Celulární modely - pokračování

Sociální systémy a jejich simulace

Jana Vacková

27.10.2021

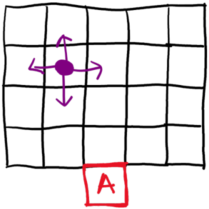
Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze

Náplň dnešní přednášky

- Celulární modely - Floor-Field model
- Celulární modely jako markovské řetězce

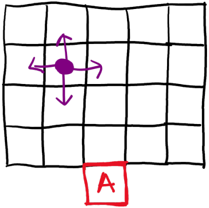
Celulární modely - Floor-Field

- 2D mřížka
- **Inspirace:**
  - Mravenci a jejich vylučování feromonů
  - *Feromon* = chemická substance značkující jejich cestu
  - Např. pro navádění dalších k potravě
  - Floor-Field proto předpokládá, že člověk také zanechává stopu
- **Výhoda:** dlouhodosahovost přechází v rámci výpočtu vlastně na krátkodosahovost (rychlejší)
- **Hlavní myšlenka:** systém polí



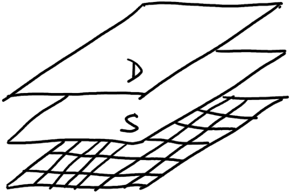
Celulární modely - Floor-Field - Princip polí

- Pohyb chodce je obecně ovlivněn:
  - Cílovou destinací (atraktorem)
  - Interakcí s ostatními agenty
  - Interakcí s infrastrukturou
- Floor-Field:
  - Statické pole
  - Dynamické pole
- Pravděpodobnost přechodu



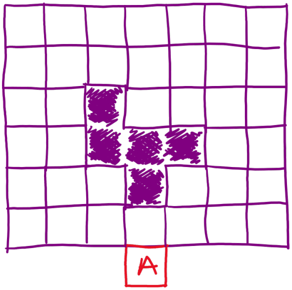
$$P(x \to y) \propto \exp\left\{-\sum_F k_F F(y)\right\},$$

kde F značí pole a $k_F \in \langle 0, +\infty)$ jeho parametr



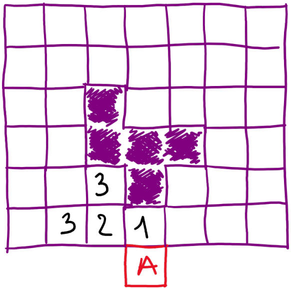
Celulární modely - Floor-Field - Statické pole

- Značíme jako S
- Atraktivita buňky
- Typicky: $S(y) = \mathrm{dist}(y, A)$, kde A je atraktor (např. východ)
- Pro mřížku typická metrika $\mathrm{dist}(y, A) =$ počet kroků potřebných k dosažení A
- Když se směry potkávají, bereme minimum
- Pokud $k_S \to 0$, S nehraje roli
- Předpokládáme nyní von Neumannovo okolí



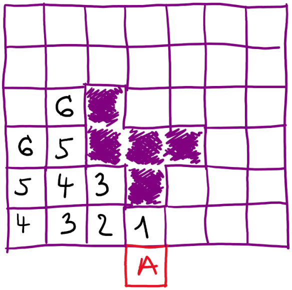
Celulární modely - Floor-Field - Statické pole

- Značíme jako S
- Atraktivita buňky
- Typicky: $S(y) = \text{dist}(y, A)$, kde A je atraktor (např. východ)
- Pro mřížku typická metrika $\text{dist}(y, A) =$ počet kroků potřebných k dosažení A
- Když se směry potkávají, bereme minimum
- Pokud $k_S \to 0$, S nehraje roli
- Předpokládáme nyní von Neumannovo okolí

