Inhaltsverzeichnis

1 Tafelanschrieb 12.04.2022

1.1 Exponentialfunktion (o-Notation)

$$n^l = o(\exp(n)) \text{ für alle } l > 0$$
$$\exp(n) = e^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^j}{j!} \text{ wobei } j! = 1 \cdot \dots \cdot (j-1) \cdot j = \Pi_{i=1}^{j} i$$
$$0! = 1$$

Wähle $k \in \mathbb{N}$, $k > l$ Dann:

$$\begin{aligned}
\frac{n^l}{\exp(n)} &= \frac{n^l}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^j}{j!}} \\
&\leq \frac{n^l}{\frac{n^k}{k!}} \\
&= \frac{n^l (k!)}{n^k} \\
&= k! \cdot n^{\overbrace{l-k}^{<0}} \\
&= \frac{k!}{n^{k-l}} \qquad n \to \infty, \to 0
\end{aligned}$$

$$f(n) = o(g(n)) \text{ falls } \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$
$$\to n^l = o(\exp(n))$$

Allgemeiner:

$$\forall l > 0, c > 1$$
$$n^l = o(c^n)$$

Logarithmieren:

$$\log = \ln$$
$$\log x = \int_1^x \frac{1}{z} dz$$
$$\log n = o(n^\alpha) \text{ für jedes } \alpha > 0$$

1.2 Rechnen mit o(g(n)) und O(g(n))

$2^{O(n)}$ heißt $2^{f(n)}$ für irgendeine Funktion $f(n) = O(n)$

$$f(n) = \frac{1}{n} = O(1)$$

$$f(n) = 10 + \sin(\frac{1}{n}) = \Theta(1)$$
$$f(n) = o(1) \to f(n) = O(1)$$
$$f(n) = n = \Omega(1)$$
$$f(n) = \sin(n^2) \to \text{ erfüllt nicht } o(1), \Omega(1), \Theta(1)$$

$$f(n) \sim g(n) \text{ heißt } \frac{f(n)}{g(n)} \to_{n \to n} 1$$

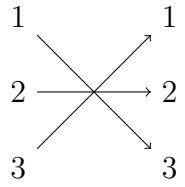
Beispiel:

$$f(n) = n^2 - 10n + 100 \log n$$
$$g(n) = n^2$$
$$\frac{f(n)}{g(n)} = 1 - \overbrace{\frac{10}{n}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{100 \log n}{n^2}}^{\to 0} \to_{n \to \infty} 1$$

1.3 Quicksort-Algorithmus

Worst-Case: $\frac{n(n+1)}{2}$

1.4 Permutation erklärt



1.5 Beweis der Laufzeit vom randomisierten Quicksort

X_n = erwartete # Vergleiche auf einer zufälligen n-Permutation
Es gilt:

$$X_n = \overbrace{n}^{\text{Vrgl. mit Pivot}} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_{k-1} + X_{n-k}) \qquad X_1 = 1 \qquad X_0 = 0$$

k	... ...

$$n \cdot X_n = n^2 + \sum_{k=1}^{n} (X_{k-1} + X_{n-k})$$
$$= n^2 + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X_k$$

$$(n+1)X_{n+1} = (n+1)^2 + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} X_k$$

$$\begin{aligned}(n+1)X_{n+1} - n \cdot X_n = (n+1)^2 - n^2 + 2X_n \\ = 2n + 1 + 2X_n \\ (n+1)X_{n+1} = 2n + 1 + (n+2)X_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{X_{n+1}}{n+2} &= \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} + \frac{X_n}{n+1} \\ &\leq \frac{2}{n+2} + \frac{X_n}{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{X_{n+1}}{n+2} &\leq \frac{2}{n+2} + \frac{X_n}{n+1} \\ &\leq \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+1} + \frac{X_{n-1}}{n} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2}{k+1} + \underbrace{\frac{X_0}{1}}_{=0} = 2H_{n+1} \\ &\Rightarrow X_{n+1} \leq 2(n+2)H_{n+1} \; \forall n = 2H_{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_n &\geq \log(n) \\ &\geq H_n - 1 \\ H_n &= \log(n) + O(1)\end{aligned}$$

