \mathrm{R}^d$
- **Rychlost** agenta $v_\alpha(t)$
- **Zrychlení** agenta $a_\alpha(t)$
- Vzájemný vztah $\ddot{x}_\alpha = \dot{v}_\alpha = a_\alpha$
- $\mathbb{X}(t) := (x_1(t), \ldots, x_N(t)) = (x_\alpha(t))_{\alpha \in \hat{N}}$

ODR modely - obecně

- Dimenze $d \in \mathrm{N}$ (např. $d = 1$ doprava, $d = 2$ chodci, $d = 3$ ponorky)
- Počet částic N
- Index $\alpha \in \hat{N}$
- Čas $t > 0$
- **Poloha** agenta $x_\alpha(t) \in \mathrm{R}^d$
- **Rychlost** agenta $v_\alpha(t)$
- **Zrychlení** agenta $a_\alpha(t)$
- Vzájemný vztah $\ddot{x}_\alpha = \dot{v}_\alpha = a_\alpha$
- $\mathbb{X}(t) := (x_1(t), \dots, x_N(t)) = (x_\alpha(t))_{\alpha \in \hat{N}}$
- **Force-based koncept** (Helbing):

$$\ddot{\mathbb{X}}(t) = \mathbb{F}(t, \mathbb{X}(t), \dot{\mathbb{X}}(t)),$$

tj. $N \cdot d$ ODR rovnic druhého řádu

ODR modely - obecně

- **Force-based koncept** (Helbing):

$$\ddot{\mathbb{X}}(t) = \mathbb{F}(t, \mathbb{X}(t), \dot{\mathbb{X}}(t)),$$

tj. $N \cdot d$ ODR rovnic druhého řádu

ODR modely - obecně

- **Force-based koncept** (Helbing):

$$\ddot{\mathbb{X}}(t) = \mathbb{F}(t, \mathbb{X}(t), \dot{\mathbb{X}}(t)),$$

  tj. $N \cdot d$ ODR rovnic druhého řádu

- Co je síla $\mathbb{F}$?

ODR modely - obecně

- **Force-based koncept** (Helbing):

$$\ddot{\mathbb{X}}(t) = \mathbb{F}(t, \mathbb{X}(t), \dot{\mathbb{X}}(t)),$$

tj. $N \cdot d$ ODR rovnic druhého řádu

- Co je síla $\mathbb{F}$?

$$\mathbb{F}(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}}) = \mathbb{F}_M(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}}) + \mathbb{F}_I(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}}) + \mathbb{F}_E(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}}) + \mathbb{F}_{EX}(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}})$$

ODR modely - obecně

- **Force-based koncept** (Helbing):

$$\ddot{\mathbb{X}}(t) = \mathbb{F}(t, \mathbb{X}(t), \dot{\mathbb{X}}(t)),$$

tj. $N \cdot d$ ODR rovnic druhého řádu

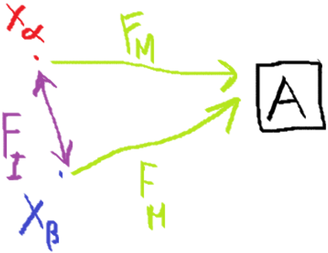
- Co je síla $\mathbb{F}$?

$$\mathbb{F}(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}}) = \mathbb{F}_M(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}}) + \mathbb{F}_I(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}}) + \mathbb{F}_E(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}}) + \mathbb{F}_{EX}(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}})$$

- **Motivační** $\mathbb{F}_M(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}}) =$ přitažlivá síla k cíli
- **Interakční** $\mathbb{F}_I(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}}) =$ interakce s ostatními agenty
- **Environmentální** $\mathbb{F}_E(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}}) =$ interakce s okolím (odpudivá síla)
- **Externí** $\mathbb{F}_{EX}(t, \mathbb{X}, \dot{\mathbb{X}}) =$ šum

