Grundlagen

Aussagenlogik

äquivalente Aussagen

$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ dop. Negation
$A \wedge (A \vee B)$ Absorption
Kommutativität
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

de Morgan
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neq B$

Assoziativität
$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Distributivität
$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

All- und Existenzquantor

All-Quantor: $\forall$
„Für alle n aus M gilt: $A(n)$“
$\forall n \in M : A(n)$
Existenz-Quantor:
„Es existiert mindestens ein n aus M, für das gilt: $A(n)$“
$\exists n \in M : A(n)$

Mengen

Mengenverknüpfungen

Vereinigung
$A \cup B := \{m | m \in A \vee m \in B\}$
Schnitt
$A \cap B := \{m | m \in A \wedge m \in B\}$
Differenz
$A \backslash B := \{m | m \in A \wedge m \notin B\}$
Kartesisches Produkt
$A \times B := \{(m, n) | m \in A \wedge n \in B\}$
Verallgemeinerung Vereinigung
$\bigcup_{M \in \mathcal{N}} M := \{m | \exists M \in \mathcal{N} : m \in M\}$
Verallgemeinerung Schnitt
$\bigcap_{M \in \mathcal{N}} M := \{m | \forall M \in \mathcal{N} : m \in M\}$
Komplement$A^c = U \backslash A$

Beweistechniken

Direkter Beweis

Folgerungen Umformungen von bereits bewiesenen Aussagen.
Bei Äquivalenzen müssen beide Richtungen gezeigt werden:
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

Indirekter Beweis - Kontraposition

Beweis erfolgt indem dei Kontraposition gezeigt wird (rechte Seite)
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neq B \Rightarrow \neq B)$

Widerspruchbeweis

Zeige, dass die gegenteilige Aussage zu einer Falschen Aussage führt. Ist dies der Fall, so gilt A.
$((\neg A \Rightarrow C) \wedge \neq C) \Rightarrow A$

Vollständige Induktion

1. IA: Beweise $A(n = 1)$
2. IV: Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$
3. IS: Beweise $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$

Zahlenmengen

Körper

Hier könnten vielleicht noch die Körperaxiome und die Folgerungen daraus hin.

Bruchrechenregeln

a. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
b. $\frac{ae}{be} = \frac{a}{b}$
c. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
d. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{e}{d}} = \frac{ad}{be}$

Folgerungen für Ungleichungen

In einem geordneten Körper K gilt für beliebige Elemente $a, b, c, d \in K$ und $x \in K \backslash \{0\}$

a. $(a < b) \vee (a > b) \vee (a = b)$
b. $(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow a < c$
c. $(a < b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow a + c < b + d$
d. $(a < b) \wedge (x > 0) \Rightarrow ax < bx$
   $(a < b) \wedge (x < 0) \Rightarrow ax > bx$
e. $a < b \Leftrightarrow a > -b$
f. $x^2 := x \cdot x > 0$
g. $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$

Betrag und Folgerungen

$$|x| := \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

Es gelten folgende Regeln:

a. $|x| \geq 0 \wedge (|x| = \Leftrightarrow x = 0)$
b. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
c. $(|x| < \varepsilon) \Leftrightarrow (x < \varepsilon) \wedge (-\varepsilon < x) \Leftrightarrow (-\varepsilon < x < \varepsilon)$
   $(|x| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow (x \leq \varepsilon) \wedge (-\varepsilon \leq x) \Leftrightarrow (-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon)$
d. $|x + y| \leq |x| + |y|$(Dreiecksung.)
e. $||x| - |y|| \leq |x - y|$(umgekehrte.D.)

Metrik

Sei A eine Menge. Wir nennen eine Abbildung $d : A \times A \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf A, wenn für alle $x, y, z \in A$ drei Eigenschaften erfüllt sind:

a. Positive Definitheit
$$d(x, y) > 0 \text{ für } x \neq y$$
$$d(x, y) = 0 \text{ für } x = y$$
b. Symmetrie $d(x, y) = d(y, x)$
c. Dreiecksungleichung
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Beispielmetrik: $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$

Gaußklammern

Sei $x \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$:

a) $m \leq x < m + 1$
b) $n - 1 < x \leq n$

$\lfloor x \rfloor := m \qquad \lceil x \rceil := n$

Modulo

Sei $m, r, z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$: $z = mn + r$
$r = z \mod n$

Komplexe Zahlen

Definition

$\mathbb{C} := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ Für $z = (a, b)$ ist $Re(z) := a$ der Realteil und $Im(z) := b$ der Imaginärteil

Rechnen mit $\mathbb{C}$

$z_1 + z_2 := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
$z_1 \cdot z_2 := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$
Nullelement $(0, 0)$
Einselement $(1, 0)$
$-(a, b) = (-a, -b)$(Negativelement)
$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ (Inverses Element)

Konjugation und Betrag

$\bar{z} := (a, -b) = a - ib$
$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Konjugationseigenschaften und Metrik

$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Summen, Produkte, ...

