Rechenregeln

Bruchrechnung

a) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$ b) $\frac{ae}{be}=\frac{a}{b}$

c) $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$ d) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{be}$

Ungleichungen

a. $(a<b)\vee(a>b)\vee(a=b)$
b. $(a<b)\wedge(b<c)\Rightarrow a<c$
c. $(a<b)\wedge(c\le d)\Rightarrow a+c<b+d$
d. $(a<b)\wedge(x>0)\Rightarrow ax<bx$
$(a<b)\wedge(x<0)\Rightarrow ax>bx$
e. $a<b\Leftrightarrow a>-b$
f. $x^2:=x\cdot x>0$
g. $0<a<b\Leftrightarrow 0<b^{-1}<a^{-1}$

Betrag

$|x|:=x$, falls $x\ge 0 \quad -x$, falls $x<0$

a. $|x|\ge 0\wedge(|x|=\Leftrightarrow x=0)$
b. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$
c. $(|x|<\varepsilon)\Leftrightarrow(x<\varepsilon)\wedge(-\varepsilon<x)\Leftrightarrow(-\varepsilon<x<\varepsilon)$
$(|x|\le\varepsilon)\Leftrightarrow(x\le\varepsilon)\wedge(-\varepsilon\le x)\Leftrightarrow(-\varepsilon\le x\le\varepsilon)$
d. $|x+y|\le|x|+|y|$(Dreiecksung.)
e. $||x|-|y||\le|x-y|$(umgekehrte.D.)

Komplexe Zahlen

$z_1+z_2:=(a_1+a_2,b_1+b_2)$
$z_1\cdot z_2:=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)$
Nullelement $(0,0)$ Einselement $(1,0)$
$-(a,b)=(-a,-b)$(Negativelement)
$(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ (Invers.)
$\bar z:=(a,-b)=a-ib$
$|z|:=\sqrt{z\bar z}=\sqrt{a^2+b^2}$
$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$
$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar z_1\bar z_2 \quad \overline{z_1+z_2}=\bar z_1+\bar z_2$

Potenzregeln

$a^na^m=a^{n+m}\quad (a^n)^m=a^{nm}$
$a^nb^n=(a\cdot b)^n$

Algemeine Potenzen

$\exp_a(x):=\exp(x\ln(a))=a^x$
a)$a^x=\exp_a(x)$ stetig $\forall x\in\mathbb{R}$
b)$\forall n\in\mathbb{Z}$: $\exp_a(x)=a^n$
c)$a^{x+y}=a^xa^y$
d)$(a^x)^y=a^{xy}$
e)$a^xb^x=(ab)^x$
f)$\forall p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}\backslash\{1\}:a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k}:=\begin{cases}\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}= & \\ \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1} & n\ge k\\ 0 & n<k\end{cases}$$

$\forall n,k\in\mathbb{N}_0:\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

Folgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen und $c\in\mathbb{R}$

a. $(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$
b. $c\cdot(a_n)=(c\cdot a_n)$
c. $(a_n)\cdot(b_n)=(a_n\cdot b_n)$
d. $\frac{(a_n)}{(b_n)}=\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, falls $b_n\ne 0$
e. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n)+\lim_{n\to\infty}(b_n)$
f. $\lim_{n\to\infty}c\cdot(a_n)=c\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n)$
g. $\lim_{n\to\infty}(a_n)\cdot(b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n)\cdot\lim_{n\to\infty}(b_n)$
h. $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)}{(b_n)}=\frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)}$, falls $b_n\ne 0$ und $\lim_{n\to\infty}b_n\ne 0$

Konv. Reihen

a. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\pm b_k)$ konvergent. Für die Grenzwerte gilt:$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\pm\sum_{k=1}^{\infty}b_k$
b. $\sum_{k=1}^{\infty}c\cdot a_k$ konvergent für $c\in\mathbb{R}$. Es gilt:$\sum_{k=1}^{\infty}c\cdot a_k=\cdot\sum_{k=1}^{\infty}a_k$
c. $\forall l\in N\ l>0:\sum_{k=l}^{\infty}a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ konvergiert
d. Gilt $a_k\le b_k\forall k\in\mathbb{N}:\sum_{k=1}^{\infty}a_k\le\sum_{k=1}^{\infty}b_k$

