

Кванторная модальная логика Белнапа–Данна

Грефенштейн Александр Витальевич

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
aleksandrgrefenstejn@gmail.com

Соавторы: Сперанский Станислав Олегович

Секция: Математическая логика и теоретическая информатика

Кванторная интуиционистская логика, QInt, играет ключевую роль в конструктивной математике. Но, хотя из каждого вывода Φ в интуиционистской теории чисел можно извлечь способ верификации Φ , вывод $\neg\Phi$ не даёт прямого способа фальсификации Φ , а лишь сводит предположение о верификации Φ к абсурду. С целью устранения этого недостатка Д. Нельсон предложил обогатить язык QInt путём добавления “сильного отрицания”, которое отвечает непосредственно за фальсификацию; см. [1]. Так возникла логика QN3. Позднее было описано её полезное обобщение QN4, которое позволяет работать с противоречивыми данными; см. [2]. Стоит отметить, что при удалении импликации QN4 превращается в кванторную версию хорошо известной четырёхзначной логики Белнапа–Данна; см. [3].

Важную роль в понимании QInt играет её точное вложение в модальную логику QS4. Хотелось бы иметь аналогичное понимание QN3 и QN4. В пропозициональном случае эта задача была решена в [4], где С. П. Одинцов и Х. Вансинг разработали пропозициональную модальную логику Белнапа–Данна, ВК. Однако до сих пор ничего не было известно о ситуации в кванторном случае, несмотря на то что конструктивные теории формулируются именно в кванторном языке. С целью устранения данного недостатка мы разработали кванторную версию ВК, обозначаемую через QVK; см. [5]. Получены кванторные обобщения теорем о сильной полноте для ВК и некоторых важных её расширений (относительно подходящей семантики типа Крипке) из [4], а также показано, что QN3 и QN4 точно вкладываются в подходящие QVK-расширения. Кроме того, мы получили полезные результаты об интерполяционных свойствах QVK-расширений.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 23-11-00104, <https://rscf.ru/project/23-11-00104/>.

- [1] D. Nelson, Constructible falsity, *Journal of Symbolic Logic*, **14**:1 (1949), 16–26.
- [2] A. Almukdad, D. Nelson, Constructible falsity and inexact predicates, *Journal of Symbolic Logic*, **49**:1 (1984), 231–233.
- [3] N. Belnap, A useful four-valued logic, in: J. M. Dunn, G. Epstein, eds., *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, D. Reidel, 1977, 8–37.
- [4] S. P. Odintsov, H. Wansing, Modal logics with Belnapian truth values, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, **20**:3 (2010), 279–301.
- [5] А. В. Грефенштейн, С. О. Сперанский, О кванторной версии модальной логики Белнапа–Данна, *Математический сборник*, **215**:3 (2024), 37–69.