

Абелева периодичность морфических слов

Филимонова Арина Николаевна

СПбГУ

arina4filimonova@gmail.com

Соавторы: С. А. Пузынина

Секция: Математическая логика и теоретическая информатика

Цель настоящего исследования — дать характеристику морфизмов над конечным алфавитом, порождающих абелево периодические слова. Два слова u и v называются *абелево эквивалентными*, если в слове u можно переставить местами буквы так, чтобы получилось слово v . Слово w называется *абелево периодическим*, если w представляет из себя конкатенацию абелево эквивалентных слов. Говоря об абелево периодических бесконечных словах, мы будем допускать наличие предпериода, то есть условие абелевой периодичности должно начинаться с некоторого индекса.

Морфизмом называется эндоморфизм на множестве слов, сохраняющий конкатенацию. Если морфизм f нестирающий, то есть образ никакого слова не пуст, и образ некоторой буквы a начинается с a и имеет длину больше двух, то говорят, что морфизм порождает бесконечное слово $w = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(a)$. Построение бесконечных слов с помощью морфизмов является одной из основных конструкций бесконечных слов в комбинаторике слов. Одним из ее преимуществ является возможность порождать слова быстро.

Всякому морфизму f над алфавитом $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ставится в соответствие матрица $M(f)$ размера $n \times n$, коэффициенты которой таковы: m_{ij} равно количеству вхождений буквы a_i в слово $f(a_j)$. Обозначим собственные числа такой матрицы за $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ (числа пронумерованы в порядке убывания их модуля). В терминах такой матрицы можно, в частности, получить некоторые необходимые условия абелевой периодичности.

Получены следующие результаты. Во-первых, задача решена для бинарных равноблочных (образы букв имеют равную длину) морфизмов:

Теорема 1. Пусть f равноблочный морфизм над бинарным алфавитом. Тогда морфическое слово $f^\omega(a)$ абелево периодично в следующих случаях и только в них:

1. Морфизму f соответствует матрица с $\theta_2 = 0$, то есть матрица вида

$$\begin{pmatrix} A & A \\ B & B \end{pmatrix};$$

2. Морфизм f имеет вид $f(a) = a(ba)^k$, $f(b) = b(ab)^k$ для некоторого k .

Для неравноблочных бинарных морфизмов получен ряд необходимых и ряд достаточных условий абелевой периодичности. Для произвольных бинарных морфизмов остаётся неразобранным только случай $\theta_2 = 0$, то есть не получена характеристика

абелевой периодичности морфизмов, которым отвечают матрицы вида $\begin{pmatrix} A & \alpha A \\ B & \alpha B \end{pmatrix}$.

Результаты получены совместно с С. А. Пузыниной.