Quicksort:

$$2(n+1)H_n = 2(n+1)(\log(n) + O(n)) \sim 2n\log(n) = \underline{\underline{O(n \log n)}}$$

2 Tafelanschrieb 14.04.2022

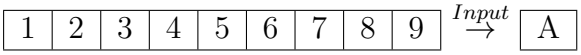
2.1 Quicksort nach Dijkstra in C

Live-Programmierung: Pipe-Operator: |(output des linken Teils wird als Input des rechtens gehandhabt)

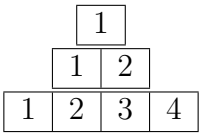
shuf mischt die Eingabe

```
seq 10 | shuf
```

Tafel:



Wie bekommt man es hin, dass die der Speicher nicht zu groß wird aus der Eingabe heraus?
Erster Vorschlag: $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$ Zweiter Vorschlag:
Man erstellt einen Speicher und wenn der vom Platz nicht reicht wird, dieser einfach verdoppelt:



Live-Programmierung:
Programm für die Speicherallocation bei zu großen Eingaben

```
/* Dieser Code wird ins Vorlesungs Git-Repo hochgeladen */
#include<stdlib.h>
#include<stdio.h>

char *input=NULL;
int length=0;

int read_input(void) {
    int size=0; /* size of memory block */
    int fill=0; /* number characters read */
    int c; /* next character */

    while((c=getchar()) != EOF){
        if(fill>=size){ /* wenn der Speicher nicht reicht */
            int i,newsize=2*size+1;
            char *newinput;

            /*Bestell Speicher in der entsprechenden Groesse */
            if((newinput=(char *)malloc(sizeof(char)*newsize))==NULL)
                return -1;
            for(i=0;i<size;i++) newinput[i]=input[i];
            if(input!=NULL) free(input);
            input=newinput;
            size=newsize;
        }
        input[fill++]=(char)c; /*leg das neue Symbol ab */
    }
    length=fill;
    return length; /* Gibt neue Laenge zurueck */
}

int main(int argc, char **argv){
    int i;

    if(read_input()<=0) return 1;
    for(i=0;i<length;i++) putchar(input[i]);
}
```

Es muss jetzt noch die Eingabe in richtige Integer-Werte übersetzt werden. Dies haben wir an der Stelle leider nicht geschafft. Er bereitet dies zum nächsten Mal vor und zeigt uns anschließend das Ergebnis.

3 Tafelanschrieb 19.04.2022

3.1 Quicksort

Live-Programmierung Wird demnächst bereitgestellt.

Tafelanschrieb Quicksort hat eine Laufzeit von $\Theta(n \log n)$

Vergleichsbasierte Sortieralgorithmen

Laufzeit

$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$
InsertionSort	Quicksort
BubbleSort	MergeSort
	Heapsort

Wir werden zeigen:

$$\log(n!) = \Theta(n \log n)$$

S_n = Menge aller n-Permutationen

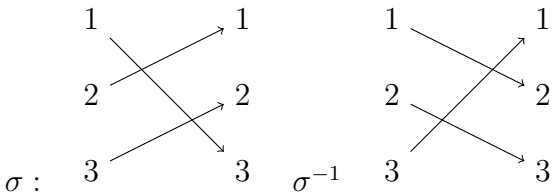
$\sigma \in S_n$

$$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma \begin{array}{|c|c|}\hline \sigma(1) & 1 \\ \sigma(2) & 2 \\ \sigma(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ \sigma(n) & n \\ \hline \end{array} \xrightarrow[\text{nach der ersten Spalte}]{\text{Sortiere}} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \sigma^{-1}(1) \\ 2 & \sigma^{-1}(2) \\ 3 & \sigma^{-1}(3) \\ \vdots & \vdots \\ n & \sigma^{-1}(n) \\ \hline \end{array}$$

