IV Конференция математических центров России

Сборник тезисов

Санкт-Петербург

2024

Настоящая брошюра представляет собой сборник тезисов **IV Конференции математических центров России**, посвященной 300-летию СПбГУ и РАН. В ней приведены аннотации пленарных и секционных докладов. Мероприятие проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России, грант на создание и развитие МЦМУ «Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера», соглашения № 075-15-2022-287, № 075-15-2022-289.

Первое издание, 2024 год.

ISBN 978-5-9651-1578-5.

Оглавление

Пленарные заседания

Явные разностные методы решения задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с разностным ядром

Алиханов Анатолий Алиевич
Северо-Кавказский федеральный университет
aaalikhanov@gmail.com

В докладе рассматривается задача Коши для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с разностным ядром. При численной аппроксимации задачи на определенном временном слое свойства памяти требуют учета решения во всех предыдущих временных слоях. Это делает численное решение таких задач достаточно ресурсоемкими даже в одномерном случае, а при переходе к двух- или трехмерным задачам вычислительные затраты значительно увеличиваются. С помощью аппроксимации разностного ядра суммой экспонент исходная нелокальная задача сводится к системе локальных задач, что позволяет строить численные методы с минимальным учетом памяти. Для локальных задач хорошо изучены неявные разностные схемы. Построение явных разностных схем второго порядка аппроксимации требует введения дополнительной сетки связанной с исходной. Получены критерии устойчивости построенных явных разностных схем. Предложенные методы могут применяться для численного решения диффузионно-волновых уравнений дробного порядка по времени. Так же будут обсуждаться некоторые открытые вопросы и перспективы дальнейших исследований в данной области.

Инвариантные алгебраические многообразия и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений

Белова Мария Владимировна
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”
mvbelova@hse.ru

Доклад посвящен проблеме нахождения инвариантных многообразий для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Будет дано детальное описание метода, позволяющего находить все инвариантные алгебраические многообразия для широких классов полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений. Планируется рассмотреть приложения теории инвариантных многообразий при исследовании интегрируемости и разрешимости дифференциальных систем. В частности, будет рассматриваться вопрос построения первых интегралов, принадлежащих расширению Лиувилля поля рациональных функций. В качестве иллюстрации будет представлено решение проблемы интегрируемости по Лиувиллю для полиномиальных систем Льенара.

Распространение волн на неоднородных струнах

Бессонов Роман Викторович
Санкт-Петербургский государственный университет Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова РАН
r.bessonov@gmail.com
Соавторы: С. А. Денисов

Рассматривается распространение волн по неоднородной полубесконечной струне общего вида. В терминах динамики волн описывается условие Крейна-Винера конечности логарифмического интеграла спектральной функции струны:

$$\int_0^\infty \frac{\log v_{\mathrm{ac}}(\lambda)}{\sqrt{\lambda}(1+\lambda)}\, d\lambda > -\infty.$$

Указанное условие играет ключевую роль в спектральной теории стационарных гауссовских процессов. Оказывается, что оно равносильно наличию "асимптотически бегущих" волн, распространяющихся по струне.

Помимо динамического описания струн Крейна-Винера, приводится их полное описание в терминах функций плотности. В частности, струны, составленные из участков двух разных материалов принадлежат классу Крейна-Винера тогда и только тогда, когда общая длина одного из материалов конечна.

Задача о распространении волн на неоднородной струне допускает интерпретацию в теории рассеяния. Доказывается, что условие Крейна-Винера равносильно существованию и полноте модифицированных волновых операторов для рассматриваемой струны на фоне однородной струны.

Доклад содержит результаты цикла работ автора и С. А. Денисова (University of Wisconsin–Madyson).

Весовые структуры и t-структуры

Бондарко Михаил Владимирович
Санкт-Петербургский Государственный Университет
mbond77@mail.ru

Часто важные (и функториальные) инварианты определяются или вычисляются при помощи неканонических конструкций.

Производные функторы вычисляются при помощи проективных и инъективных резольвент (модулей, объектов и комплексов); (ко)гомологии многообразий — при помощи разбиений на симплексы; (ко)гомологии спектров — при помощи клеточных фильтрации. Смешанные структуры Ходжа для когомологий непроективного (или негладкого) комплексного многообразия определяются при помощи хороших компактификаций (соотв., гладких гиперпокрытий). При этом, две разных резольвенты можно соединить морфизмом; для компактификаций получается только выбрать третью, "мажорирующую" первые две.

Иногда получается "вложить исходные объекты" в триангулированную категорию $\underline{C}$ и связать искомый "инвариант" со срезками, соответствующими весовым структурам. Хоть весовые срезки и не каноничны, они позволяют строить канонические инварианты. В частности, при некоторых условиях (выполненных, например, для производных категорий регулярных собственных схем) весовые структуры позволяют строить t-структуры, срезки по которым (всегда) каноничны.

Детерминантные точечные процессы

Буфетов Александр Игоревич
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургский государственный университет
bufetov@mi-ras.ru

Деметрий Фалерей, основатель Александрийской библиотеки, провел перепись населения в Афинах в конце IV в. до Р.Х. В математических задачах демографии рождается теория точечных процессов на прямой — последовательностей неразличимых событий, происходящих в случайные моменты времени. В 1915 г. работа Р. Фишера [1] открыла новую главу теории точечных процессов — изучение собственных чисел матриц, задаваемых случаем.

Синус-процесс Дайсона [2] — скейлинговый предел радиальных частей мер Хаара на унитарных группах растущей размерности. Корреляционные функции синус-процесса задаются детерминантами синус-ядра — ядра проектора на пространство Пэли–Винера. Точечные процессы, чьи корреляционные функции задаются детерминантами, с одной стороны, возникают в самых разных конкретных задачах — асимптотической комбинаторики, теории представлений бесконечномерных групп, теории гауссовских аналитических функций — а, с другой, допускают богатую общую теорию.

В совместной работе с Янци Цью (Тулуза, Пекин) и А. Шамовым (Харьков, Реховот) доказано, что реализация детермиантного точечного процесса почти наверное есть множество единственности для гильбертова пространства, образа нашего проектора.

Минимально ли это множество единственности? Оказывается — нет: почти наверное реализация синус-процесса имеет *избыток 1* для пространства Пэли–Винера, то есть, становится полным и минимальным множеством после удаления одной частицы. Дело в том, что случайные целые функции, обобщённые произведения Эйлера, сопоставляемые синус-процессу, сходятся при скейлинге по распределению к восходящему, на физическом уровне строгости, к работам А. Н. Колмогорова и его школы по теории однородной изотропной турбулентности гауссову мультипликативному хаосу.

Доказательство сходимости к гауссову мультипликативному хаосу опирается на квазиинвариантность синус-процесса под действием диффеоморфизмов прямой с компактным носителем, а также на оценки остаточного члена в скейлинговом пределе формулы Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса, обобщающей Сильную Теорему Сегё в форме И. А. Ибрагимова. Для детерминантного процесса с ядром Бесселя точные оценки недавно получил С. М. Горбунов [3].

[1] R. A. Fisher. Frequency Distribution of the Values of the Correlation Coefficient in Samples from an Indefinitely Large Population. *Biometrika*, **10**:4 (1915), 507–521.

[2] F. J. Dyson. Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I. *J. Math. Phys.*, **3**:1 (1962), 140–156.

[3] S. M. Gorbunov. Speed of convergence in the Central Limit Theorem for the determinantal point process with the Bessel kernel. Preprint arXiv:2403.16219 (2024), 24 pp.

Обобщенные решения наследственных уравнений Гамильтона–Якоби

Гомоюнов Михаил Игоревич
ИММ УрО РАН
m.i.gomoyunov@gmail.com

В рамках доклада будут представлены результаты по развитию теории минимаксных и вязкостных (обобщенных) решений для наследственных уравнений Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными над пространством непрерывных функций. Уравнения такого типа возникают в задачах динамической оптимизации систем с запаздыванием [1, 2]. Основной результат [3] состоит в доказательстве эквивалентности определений минимаксного решения (в форме пары неравенств для нижних и верхних производных по многозначным направлениям) и вязкостного решения (в форме пары неравенств для коинвариантных суб- и суперградиентов). Одним из следствий этого результата является теорема о единственности вязкостного решения задачи Коши для рассматриваемого класса уравнений Гамильтона–Якоби. Ключевую роль в доказательстве играет специальное свойство коинвариантного субдифференциала, обоснование которого в свою очередь потребовало развития техники, восходящей к доказательствам многомерных негладких обобщений формулы конечных приращений [4, 5] и использующей подходящие гладкие вариационные принципы [6].

[1] Н. Ю. Лукоянов, *Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией*, УрФУ, Екатеринбург, 2011.

[2] М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, *Минимаксные решения уравнений Гамильтона–Якоби в задачах динамической оптимизации наследственных систем*, Успехи математических наук, 79:2(476) (2024), 43–144.

[3] M. I. Gomoyunov, A. R. Plaksin, *Equivalence of minimax and viscosity solutions of path-dependent Hamilton–Jacobi equations*, Journal of Functional Analysis, 285:11 (2023), 110155, 41 pp.

[4] А. И. Субботин, *Об одном свойстве субдифференциала*, Математический сборник, 182:9 (1991), 1315–1330.

[5] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, *Mean value inequalities in Hilbert space*, Transactions of the American Mathematical Society, 344:1 (1994), 307–324.

[6] J. M. Borwein, Q. J. Zhu, *Techniques of variational analysis*, Springer, 2005.

Порядки элементов конечных почти простых групп

Гречкосеева Мария Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
grechkoseeva@gmail.com

Конечная группа G называется почти простой, если она удовлетворяет условию $S \leq G \leq \mathrm{Aut}\,S$ для некоторой конечной неабелевой простой группы S; при этом S является цоколем группы G. Многие вопросы теории конечных групп сводятся не к простым, а к почти простым группам, поскольку важна информация не только о том, каковы композиционные факторы данной конечной группы, но и каково действие группы на этих композиционных факторах.

Доклад посящен задаче вычисления множеств порядков элементов конечных почти простых групп. Эта задача легко решается для групп со знакопеременным цоколем и давно решена для групп со спорадическим цоколем, поэтому речь пойдет о группах с цоколем лиева типа и, как легко понять, можно ограничиться группами вида $\langle S, \alpha \rangle$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}\,S$.

Будет дан обзор известных результатов, в том числе, будет рассказано, как были найдены множества порядков элементов самих простых групп лиева типа и как случай внешнего автоморфизма α был сведен к случаю, когда α — диагонально-графовый автоморфизм. Также будут представлены недавние результаты о диагонально-графовых автоморфизмах.

О разрешимости математических моделей, описывающих движение вязкоупругих сред с памятью

Звягин Андрей Викторович
Воронежский государственный университет
zvyagin.a@mail.ru

Математические вопросы, возникающие при изучении гидродинамики, являются актуальной и быстро развивающейся областью исследований последние сто пятьдесят лет. При этом основное внимание математиков было уделено системе уравнений Эйлера, описывающей движение идеальной среды, и системе уравнений Навье–Стокса, описывающей движение вязкой ньютоновской жидкости. Однако было замечено, что многие реальные среды (например, полимерные растворы, суспензии и др.) не подчиняются моделям классической гидродинамики. Такие модели называются “неньютоновскими средами”. Данный доклад посвящен математическому исследованию начально–краевых задач для одного класса моделей неньютоновской гидродинамики, а именно, моделей движения вязкоупругих сред. Такие среды, как следует из названия, сочетают в себе свойства вязкости и упругости.

При изучение большого класса полимеров, в которых необходимо учитывать эффекты ползучести и релаксации, в последние годы появились математические модели с дробными производными. В силу своей сложности математические постановки задач для таких моделей неньютоновской гидродинамики на сегодняшний день не столь подробно изучены и существующие математические методы зачастую оказываются не столь эффективными для них. Именно о слабой разрешимости для таких модей в докладе пойдет речь.

[1] А. В. Звягин, *О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа–модели Фойгта движения вязкоупругой среды*, Успехи математических наук, 74:3 (2019), 189–190.

[2] А. В. Звягин, *Исследование слабой разрешимости дробной альфа–модели Фойгта*, Известия Академии Наук. Серия математическая, 85:1 (2021), 66–97.

[3] А. В. Звягин, *О существовании слабых решений дробной модели Кельвина–Фойгта*, Математические заметки, 116:1 (2024), 152–157.

Исследование характеристик алгоритмов определения углового и относительного поступательного движения малых космических аппаратов

Иванов Данил Сергеевич
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
danilivanovs@gmail.com

Бурное развитие малых космических аппаратов привело к возникновению новых задач в области определения углового движения в одиночных миссиях и определения относительного поступательного движения в миссиях группового полёта. В настоящей работе предложена аналитическая методика исследования точностных характеристик алгоритмов определения движения на основе расширенного фильтра Калмана для космических аппаратов с активной системой управления ориентации и набором бортовых измерительных средств. Результаты аналитического исследования сравниваются с результатами математического моделирования работы алгоритмов и с результатами лабораторных исследований характеристик алгоритмов на стендах полунатурного моделирования движения макетов малых спутников с аэродинамическим подвесом, позволяющим имитировать условия орбитального полёта. Разработанные алгоритмы определения движения были реализованы на более 30-ти отечественных малых космических аппаратах, лётные испытания показали адекватность полученных аналитических оценок и надёжность предложенных алгоритмов для решения поставленных задач.

