

Inhaltsverzeichnis

1	Repititorium 19.04.2022	3
1.1	Aufgabe 1	3
1.1.1	Musterlösung Alexander Frank	3
1.2	Aufgabe 2	6
1.2.1	Musterlösung Alexander Frank	6
2	Repititorium 26.04.2022	7
2.1	Was für Probleme kommen und wie löst man die?	7
2.2	Aufgabe 1	9
2.2.1	Musterlösung Alexander Frank	9
2.3	Aufgabe 2	10
3	Repititorium 03.05.2022	12
3.1	Aufgabe 1 (leichte Version)	12
3.1.1	Musterlösung Alexander Frank	12
3.2	Tipps für Rekursive Folgen	15
3.3	Aufgabe 2	16
4	Repititorium 10.05.2022	17
4.1	Reihen und Potenzreihen	17
4.1.1	Divergenz	17
4.1.2	Konvergenz	17
4.1.3	Indizien wann welches Verfahren verwendet werden sollte	18
4.2	Aufgabe 1	18
4.3	Aufgabe 2	18
4.4	Aufgabe 3	18
4.5	Aufgabe 4	19
4.6	Aufgabe 5	19
5	Repititorium 17.05.2022	20
5.1	Hilfreiche Anmerkungen zu Beginn	20
5.1.1	Definition von Funktionen	20
5.1.2	Injektivität	20
5.1.3	Surjektivität	20
5.1.4	Umkehrfunktion	20
5.1.5	Beschränktheit	20
5.1.6	Monotonie	21
5.1.7	Bekannte Korollare	21
5.2	Aufgabe 1	21
5.2.1	Musterlösung Alexander Frank	21
6	Repititorium 24.05.2022	23
6.1	Aufgabe 1	23
6.1.1	Lösung Alexander Frank	24

7	Repititorium 31.05.2022	27
7.1	Alle wichtigen Sachen (auch für die Klausur) zum Thema Differenzierbarkeit aus Kapitel 5.1/5.2	27
7.1.1	Definition Differentialquotient	27
7.1.2	Definition Extrema	27
7.1.3	Notwendige/Hinreichende Kriterium	27
7.1.4	Satz von Rolle	27
7.1.5	Mittelwertsatz	27
7.1.6	Monotonie	27
7.1.7	Konvex /konkav	27
7.1.8	Satz zwischen den Zeilen	27
7.2	Aufgabe 1	28
7.2.1	Musterlösung Alexander Frank	28
7.3	Aufgabe 2	28
7.3.1	Musterlösung Alexander Frank	28
7.4	Aufgabe 3	29
7.4.1	Musterlösung Alexander Frank	29
8	Repititorium 07.06.2022	31
8.1	Aufgabe 1 (Taylor Reihen)	31
8.1.1	Musterlösung Alexander Frank	32

1 Repititorium 19.04.2022

Tipp: Für die Klausur Zeitmanagement

Gehe alle Aufgaben zu Beginn einmal durch und schreibe dir eine Bewertung an die einzelnen Aufgaben, für wie schwer man diese hält.

Teile halte dir feste Zeiträume für einzelne Aufgaben fest und gehe zur nächsten Aufgabe, wenn die Zeit zum Lösen der Aufgabe nicht reicht.

1.1 Aufgabe 1

Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n^3 + 5n \text{ ist durch 6 teilbar}$$

1.1.1 Musterlösung Alexander Frank

Tipp: Aussagen greifbar machen

Vereinfache die Aussage, sodass sie einfacher zu beweisen ist.

$$\begin{aligned} A(n) &\Leftrightarrow 6 \mid (n^3 + 5n) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6}(n^3 + 5n) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Induktionsanfang: $(A(1))$

$$\begin{aligned} 6 \mid (1^3 + 5) \\ 6 \mid 6 \\ \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$.

Tipp: Induktionsvoraussetzung für ein n

Es darf nicht geschrieben werden, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Eine andere Formulierung wäre:

Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ für alle $k \leq n$ gilt $A(k)$.

Induktionsschritt: $(n \rightarrow n + 1)$

Tipp: Aussage mit $n + 1$ aufschreiben

Schreibe immer die Aussage die zu zeigen ist auf.

Dies hilft, das Ziel besser im Auge zu behalten und den Weg nicht zu verlieren.

$$A(n + 1) \Leftrightarrow 6 \mid ((n + 1)^3 + 5(n + 1))$$

Tipp: Wähle immer die schwerere Seite zuerst

Es ist leichter von der von der schwereren Seite zur Leichten zu gelangen.

Analogie: Vom Berg runter ist leichter als den Berg herauf zu gelangen.

Tipp: Induktionsvoraussetzung benutzen

Irgendwann muss immer die Induktionsvoraussetzung eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} 6 \mid ((n + 1)^3 + 5(n + 1)) &\Leftrightarrow 6 \mid ((n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 5n + 5) \\ &\Leftrightarrow 6 \mid (\underbrace{(n^3 + 5n)}_{\text{Ist durch 6 teilbar}} + (3n^2 + 3n + 6)) \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} 6 \mid (3n^2 + 3n + 6) \\ &\Leftrightarrow 6 \mid (3n(n + 1) + \underbrace{6}_{\text{Ist durch 6 Teilbar}}) \\ &\Leftrightarrow 6 \mid (3n(n + 1)) \\ &\Leftrightarrow 6 \mid 3 \cdot \sum_{k=1}^n 2k \\ &\Leftrightarrow 6 \mid 6 \cdot \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

Tipp: Induktionsbeweis in Induktionsbeweis

Fällt einem die Formel $\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$ kann man auch einfach einen Induktionsbeweis im Induktionsbeweis führen wie folgt:

$$B(n) \Leftrightarrow 6|3(n+1)n$$

I.A.:

$$B(1) \Leftrightarrow 6|6 \checkmark$$

I.V.:

Die Aussage $B(n)$ gilt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$

I.S:

$$\begin{aligned} B(n+1) &\Leftrightarrow 6|3(n+2)(n+1) \\ &\Leftrightarrow 6|(3n(n+1) + 6(n+1)) \\ &\stackrel{I.V.}{\Leftrightarrow} 6|6(n+1) \end{aligned}$$

Interessant für Spickzettel

$$\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

1.2 Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x$$

für alle $x \in [0, 1]$ gilt.

