Об автомодельных решениях задачи Стефана с бесконечным числом фазовых переходов

Панов Евгений Юрьевич
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
Секция: Уравнения в частных производных, математическая физика и спектральная теория

В области $t, x > 0$ рассматривается задача Стефана для уравнения теплопроводности с фазовыми переходами при температурах $u_i > u_0$, $i \in \mathbb{N}$. Считаем, что $u_{i+1} > u_i \ \forall i \in \mathbb{N}$ и что $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = u_* \le +\infty$. Здесь i-ая фаза соответствует температурному интервалу (u_i, u_{i+1}) и характеризуется коэффициентами диффузии $a_i > 0$ и теплопроводности $k_i > 0$, $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. На неизвестных линиях $x = x_i(t)$ фазовых переходов, где $u = u_i$, задается условие Стефана $d_i x_i'(t) + k_i u_x(t, x_i(t)+) - k_{i-1} u_x(x, x_i(t)-) = 0$, $i \in \mathbb{N}$, $d_i \ge 0$. Ставятся также начальное и краевое условия $u(0,x) \equiv u_0$, $u(t,0) \equiv u_*$. Изучаются убывающие по $\xi = x/\sqrt{t}$ автомодельные решения $u = u(\xi)$. Оказалось, что условия Стефана на линиях фазовых переходов $\xi = \xi_i$ сводятся к равенствам $\frac{\partial}{\partial \xi_i} E(\bar{\xi}) = 0$, где $E(\bar{\xi}) = -\sum\limits_{i=0}^{\infty} k_i (u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} d_i \xi_i^2/4$, $F(z) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-s^2/4} ds$ и $\xi_0 = +\infty$. Этот функционал задан на выпуклом конусе $\{\, \bar{\xi} = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty \mid \xi_i > \xi_{i+1} > 0 \ \forall i \in \mathbb{N} \,\}$ и является коэрцитивным и строго выпуклым функционалом. Если $E(\bar{\xi}) \not\equiv +\infty$, то существует единственная точка $\bar{\xi}^0$ глобального минимума функционала E. Координаты ξ_i^0 этой точки определяют решение нашей задачи. Показано, что в случае $E(\bar{\xi}) \equiv +\infty$ решение может отсутствовать.