$\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$

bijektiv

σ^{-1} : Umkehrabbildung



3.2 Beweis des Satzes

Angenommen T ist die erwartete Anzahl von Vergleichen zum Sortieren einer zufälligen n-Permutation. Dann gibt es mindestens $\frac{n!}{2}$ n-Permutationen, für die der Algorithmus $\leq 2 \cdot T$ Vergleiche braucht. Der Algorithmus stellt also $X \leq 2 \cdot T$ Vergleichsanfragen.
Die Antworten können durch einen Vektor aus $\{0, +1, -1\}^X$ beschrieben werden. Weil beim Sortiervorgang keine Information verloren geht, folgt:

$$3^{2T+1} \geq \sum_{X=1}^{2 \cdot T} 3^X \geq \left(\frac{n!}{2}\right) \Rightarrow 2T + 1 \geq \log_3(n!) \Rightarrow T \geq \frac{1}{2} \log_3(n!) - 1 \Rightarrow T = \boxed{\Omega(\log(n!))}$$

$$\log_3 z = \frac{\log(z)}{\log 3}$$

4 Tafelanschrieb 21.04.2022

4.1 Stirlingformel

$\Omega(\log n!)$

$$
\begin{aligned}
& n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n && \text{Stirling Formel} \\
& \Rightarrow \log n! \sim \log(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n) && \log(x+y) = \log x + \log y \\
& = \underbrace{\frac{1}{2}\log(2\pi)}_{O(1)} + \underbrace{\log n}_{O(\log n)} + n\log n \underbrace{-n}_{O(n)} && \log 1 = 0 \\
& \sim n \log n
\end{aligned}
$$

4.2 Herleitung vom Wallisschen Produkt

Beweis: Übungen

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \; dx && (n \geq 2) \\
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \; dx = \left[\Pi_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i}\right] \cdot \frac{\pi}{2} \\
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \; dx = \left[\Pi_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i}\right] \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx}_{1} = \Pi_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 1 \geq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \; dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \; dx} \text{ weil } \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \; \forall x, n \text{ da } \sin x \in [0,1] \text{ für } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\
& \geq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x \; dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \; dx} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \Pi_{i=1}^{n+1} \frac{2i-1}{2i}}{\frac{\pi}{2} \cdot \Pi_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i}} = \frac{2n+1}{2n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \\
& \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \; dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \; dx} = 1 \\
& \Rightarrow 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\Pi_{i=1}^n \frac{2}{2i+1}}{\frac{\pi}{2}\Pi_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i}} = \frac{2}{\pi} \lim_{n\to\infty} \Pi_{i=1}^n \frac{4i^2}{4i^2-1}
\end{aligned}
$$

□

4.3 Korollar zur Sterlingformel

Beweis:

$$\begin{aligned}\text{Wallis } \Rightarrow \frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty} \Pi_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{4i^2-1} = \lim_{n\to\infty} \Pi_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1}\frac{2i}{2i-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \Pi_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{2i-1}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \Pi_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{2i-1}\right)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\pi n}} \sim \Pi_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i-1} = \boxed{\frac{\Pi_{i=1}^{n} 2i}{\Pi_{i=1}^{n} 2i-1}}$$

$$\boxed{\Pi_{i=1}^{n} 2i = 2^n(n!)}$$

$$\Pi_{i=1}^{n} 2i-1 = \frac{\Pi_{i=1}^{n} i}{\Pi_{i=1}^{n} 2i} = \boxed{\frac{(2n)!}{2^n n!}} \qquad \square$$

4.4 Sterling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

Beweis:

Definiere $a_n = \frac{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}$ und $b_n = a_n \cdot \exp(\frac{1}{12n}) \geq a_n$

$$\log a_n = \frac{1}{2} \cdot \log n - n + \log \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{2} \cdot \log n - n + \sum_{i=1}^{n} \log \frac{n}{i}$$

$$\log b_n = \log a_n + \frac{1}{12n} = \frac{1}{2} \log n - n + \sum_{i=1}^{n} \log \frac{n}{i} + \frac{1}{12n}$$

$$\begin{aligned}\log a_{n+1} - \log a_n &= \frac{1}{2}\log(n+1) - (n+1) + \sum_{i=1}^{n+1} \log \frac{n+i}{i} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}\log n - n + \sum_{i=1}^{n} \log \frac{n}{i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n} - 1 + n\log\frac{n+1}{n} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n} - 1\end{aligned}$$

$$\log b_{n+1} - \log b_n = \log a_{n+1} - \log a_n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} = \left(\frac{1}{2}+n\right)\log\frac{n+1}{n} - 1 - \frac{1}{12n(n+1)}$$