Def. Summe, Produkt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m + a_{m+1} + & \\ ... + a_n & m \leq n \\ 0 & \text{,sonst} \end{cases}$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m \cdot a_{m+1} \cdot & \\ ... \cdot a_n & m \leq n \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Potenzen

$x^n := \prod_{k=1}^{n} x$

Für $x \neq 0$: $x^{-n} := \frac{1}{x^n} \qquad x^0 := 1$

Rechenregeln

$a^n a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{nm}$
$a^n b^n = (a \cdot b)^n$

Fakultät

$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \qquad 0! = 1$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = & \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 1} & n \geq k \\ 0 & n < k \end{cases}$$

$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 : \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Binomischer Lehrsatz

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Bernoullische Ungleichung

$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

Satz 2.49

$\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und $\forall n \in N$ mit $n \geq 2$ gilt $(1 + x)^n \geq \frac{n^2 x^2}{4}$

Folgen

Definition

Eine Folge ist eine Abbildung, bei der jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird. Schreibweise: (a_n) oder $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Def. Konvergenz, Divergenz

Folge (a_n) ist konvergent, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

1. nicht konvergent $\Rightarrow$ divergent
2. Falls (a_n) gegen a konvergiert, so ist a Grenzwert von (a_n). Schreibweise: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$
3. Falls $\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Rightarrow$ Nullfolge

Eindeutigkeit Grenzwerts

Der Grenzwert einer Folge ist, falls er existiert eindeutig!

Divergenz inverser Nullfolge

Ist Folge (a_n) Nullfolge mit $a_n \neq 0$, dann ist Folge $(b_n) = \frac{1}{a_n}$ divergent.

Bestimmte Divergenz

Folge (a_n) ist bestimmt divergent gegen $\infty / -\infty$, wenn $b_n = \frac{1}{a_n}$ eine Nullfolge ist und $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \lessgtr 0$. Wir schreiben:
$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty / -\infty$

Beschränkte Folge

Folge (a_n) nach oben (unten) beschränkt, wenn Menge $M = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (unten) beschränkt ist.
Ist (a_n) nach oben und unten beschränkt so heißt sie beschränkt.

Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränkt

Jede Konvergente Folge ist beschränkt.

Monotonie

Folge (a_n) heißt:

- monoton wachsend: $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend: $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend: $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend: $a_n > a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

Monoton + Beschränkt $\Rightarrow$ Konvergenz

Jede beschränkte montone FOlge ist konvergent.

a. (a_n) monoton wachsend + oben beschränkt $\Rightarrow$ konvergent. Es gilt $\lim_{n \to \infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
b. (a_n) monoton fallend + unten beschränkt $\Rightarrow$ konvergent. Es gilt $\lim_{n \to \infty} a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

Rechenregeln

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen und $c \in \mathbb{R}$

a. $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$
b. $c \cdot (a_n) = (c \cdot a_n)$
c. $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$
d. $\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, falls $b_n \neq 0$
e. $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} (a_n) + \lim_{n \to \infty} (b_n)$
f. $\lim_{n \to \infty} c \cdot (a_n) = c \cdot \lim_{n \to \infty} (a_n)$
g. $\lim_{n \to \infty} (a_n) \cdot (b_n) = \lim_{n \to \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \to \infty} (b_n)$
h. $\lim_{n \to \infty} \frac{(a_n)}{(b_n)} = \frac{\lim_{n \to \infty} (a_n)}{\lim_{n \to \infty} (b_n)}$, falls $b_n \neq 0$ und $\lim_{n \to \infty} b_n \neq 0$

Größenvergl. konv. Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $(a_n) \leq (b_n)$ Dann gilt: $\lim_{n \to \infty} (a_n) \leq \lim_{n \to \infty} (b_n)$