Об аттракторе Лоренца и псевдогиперболических аттракторах нового типа

Казаков Алексей Олегович
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”
kazakovdz@yandex.ru

Аттрактор Лоренца является первым примером негрубого, но при этом робастного хаотического поведения. Его негрубость обусловлена тем, что при малых возмущениях в нем возникают бифуркации гомоклинических траекторий к седловому состоянию равновесия. Робастность аттрактора Лоренца заключается в том, что любая его траектория характеризуется положительным максимальным показателем Ляпунова, и это свойство сохраняется при малых возмущениях. В работе [1] выдвинута гипотеза о том, что робастность хаотического аттрактора эквивалентна его псевдогиперболичности. Из этого следует, что установив псевдогиперболичность аттрактора, исследователь может быть уверен, что наблюдаемый в эксперименте динамический режим действительно является хаотическим.

В наших недавних работах были разработаны методы проверки псевдогиперболичности, а также обнаружен ряд новых негрубых псевдогиперболических аттракторов лоренцевского типа. В докладе будут представлены недавние результаты по данной тематике.

Работа подготовлена в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики”.

[1] Gonchenko S., Kazakov A., Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractor in a four-dimensional Lorenz system //Nonlinearity. – 2021. – Т. 34. – №. 4. – С. 2018.

Алгоритмическая сложность теорий с итерацией Клини

Кузнецов Степан Львович
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва
sk@mi-ras.ru

Итерация (звёздочка) Клини — это одна из наиболее интересных алгебраических операций, встречающихся в теоретической информатике. Исследования структур с этой операцией — алгебр Клини и их расширений — начинаются с классического понятия регулярных выражений, задающих формальные языки. Впоследствии были введены так называемые алгебры действий (Пратт 1991, Козен 1994), или алгебры Клини с делениями. В этих структурах звёздочка Клини сочетается с делениями, согласованными с частичным порядком (такие операции были введены ранее в работе Крулля, 1924). Доклад посвящён вопросам алгоритмической сложности логических теорий структур со звёздочкой Клини. Несмотря на то, что простейшая из таких теорий, теория равенства регулярных выражений, алгоритмически разрешима, её обобщения, такие как хорновы теории и их фрагменты, а также теории с делениями, практически сразу становятся неразрешимыми. Особенно интересен здесь случай $*$-непрерывных алгебр Клини, где итерация задаётся как предел степеней элемента (в общем случае итерация определяется как неподвижная точка). На логическом языке $*$-непрерывность соответствует ω-правилу, и сложность таких теорий может достигать уровня Π^1_1-полноты.

В докладе будет дан обзор результатов об алгоритмической сложности теорий — эквациональных, хорновых, первопорядковых — для алгебр Клини и алгебр действий, в общем и $*$-непрерывном случаях. Будет рассказано как о давно известных, так и о новых результатах в этой области, в том числе полученных докладчиком.

[1] W. Buszkowski, E. Palka, *Infinitary action logic: complexity, models and grammars*, Studia Logica, 89 (2008), 1–18.

[2] S.C. Kleene, *Representation of events in nerve nets and finite automata*, in: Automata Studies, Princeton Univ. Press, 1956, pp. 3–41.

[3] D. Kozen, *On action algebras*, in: Logic and Information Flow, MIT Press, 1994, pp. 78–88.

[4] D. Kozen, *On the complexity of reasoning in Kleene algebra*, Inform. Comput., 179 (2002), 152–162.

[5] S. Kuznetsov, *Action logic is undeciable*, ACM Trans. Comput. Logic, 22:2 (2021), art. 10.

[6] S.L. Kuznetsov, S.O. Speranski, *Infinitary action logic with exponentiation*, Ann. Pure Appl. Logic, 173:2 (2022), art. 103057.

[7] С.Л. Кузнецов, *Алгоритмическая сложность теорий коммутативных алгебр Клини*, Изв. РАН. Сер. матем., 88:2 (2024), 44–79.

Алгебры Стинрода

Попеленский Фёдор Юрьевич
МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет

В алгебрах Стинрода A_p стабильных когомологических операций $\bmod p$ имеются сложные соотношения между мультипликативными образующими — соотношения Адема. В докладе пойдет речь о наборах элементов, образующих аддитивные базисы алгебр Стинрода.

Для произвольного простого p хорошо известны базис Милнора и базис допустимых мономов. Кроме того, имеются элементы P^s_t, из которых тоже можно сформировать серии аддитивных базисов. Для $p = 2$ довольно давно были известны базисы, открытые Уоллом, Арноном, Вудом и др., они нашли приложения в исследовании действий алгебры A_2. Нам удалось получить аналоги этих результатов, а в некоторых случаях — более сильные утверждения, для алгебр A_p, где $p > 2$.

Простые алгебраические группы и их группы точек

Ставрова Анастасия Константиновна
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
anastasia.stavrova@gmail.com

Простые алгебраические группы над полем K являются аналогами в алгебраической геометрии простых групп Ли в геометрии дифференциальной. Будучи подмногообразием аффинного пространства, простая алгебраическая группа G задается системой полиномиальных уравнений от нескольких переменных, и множество решений $G(L)$ этой системы уравнений в произвольном расширении L поля K является группой в обычном смысле и называется группой L-точек алгебраической группы G. Группа $G(L)$, вообще говоря, не является простой, однако, если G изотропна (условие, соответствующее не-компактности для простых групп Ли), то по теореме Ж. Титса (1964) она содержит "большую" нормальную подгруппу $EG(L)$, которая проективно проста. В. П. Платонов (1975) привел первый пример, показывающий, что фактор-группа $G(L)/EG(L)$ может быть нетривиальной, и в настоящее время проблема ее вычисления называется проблемой Кнезера-Титса. Мы обсудим некоторые результаты по этой проблеме и ее обобщения.

Конечно-объемная технология и многосеточный алгебраический метод для решения много-физических задач

Терехов Кирилл Михайлович
Институт Вычислительной Математики им. Г.И. Марчука Российской Академии Наук
terekhov@inm.ras.ru
Соавторы: Коньшин Игорь Николаевич, Василевский Юрий Викторович

В докладе обсуждается устойчивая консервативная конечно-объемная технология для совместного суперкомпьютерного моделирования нескольких физических процессов на динамических адаптивных подвижных сетках общего вида.

Предложенные численные методы отличаются устойчивостью как для задач с преобладающей конвективной составляющей, так и для задач седлового типа, формирующихся в процессе совместного решения нескольких физических процессов [1, 3–10]. Численные методы применены к задачам разной физики, таких как линейная упругость и пороупругость [4, 7, 8], течение несжимаемой жидкости [5], механика жестких тел [1], многофазная фильтрация [1, 10], взаимодействие электромагнитных полей [1], течение и свертываемость крови [3], а также взаимодействие областей с разными физическими законами [6].

Предложены два подхода решения возникающих систем. Первый подход основан на многоуровневой неполной факторизации второго порядка с переупорядочиванием и масштабированием [10], второй подход основан на блочном алгебраическом многосеточном методе [2]. Алгебраический многосеточный метод на практике показывают линейную зависимость сложности решения от размера задачи, в том числе для систем седлового характера.

Одной из особенностью вычислительной технологии заключается в возможности динамической адаптации расчетных сеток общего вида в параллельном режиме. Динамическая адаптация включает как измельчение и разгрубление многогранных ячеек, так и перемещение узлов сетки в пространстве. Для работы с подвижными сетками был предложен консервативный четырехмерный вариант метода конечных объемов [3]. Динамическая адаптация расчетной сетки позволяет как моделировать процессы в подвижных областях, так и повышать точность расчета при экономии вычислительных ресурсов.

Ряд суперкомпьютерных технологий, образующих основу реализации численных методов, внедрены в открытой программной платформе INMOST (`www.inmost.org`, `www.inmost.ru`) для распределенного параллельного математического моделирования [10].

[1] K.M. Terekhov. General finite-volume framework for saddle-point problems of various physics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling 36 (6), 359–379, (2021)

[2] I.N. Konshin, K.M. Terekhov. Block Algebraic Multigrid Method for Saddle-Point Problems of Various Physics // Supercomputing: 9th Russian Supercomputing Days, Springer, 17–34, (2023)

[3] K.M. Terekhov, I.D. Butakov, A.A. Danilov, Yu.V. Vassilevski. Dynamic adaptive moving mesh finite-volume method for the blood flow and coagulation modeling // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, e3731, (2023)

[4] K.M. Terekhov, Yu. V. Vassilevski. Finite volume method for coupled subsurface flow problems, II: Poroelasticity // Journal of Computational Physics 462, 111225, (2022)

[5] K.M. Terekhov. Collocated finite-volume method for the incompressible Navier–Stokes problem // Journal of Numerical Mathematics 29 (1), 63–79, (2021)

[6] K.M. Terekhov. Multi-physics flux coupling for hydraulic fracturing modelling within INMOST platform // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling 35 (4), 223–237, (2020)

[7] K.M. Terekhov. Cell-centered finite-volume method for heterogeneous anisotropic poromechanics problem // Journal of Computational and Applied Mathematics 365, 112357, (2020)

[8] K.M. Terekhov, H.A. Tchelepi. Cell-centered finite-volume method for elastic deformation of heterogeneous media with full-tensor properties // Journal of Computational and Applied Mathematics 364, 112331, (2020)

[9] K.M. Terekhov, Yu.V. Vassilevski. Finite volume method for coupled subsurface flow problems, I: Darcy problem // Journal of Computational Physics 395, 298–306, (2019)

[10] Yu. Vassilevski, K. Terekhov, K. Nikitin, I. Kapyrin. Parallel finite volume computation on general meshes // Springer International Publishing, (2020)

О проблеме продолжения Уитни для пространств Соболева

Тюленев Александр Иванович
МЦМУ МИАН
tyulenev-math@yandex.ru,tyulenev@mi-ras.ru

В 1934 году Х. Уитни поставил следующую задачу. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, а $S \subset \mathbb{R}^n$ — непустое замкнутое множество. Для заданной функции $f : S \to \mathbb{R}$ требуется найти условия, необходимые и достаточные для существования функции $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$, являющейся продолжением f, т.е. $F|_S = f$. В полной общности эта проблема была решена Ч. Фефферманом в середине 2000-ых. Большой интерес представляет аналогичная задача, сформулированная в контексте пространств Соболева $W_p^m(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$. Такая задача ещё очень далека от своего окончательного решения.

На данный момент окончательные ответы получены лишь в случае $m = 1$, $p > n$ в работах П. Шварцмана. Некоторые результаты при $p > n$ и $m \in \mathbb{N}$ получены в работах Ч. Феффермана и его учеников. Также в последние два года Ч. Фефферманом и его учениками предпринимаются попытки продвижения в случае $m = n = 2$ и $p > 1$, однако и здесь ситуация далека от своего окончательного решения.

Основной фокус доклада – случай $m = 1$, $n \geq 2$ и $p \in (1, n]$. В таком диапазоне параметров ранее задача рассматривалась лишь для регулярных по Альфорсу–Давиду множеств $S \subset \mathbb{R}^n$. Недавно удалось получить окончательные ответы для существенно более широкого класса “толстых” множеств, введённого В. Рычковым. Более того, в контексте абстрактных метрических пространств с мерой удаётся получить естественное обобщение как этих результатов, так и некоторых результатов П. Шварцмана, относящихся к случаю $m = 1$ и $p \in (n, \infty)$. Наконец, если множество $S \subset \mathbb{R}^n$ не удовлетворяет каким-либо дополнительным условиям регулярности, то удаётся получить почти точное описание следа пространств Соболева на S.

Алгебра

Гурвицевы и (2,3)-порожденные группы

Всемирнов Максим Александрович
ПОМИ РАН
vsemir@pdmi.ras.ru

В докладе будет рассказано о задаче порождения групп с условиями на порядки образующих и их произведений. Причем нас будет интересовать не только вопрос о возможности или невозможности такого порождения, но и задача явного нахождения соответствующих образующих. Эти задачи относятся к области так называемого эффективного порождения в группах. Многолетние усилия многих авторов привели к практически полному ответу на вопрос, какие конечные простые группы могут быть порождены инволюцией и элементом порядка три ((2,3)-порождение). Последние существенные результаты в этом направлении были недавно получены Тамбурини и Пеллегрини. С другой стороны, аналогичный вопрос для для другого важного класса, а именно для гурвицевых групп (конечных (2,3,7)-порожденных групп), еще далек от полного разрешения. В докладе будет дан обзор современного состояния этих проблем и сформулированы открытые вопросы.

Операторы Роты–Бакстера на группах

Гальт Алексей Альбертович
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
`galt84@gmail.com`

Операторы Роты–Бакстера на группах ввели Л. Гуо, Х. Ланг и Ю. Шенг в работе 2021 года [1]. После выхода данной статьи уже опубликованы различные работы, посвященные данному направлению. С одной стороны, активно исследуется соответствие между операторами Роты–Баксетра на группах Ли и алгебрах Ли. С другой стороны, определение оператора Роты–Бакстера на группе было перенесено на полугруппы Клиффорда, алгебры Хопфа, решетки и другие структуры. Кроме того, была доказана глубокая взаимосвязь между операторами Роты–Бакстера на группах и структурами Хопфа–Галуа, а также косыми левыми брейсами, которые в свою очередь являются теоретико-множественными решениями уравнения Янга–Бакстера.

В 2023 году, В. Бардаков и В. Губарев показали, что все операторы Роты-Бакстера на простых спорадических группах расщепляемы, то есть получаются из точных факторизаций групп. В докладе будет рассказано о знакопеременных и диэдральных группах, которые обладают нерасщепляемыми операторпми Роты-Бакстера.

[1] L. Guo, H. Lang, Yu. Sheng, *Integration and geometrization of Rota–Baxter Lie algebras*, Adv. Math., 387 (2021), 107834.

Минимальное число порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно 1, групп $PSp_4(q)$

Гвоздев Родион Игоревич
Сибирский федеральный университет
Соавторы: Нужин Я.Н., Петруть Т.С., Соколовская А.М.