Hilfsfunktionen:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} - x \qquad \psi(x) = \phi(x) - \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$
$$\phi(0) = 0 \qquad \psi(0) = 0$$

$$\phi'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \geq 0 \quad (0 \leq x < 1) \qquad \psi'(x) = -\frac{x^4}{6(1-x^2)^2} \leq 0 \quad (0 \leq x < 1)$$
$$\Rightarrow \phi(x) \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1 \qquad \psi(x) \leq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1$$

Einsetzen:

$$x = \frac{1}{2n+1}$$

Anmerkung:

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} - x \leq \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$
$$0 \leq \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} - \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3}{3\left(1-(\frac{1}{2n+1})^2\right)}$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n} - \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{12n(n+1)(2n+1)}$$
$$\Rightarrow 0 \leq (n+\frac{1}{2})\log\frac{n+1}{n} - 1 \leq \frac{1}{12n(n+1)}$$

Daraus folgt

$$\Rightarrow \log a_{n+1} \geq \log a_n$$
$$\log bn + 1 \leq b_n$$
$$\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$$
$$b_{n+1} \leq b_n$$

Also wissen wir:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \text{ und}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\exp\left(-\frac{1}{12n}\right) = 1$$

Also existiert:

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ und } c = \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = c > 0$$

Gerade Werte einsetzen:

$$0 < c = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{(2n)!} = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n!^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}}_{\to\sqrt{n}} \sqrt{n} \left(\underbrace{\sqrt{\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n}_{a_n} \right)^2$$

$$= \sqrt{2\pi} \lim_{n\to\infty} a_n^2 = \sqrt{2\pi} \cdot c^2$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

□

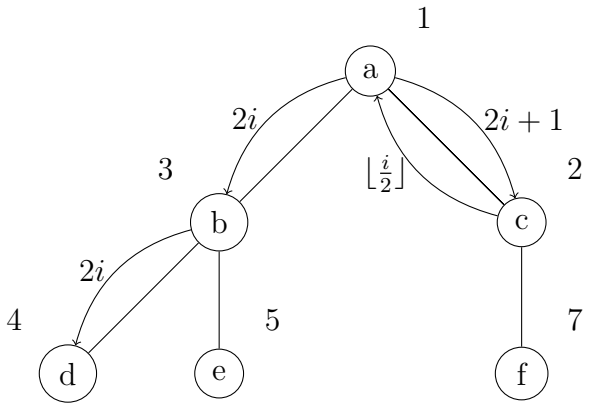
$$\begin{aligned}
\log a_n = \log \frac{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} &= \log\sqrt{n} + \log\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) - \log(n!) \\
&= \frac{1}{2}\log n + n\log\left(\frac{n}{e}\right) - \log \Pi_{i=1}^n i \\
&= \frac{1}{2}\log n + n(\log n - \underbrace{\log e}_{1}) - \sum_{i=1}^n \log i \\
&= \frac{1}{2}\log n - n + \sum_{i=1}^n \log\frac{n}{i}
\end{aligned}$$

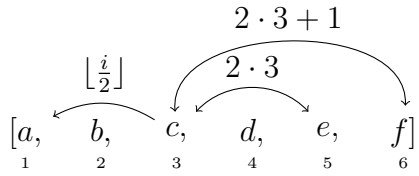
4.5 Pascalsches Dreieck

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	

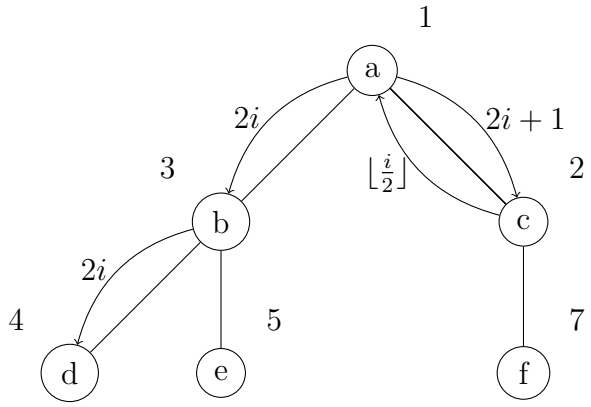
5 Tafelanschrieb 26.04.2022

5.1 Heapsort





$$\log_2(n) = \frac{\log_e(n)}{\log_e(2)}$$



$$\sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{n}{2^{h+1}} \cdot O(h) = O(n \cdot \underbrace{\sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{h}{2^{h+1}}}_{c}) = O(n)$$