Sandwich-Theorem

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen, für die $\exists n_0$, sodass $n \geq n_0$ gilt: $(a_n) \leq (b_n) \leq (c_n)$.
Wenn $(a_n), (c_n)$ konvergent und gilt $\lim_{n \to \infty} (a_n) = \lim_{n \to \infty} (c_n)$, dann ist auch (b_n) konvergent und es gilt:
$\lim_{n \to \infty} (a_n) = \lim_{n \to \infty} (b_n) = \lim_{n \to \infty} (c_n)$

Teilfolgen

Grenzwert Teilfolge

Jede Teilfolge (a_{n_k}) einer konvergenten Folge (a_n) ist konvergent. Es gilt: $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = \lim_{n \to \infty} a_n = a$

Divergenz durch Teilfolge

Besitzt eine FOlge (a_n)

a. eine divergente Teilfolge
b. zwei konvergente Teilfolgen $(a_{n_k}), (a_{n_l})$ mit $\lim_{k \to \infty} \neq \lim_{l \to \infty} (a_{n_l}$

so ist die Folge divergent.

Satz 3.29

Jede Folge enhtält eine monotone Teilfolge

Balzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge.

Häufungspunkt

Für (a_n) heißt a Häufungspunkt, wenn Teilfolge (a_{n_k}) existiert und $\lim_{k \to \infty} (a_{n_k}) = a$

Cauchy-Folge

(a_n) heißt Cauchy-Folge, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : |a_n - a_{n_0} < \varepsilon$

Satz 3.34

Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Das bedeutet:

a. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge
b. Jede Cauchy-Folge ist konvergent

Intervallle

Kompaktheit

Intervall I heißt kompakt, wenn es abgeschlossen und beschränkt ist.

Intervalschachtelung

Eine FOlge (I_n) von abgeschlossenen Intervallen I_n heißt Intervallschachtelung, wenn gilt:

- $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subset I$
- $\lim_{n \to \infty} |I_n| = 0$

Konvergenz Intervalschachtelung

Für jede Intervallschachtelung (I_n) existiert genau ein eindeutiges $x \in \mathbb{R}$, für das gilt: $x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$
Wir sagen auch: die Intervallschachtelung konvergiert gegen x.

Reihen

Def. Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + ...$ eine Reihe. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ die n-te Teilsumme der Reihe.
Folge der Teilsummen konvergent $\Rightarrow$ Reihe konvergent. Sonst divergent.

Cauchy-Konvergenzkrit.

Reihe konvergiert g.d.w. gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq m \geq n_0 : \left|\sum_{k=m}^{n} < \varepsilon\right|$

Notw. Konvergenzkrit.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergente Reihe $\Rightarrow$ Folge (a_k) ist Nullfolge $\Rightarrow \lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

Teilsummenbeschränktheit

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ konvergiert g.d.w. Folge der Teilsummen beschränkt.

Rechenregeln konv. Reihen

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen:

a. $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ konvergent. Für die Grenzwerte gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k$ konvergent für $c \in \mathbb{R}$. Es gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

c. $\forall l \in N \ l > 0 : \sum_{k=l}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert

d. Gilt $a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Def. absolute Konvergenz

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abs. konv. $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv.

Reihenumordnung

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abs. konv. $\Rightarrow$ Jede Umordnung der Glieder konvergiert gegen den selben Grenzwert.

abs. Konv. $\Rightarrow$ Konvergenz

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abs. konv. $\Rightarrow$ konvergent

Cauchy-Produkt

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ abs. konverg..Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$ abs. konv.

Konvergenzkriterien

Leibnitz-Kriterium

(a_k) monoton fallende Folge mit $\forall k \in \mathbb{N} a_k \geq 0$ mit $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Majorantenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent mit $\forall k \in \mathbb{N} : c_k \geq 0$. Wenn für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \exists k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\forall k \geq k_0$ gilt $|a_k| \leq c_k$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Minorantenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent mit $\forall k \in \mathbb{N} : c_k \geq 0$. Wenn für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \exists k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\forall k \geq k_0$ gilt $a_k \geq c_k$, dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Wurzelkriterium

1. Wenn festes $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{|a_k|} \leq q$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut

2. $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Limesform:
Existiert $a = \lim_{k=\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, dann gilt:

