

Хроматические числа плоского тора, склеенного из параллелограмма

Толмачев Александр Дмитриевич

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Кавказский математический центр

tolmachev.ad@phystech.edu

Соавторы: Дмитрий Протасов, Всеволод Воронов

Секция: Теория чисел и дискретная математика

Пусть $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ — произвольные векторы ненулевой длины $l_1 = |\vec{v}_1|$ и $l_2 = |\vec{v}_2|$ с углом $\alpha = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ между ними. Рассмотрим плоский тор $T_{l_1, l_2, \alpha}^2$ как фактор-пространство по решетке \mathbb{R}^2/L , где $L = \{m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Другими словами, рассматривается плоский тор, склеенный из параллелограмма, со сторонами l_1, l_2 и углом α между ними.

Соответствующая метрика $\rho_{l_1, l_2, \alpha}$ расстояния на таком торе может быть выражена через стандартную евклидову метрику на плоскости следующим образом:

$$\rho_{l_1, l_2, \alpha}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min \left\{ |(x_2 - x_1 + ml_1) \cdot \vec{v}_1 + (y_2 - y_1 + nl_2) \cdot \vec{v}_2| : m, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

что является кратчайшим расстоянием между точками $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ по поверхности тора (здесь и далее считаем, что $x_1, x_2 \in [0, l_1], y_1, y_2 \in [0, l_2]$).

В работе рассматриваются оценки хроматических чисел тора $T_{l_1, l_2, \alpha}^2$ в зависимости от параметров l_1, l_2, α . Кроме того, получены некоторые оценки хроматических чисел с запрещенным расстоянием для такого тора.

Задача о хроматических числах различных множеств тесно связана с задачей о разбиении множеств на части меньшего диаметра. Данная работа расширяет предыдущие исследования авторов об оценках оптимальных разбиений тора и плоских множеств на части меньшего диаметра (см. [1, 2]). Отметим, что в отличие от работы [2], здесь рассматривается обобщение плоского тора со склейки из квадрата на склейку из произвольного параллелограмма, параметризуемого тремя параметрами. Авторами также получены некоторые оценки разбиений тора $T_{l_1, l_2, \alpha}^2$ на части меньшего диаметра, которые расширяют исследования из ранних статей [1, 2].

- [1] A.D. Tolmachev, D.S. Protasov, V.A. Voronov, *Coverings of planar and three-dimensional sets with subsets of smaller diameter*, Discrete Applied Mathematics, 2022, v. 320, p. 270-281.
- [2] D.S. Protasov, A.D. Tolmachev, V.A. Voronov, *Optimal partitions of the flat torus into parts of smaller diameter*, arxiv preprint. [2024] arXiv:2402.03997