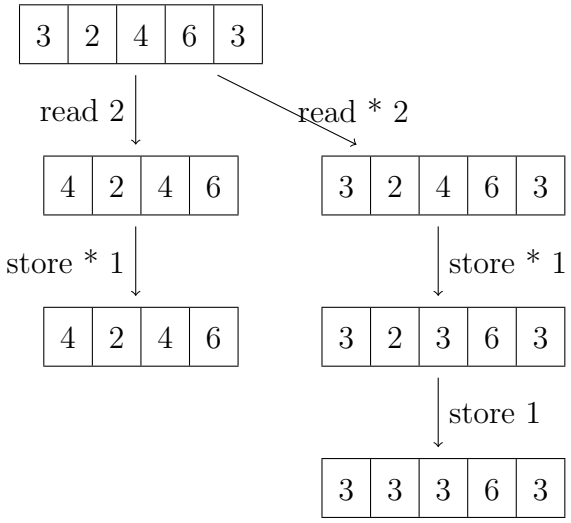
5.2 Weiteres

Es gibt an dieser Stelle keine weiteren Mitschriften zu dieser Vorlesung, da die Tafelanschriften nicht hilfreich sind zum nachlesen.

Unter dem folgenden Link ist der Heapsort Algorithmus nocheinmal erklärt, wie in den Vorlesungen, sowohl in der Baumdarstellung, als auch in der Array-Darstellung.
`wikiversity`
Oder auch in den Folien von DAP2 aus dem Jahr 2019, ist der Algorithmus deutlich erklärt:(Wenn man in den Kurs eingeschrieben ist)
`moodle-tudortmund`

6 Tafelanschrieb 28.04.2022

6.1 Die Registermaschine



6.1.1 Beispiel für jump

```
1 | store 2
2 | load k
3 | jzero 9
4 | add -1
5 | store 1
6 | load 2 (später read 2)
7 | add 1
8 | jump 3
9 | halt
```

2	0	0	0

Für k setzen wir mal 3 ein.

3	0	2	0

Registermaschine					Zähler
r_0	r_1	r_2	r_3	...	
2	0	0	0	...	t = 0 (Programmstart)
2	0	2	0	...	z = 1
3	0	2	0	...	z = 2
2	0	2	0	...	z = $\not{3}$ 4
2	2	2	0	...	z = 5
2	2	2	0	...	z = 6
3	2	2	0	...	z = 7
3	2	2	0	...	z = 8
3	2	2	0	...	$z = 3 \Rightarrow 4$
2	0	0	0	...	

$$r_0 = r_0 + r_j$$

```
while r_j > 0
    r_0 = r_0 + 1
    r_j  --
```

Die Laufzeit beträgt normal: $O(r_j)$

6.2 Effiziente Algorithmen

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_M(e) &= \begin{cases} |e| & \text{, wenn } e \text{ gerade} \\ c & \text{, sonst} \end{cases} \\ &= \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(n) = \max\{\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(e) \log_2(2 + |e|) \leq n\} \\ &= O(2^n) \\ &\max\{\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(2^k) | k \leq n\} \\ &= \max\{\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(2^n), \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(2^{n-1})\} \\ &= O(2^n)\end{aligned}$$

Länge n größte e $|e| = 2^{n-1}$
$\Rightarrow$ Maximum aller e mit $|e| \leq 2^n$

	mit Addition	ohne Addition	mit Muliplikation
$r_0 = r_0 + r_j$	$O(1)$	$O(\|r_j\|)$	
$r_0 = r_0 * r_j$	$O(\|r_j\| \cdot r_j\|)$		$O(1)$

n-mal $r_0 * r_0$ 2^{2^n}

$$\begin{cases} \text{mult-Befehl:} & O(n) \\ \text{add } r_j & O(2^n) \rightarrow \text{ exponentieller Unterschied zu mult-Befehl} \end{cases}$$