- $a < 1 \Rightarrow$ absolut konvergent
- $a > 1 \Rightarrow$ divergent
- $a = 1 \Rightarrow$ unwissend

Quotientenkriterium

a. Wenn festes $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\forall k \geq k_0 : a_k \neq 0 \wedge \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

b. $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\forall k \geq k_0 : a_k \neq 0 \wedge \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$, dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Limesform:
Existiert $a = \lim_{k \to \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$, dann gilt:

- $a < 1 \Rightarrow$ konvergiert
- $a > 1 \Rightarrow$ divergiert
- $a = 1 \Rightarrow$ unwissend

Potenzreihen

Definition

Folge (a_k), $x, x_0 \in \mathbb{R}$, dann Potenzreihe $P(x, x_0)$ mit Entwicklungspunkt x_0 definiert als: $P(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$. Häufig $x_0 = 0$, dann $P(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$.

Konvergenz von Potenzr.

a. $P(x, x_0)$ konvergent in $c \Rightarrow$ konvergiert absolut $\forall x : |x - x_0| < |c - x_0|$

b. Konvergiert $P(x, x_0)$ in c nicht absolut, dann divergiert $P(x, x_0) \forall |x - x_0| > |c - x_0|$

Def. Konvergenzradius

Sei $P(x, x_0)$ Potenzreihe. $\exists r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dass $P(x, x_0) \ \forall |x - x_0| < r$ konvergiert und $\forall |x - x_0| > r$ divergiert, dann ist r der Konvergenzradius.

Exponentialreihe

Definition

$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Es gilt $e := \exp(1)$.

Konvergenz von Exp.Reihen.

$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x)$ absolut konvergent.

Eigenschaften

a. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

b. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

c. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$

d. $\forall n \in \mathbb{Z} : \exp(n) = e^n$

exp als Folgengrenzwert

Es gilt $\forall x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \to n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Für $x = 1$ gilt besonders: $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Funktionen

Definition

A, B nichtleere Mengen.Funktion f ordnet jedem $x \in A$ eindeutig $y \in B$ zu. Schrift:$A \to B$. Zugeordnetes Element auch als $f(x)$.
A Definitionsbereich
B Bild-/Zielbereich
$f(A) \subseteq B$ Bildmenge/Bild von f

Injektiv, ...

1. Injektiv: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
2. Surjektiv: $\forall y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y$
3. Bijektiv: Injektiv + Surjektiv

Rechenregeln

Sei $f, g : A \to \mathbb{R}$ Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$
- $(cf)(x) := cf(x)$
- $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$
- Sei $A' := \{x \in A | g(x) \neq 0\}$, dann Funktion $\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}$ definiert: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$
- $f(A) \subseteq B \Rightarrow (g \circ f)(x) := g(f(x))$

Umekehrfunktion

$f^{-1} : B \to A$ Umkehrfunktion von f, falls:

- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A$
- $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in B$

Bijektiv-Umkehrfunktion

Für $f : A \to B$ existiert f^{-1}, g.d.w. f bijektiv.

Monotonie Umkehrfunktion

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to B$ Funktion mit $B := f(A) \subseteq \mathbb{R}$. f streng monoton $\Rightarrow f^{-1} : B \to A$ existiert + streng mon. (im g. Sinne)

Beschränktheit

$f : A \to B$ heißt nach oben/unten Beschränkt, wenn Bildmenge $f(A)$ oben/unten beschränkt.

Monotonie

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, dann

- mon. wachsend: $f(x) \leq f(x')$
- streng mon. wachs.: $f(x) < f(x')$
- mon. fallend: $f(x) \geq f(x')$
- streng mon. fall.: $f(x) > f(x')$

$\forall x, x' \in A$ mit $x < x'$.

Berührpunkt

$A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, Dann ist a Berührpunkt von A, falls $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists b \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) : b \in A$

Grenzwerte Funktionen

Sei $f : A \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ Berührpunkt von A. $\lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$.
Analog definieren wir: $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$, wenn A oben/unten unbeschränkt und $\forall (x_n)$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = \pm\infty$ gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$

1. Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{n \searrow a} f(x) = x$, wenn a Berührpunkt von $A \cap (a, \infty)$ und $\forall \ (x_n)$ mit $x_n \in A$, $x_n > a$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$
2. Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{n \nearrow a} f(x) = x$, wenn a Berührpunkt von $A \cap (a, \infty)$ und $\forall \ (x_n)$ mit $x_n \in A$, $x_n < a$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$

Satz 4.20

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$

Stetigkeit

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ Funktion und $a \in A$. f stetig in a, falls $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
f stetig, falls f in jedem Punkt aus A stetig.

