

Детерминантные точечные процессы

Буфетов Александр Игоревич

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургский государственный университет

bufetov@mi-ras.ru

Секция: Пленарный доклад

Деметрий Фалерей, основатель Александрийской библиотеки, провел перепись населения в Афинах в конце IV в. до Р.Х. В математических задачах демографии рождается теория точечных процессов на прямой — последовательностей неразличимых событий, происходящих в случайные моменты времени. В 1915 г. работа Р. Фишера [1] открыла новую главу теории точечных процессов — изучение собственных чисел матриц, задаваемых случаем.

Синус-процесс Дайсона [2] — скейлинговый предел радиальных частей мер Хаара на унитарных группах растущей размерности. Корреляционные функции синус-процесса задаются детерминантами синус-ядра — ядра проектора на пространство Пэли–Винера. Точечные процессы, чьи корреляционные функции задаются детерминантами, с одной стороны, возникают в самых разных конкретных задачах — асимптотической комбинаторики, теории представлений бесконечномерных групп, теории гауссовских аналитических функций — а, с другой, допускают богатую общую теорию.

В совместной работе с Янчи Цью (Тулуза, Пекин) и А. Шамовым (Харьков, Реховот) доказано, что реализация детерминантного точечного процесса почти наверное есть множество единственности для гильбертова пространства, образа нашего проектора.

Минимально ли это множество единственности? Оказывается — нет: почти наверное реализация синус-процесса имеет *избыток 1* для пространства Пэли–Винера, то есть, становится полным и минимальным множеством после удаления одной частицы. Дело в том, что случайные целые функции, обобщённые произведения Эйлера, сопоставляемые синус-процессу, сходятся при скейлинге по распределению к восходящему, на физическом уровне строгости, к работам А. Н. Колмогорова и его школы по теории однородной изотропной турбулентности гауссову мультипликативному хаосу.

Доказательство сходимости к гауссову мультипликативному хаосу опирается на квазиинвариантность синус-процесса под действием диффеоморфизмов прямой с компактным носителем, а также на оценки остаточного члена в скейлинговом пределе формулы Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса, обобщающей Сильную Теорему Сегё в форме И. А. Ибрагимова. Для детерминантного процесса с ядром Бесселя точные оценки недавно получил С. М. Горбунов [3].

- [1] R. A. Fisher. Frequency Distribution of the Values of the Correlation Coefficient in Samples from an Indefinitely Large Population. *Biometrika*, **10**:4 (1915), 507–521.
- [2] F. J. Dyson. Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I. *J. Math. Phys.*, **3**:1 (1962), 140–156.
- [3] S. M. Gorbunov. Speed of convergence in the Central Limit Theorem for the determinantal point process with the Bessel kernel. Preprint arXiv:2403.16219 (2024), 24 pp.