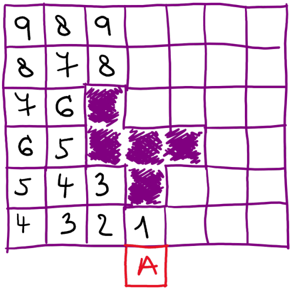


Celulární modely - Floor-Field - Statické pole

- Značíme jako S
- Atraktivita buňky
- Typicky: $S(y) = \text{dist}(y, A)$, kde A je atraktor (např. východ)
- Pro mřížku typická metrika $\text{dist}(y, A) =$ počet kroků potřebných k dosažení A
- Když se směry potkávají, bereme minimum
- Pokud $k_S \to 0$, S nehraje roli
- Předpokládáme nyní von Neumannovo okolí

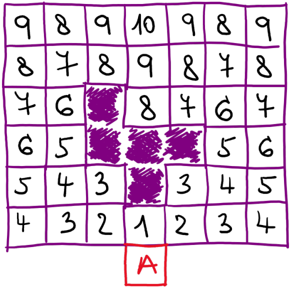


- Značíme jako S
- Atraktivita buňky
- Typicky: $S(y) = \mathrm{dist}(y, A)$, kde A je atraktor (např. východ)
- Pro mřížku typická metrika $\mathrm{dist}(y, A) =$ počet kroků potřebných k dosažení A
- Když se směry potkávají, bereme minimum
- Pokud $k_S \to 0$, S nehraje roli
- Předpokládáme nyní von Neumannovo okolí



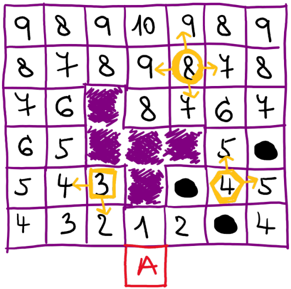
Celulární modely - Floor-Field - Statické pole

- Značíme jako S
- Atraktivita buňky
- Typicky: $S(y) = \mathrm{dist}(y, A)$, kde A je atraktor (např. východ)
- Pro mřížku typická metrika $\mathrm{dist}(y, A) =$ počet kroků potřebných k dosažení A
- Když se směry potkávají, bereme minimum
- Pokud $k_S \to 0$, S nehraje roli
- Předpokládáme nyní von Neumannovo okolí



Celulární modely - Floor-Field - Statické pole

- Značíme jako S
- Atraktivita buňky
- Typicky: $S(y) = \mathrm{dist}(y, A)$, kde A je atraktor (např. východ)
- Pro mřížku typická metrika $\mathrm{dist}(y, A) =$ počet kroků potřebných k dosažení A
- Když se směry potkávají, bereme minimum
- Pokud $k_S \to 0$, S nehraje roli
- Předpokládáme nyní von Neumannovo okolí



Celulární modely - Floor-Field - Statické pole - Příklad

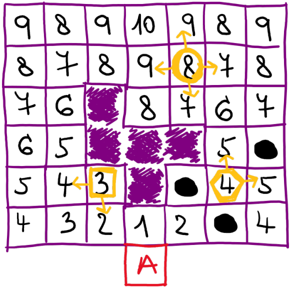
Příklady výpočtu:

$$P(\downarrow \bigcirc) = \frac{e^{-7k_S}}{2e^{-7k_S} + e^{-8k_S} + 2e^{-9k_S}}$$

$$= \frac{e^{k_S}}{2e^{k_S} + 1 + 2e^{-k_S}}$$

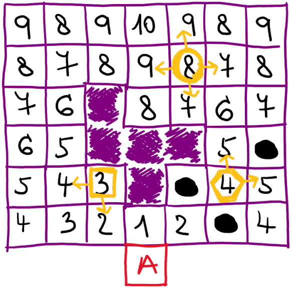
$$P(\leftarrow \square) = \frac{e^{-4k_S}}{e^{-4k_S} + e^{-3k_S} + e^{-2k_S}}$$

$$= \frac{e^{-k_S}}{e^{-k_S} + 1 + e^{k_S}}$$



Příklady výpočtu:

$$P(x\hexagon) = \frac{1}{1 + 2e^{-ks}}$$



Celulární modely - Dynamické pole

- Chodec za sebou zanechává stopu

Celulární modely - Dynamické pole

- Chodec za sebou zanechává stopu
- *Ale jak dlouho?*

Celulární modely - Dynamické pole

- Chodec za sebou zanechává stopu
- *Ale jak dlouho?*
- *A v jakém rozsahu?*
- Nutné další parametry *difuze* a *rozpadu*
- Složitější než statické pole