1.2.1 Musterlösung Alexander Frank

$$A(n) \Leftrightarrow (1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x \quad \forall x \in [0, 1]$$

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} A(1) &\Leftrightarrow (1+x)^1 \leq 1 + (2^1 - 1)x & \forall x \in [0, 1] \\ &\Leftrightarrow (1+x) \leq 1 + x & \forall x \in [0, 1] \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschritt:

$$A(n+1) \Leftrightarrow (1+x)^{n+1} \leq 1 + (2^{n+1} - 1)x$$

Tipp: Ausrufezeichen drüber setzen

Wenn man ein ! drüber setzt, dann heißt das, man möchte, dass die Aussage gilt, allerdings gibt es noch kein Beweis dazu.

$$\begin{aligned} 1 + (2^{n+1} - 1)x &\Leftrightarrow 1 + (2^n + 2^n - 1)x \\ &\Leftrightarrow 1 + (2^n - 1)x + 2^n x \\ &\stackrel{I.V.}{\geq} (1+x)^n + 2^n x \stackrel{!}{\geq} (1+x)^{n+1} \\ &\Leftrightarrow (1+x)^n + 2^n x \stackrel{!}{\geq} (1+x)(1+x)^n \\ &\Leftrightarrow (1+x)^n + 2^n \stackrel{!}{\geq} (1+x)^n + x(1+x)^n \\ &\Leftrightarrow 2^n \stackrel{!}{\geq} (1+x)^n x \end{aligned}$$

1. Fall ($x = 0$)

$$0 \geq 0$$

2. Fall ($x > 0$)

$$2^n \stackrel{!}{\geq} (1+x)^n$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq (1+1)^n \geq (1+x)^n$$

2 Repitorium 26.04.2022

Tipp: Die Aufgaben des Repitoriums sind interessant

Die Aufgaben des Repitoriums, werden für die Erstellung der Klausur mit in betracht gezogen und können in dieser in ähnlicher Form dran kommen. Die Aufgaben in der Klausur können, also beispielsweise ähnliche Kniffe, wie hier, enthalten, was zur Lösung der Aufgaben hilfreich sein kann.

2.1 Was für Probleme kommen und wie löst man die?

Es gibt vier relevante Problemstrukturen:

1) $\exists x \in X : A(x)$

- Nullstellen
- Ableitung
- Integrall
- Induktionsanfang
- ...

Lösen mit:

- Algorithmen
- Verfahren (Ableitungsregeln)
- l'hospital
- Raten (Bauchgefühl)
- Umformungen

2) $\forall y \in Y : A(y)$

- Obere-/Untereschranken
- Globale Werte (Maxima/Minima/...)
- Norm (Normeigenschaften)

Lösen mit:

- Induktion
- Abschätzung
- Folgerungen aus Wahrheit

3) $\exists x \in X \forall y \in Y : A(x, y)$

- Neutrales Element
- Supremum/ Infimum

Lösen mit:

- Wähle $x \in X$!
- Bauchgefühl/Intuition \Rightarrow Induktion, Mengenaufteilung, Abschätzung

4) $\forall y \in Y \exists x \in X : A(x, y)$

- Inverse(s) Element(e)
- Funktionswerte
- Funktionen

Lösen mit:

- Bestimme $x(y) \in X$
- Beispiel: $\forall c \in \mathbb{R} \exists z \in \overline{\mathbb{C}} : z^2 = c$ mit $c = R + Ii$ und $z = a + bi$

Lösen mit:

- Umformen
- Abschätzen

$$\forall y \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \underbrace{\exists \delta > 0}_{\leftarrow \delta(y, \varepsilon)} \forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)}_{A(y, \varepsilon, \delta, x)}$$

2.2 Aufgabe 1

$$x_n = \frac{n}{2^n} \text{ Zeige Konvergenz per Definition}$$

Definition der Konvergenz

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$$

2.2.1 Musterlösung Alexander Frank

$$\underbrace{\exists x \in \mathbb{R}}_{x \in \mathbb{R}} \forall \varepsilon > 0 \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N}}_{n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}} \forall n \geq n_0 : \left| \frac{n}{2^n} - x \right| < \varepsilon$$

Tipp: Werte einsetzen

Setze einfach ein paar Werte ein und schaue dir an wie sich die Funktion verhält

1) $x \in \mathbb{R}$

Nebenrechnung (Werte in $\frac{n}{2^n}$ einsetzen):

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \frac{3}{32}, \dots, 0$$

$$\frac{1000}{2^{1000}} < \frac{1000}{2^{125}}$$

Wir lassen unser Bauchgefühl entscheiden und wählen $x = 0$ (Behauptung).

