# Специальная геометрия Бора–Зоммерфельда

*Тюрин Николай Андреевич*
ЛТФ ОИЯИ (Дубна)
Секция: Алгебраическая геометрия

Ю.И. Манин когда-то определил Зеркальную Симметрию как некоторую двойственность между комплексной и симплектической геометриями кэлеровых многообразий. Каждое кэлерово многообразие по самому своему определению обладает обеими "природами" — комплексной и симплектической, и каждая из них порождает свой "внутренний мир": комплексные подмногообразия и голоморфные расслоения в первом случае и лагранжевы подмногообразия во втором. Каждый из этих внутренних миров определяет дополнительный набор инвариантов, и кэлеровы многообразия понимаются как зеркальные партнеры если их инварианты зеркально соотносятся друг ко другу.

Однако две эти природы в сущности очень разные: комплексная предполагает конечномерность вариаций и деформаций объектов (комплексных подмногообразий, голоморфных расслоений etc), в то время как симплектическая является очень гибкой, и любое лагранжево подмногообразие допускает континуальное пространство деформаций. Поэтому естественным образом возникает задача введения подходящих условий, позволяющих получать некоторые конечномерные пространства модулей. С 90-ых годов очень популярной конструкцией является специальная лагранжева геометрия, предложенная Н. Хитчином. Однако рамки применения этой геометрии достаточно узки: условие SpLag можно вводить только на многообразиях Калаби–Яу.

Специальная геометрия Бора–Зоммерфельда возникла как программа, позволяющая по произвольному компактному односвязному алгебраическому многообразию $X$ построить конечномерные многообразия модулей, элементами которых являются классы подмногообразий, лагранжевых относительно кэлеровой формы метрики Ходжа. Исходными для построения таких многообразий, см. [1], являются стандартные в Геометрическом квантовании данные: расслоение и связность предквантования $(L, a)$. Далее мы используем программу ALAG, предложенную в 1999 году А. Н. Тюриным и А. Л. Городенцевым, которая строит бесконечномерное многообразие модулей $\mathcal{B}_S$ лагранжевых бор — зоммерфельдовых подмногообразий фиксированного топологического типа. Затем в прямом произведении $\mathbb{P}(\Gamma(M, L)) \times \mathcal{B}_S$ строится цикл инциденции $\mathcal{U}_{SBS}$ пар, удовлетворяющих условию специальности. Оказывается, что каноническая проекция $q : \mathcal{U}_{SBS} \to \mathbb{P}(\Gamma(X, L))$ имеет дискретные слои, откуда получаем первое грубое определение конечномерного многообразия модулей: поскольку в пространстве $\Gamma(X, L)$ всех гладких сечений расслоения предквантования $L$ имеется конечномерное подпространство $H^0(X, L)$ голоморфных сечений, то возможно взять прообраз $q^{-1}(\mathbb{P}(H^0(X, L))$, что должно дать конечномерный объект. Однако такое прямолинейное определение не приводит к разумному результату: как было установлено в [2], для голоморфного сечения $\alpha \in H^0(X, L)$ лагранжево подмногообразие $S \subset X$ является специальным если и только если оно содержится в скелете Вейнстейна $W(X \backslash D_\alpha)$ дополнения к дивизору нулей $D_\alpha = \{\alpha = 0\} \subset X$. Но как было установлено вейнстейнов скелет почти всегда не содержит гладких компонент, так что прямолинейное определение приводит к тривиальному результату. Проблема разрешается вариацией параметров, имеющихся в нашем определении: в работе [3] было предложено использовать деформацию связности предквантования $a$ для определения многообразия модулей $\mathcal{M}_{SBS}$ специальных бор - зоммерфельдовых лагранжевых подмногообразий — конечномерный объект в лагранжевой геометрии алгебраических многообразий. Как было доказано, это многообразие модулей обладает комплексной структурой, а в построенных примерах было обнаружно, что оно может иметь вид “алгебраическое многообразие минус обильный дивизор”, откуда возникла естественная гипотеза о том, что $\mathcal{M}_{SBS}$ алгебраично всегда.


[1] Н. А. Тюрин, *Специальные бор–зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия*, Изв. РАН. Сер. матем., 80:6 (2016), 274–293;

[2] Н. А. Тюрин, *Специальные бор–зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия в алгебраических многообразиях*, Изв. РАН. Сер. матем., 82:3 (2018), 170–191;

[3] Н. А. Тюрин, *Специальная геометрия Бора–Зоммерфельда: вариации*, Изв. РАН. Сер. матем., 87:3 (2023), 184–205.