Celulární modely - Floor-Field - Formálně

- V jedné buňce může být maximálně jeden chodec
- Chodec se může pohnout jen do buňky ze svého okolí
- Proto pro $y \in N_x \cap \mathbb{L}$ píšeme

$$P(x \to y | \,\text{stav}\, N_x) = \frac{\exp\{-k_S\, S(y)\} \cdot \mathbb{I}_M}{\sum_{y \in N_x \cap \mathbb{L}} \exp\{-k_S\, S(y)\} \cdot \mathbb{I}_M},$$

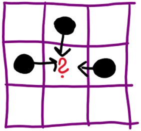
kde $M = \{y = x \vee [y \neq x \wedge y \,\text{prázdná}]\}$

- V jedné buňce může být maximálně jeden chodec
- Chodec se může pohnout jen do buňky ze svého okolí
- Proto pro $y \in N_x \cap \mathbb{L}$ píšeme

$$P(x \to y | \, \text{stav } N_x) = \frac{\exp\{-k_S \, S(y)\} \cdot \mathbb{I}_M}{\sum_{y \in N_x \cap \mathbb{L}} \exp\{-k_S \, S(y)\} \cdot \mathbb{I}_M},$$

kde $M = \{y = x \vee [y \neq x \wedge y \, \text{prázdná}]\}$

- Možné konflikty při paralelním updatu:
  - Nishinari řešil *třením*
  - Tření $\mu \in \langle 0, 1 \rangle$ = míra úspěšnosti vyřešení konfliktů
  - S pravděpodobností μ se nic nestane a nikdo se nepohne
  - S pravděpodobností $1 - \mu$ se náhodně vybraný chodec pohne



Celulární modely jako Markovské procesy

- Množina lokálních stavů $S = \{0, 1, \ldots, |S| - 1\}$
- Stav buňky $x \in \mathbb{L}$ ozn. jako $\tau(x) \in S$
- Stav celé mřížky $\tau \in X \subseteq S^{\mathbb{L}}$, kde X je stavový prostor
- Množina přípustných stavů $S^{\mathbb{L}} := \{f \mid f : \mathbb{L} \to S\}$
- Časový průběh

$$\{\tau_t | t \in T\},$$

kde $T = \mathbb{N}_0$ nebo $T = \langle 0, +\infty)$, kde

$$\tau_t = (\tau_t(x))_{x \in \mathbb{L}} \in S^{\mathbb{L}}$$

Celulární modely jako Markovské procesy - Příklad

$$S = \{0, 1, 2\}, \qquad \mathbb{L} = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2\}\}$$

Celulární modely jako Markovské procesy - Příklad

$$S = \{0, 1, 2\}, \qquad \mathbb{L} = \{(i, j) \,|\, i, j \in \{1, 2\}\}$$

$$S^{\mathbb{L}} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & s_{22} \\ \hline \end{array} : s_{ij} \in S = \{0, 1, 2\} \right\}$$

Celulární modely jako Markovské procesy - Příklad

$$S = \{0, 1, 2\}, \qquad \mathbb{L} = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2\}\}$$

$$S^{\mathbb{L}} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & s_{22} \\ \hline \end{array} : s_{ij} \in S = \{0, 1, 2\} \right\}$$

$$|S^{\mathbb{L}}| = 3^4 = 81$$

Celulární modely jako Markovské procesy - Příklad

$$S = \{0,1,2\}, \qquad \mathbb{L} = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2\}\}$$

$$S^{\mathbb{L}} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & s_{22} \\ \hline \end{array} : s_{ij} \in S = \{0,1,2\} \right\}$$

$$|S^{\mathbb{L}}| = 3^4 = 81$$

$$X = \left\{ \tau \in S^{\mathbb{L}} \,\middle|\, \sum_{x \in \mathbb{L}} \tau(x) = 2 \right\}$$