Das Wissen wir bereits

$$n^2 \leq 2^n$$

$$n \geq 4$$

Behauptung:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \left| \frac{n}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\begin{matrix} x_n > 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \frac{n}{2^n} < \varepsilon$$

$$\begin{matrix} \text{Wissen } n \geq 4 \\ \Leftarrow \end{matrix}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq \max(4, n_0) : \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq \max(4, n_0) : \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\begin{matrix} n \geq n_0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq \max(4, n_0) : \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

$$\Leftarrow$$

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \varepsilon & \Leftrightarrow \\
\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varepsilon} < n_0 & \Leftrightarrow \\
\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \geq \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil & \Leftarrow \\
\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 = \max(4, \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil) &
\end{aligned}$$

Tipp: Auf und Abrunden hilft

Bei der Bestimmung von echt kleiner oder echt größer kann es helfen, dass man seinen Term, mit Hilfe der Gauß'schen Klammern, auf-/abrundet.

Tipp: Rekursive Folgen sind in der Klausur beliebt

Aufgaben mit rekursiven Folgen sind gern gesehene Aufgaben in einer Klausur, da sie mehrere Themen gleichzeitig abfragen.

2.3 Aufgabe 2

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$$

Fiese Aufgabenstellung:

Untersuche auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls einen Grenzwert an.

Aufgabe lösen in Schritten:

1) Beschränktheit zeigen

- $a \leq a_n \leq b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} :$

Werte in die Folge einsetzen (NR):

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{15}{16}, \frac{17 \cdot 15}{16^2}, \dots, 1$$

Alexander Frank würde die Aussage $\underbrace{0 \leq a_0 \leq 1}_{\text{Induktion}}$ beweisen.

2) Monotonie $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \overset{<}{>} a_n$

- keine Induktion, wenn vorher Beschränktheit gezeigt ist
- \Rightarrow Folgerung aus Wahrheit

3) \Rightarrow Aus einem Satz der Vorlesung folgt: Aus Beschränktheit und Monotonie folgt die Konvergenz

4) Grenzwert

- $a_{n+1} = a_n = a$
- $a = a(2 - a)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Tipp zum Lösen der Aufgabe:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \underline{\underline{a_n(2 - a_n)}} \\ &= \underline{\underline{2a_n - a_n^2}} \\ &= 1 - 1 + 2a_n - a_n^2 \\ &= 1 - (1 - 2a_n + a_n^2) \\ &= \underline{\underline{1 - (1 - a_n)}} \end{aligned}$$

3 Repitorium 03.05.2022

3.1 Aufgabe 1 (leichte Version)

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} \qquad a_0 = 1$$

- a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt ist.
- b) Zeige $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton
- c) Konvergent?
- d) Geben Sie den Grenzwert an.

3.1.1 Musterlösung Alexander Frank

- a) Mögliche Beschränkungen, die man zeigen kann:

$$\begin{array}{ll} 0 \leq a_n \leq 1 & \\ 0 \leq a_n \leq x & x > 1 \\ 0 < a_n \leq 1 & \text{optimale Aussage für Aufgabenteil b)} \end{array}$$

Das Wissen wir bereits

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Beschränktheit: $\exists a, b \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}_0 : a \leq a_n \leq b$

Wir wollen zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : 0 < \leq a_n \leq 1$$

Induktionsanfang:

$$0 < \leq 1 \leq 1 \qquad \text{wahr} \checkmark (n = 0)$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 : 0 < \leq a_n \leq 1$$

Induktionsschritt:

$$\begin{array}{ll} a < \leq a_{n+1} \leq 1 & \text{Def.} \\ 0 < \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} \leq 1 & \text{Brüche} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
0 &< \leq \frac{1}{\frac{a_n+1}{a_n}} \leq 1 && \text{Kehrw.} \cdot \\
&\Leftrightarrow \\
0 &< \leq \frac{a_n}{a_n+1} \leq 1 && \cdot (a_n+1) \stackrel{I.V.}{>} 0 \\
&\Leftrightarrow \\
0 \cdot (a_n+1) &< \leq a_n \leq a_n+1 && \\
0 &< \leq a_n \leq a_n+1 && \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Tipp: Nutzt solange wie möglich Äquivalenzumformungen

Man sollte so lange wie möglich Äquivalenzumformungen verwenden. Sollten diese irgendwann nicht mehr ausreichen, dann sollte zu Folgerungen übergegangen werden.

b)

Tipp: Werte einsetzen hilft

Es ist sehr Hilfreich erst einmal ein paar Werte in die Funktion/Folge/Reihe einzusetzen, um ein Gefühl für diese zu bekommen. Dadurch ist es leichter herauszufinden, was für diese gilt.

Randnotiz

Damit man die Aussage mittels Induktion lösen kann muss man eine Aussage wie folgt konstruieren:

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n - \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} &> 0 \\
a_n - \frac{a_n}{a_n+1} &> 0 \\
\frac{a_n(a_n+1) - a_n}{a_n+1} &> 0 \\
\frac{a_n^2}{a_n+1} &> 0 \\
a_n^2 &> 0
\end{aligned}$$

Nicht aber so:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n - a_{n+1} > 0$$

Induktionsanfang: $a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_{n+1} < a_n \quad \text{Def.} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}_0 : \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} &< a_n && \begin{array}{l} \text{siehe a)} \\ \Leftrightarrow \end{array} \\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \frac{a_n}{a_n + 1} &< a_n && \begin{array}{l} \cdot (a_n + 1) \stackrel{a)}{>} 0 \\ \Leftrightarrow \end{array} \\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n &< a_n^2 + a_n && \begin{array}{l} \stackrel{a)}{>} 0 \\ \Leftrightarrow \end{array} \\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : 0 &< a_n^2 && \end{aligned}$$

Damit < 0 gilt muss man bei der Beschränktheit die linke Seite \leq anpassen zu $<$.