В работе G. Malle, J. Saxl, T. Weigel. Generation of classical groups, Geom. Dedicata, 1994 записана следующая проблема. Для каждой конечной простой неабелевой группы G

найти $n_c(G)$ — минимальное число порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно 1 (см. также вопрос 14.69в) в коуровской тетради). К настоящему времени вопрос решен для спорадических, знакопеременных групп и групп $PSL_n(q)$, q нечетно, исключая случай $n = 6$ и $q \equiv 3(mod 4)$.

Если G — конечная простая неабелева группа, то $n_c(G) \geq 5$, а если она еще и порождается тремя инволюциями α, β, γ, первые две из которых перестановочны и все четыре инволюции α, β, γ и $\alpha\beta$ сопряжены, то $n_c(G) = 5$. Доказана

Теорема. *Группа $PSp_4(q)$ тогда и только тогда порождается тремя инволюциями α, β, γ, первые две из которых перестановочны и все четыре инволюции α, β, γ и $\alpha\beta$ сопряжены, когда $q \neq 2, 3$.*

Следствие. *1) $n_c(PSp_4(q)) = 5$, при $q \neq 2, 3$;*
2) $n_c(PSp_4(3)) = 6$;
3) $n_c(PSp_4(2)) = 10$.

О дистанционно регулярных графах Γ диаметра 3, содержащих максимальный 1-код, и с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3

Голубятников Михаил Петрович
ИММ УрО РАН
mike_ru1@mail.ru
Соавторы: А. А. Махнев, Минчжу Чень

Наши терминология и обозначения стандартны, их можно найти в [1].

В докладе рассматриваются дистанционно регулярные графы диаметра $d = 2e + 1$, содержащие e-код C. Для e-кода C справедлива оценка $|C| \leq p^d_{dd} + 2$ (см [2]).

Если равенство достигается, то C называется максимальным кодом. В случае равенства $v = |C|(k + 1)$ код C называется совершенным.

Аналогично, справедлива оценка

$$|C| \leq \frac{k_d}{\sum_{i=0}^{e} p^d_{id}} + 1.$$

Если равенство достигается в этой границе, то код C называется совершенным относительно последней окрестности.

Для дистанционно регулярных графов диаметра 3, содержащих максимальный локально регулярный 1-код, совершенный относительно последней окрестности, Юришич и Видали нашли возможные массивы пересечений (см [2]). Оказалось, что такой граф Γ имеет массив пересечений $\{a(p + 1), cp, a + 1; 1, c, ap\}$ (и сильно регулярный граф Γ_3) или $\{a(p+1),(a+1)p,c;1,c,ap\}$, где $a=a_3$, $p=p^3_{33}$, $c=c_2$. В первом случае при $a=c+1$ граф Γ_3 — псевдогеометрический граф для $GQ(p+1,c_2+1)$, а $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(p+1,2c_2+2)$.

В работе рассматриваются дистанционно регулярным графом диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3, содержащими максимальный 1-код.

Основные результаты доклада формулируются в следующих двух теоремах:

Теорема 1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3. Если Γ содержит максимальный 1-код, то $a_3=c_2+1$ и Γ имеет массив пересечений $\{(p+1)(c_2+1),pc_2,c_2+2;1,c_2,p(c_2+1)\}$, где $p=p^3_{33}$.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{(p+1)(c_2+1),pc_2,c_2+2;1,c_2,p(c_2+1)\}$$

не существует.

[1] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. *Distance-Regular Graphs.* Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989. 495 p.

[2] A. Jurishich, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3,* Des. Codes Cryptogr, 65 (2012), 29-47.

Лямбда-структуры и степенные структуры на кольцах Гротендика многообразий с действиями конечных групп

Горчинский Сергей Олегович
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
gorchins@mi-ras.ru
Соавторы: Дёмин Данила Александрович

Доклад основан на совместной работе с Д. А. Дёминым.

Существуют различные естественные структуры на коммутативных кольцах, задающиеся набором операций на них. Одним из хорошо известных примеров является лямда-структура: набор отображений $\lambda_i\colon A\to A$, $i\geqslant 1$, для кольца A, удовлетворяющий условиям $\lambda_1=\mathrm{id}$, $\lambda_n(a+b)=\sum_{i+j=n}\lambda_i(a)\lambda_j(b)$. Другой пример даётся степенной структурой, введённой в работах С. М. Гусейна-Заде, И. Луенго и А. Мелле-Хернандеса. Степеннные структуры строятся по лямбда-структурам.

В алгебраической геометрии активно рассматривается кольцо Гротендика многообразий, а также его различные варианты, включая кольцо Гротендика многообразий с действиями конечных групп. Между данными кольцами определен естественный гомоморфизм, а на каждом из этих колец определена лямбда-структура в терминах (эквивариантных) симметрических степеней многообразий. Легко видеть, что гомоморфизм не коммутирует с лямбда-структурами.

Основной результат доклада заключается в том, что указанный выше гомоморфизм коммутирует с степенными структурами на кольцах Гротендика. Это получено при помощи новой общей формулы, выражающей степенную структуру в терминах комбинаторики корневых деревьев. В качестве приложения найдено существенное усиление и, в частности, новое доказательство, гипотезы Галкина–Шиндера о мотивной и категорной дзета-функциях многообразий.

Группы с ограничениями на множество размеров классов сопряженности

Горшков Илья Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СОРАН
ilygor8@gmail.com

Пусть G — конечная группа и $N(G)$ — множество размеров ее классов сопряженности, исключая 1. Определим ориентированный граф $\Gamma(G)$, множество вершин этого графа есть $N(G)$ и вершины x и y соединены направленным ребром от x к y, если x делит y и $N(G)$ не содержать числа z, отличного от x и y, такого, что x делит z, а z делит y. Мы будем называть граф $\Gamma(G)$ сопряженным графом группы G. Мы изучили конечные группы, сопряженный граф которых не содержит ребер.

К теореме Гаусса Люка для многочленов над кватернионами

Емиж Ислам Тимурович
Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета
iemizh@bk.ru
Соавторы: А. Э. Гутерман

Получено усиление кватернионной теоремы Гаусса-Люка, доказанной Гилони и Перотти в 2018 г. Пусть I — кватернион единичной нормы без действительной части и P — многочлен с кватернионными коэффициентами. Возьмем многочлены полученные из P путем ортогонального проектирования его коэффциентов на и вдоль C — плоскости порожденной 1 и I. Ограничим проекции на данную плоскость, соответственно будем рассматривать только те корни, которые принадлежат C. Рассмотрим множество, которое является пересечением выпуклых оболочек корней данных проекций. Доказано, что корни производной многочлена P принадлежат объединению по всем возможным I таких множеств.

[1] R. Ghiloni, A. Perotti, The quaternionic Gauss–Lucas theorem. — Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-) 197 (2018), 1679-1686.

О характеризации конечной простой группы ее порядком и графом Грюнберга–Кегеля

Ильенко Кристина Альбертовна
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
christina.ilyenko@yandex.ru

Пусть G — конечная группа. *Спектром* $\omega(G)$ называется множество всех порядков элементов группы G. Под *простым спектром* $\pi(G)$ понимают множество всех простых чисел из $\omega(G)$. Неориентированный граф без петель и кратных рёбер $\Gamma(G)$, множество вершин которого совпадает с $\pi(G)$, и две различные вершины p и q в котором смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$, называется *графом Грюнберга–Кегеля* или *графом простых чисел* группы G.

В. Ши поставил вопрос характеризации конечной простой группы ее спектром и порядком. Этот вопрос исследовался в серии работ, и 2009 г. А.В. Васильевым, М.А. Гречкосеевой и В.Д. Мазуровым [1] было доказано, что если G — конечная простая группа и H — конечная группа такая, что $\omega(H) = \omega(G)$ и $|H| = |G|$, то $H \cong G$.

Поскольку понятие графа Грюнберга–Кегеля широко обобщает понятие спектра конечной группы, то вопрос характеризации конечной простой группы ее порядком и графом Грюнберга–Кегеля возникает естественным образом. Историю постановки этого вопроса можно найти, например, в [2].

В этой работе мы обсуждаем вопрос характеризации порядком и графом Грюнберга–Кегеля конечной простой группы, граф Грюнберга–Кегеля которой содержит не менее трех компонент связности. В частности, мы исправляем неточности, допущенные в работах [3] и [4].

[1] А. В. Васильев, М. А. Гречкосеева, В. Д. Мазуров, *Характеризация конечных простых групп спектром и порядком*, Алгебра и логика, **48**:6 (2009), 685–728.

[2] Peter Cameron, Natalia Maslova, *Criterion of unrecognizability of a finite group by its Gruenberg-Kegel graph*, J. Algebra, **607**:Part A (2022), 186-213.

[3] Bahman Khosravi, Behnam Khosravi, Behrooz Khosravi, *On the prime graph of* $PSL(2, p)$ *where* $p > 3$ *is a prime number*, Acta Math Hungar, **116**:4 (2007), 295.

[4] Q. Zhang, W. Shi, R. Shen, *Quasirecognition by prime graph of the simple groups* $G_2(q)$ *and* ${}^2B_2(q)$, J. Algebra Appl., **10**:2 (2011), 309–317.

Вербально замкнутые подгруппы

Клячко Антон Александрович
МГУ

Я расскажу о том, что такое вербально замкнутые и алгебраически замкнутые подгруппы (это очень естественные понятия). Планируется познакомить слушателей с результатами на эту тему, принадлежащими Мясникову, Романькову, Богопольскому, Ольшанскому, а также докладчику и его ученикам. Речь пойдёт и о конечных группах, и о бесконечных.

О тождествах аксиальных алгебр

Козлов Роман Александрович
Институт математики им С. Л. Соболева СО РАН
KozlovRA.NSU@yandex.ru
Соавторы: В. Ю. Губарев

Аксиальные алгебры — это класс коммутативных неассоциативных алгебр, порождённых идемпотентами специального вида, называемых осями. Аксиальные алгебры были введены в работе Дж. Холла, Ф. Рейрена и С. Шпекторова [1] как новый подход к реализации алгебры Грисса. В той же работе отмечена тесная взаимосвязь между аксиальными и йордановыми алгебрами.

В работе В. Губарева, Ф. Машурова и А. Панасенко [2] впервые ставится вопрос о поиске тождеств, выполненных на аксиальных алгебрах. Так, было доказано, что для почти всех значений параметров α и t на $S(\alpha, t, E)$ — расщепляемой алгебре невырожденной билинейной формы – нет тождеств степеней 3 и 4, не следующих из коммутативности. А среди тождеств степени 5 на алгебре $S(\alpha, E)$ при $\alpha \notin \{\pm 1, 0, 1/2, 2\}$ появляется единственное новое:

$$((a, b, c), d, b) + ((c, b, d), a, b) + ((d, b, a), c, b) = 0,$$

где $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$. Назовём его тождеством трёх ассоциаторов.

В работе пяти авторов [3] была предложена конструкция, позволяющая явно построить три бесконечных серии аксиальных алгебр монстрового типа. В данной работе исследуется первая из них — серия $Q_k(\eta)$, для неё найдено разложение в прямую сумму пространств $A \oplus B$, где A — подалгебра, а B есть A-модуль. Установлено, что четырёхмерная алгебра $Q_2(\eta)$, как и алгебра $S(\alpha, E)$, для почти всех η не имеет тождеств степени ≤ 5, не следующих из коммутативности и тождества трёх ассоциаторов.

Вычисления проводились в системах компьютерной алгебры `Singular` и `GAP`.

Работа выполнена при поддержке математического центра в Академгородке, соглашение номер 075-15-2022-281 с министерство науки и высшего образования РФ.

[1] J.I. Hall, F. Rehren, S. Shpectorov, Primitive axial algebras of Jordan type, J. Algebra **437** (2015), 79–115.

[2] V. Gubarev, F. Mashurov, A. Panasenko, Generalized sharped cubic form and split spin factor algebra. Comm. Algebra **52(8)** (2024), 3282–3305.

[3] A. Galt, V. Joshi, A. Mamontov, S. Shpectorov, A. Staroletov, Double axes and subalgebras of Monster type in Matsuo algebras, Comm. Algebra **49** (2021), 4208–4248.

Трансверсальная ортогональность в поликубических матрицах

Копьев Алексей Александрович
Студент 4 курса бакалавриата, Казанский Федеральный Университет
AAKopev@stud.kpfu.ru
Соавторы: Хмельницкая Алена Владимировна, Яшагин Евгений Иванович

Мы определяем на множестве поликубически матриц умножения – расширения классического не путем тензорного умножения двумерных, а по принципу: строка на столбец, столбец на ряд и т. д.

В работе получена формула числа новых умножений, введено понятие k-мерной трансверсальной ортогональности в n-размерных поликубических матрицах и приведены формулы для поиска алгебр им удовлетворяющих. На примерах трехмерных кубических матриц продемонстрированы групповые структуры и выделены те, которые сохраняют трансверсальную ортогональность. Понятие трансверсальной ортогональности обязано своим появлением необходимости описания с помощью поликубических матриц многочастичных квантовых взаимодействий элементарных частиц со множеством квантовых характеристик. Полученные формулы вводят для этого новые понятия полиэрмитовых алгебр.

Построение отрезков квадратичной длины при помощи отрезков линейной длины в спектре транспозиционного графа

Кравчук Артём Витальевич
Институт Математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
artemkravchuk13@gmail.com

В данной работе исследуются собственные значения транспозиционного графа Кэли T_n, $n \geqslant 2$. Собственные значения графа T_n являются целыми числами [1,2]. Спектр $Spec(T_n)$ этого графа симметричен относительно нуля, так как граф является двудольным. Кроме этого, в работе [1] доказано, что наибольшее собственное значение $\frac{n(n-1)}{2}$ имеет кратность 1, второе собственное значение $\frac{n(n-3)}{2}$ имеет кратность $(n-1)^2$. Таким образом, имеется некоторое представление о том, как устроен спектр транспозиционного графа. Однако точное описание спектра для этого графа неизвестно. Следующий результат даёт описание спектра около нуля.

