① טענה 1: יהיו $g(n)=\lfloor\sqrt{n}\rfloor!$ , $f(n)=(\sqrt{n})^{\sqrt{n}}$ . אז: $\log(f(n))=\Theta(\log(g(n)))$

חסם תחתון:

$$\log(\sqrt{n})^{\sqrt{n}} \ge c\cdot\log(\lfloor\sqrt{n}\rfloor!)$$

$$\log(\lfloor\sqrt{n}\rfloor!)=c\cdot\log(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\cdot\lfloor\sqrt{n}-1\rfloor\dots\cdot 1)= c\cdot(\log(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)+\log(\lfloor\sqrt{n}-1\rfloor)+\dots+\log(\lfloor 1\rfloor)).$$

$$\sqrt{n}\cdot\log(\sqrt{n})\ge c\cdot(\log\lfloor\sqrt{n}\rfloor)+\dots+\log(\lfloor 1\rfloor))$$

מכיוון שהאגף השמאלי תמיד גדול יותר מהאגף הימני
ולכן כאשר $c=1$ זה יישמר.

חסם עליון:

$$\log(\sqrt{n})^{\sqrt{n}}\le c\cdot\log(\lfloor\sqrt{n}\rfloor!)$$ כמו בחסם תחתון

$$\sqrt{n}\cdot\log(\sqrt{n})^{\frac{1}{2}}\le\log(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)+\dots+\log(\lfloor 1\rfloor)$$

נפצל את הביטוי באגף הימני ל־2 ולכן

$$\sqrt{n}\cdot\log(\sqrt{n})^{\frac{1}{2}}\le\log(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)+\log(\lfloor\sqrt{n}-1\rfloor)\cdot\log(\lfloor\sqrt{n}+1\rfloor)\dots+\log(\lfloor 1\rfloor)$$

מכאן ניתן לראות שכאשר $c=2$
הביטוי השמאלי (בגלל שבחזקה יש שורש) קטן ולכן א' השוויון מתקיים.

$\blacksquare$

<u>טענה 2:</u> הגדרת T: $T(1)=2$, $T(n)=\left(T(\frac{n}{2})\right)^2\cdot 2^n$. אזי, $T(n)=2^{\Theta n}$

<u>חסם תחתון:</u>

$$T(n)\ge 2^{\Omega n}$$
$$\Downarrow$$
$$T(n)\ge 2^{c n}$$
$$\left(T(\tfrac{n}{2})\right)^2\cdot 2^n \ge 2^{c\cdot n}$$
$$\left(T(\tfrac{n}{2})\right)^2 \ge 2^{(c-1)\cdot n}$$

כבר כאן ניתן לראות שכאשר $c=1$ האגף הימני שווה ל-1 בלי תלות ב-n (מה שקטן יותר אפילו מתנאי הבסיס ($T(1)=2$) ולכן זה תמיד יהיה חסם תחתון אך לא יכול להיות חסם עליון. ולכן הטענה לא נכונה.

■

<u>טענה 3:</u> f,g פונקציות מונוטוניות עולות. אזי: $f(g(n))=O(n)$, $f(n)=\Omega(n)$, $g(n)=O(n)$

$$\begin{cases} f(n)\ge c_1\cdot n \longrightarrow f(g(n))\ge c_1\cdot g(n) \\ f(g(n))\le c_2\cdot n \text{ (מהנתון)} \end{cases}$$

$$c_1\cdot g(n)\le f(g(n))\le c_2\cdot n$$
$$\Downarrow$$
$$g(n)\le \frac{c_2}{c_1}\cdot n$$
$$\Downarrow$$

$g(n)$ קטן או שווה מ-n כפול קבוע ולכן הטענה מתקיימת.

■

② $f_3(n), f_1(n), f_7(n), f_4(n), f_5(n), f_6(n), f_2(n)$

③ A) המשתנה $k$ בכל פעם עולה בחזקת $\frac{1}{3}$

ועכה עד ש: $k \le 2$.

$$k^{\left(\frac{1}{3}\right)^x} = 2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \log n = \log 2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{\log n}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{\log n}\right) = x$$

לכן לפונקציה יש סדר גודל של $\log(\log(n))$

B) בפונקציה יש לולאה מקוננת והיא קוראת לפונקציה מסעיף A ולכן סדר הגודל של הפונקציה הוא $n^2 \cdot \log(\log(n))$

C) $x$ בכל פעם גדל בחזקת $\frac{1}{2}$ ולכן כמו בסעיף A יש סדר גודל של $\log(\log(n))$. גם קופץ $x$ בלולאה הראשונה גדל פי 2 בכל פעם ולכן עובר רק על חצי מהאיברים. לכן סדר הגודל של הלולאה עצמה הוא $\log(n)$. ולכן סיבוכיות זמן הריצה הכולל של הפונקציה הוא $\log(n) + \log(\log(n))$ שקול $\log(n)$.

D) יש לולאה אחת והפונקציה קוראת לפונקציה C ולכן סיבוכיות זמן הריצה הוא $n \cdot \log(n)$

(4) הלולאה הראשונה מתחילה ב- $i=1$ וממשיכה
עד שהערך במערך לא שווה ל-א או שהגענו עד סוף
המערך (מה שיבוא קודם). ובכל פעם
הערך של $i$ גדל פי 2 ביחס לערך הקודם. $\Leftarrow$ סיבוכיות
זמן הריצה של הלולאה היא $\log(m)$. לאחר סיום
הלולאה מתבצעת אחד מהתנאים שמבצע חיפוש
בינארי בין $\frac{i}{2}$ ל- $i$ או לסוף המערך (תלוי בתנאי) $\Leftarrow$ סיבוכיות
זמן הריצה היא $\log(m)$.

$\Leftarrow$ סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא $O(\log(m))$