Funktionen

•$(f+g)(x):=f(x)+g(x)$
•$(cf)(x):=cf(x)$
•$(f\cdot g)(x):=f(x)\cdot g(x)$
•$g(x)\ne 0$:$\left(\frac{f}{g}\right)(x):=\frac{f(x)}{g(x)}$
•$f(A)\subseteq B\Rightarrow(g\circ f)(x):=g(f(x))$

Stetigkeit erhalten

a)$f+g:A\to\mathbb{R}$ b)$c\cdot f:A\to\mathbb{R}$
c)$f\cdot g:A\to\mathbb{R}$
d)$\frac{f}{g}:A'\to\mathbb{R}$, falls $g(a)\ne 0$
e)$g\circ f:A\to\mathbb{R}$, falls f in a und g in $f(a)=b$ stetig

Exponentialfunktion

a) $\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$
b) $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$
c) $\exp(x)>0$
d)$\forall n\in\mathbb{Z}:\exp(n)=e^n$
e) $\exp(x)=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$
f) streng mon. wachsend + bijektiv
g) $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}=1$

Logarithmus

a. $\ln(\exp(x))=\exp(\ln(x))=x$
b. $\ln(1)=0$ und $\ln(e)=1$
c. $\ln(x)\begin{cases}<0 & ,x\in(0,1)\\ =0 & ,x=1\\ >0 & ,x>1\end{cases}$
d. $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$
e. $n\in\mathbb{Z}:\ln(x^n)=n\ln(x)$
f. $\ln(x)$ ist stetig

Logarithmus zu alg. Basis

Sei $a\in\mathbb{R}_{>0}\backslash\{1\}$, dann $\log_a:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}:\log_a(x):=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Sinh-Cosh

• $\cosh(x):=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
• $\sinh(x):=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
• $\tanh(x):=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^{-x}+e^x}$

a) $\exp(x)=\cosh(x)+\sinh(x)$
b) $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$
c) $\cosh(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$
d) $\sinh(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
e) $\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)$
f) $\sinh(x+y)=\sinh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\cosh(y)$

Sin-Cos

$\tan:\{x|\cos(x)\ne 0\}\to\mathbb{R}$
• $\cos(x):=\mathrm{Re}(e^{ix})=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
• $\sin(x):=\mathrm{Im}(e^{ix})=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$
• $\tan(x):=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{ie^{-ix}-ie^{ix}}{e^{-ix}+e^{ix}}$

a) $\exp(ix)=\cos(x)+i\sin(x)$
b) $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$
c)$|\sin(x)|\le 1$ und $|\cos(x)|\le 1$
d) $\cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$
e) $\sin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
f) $\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$
g) $\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$

Abschätzung Sin-Cos

Für $x\in(0,2]$ gilt:
•$1-\frac{x^2}{2}<\cos(x)<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$
•$x-\frac{x^3}{3!}<\sin(x)<x$

Folgerung Def. Pi

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$	0

$\cos(x+\pi/2)=\sin(x+\pi)=-\sin(x)$
$\cos(x+2\pi)=\sin(x+\pi/2)=\cos(x)$
$\cos(x+\pi)=-\cos(x)$
$\sin(x+2\pi)=\sin(x)$

Zahlenmengen

Metrik

Positive Definitheit:
$d(x,y)>0$ für $x\ne y$
$d(x,y)=0$ für $x=y$
Symmetrie: $d(x,y)=d(y,x)$ Dreiecksunglei.: $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

Fakultät

$n!:=\prod_{k=1}^{n}k=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\qquad 0!=1$
$(n!)_{n\in\mathbb{N}}=(1),1,2,6,24,120,720$

Binomischer Lehrsatz

Für $a,b\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

Bernoullische Ungleichung

$\forall x\in\mathbb{R},x\ge -1,n\in\mathbb{N}_0$ gilt: $(1+x)^n\ge 1+nx$

Satz 2.49

$\forall x\in\mathbb{R}$ mit $x\ge 0$ und $\forall n\in N$ mit $n\ge 2$ gilt $(1+x)^n\ge\frac{n^2x^2}{4}$

Folgen

Konvergenz, Divergenz

Folge (a_n) ist konvergent, wenn gilt: $\forall\varepsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}\,\forall n\ge n_0:|a_n-a|<\varepsilon$

Folgengrenzwert ist eindeutig

Divergenz inverser Nullfolge

Ist Folge (a_n) Nullfolge mit $a_n\ne 0$, dann ist Folge $(b_n)=\frac{1}{a_n}$ divergent.