Tipp: Keine Induktion bei Monotonie-Beweis

Bei der Monotonie reicht es meist durch Umformungen zu zeigen, dass etwas streng monoton ist. Induktionsbeweise sorgen dafür, dass man auf den falschen Weg geleitet wird.

- c) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist streng monoton fallend und beschränkt, daraus folgt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist konvergent.

Tipp: Vermeide das Cauchy-Kriterium

Man will das Cauchy-Kriterium nicht verwenden, das ist hässlich und unhandlich. Es wird auch nur für wenige Aussagen gebraucht. In der Klausur wird es keine Aufgabe geben, wo man das Cauchy-Kriterium verwenden muss.

Tipp: Rechne zu ende auch wenn du einen Fehler gemacht hast

Solltest du bemerken, dass du eine Aufgabe nicht ganz richtig hast in einem früheren Punkt (Hier beispielsweise a)), dann beende deine Aufgabe trotzdem. Du bekommst trotzdem Punkte wenn du das richtige aus deinen falschen Rechnungen schlussfolgerst. Beispiel: Du folgerst in a), dass die Beschränktheit nicht gilt, dann folgere in c) das richtige aus deinem falschen a). Also dann würde die Divergenz folgen.

d)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} && \begin{array}{l} a, b) \\ \Leftrightarrow \end{array} \\ a &= \frac{a}{a + 1} && \Leftrightarrow \\ a(a + 1) &= a && \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^2 + a &= a & \Leftrightarrow \\
 a^2 &= 0 & \Leftrightarrow \\
 a &= 0
 \end{aligned}$$

$$\exists a \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Randnotiz

$$1 = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$$

Randnotiz

Optionen zur Bestimmung auf Konvergenz:

- 1) Monotonie & Beschränktheit
- 2) Cauchy-Kriterium (fast nie)
- 3) Implizite Darstellung (sehr selten)

•

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

- Beweise mit Induktion

3.2 Tipps für Rekursive Folgen

a) Folgenglieder bestimmen

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$$

b) So einfach wie möglich umformen $a_{n+1} = \dots$

c) Schritte 1-4 für Konvergenz

- 1) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt ist.
- 2) Zeige $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton
- 3) Konvergent?
- 4) Geben Sie den Grenzwert an.

\Rightarrow Schranken aus 1) auch später anpassbar

\Rightarrow Beschränktheit induktiv zeigen

\Rightarrow Monotonie direkt beweisen (Beschränktheit nutzen)

3.3 Aufgabe 2

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

$$a_0 = 1$$

1) $a_n \in [1, 2]$

2) **✗**

3)

4) $\sqrt{2}$

4 Repititorium 10.05.2022

4.1 Reihen und Potenzreihen

4.1.1 Divergenz

Wie kann man Divergenz beweisen:

- 1) Ist a_k keine Nullfolge? (Notwendige Bedingung)
 \Rightarrow nicht konvergent, nicht absolut konvergent
- 2) Minorantenkriterium: $\exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 : a_k \geq c_k \geq 0 \wedge \sum_{k=1}^{\infty} c_k$ divergent
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent \Rightarrow nicht konvergent \Rightarrow nicht absolut konvergent
Bekannte divergente Reihen: $\sum \frac{1}{k}, \sum (-1)^k, \sum \frac{1}{\sqrt{k}}$
- 3) Wurzelkriterium: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_k|} > 1$
Limes Superior
- 4) Quotientenkriterium: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$
Limes Superior

4.1.2 Konvergenz

- 1) Ähnlich zu bekannter Reihe? Geometrische!
 $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \sum \frac{1}{k^m} m \geq 2, \sum (x + \frac{1}{k})^k x \in [0, 1), \sum \frac{k^5}{k!}$ konvergent
 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1, \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1-x^{a+1}}{1-x}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^4}{k!} = e^x, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k = \ln(x)$
- 2) Majorantenkriterium: $\exists k_0 \in \mathbb{N} \forall h \geq h_0 : |a_k| \leq c_k$ und $\sum c_k$ absolut konvergent
 $\Rightarrow \sum a_k$ absolut konvergent
- 3) a) Quotientenkriterium: $\exists q \in (0, 1) \exists h_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 : a_n \neq 0 \wedge \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$
 $\Rightarrow \sum a_k$ absolut konvergent
- 4) b) Wurzelkriterium: $\exists q \in (0, 1) \exists h_0 \in \mathbb{N} \forall h \geq h_0 : \sqrt[k]{|a_k|} \leq q$
 $\Rightarrow \sum a_k$ absolut konvergent
- 5) Leibniz: a_k monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergiert
- 6) Teleskopsumme: $\sum_{k=0}^N a_k = \sum_{k=0}^N (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{N+1}$
 $\sum_{n=0}^N a_k = \sum_{k=0}^N (b_k - b_{k+2}) = b_0 + b_1 - b_{N+1} - b_{N+2}$

Tipp: Zeige immer erst die absolute Konvergenz

Soll die Konvergenz einer Reihe gezeigt werden, dann sollte immer die absolute Konvergenz versucht werden zu zeigen, da aus dieser immer die gewöhnliche Konvergenz folgt.