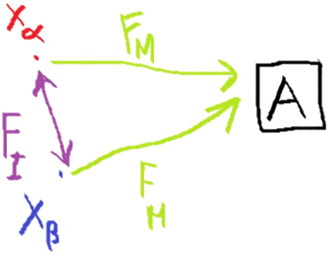
ODR modely - příklady

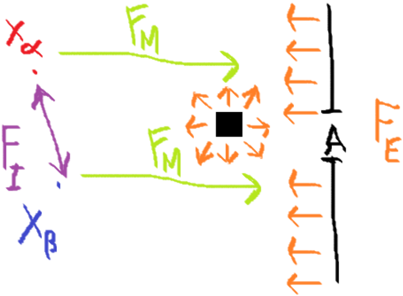
- A = atraktor



ODR modely - příklady

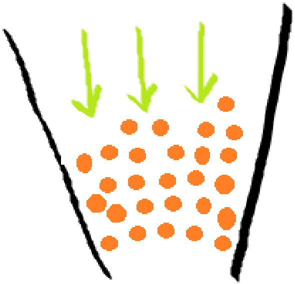
- A = atraktor





ODR modely - příklady

- Silo: vznikají oblouky (můstky; angl. arc, bridge)



Numerické řešení ODR - Euler (1768) - 1. řád

- Řešíme rovnici $\boxed{\dot{x}(t) = f(t, x(t))}$, kde $x(t)$ je neznámá funkce

Numerické řešení ODR - Euler (1768) - 1. řád

- Řešíme rovnici $\boxed{\dot{x}(t) = f(t, x(t))}$, kde $x(t)$ je neznámá funkce
- Diskretizace času: $\boxed{t_n = t_0 + n \cdot h}$, kde $h > 0$ je konstantní časový krok algoritmu (n indexuje průběh)

Numerické řešení ODR - Euler (1768) - 1. řád

- Řešíme rovnici $\boxed{\dot{x}(t) = f(t, x(t))}$, kde $x(t)$ je neznámá funkce
- Diskretizace času: $\boxed{t_n = t_0 + n \cdot h}$, kde $h > 0$ je konstantní časový krok algoritmu (n indexuje průběh)
- Počáteční podmínka $x(t_0) = x_0$ (typicky: $t_0 = 0, x(t_0) = 0$)

Numerické řešení ODR - Euler (1768) - 1. řád

- Řešíme rovnici $\boxed{\dot{x}(t) = f(t, x(t))}$, kde $x(t)$ je neznámá funkce
- Diskretizace času: $\boxed{t_n = t_0 + n \cdot h}$, kde $h > 0$ je konstantní časový krok algoritmu (n indexuje průběh)
- Počáteční podmínka $x(t_0) = x_0$ (typicky: $t_0 = 0, x(t_0) = 0$)
- Hledáme pro $(t_n)_{n=0}^{+\infty}$ hodnoty $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ a chceme $x_n \approx x(t_n)$

Numerické řešení ODR - Euler (1768) - 1. řád

- Řešíme rovnici $\boxed{\dot{x}(t) = f(t, x(t))}$, kde $x(t)$ je neznámá funkce
- Diskretizace času: $\boxed{t_n = t_0 + n \cdot h}$, kde $h > 0$ je konstantní časový krok algoritmu (n indexuje průběh)
- Počáteční podmínka $x(t_0) = x_0$ (typicky: $t_0 = 0, x(t_0) = 0$)
- Hledáme pro $(t_n)_{n=0}^{+\infty}$ hodnoty $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ a chceme $x_n \approx x(t_n)$
- Myšlenka: $\frac{x_{n+1} - x_n}{h} \approx f(t_n, x_n)$, proto $\boxed{x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n)}$

Numerické řešení ODR - Euler (1768) - 1. řád

- Řešíme rovnici $\boxed{\dot{x}(t) = f(t, x(t))}$, kde $x(t)$ je neznámá funkce
- Diskretizace času: $\boxed{t_n = t_0 + n \cdot h}$, kde $h > 0$ je konstantní časový krok algoritmu (n indexuje průběh)
- Počáteční podmínka $x(t_0) = x_0$ (typicky: $t_0 = 0, x(t_0) = 0$)
- Hledáme pro $(t_n)_{n=0}^{+\infty}$ hodnoty $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ a chceme $x_n \approx x(t_n)$
- Myšlenka: $\frac{x_{n+1} - x_n}{h} \approx f(t_n, x_n)$, proto $\boxed{x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n)}$
- Zápis pro všechny agenty:

$$\dot{\mathbb{X}}(t) = f(t, \mathbb{X}(t)),$$

tj. $\dot{x}_\alpha(t) = f(t, x_1(t), \dots, x_N(t))$ a
$(x_\alpha)_{n+1} = (x_\alpha)_n + h \cdot f\left(t_n, (x_1)_n, \dots, (x_N)_n\right)$

Numerické řešení ODR - Euler (1768) - 2. řád

- Řešíme rovnici $\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))$, kde $\dot{x}(t) = v(t)$ a $x(t)$ je neznámá funkce