ε-δ-Kriterium

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ funktion. f ist g.d. in $a \in A$ stetig, wenn: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \varepsilon$

Operationen Stetigkeit

$f, g : A \to \mathbb{R}$ in $a \in A$ stetig und $c \in \mathbb{R}$. Dann auch folgendes in a stetig:

a. $f + g : A \to \mathbb{R}$
b. $c \cdot f : A \to \mathbb{R}$
c. $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$
d. $\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}$, falls $g(a) \neq 0$
e. $g \circ f : A \to \mathbb{R}$, falls f in a und g in $f(a) = b$ stetig

Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$, dann $\exists x \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.
Allgemeiner: $\forall y \in \mathbb{R}$: Wenn $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, dann $\exists d \in (a, b) : f(d) = y$

Umekehrfunk. stet. Funk.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig + streng monoton. Dann bildet f I bijektiv auf $f(I)$ ab und $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Min,Max-kompakt. Interv.

Auf $[a, b]$ jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und nimmt Min/Max an.

Gleichmäßige Stetigkeit

$f : A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig wenn: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
$f : A \to \mathbb{R}$ auf $[a, b] \in A$ stetig $\Rightarrow$ dort auch gleichm. stetig.

Polynom

Polynomfunktion: $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$. $Grad(p) = \max(n)$, wo $a_n \neq 0$

Rationale Funktion

p, q Polynome und $A = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$, dann ist $r : A \to \mathbb{R}$ mit $r(x) = \left(\frac{p}{q}\right)(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ rationale Funktion

Polynomdivision

$$\begin{array}{l} \left(\ \ x^2 - x + 1\right) : (x - 1) = x + \dfrac{1}{x - 1} \\ \underline{\ -x^2 + x\ } \\ \qquad\qquad 1 \end{array}$$

Linearfaktoren

Polynom $p(x)$ genau dann ohne Rest durch $q(x) = x - x_1$ teilbar, wenn $x_1 \in \mathbb{R}$ Nullstelle von $p(x)$.

Exponentialfunktionen

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$: $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Eigenschaften exp-Funktion

a. $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
b. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
c. $\exp(x) > 0$
d. $\forall n \in \mathbb{Z} : \exp(n) = e^n$
e. $\exp(x) = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$
f. streng mon. wachsend + bijektiv
g. $\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$

1. Satz vom Wachstum

Für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

- $\lim_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$
- $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) x^n = 0$

Logarithmus

Umkehrfunktion von $\exp(x)$ ist natürlicher Logarith. $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

Eigenschaften $\ln(x)$

a. $\ln(\exp(x)) = \exp(\ln(x)) = x$
b. $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$
c.
$$\ln(x) \begin{cases} < 0 & , x \in (0, 1) \\ = 0 & , x = 1 \\ > 0 & , x > 1 \end{cases}$$
d. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
e. $n \in \mathbb{Z} : \ln(x^n) = n \ln(x)$
f. $\ln(x)$ ist stetig

2. Satz vom Wachstum

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0$. $\ln(x)$ wächst schwächer als $\sqrt[n]{x}$

allgemeine Exponentialfunktion

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$.$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exp_a(x) := \exp(x \ln(a))$. Schreiben auch a^x statt $\exp_a(x)$.

Eigenschaften allg. Potenzen

a. $a^x = \exp_a(x)$ stetig $\forall x \in \mathbb{R}$
b. $\forall n \in \mathbb{Z}$: $\exp_a(x) = a^n$
c. $a^{x+y} = a^x a^y$
d. $(a^x)^y = a^{xy}$
e. $a^x b^x = (ab)^x$
f. $\forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \backslash \{1\} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Log zu allg. Basen

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0} \backslash \{1\}$, dann $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : \log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Funktionssymmetrie

- achsen(gerade): $f(-x) = f(x)$
- punkt(ungerade): $f(-x) = -f(x)$

Hyperbolische Funktionen

- $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x}$

Eigensch. hyperb. Funkt

a. $\exp(x) = \cosh(x) + \sinh(x)$
b. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
c. $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
d. $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
e. $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
f. $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$

komplexe exp-Funktion

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Trigonom. Funktionen

$\sin / \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tan : \{x | \cos(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$

