Examen de Autómatas, Lenguajes y Computabilidad

ALC

1 de Septiembre de 2005

(I) CUESTIONES: (Justifique formalmente las respuestas)

1. Sea $L = \{x \in \{0,1,2\}^* : x$ contiene símbolos $0,1$ y $2\}$. Demuestre que L es regular.

(1.5 puntos)

Solución

Basta con proporcionar una expresión regular para el lenguaje L. Para ello, procederemos a establecer todos los casos en que se pueden clasificar las cadenas de L, que son los siguientes:

- Las cadenas donde un 0 precede a un 1 que precede a un 2

$$r_1 = (0+1+2)^*0(0+1+2)^*1(0+1+2)^*2(0+1+2)^*$$

- Las cadenas donde un 0 precede a un 2 que precede a un 1

$$r_2 = (0+1+2)^*0(0+1+2)^*2(0+1+2)^*1(0+1+2)^*$$

- Las cadenas donde un 1 precede a un 0 que precede a un 2

$$r_3 = (0+1+2)^*1(0+1+2)^*0(0+1+2)^*2(0+1+2)^*$$

- Las cadenas donde un 1 precede a un 2 que precede a un 0

$$r_4 = (0+1+2)^*1(0+1+2)^*2(0+1+2)^*0(0+1+2)^*$$

- Las cadenas donde un 2 precede a un 0 que precede a un 1

$$r_5 = (0+1+2)^*2(0+1+2)^*0(0+1+2)^*1(0+1+2)^*$$

- Las cadenas donde un 2 precede a un 1 que precede a un 0

$$r_6 = (0+1+2)^*2(0+1+2)^*1(0+1+2)^*0(0+1+2)^*$$

Luego el lenguaje L queda denotado por la siguiente expresión regular

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6$$

2. Sea $L = \{x \in \{0,1\}^* : |x|_0 = |x|_1\}$ y sea el homomorfismo h definido como $h(0) = 00$ y $h(1) = 1$. Describa los lenguajes $h^{-1}(L)$, L^r y $0^{-1}L$.

(1.5 puntos)

Solución

El lenguaje $h^{-1}(L)$ se define como el conjunto $\{x \in \{0,1\}^* : h(x) \in L\}$. Esta definición es equivalente a la igualdad $h^{-1}(L) = \{x \in \{0,1\}^* : |h(x)|_0 = |h(x)|_1\}$. Obsérvese que un efecto que consigue el homomorfismo h sobre una cadena arbitraria de ceros y unos es duplicar el número de ceros. Por lo tanto, podemos definir $h^{-1}(L) = \{x \in \{0,1\}^* : |x|_1 = 2 \cdot |x|_0\}$.

El lenguaje L^r se define en los mismos términos que el lenguaje L. Obsérvese que si $x \in L$ entonces $|x|_0 = |x|_1$ y, por lo tanto, $|x^r|_0 = |x^r|_1$ por lo que $x^r \in L$, con lo que podemos llegar a la conclusión que $L = L^r$.

Por último, la operación $0^{-1}L$ elimina el primer cero de las cadenas del lenguaje que comienzan por tal símbolo y obtiene su sufijo correspondiente. Al eliminar el primer cero de la cadena original, el número de ceros queda disminuido en una unidad con respecto a número de unos, por lo que $0^{-1}L = \{x \in \{0,1\}^* : |x|_1 = |x|_0 + 1\}$.

3. Sea $P_5(x)$ el prefijo de x de longitud 5 si $|x| \geq 5$ o x si $|x| < 5$. Se define $P_5(L) = \{P_5(x) : x \in L\}$. ¿Es la clase de los lenguajes incontextuales cerrada bajo la operación P_5 ?

(1 punto)

Solución

La clase de los lenguajes incontextuales sí es cerrada bajo la operación P_5. Obsérvese que sea cual sea el lenguaje L, el resultado $P_5(L)$ siempre será un lenguaje finito dado que obtiene siempre cadenas de longitud menor o igual a cinco. Por ser $P_5(L)$ un lenguaje finito, es también regular y, por lo tanto, incontextual.

