Celulární modely - představení a příklady

Sociální systémy a jejich simulace
Jana Vacková

20.10.2021

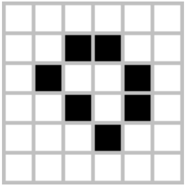
Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze

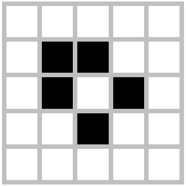
Náplň dnešní přednášky

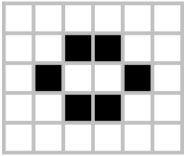
- Celulární modely - první z nich
- Celulární pravděpodobnostní modely v 1D
  - Updaty a okrajové podmínky
  - TASEP a další příklady

Celulární modely - Game of Life

- Jednotkou celulárních modelů je **buňka** s konečným počtem stavů
- 1. celulární model: **Game of Life** (* John Horton Conway)
- John **von Neumann**
- Pravidla:
  1. Každá živá buňka s méně než dvěma živými sousedy zemře.
  2. Každá živá buňka se dvěma nebo třemi živými sousedy zůstává žít.
  3. Každá živá buňka s více než třemi živými sousedy zemře.
  4. Každá mrtvá buňka s právě třemi živými sousedy oživne.
- Bochník, loď, včelín ...







Celulární modely - Game of Life - Příklad

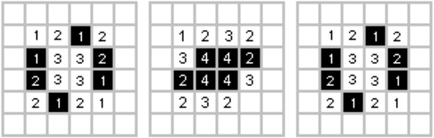
- Pravidla:
  1. Každá živá buňka s méně než dvěma živými sousedy zemře.
  2. Každá živá buňka se dvěma nebo třemi živými sousedy zůstává žít.
  3. Každá živá buňka s více než třemi živými sousedy zemře.
  4. Každá mrtvá buňka s právě třemi živými sousedy oživne.

Celulární modely - Game of Life - Příklad

- Pravidla:
  1. Každá živá buňka s méně než dvěma živými sousedy zemře.
  2. Každá živá buňka se dvěma nebo třemi živými sousedy zůstává žít.
  3. Každá živá buňka s více než třemi živými sousedy zemře.
  4. Každá mrtvá buňka s právě třemi živými sousedy oživne.
- **Stavová množina:** $S = \{0, 1\}$
- **Mřížka** (lattice): $\mathbb{L}$
- **Buňka** $x \in \mathbb{L}$ je ve stavu $s \in S$
- Živá buňka: $x = 1$, mrtvá buňka: $x = 0$
- **Okolí buňky** na pozici (i, j): $N = \{(i + \delta, j + \delta) : \delta \in \{0, \pm 1\}\}$

Celulární modely - Game of Life - Příklad

- Pravidla:
  1. Každá živá buňka s méně než dvěma živými sousedy zemře.
  2. Každá živá buňka se dvěma nebo třemi živými sousedy zůstává žít.
  3. Každá živá buňka s více než třemi živými sousedy zemře.
  4. Každá mrtvá buňka s právě třemi živými sousedy oživne.
- **Stavová množina:** $S = \{0, 1\}$
- **Mřížka** (lattice): $\mathbb{L}$
- **Buňka** $x \in \mathbb{L}$ je ve stavu $s \in S$
- Živá buňka: $x = 1$, mrtvá buňka: $x = 0$
- **Okolí buňky** na pozici (i, j): $N = \{(i + \delta, j + \delta) : \delta \in \{0, \pm 1\}\}$



0. 1. 2.