4.1.3 Indizien wann welches Verfahren verwendet werden sollte

Majoranten	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(x)}{q_k(x)}$	Minoranten
Quotienten	$(x!, \frac{x}{y}, x^y) - \text{Mischmasch}$	Quotienten
Wurzel	$a_k \sim > (b_k)^k$	Wurzel
	$a_n < b_k^k \wedge b_k$ konvergiert absolut mit $\sqrt{\cdot}$	
	$a_n > b_k^k \wedge b_k$ divergiert mit $\sqrt{\cdot}$	
Leibniz	$a_n = (-1)^k \cdot b_k$	
Teleskopsumme	$a_k = b_n - b_{k+m} \vee a_k = \frac{1}{(b_k+x)(b_k-y)}$	

4.2 Aufgabe 1

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-42)^n$$

Das ist keine Nullfolge! \rightarrow divergent.

Vorgehen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(-42)^n} = 0 \Rightarrow a_n \text{ bestimmt divergent} \Rightarrow a_n \text{ keine Nullfolge}$$

4.3 Aufgabe 2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+1} \sim \frac{1}{k^2}$$

Vorgehen: Abschätzung / Majorantenkriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

4.4 Aufgabe 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! \cdot 3n}{(n+2)! - n!}$$

Das ganze ist keine Nullfolge!

Vorgehen:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)! \cdot 3n}{(n+2)! - n!} &> \frac{(n+1)! \cdot 3n}{(n+2)! + n!} > \frac{(n+1)! \cdot 3n}{(n+2)! + (n+2)!} \\ &= \frac{(n+1)! \cdot 3n}{2 \cdot (n+2)!} = \frac{3n}{2(n+2)} = \frac{3n}{2n+2} \\ &> \frac{3n}{2n+2n} = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

4.5 Aufgabe 4

$$\begin{aligned}s_N &= \sum_{n=2}^N \frac{2}{4n^2 - 9} = \sum_{n=2}^N \frac{2}{(2n-3)(2n+3)} = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{3} \frac{2}{(2n-3)} - \frac{1}{3} \frac{2}{(2n+3)} \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[\sum_{n=2}^N \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3} \right]\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\frac{A}{2n-3} - \frac{B}{2n+3} = \frac{A(2n+3) - B(2n-3)}{(2n-3)(2n+3)}$$

$$\frac{2An + 3A - 2Bn + 3B}{(2n-3)(2n+3)} = \frac{2n(A-B) + 3(A+B)}{(2n-3)(2n+3)} = \dots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15}$$

$$2n(A-B) = 0n \Leftrightarrow A = B$$

$$3(A+B) = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \quad B = \frac{1}{3}$$

4.6 Aufgabe 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$$

- a) Zeige, dass das Quotientenkriterium nicht anwendbar ist!
- b) Zeige, dass das Wurzelkriterium funktioniert
- c) Ist die Reihe konvergent?

5 Repitorium 17.05.2022

5.1 Hilfreiche Anmerkungen zu Beginn

5.1.1 Definition von Funktionen

$$\forall x \in A \exists! y \in B : f(x) = y$$

Jedem x ist genau ein y zugeordnet.

Definitionsbereich A

Bildbereich B

Bild $f(A) \subseteq B$

5.1.2 Injektivität

$$\forall x, x' \in A : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \quad (\text{nach } x \text{ auflösbar } x \cdot e^x \text{ ✗ } x \log x) \frac{x+2}{5} \checkmark$$

$$\forall x, x' \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(x') \quad (\text{Monoton(streng), Vorzeichenwechsel})$$

5.1.3 Surjektivität

$$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$$

Umkehrfunktion bildbar!

$$B = [a, b] \wedge \exists x_a : f(x_a) = a \wedge \exists x_b : f(x_b) = b \wedge f \text{ stetig} \quad (\text{Zwischenwertsatz})$$

$$B = \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \wedge f \text{ stetig} \quad (\text{Zwischenwertsatz})$$

5.1.4 Umkehrfunktion

$$\exists f^{-1} \forall x \in A : f^{-1}(f(x)) = x \quad (\text{Nachrechnen!})$$

5.1.5 Beschränktheit

$$\exists k > 0 \forall x \in A : |f(x)| < k \quad (\text{direkte Beweise})$$

$$0 < 1 \Rightarrow |x| < 1 + |x|$$

\vdots

$$|f(x)| < k$$

Fange mit einer Wahrheit an und forme um!

Wahrheiten die man gerne nutzt:

- $0 < 1$
- $0 \leq x^2$
- $0 \leq (x - a)^2$
- $0 \leq |x - a|$

5.1.6 Monotonie

Ein Beispielfall (streng steigende Monotonie)

$$\forall x, x' \in A : x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$$

5.1.7 Bekannte Korollare

Umkehrfunktion \Leftrightarrow Bijektiv

Strenge Monotonie \Rightarrow Umkehrfunktion auf $f(A)$

5.2 Aufgabe 1

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$

- a) Überprüfe f auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität
- b) Ist f beschränkt?
- c) Es sei $A = [0, \infty)$ und $B = (0, 1]$ zeigen Sie, dass eine Umkehrabbildung existiert und geben Sie diese an.

5.2.1 Musterlösung Alexander Frank

- a) Injektiv? Gegenbeispiel:

$$f(-1) = \frac{1}{1+|-1|} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+|1|} = f(1)$$

Tipp: Mache eine grobe Skizze im Kopf

Male dir die Funktion grob auf. Mache dir klar in welche Richtung die Funktion für ∞ und $-\infty$ verläuft. Anschließend setzen 0 (manchmal auch 1) ein. Wähle wenige Werte mehr um 0 herum und zeichne deine Skizze.