4. Sea la operación P definida sobre lenguajes de la forma $P(L) = \{x \in L : x^r \notin L\}$. Establezca si la operación P es de cierre para la clase de los lenguajes recursivos.

(1 punto)

Solución

La operación P es de cierre para los lenguajes recursivos. Para demostrarlo basta con seguir un esquema de aceptación en una máquina de Turing de acuerdo con el siguiente orden:

Dada la cadena de entrada x:

a) Establecer si x pertenece a L.

Se puede establecer en tiempo finito ya que, dado que L es recursivo, existe una máquina de Turing que siempre para y permite establecer la pertenencia o no de una cadena arbitraria a L

b) Obtener el reverso de x

Se puede realizar una subrutina en una máquina de Turing multicinta que, leída la entrada, vuelva hacia la izquierda copiando los símbolo en sentido inverso. Este conjunto de movimientos finaliza, evidentemente, en un tiempo finito.

c) Establecer si x^r pertenece a L

Volvemos al razonamiento establecido en el punto a).

Las tres acciones anteriores finalizan en tiempo finito y permiten establecer si una cadena arbitraria pertenece o no a $P(L)$. La pertenencia se establece siempre que en el punto a) se acepte la cadena x y en el punto c) se establezca la no pertenencia de la cadena x^r. Por lo tanto, $P(L)$ es recursivo siempre que L lo sea y, en consecuencia, P es una operación de cierre para la clase de los lenguajes recursivos.

(II) PROBLEMAS:

5. Desarrolle un módulo *Mathematica* que, dado como entrada un autómata finito determinista $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, proporcione como salida un autómata finito determinista $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$ de forma que $F' = \{q \in Q : \exists a \in \Sigma,\ \delta(q,a) \in F\}$. (Observe que los nuevos estados finales son aquellos que tiene alguna transición hacia algún estado final en el autómata A)

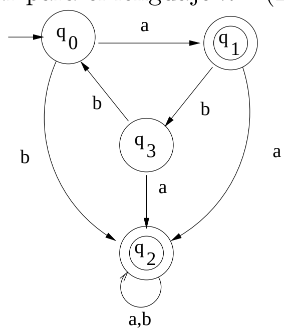
(2 puntos)

Solución

```
prob5[A_List] := Module[{nuevoF, trans, k },
  nuevoF = {};
```

```
  trans = A[[3]];
  For[k=1, k ≤ Length[trans], k ++,
   If[MemberQ[A[[5]], trans[[k,3]]], nuevoF = Union[nuevoF, {trans[[k,1]]}];
  ];
  Return[{A[[1]], A[[2]], A[[3]],A[[4]], nuevoF}]
]
```

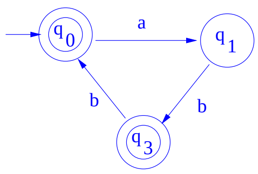
6. Sea A el autómata de la figura y sea el homomorfismo h definido como $h(a) = ab$ y $h(b) = b$. Proporcione una expresión regular para el lenguaje $h^{-1}(\overline{L(A)})$



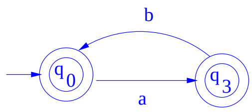
(1.5 puntos)

Solución

En primer lugar, dado que el autómata A es completo y determinista, procedemos a obtener un autómata para $\overline{L(A)}$ que se muestra en la siguiente figura. Obsérvese que hemos eliminado el estado q_2 por quedarse reducido a un estado sumidero



Calculamos a continuación el homomorfismo inverso sobre el anterior autómata y obtenemos un AFD para el lenguaje $h^{-1}(\overline{L(A)})$. El AFD se muestra a continuación



Por último planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$x_0 = ax_3 + \lambda$

$x_3 = bx_0 + \lambda$

Procedemos a sustituir x_3 en la ecuación de x_0 y obtenemos la nueva ecuación $x_0 = a(bx_0+\lambda)+\lambda = abx_0 + a + \lambda$. Finalmente aplicamos el lema de Arden y obtenemos la solución $x_0 = (ab)^*(a + \lambda)$ que es la expresión regular requerida en el enunciado.