Bestimmte Divergenz

Folge (a_n) ist bestimmt divergent gegen $\infty/-\infty$, wenn $b_n=\frac{1}{a_n}$ eine Nullfolge ist und $\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\ge n_0$: $a_n\lessgtr 0$.

Konvergenz ⇒ Beschränkt

Monotonie

monoton wachsend: $a_n\le a_{n+1}$
streng m. wachsend: $a_n<a_{n+1}$
monoton fallend: $a_n\ge a_{n+1}$
streng m. fallend: $a_n>a_{n+1}$

Mono. + Beschrä. ⇒ Konvergenz

a. (a_n) monoton wachsend + oben beschränkt ⇒ konvergent. Es gilt $\lim_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$
b. (a_n) monoton fallend + unten beschränkt ⇒ konvergent. Es gilt $\lim_{n\to\infty}a_n=\inf\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$

Sandwich-Theorem

Wenn $(a_n),(c_n)$ konvergent und gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n)=\lim_{n\to\infty}(c_n)$, dann ist auch (b_n) konvergent und es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$

Teilfolgen

Grenzwert Teilfolge

Jede Teilfolge (a_{n_k}) einer konvergenten Folge (a_n) ist konvergent. Es gilt: $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\lim_{n\to\infty}a_n=a$

Divergenz durch Teilfolge

Folge (a_n) divergent, wenn:

a. 1 divergente Teilfolge
b. 2 konverg. Teilf. $(a_{n_k}),(a_{n_l})$ mit $\lim_{k\to\infty}\ne\lim_{l\to\infty}(a_{n_l}$

Jede Fol. hat mon. Teilf.

Balzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge.

Häufungspunkt

Für (a_n) heißt a Häufungspunkt, wenn Teilfolge (a_{n_k}) existiert und $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k})=a$

Cauchy-Folge

$\forall\varepsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n>n_0:|a_n-a_{n_0}|<\varepsilon$

Satz 3.34

a. ∀ konverg. Folge ⇒ Cauchy-Folge
b. Jede Cauchy-Folge ist konvergent

Intervallle

Kompaktheit

I kompakt⇔abgeschl. + beschränkt

Intervalschachtelung

Folge (I_n) von abgeschl. Intervallen I_n heißt Intervallschachtelung, wenn:

- $\forall n\in\mathbb{N}:I_{n+1}\subset I$
- $\lim_{n\to\infty}|I_n|=0$

Konvergenz Intervalschacht.

Für jede Intervallschach. (I_n) existiert ein eindeutiges $x\in\mathbb{R}$, für das: $x\in I,\forall n\in\mathbb{N}$
(I_n) konvergiert gegen x.

Reihen

Def. Reihe konvergent

Folge der Teilsummen konvergent ⇒ Reihe konvergent. Sonst divergent.

Cauchy-Konvergenzkrit.

Reihe konvergiert g.d.w. gilt: $\forall\varepsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\ge m\ge n_0:\left|\sum_{k=m}^{n}<\varepsilon\right|$

Notw. Konvergenzkrit.

$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ konvergente Reihe ⇒ Folge (a_k) ist Nullfolge ⇒ $\lim_{k\to\infty}a_k=0$.

Teilsummenbeschränktheit

$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ mit $a_k\ge 0\ \forall k\in\mathbb{N}$ konvergiert g.d.w. Folge der Teilsummen beschränkt.

Def. absolute Konvergenz

$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ abs. k. ⇔ $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ konv.