- $\cos(x) := \mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- $\sin(x) := \mathrm{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$
- $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{ie^{-ix} - ie^{ix}}{e^{-ix} + e^{ix}}$

Eigenschaften trig. Funkt.

a. $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$
b. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
c. $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$
d. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
e. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
f. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
g. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

Abschätzung Sin-Cos

Für $x \in (0, 2]$ gilt:

- $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$
- $x - \frac{x^3}{3!} < \sin(x) < x$

Folgerung Def. Pi

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$	0

Allgemein gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:
$\cos(x + \pi/2) = \in (x + \pi) = -\sin(x)$
$\cos(x + 2\pi) = \sin(x + \pi/2) = \cos(x)$
$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

Periodische Funktionen

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodische Funktion, wenn $\exists p > 0$, sodass $f(x) = f(x+p), \forall x \in \mathbb{R}$.
$\min(p) \in \mathbb{R}_{>0}$ heißt Periode.

Polarkoordinaten $\mathbb{C}$

$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists \varphi \in \mathbb{R}$, sodass $z = |z|e^{i\varphi} = |z|\cos(\varphi) + i|z|\sin(\varphi)$. Für $z \neq 0$ ist φ bis auf eine Addition mit Vielfachen von 2φ eindeutig. Das Paasr $(|z|, \varphi)$ bezeichnet wir als Polarkoordinaten von z und φ als Argument von z.

Differentialrechnung

Definition

Sei $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt in a differenzierbar, falls der Grenzwert $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existiert.
Alternative:
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
$\forall a \in A$ Grenzwert existiert $\Rightarrow f$ diffbar.

Diffbar $\Rightarrow$ Stetig

$f : A \to \mathbb{R}$ in $a \in A$ differenzierbar $\Rightarrow$ in a stetig

Satz 5.5

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar für $c \in (a,b)$ g.d.w. links- + rechtsseitiger Grenzwert existieren und gleich sind.
$f'_-(c) = \lim_{x \nearrow c} \frac{f(x) - f(C)}{x - c} = f'_+(c) = \lim_{x \searrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Dann gilt: $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$

Ableitungsregeln

$f, g : A \to \mathbb{R}$ in $a \in A$ diffbar.

a. Linearität
$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$
b. Produktregel
$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
c. Quotientenr.: $g(x) \neq 0, \forall x \in A$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$
d. Kettenregel:
$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Ableitung Umekehrf.

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig streng monoton und $g = f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ mit $J = f(I)$. f in $a \in I$ diffbar und $f'(a) \neq 0 \Rightarrow g$ in $b = f(a)$diffbar und es gilt: $g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$

Ableitung höherer Ord.

$f^{(k+1)}(a) := \left(f^{(k)}(a)\right)'$, falls $f^{(k)}(a)$ in $a \in A$ existiert. f ist dann k-mal (stetig) differenzierbar oder f ist C^k-stetig

Lokale Extrema

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x \in (a,b)$ lok. Min/Max $f(x)$, wenn $\exists \varepsilon > 0\ \forall y, |x - y| < \varepsilon : f(a) \leq\geq f(y)$

Notw. Bed. lok. Extrema

$f : (a,b) \to \mathbb{R} : f'(x) = 0$

Hin. Bed. lok. Extrema

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 2 mal diffbar in $x \in (a,b)$. $f''(x) > 0$: Minimum, $f''(x) < 0$: Maximum

Monoton. und Ableitung

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar in (a,b), dann:

a. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ mon. wachs.
b. $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng mon. wach.
c. $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ mon. fall.
d. $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ streng mon. fall.

Satz von Rolle

Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (auf (a,b) diffbar) mit $f(a) = f(b)$, dann: $\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$

1. Mittelwertsatz

Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (auf (a,b) diffbar) mit $f(a) = f(b)$, dann: $\exists c \in (a,b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

2. Mittelwertsatz

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$, diffbar in (a,b). Sei $\forall x \in (a,b) : g'(x) \neq 0$. Dann $g(a) \neq g(b)$ und $\exists c \in (a,b)$ mit $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Satz 5.21

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar und im Punkt $x \in (a,b)$ $n+1$-mal diffbar. Falls $f'(x) = f^{(2)}(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = 0$ und $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, dann besitzt f in x

- streng. lok. Min., falls n ungerade und $f^{(n+1)}(x) > 0$
- streng. lok. Max., falls n ungerade und $f^{(n+1)} < 0$
- kein Extremum, falls n gerade

Konvexität

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn $\forall x_1, x_2 \in (a,b) \forall \lambda \in (0,1)$ gilt $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$. Konkav wenn $-f$ konvex.

