О точках кручения порядка $2g+1$ на гиперэллиптических кривых рода g

Федоров Глеб Владимирович
Университет "Сириус" (Сочи), НИИСИ РАН (Москва)
fedorov.gv@talantiuspeh.ru
Секция: Алгебраическая геометрия

Пусть гиперэллиптическая кривая C рода g, определенная над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0, задана уравнением $y^2 = f(x)$, где многочлен f свободен от квадратов и имеет нечетную степень $2g+1$. Существует классическое вложение (вложение Альбанезе) $C(K)$ в группу K-точек $J(K)$ якобиева многообразия J кривой C, отождествляющее бесконечно удаленную точку $\mathcal{O}$ с единичным элементом группы $J(K)$. При таком вложении образ в $J(K)$ отождествляют с точками кривой $C(K)$. Тем самым групповая структура якобиана J частично переносится на K-точки кривой C.

В недавней работе [1] рассмотрена задача о верхней оценке количества классов эквивалентности гиперэллиптических кривых C, заданных уравнением $y^2 = f(x)$, $\deg f = 2g+1$, для которых существует 2, 4, 6 или более точек кручения P порядка $2g+1$, лежащих в $C_{tor}(K) \cap J(K)$, где K — алгебраически замкнутое поле. Важно отметить, что таких точек порядка m, $3 \leq m \leq 2g$, быть не может.

Целью наших исследований в этом направлении был ответ на вопрос (поставленный в работе [1]) о явном виде представителей классов бирациональной эквивалентности, таких гиперэллиптических кривых C, что множество $C_{tor}(K) \cap J(K)$ содержит не менее 6 точек кручения порядка $2g+1$. При $g = 2$ в статьях [2] и [3] было изучено семейство гиперэллиптических кривых рода 2, якобианы которых обладают точками кручения порядка 5. В частности, было показано, что при $g = 2$ над алгебраически замкнутым полем K существует ровно 5 классов бирациональной эквивалентности, таких гиперэллиптических кривых C, что множество $C_{tor}(K) \cap J(K)$ содержит не менее 6 точек кручения порядка 5. В статье [4] нам удалось явно найти представители этих классов. При $g = 3$ и $g = 5$ мы доказали, что таких представителей нет. При $g = 4$ нами доказано, что существует единственный класс бирациональной эквивалентности, и явно выписан его представитель. Наконец, нами улучшена оценка из [1] в 27 раз.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-71-00101).

[1] *Bekker B. M., Zarhin Y. G.* Bekker B. M., Zarhin Y. G. Torsion points of small order on hyperelliptic curves // European Journal of Mathematics. 2022. Vol. 8, №2. P. 611-624.

[2] *Boxall J., Grant D., Leprévost F.* 5-torsion points on curves of genus 2 // Journal of the London Mathematical Society. 2001. Vol. 64, №1. P. 29-43.

[3] *Elkies N. D.* Contemporary Mathematics Volume 796, 2024 // LuCaNT: LMFDB, Computation, and Number Theory. 2024. Vol. 796. P. 165-186.

[4] *Fedorov G.V.* On hyperelliptic curves of odd degree and genus g with 6 torsion points of order 2g+1 // Doklady Mathematics. 2024.