Reihenumordnung

$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ abs. konv. ⇒ Jede Umordnung konverg. gegen selben Grenzw.

abs. Konv. ⇒ Konvergenz

$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ abs. konv. ⇒ konvergent

Cauchy-Produkt

$\sum_{k=0}^{\infty}a_k,\sum_{k=0}^{\infty}b_k$ abs. konverg..Für $n\in\mathbb{N}$ sei $c_n:=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot b_{n-k}$, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty}=(\sum_{k=0}^{\infty}a_k)\cdot(\sum_{k=0}^{\infty}b_k)$ abs. konv.

Konvergenzkriterien

Leibnitz-Kriterium

(a_k) monoton fallende Folge mit $\forall k\in\mathbb{N}a_k\ge 0$ mit $\lim_{k\to\infty}a_k=0$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^ka_k$.

Majorantenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ konvergent mit $\forall k\in\mathbb{N}:c_k\ge 0$. Wenn für $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exists k_0\in\mathbb{N}$, sodass $\forall k\ge k_0$ gilt $|a_k|\le c_k$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ absolut.

Minorantenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ divergent mit $\forall k\in\mathbb{N}:c_k\ge 0$. Wenn für $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exists k_0\in\mathbb{N}$, sodass $\forall k\ge k_0$ gilt $a_k\ge c_k$, dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$

Wurzelkriterium

$\exists a=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$, dann gilt:
•$a<1\Rightarrow$ absolut konvergent
•$a>1\Rightarrow$ divergent
•$a=1\Rightarrow$ unwissend

Quotientenkriterium

$\exists a=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$, dann gilt:
•$a<1\Rightarrow$ konvergiert absolut
•$a>1\Rightarrow$ divergiert
•$a=1\Rightarrow$ unwissend

Potenzreihen

Definition

$P(x,x_0)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot(x-x_0)^k$
$x_0=0$, $P(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot x^k$

Konvergenz von Potenzr.

a. $P(x,x_0)$ konverg. in $c\Rightarrow$ konverg. absolut $\forall x:|x-x_0|<|c-x_0|$
b. Konverg. $P(x,x_0)$ in c nicht abs. ⇒ divergiert $P(x,x_0)\forall|x-x_0|>|c-x_0|$

Def. Konvergenzradius

Sei $P(x,x_0)$ Potenzreihe. $\exists r\in\mathbb{R}_{\ge 0}$, dass $P(x,x_0)\ \forall|x-x_0|<r$ konvergiert und $\forall|x-x_0|>r$ divergiert, dann ist r der Konvergenzradius.

Konvergenzr. bestimmen

• $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$
• $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|<1$

Umformen:
•$r=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ •$r=\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

Exponentialreihe

Definition

$\exp(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. $e:=\exp(1)$ gilt

Konvergenz von Exp.Reihen.

$\forall x\in\mathbb{R}:\exp(x)$ absolut konvergent.

Eigenschaften

a) $\forall x,y\in\mathbb{R}:\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$ b) $\forall x\in\mathbb{R}:\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$
c) $\forall x\in\mathbb{R}:\exp(x)>0$ d) $\forall n\in\mathbb{Z}$: $\exp(n)=e^n$

$\exp$ als Folgengrenzwert

Gilt $\forall x\in\mathbb{R}$: $\exp(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Für $x=1$ gilt: $e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Funktionen

Injektiv, ...

Injektiv: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Surjektiv: $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$
Bijektiv: Injektiv + Surjektiv

Umkehrfunktion

$f^{-1} : B \to A$ Umkehrfunktion falls:
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x, x \in B$

Bijektiv-Umkehrfunktion

$\exists f^{-1}, \Leftrightarrow f$ bijektiv.

Monotonie Umkehrfunktion

f streng monoton $\Rightarrow f^{-1} : B \to A$ existiert + streng mon. (im g. Sinne)

Beschränktheit

$f : A \to B$ heißt nach oben/unten Beschränkt, wenn Bildmenge $f(A)$ oben/unten beschränkt.

Monotonie

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, dann • mon. wachsend: $f(x) \leq f(x')$ • streng mon. wachs.: $f(x) < f(x')$ • mon. fallend: $f(x) \geq f(x')$ • streng mon. fall.: $f(x) > f(x')$ $\forall x, x' \in A$ mit $x < x'$.

