

О конечных неразрешимых группах, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны графу “балалайка”

Минигулов Николай Александрович

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

n.a.minigulov@imm.uran.ru

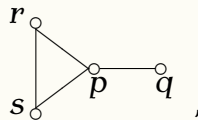
Соавторы: А. С. Кондратьев

Секция: Алгебра

Графом Грюнберга–Кегеля (или графом простых чисел) $\Gamma(G)$ конечной группы G называют граф, в котором множеством вершин является множество всех простых делителей порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе G существует элемент порядка pq . Графом “балалайка” (raw) называют граф, который имеет ровно 4 вершины со степенями 1, 2, 2 и 3.

А.С. Кондратьев описал конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у групп $\text{Aut}(J_2)$ (см. [1]) и A_{10} (см. [2]). Графы Грюнберга–Кегеля этих групп изоморфны как абстрактные графы графу “балалайка”.

Нами была поставлена более общая задача: описать конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы графу “балалайка”. В дальнейшем будем считать, что G — конечная группа, граф Грюнберга–Кегеля которой как абстрактный граф изоморфен графу “балалайка”, т. е., граф $\Gamma(G)$ имеет следующий вид:



где r, s, p и q — некоторые попарно различные простые числа.

В [3] мы доказали, что если группа G неразрешима, то фактор-группа $\bar{G} = G/S(G)$ (где $S(G)$ — разрешимый радикал группы G) почти проста, и классифицировали все конечные почти простые группы графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы подграфу графа “балалайка”. В [4] мы описали конечные разрешимые группы G . Также в [5, 6] мы классифицировали конечные неразрешимые группы G в следующих трех случаях:

- (1) группа G не содержит элементов порядка 6;
- (2) группа G содержит элемент порядка 6 и вершина q графа $\Gamma(G)$ делит $|S(G)|$;
- (3) вершина q графа $\Gamma(G)$ меньше 5.

В данной работе мы продолжаем изучение этой проблемы. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема. Пусть G — неразрешимая группа, $\{r, s\} = \{2, 3\}$, $p > 3$, $q > 3$ и q не делит $|S(G)|$. Тогда граф Грюнберга–Кегеля фактор-группы $\bar{G} := G/S(G)$ несвязен.

- [1] A. S. Kondrat'ev, *Finite groups with prime graph as in the group $\text{Aut}(J_2)$* , Proc. Steklov Inst. Math. 283:1 (2013), 78-85.

- [2] A. S. Kondrat'ev, *Finite groups that have the same prime graph as the group A_{10}* , Proc. Steklov Inst. Math., 285: 1 (2014), 99-107.
- [3] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, *Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group A_{10}* , Siberian Electr. Math. Rep., 15 (2018), 1378-1382.
- [4] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, *Finite solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw*, Тр. ИММ УрО РАН., 28:2 (2022), 269-273.
- [5] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, *On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw*, Commun. Math. Stat., 10:4 (2022), 653-667.
- [6] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, *On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw*, Тезисы докладов международной (54-й всероссийской) молодежной школы-конференции "Современные проблемы математики и ее приложений". Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2023, 39.