Теорема 1. [3, Теорема 3] *Для $n \geqslant 19$, все целые числа из отрезка $[-\frac{n-4}{2}, \frac{n-4}{2}]$ лежат в спектре T_n.*

В данной работе показывается, что при $n \geqslant 48$ существует отрезок квадратичной относительно n длины, который целиком содержится в спектре транспозиционного графа.

Теорема 2. [4, Теорема 4] *Для всех $n \geqslant 48$, все целые числа из отрезков $[-y_2, -y_1]$ и $[y_1, y_2]$ лежат в спектре T_n, где $y_1 = C^2_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1} - 2(\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 1), y_2 = C^2_{\lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor}$.*

Доказательства этих теорем опирается на основные факты из теории представлений симметрической группы для графов Кэли, а также некоторые новые утверждения о соответствии между собственными значениями графа T_n и разбиениями числа n.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2022-281.

[1] *K. Kalpakis, Y. Yesha*, On the bisection Width of the Transposition network, *Networks*, **29** (1997) 69–76.

[2] *E. V. Konstantinova, D. V. Lytkina*, Integral Cayley graphs over finite groups, *Algebra Colloquium*, **27**(1) (2020) 131–136.

[3] Elena V. Konstantinova, Artem Kravchuk, Distinct eigenvalues of the Transposition graph, *LAA*, **690** (2024) (132-141), https://doi.org/10.1016/j.laa.2024.03.011.

[4] *Artem Kravchuk*, Constructing segments of quadratic length in $Spec(T_n)$ through segments of linear length, https://arxiv.org/abs/2404.00410.

Решетка подгрупп группы Шевалле над кольцом, содержащих элементарную подгруппу над подкольцом

Кудряков Дмитрий Александрович
Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера (СПбГУ)
shorfod@gmail.com
Соавторы: Степанов Алексей Владимирович

Обозначим через $L(D, G)$ решетку подгрупп группы G, содержащих фиксированную подгруппу D. Решетка $L(D, G)$ называется стандартной, если она разбивается в дизъюнктное объединение подрешеток (так называемых сэндвичей) $L(F_a, N_a)$, где a пробегает некоторое множество индексов, а N_a обозначает нормализатор F_a. Пусть $G(A)$ — группа Шевалле над кольцом A, построенная по приведенной неприводимой системе корней с простыми связями. В докладе рассматривается задача стандартного описания решетки подгрупп группы $G(A)$, содержащих элементарную подгруппу $E(R)$ над подкольцом R. При этом нижними границами сэндвичей служат элементарные подгруппы $E(S)$, соответствующие подкольцам S, промежуточным между R и A.

О биполярной классификации эндоморфизмов группоида

Литаврин Андрей Викторович
Сибирский федеральный университет
anm11@rambler.ru

Рассматривается проблема поэлементного описания моноида всех эндоморфизмов произвольного группоида. Установлено, что данный моноид раскладывается в объединение попарно непересекающихся классов эндоморфизмов; эти классы получают название базовых множеств эндоморфизмов. Такие множества эндоморфизмов группоида G параметризуются отображениями $\gamma\colon\ G \to \{1,2\}$, которые в данной работе называются биполярными типами (либо, кратко, типами). Если некоторый эндоморфизм лежит в базовом множестве типа γ, то мы говорим, что этот эндоморфизм имеет тип γ. Таким образом, мы получаем классификацию всех эндоморфизмов фиксированного группоида (биполярную классификацию эндоморфизмов). Получен способ вычисления биполярного типа эндоморфизма произвольного группоида. Для группоидов с попарно различными левыми сдвигами элементов — в частности, группоидов с правым нейтральным элементом, моноидов, луп и групп — описанный способ вычисления биполярного типа эндоморфизма приводит к критерию неподвижной точки данного эндоморфизма. Выяснилось, что биполярный тип эндоморфизмов группоида с попарно различными левыми сдвигами содержит всю информацию о неподвижных точках эндоморфизмов этого типа.

Свободные нильпотентные группы и проблема слов

Магдиев Руслан Тимурович
Магистрант фМКН СПБГУ
rus.magdy@mail.ru
Соавторы: Семидетнов Артём Алексеевич

Доклад посвящен геометрической интерпретации решения проблемы слов для конечно-порождённых свободных нильпотентных групп. В ходе описания решения будет описана обнаруженная нами геометрическая конструкция, позволяющая построить ранее неизвестные представления для групп из данного класса. Также будет уделено время обобщениям на случай произвольной конечно-порождённой нильпотентной группы. Доклад основан на [1, 2] и на новых, ранее неопубликованных результатах в этой области математики.

[1] I. Alekseev, R. Magdiev, *The language of geodesics for the discrete Heisenberg group*, arXiv:1905.03226, 2019.

[2] R. Magdiev, A. Semidetnov, *On the geometry of free nilpotent groups*, arXiv:2106.00095, 2021.

О группах, порожденных сопряженными элементами порядка 3, с ограничениями на 2-порожденные подгруппы

Мамонтов Андрей Сергеевич
ИМ СО РАН
mamontov@math.nsc.ru

На протяжении всей истории теории групп разнообразные условия конечности группы и связи между ними вызывали живой интерес исследователей. Классическими примерами подобных условий являются периодичность и локальная конечность: они широко изучаются в многочисленных работах. Условие периодичности по своей сути накладывает ограничение на подгруппы, порожденные одним элементом группы. Классический пример, где ограничения накладываются на 2-порожденные подгруппы — это группы 3-транспозиций. Группа G называется группой n-транспозиций, если она порождается классом C сопряженных элементов порядка 2 (инволюций), таким что порядок xy не превосходит n для любых элементов x и y из C. Группы 2-транспозиций, очевидно, абелевы и потому локально конечны. Известно, что группы 3-транспозиций локально конечны. Вопрос о локальной конечности групп n-транспозиций для $n > 3$ открыт. В настоящем докладе речь пойдет о группах, порожденных классом D сопряженных элементов порядка три. Дополнительно будем считать, что любые два элемента из D порождают подгруппу являющуюся гомоморфным образом группы из $M = \{3^{1+2}, SL_2(3), SL_2(5)\}$, здесь 3^{1+2} — экстраспециальная группа порядка 27 и периода 3, а SL — специальные линейные группы. Такие группы порождают два элемента порядка 3, инвертируемые 3-транспозициями так называемого типа S_4.

Граф ортогональности некоторых классических классов колец

Маркова Ольга Викторовна
МГУ имени М. В. Ломоносова
ov_markova@mail.ru

Доклад основан на работе [О. В. Маркова, Д. Ю. Новочадов, *Графы ортогональности прямой суммы колец и полупростых артиновых колец*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 514 (2022), 138-166].

Изучение алгебраических структур, базирующееся на исследовании соответствующих им графов отношений, находится в центре внимания математиков в течение нескольких десятилетий. Для колец данное направление восходит к работе Бека 1986 года.

С каждым кольцом можно связать *граф ортогональности*, множеством вершин которого являются все двусторонние делители нуля кольца, и две вершины соединены ребром, если соответствующие им элементы кольца ортогональны.

Вопрос о связности и возможных значениях диаметра полностью решен для графов ортогональности коммутативных колец Андерсоном и Ливингстоном в 1999 г. В докладе будут представлены результаты о графе отношения ортогональности на некоммутативных кольцах. Будет показано решение вопроса о наличии изолированных вершин в графах ортогональности простых и полупростых артиновых колец, первичных и полупервичных колец с двусторонними условиями Голди. Также описаны компоненты связности и поведение функции диаметра при переходе от двух произвольных колец к их прямой сумме: показано, что граф ортогональности прямой суммы колец может в общем случае состоять из изолированных вершин и одной большой связной компоненты, диаметр которой может принимать любое целое значение от 1 до 4. Найдены критерии отсутствия изолированных вершин.

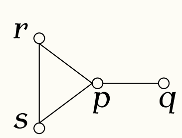
О конечных неразрешимых группах, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны графу “балалайка”

Минигулов Николай Александрович
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовсого УрО РАН, Екатеринбург
n.a.minigulov@imm.uran.ru
Соавторы: А. С. Кондратьев

Графом Грюнберга–Кегеля (или *графом простых чисел*) $\Gamma(G)$ конечной группы G называют граф, в котором множеством вершин является множество всех простых делителей порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе G существует элемент порядка pq. Графом “балалайка” (paw) называют граф, который имеет ровно 4 вершины со степенями 1, 2, 2 и 3.

А.С. Кондратьев описал конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у групп $Aut(J_2)$ (см. [1]) и A_{10} (см. [2]). Графы Грюнберга–Кегеля этих групп изоморфны как абстрактные графы графу “балалайка”.

Нами была поставлена более общая задача: описать конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы графу “балалайка”. В дальнейшем будем считать, что G — конечная группа, граф Грюнберга–Кегеля которой как абстрактный граф изоморфен графу “балалайка”, т. е., граф $\Gamma(G)$ имеет следующий вид:



,

где r, s, p и q — некоторые попарно различные простые числа.

В [3] мы доказали, что если группа G неразрешима, то фактор-группа $\overline{G} = G/S(G)$ (где $S(G)$ — разрешимый радикал группы G) почти проста, и класифицировали все конечные почти простые группы графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы подграфу графа "балалайка". В [4] мы описали конечные разрешимые группы G. Также в [5, 6] мы классифицировали конечные неразрешимые группы G в следующих трех случаях:

(1) группа G не содержит элементов порядка 6;

(2) группа G содержит элемент порядка 6 и вершина q графа $\Gamma(G)$ делит $|S(G)|$;

(3) вершина q графа $\Gamma(G)$ меньше 5.

В данной работе мы продолжаем изучение этой проблемы. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Пусть G — неразрешимая группа, $\{r, s\} = \{2, 3\}$, $p > 3$, $q > 3$ и q не делит $|S(G)|$. Тогда граф Грюнберга–Кегеля фактор-группы $\overline{G} := G/S(G)$ несвязен.*

[1] A. S. Kondrat'ev, *Finite groups with prime graph as in the group $Aut(J_2)$*, Proc. Steklov Inst. Math. 283:1 (2013), 78-85.

[2] A. S. Kondrat'ev, *Finite groups that have the same prime graph as the group A_{10}*, Proc. Steklov Inst. Math., 285: 1 (2014), 99-107.

[3] A. S. Kondrat'ev, N. A Minigulov, *Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group A_{10}*, Siberian Electr. Math. Rep., 15 (2018), 1378-1382.

[4] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, *Finite solvable groups whose Gruenberg-Kegel graphs are isomorphic to the paw*, Тр. ИММ УрО РАН., 28:2 (2022), 269-273.

[5] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, *On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw*, Commun. Math. Stat., 10:4 (2022), 653-667.

[6] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, *On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw*, Тезисы докладов международной (54-й всероссийской) молодежной школы-конференции "Современные проблемы математики и ее приложений". Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2023, 39.

Уравнения над разрешимыми группами

Михеенко Михаил Александрович
Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова; Московский Центр фундаментальной и прикладной математики
mamikheenko@mail.ru
Соавторы: А. А. Клячко, В. А. Романьков

Доклад посвящён уравнениям и системам уравнений над разрешимыми группами.

Будет приведено условие, при котором группа вкладывается в разрешимую группу, содержащую решения всех невырожденных систем уравнений над собой, и аналог этого условия для систем, невырожденных по некоторому простому модулю.

Также будет обсуждён минимальный по порядку пример метабелевой группы, над которой есть унимодулярное уравнение, не имеющее решений в метабелевых группах.

Многочлены Шура и Шуберта через бозонные операторы

Ненашев Глеб Вячеславович
Санкт-Петербургский государственный университет
glebnen@gmail.com

В этом докладе будет рассказан новый способ работать с функциями Шура и их обобщением полиномами Шуберта. Полиномы Шуберта представляют классы когомологий циклов Шуберта в многообразиях полных флагов, когда как функции Шура представляют классы для Грассманова многообразия. Мы введем два дифференциальных оператора, которые однозначно определяют коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона и структурные константы для полиномов Шуберта. В частности этот способ позволяет работать с многочленами Шура и Шуберта без использования понятия многочленов.

Аддитивные задачи в кольцах формальных матриц над кольцами вычетов

Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович
НОМЦ ТГУ, Томск
nstsddts@yandex.ru

Изучение колец, порождаемых аддитивно своими специальными элементами, — под “специальными” подразумеваем: обратимые, инволюции, идемпотенты, q-потенты, нильпотенты и т.п. — хорошо известная задача, давно привлекающая внимание многих алгебраистов. Часто данное направление исследований называют «аддитивными задачами в кольцах».

Нас интересуют аддитивные задачи в кольцах формальных матриц над кольцами вычетов (см. [1-5]). Такое кольцо будем обозначать буквой K. Группа обратимых матриц в K была описана в [2]. Ответ на вопрос о хорошести формальных матриц из K дан в статье [3]. Нильпотентные формальные матрицы из K описаны в[4]. К слову, нильпотенты в K образуют идеал. В K есть матрицы, непредставимые в виде суммы нильпотентной и обратимой матриц. Другими словами, K — не изящное кольцо [4]. Более того, оно не будет ниль-хорошим [4]. При $p > 2$ в K найдутся также матрицы, которые нельзя записать как сумму нильпотентной и идемпотентной матриц, то есть K — не ниль-чистое кольцо [5].