Berührpunkt

$A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, Dann ist a Berührpunkt von A, falls $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ $\exists b \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) : b \in A$

Grenzwerte Funktionen

1. Rechtssei.Grenzw.: $\lim\limits_{n \searrow a} f(x) = x$
2. Linkssei. Grenzw.: $\lim\limits_{n \nearrow a} f(x) = x$

Satz 4.20

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$
$\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$

Stetigkeit

f stetig in a, falls $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. f stetig, falls $\forall a \in A : f$ stetig

ε-δ-Kriterium

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in A : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \varepsilon$

Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b) \Rightarrow \exists x \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.
Allgemeiner: $\forall y \in \mathbb{R}$: Wenn $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, dann $\exists d \in (a, b) : f(d) = y$

Umekehrfunk. stet. Funk.

f stetig + streng mono. $\Leftrightarrow f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ stetig

Gleichmäßige Stetigkeit

$f : A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig wenn: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
$f : A \to \mathbb{R}$ auf $[a, b] \in A$ stetig $\Rightarrow$ dort auch gleichm. stetig.

Polynom

Polynomfunktion: $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$. $Grad(p) = \max(n)$, wo $a_n \neq 0$

Rationale Funktion

p, q Polynome, $q(x) \neq 0$, dann ist $r(x) = \left(\frac{p}{q}\right)(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ rat. Funk.

Linearfaktoren

$p(x)$ o. Rest d. $q(x) = x - x_1$ teilbar, g.d.w. $x_1 \in \mathbb{R}$ Nullstelle von $p(x)$.

Exponentialfunktion

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$: $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

1. Satz vom Wachstum

$\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt: • $\lim_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$
• $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) x^n = 0$

2. Satz vom Wachstum

$\ln(x)$ wächst schwächer als $\sqrt[n]{x}$

Funktionssymmetrie

• achsen(gerade): $f(-x) = f(x)$
• punkt(ungerade): $f(-x) = -f(x)$

komplexe exp-Funktion

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Periodische Funktionen

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodische Funktion, wenn $\exists p > 0$, sodass $f(x) = f(x + p), \forall x \in \mathbb{R}$.
$\min(p) \in \mathbb{R}_{>0}$ heißt Periode.

Differentialrechnung

Definition

Sei $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$. f heißt in a diffbar, falls Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ exist. Oder: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
$\forall a \in A$ Grenzwert exist. $\Rightarrow f$ diffbar.

Diffbar $\Rightarrow$ Stetig

Satz 5.5

$f'_-(c) = \lim\limits_{x \nearrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_+(c) = \lim\limits_{x \searrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \Rightarrow f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$

Ableitungsregeln

a) Linearität:
$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$ $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
b) Produktregel:
$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
c) Quotientenr.: $g(x) \neq 0, \forall x \in A$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$
d) Kettenregel:
$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Ableitung Umkehrf.

f stetig,streng mon,diffbar, $g = f^{-1}$ $\Rightarrow g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

Ableitung höherer Ord.

$f^{(k+1)}(a) := \left(f^{(k)}(a)\right)'$ f k-mal (stetig) diffbar oder f C^k-stetig

Lokale Extrema

$\exists \varepsilon > 0$ $\forall y, |x - y| < \varepsilon : f(a) \leq\geq f(y)$

Notw. Bed. lok. Extrema

$f : (a, b) \to \mathbb{R} : f'(x) = 0$

Hin. Bed. lok. Extrema

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 2 mal diffbar in $x \in (a, b)$. $f''(x) > 0$: Minimum, $f''(x) < 0$: Maximum

Monoton. und Ableitung

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, diffbar in (a, b):
• $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ mon. wachs.
• $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng mon. wach.
• $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ mon. fall.
• $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ streng mon. fall.

Satz von Rolle

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig (auf (a, b) diffbar) mit $f(a) = f(b)$, dann: $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

1. Mittelwertsatz

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig (auf (a, b) diffbar) mit $f(a) = f(b)$, dann: $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

2. Mittelwertsatz

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$, diffbar in (a, b). Sei $g'(x) \neq 0 \Rightarrow g(a) \neq g(b)$ + $\exists c \in (a, b)$ mit $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Satz 5.21

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $n+1$-mal diffbar. Falls $f'(x) = f^{(2)}(x) = ... = f^{(n)}(x) = 0$ und $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, dann f in x
• streng. lok. Min., falls n ungerade und $f^{(n+1)}(x) > 0$
• streng. lok. Max., falls n ungerade und $f^{(n+1)} < 0$
• kein Extremum, falls n gerade

Konvexität

$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$.
Konkav wenn $-f$ konvex.