Celulární modely jako Markovské procesy - Příklad

$$S = \{0,1,2\}, \qquad \mathbb{L} = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2\}\}$$

$$S^{\mathbb{L}} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & s_{22} \\ \hline \end{array} : s_{ij} \in S = \{0,1,2\} \right\}$$

$$|S^{\mathbb{L}}| = 3^4 = 81$$

$$X = \left\{ \tau \in S^{\mathbb{L}} \,\middle|\, \sum_{x \in \mathbb{L}} \tau(x) = 2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

Celulární modely jako Markovské procesy - Náš typický př.

- Mřížka $\mathbb{L}$ o počtu buněk $L := |\mathbb{L}|$
- Stavový prostor

$$X_L = S^L = \{0, 1, \ldots, |S| - 1\}^L$$

Celulární modely jako Markovské procesy - Náš typický př.

- Mřížka $\mathbb{L}$ o počtu buněk $L := |\mathbb{L}|$
- Stavový prostor

$$X_L = S^L = \{0, 1, \ldots, |S| - 1\}^L$$

- Nebo s fixním počtem částic je stavový prostor

$$X_{L,N} = \left\{ \tau \in S^L \middle| \sum_{x \in \mathbb{L}} \tau(x) = N \right\}$$

Celulární modely jako Markovské procesy - Náš typický př.

- Mřížka $\mathbb{L}$ o počtu buněk $L := |\mathbb{L}|$
- Stavový prostor

$$X_L = S^L = \{0, 1, \dots, |S| - 1\}^L$$

- Nebo s fixním počtem částic je stavový prostor

$$X_{L,N} = \left\{ \tau \in S^L \,\middle|\, \sum_{x \in \mathbb{L}} \tau(x) = N \right\}$$

- Většinou budeme mít stavový prostor

$$X_{L,N} = \left\{ \tau \in \{0,1\}^L \,\middle|\, \sum_{x \in \mathbb{L}} \tau(x) = N \right\}$$

Celulární modely jako Markovské procesy

- Markovský proces $\{\tau_t | t \in T\}$

- Rozdělení na stavech v čase t je $p(t)$ skládající se z $p_\tau(t) = P(\tau_t = \tau)$

- Matice pravděpodobností přechodu $P(t)$ skládající se z $p_{\tau\sigma}(t) = P(\tau_t = \sigma | \tau_0 = \tau)$

- Předpokládáme homogenní markovský proces, tj. $p_{\tau\sigma}(t) = P(\tau_t = \sigma | \tau_0 = \tau) = P(\tau_{t+s} = \sigma | \tau_s = \tau), \forall s \geq 0$

- Stacionární rozdělení π definováno jako $\pi = \pi\, P(t)$

- Víme, že $p(t) = p(0)\, P(t)$

Celulární modely jako Markovské procesy - Diskrétní čas

- $T = \mathbb{N}_0$
- $p(n) = p(0)\, P^n$ a $p(n) = p(n-1)\, P$
- $\pi = \pi\, P$, proto $\pi(P - I) = 0$, tj. $(P - I)^T \pi^T = 0$, odkud
$$\pi^T \in \ker(P - I)^T$$
- $\sum_\tau \pi_\tau = 1$
- $p_\tau(n) = p_\tau(n-1)\, \left(1 - \sum_{\sigma \neq \tau} P_{\tau\sigma}\right) + \sum_{\sigma \neq \tau} p_\sigma(n-1) P_{\sigma\tau}$, odkud
$$p_\tau(n) - p_\tau(n-1) = -\sum_{\sigma \neq \tau} p_\tau(n-1) P_{\tau\sigma} + \sum_{\sigma \neq \tau} p_\sigma(n-1) P_{\sigma\tau}$$