Кольца формальных матриц над кольцами вычетов интересны как сами по себе, так и как возможная основа для построения некоммутативного протокола шифрования данных (см. литературу в [3]). Этот раздел криптографии — некоммутативная алгебраическая криптография — в последнее время развивается особенно бурно.

[1] Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М.: МЦНМО, 2017.

[2] Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 30–42. DOI: 10.17223/19988621/74/4.

[3] Норбосамбуев Ц.Д. Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 32–42. DOI: 10.17223/19988621/85/3.

[4] Елфимова А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В. Нильпотентные, ниль-хорошие и ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика (в печати).

[5] Елфимова А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В. Идемпотентные и ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика (готовится к печати).

Порождающие множества инволюций почти простых групп и их приложения

Нужин Яков Нифантьевич
Сибирский федеральный университет
nuzhin2008@rambler.ru

В докладе речь пойдет о порождающих множествах инволюций малой мощности с определенными свойствами и их приложениях. В частности, будут отмечены результаты по следующему вопросу из Коуровской тетради, записанному автором в 1999 г.

Для каждой конечной простой неабелевой группы найти минимум числа порождающих инволюций, удовлетворяющих дополнительному условию, в каждом из следующих случаев.

а) Произведение порождающих инволюций равно 1.

б) (Малле-Саксл-Вайгель). Порождающие инволюции сопряжены.

в) (Малле-Саксл-Вайгель). Выполнены свойства а) и б).

г) Инволюции сопряжены и две из них перестановочны.

Теорема Бэра–Сузуки и ее аналоги

Ревин Данила Олегович
Международный научно-образовательный математический центр НГУ; Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
revin@math.nsc.ru

Теорема Бэра–Сузуки — классический результат теории групп. Она утверждает, что p-радикал конечной группы для любого простого числа p совпадает с множеством таких элементов x, что любые два элемента, сопряженных с x, порождают p-подгруппу. Теорема является популярным источником различных аналогов и обобщений. Один из них [1,2] утверждает, что разрешимый радикал конечной группы совпадает с множеством таких элементов x, что любые четыре элемента, сопряженных с x, порождают разрешимую подгруппу.

Пусть фиксирован непустой класс конечных групп $\mathfrak{X}$, замкнутый относительно подгрупп, гомоморфных образов и расширений (последнее означает, что конечная группа G, обладающая нормальной подгруппой N такой, что N и G/N принадлежат классу $\mathfrak{X}$, сама принадлежит $\mathfrak{X}$). Основной результат доклада утверждает, что существует натуральная константа m, зависящая от $\mathfrak{X}$, с тем свойством, что элемент x конечной группы принадлежит $\mathfrak{X}$-радикалу (наибольшей нормальной $\mathfrak{X}$-подгруппе) группы тогда и только тогда, когда любые m сопряженных с x элементов порождают $\mathfrak{X}$-подгруппу.

Работа выполнена за счет РНФ, грант 24-11-00127, https://rscf.ru/project/24-11-00127/.

[1] P. Flavell, S. Guest, R. Guralnick, “Characterizations of the solvable radical”, Proc. Amer. Math. Soc., 138:4 (2010), 1161–1170.

[2] N. Gordeev, F. Grunewald, B. Kunyavskiĭ, E. Plotkin, “From Thompson to Baer–Suzuki: a sharp characterization of the solvable radical”, J. Algebra, 323:10 (2010), 2888–2904.

k-замыкания групп подстановок

Скресанов Савелий Вячеславович
Новосибирский государственный университет; Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
skresan@math.nsc.ru

Группа подстановок G на конечном множестве Ω также действует естественным образом на декартовой степени Ω^k, $k \geq 1$. Наибольшая группа подстановок на Ω, имеющая такие же орбиты на Ω^k, что и G, называется k-замыканием группы G. Это понятие, предложенное Х. Виландом в связи с изучением порядков примитивных групп подстановок, нашло впоследствии многочисленные применения для изучения автоморфизмов комбинаторных структур — например, группа автоморфизмов любого графа будет совпадать со своим 2-замыканием. Особо важным оказалось изучение абстрактных свойств групп, сохраняемых при k-замыканиях. В докладе планируется рассказать о недавних продвижениях в этом направлении, а также затронуть алгоритмические вопросы вычисления k-замыканий и их связь с проблемой изоморфизма графов из теории сложности.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-11-00127, `https://rscf.ru/project/24-11-00127/`.

О псевдо-композиционных и трейн алгебрах

Старолетов Алексей Михайлович
Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН
staroletov@math.nsc.ru

Коммутативная неассоциативная алгебра имеет ранг r, если каждый её элемент порождает подалгебру размерности не более $r-1$. Нас будут интересовать следующие два класса алгебр ранга 3. Предположим, что $\mathbb{F}$ – поле характеристики, отличной от 2 и 3. Коммутативная $\mathbb{F}$-алгебра A, на которой задана ненулевая симметрическая билинейная форма φ, называется псевдо-композицинной, если $x^3 = \varphi(x,x)x$ для всех $x \in A$. Эти алгебры активно изучались в прошлом, в частности Мейберг и Осборн получили классификацию, при некоторых ограничениях, в [1].

Второй класс — это трейн алгебры ранга 3. Пусть, как и ранее, A — коммутативная $\mathbb{F}$-алгебра, где $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2,3$. Главные степени элементов в A определяются следующим образом: $x^1 = x$ и $x^i = x^{i-1}x$ при $i \geq 2$. Если существует ненулевой гомоморфизм алгебр $\omega : A \to \mathbb{F}$, то A называется барической. В этом случае пара (A,ω) называется трейн алгеброй ранга r, если существуют такие элементы $\lambda_1,\dots,\lambda_{r-1} \in \mathbb{F}$, что каждый $x \in A$ удовлетворяет равенству $x^r + \lambda_1\omega(x)x^{r-1} + \ldots + \lambda_{r-1}\omega(x)^{r-1}x = 0$. Эти алгебры были введены Этерингтоном в 1939 году как часть алгебраического формализма генетики в его фундаментальной работе [2].

Предположим, что A — коммутативная $\mathbb{F}$-алгебра и $a \in A$. Если $\lambda \in \mathbb{F}$, то обозначим $A_\lambda(a) = \{u \in A \mid au = \lambda u\}$ и для $L \subseteq F$ определим $A_L(a) := \bigoplus A_\lambda(a)$.

Псевдо-композиционные алгебры и трейн алгебры ранга 3 обладают следующим общим свойством: для алгебры A найдётся такой элемент $\eta \in \mathbb{F}\setminus\{\frac{1}{2},1\}$, что для каждого идемпотента $e \in A$ справедливо разложение Пирса

$$A = A_1(e) \oplus A_\eta(e) \oplus A_{\frac{1}{2}}(e),$$

где $A_1(e) = \langle e \rangle$, с правилами умножения

$$A_\eta(e)^2 \subseteq A_1(e), A_{1/2}(e)^2 \subseteq A_1(e) \oplus A_\eta(e), A_{\frac{1}{2}}(e)A_\eta(e) \subseteq A_{\frac{1}{2}}(e).$$

Будем называть такой идемпотент η-осью в алгебре A. Оказывается это свойство характеризует два упомянутых класса алгебр в следующем смысле.

Теорема. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики, отличной от 2 и 3. Предположим, что $\eta \in \mathbb{F} \setminus \{\frac{1}{2},1\}$ и A — коммутативная $\mathbb{F}$-алгебра, порождённая множеством η-осей. Справедливы следующие утверждения.*

(a) *если $\eta = -1$, то A — псевдо-композиционная алгебра;*

(b) *если $\eta \neq -1$, то A — трейн алгебра ранга 3.*

При доказательстве используются методы, развитые ранее при исследовании аксиальных алгебр, определённых в [3]. Результаты доступны в виде препринта `arXiv:2309.05237`.

[1] K. Meyberg, J.M. Osborn, *Pseudo-composition algebras*, Math Z., **214**:1 (1993), 67–77.

[2] I.M.H. Etherington, *Genetic algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **59** (1939), 242–258.

[3] J.I. Hall, F. Rehren and S. Shpectorov, *Universal axial algebras and a theorem of Sakuma*, J. Algebra, **421** (2015), 394–424.

Абелевы группы и псевдоконечные полигоны над ними

Степанова Алена Андреевна
Дальневосточный федеральный университет
stepanova.aa@dvfu.ru
Соавторы: С. Г. Чеканов

Теория моделей псевдоконечных структур — активно развивающаяся в последнее время область математики. Это направление исследований, благодаря теореме Лося, тесно связано с теорией конечных моделей. Структура $\mathfrak{M}$ языка L псевдоконечна, если любое предложение языка L, истинное в $\mathfrak{M}$, истинно в некоторой конечной структуре языка L. В работах [1-6] изучаются вопросы строения псевдоконечных структур (полей, групп, колец, графов, унаров, полигон над моноидом).

Доклад посвящен исследованию T-псевдоконечных полигонов над группой G, где T — теория всех полигонов над G. Полигон $_GA$ называется T-псевдоконечным, если любое предложение, истинное в $_GA$, истинно в некотором конечном полигоне над G. Доказано, что класс всех полигонов над конечнопорожденной абелевой группой, представимых в виде копроизведения полигонов $_GG/S_i$, $1 \leq i \leq n$, где $S_1, \ldots, S_n$ — фиксированные подгруппы группы G, T-псевдоконечен.

[1] Z. Chatzidakis. Notes on the model theory of finite and pseudo-finite fields. `http://www.logique.jussieu.fr/žoe/papiers/Helsinki.pdf`.

[2] D. Macpherson, *Model theory of finite and pseudofinite groups*, Arch. Math. Logic, 57:1-2 (2018), 159-184.

[3] R. Bello-Aguirre, Model theory of finite and pseudofinite rings, PhD thesis, University of Leeds, 2016.

[4] N. D. Markhabatov, *Approximations of Acyclic Graphs*, Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика», 40 (2022), 104–111.

[5] E.L. Efremov, A.A. Stepanova, S.G. Chekanov, *Pseudofinite unars*, Algebra Logic (in press).

[6] E.L. Efremov, A.A. Stepanova, S.G. Chekanov, *Pseudofinite S-acts*, Siberian Electronic Mathematical Reports, V. 21:1 (2024), p. 271-276.

Классы колец близких к чистым

Тапкин Даниль Тагирзянович
Казанский (Приволжский) федеральный университет
danil.tapkin@yandex.ru
Соавторы: Абызов А.Н.

Под чистым кольцом понимается кольцо, в котором каждый элемент является суммой идемпотента и обратимого элемента. Данные кольца были введены Никольсоном в 1977 г. в связи с изучением колец со свойством замены. К примеру, чистым является кольцо эндоморфизмов всякого инъективного модуля. В 2013 г. Дизл ввел понятие ниль-чистого кольца — это кольцо, в котором каждый элемент является суммой илемпотента и нильпотента. Вполне очевидно, что каждое ниль-чистое кольцо является чистым (но обратное, вообще говоря, неверно). В 2017 г. Матзук установил интересную связь между свойствами ниль-чистых колец и проблемой Кете.

Естественным обобщением понятия ниль-чистого кольца являются q-ниль-чистые кольца — кольца, в которых каждый элемент представим в виде суммы q-потента (элемента, который равен самому себе при возведении в натуральную степень q) и нильпотента. Также представляют интерес кольца, в которых каждый элемент является суммой q_1-потента и q_2-потента. Все указанные выше кольца мы называем кольцами близкими к чистым. Эти классы колец в последнее время исследовались во многих работах.

В докладе будет приведен обзор результатов связанных с кольцами близкими к чистым, включая новые результаты полученные авторами.

Разрешение плоского семейства когерентных пучков без кручения в плоское семейство допустимых пар и пространство модулей допустимых пар в размерности ≥ 2

Тимофеева Надежда Владимировна
Ярославский госуниверситет им. П. Г.Демидова, Центр интегрируемых систем
ntimofeeva@list.ru

В докладе будут рассмотрены следующие вопросы:

(a) Преобразование единичного когерентного алгебраического пучка E, имеющего ранг r и полином Гильберта $rp(t)$ на неособом проективном алгебраическом многообразии (S, L) размерности $d \geq 2$ (L – обильный обратимый пучок) в допустимую пару $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ ($(\tilde{S}, \tilde{L})$ – проективная алгебраическая схема определённого вида, $\tilde{E}$ – локально свободный пучок того же ранга r и с тем же полиномом Гильберта $rp(t)$) [1];

(b) Преобразование плоского семейства когерентных алгебраических пучков в плоское семейство допустимых пар, послойно сводящееся к преобразованию п.1;

(c) Понятия стабильности (полустабильности) допустимой пары $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ и их связь со стабильностью (полустабильностью) когерентного пучка E, разрешением которого получена эта пара [1];

(d) Индуцированный морфизм пространства (алгебраической схемы) модулей полустабильных допустимых пар на классическое пространство модулей Гизекера – Маруямы когерентных пучков без кручения.

С обоснованием и происхождением рассматриваемых задач также можно ознакомиться по работе [1].

[1] Н. В. Тимофеева, *Стабильность и эквивалентность допустимых пар произвольной размерности для компактификации пространства модулей стабильных векторных расслоений*, ТМФ, 212:1 (2022), 109–128.

О связях между факторно делимыми группами и E-кольцами

Тимошенко Егор Александрович
НОМЦ Томского государственного университета
tea471@mail.tsu.ru
Соавторы: М. Н. Зонов

Факторно делимые группы без кручения были введены Бьюмонтом и Пирсом в 1961 году. Позднее Фомин и Уиклесс распространили определение на случай произвольных абелевых групп:

Определение. Пусть n — неотрицательное целое число. Группу G называют *факторно делимой группой ранга n*, если ее периодическая часть редуцированна и существует свободная подгруппа $F \subset G$ ранга n такая, что G/F — делимая периодическая группа.