7. Dada la gramática G con las siguientes producciones se pide obtener una gramática simplificada y en Forma Normal de Chomsky que genere $L(G) - \{\lambda\}$.

$S \to EEa \mid E \mid Cb \mid aEC \qquad A \to aEE \mid AAa \mid a \qquad B \to bDb \mid abD \mid \lambda$

$C \to aS \mid SaS \mid CCb \mid EE \qquad D \to DDa \mid bB \mid aB \mid A \qquad E \to Sb \mid EEa \mid \lambda$

(1.5 puntos)

Solución

Procedemos, en primer lugar, a simplificar la gramática G eliminando para ello los símbolos inútiles. El algoritmo de cálculo de símbolos generativos nos devuelve el conjunto de no terminales *generativos* $= \emptyset$, por lo que la gramática original no se modifica.

El cálculo de símbolos alcanzables desde el axioma nos devuelve el conjunto *alcanzables* $= \{S, E, C, a, b\}$. Por lo que la gramática queda como sigue:

$S \to EEa \mid E \mid Cb \mid aEC$

$C \to aS \mid SaS \mid CCb \mid EE$

$E \to Sb \mid EEa \mid \lambda$

Calculamos ahora el conjunto de símbolos anulables. Obtenemos $anulables = \{E, C, S\}$. Eliminamos las reglas vacías y obtenemos:

$S \to EEa \mid Ea \mid a \mid E \mid Cb \mid b \mid aEC \mid aE \mid aC$

$C \to aS \mid a \mid SaS \mid Sa \mid aS \mid CCb \mid Cb \mid b \mid EE \mid E$

$E \to Sb \mid b \mid EEa \mid Ea \mid a$

Calculamos ahora para cada no terminal, el conjunto de símbolos no terminales alcanzables a través de reglas simples: $C(S) = \{S, E\}, C(C) = \{C, E\}, C(E) = \{E\}$ por lo que el conjunto de reglas queda como sigue tras eliminar las reglas simples:

$S \to EEa \mid Ea \mid a \mid Cb \mid b \mid aEC \mid aE \mid aC \mid Sb$

$C \to aS \mid a \mid SaS \mid Sa \mid aS \mid CCb \mid Cb \mid b \mid EE \mid Sb \mid EEa \mid Ea$

$E \to Sb \mid b \mid EEa \mid Ea \mid a$

La anterior gramática no contiene símbolos inútiles (no generativos o no alcanzables) por lo que ya está totalmente simplificada. Vamos ahora a pasar la gramática obtenida a forma normal de Chomsky. El primer paso sustituye los terminales por no terminales adicionales en las partes derechas de longitud superior a 1. Obtenemos:

$S \to EEC_a \mid EC_a \mid a \mid CC_b \mid b \mid C_aEC \mid C_aE \mid C_aC \mid SC_b$

$C \to C_aS \mid a \mid SC_aS \mid SC_a \mid C_aS \mid CCC_b \mid CC_b \mid b \mid EE \mid SC_b \mid EEC_a \mid EC_a$

$E \to SC_b \mid b \mid EEC_a \mid EC_a \mid a$

$C_a \to a$

$C_b \to b$

Finalmente, aplicamos el segundo paso y obtenemos la gramática requerida en forma normal de Chomsky:

$S \to ED_1 \mid EC_a \mid a \mid CC_b \mid b \mid C_aD_2 \mid C_aE \mid C_aC \mid SC_b$

$D_1 \to EC_a$

$D_2 \to EC$

$C \to C_aS \mid a \mid SD_3 \mid SC_a \mid C_aS \mid CD_4 \mid CC_b \mid b \mid EE \mid SC_b \mid ED_1 \mid EC_a$

$D_3 \to C_aS$

$D_4 \to CC_b$

$E \to SC_b \mid b \mid ED_1 \mid EC_a \mid a$

$C_a \to a$

$C_b \to b$