- Videa: The Acorn, The Eater, Web: Conway LifeWiki

- Obecný pojem **okolí buňky** $x \in \mathbb{L}$

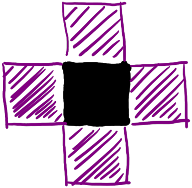
$$N_x = \{y \in \mathbb{L} : \mathrm{dist}(x, y) \leq d\}$$

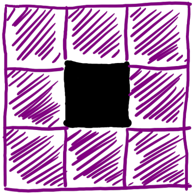
Celulární modely - Obecná vsuvka - Okolí a stav mřížky

- Obecný pojem **okolí buňky** $x \in \mathbb{L}$

$$N_x = \{y \in \mathbb{L} : \mathrm{dist}(x, y) \leq d\}$$

- Používané:
  - **Von Neumannovo** okolí: sousedí hranou, $|x_1 - y_1| + |x_2 + y_2| \leq 1$
  - **Moorovo** okolí: sousedí rohem, $\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 + y_2|\} \leq 1$



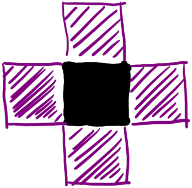


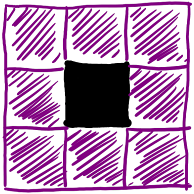
Celulární modely - Obecná vsuvka - Okolí a stav mřížky

- Obecný pojem **okolí buňky** $x \in \mathbb{L}$

$$N_x = \{y \in \mathbb{L} : \mathrm{dist}(x, y) \leq d\}$$

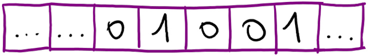
- Používané:
  - **Von Neumannovo** okolí: sousedí hranou, $|x_1 - y_1| + |x_2 + y_2| \leq 1$
  - **Moorovo** okolí: sousedí rohem, $\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 + y_2|\} \leq 1$





- **Stav buňky** $x \in \mathbb{L}$ ozn. jako $\tau(x) \in S$
- **Stav celé mřížky** $\tau \in S^{\mathbb{L}}$, kde $S^{\mathbb{L}} := \{f : f : \mathbb{L} \to S\}$

Celulární modely - Rule 184

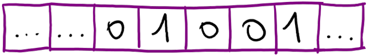


- 1D mřížka $\mathbb{L} \subset \mathbb{Z}$
- Stavová množina $S = \{0, 1\}$
- $N_x = (x-1, x, x+1) \in \{0,1\}^3$
- Použití: dopravní proud, balistické srážky částic
- Wolfram code
- TASEP s pravděpodobností přeskoku částice rovnou jedné a paralelním updatem

Překladová tabulka:

N_x		nová x
111	$\to$	1
110	$\to$	0
101	$\to$	1
100	$\to$	1
011	$\to$	1
010	$\to$	0
001	$\to$	0
000	$\to$	0

Celulární modely - Rule 184



- 1D mřížka $\mathbb{L} \subset \mathbb{Z}$
- Stavová množina $S = \{0, 1\}$
- $N_x = (x-1, x, x+1) \in \{0, 1\}^3$
- Použití: dopravní proud, balistické srážky částic
- Wolfram code
- TASEP s pravděpodobností přeskoku částice rovnou jedné a paralelním updatem

Překladová tabulka:

N_x		nová x
111	$\rightarrow$	1
110	$\rightarrow$	0
101	$\rightarrow$	1
100	$\rightarrow$	1
011	$\rightarrow$	1
010	$\rightarrow$	0
001	$\rightarrow$	0
000	$\rightarrow$	0

$$2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 = 184$$

Celulární modely - Pravděpodobnostní

- Pravděpodobnost přechodu

$$w(x \to y|\tau) = P(\text{částice v x přeskočí do y} \,|\, \text{systém je ve stavu}\, \tau)$$

Celulární modely - Pravděpodobnostní

- Pravděpodobnost přechodu

$$w(x \to y|\tau) = P(\text{částice v x přeskočí do y} \,|\, \text{systém je ve stavu}\, \tau)$$

- **Update** (aktualizace):
  - **Plně paralelní** = simultánní volba nových pozic částic v mřížce
  - **Sekvenční** = aktualizace mřížky v daném pořadí (dopředný, zpětný)
  - **Náhodný** = náhodný výběr buňky z mřížky
  - **Spojitý čas** = částice v buňce čeká $\Delta t \sim Exp(\lambda)$