Важность изучения факторно делимых групп связана, в частности, с тем фактом, что образуемая ими категория двойственна категории групп без кручения конечного ранга.

С другой стороны, E-кольца были введены Шульцем в 1973 году как попытка решения одной из проблем Фукса и быстро стали предметом активного изучения:

Определение. Кольцо R называется *E-кольцом*, если оно коммутативно и всякий аддитивный гомоморфизм $R \to R$ представляет собой умножение на некоторый элемент из R.

Авторы доклада исследовали и систематизировали связи между факторно делимыми группами и E-кольцами. В частности, получен критерий того, чтобы аддитивная группа E-кольца была факторно делимой. Также дано отрицательное решение проблемы Боушелла и Шульца о квазиразложениях E-колец.

Собственные значения и собственные функции операторов смежности локально конечных графов

Трофимов Владимир Иванович
ИММ УрО РАН, УрФУ, УМЦ
trofimov@imm.uran.ru

В докладе излагаются некоторые алгебраические результаты спектральной теории операторов смежности локально конечных графов, разработанной в [1].

[1] В. И. Трофимов, *Об операторах смежности локально конечных графов*, Изв. РАН. Сер. матем., 88:3 (2024), 139-191.

Операторы Роты–Бакстера нулевого веса и операторы усреднения на алгебрах многочленов

Ходзицкий Артем Федорович
НГУ, Новосибирск
a.khodzitskii@g.nsu.ru

Пусть A — алгебра над полем F. Линейный оператор T на A называется оператором усреднения, если выполнены соотношения $T(a)T(b) = T(T(a)b) = T(aT(b))$ для всех $a, b \in A$. Линейный оператор R на A называется оператором Роты–Бакстера, если

$$R(a)R(b) = R\big(R(a)b + aR(b) + \lambda ab\big)$$

выполнено для всех $a, b \in A$. Здесь $\lambda \in F$ — фиксированный скаляр, вес оператора R.

Линейный оператор L на алгебре многочленов называется мономиальным, если для любого монома t найдутся моном z_t и скаляр α_t такие, что $L(t) = \alpha_t z_t$. Мономиальные операторы Роты–Бакстера на $F[x]$ были введены в [1] и описаны на $F[x]$ в [2].

В работе [3] найдена взаимосвязь между операторами Роты–Бакстера и операторами усреднения. В этой работе был описан класс операторов Роты–Бакстера ненулевого веса, построенных по гомоморфным операторам усреднения на $F[x, y]$. Мы классифицировали операторы Роты–Бакстера нулевого веса, построенные по операторам усреднения с линейными функциями в степенях мономов из образа на $F[x, y]$.

[1] L. Guo, M. Rosenkranz, and S.H. Zheng. *Rota—Baxter operators on the polynomial algebras, integration and averaging operators, Pacific J. Math. (2) 275 (2015), 481–507.*

[2] H. Yu. *Classification of monomial Rota—Baxter operators on* $k[x]$*, J. Algebra Appl. 15 (2016), 1650087.*

[3] A. Khodzitskii, *Monomial Rota—Baxter Operators of Nonzero Weight on* $F[x,y]$ *Coming from Averaging Operators, Mediterr. J. Math. 20 (2023), No 251.*

Алгебраическая геометрия

Гладкие кубические поверхности с максимальной группой автоморфизмов над произвольными полями

Викулова Анастасия Вадимовна
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
vikulovaav@gmail.com

В этом докладе мы обсудим максимально симметрические гладкие кубические поверхности над полями произвольной характеристики. Максимально симметрические гладкие кубические поверхности — это такие гладкие кубические поверхности, которые имеют максимально возможную группу автоморфизмов. Для каждой характеристики поля мы предъявим максимальные группы автоморфизмов, которые могут иметь гладкие кубические поверхности и продемонстрируем такие поверхности. Более того, мы попытаемся обосновать, почему для каждой такой максимальной группы автоморфизмов гладкая кубическая поверхность единственна с точностью до изоморфизма.

Линейные группы над кольцами и группы Стейнберга

Воронецкий Егор Юрьевич
СПбГУ, Лаборатория им. П. Л. Чебышева
voronetckiiegor@yandex.ru

Хорошо известно, что группы точек простых линейных групп над полями как правило являются простыми абстрактными группами (с точностью до взятия производной подгруппы и факторизации по центру).

С другой стороны, над коммутативными кольцами соответствующие группы уже имеют нетривиальную нормальную структуру. Оказывается, что в такой группе G обычно есть наибольшая совершенная подгруппа E (элементарная подгруппа), которая нормальна в G, фактор-группа является разрешимой, а также имеется почти явное описание всех подгрупп G, нормализуемых E, в терминах идеалов основного кольца и некоторых гомологических инвариантов (относительных K_1-функторов).

В докладе будет рассказано про эту структурную теорию, а также её расширение на описание универсальных центральных расширений E при помощи так называемых групп Стейнберга, включая недавние результаты о центральности K_2-функтора.

Конструкции квадратов Нисневича и их приложения

Гайдай-Турлов Иван Павлович
СПбГУ МКН
gtivansan@gmail.com

Мы приводим новое доказательство основного утверждения знаменитой статьи С. Блоха и А. Огуса [1]. В самом простом случае доказанное утверждение можно сформулировать так: если когомологический класс гладкого неприводимого комплексного многообразия обнуляется вне некоторого дивизора, то он обнуляется локально в топологии Зарисского. Главная особенность доказательства в том, что мы накладываем на когомологическую теорию очень мало требований. В частности, не требуется двойственность Пуанкаре, как и вообще наличие каких-либо трансферов. Основная техника доказательства — построение квадратов Нисневича, на которые аксиоматически накладывается условие аналогичное последовательности Майера-Вьеториса.

[1] S. Bloch and A. Ogus. *Gersten's conjecture and the homology of schemes.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4(7):181–201, 1974.

Группы автоморфизмов (почти) однородных многообразий

Голота Алексей Сергеевич
НИУ ВШЭ, МЦМУ МИАН
agolota@hse.ru

Я расскажу о том, что известно о структуре групп автоморфизмов компактных комплексных многообразий, которые являются однородными или почти однородными пространствами связных комплексных групп Ли. Также я расскажу о некоторых открытых вопросах, касающихся групп автоморфизмов компактных комплексных многообразий.

Превратные пучки на торических многообразиях и стеках

Гуминов Сергей Владимирович
МФТИ, ВШЭ
sergey.guminov@gmail.com
Соавторы: А. И. Бондал

Явное описание категорий превратных пучков остаётся важной задачей топологии алгебраических многообразий. Несмотря на это, эта задача решена для крайне скромного числа многообразий большой размерности. Доклад будет посвящен превратным пучкам на торических многообразиях. Оказывается, категория превратных пучков на гладком торическом многообразии X с веером Σ, на котором действует тор T, эквивалентна категории конечномерных модулей над алгеброй $A(\Sigma)$, которая является конечным расширением кольца функций двойственного тора $T^\vee$. В докладе я сформулирую этот результат, скажу несколько слов о его (потенциальной) связи с когерентно-конструктивным соответствием, а также, если позволит время, поясню, чем отличается случай негладкого торического многообразия X.

Полные исключительные наборы на лагранжевых грассманианах

Гусева Ляля Андреевна
НИУ ВШЭ
lyalya.guseva1994@gmail.com
Соавторы: Александр Новиков

Существует гипотеза о существовании полных исключительных наборов в производных категориях рациональных однородных пространств. Наборы ожидаемой длины были построены в статье Кузнецова–Полищука [1] для всех классических групп. Я постараюсь рассказать доказательство полноты этих наборов для симплектических групп $\mathrm{Sp}(2n)$.

[1] Kuznetsov, Alexander; Polishchuk, Alexander.
Exceptional collections on isotropic Grassmannians. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18 (2016), no. 3, 507–574.

Локальные морфизмы Хитчина для мероморфных полей с вычетами в нильпотентных орбитах алгебр Ли типа D

Дегтярев Денис Олегович

degtyarev.d.o@gmail.com

Локальная версия морфизма Хитчина для полей Хиггса с простыми полюсами определяет отображение из формальных степенных рядов в пространство характеристических многочленов. Если предположить, что вычеты локального поля Хиггса лежат в специальных нильпотентных коприсоедиенных орбитах четной ортогональной алгебры Ли, то в образе локального морфизма Хитчина появляются квадратичные соотношения. Я расскажу про гипотезу, которая описывает данные соотношения в терминах D-разбиения коприсоединенной орбиты, а также про некоторые случаи, в которых ее удается доказать.

Этальные оснащённые мотивы

Дружинин Андрей Эдуардович
СПбГУ МКН, лаборатория им. Чебышёва; ПОМИ РАН, лаборатория Алгебры и теории чисел
andrei.druzh@gmail.com
Соавторы: Ola Sande

Теорема сравнения для мотивных и классических стабильных гомотопических групп, доказанная М. Левином, утверждает изоморфизм упомянутых групп

$$\pi_{i,0}^{\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis}}(X) \simeq \pi_i(X(\mathbb{C})),$$

для всякой гладкой схемы X над $\mathbb{C}$ и топологического пространства её комплексных точек.

В первой части доклада будет рассказано о двух обобщениях или аналогах функтора реализации Бетти

$$X \mapsto X(\mathbb{C})$$

для полей положительной характеристики: 1) с помощью ∞-категорной теории топосов Гротендика, построенной Дж. Лури, и топологичесих моделей Д. Исаксена, построение которых в ∞-категорном контексте выполнено М. Айуа, и 2) с помощью теорем жёсткости Воеводского-Суслина, Дж. Айуба и Т. Бахмана, а также об обобщении указанного выше изоморфизма на алгебраически замкнутые базовые поля произвольной характеорискики, и целого числа n обратимого в базовом поле, доказанном М. Заргаром.

Во второй части доклада будет рассказано альтернативное доказательство указанного выше изоморфизма над $\mathbb{C}$ и его обобщения для произвольного базового поля, основанное на теории оснащённых мотивов, построенной оригинально Г. Гаркушей и И. Паниным для Нисневич локальных $\mathbb{A}^1$-мотивных $\mathbb{P}^1$-спектров, в сочетании с её переносом на гиперполные этальные n-пополненные $\mathbb{A}^1$-мотивные $\mathbb{P}^1$-спектры, выполненном автором в соавторстве с Ула Санде.

Орбиты минимальной параболической группы на сферических многообразиях над совершенным полем

Жгун Владимир Сергеевич
МФТИ ЦФМ, НИУ ВШЭ, НИИСИ РАН
zhgoon@mail.ru

В 1986 году Э. Б. Винбергом (и независимо М. Брионом) для сферических многообразий, то есть для алгебраических многообразий с действием редуктивной группы, обладающих открытой орбитой борелевской подгруппы, была доказана теорема о конечности числа орбит борелевской подгруппы. В случае алгебраически незамкнутых полей существует аналог понятия сферичности, где роль борелевской подгруппы играет минимальная параболическая подгруппа, определенная над основным полем. Я расскажу о совместных результатах с Ф. Кнопом, о конечности числа орбит минимальной параболической подгруппы обладающих точками над рассматриваемым полем. Также я расскажу о том как можно определить действие ограниченной группы Вейля на множестве орбит минимальной параболической подгруппы максимальной сложности и ранга.

[1] F. Knop, V.S. Zhgoon Complexity of actions over perfect fields, arXiv:2006.11659.

Характеры и коприсоединённые орбиты унипотентных групп

Игнатьев Михаил Викторович
НИУ ВШЭ
mihail.ignatev@gmail.com
Соавторы: Михаил Венчаков, Алексей Петухов

Основным инструментом в теории представлений нильпотентных групп и алгебр Ли является метод орбит, созданный А.А. Кирилловым в 1962 году. Коротко говоря, он гласит, что неприводимые представления (для групп) и их аннуляторы в универсальной обёртывающей алгебре (для алгебр Ли) находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами коприсоединённого представления данной алгебраической группы. Для унипотентных групп над конечными полями метод орбит описывает обычные их конечномерные комплексные представления.

Увы, полная классификация орбит даже для группы унитреугольных матриц является дикой задачей. С другой стороны, для максимальных унипотентных подгрупп в группах Шевалле над конечными полями удаётся достаточно хорошо описать и изучить различные важные классы орбит — больших и малых размерностей, ассоциированных с расстановками ладей и др. Я расскажу о методах, позволяющих изучать такие орбиты и соответствующие им неприводимые характеры, и сформулирую недавние результаты и открытые вопросы.

Как и зачем оснащать категории?

Каледин Дмитрий Борисович
МИАН

Как сейчас уже более-менее понятно, рассматривать категорию, полученную локализацией, как просто категорию, недостаточно – требуется помнить дополнительную структуру, условно называемую “оснащением”. Однако что именно понимать по оснащением, не вполне ясно. Я дам некоторое введение в этот круг вопросов,и опишу технику оснащений, основанную на введенном Гротендиком понятии "дериватора". Достоинство этой техники в том, что она работает в рамках обычной теории категорий, и совершенно не требует топологической техники и абстрактной теории гомотопий (модельные категории, симплициальные множества и т.д.)

Бирациональные автоморфизмы семейств абелевых многообразий

Кузнецова Александра Александровна
МЦМУ МИФН
sasha.kuznetsova.57@gmail.com
Соавторы: Шарль Фавр

Как известно, образ любого отображения из $\mathbb{P}^1$ в абелево многообразие это точка. В связи с этим любой бирациональный автоморфизм абелева многообразия является регулярным автоморфизмом. Если же рассмотреть семейство абелевых многообразий и послойный бирациональный автоморфизм этого семейства, то он может не быть регулярным, более того, некоторые бирациональные автоморфизмы таких семейств не регуляризуются ни на каких проективных бирациональных моделях семейства. Регуляризуемость такого автоморфизма зависит от свойств его действия на сингулярных когомологиях общего слоя семейства и от свойств вырождения семейства. Я расскажу об этой связи, основываясь на совместной статье с Шарлем Фавром.

