(א) בכל חלוקה הבעיה של הגודל במקום הקטן ביותר מוקטנת פי $\frac{1}{a}$

$\Downarrow$

$$1\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{k}=n$$

$\Downarrow$

$$k=\log_{\frac{1}{a}} n \Rightarrow n=\frac{\log_2 n}{\log_2 \frac{1}{a}}$$

$\Downarrow$

עומק הרקורסיה של העלה עם העומק המינימלי: $\frac{\log_2 n}{\log \frac{1}{a}}$

(ב) בכל חלוקה הבעיה של הגודל במקום הגדול ביותר מוקטנת פי $\frac{1}{1-a}$

$\Downarrow$

$$1\cdot\left(\frac{1}{1-a}\right)^{k}=n$$

$\Downarrow$

$$k=\log_{\frac{1}{1-a}} n \Rightarrow n=\frac{\log_2 n}{\log_2 \frac{1}{1-a}}$$

$\Downarrow$

עומק הרקורסיה של העלה עם העומק המקסימלי הוא: $\frac{\log_2 n}{\log \frac{1}{1-a}}$

② אנחנו יודעים שעץ אלגוריתם מיון נכון חייב להבדיל בין $n!$ תמורות שונות. בנוסף אנחנו יודעים שלעץ בגובה h יש לכל היותר 2^h עלים. $\Leftarrow$

$$2^h \geq n!$$

$$\Downarrow$$

$$h \geq \log(n!) = \log(n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2) = \log(n)+\log(n-1)+\log(n-2)+\ldots+\log(2) =$$

$$= \sum_{i=2}^{n}\log i = \sum_{i=2}^{\frac{n}{2}-1}\log i + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\log i$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=2}^{\frac{n}{2}-1}\log i + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\log i \geq 0 + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\log\frac{n}{2} = \frac{n}{2}\cdot\log\frac{n}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n}{2}\cdot\log\frac{n}{2} = \Omega(n\cdot\log n)$$