7 Tafelanschrieb 03.05.2022

7.1 Wiederholung

Registermaschine M: $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(e)$ Laufzeit bei Eingabe e
$\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(n)$ worst case für alle e, mit $\log(|e|+2) \leq n, \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(e)$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(e) = |e| \qquad \overbrace{\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(12345) = 12345}^{\log_2(12345+2)\approx 16}$$
$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(n) = O(2^n)$$

$\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(n)$ ist effizient genau dann wenn $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(n) = O(n^l)$ mit l konstant

Funktion: $2 \to 2$ effizient berechenbar gdw. $\exists M$, M ist effizient

7.2 Countingsort

Array A:

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Element A	a	b	a	c	d	f	c	b	e	d
Schlüssel	1	1	2	1	5	3	4	2	5	1

Schlüssel:

Index:	1	2	3	4	5
δ	1	2	3	4	5

C

Index	1	2	3	4	5
C_i	4	2	1	1	2

C'

Index	1	2	3	4	5
C'_i	4	6	7	8	10

Ablauf des Algorithmus: C' verändert:
Reihenfolge der Abarbeitung als Exponent:

Index	1	2	3	4	5
C'_i	$\not{A}^1$	$\not{6}^3$	$\not{7}^5$	$\not{8}^4$	$\not{1}0^2$
	$\not{3}^7$	$\not{5}^8$	6	7	$\not{9}^6$
	$\not{2}^9$	4			8
	1				

B

B =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	a	b	c	d	a	b	f	c	d	e

7.3 Radixsort

$\mathcal{S} = [1, ...5]$, $d = 4$, $|\mathcal{S}| = \mathcal{S}^4 = 625$

	A_i			
Index i				
1	1	2	3	4
2	2	3	1	2
3	5	1	4	1
4	2	3	1	3
5	3	4	2	4
i	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4

Sortieren nach erster Stelle

	A_i			
Index i				$\downarrow$
1	5	1	4	1
2	2	3	1	2
3	2	3	1	3
4	1	2	3	4
5	3	4	2	4
i	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4

Sortieren weiter mit zweiter Stelle

	A_i			
Index i			$\downarrow$	
1	2	3	1	2
2	2	3	1	3
3	3	4	2	4
4	1	2	3	4
5	5	1	4	1
i	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4

Sortieren weiter mit dritter Stelle

	A_i			
Index i		$\downarrow$		
1	5	1	4	1
2	1	2	3	4
3	2	3	1	2
4	2	3	1	3
5	3	4	2	4
i	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4

Sortieren weiter mit vierter Stelle

	A_i			
Index i	$\downarrow$			
1	1	2	3	4
2	2	3	1	2
3	2	3	1	3
4	3	4	2	4
5	5	1	4	1
i	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4

7.4 Das Auswahlproblem

7.4.1 Select-Algorithmus Vorgetanzt :D

$l = 11$

15	13	12	1	3	6	2	7	11	8	4	9	5	10	14
$m_1 = 12$					$m_2 = 7$					$m_3 = 9$				

$m = 9$

$$K = (1, 3, 6, 2, 7, 8, 4, 5) \qquad n' = 8$$
$$M = (9) \qquad n'' = 1$$
$$G = (\underbrace{15, 13, 12, 11, 10|14}_{m_1=12, m_2=14, l=11-9=2}) \qquad n''' = 6$$

Wir betrachten weiter G

$$K = (\underbrace{11, 10}_{m=10}) \qquad n' = 2$$
$$M = (12) \qquad n'' = 1$$
$$G = (15, 13, 14) \qquad n''' = 3$$

Wir betrachten weiter k.

$$K = ()$$
$$M = (10)$$
$$G = (11)$$

8 Tafelanschrieb 05.05.2022

8.1 Select Beweis

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{, wenn } n = 1 \\ O(n) + T(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1) + \max\{T(|K|), T(|G|)\} & \text{, sonst} \end{cases}$$
$$\leq \begin{cases} O(1) & \text{, wenn } n = 1 \\ c' \cdot n + T(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1) + T(\frac{7n}{10} + \frac{7}{2}) & \text{, sonst} \end{cases}$$

