Спетральные серии оператора Шрёдингера с дельта-потенциалом в полюсах двух- и трехмерных поверхностей вращения

Рыхлов Владислав Владимирович
Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
vladderq@gmail.com
Соавторы: А. И. Шафаревич
Секция: Уравнения в частных производных, математическая физика и спектральная теория

Рассматривается спектральная задача для оператора Шрёдингера

$$H\psi = E\psi + o(h), \quad H = -\frac{h^2}{2}\Delta + \delta_{x_1}(x) + \delta_{x_2}(x), \quad x \in M,$$

где $h \to +0$, x_j — полюса M, M — двумерная $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ или трехмерная $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ поверхность вращения:

$$M^2 = \{(v(s)\cos\varphi, v(s)\sin\varphi, w(s)) \,\big|\, s \in [s_1, s_2], \varphi \in \mathbb{S}^1\} \quad \text{и}$$

$$M^3 = \{(v(s)\cos\theta\cos\varphi, v(s)\cos\theta\sin\varphi, v(s)\sin\theta, w(s)) \,\big|\, s \in [s_1, s_2], \varphi \in \mathbb{S}^1, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\},$$

$s \in [s_1, s_2]$ — натуральный параметр кривой $(v(s), w(s)) \subset \mathbb{R}^2$, и значения s_j соответствуют точкам x_j.

Оператор H определен на функциях из $L^2(M)$ как самосопряженное расширение оператора Δ, действующего на функциях $\psi_0 \in W_2^2(M)$, обращающихся в нуль в полюсах x_j. В области определения оператора H лежат функции, имеющие особенности в точках x_j, а именно, для $\psi \in D(H)$ имеется асимптотическое равенство [1] при $x \to x_j$

$$\psi(x) = -\frac{a_j}{2\pi}\ln d(x, x_j) + b_j + o(1) \text{ на } M^2, \quad \psi(x) = \frac{a_j}{4\pi}\frac{1}{d(x, x_j)} + b_j + o(1) \text{ на } M^3, \tag{1}$$

где $d(x, x_j)$ — геодезическое расстояние на M между точками x и x_j, а коэффициенты a_j при сингулярной части и b_j при регулярной связаны следующим образом:

$$i(\mathbf{I} + U)a + \frac{2}{h^2}(\mathbf{I} - U)b = 0, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, U — некоторый унитарный оператор.

В работе получены явные выражения для условий квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова, позволяющие изучить поведение асимптотического спектра. Асимптотические собственные функции имеют представление в терминах функций Бесселя и Неймана.

1. J. Brüning, V. A. Geyler, Scattering on compact manifolds with infinitely thin horns, J. Math. Phys., 44:2 (2003), 371–405

2. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, Изд. Наука, Москва, 1976
3. W. Wasow, Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations, Изд. Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1965