Numerické řešení ODR - Euler (1768) - 2. řád

- Řešíme rovnici $\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))$, kde $\dot{x}(t) = v(t)$ a $x(t)$ je neznámá funkce
- Řešíme tedy vlastně $\dot{v}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t)) \Rightarrow$ Euler

Numerické řešení ODR - Euler (1768) - 2. řád

- Řešíme rovnici $\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))$, kde $\dot{x}(t) = v(t)$ a $x(t)$ je neznámá funkce
- Řešíme tedy vlastně $\dot{v}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t)) \Rightarrow$ Euler
- Polohy a rychlosti tedy počítáme pomocí

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + h \cdot v_n, \qquad v_{n+1} = v_n + h \cdot f(t_n, x_n, v_n)}$$

  kde $v_n = v(t_n)$
- Další počáteční podmínka: $v(t_0) = v_0$ (typicky $v(t_0) = 0$)

Numerické řešení ODR - Euler (1768) - 2. řád

- Řešíme rovnici $\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))$, kde $\dot{x}(t) = v(t)$ a $x(t)$ je neznámá funkce
- Řešíme tedy vlastně $\dot{v}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t)) \Rightarrow$ Euler
- Polohy a rychlosti tedy počítáme pomocí

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + h \cdot v_n, \qquad v_{n+1} = v_n + h \cdot f(t_n, x_n, v_n)}$$

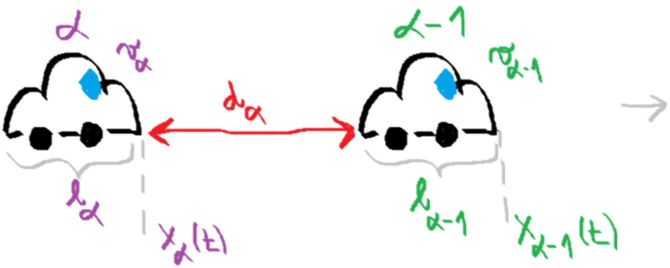
  kde $v_n = v(t_n)$
- Další počáteční podmínka: $v(t_0) = v_0$ (typicky $v(t_0) = 0$)

- Zápis pro všechny agenty:

$$\dot{\mathbb{V}}(t) = f(t, \mathbb{X}(t), \mathbb{V}(t)),$$

  tj. $\dot{x}_\alpha(t) = v_\alpha(t)$ a $\dot{v}_\alpha(t) = f(t, \mathbb{X}(t), \mathbb{V}(t))$ a
  $(x_\alpha)_{n+1} = (x_\alpha)_n + h \cdot (v_\alpha)_n$ a $(v_\alpha)_{n+1} = (v_\alpha)_n + h \cdot f(t_n, \mathbb{X}_n, \mathbb{V}_n)$
- Celkem tak získáme $2Nd$ rovnic 1. řádu

Modely pro 1D pohyb - Car-following



- Vozidla indexujeme podle průjezdu detektorem
- $\Delta x_\alpha = x_{\alpha-1} - x_\alpha$
- $d_\alpha = \Delta x_\alpha - l_{\alpha-1}$
- $\Delta v_\alpha = v_{\alpha-1} - v_\alpha$

$$\ddot{x}_\alpha(t) = F_I(t, x_\alpha, v_\alpha, \Delta x_\alpha, \Delta v_\alpha) + F_{EX}(x_\alpha, v_\alpha)$$

Follow-the-Leader Model (FLM)

- Myšlenka:
  1. Čím je agent rychlejší, tím by měl být odstup větší.
  2. Aby nedošlo ke kolizi, minimální odstup mezi agenty by měl být bezpečný, tj. alespoň hodnoty d_{SAFE}.

Follow-the-Leader Model (FLM)

- Myšlenka:
  1. Čím je agent rychlejší, tím by měl být odstup větší.
  2. Aby nedošlo ke kolizi, minimální odstup mezi agenty by měl být bezpečný, tj. alespoň hodnoty d_{SAFE}.
- Odvození (Pipes):

$$x_{\alpha-1} - x_{\alpha} - l_{\alpha-1} = d_{\alpha} \overset{\text{chceme}}{=} d_{SAFE} + T_{SAFE} \cdot v_{\alpha} \qquad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

Follow-the-Leader Model (FLM)