$m_i < m \Rightarrow$ Alle Elemente aus $T_i < m$
$m_i > m \Rightarrow \leq 2$ Elemente $< m$
$n' \leq 5N' + 2N'''$
$n''' \leq 2N' + 5N'''$

$$N' \leq \frac{N}{2} \leq \frac{1}{2}(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1)$$
$$N''' \leq \frac{N}{2} \leq \frac{1}{2}(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1)$$

$$n' \leq 7(\frac{1}{2}(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1)) = \frac{7n}{10} + \frac{7}{2}$$
$$n''' \leq 7(\frac{1}{2}(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1)) \leq \frac{7n}{10} + \frac{7}{2}$$

z.Z:

$$T(n) = O(n)$$

$$T(n) = O(n)$$
$$T(n) = \begin{cases} T(\frac{7n}{10} + \frac{7}{2}) + T(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1) + c'n \\ O(1) \end{cases} \leq c \cdot (n+1)$$

$$n_0, c, T(n) \leq c(n+1), \forall n \geq n_0, n_0 = 90, c = 20c'$$

Induktionsanfang: $T(n_0) \leq c \cdot n_0$
Induktionsvoraussetzung: $T(n') \leq cn, \forall n' \leq n$
Induktionsschritt: Zeige $T(n) \leq cn$

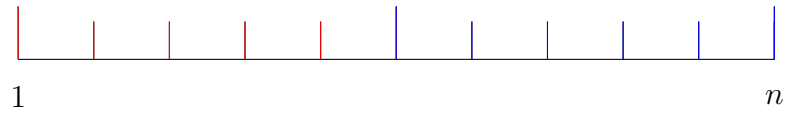
$$T(n) \leq T(\frac{7n}{10} + \frac{7}{2}) + T(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1) + c'n$$

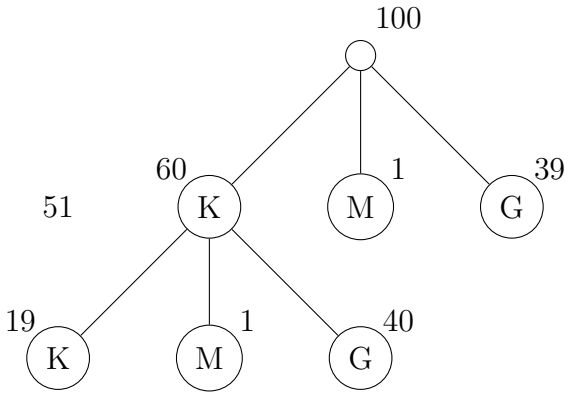
$$
\begin{aligned}
&\leq c(\frac{7n}{10}+\frac{7}{2})+c\cdot(\lfloor\frac{n}{5}\rfloor+1)+c'n\\
&\leq c\cdot(\frac{7n}{10}+\frac{7}{2}+\lfloor\frac{n}{5}\rfloor+1)+c'n\\
&\leq c\cdot(\frac{9n}{10}+\frac{9}{2})+c'n=\frac{9nc}{10}+\frac{9}{2}c+c'n\\
&=cn+\underbrace{(-\frac{1}{10}cn+\frac{9c}{2}+c'n)}_{\leq 0!}\overset{!}{\leq} cn
\end{aligned}
$$

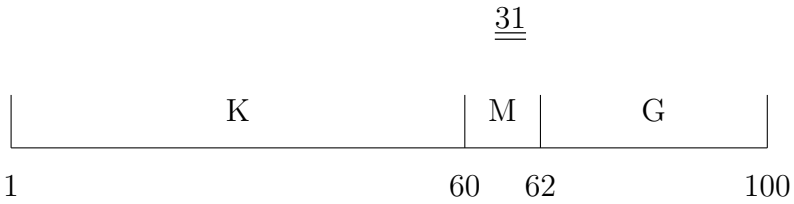
$$
\begin{aligned}
\underbrace{-\frac{1}{10}cn+\frac{9c}{2}}+c'n &\leq 0 && \Leftrightarrow\\
c'n &\leq \frac{cn}{10}-\frac{9c}{2}=n(\frac{c}{10}-\frac{9c}{2n}) && \Leftrightarrow\\
c' &\leq \frac{c}{10}-\frac{9c}{2n}=c(\frac{1}{10}-\frac{9}{2n})=c\cdot(\frac{n-45}{10n}) && \Leftrightarrow\\
\underbrace{c'}_{\text{Konstante}}\cdot(\frac{10n}{n-45}) &\leq c && \Leftrightarrow\\
10c'(\frac{n}{n-45}) &\leq c && \Leftrightarrow\\
10c'\underbrace{(\frac{45}{n-4}+1)}_{\text{mit } n_0\leq 90,\leq 1} &\leq c && \Leftrightarrow\\
20c' &\leq c \Rightarrow c=20c' && \square
\end{aligned}
$$