Satz 5.23

f konvex $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$

Wendepunkt

f in $x \in (a, b)$ Wendepunkt, wenn $\exists (\alpha, x), (x, \beta)$ für die gilt:
1. f in (α, x) streng konvex + in (x, β) streng konkav
2. f in (α, x) streng konvex + in (x, β) streng konvex

Satz 5.26

• Not. Bed.: $f''(x) = 0$
• Hin. Bed.: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

Uneigentlicher Grenzwert

$f : A \to \mathbb{R}$ und a Häufungspunkt. Falls $\forall K \in \mathbb{R}$ $\exists \delta > 0$, sodass $f(x) > K$ für $|x - a| < \delta$, $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

L'Hospital

a oder b gilt:
a) $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} g(x) = 0$
b) $\lim\limits_{x \searrow a} |f(x)| = \lim\limits_{x \searrow a} |g(x)| = \infty$
Dann: $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Analog für $\lim_{x \nearrow b}$ und $a, b = \pm\infty$.

Satz von Taylor

Tylorsche Formel

f $(n + 1)$-mal stetig diffbar.
$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$
$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$
$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$

Taylorreihe/-polynom

f beliebig oft diffbar
$T[f, x_0](x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$
$T_n[f, x_0](x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

Integralrechnung

Integral für Trep.

$\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$ Treppenfunktion bezüglich $Z = (a = x_0, ..., x_n = b)$ und seien $\varphi(x) = c_k$ konstante Funktionsabschnitte von φ für $x \in (x_{k-1}, x_k)$. Def.: Integral von φ auf $[a, b]$ als: $\int_a^b \varphi(x) dx := \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})$.

Monoton. Treppen.

$\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ $\forall x \in [a, b] : \varphi(x) \leq \psi(x) \Rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx$

Einschließen Treppen.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\bar{S}(Z, f)$ und $\underline{S}(Z, f)$ existieren mit $\bar{S}(Z, f) - \underline{S}(Z, f) \leq \varepsilon$

Ober-/Untersumme

Obersumme: $\bar{S}(Z, f) := \int_a^b \bar{\varphi}(x) dx = \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k (x_k - x_{k-1})$
Untersumme: $\underline{S}(Z, f) := \int_a^b \underline{\varphi}(x) dx = \sum_{k=1}^{n} \underline{c}_k (x_k - x_{k-1})$

Ober-/Unterintegral

Oberint: $\overline{\int_a^b} f(x) dx := \inf\{\bar{S}(Z, f)\}$
Unterint: $\underline{\int_a^b} f(x) dx := \sup\{\underline{S}(Z, f)\}$

Riemann-Integral

f ist integrierbar, wenn $\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$. Integral von f ist dann $\int_a^b f(x) dx := \underline{\int_a^b} f(x) dx$

Stetig $\Rightarrow$ intbar

f auf $[a, b]$ stetig $\Rightarrow f$ auf $[a, b]$ intbar.

Monoton $\Rightarrow$ intbar

f monoton auf $[a, b]$ $\Rightarrow f$ auf $[a, b]$ intbar

Verfeinerung

Z, Z' Zerlegungen. Verfeinerung: $\tilde{Z}$ enhtält alle Elemente von Z auf gleichem Intervall
Überlagerung: $\hat{Z} = Z + Z'$

Zerlegungswechsel

f auf $[a, b]$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K$ und Z Zerlegung von $[a, b]$ mit Feinheitsmaß $|Z|$. Zerlegung $\tilde{Z}$ entstehe aus Z durch Hinzunahme eines zusätz. Punkts. Dann gilt:
$\underline{S}(Z, f) \leq \underline{S}(\tilde{Z}, f) \leq \underline{S}(Z, f) + 2K|Z|$
$\bar{S}(Z, f) \geq \bar{S}(\tilde{Z}, f) \geq \bar{S}(Z, f) - 2K|Z|$