Surjektiv? $B = \mathbb{R}$ Schöner Weg (muss man aber auch direkt sehen):

$$\begin{aligned} |x| \geq 0 &\neq -\frac{1}{2} && \Leftrightarrow \\ |x| &\neq -\frac{1}{2} && \Leftrightarrow \\ 1 + |x| &\neq \frac{1}{2} && \Leftrightarrow \\ \frac{1}{1 + |x|} &\neq 2 && \Leftrightarrow \\ f(x) &\neq 2 \end{aligned}$$

Der Praktikablere Weg:

$$-1 \neq \frac{1}{1 + |x|} \quad \cdot(1+|x|) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
-(1+|x|) &\neq 1 && \Leftrightarrow \\
-1-|x| &\neq 1 && \Leftrightarrow \\
-|x| &\neq 2 && \Leftrightarrow \\
|x| &\neq -2 && \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Weiterer möglicher Weg:

$$\begin{aligned}
f(x) &\geq 0 && \Leftrightarrow \\
\frac{1}{1+|x|} &\geq 0 && \cdot (1+|x|) \\
1 &\geq 0 && \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Somit gilt $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = -2$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+|x|} &\leq 1 && \cdot (1+|x|) \\
1 &\leq 1+|x| && \Leftrightarrow \\
0 &\leq |x| && \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{-2 < 0 \leq f(x) < 2}_{|f(x)| < 2}$$

$$\text{Bild}(f) = f(\mathbb{R}) = (0, 1]$$

c)

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{1+|x|} && \Leftrightarrow \text{mit } x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\
y &= \frac{1}{1+x} && , x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{y \geq 0} \\
\frac{1}{y} &= 1+x && \Leftrightarrow, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{-1} &= \frac{1}{x} - 1 \\
A' &= (0, 1] \quad B' = [0, \infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) &\stackrel{x \geq 0}{=} \frac{1}{f(x)} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{1+x}} - 1 \\
&= \frac{1+x}{1} - 1 \\
&= 1+x-1 = x
\end{aligned}$$

6 Repitorium 24.05.2022

Tipp: Induktion funktioniert nur über die Natürlichen Zahlen

Sobald irgendwas vorliegt über die reellen Zahlen, rationalen Zahlen, irgendwas kontinuierliches oder ähnliches, kann keine Induktion angewendet werden.

\mathbb{Q}, \mathbb{R} Induktion? **Nein! Komplett Flasch!**

Tipp: Abschätzungen und Folgerungen nur in eine Richtung

Abschätzungen dürfen immer nur in eine Richtung erfolgen und nicht in zwei!

$$\begin{aligned}x < y \leq z & \quad \checkmark \Rightarrow x < z \quad \checkmark \\x < y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq z & \quad \times \quad x < z \\A \Rightarrow B \Rightarrow \dots \Rightarrow X \Leftarrow y & \quad \times\end{aligned}$$

Tipp: Skizziere eine Idee

Aufgabenstellung:

Idee:

1. Löse $x > 1$
2. Löse $xy - 1$
3. Irgendwie muss nun $x \in [-1, 1]$ gezeigt werden
 - a) Stetigkeit + Kompakt
 - b) :

Wenn man nicht genug Handwerk besitzt eine Aufgabe vernünftig zu lösen, skizziere das Vorgehen, wie die Aufgabe gelöst werden sollte. Das Ganze gibt Teilpunkte! Außerdem hilft es beim späteren Draufschauen schneller auf eine Idee zu kommen.

6.1 Aufgabe 1

Ursprüngliche Aufgabe:

$$\begin{aligned}f &: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \\f(x) &= \frac{1}{2x}\end{aligned}$$

Zeigen Sie mit dem ε - δ -Definition, dass die Funktion stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Zum einfacheren Lösen teilen wir die Aufgabe im Folgendem in Teilaufgaben auf:

- a) f ist streng monoton fallend
- b) Schätzen Sie eine sinnvolle Obergrenze für $\delta > 0$ ab
 $\forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \Rightarrow x \in \mathbb{R}_{>0}$
- c) Zeige Stetigkeit mit ε - δ -Definition.
- d) Konstruiere ein Gegenbeispiel für gleichmäßige Stetigkeit

Randnotiz

Falls jemand die Grafiken von der Tafel abgeschrieben hat oder ein Foto davon gemacht wurde, bitte einfach auf Telegramm einmal bitte in die Mafi2 Gruppe schicken oder mir per pm oder einfach selbst in Latex als randnotiz”(command) einfügen, wenn sich wer traut :)

6.1.1 Lösung Alexander Frank

a)

$$0 < x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{2x} > \frac{1}{2y} \Leftrightarrow f(x) > f(y)$$

b) Vorüberlegung:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{|x - a|} < \delta \Rightarrow \underline{x \in \mathbb{R}_{>0}}$$

Randnotiz

Hier sollte ein Zahlenstrahl zur Verdeutlichung von $|x - a| < \delta$ hin

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta \stackrel{+a}{\Leftrightarrow} a - \delta < x < a + \delta \\ x &\in (\underbrace{a - \delta}_{>0}, a + \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - \delta > 0 &\Leftrightarrow a > \delta \\ \mathbf{a} &> \delta > \mathbf{0} \end{aligned}$$

