1) (6) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = n\ln(n) - \ln(n!)$$

2) (6) Überprüfen Sie die Folge $a_k = \sin(\cos(\frac{\pi}{2k}))$ auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz. Geben Sie im Falle der Konvergenz den entsprechenden Grenzwert an.

3) (10) Überprüfen Sie die rekursive Folge mit $c > 0$ auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an

$$0 < a_0 < \frac{1}{c}, \quad a_{n+1} = 2a_n - ca_n^2$$

4) (7) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz beziehungsweise Divergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^k)^2}{k^{k^2}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-k + \sqrt{k^2+1})$$

5) (5) Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(2)$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in [0,1]$ existiert mit $f(c) = f(c+1)$.

6) (5) Berechnen Sie die Taylorreihe von $T[f,0]$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := (e^x - t)^2$$

und bestimmen Sie den Konvergenzbereich für $T[f,0](x)$.

7) (5) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und konvex mit $f(0) = 0$. Beweisen Sie, dass dann $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ monoton ist.

8) (7) Berechnen Sie die (uneigentliche) Integrale, falls diese existieren:

$$\int_1^3 (\ln x)^2 dx$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-1} dx$$

9) (9) Berechnen Sie alle lokalen Extrempunkte und Sattelpunkte und bestimmen Sie für Extrema den Wert und ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt

$$f(x,y) = y^3 + 2x^2y - x^2 - 3y^2 + 1$$