Производная дифференциальная геометрия

Айвазьян Аршак Владимирович
НИУ ВШЭ
aivazian.arshak@gmail.com
Секция: Топология

Кольцо гладких функций гладкого многообразия имеет естественную дополнительную структуру: к набору элементов $a_1, .., a_n$ можно применить не только целочисленный многочлен $p \in \mathbb{Z}[x_1, .., x_n]$ (что в точности составляет структуру кольца), а любую гладкую функцию $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Категория C^∞-колец (то есть, множеств, снабженных согласованным действием гладких функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ для всех n) — это обычная алгебраическая категория со всеми их общими местами и хорошими свойствами. Дульная ей категория *гладких локусов* Locus — это естественный сеттинг для дифференциальной геометрии, аналогичный схемной революции в алгебраической геометрии. В качестве некоторых ярких преимуществ, на ряду с гладкими многообразиями, она единообразно включает, например, гладкие многообразия с углами или стратификациями, инфинитезимальные пространства и др. Со всеми релевантными геометрическими понятиями и структурами для всех её объектов (например, расслоения струй являются просто пространствами отображений из соответствующих инфинитезимальных пространств). Также она имеет все пределы и копределы, что, например, позволяет прямо говорить о пространствах струй бесконечного порядка (подпространства которых суть дифференциальные уравнения на исходном многообразии, как это развито в подходе Виноградова, Красильщика, Вербовецкого и других). За подробностями отсылаем к классическому тексту I. Moerdijk, G. E. Reyes, “Models for smooth infinitesimal analysis”, (1991) и другой литературе.

При этом, ровно как и в алгебраической геометрии, такая настройка все ещё несет такие изъяны, как геометрически неправильное поведение нетрансверсальных пересечений. И так же естественный контекст исправляющий это — производная дифференциальная геометрия — реализуется естественным переходом от C^∞ колец к симплициальным C^∞-кольцам, локализованным в слабых эквивалентностях. Альтернативный эквивалентный язык (в духе соответствия Дольда-Кана): C^∞ дифференциально-градуированные алгебры, локализованные в слабых эквивалентностях. Классические локусы вкладываются в производные как полная подкатегория и включение сохраняет трансверсальные пересечения, но не все пределы. В соответствии с D. I. Spivak, “Derived Smooth Manifolds”, (2010), производные пересечения в точности ведут себя как форма пересечениях на гомологических классах (что дуально по Пуанкаре умножению в когомологиях). А, например, производный локус нулей (вместо усеченного классического) возникает в BV-BRST формализме. О роли производной геометрии в квантовой теории поля см., например, L. Alfonsi, “Higher geometry in physics”, (2023), L. Alfonsi, C. A. S. Young, “Towards non-perturbative BV-theory via derived differential geometry”, (2023), G. Giotopoulos, H. Sati, “Field Theory via Higher Geometry I: Smooth Sets of Fields”, (2023), J. P. Pridham, “An outline of shifted Poisson structures and deformation quantisation in derived differential geometry”, (2020). Производная геометрия помимо этого имеет также серьезные приложения в классической гладкой геометрии как обсуждается, например, в D. Joyce, “Algebraic Geometry over C^∞-rings”, (2016).

В этом докладе будет дан краткий обзор области и некоторые новые результаты.