Celulární modely jako Markovské procesy - Diskrétní čas

- $T = \mathbb{N}_0$
- $p(n) = p(0)\, P^n$ a $p(n) = p(n-1)\, P$
- $\pi = \pi\, P$, proto $\pi(P - I) = 0$, tj. $(P - I)^T \pi^T = 0$, odkud

$$\pi^T \in \ker(P - I)^T$$

- $\sum_\tau \pi_\tau = 1$
- $p_\tau(n) = p_\tau(n-1)\left(1 - \sum_{\sigma \neq \tau} P_{\tau\sigma}\right) + \sum_{\sigma \neq \tau} p_\sigma(n-1) P_{\sigma\tau}$, odkud

$$p_\tau(n) - p_\tau(n-1) = -\sum_{\sigma \neq \tau} p_\tau(n-1) P_{\tau\sigma} + \sum_{\sigma \neq \tau} p_\sigma(n-1) P_{\sigma\tau}$$

- Pro π pak tedy platí:

$$0 = -\sum_{\sigma \neq \tau} \pi_\tau P_{\tau\sigma} + \sum_{\sigma \neq \tau} \pi_\sigma P_{\sigma\tau}$$

Celulární modely jako Markovské procesy - Spojitý čas

- $T = \langle 0, +\infty)$
- $p(t) = p(0)\,P(t)$ a $p'(t) = p(t)\,Q$, kde $Q = P'(0)$
- $\pi = \pi\,P(t) \Leftrightarrow \pi Q = 0$, odkud

$$\pi^T \in \ker Q^T$$

- $\sum_\tau \pi_\tau = 1$
- $Q_{\tau\tau} = -\sum_{\sigma\neq\tau} Q_{\tau\sigma}$, proto

$$p'_\tau(t) = -\sum_{\sigma\neq\tau} Q_{\tau\sigma} p_\tau(t) + \sum_{\sigma\neq\tau} Q_{\sigma\tau} p_\sigma(t)$$

Celulární modely jako Markovské procesy - Spojitý čas

- $T = \langle 0, +\infty)$
- $p(t) = p(0)\, P(t)$ a $p'(t) = p(t)\, Q$, kde $Q = P'(0)$
- $\pi = \pi\, P(t) \Leftrightarrow \pi Q = 0$, odkud

$$\pi^T \in \ker Q^T$$

- $\sum_\tau \pi_\tau = 1$
- $Q_{\tau\tau} = -\sum_{\sigma\neq\tau} Q_{\tau\sigma}$, proto

$$p'_\tau(t) = -\sum_{\sigma\neq\tau} Q_{\tau\sigma} p_\tau(t) + \sum_{\sigma\neq\tau} Q_{\sigma\tau} p_\sigma(t)$$

- Pro π pak tedy platí:

$$0 = -\sum_{\sigma\neq\tau} \pi_\tau Q_{\tau\sigma} + \sum_{\sigma\neq\tau} \pi_\sigma Q_{\sigma\tau}$$

Celulární modely jako Markovské procesy

- Dává dobrý smysl zapisovat souhrnně diskrétní i spojitý čas pomocí *intenzity přechodu* z τ do σ

$$w(\tau \to \sigma) = \begin{cases} P_{\tau\sigma} & \dots \quad T = \mathbb{N}_0 \\ Q_{\tau\sigma} & \dots \quad T = \langle 0, +\infty) \end{cases}$$

- Pro stacionární rozdělení pak tedy souhrnně můžeme psát

$$0 = -\sum_{\sigma \neq \tau} \pi_\tau w(\tau \to \sigma) + \sum_{\sigma \neq \tau} \pi_\sigma w(\sigma \to \tau)$$

Konec dnešní přednášky. :-)