Бирациональные инварианты отображений, сохраняющих объем

Логинов Константин Валерьевич
МИАН
loginov@mi-ras.ru

Одной из основных задач бирациональной геометрии является классификация алгебраических многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности. Уточняя эту задачу, можно классифицировать алгебраические многообразия с дополнительной структурой, например, рассматривая многообразия с фиксированной (голоморфной) формой объема. При этом естественно рассматривать формы объема, имеющие полюса не более чем первого порядка.

Группа классов эквивалентности многообразий с такой формой называется группой Бернсайда. Эта группа хороша тем, что в ней принимают значения некоторые естественные инварианты бирациональных отображеннией, сохраняющих форму объема на данном многообразии. Мы определим и изучим эти инварианты (иногда называемые "мотивными инвариантами") для групп бирациональных автоморфизмов проективного пространства со "стандартной" торически-инвариантной формой. Мы покажем, что такие группы не являются простыми в любой размерности, начиная с четырех, а также что они не могут порождаться псевдо-регуляризуемыми элементами. Этот результат можно рассматривать как обобщение аналогичной теоремы для классической группы Кремоны, то есть группы бирациональных автоморфизмов проективного пространства.

Некоммутативная GAGA

Лунц Валерий Александрович
Индианский Университет, ВШЭ
vlunts@gmail.com

Знаменитая теорема Серра (GAGA) устанавливает эквивалентность категорий аналитических и алгебраических когерентных пучков на комплексном проективном многообразии. Я расскажу про случай, когда есть семейство аналитических категорий, каждая из которых имеет свою алгебраизацию в виде категории когерентных пучков на соответствующей эллиптической кривой. При этом на границе этого семейства алгебраизация осуществляется при помощи "квантовой" (т.е. некоммутативной) эллиптической кривой. Это совместный рабочий проект с Ю. Берестом.

Вайсмановы многообразия и проективные орбифолды

Осипов Павел Сергеевич
НИУ ВШЭ
pavos3001@gmail.com

Пусть M — компактное комплексное многообразие с локально конформно кэлеровой метрикой g. Тогда поднятие метрики g на универсальную накрывающую $\tilde{M}$ глобально конформно эквивалентно кэлеровой метрике $\check{g}$. При этом фундаментальная группа $\pi(M)$ действует на $(\tilde{M}, \check{g})$ гомотетиями. Если многообразие $(\tilde{M}, \check{g})$ изометрично риманову конусу $\left(S \times \mathbb{R}^{>0}, t^2 g_S + dt^2\right)$, то локально конформно кэлерово многообразие M называется вайсмановым. Существует множество эквивалентных определений вайсмановых многообразий, и все они основаны на римановой геометрии, но оказывается, что компактные вайсмановы многообразия имеют алгебраическую природу.

Рассмотрим проективный орбифолд X и обильное линейное расслоение L на нём. Обозначим за $\mathrm{Tot}^\circ(L)$ пространство ненулевых векторов L. Пусть φ — автоморфизм (X, L), удовлетворяющий условию $\forall v \in L \quad |\varphi(v)| = \lambda |v|$ с фиксированной константой $\lambda > 1$. Тогда $\mathrm{Tot}^\circ(L)/\varphi$ — компактное вайсманово многообразие. Более того, любое компактное вайсманово многообразие получается таким образом.

Правила ветвления, флаги, коприсоединённые орбиты

Петухов Алексей Владимирович
ИППИ РАН имени А. А. Харкевича
alex--2@yandex.ru
Соавторы: Р. С. Авдеев

Пусть G — некоторая, редуктивная группа над $\mathbb{C}$, а H — её редуктивная подгруппа. Любое конечномерное представление G является суммой неприводимых G- представлений, а ограничение конечномерного неприводимого G-представления V на H (обозначаемое $V|_H$) является прямой суммой неприводимых H-представлений. Параметры таких разложений $V|_H$ называются *правилами ветвления*. Мы будем говорить, что G-модуль V имеет *простой H-спектр*, если в ограничении $V|_H$ неприводимые H-слагаемые не повторяются. Описание правил ветвления, в том числе ветвлений с простым спектром, является интересной и важной задачей. В своём докладе я хотел поговорить о том, как, используя теорему Бореля–Вейля, перефразировать вопрос об описании классов неприводимых G-представлений с простым H-спектром, связанных с G-флагами, в вопрос об описании H-сферических действий на многообразиях G-флагов. Используя этот подход, мы с Романом Авдеевым получили описание таких серий правил ветвления в терминах некоторых свободных решёток, образующие которых соответствуют дивизорам в подходящем многообразии G-флагов, являющимся стабильными относительно действия некоторой Борелевской подгруппы группы H. Такие классы G-представлений с простым H-спектром соответствуют H-сферическим действиям на многообразиях G-флагов. В конце доклада я хочу обсудить идею классификации таких наборов (G, G-флаги; H-сферическое действие), используя идеи связанные с симплектической геометрией, отображением моментов, коприсоединёнными орбитами, а также какие-то простые факты о сферических многообразиях.

[1] Р. С. Авдеев, А. В. Петухов, *Сферические действия на многообразиях флагов*, Матем. сб. 205 (2014), No 9, 3–48; arXiv:1401.1777.

[2] R. Avdeev, A. Petukhov, *Branching rules related to spherical actions on flag varieties*, Algebr. Represent. Theory 23 (2020), no. 3, 541–581; arXiv:1711.09801.

[3] A. V. Petukhov, *Bounded reductive subalgebras of sl(n)*, Transform. Groups 16 (2011), no. 4, 1173–1182; arXiv:1007.1338.

Категорная теорема Торелли для гиперповерхностей

Пирожков Дмитрий Владимирович
МЦМУ МИАН
dpirozhkov@mi-ras.ru

Как доказали Бондал и Орлов, любое многообразие Фано однозначно восстанавливается по своей производной категории когерентных пучков. Если X — гиперповерхность Фано в проективном пространстве, то в его производной категории есть интересная подкатегория, называемая “компонентой Кузнецова” или “остаточной категорией”. Хёйбрехтс и Реннемо показали, что по этой компоненте вместе с некоторой автоэквивалентностью можно однозначно восстановить гиперповерхность, если степень делит $\dim(X) + 2$. Я расскажу, как обобщить их теорему на случай, когда это условие делимости не выполняется, а так же о некоторых вариациях этой теоремы.

Проблемы рациональности в алгебраической геометрии

Прохоров Юрий Геннадьевич
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
prokhoro@mi-ras.ru

Будет дан обзор новых и старых результатов о рациональности многомерных многообразий отрицательной кодаировой размерности. В основном будет обсуждаться трёхмерный случай.

Flow-up базис на сферических многообразиях

Сонина Александра Константиновна
ПОМИ РАН
`sasha-sonina@mail.ru`
Соавторы: Виктор Петров

По многообразию с действием редуктивной группы можно построить GKM-граф: вершины будут неподвижными точками под действием максимального тора редуктивной группы G, ребра будут получатся из инвариантных кривых (на самом деле все эти кривые будут изоморфны $\mathbb{P}^1$). Вместе с каждой инвариантной кривой у нас также будет появляться характер — его будем записывать как метку на ребре. Также на каждом ребре будет задаваться ориентация, вместе с которой появится частичный порядок на вершинах графа.

В вершинах графа будем записывать многочлены от характеров тора. Такая расстановка правильная если разность двух многочленов в вершинах делится на характер на ребре, а также выполняются некоторые квадратичные соотношения.

Будем называть систему правильных расстановок многочленов *flow-up базисом*, если

1 Эта система расстановок — базис (т.е. эта система линейно независима и любая правильная расстановка является линейной комбинацией данных с коэффициентами — полиномами от корней системы Φ)

2 Для всех вершин w существует элемент системы расстановок такой, что в этой расстановке в вершине w стоит произведение меток ребер, выходящих из этой вершины, а ненулевые элементы могут стоять только в вершинах v с $v \geq w$.

Благодаря локализации Ботта можно построить инъективное отображение из $CH_T^*(X)$ в множество всех правильных расстановок.

Пусть G — редуктивная группа и $B \subset G$ — Борелевская подгруппа. $G-$многообразие X будем называть *сферическим*, если в X есть плотная $B-$орбита.

В нашей работе мы показали, что у любого сферического многообразия существует flow-up базис, в частности отображение из $CH_T^*(X) \otimes \mathbb{Q}$ в правильные расстановки над $\mathbb{Q}$ это изоморфизм.

[1] Henry July *Algebraic cobodism of spherical varieties* Thèse de doctorat

[2] V.Guillemin and C.Zara *One-skeleta betti numbers and equivarient cohomology* arXiv:math/9903051v2 [math.DG] 26 Jul 2000

[3] M. Brion. *Equivariant Chow groups for torus actions.* Transformation Groups, Vol. 2, No. 3, 1997, pp. 225-267.

Короткие SL_2-структуры на алгебрах Ли и лиевских модулях

Стасенко Роман Олегович
НИУ ВШЭ, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
theromestasenko@yandex.ru

Пусть S — произвольная редуктивная алгебраическая группа. Назовем S-структурой на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ гомоморфизм $\Phi : S \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. S-структуры ранее излучались различными авторами, в том числе Э. Б. Винбергом.

В докладе рассматриваются SL_2-структуры. SL_2-структуру назовем короткой, если представление Φ группы SL_2 разлагается на неприводимые представления размерностей 1, 2 и 3. Если рассматривать неприводимые представления размерностей только 1 и 3, то получится известная конструкция Титса-Кантора-Кехера, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между простыми йордановыми алгебрами и простыми алгебрами Ли определенного вида.

Аналогично теореме Титса–Кантора–Кехера в случае коротких SL_2-структур можно установить взаимно-однозначное соответствие между простыми алгебрами Ли с такой структурой и так называемыми простыми симплектическими структурами Ли-Йордана.

Пусть на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задана SL_2-структура и отображение $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(U)$ — линейное представление. Гомомофизм $\Psi : S \to GL(U)$ называется SL_2-структурой на лиевском $\mathfrak{g}$-модуле U, если

$$\Psi(s)\rho(\xi)u = \rho(\Phi(s)\xi)\Psi(s)u, \quad \forall s \in S, \xi \in \mathfrak{g}, u \in U.$$

Подобная конструкция имеет интересные приложения к теории представлений йордановых алгебр, о которых будет рассказано в докладе. Также в докладе будет представлена полная классификация неприводимых коротких $\mathfrak{g}$-модулей для простых алгебр Ли.

Конечномерные алгебры с делением, имеющие одинаковые максимальные подполя

Тихонов Сергей Викторович
Белорусский государственный университет, заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации

В докладе планируется дать обзор результатов о характеризации конечномерных алгебр с делением в терминах их максимальных подполей.

Формы Пфистера и гипотеза Колье–Телэна для случая смешанной характеристики

Тюрин Димитрий Николаевич
ПОМИ РАН
Соавторы: И. А. Панин

Пусть R — локальное регулярное кольцо и K — его поле частных. Зафиксируем некоторую невырожденную квадратичную форму Q над R а также некоторый обратимый элемент r из R. Гипотеза Колье-Телена поставленная в 1977 году утверждает, что уравнение $Q = r$ имеет решение над кольцом R если оно имеет решение над полем K. Мы докажем это утверждение для случая, когда R является кольцом смешанной характеристики $(0, p)$ где p отлично от двух, а Q является невырожденной формой Пфистера.

Специальная геометрия Бора–Зоммерфельда

Тюрин Николай Андреевич
ЛТФ ОИЯИ (Дубна)

Ю.И. Манин когда-то определил Зеркальную Симметрию как некоторую двойственность между комплексной и симплектической геометриями кэлеровых многообразий. Каждое кэлерово многообразие по самому своему определению обладает обеими “природами” — комплексной и симплектической, и каждая из них порождает свой “внутренний мир”: комплексные подмногообразия и голоморфные расслоения в первом случае и лагранжевы подмногообразия во втором. Каждый из этих внутренних миров определяет дополнительный набор инвариантов, и кэлеровы многообразия понимаются как зеркальные партнеры если их инварианты зеркально соотносятся друг ко другу.

Однако две эти природы в сущности очень разные: комплексная предполагает конечномерность вариаций и деформаций объектов (комплексных подмногообразий, голоморфных расслоений etc), в то время как симплектическая является очень гибкой, и любое лагранжево подмногообразие допускает континуальное пространство деформаций. Поэтому естественным образом возникает задача введения подходящих условий, позволяющих получать некоторые конечномерные пространства модулей. С 90-ых годов очень популярной конструкцией является специальная лагранжева геометрия, предложенная Н. Хитчином. Однако рамки применения этой геометрии достаточно узки: условие SpLag можно вводить только на многообразиях Калаби–Яу.

Специальная геометрия Бора–Зоммерфельда возникла как программа, позволяющая по произвольному компактному односвязному алгебраическому многообразию X построить конечномерные многообразия модулей, элементами которых являются классы подмногообразий, лагранжевых относительно кэлеровой формы метрики Ходжа.

