

## О введении бесконечно-малых в курсе матанализа

Щепин Евгений Витальевич

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

scepin@mi-ras.ru

Секция: Математическое образование и просвещение

В докладе изложен подход к введению и активному использованию актуально бесконечно-малых величин в начальном курсе математического анализа, который достаточно строг и хорошо адаптирован к применениям в физике и геометрии. Для описания дифференциалов функций одной переменной используются числа, известные под именем *дуальных*, которые автор предпочитает называть *числами двойной точности*, мотивируя это название компьютерной аналогией. Числа двойной точности представляют собой минимальное неархимедово расширение действительных чисел. А именно, к полю действительных чисел добавляется один "идеальный" бесконечно-малый элемент, обозначаемый  $\sqrt{0}$ , который положителен но имеет нулевой квадрат. В результате возникает линейно упорядоченное кольцо чисел вида  $a + b\sqrt{0}$  с интуитивно понятными операциями сложения и умножения. Для определения значений трансцендентных функций на числах двойной точности достаточно постулировать, что все известные для них нестрогие неравенства для действительных чисел остаются справедливыми для чисел двойной точности.

Связь с теорией пределов обеспечивается следующей моделью построения чисел двойной точности. Действительные числа интерпретируются как постоянные последовательности.  $\sqrt{0}$  интерпретируется как монотонная стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел  $o_n$ . А числа двойной точности интерпретируются как сходящиеся последовательности  $x_n$ , такие что сходятся последовательности отношений  $\frac{x_n - \lim x_n}{o_n}$ . Число двойной точности  $a + b\sqrt{0}$  представляется как совокупность всех последовательностей с описанными условиями сходимости, для которых  $\lim x_n = a$ ,  $\lim \frac{x_n - a}{o_n} = b$ .