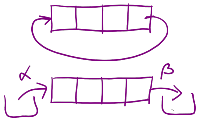
Celulární modely - Pravděpodobnostní

- Pravděpodobnost přechodu

$$w(x \to y|\tau) = P(\text{částice v x přeskočí do y} \,|\, \text{systém je ve stavu } \tau)$$

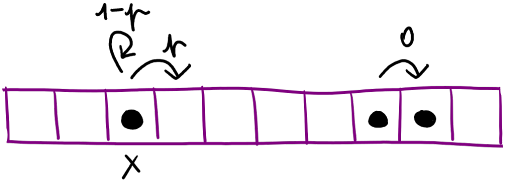
- **Update** (aktualizace):
  - **Plně paralelní** = simultánní volba nových pozic částic v mřížce
  - **Sekvenční** = aktualizace mřížky v daném pořadí (dopředný, zpětný)
  - **Náhodný** = náhodný výběr buňky z mřížky
  - **Spojitý čas** = částice v buňce čeká $\Delta t \sim Exp(\lambda)$

- **Okrajové podmínky:**
  - Periodické: kruh
  - Otevřené: zásobník na vstupu
  - Segment: úsečka
  - Nekonečná mřížka: přímka, polopřímka



Celulární modely - Pravděpodobnostní - TASEP

- **T**otally **A**symmetric **S**imple **E**xclusion **P**rocess
- Tj. v jedné buňce nesmí být více než jedna částice



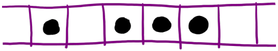
- $\mathbb{L} \subset \mathbb{Z}$, $S = \{0, 1\}$, počet buněk $|\mathbb{L}|$
- Stav buňky $x \in \mathbb{L}$:

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & \dots \quad \text{x je prázdná} \\ 1 & \dots \quad \text{x je obsazená} \end{cases}$$

- Pravděpodobnost přeskoku p, můžeme tedy psát $10 \xrightarrow{p} 01$

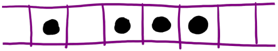
Celulární modely - Pravděpodobnostní - TASEP - Update

Počáteční stav mřížky:



Celulární modely - Pravděpodobnostní - TASEP - Update

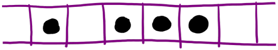
Počáteční stav mřížky:



Paralelní update:

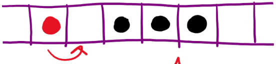
Celulární modely - Pravděpodobnostní - TASEP - Update

Počáteční stav mřížky:



Paralelní update:

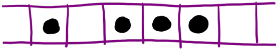
Náhodný update:



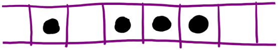
krok alg. $\frac{1}{L}$ čas. jedn.

Celulární modely - Pravděpodobnostní - TASEP - Update

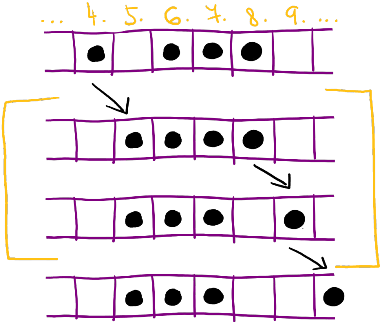
Počáteční stav mřížky:



Počáteční stav mřížky:

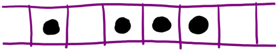


Dopředný update:

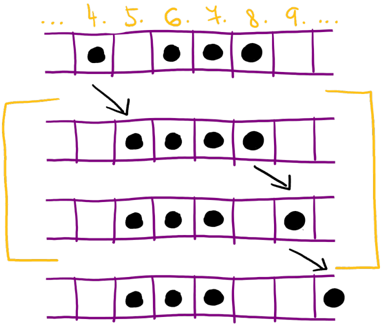


Celulární modely - Pravděpodobnostní - TASEP - Update

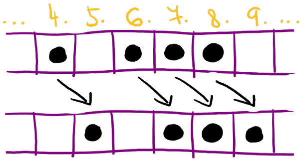
Počáteční stav mřížky:



Dopředný update:



Zpětný update:



- **Slow-to-Start:** $p_1 > p_2$

$$010 \xrightarrow{p_1} 001$$
$$110 \xrightarrow{p_2} 101$$

Celulární modely - Pravděpodobnostní - rozšíření TASEPu

- **Slow-to-Start:** $p_1 > p_2$

$$010 \xrightarrow{p_1} 001$$
$$110 \xrightarrow{p_2} 101$$

- **Next-Nearest-Neighbour:** $p_1 > p_2$

$$100 \xrightarrow{p_1} 010$$
$$101 \xrightarrow{p_2} 011$$

- **Slow-to-Start:** $p_1 > p_2$

$$010 \xrightarrow{p_1} 001$$
$$110 \xrightarrow{p_2} 101$$

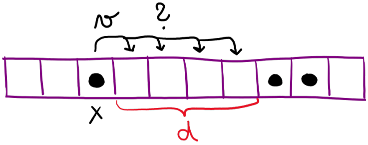
- **Next-Nearest-Neighbour:** $p_1 > p_2$

$$100 \xrightarrow{p_1} 010$$
$$101 \xrightarrow{p_2} 011$$

- **KLS** (Katz, Lebowitz, Spoku): kombinace předchozích
  - $p_1 + p_4 = p_2 + p_3$, kde $p_1 > p_2 > p_3 > p_4$

$$0100 \xrightarrow{p_1} 0010$$
$$0101 \xrightarrow{p_2} 0011$$
$$1100 \xrightarrow{p_3} 1010$$
$$1101 \xrightarrow{p_4} 1011$$

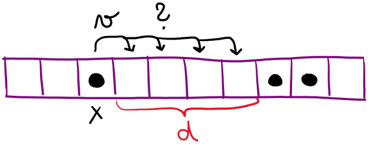
- **Nagel-Schreckenberg** (NaSch)



- Pro $v_{max} = 1$ jde o paralelní TASEP s $p = 1 - q$
- Aktualizační kroky:
  1. Zrychlení: $v \to \min\{v + 1, v_{max}\}$
  2. Bezkoliznost: $v \to \min\{v, d\}$
  3. Brzdění: $v \to \max\{0, v - X_q\}$, kde $X_q \sim Be(q)$
  4. Posun o v buněk kupředu: $x \to x + v$

Celulární modely - Pravděpodobnostní - Pro $v_{max} > 1$

- **Nagel-Schreckenberg** (NaSch)



  - Pro $v_{max} = 1$ jde o paralelní TASEP s $p = 1 - q$
  - Aktualizační kroky:
    1. Zrychlení: $v \to \min\{v+1, v_{max}\}$
    2. Bezkoliznost: $v \to \min\{v, d\}$
    3. Brzdění: $v \to \max\{0, v - X_q\}$, kde $X_q \sim Be(q)$
    4. Posun o v buněk kupředu: $x \to x + v$

- **Fukui-Ishibashi** (FI): zjednodušený NaSch
  - $v \to \min\{v_{max}, d\}$
  - $v \to \max\{0, v - X_q\}$, kde $X_q \sim Be(q)$
  - $x \to x + v$

Celulární modely - Pravděpodobnostní - VDR

- **Velocity Dependent Randomization** (VDR)
- Jako možný nultý aktualizační krok pro NaSch a FI

$$q(v) = \begin{cases} q_0 & \dots \quad v = 0, \\ q_1 & \dots \quad v \in \{1, 2, \dots, v_{max} - 1\}, \\ q_{max} & \dots \quad v = v_{max}, \end{cases}$$

  kde $q_0 \geq q_1 \geq q_{max}$

- Pro $q_{max} = 0$ se jedná o tempomatovou limitu

Konec dnešní přednášky. :-)