Lösung:

$$\forall a \in (0, 1) \exists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (a > \delta > 0) \forall x \in (0, 1) : |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{2x} - \frac{1}{2a} \right| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2x} - \frac{1}{2a} \right| &= \left| \frac{2a - 2x}{4ax} \right| && (\text{Hauptnenner}) \\ &= \frac{|a - x|}{2ax} \\ &< \frac{1}{2ax} \cdot \delta && (|a - x| < \delta) \\ &\stackrel{*}{\leq} \frac{1}{2a \frac{a}{2}} \cdot \delta \\ \frac{\delta}{a^2} &\stackrel{!}{<} \varepsilon \end{aligned}$$

$$* x > a - \underbrace{\delta}_{\frac{a}{2}} > \frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{a^2} < \varepsilon &\Leftrightarrow \\ \delta &< \varepsilon a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta &< \min\left(\frac{a}{2}, \varepsilon a^2\right) \\ \delta &:= \min\left(\frac{a}{4}, \frac{\varepsilon}{2} a^2\right) \end{aligned}$$

$$\forall a \in (0, 1) \forall \varepsilon > 0 \forall x \in (0, 1) : |x - a| < \min\left(\frac{a}{4}, \frac{\varepsilon}{2} a^2\right) \Rightarrow \left| \frac{1}{2x} - \frac{1}{2a} \right| < \varepsilon$$

c) wird in b) beantwortet?

d)

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in (0, 1) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Wähle $x = \delta$. (Weil $\lim \delta \searrow 0$) Wähle $y = x - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$

Tipp: Wähle x und y

Verläuft die Funktion für x gegen 0 gegen ∞ , dann wähle x mit δ im Nenner. Läuft x gegen ∞ und $f(x)$ gegen ∞ so wähle x mit δ im Nenner. y sollte immer als

$$y = x \quad \underbrace{\pm}_{\text{Eins davon}} \quad \frac{\delta}{2}$$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

$$|x - y| = |\delta - \frac{\delta}{2}| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{2\delta} - \frac{1}{2\frac{\delta}{2}}| = |\frac{1}{2\delta} - \frac{1}{\delta}| = \frac{1}{2\delta} \stackrel{\delta < 1}{\geq} \frac{1}{2}$$

$$\text{2. Fall } \delta \geq 1 \quad |x - y| < \delta \quad x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{4}$$

$$|\frac{1}{2\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\frac{1}{4}}| = 1 \geq \frac{1}{2}$$

7 Repititorium 31.05.2022

7.1 Alle wichtigen Sachen (auch für die Klausur) zum Thema Differenzierbarkeit aus Kapitel 5.1/5.2

7.1.1 Definition Differentialquotient

Def:

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A \setminus \{a\}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \lim_{n \rightarrow 0, n \neq 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

7.1.2 Definition Extrema

Def: $x \in (a, b)$ ist Extrema von $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, falls $\exists \varepsilon > 0 \forall y \in (a, b) : |x - y| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} f(y)$
(Minimum)
Maximum

7.1.3 Notwendige/Hinreichende Kriterium

Notwendig: $x \in (a, b) : f'(x) = 0$

Hinreichend: $x \in (a, b) : f'(x) = 0 \wedge \begin{matrix} f''(x) > 0 (Minimum) \\ f''(x) < 0 (Maximum) \end{matrix}$

7.1.4 Satz von Rolle

$a < b$, f stetig auf $[a, b]$, differenzierbar (a, b) , $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x \in (a, b) : f'(x) = 0$

7.1.5 Mittelwertsatz

$a < b$, f stetig $[a, b]$, differenzierbar $(a, b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

7.1.6 Monotonie

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng monoton wachsend

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ monoton wachsend

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend

$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ monoton fallend

7.1.7 Konvex /konkav

$f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ konvex

$f''(x) < 0 \Rightarrow f$ konkav

7.1.8 Satz zwischen den Zeilen

$x \in (a, b)$ lokales Extremum für f und f konvex/konkav $\Rightarrow x$ globales Extremum (vor Satz 5.23)

7.2 Aufgabe 1

Bildet die Ableitung von f mit dem Differentialquotient für $f(x) = 2x^2 - x$

7.2.1 Musterlösung Alexander Frank

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow y, x \neq y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \lim_{x \rightarrow y, x \neq y} \frac{2x^2 - x - 2y^2 + y}{x - y} \\&= \lim_{x \rightarrow y, x \neq y} \frac{2(x^2 - y^2) - (x - y)}{x - y} \\&= \lim_{x \rightarrow y, x \neq y} \frac{2(x + y)(x - y) - (x - y)}{x - y} \\&= \lim_{x \rightarrow y, x \neq y} 2(x + y) - 1 \\&= \underbrace{2 \cdot 2x}_y - 1 = \underbrace{4x}_y - 1\end{aligned}$$

7.3 Aufgabe 2

$$\begin{aligned}f &: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\f(x) &= 4x \cdot \ln(x) + 1\end{aligned}$$

Bestimme alle Extrema von f .
Sind diese jeweils global oder lokal?

7.3.1 Musterlösung Alexander Frank

- a) Bilde f' und f''
- b) Berechne potentielle (lokale) Extrema $f'(x) = 0$
- c) Überprüfe auf global
- a)

$$\begin{aligned}f(x) &= 4x \cdot \ln(x) + 1 \\f'(x) &= 4 \cdot \ln(x) + 4 \\f''(x) &= \frac{4}{x}\end{aligned}$$

- b) Lokale Extrema?:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 && \Leftrightarrow \\4 \ln(x) + 4 &= 0 && \Leftrightarrow \\4 \ln(x) &= -4 && \Leftrightarrow \\\ln(x) &= -1 && \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{4}{e}(-1) + 1 = \frac{e-4}{e} < 0$$

$\left(\frac{1}{e}, \frac{e-4}{e}\right)$ Wendestelle? lokales/globales Extremum?

c)

$$f''(x) = \frac{4}{x} > 0 \text{ für } x \in (0, \infty)$$

$\Rightarrow f$ ist konvex

\Rightarrow Jedes lokale Extremum ist global.