9 Tafelanschrieb 10.05.2022

9.1 Wiederholung Auswahlproblem







9.2 Coding Session

Hier habe ich nicht mitgeschrieben, da der Code später im Git-Repo des Professors hochgeladen wird.

9.3 Hashing

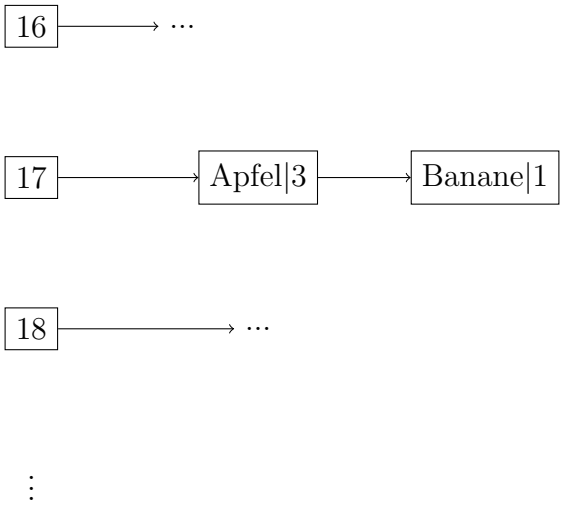
Array:

In der Informatik	Informatik	2
geht es um Algoirithmen	Algorithmus	1
und ihre Laufzeit	Laufzeit	1
...Algorithmen	⋮	

f : Wörter $\to \{1, ..., m\}$

m „möglichst klein“

$f(\text{Apfel}) = f(\text{Banane}) = 17$


16
17
Apfel|3
Banane|1
18

10 Tafelanschrieb 12.05.2022

10.1 Vortrag über Versionskontrollsysteme

Git ist toll :D
Verwende es und lerne es du wirst es zu 100% in der Zukunft verwenden ;-)

10.2 Hashing

561 multiplikatives Inverses *mod* 790

- Suche r sodass $561 \cdot r = 1 \mod 790$

$\Rightarrow$ Suche $n, s \in \mathbb{N} : 561 \cdot r + 790 \cdot s = 1$

$$
\begin{aligned}
790 &= 1 \cdot 561 + 229 \\
561 &= 2 \cdot 229 + 103 \\
229 &= 2 \cdot 103 + 23 \\
103 &= 4 \cdot 23 + 11 \\
23 &= 2 \cdot 11 + \underbrace{\textcircled{1}}_{GGT(790,561)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= 23 - 2 \cdot 11 \\
&= 23 - 2 \cdot (103 - 4 \cdot 23) = -2 \cdot 103 + 9 \cdot 23 \\
&= -2 \cdot 103 + 9 \cdot (229 - 2 \cdot 103) = -20 \cdot 103 + 9 \cdot 229 \\
&= -20 \cdot (561 - 2 \cdot 229) + 9 \cdot 229 = 49 \cdot 229 - 20 \cdot 561 \\
&= 49 \cdot (790 - 1 \cdot 561) - 20 \cdot 561 = 49 \cdot 790 - 69 \cdot 561 \\
&= 49 \cdot 790 + \underline{\underline{(-69)}} \cdot 561
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= -69 mod 790 \\
r &= -69 + 790 mod 790 \\
&= 7 \cdot 21 mod 790
\end{aligned}
$$

r und z werden Bezout-Multiplikatoren genannt.