Satz 5.23

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b) : f''(x) \geq 0$

Wendepunkt

f in $x \in (a,b)$ Wendepunkt, wenn $\exists (\alpha, x), (x, \beta)$ für die gilt:

1. f in (α, x) streng konvex + in (x, β) streng konkav
2. f in (α, x) streng konvex + in (x, β) streng konvex

Satz 5.26

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 3 mal diffbar: f' lok. Extremum in $x \Rightarrow$ Wendepunkt

- Not. Bed.: $f''(x) = 0$
- Hin. Bed.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

Uneigentlicher Grenzwert

$f : A \to \mathbb{R}$ und a Häufungspunkt. Falls $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$, sodass $f(x) > K$ für $|x - a| < \delta$, so $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

L'Hospital

f, g diffbar und $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Und a oder b gilt:

a. $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow g(x)} = 0$
b. $\lim_{x \searrow a} |f(x)| = \lim_{x \searrow a} |g(x)| = \infty$

Dann gilt: $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Analog für $\lim_{x \nearrow b}$ und $a, b = \pm\infty$.

Satz von Taylor

Tylorsche Formel

$f : A \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diffbar. $T_n, R_n : A \to \mathbb{R}$ fü rbeliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in A$ definiert als $T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ und $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$. Dann $\exists y \in [x, x_0] \forall x \in A \setminus \{x_0\}$, sodass $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

Taylorreihe/-polynom

$f : A \to \mathbb{R}$ beliebig oft diffbar in $x_0 \in A$. Dann heißt $T[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ Taylorreihe von f im Punkt x_0.
Die n-te Teilsumme der Taylorreihe $T_n[f, x_=](x)$ heißt Taylorpolynom vom Grad n mit Entwick.punkt x_0:
$T_n[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

Integralrechnung

Zerlegung

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ und endliche Anzahl Punkte $x_0, \ldots, x_n$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Dann heißt $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ Zerlegung von $[a,b]$ und $|Z| := \max\{x_i - x_{i-1} | i = 1, \ldots, n\}$ ist Feinheitsmaß von Z. Zerlegung heißt äquidistant, wenn die Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \ldots, n$ alle gleich groß sind.

Treppenfunktion

$Z = (x_0, \ldots, x_n)$ Terlegung von $[a,b]$, dann heißt $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion, wenn sie auf jedem Teilintervall (x_{k-1}, x_k) konstant ist. $\mathcal{T}[a,b]$ Menge aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$

Integral für Trep.

$\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$ Treppenfunktion bezüglich $Z = (a = x_0, \ldots, x_n = b)$ und seien $\varphi(x) = c_k$ konstante Funktionsabschnitte von φ für $x \in (x_{k-1}, x_k)$. Def.: Integral von φ auf $[a,b]$ als: $\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}$.

Monoton. Treppen.

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$, dann $\forall x \in [a,b] : \varphi(x) \leq \psi(x) \Rightarrow \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$

Einschließen Treppen.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\bar{S}(Z, f)$ und $\underline{S}(Z, f)$ existieren mit $\bar{S}(Z, f) - \underline{S}(Z, f) \leq \varepsilon$

Ober-/Untersumme

Obersumme: $\bar{S}(Z, f) := \int_a^b \bar{\varphi}(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k(x_k - x_{k-1}$

Untersumme: $\underline{S}(Z, f) := \int_a^b \underline{\varphi}(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \underline{c}_k(x_k - x_{k-1}$

Ober-/Unterintegral

Oberintegral: $\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{\bar{S}(Z, f)\}$

Unterintegral: $\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{\underline{S}(Z, f)\}$

Riemann-Integral

f ist integrierbar, wenn $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Integrla von f ist dann $\int_a^b f(x)dx := \int_a^b f(x)dx$

Stetig $\Rightarrow$ intbar

f auf $[a,b]$ stetig $\Rightarrow f$ auf $[a,b]$ intbar.

