О конечных неразрешимых группах, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны графу "балалайка"

Минигулов Николай Александрович
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовсого УрО РАН, Екатеринбург
n.a.minigulov@imm.uran.ru

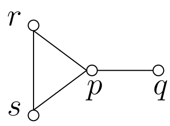
Соавторы: А. С. Кондратьев

Секция: Алгебра

Графом Грюнберга–Кегеля (или *графом простых чисел*) $\Gamma(G)$ конечной группы G называют граф, в котором множеством вершин является множество всех простых делителей порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе G существует элемент порядка pq. Графом "балалайка" (paw) называют граф, который имеет ровно 4 вершины со степенями 1, 2, 2 и 3.

А.С. Кондратьев описал конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у групп $Aut(J_2)$ (см. [1]) и A_{10} (см. [2]). Графы Грюнберга–Кегеля этих групп изоморфны как абстрактные графы графу "балалайка".

Нами была поставлена более общая задача: описать конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы графу "балалайка". В дальнейшем будем считать, что G — конечная группа, граф Грюнберга–Кегеля которой как абстрактный граф изоморфен графу "балалайка", т. е., граф $\Gamma(G)$ имеет следующий вид:



,

где r, s, p и q — некоторые попарно различные простые числа.

В [3] мы доказали, что если группа G неразрешима, то фактор-группа $\overline{G} = G/S(G)$ (где $S(G)$ — разрешимый радикал группы G) почти проста, и класифицировали все конечные почти простые группы графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы подграфу графа "балалайка". В [4] мы описали конечные разрешимые группы G. Также в [5, 6] мы классифицировали конечные неразрешимые группы G в следующих трех случаях:

(a) группа G не содержит элементов порядка 6;

(b) группа G содержит элемент порядка 6 и вершина q графа $\Gamma(G)$ делит $|S(G)|$;

(c) вершина q графа $\Gamma(G)$ меньше 5.

В данной работе мы продолжаем изучение этой проблемы. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Пусть G — неразрешимая группа, $\{r, s\} = \{2, 3\}$, $p > 3$, $q > 3$ и q не делит $|S(G)|$. Тогда граф Грюнберга–Кегеля фактор-группы $\overline{G} := G/S(G)$ несвязен.*

[1] A. S. Kondrat'ev, *Finite groups with prime graph as in the group $Aut(J_2)$*, Proc. Steklov Inst. Math. 283:1 (2013), 78-85.

[2] A. S. Kondrat'ev, *Finite groups that have the same prime graph as the group A_{10}*, Proc. Steklov Inst. Math., 285: 1 (2014), 99-107.

[3] A. S. Kondrat'ev, N. A Minigulov, *Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group A_{10}*, Siberian Electr. Math. Rep., 15 (2018), 1378-1382.

[4] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, *Finite solvable groups whose Gruenberg-Kegel graphs are isomorphic to the paw*, Тр. ИММ УрО РАН., 28:2 (2022), 269-273.

[5] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, *On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw*, Commun. Math. Stat., 10:4 (2022), 653-667.

[6] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, *On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw*, Тезисы докладов международной (54-й всеросийской) молодежной школы-конференции "Современные проблемы математики и ее приложений". Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2023, 39.