Integralwertbestimmung

$f : [a, b]$ beschränkt und (Z_n) Folge von Zerlegungen mit $\lim_{n \to \infty} |Z_n| = 0$. Dann gilt:
a) $\lim_{n \to \infty} \underline{S}(Z_n, f) = \underline{\int_a^b} f(x) dx$
b) $\lim_{n \to \infty} \bar{S}(Z_n, f) = \overline{\int_a^b} f(x) dx$

Rieman. Zwischensumme

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und (Z_n) Zerlegungsfolge mit $\lim_{n \to \infty} |Z_n| = 0$. $\forall Z_n = (x_0, ..., x_m)$ sei $\varphi_n \in \mathcal{T}[a, b]$ Treppenfunktion mit $\varphi_n(x) := f(\zeta_k)$ für $x \in [x_{k-1}, x_k)$ mit beliebigen $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ und $\varphi_n(b) = f(b)$. Dann konvergiert (S_n) der Riemannschen Zwischensummen $S_n := \int_a^b \varphi_n(x) dx = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$ gegen Integral: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \to \infty} S_n$.

Integraleigeschaften

f, g auf $[a, b]$ intbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
a) Linearität $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$
b) Monotonie: $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
c) Besch.: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$
d) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
e) $\int_b^a f(x) dx := -\int_a^b f(x) dx$
f) $\int_c^c f(x) dx := 0$

Mittelwertsatz Integralr.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intbar und $\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M$. Dann gilt: $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$.
Ist f auch stetig, dann $\exists c \in (a, b)$ mit $\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(c)$

Hauptsatz D./I.Rechnnung

$f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in I$. Sei $F : I \Rightarrow \mathbb{R}$ für $x \in I$ definiert als $F(x) = \int_c^x f(t) dt$. Dann folgt:
a) F stetig diffbar $\wedge F'(x) = f(x)$
b) Für beliebige $a, b \in I$ gilt $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Stammfunk., unb. Int.

$F(x) = \int f(x) dx$. Es gilt $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Bekannte Integrale

$f(x)$	$F(x)$	Def.Bereich f
c	cx	$\mathbb{R}$ für $c \in \mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_{>0}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$
$\ln(\|x\|)$	$x \cdot \ln(\|x\|) - x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln(\|\frac{x+1}{x-1}\|)$	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$arsinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$(-1, 1)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\|\cos(x)\|)$	$\mathbb{R} \setminus \{x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\}$

Partielle Integration

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar.:
$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$
Unbestimmte Form:
$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$

Integration d. Substitution

f stetig, g stetig diffbar:
$\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$
Unbestimmte Form:
$\int f(g(t)) g'(t) dt = F(g(t))$

Integralvereinfachung

a) $\int f(ax + b) dx = l \frac{1}{a} F(ax + b)$
b) $\int f(x) f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x)$
c) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|)$

Integrale ü. uneig. Int.

$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x) dx$
$\int_{-\infty}^a f(x) dx := \lim_{c \to -\infty} \int_c^a f(x) dx$
$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$

Int. ü. offene Intervalle

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$. $\forall I = [\alpha, \beta] \subset (a, b)$: integrierbar. Sei $c \in (a, b)$ beliebig:
$\int_c^b f(x) dx := \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f(x) dx$
$\int_a^c f(x) dx := \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f(x) dx$
$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Bekannte Reihen

Harmonische Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, divergent

Geometrische Reihe

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, Grenzwert: $\frac{1}{1-q}$, konvergiert für $|q| < 1$, divergiert für $|q| \geq 1$

3. Binom. Erweiterung

$(b - \sqrt{a}) = (b - \sqrt{a}) \frac{(b + \sqrt{a})}{(b + \sqrt{a})}$

Partialbruchzerlegung

1. Polynomdivision (falls nötig)
2. Nullstelllen bestimmen (Umformen)
3. Aus Nullstellen: $\frac{A}{n_1} + ... + \frac{Z}{n_k}$
4. Auf einen Nenner bringen
5. Umformen in ähnliche Form wie Ausgangsfunktion
6. Aus den Koeffizienten A-Z Gleichungssysteme lösen