7.4 Aufgabe 3

$$f : [1, 2]$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^{-3} - \frac{1}{2}x^2 + x$$

Gebe das globale Minimum an (und beweise dies).

- Bilde f' und f''
- Zeige es existiert ein lokales potentiellles Extremum in $(1, 2)$
- Zeige dieses ist ein Maximum !
- Gebe das Minimum an.

7.4.1 Musterlösung Alexander Frank

- f ist rationale Funktion $\Rightarrow f \in C^\infty((0, \infty), \mathbb{R})$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^{-3} - \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$f'(x) = 2x^{-4} - x + 1$$

$$f''(x) = -8x^{-5} - 1$$

- $\exists x \in (1, 2) : f'(x) = 0$

Zwischenwertsatz:

$$f' \text{ stetig; } f'(1) = 2 - 1 + 1 = 2 > 0$$

$$f'(2) = \frac{2}{16} - 2 + 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8} < 0$$

$$\Rightarrow \exists x \in (1, 2) : f'(x) = 0$$

c)

$$f''(x) = -8x^{-5} - 1 < 0 \text{ für } x \in [1, 2]$$

f ist konkav

\Rightarrow lokales Extremum = globales Extremum

notwendig + hinreichend \Rightarrow Maximum in $(1, 2)$

jedes lokale Extremum \Rightarrow globales Maximum

d)

$$f(1) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{6}$$

$$f(2) = -\frac{2}{24} - 2 + 2 = -\frac{1}{12}$$

8 Repititorium 07.06.2022

8.1 Aufgabe 1 (Taylor Reihen)

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

$$x_0 = 0$$

Schritt 1: Wie weit ist die Funktion differenzierbar?

Schritt 2: Bilde die ersten drei Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ und $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.

Schritt 3: Bestimme $f^{(k)}(x)$ (\Rightarrow und mache einen Induktionsbeweis)

Schritt 4: Berechne $f^{(k)}(x)$

Schritt 5: Bilde die Taylorreihe/(polynom von Grad n)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Schritt 6: Bestimmen Sie den

- Konvergenzradius
- Konvergenzbereich

Tipp: Unterschied Konvergenzradius - Konvergenzbereich

Radius:

- Quotientenkriterium

$$\forall x \in A : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N :$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$r := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

- Quotientenkriterium

$$\forall x \in A : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

$$r \stackrel{n \rightarrow \infty}{:=} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \checkmark \text{Limes}$$

$$r = \infty \Rightarrow \text{Konvergenzbereich } A \subseteq \mathbb{R}$$

8.1.1 Musterlösung Alexander Frank

Schritt 1: $f \in C(A, \mathbb{R}) \quad A = \mathbb{R}$

Tipp: In Klausuren meist C^∞

In der Klausur werden eigentlich immer Funktionen gegeben, die unendlich ableitbar sind.

Schritt 2:

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x - e^{-x} \\f''(x) &= e^x + e^{-x} \\f'''(x) &= e^x - e^{-x} \\f(0) &= 2 \\f'(0) &= 0 \\f''(0) &= 2 \\f'''(0) &= 0\end{aligned}$$

Schritt 3: Aussage:

$$f^{(k)}(x) = e^x + (-1)^k e^{-x}$$

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned}f^{(0)}(x) &= e^x + e^{-x} \\f^{(1)}(x) &= e^x - e^{-x} \\f^{(2)}(x) &= e^x + e^{-x} \\f^{(3)}(x) &= e^x - e^{-x}\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\text{Es existiert ein } k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(x) = e^x + (-1)^k e^{-x}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)}(x))' \\&\stackrel{I.V.}{=} (e^x + (-1)^k e^{-x})' \\&\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} e^x + (-1)^k (-1) e^{-x} \\&= e^x + (-1)^{k+1} e^{-x}\end{aligned}$$

Randnotiz

Schätze für jede Aufgabe (a – d) ein $f^{(k)}(x)$.

$a_0 = x$	$c_0 = -1$	$b_0 = x^2 - x$	$d_0 = 1 = 1 \cdot 1$
$a_1 = x^2$	$c_1 = 1$	$b_1 = x^2 - x$	$d_1 = 2 = 1 \cdot 2$
$a_2 = 2x^3$	$c_2 = 1$	$b_2 = x^2 - x$	$d_2 = 8 = 2 \cdot 2^2$
$a_3 = 6x^4$	$c_3 = -1$	$b_3 = x^2 - x$	$d_3 = 48 = 6 \cdot 2^3$
$a_4 = 24x^5$	$c_4 = -1$	$b_4 = x^2 - x$	$d_4 = 136 = 24 \cdot 2^4$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$a_k = k!x^{k+1}$	$c_k = \sin(k\frac{\pi}{2}) - \cos(k\frac{\pi}{2})$	$b_k = x^{k+2} - (k+1)x$	$d_k = 2^k \cdot k!$

Schritt 4:

$$f^{(k)}(x) = e^x + (-1)^k e^{-x}$$

$$f^{(k)}(0) = 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & k \text{ gerade} \\ 0 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Schritt 5:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{k!} x^k \stackrel{k=2i}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{(2i)!} x^{2i}$$

Schritt 6: Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{\frac{2}{2(i+1)!} x^{2(i+1)}}{\frac{2}{(2i)!} x^{2i}} \right| = \frac{1}{(2i+1)(2i+2)} |x|^2$$

$$< \overbrace{\frac{1}{(2N+1)(2N+2)}}^{\forall x \in \mathbb{R} \ N := \lceil x \rceil \ \forall i \geq N} |x|^2 < 1 \quad \square$$