- Myšlenka:
  1. Čím je agent rychlejší, tím by měl být odstup větší.
  2. Aby nedošlo ke kolizi, minimální odstup mezi agenty by měl být bezpečný, tj. alespoň hodnoty d_{SAFE}.
- Odvození (Pipes):

$$x_{\alpha-1} - x_\alpha - l_{\alpha-1} = d_\alpha \overset{\text{chceme}}{=} d_{SAFE} + T_{SAFE} \cdot v_\alpha \qquad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$\dot{x}_{\alpha-1} - \dot{x}_\alpha - 0 = \dot{d}_\alpha \overset{\text{chceme}}{=} 0 + T_{SAFE} \cdot \dot{v}_\alpha$$

$$\dot{v}_\alpha = \frac{1}{T_{SAFE}} \left(\dot{x}_{\alpha-1} - \dot{x}_\alpha\right)$$

$$\ddot{x}_\alpha = \frac{1}{T_{SAFE}} \Delta v_\alpha$$

- T_{SAFE} značí bezpečný čas, typicky $T_{SAFE} = 2s$
- d_{SAFE} značí bezkolizní (bezpečnou) vzdálenost, typicky $d_{SAFE} = 2m$
- $1/T_{SAFE}$ reprezentuje citlivostní koeficient řidiče

Optimal Velocity Model (OVM)

- Obecně:
  - Kýžená (angl. desired) rychlost $v^{opt} = v^{opt}(\mathbb{X}, \mathbb{V})$
  - Pokud $v_\alpha > v^{opt}$, pak zpomalím, tj. $\dot{v}_\alpha < 0$
  - Pokud $v_\alpha < v^{opt}$, pak zrychlím, tj. $\dot{v}_\alpha > 0$

Optimal Velocity Model (OVM)

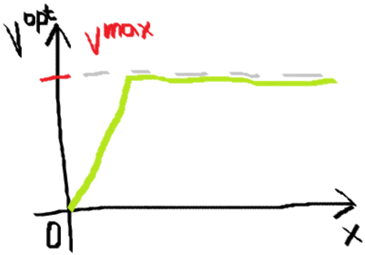
- Obecně:
  - Kýžená (angl. desired) rychlost $v^{opt} = v^{opt}(\mathbb{X}, \mathbb{V})$
  - Pokud $v_\alpha > v^{opt}$, pak zpomalím, tj. $\dot{v}_\alpha < 0$
  - Pokud $v_\alpha < v^{opt}$, pak zrychlím, tj. $\dot{v}_\alpha > 0$
- Zobecníme FLM:

$$\dot{v}_\alpha = S_\alpha \left(v^{opt}(\mathbb{X}, \mathbb{V}) - v_\alpha \right)$$

- FLM: $v^{opt}(\mathbb{X}, \mathbb{V}) = v_{\alpha-1}$
- OVM: $v^{opt}(\mathbb{X}, \mathbb{V}) = v^{opt}(d_\alpha)$
  - $v^{opt}(d) \overset{d \to 0^+}{\to} 0$
  - $v^{opt}(d) \overset{d \to +\infty}{\to} v^{max}$
  - $v^{opt}(d)$ je neklesající (rostoucí) funkce
- Spolehlivost OVM závisí na vhodné volbě funkce $v^{opt}(d)$

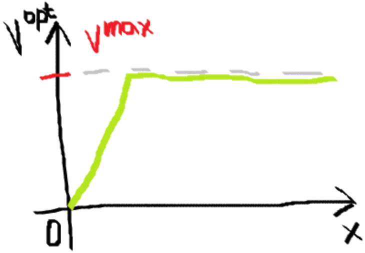
Optimal Velocity Model (OVM) - volba funkce v^{opt}

Obecný trend:

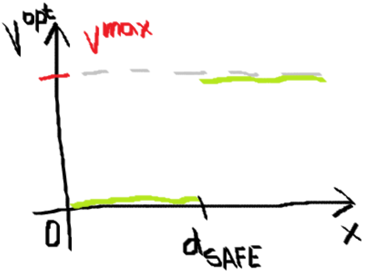


Optimal Velocity Model (OVM) - volba funkce v^{opt}

Obecný trend:

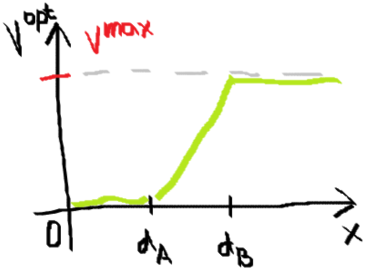


$$v^{opt}(x) = v^{max} \cdot \Theta(x - d_{SAFE})$$



Optimal Velocity Model (OVM) - volba funkce v^{opt}

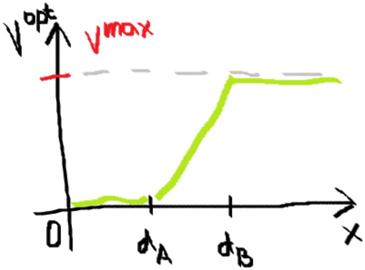
$$v^{opt}(x) = \begin{cases} 0 & \dots \quad x < d_A, \\ g(x) & \dots \quad d_A \leq x \leq d_B, \\ v^{max} & \dots \quad d_B < x. \end{cases}$$

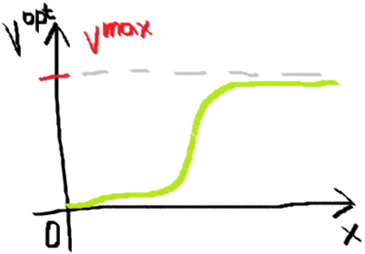


Optimal Velocity Model (OVM) - volba funkce v^{opt}

$$v^{opt}(x) = \begin{cases} 0 & \dots \quad x < d_A, \\ g(x) & \dots \quad d_A \leq x \leq d_B, \\ v^{max} & \dots \quad d_B < x. \end{cases}$$

$$v^{opt}(x) = \frac{v^{max}}{2}\left(\tanh(x - d_{SAFE}) + \tanh(d_{SAFE})\right)$$





Intelligent Driver Model (IDM)

- Treiber, Hennecke a Helbing (2000)

$$\dot{v}_\alpha = a \cdot \left[1 - \left(\frac{v_\alpha}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{d^*_\alpha}{d_\alpha} \right)^2 \right],$$

kde

$$d^*_\alpha = \max \left\{ 0, d_{SAFE} + v_\alpha \, T_{SAFE} - \frac{v_\alpha \, \Delta v_\alpha}{2\sqrt{a \, b}} \right\}$$

- Parametr v_0 představuje *kýženou rychlost*
- Parametr T_{SAFE} reprezentuje *bezpečný časový odstup*, parametr d_{SAFE} reprezentuje *bezkolizní vzdálenost*
- Parametr a reprezentuje *optimální zrychlení*, b *optimální brzdění*
- Výraz d^*_α reprezentuje *minimální kýžený odstup*

Intelligent Driver Model (IDM)

$$\dot{v}_\alpha = a \cdot \left[1 - \left(\frac{v_\alpha}{v_0}\right)^\delta - \left(\frac{d^*_\alpha}{d_\alpha}\right)^2\right],$$

$$d^*_\alpha = \max\left\{0, d_{SAFE} + v_\alpha\, T_{SAFE} - \frac{v_\alpha\, \Delta v_\alpha}{2\sqrt{a\, b}}\right\}$$

- Volné zrychlení: $a_f = a \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^\delta\right)$
- Brzdící manévry: $a_b = -a \cdot \left(\frac{d^*}{d}\right)^2$
- Bezkolizní (inteligentní) strategii zajišťuje člen $-\frac{v_\alpha\, \Delta v_\alpha}{2\sqrt{a\, b}}$

Intelligent Driver Model (IDM)

$$\dot{v}_\alpha = a \cdot \left[1 - \left(\frac{v_\alpha}{v_0}\right)^\delta - \left(\frac{d^*_\alpha}{d_\alpha}\right)^2\right],$$

$$d^*_\alpha = \max\left\{0, d_{SAFE} + v_\alpha\, T_{SAFE} - \frac{v_\alpha\, \Delta v_\alpha}{2\sqrt{a\, b}}\right\}$$

- Volné zrychlení: $a_f = a \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^\delta\right)$
- Brzdící manévry: $a_b = -a \cdot \left(\frac{d^*}{d}\right)^2$
- Bezkolizní (inteligentní) strategii zajišťuje člen $-\frac{v_\alpha\, \Delta v_\alpha}{2\sqrt{a\, b}}$

Typické hodnoty parametrů:

- $v_0 = 120\text{km/h}$
- $T_{SAFE} = 2$ s
- $d_{SAFE} = 2$ m
- $a = 0.8\text{m/s}^2$
- $b = 1.5\text{m/s}^2$
- $\delta = 4$

- Vhodný na modelování makroskopických jevů

Konec dnešní přednášky. :-)