Monoton $\Rightarrow$ intbar

f monoton auf $[a,b] \Rightarrow f$ auf $[a,b]$ intbar

Verfeinerung

Z, Z' Zerlegungen. Verfeinerung: $\tilde{Z}$ enhtält alle Elemente von Z auf gleichem Intervall
Überlagerung: $\hat{Z} = Z + Z'$

Zerlegungswechsel

f auf $[a,b]$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K$ und Z Zerlegung von $[a,b]$ mit Feinheitsmaß $|Z|$. Zerlegung $\tilde{Z}$ entstehe aus Z durch Hinzunahme eines zusätz. Punkts. Dann gilt:

a. $\underline{S}(Z, f) \leq \underline{S}(\tilde{Z}, f) \leq \underline{S}(Z, f) + 2K|Z|$
b. $\bar{S}(Z, f) \geq \bar{S}(\tilde{Z}, f) \geq \bar{S}(Z, f) - 2K|Z|$

Integralwertbestimmung

$f : [a,b]$ beschränkt und (Z_n) Folge von Zerlegungen mit $\lim_{n \to \infty} |Z_n| = 0$. Dann gilt:

a. $\lim_{n \to \infty} \underline{S}(Z_n, f) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$
b. $\lim_{n \to \infty} \bar{S}(Z_n, f) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

Rieman. Zwischensumme

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und (Z_n) Zerlegungsfolge mit $\lim_{n \to \infty} |Z_n| = 0$. $\forall Z_n = (x_0, \ldots, x_m)$ sei $\varphi_n \in \mathcal{T}[a,b]$ Treppenfunktion mit $\varphi_n(x) := f(\zeta_k)$ für $x \in [x_{k-1}, x_k)$ mit beliebigen $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ und $\varphi_n(b) = f(b)$. Dann konvergiert (S_n) der Riemannschen Zwischensummen $S_n := \int_a^b \varphi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$ gegen Integral: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} S_n$.

Integraleigeschaften

f, g auf $[a,b]$ integrierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

a. Linearität: $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$
b. Monotonie: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

c. Beschränktheit: $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx+$

d. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

e. $\int\limits_b^a f(x)dx := -\int\limits_a^b f(x)dx$

f. $\int\limits_c^c f(x)dx := 0$

Mittelwertsatz Integralr.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intbar und $\forall x \in [a,b] : m \leq f(x) \leq M$. Dann gilt: $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Ist f auch stetig, dann $\exists c \in (a,b)$ mit $\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$

Hauptsatz D./I.Rechnnung

$f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in I$. Sei $F : I \Rightarrow \mathbb{R}$ für $x \in I$ definiert als $F(x) = \int\limits_c^x f(t)dt$. Dann folgt:

a. F stetig diffbar udn es gilt $F'(x) = f(x)$

b. Für beliebige $a, b \in I$ gilt $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Stammfunk., unb. Int.

$F(x) = \int f(x)dx$. Es gilt $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Bekannte Integrale

$f(x)$	$F(x)$	Def.Bereich f
c	cx	$\mathbb{R}$ für $c \in \mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$,$n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_{>0}, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$
$\ln(\lvert x\rvert)$	$x \cdot \ln(\lvert x\rvert) - x$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln(\lvert\frac{x+1}{x-1}\rvert)$	$\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$arsinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$(-1,1)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\mathbb{R}\backslash\{x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\}$

Partielle Integration

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar.:

$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$

Unbestimmte Form:

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Integration d. Substitution

f stetig, g stetig diffbar:

$\int\limits_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$

Unbestimmte Form:

$\int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t))$

Integralvereinfachung

a. $\int f(ax+b)dx = l\frac{1}{a}F(ax+b)$

b. $\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x)$

c. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|)$

Integrale ü. uneig. Int.

$\int\limits_a^\infty f(x)dx := \lim\limits_{c\to\infty} \int_a^c f(x)dx$

$\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx := \lim\limits_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx$

$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx + \int\limits_c^\infty f(x)dx$

Int. ü. offene Intervalle

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$. $\forall I = [\alpha, \beta] \subset (a,b)$: integrierbar. Sei $c \in (a,b)$ beliebig:

- $\int\limits_c^b f(x)dx := \lim\limits_{\beta\nearrow b} \int_c^\beta f(x)dx$
- $\int\limits_a^c f(x)dx := \lim\limits_{\alpha\searrow a} \int_\alpha^c f(x)dx$
- $\int\limits_a^b f(x)dx := \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$