Исходными для построения таких многообразий, см. [1], являются стандартные в Геометрическом квантовании данные: расслоение и связность предквантования (L, a). Далее мы используем программу ALAG, предложенную в 1999 году А. Н. Тюриным и А. Л. Городенцевым, которая строит бесконечномерное многообразие модулей $\mathcal{B}_S$ лагранжевых бор — зоммерфельдовых подмногообразий фиксированного топологического типа. Затем в прямом произведении $\mathbb{P}(\Gamma(M, L)) \times \mathcal{B}_S$ строится цикл инциденции $\mathcal{U}_{SBS}$ пар, удовлетворяющих условию специальности. Оказывается, что каноническая проекция $q : \mathcal{U}_{SBS} \to \mathbb{P}(\Gamma(X, L))$ имеет дискретные слои, откуда получаем первое грубое определение конечномерного многообразия модулей: поскольку в пространстве $\Gamma(X, L)$ всех гладких сечений расслоения предквантования L имеется конечномерное подпространство $H^0(X, L)$ голоморфных сечений, то возможно взять прообраз $q^{-1}(\mathbb{P}(H^0(X, L))$, что должно дать конечномерный объект. Однако такое прямолинейное определение не приводит к разумному результату: как было установлено в [2], для голоморфного сечения $\alpha \in H^0(X, L)$ лагранжево подмногообразие $S \subset X$ является специальным если и только если оно содержится в скелете Вейнстейна $W(X \backslash D_\alpha)$ дополнения к дивизору нулей $D_\alpha = \{\alpha = 0\} \subset X$. Но как было установлено вейнстейнов скелет почти всегда не содержит гладких компонент, так что прямолинейное определение приводит к тривиальному результату. Проблема разрешается вариацией параметров, имеющихся в нашем определении: в работе [3] было предложено использовать деформацию связности предквантования a для определения многообразия модулей $\mathcal{M}_{SBS}$ специальных бор - зоммерфельдовых лагранжевых подмногообразий — конечномерный объект в лагранжевой геометрии алгебраических многообразий. Как было доказано, это многообразие модулей обладает комплексной структурой, а в построенных примерах было обнаружено, что оно может иметь вид "алгебраическое многообразие минус обильный дивизор", откуда возникла естественная гипотеза о том, что $\mathcal{M}_{SBS}$ алгебраично всегда.

[1] Н. А. Тюрин, *Специальные бор–зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия*, Изв. РАН. Сер. матем., 80:6 (2016), 274–293;

[2] Н. А. Тюрин, *Специальные бор–зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия в алгебраических многообразиях*, Изв. РАН. Сер. матем., 82:3 (2018), 170–191;

[3] Н. А. Тюрин, *Специальная геометрия Бора–Зоммерфельда: вариации*, Изв. РАН. Сер. матем., 87:3 (2023), 184–205.

О точках кручения порядка $2g + 1$ на гиперэллиптических кривых рода g

Федоров Глеб Владимирович
Университет "Сириус" (Сочи), НИИСИ РАН (Москва)
fedorov.gv@talantiuspeh.ru

Пусть гиперэллиптическая кривая C рода g, определенная над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0, задана уравнением $y^2 = f(x)$, где многочлен f

свободен от квадратов и имеет нечетную степень $2g + 1$. Существует классическое вложение (вложение Альбанезе) $C(K)$ в группу K-точек $J(K)$ якобиева многообразия J кривой C, отождествляющее бесконечно удаленную точку $\mathcal{O}$ с единичным элементом группы $J(K)$. При таком вложении образ в $J(K)$ отождествляют с точками кривой $C(K)$. Тем самым групповая структура якобиана J частично переносится на K-точки кривой C.

В недавней работе [1] рассмотрена задача о верхней оценке количества классов эквивалентности гиперэллиптических кривых C, заданных уравнением $y^2 = f(x)$, $\deg f = 2g + 1$, для которых существует 2, 4, 6 или более точек кручения P порядка $2g + 1$, лежащих в $C_{tor}(K) \cap J(K)$, где K — алгебраически замкнутое поле. Важно отметить, что таких точек порядка m, $3 \leq m \leq 2g$, быть не может.

Целью наших исследований в этом направлении был ответ на вопрос (поставленный в работе [1]) о явном виде представителей классов бирациональной эквивалентности, таких гиперэллиптических кривых C, что множество $C_{tor}(K) \cap J(K)$ содержит не менее 6 точек кручения порядка $2g+1$. При $g = 2$ в статьях [2] и [3] было изучено семейство гиперэллиптических кривых рода 2, якобианы которых обладают точками кручения порядка 5. В частности, было показано, что при $g = 2$ над алгебраически замкнутым полем K существует ровно 5 классов бирациональной эквивалентности, таких гиперэллиптических кривых C, что множество $C_{tor}(K) \cap J(K)$ содержит не менее 6 точек кручения порядка 5. В статье [4] нам удалось явно найти представители этих классов. При $g = 3$ и $g = 5$ мы доказали, что таких представителей нет. При $g = 4$ нами доказано, что существует единственный класс бирациональной эквивалентности, и явно выписан его представитель. Наконец, нами улучшена оценка из [1] в 27 раз.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-71-00101).

[1] *Bekker B. M., Zarhin Y. G.* Bekker B. M., Zarhin Y. G. Torsion points of small order on hyperelliptic curves // European Journal of Mathematics. 2022. Vol. 8, №2. P. 611-624.

[2] *Boxall J., Grant D., Leprévost F.* 5-torsion points on curves of genus 2 // Journal of the London Mathematical Society. 2001. Vol. 64, №1. P. 29-43.

[3] *Elkies N. D.* Contemporary Mathematics Volume 796, 2024 // LuCaNT: LMFDB, Computation, and Number Theory. 2024. Vol. 796. P. 165-186.

[4] *Fedorov G.V.* On hyperelliptic curves of odd degree and genus g with 6 torsion points of order 2g+1 // Doklady Mathematics. 2024.

Вещественный и функциональный анализ

Двойственные фреймы всплесков на множестве M-положительных векторов

Бабушкин Максим Владимирович
СПбГУ, кафедра высшей математики; Университет ИТМО, научно-образовательный центр математики
m.v.babushkin@yandex.ru
Соавторы: Скопина Мария Александровна

Множество M-положительных векторов является многомерным аналогом положительной полупрямой. Это пространство порождается матрицей M и снабжается операцией сложения по модулю M. На основе функций Уолша можно построить гармонический анализ на этом пространстве, аналогичный анализу Уолша на полупрямой. Особенностью этой теории является наличие класса функций с компактным носителем ("тест-функций"), преобразование Фурье которых также имеет компактный носитель. В рамках нашего исследования предложен способ построения двойственных фреймов всплесков, состоящих из тест-функций. Приводится несколько простых конкретных примеров таких систем всплесков.

Конический дуальный жадный алгоритм в банаховом пространстве

Валов Максим Александрович
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
mv0lt@yandex.ru

Рассказывается о слабом коническом дуальном жадном алгоритме (СКДЖА), являющемся модификацией чебышевского жадного алгоритма. Алгоритм позволяет аппроксимировать произвольные элементы пространства с помощью комбинаций элементов положительно полного словаря с неотрицательными коэффициентами. Известны условия сходимости данного алгоритма и доказана оценка скорости сходимости для элементов выпуклой оболочки словаря. В случае гильбертова пространства СКДЖА совпадает с изучавшимся ранее коническим жадным алгоритмом.

Многомерная теорема Бёрлинга–Мальявена о мультипликаторе

Васильев Иоанн Михайлович
Université Paris Cergy и ПОМИ РАН
ioann.vasilyev@cyu.fr

Доклад будет посвящен новому многомерному обобщению теоремы о Бёрлинга и Мальявена о мультипликаторе. Более подробно, мы увидим, как получить новое достаточное условие на то, чтобы радиальная функция являлась мажорантой Бёрлинга и Мальявена в многомерном случае (это означает, что рассматриваемая функция может быть оценена снизу ненулевой, квадратично интегрируемой функцией, которая имеет носитель преобразования Фурье, заключенный в шаре произвольно малого радиуса). Мы также объясним, как отсюда вывести новое точное достаточное условие и в нерадиальном случае. Наши результаты дают частичный ответ на вопрос, поставленный Л. Хёрмандером. Если позволит время, то мы также обсудим некоторые связанные одномерные результаты. Доклад будет основан на результатах статей [1], [2] и [3].

[1] I. Vasilyev, *On the multidimensional Nazarov lemma*, Proceedings of American Mathematical Society, 11 p., (2022) (DOI: https://doi.org/10.1090/proc/15805).

[2] I. Vasilyev, *A generalization of the First Beurling–Malliavin theorem*, (2022), 16 p., to appear in Analysis and PDE, preprint: `https://arxiv.org/pdf/2109.04123.pdf`, `https://msp.org/soon/coming.php?jpath=apde`.

[3] I. Vasilyev, *The Beurling and Malliavin Theorem in Several Dimensions*, preprint: `https://arxiv.org/pdf/2306.12397.pdf`.

Ограниченность усреднений в пространствах Лебега с переменным показателем

Виноградов Олег Леонидович
Санкт-Петербургский государственный университет
olvin@math.spbu.ru

Если нормированное пространство X, состоящее из заданных на $\mathbb{R}^n$ функций, вместе с каждой функцией содержит ее средние Стеклова $S_h f$ и $\sup_{h>0} \|S_h\| < +\infty$, то X называется пространством с ограниченнным усреднением. Ранее автором были установлены прямые и обратные теоремы теории приближений тригонометрическими многочленами и целыми функциями конечной степени в банаховых идеальных пространствах с ограниченным усреднением. Эти теоремы во многом аналогичны таковым в обычных пространствах L_p. Ограниченности максимального оператора в этих вопросах не требуется. Особая роль средних Стеклова состоит в том, что их ограниченность влечет ограниченность сверток с любыми ядрами, имеющими суммируемую горбатую мажоранту. Единственный известный критерий ограниченности усреднений в пространствах, не инвариантных относительно сдвига, относится к весовым пространствам Лебега: ограниченность усреднений равносильна условию Макенхаупта. В других случаях известные достаточные условия не совпадают с необходимыми. В докладе обсуждаются условия ограниченности усреднений в пространствах Лебега с переменным показателем.

О задаче интерполяции кубическими сплайнами на вещественной прямой

Волков Юрий Степанович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e2vol@ya.ru

Интерполяция сплайнами с равномерными узлами на всей вещественной прямой (так называемая кардинальная интерполяция) достаточно хорошо изучена. Если же сетка точек интерполяции бесконечная и неравномерная, то таких исследований немного. К. де Бор (1976) доказал существование единственного ограниченного сплайна для ограниченных данных при условии ограниченности отношения наибольшего и наименьшего шагов сетки, а в случае кубических сплайнов установил разрешимость этой задачи при ограничении на отношение соседних шагов сетки. Также в терминах ограничений на отношения соседних шагов сетки Фридланд и Миккелли (1978) рассмотрели задачу существования и единственности ограниченного сплайна произвольной степени. Некоторые достаточные условия существования и единственности сплайна полиномиального роста при интерполировании данных полиномиального роста были получены Якимовским (1984), и это также было сделано при некоторых ограничениях на сетку.

Нами рассмотрена задача интерполяции кубическими сплайнами функций линейного и квадратичного роста на произвольных неравномерных сетках на всей вещественной оси. Установлено [1], что в этом случае всегда существует единственный кубический сплайн линейного или квадратичного роста соответственно, причём ограничения на сетку не требуются. Кроме того, мы приводим оценки погрешности на классах интерполируемых функций $W^4_\infty(\mathbb{R})$ и при этом оказывается, что оценки для бесконечных сеток на оси совпадают с известными оценками погрешности в случае конечного отрезка.

Исследование основано на изучении решений систем линейных алгебраических уравнений с бесконечными в обе стороны матрицами коэффициентов.

[1] Ю. С. Волков, С. И. Новиков, *Оценки решений бесконечных систем линейных уравнений и задача интерполяции кубическими сплайнами на прямой*, Сиб. матем. журн., 63 (2022), 814–830.

Оценки жесткости кручения выпуклой области

Гафиятуллина Лилия Ильгизяровна
Казанский (Приволжский) федеральный университет
gafiyat@gmail.com
Соавторы: Салахудинов Рустем Гумерович

Работа посвящена оценкам жесткости кручения выпуклой области через ее геометрические характеристики. В работе определены две новые характеристики выпуклой области с конечной длиной границы, а также изучены их свойства и приведен алгоритм их вычисления. Получена верхняя оценка жесткости кручения через новые геометрические функционалы области.

[1] Г. Полиа, Г. Сегё, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, М.: Физматгиз, 1962, 336 с.

Положительно определенные функции и чебышевские системы

Горбачев Дмитрий Викторович
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
dvgmail@mail.ru

Положительно определенные функции играют большую роль в гармоническом анализе и смежных областях. В качестве примера можно упомянуть недавний прорыв в решении проблемы Кеплера по сферической упаковке пространства в размерностях 8 и 24. Прогресс был достигнут при помощи решения экстремальной задачи на классе положительно определенных функций, сохраняющих знак в заданной области. Основная сложность при решении данного круга проблем заключается в конструировании экстремальных функций и доказательстве неотрицательности их преобразования Фурье. Для определенных семейств функций предлагается новый подход как это сделать, использующий тот факт, что собственные функции оператора Штурма–Лиувилля образуют чебышевскую систему. Этот подход был разработан в соавторстве с В. И. Ивановым и С. Ю. Тихоновым и применялся к случаям преобразований Фурье–Бесселя и Якоби. Было интересно записать его для преобразования из общей задачи Штурма–Лиувилля.

Многомерное весовое неравенство Бернштейна для целых функций экспоненциального типа

Горбачев Дмитрий Викторович
ООО “Горизонт”
dvgmail@mail.ru

Неравенство Бернштейна для целых функций экспоненциального типа является классическим в теории приближений. В стандартной постановке оно устанавливает порядок роста L^p-нормы линейного дифференциального оператора на классе полиномов или целых функций экспоненциального типа. Интересен случай весовой L^p-нормы при $p > 0$, задаваемой мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Он разобран, например, для тригонометрических и сферических полиномов. Однако для целых функций экспоненциального типа, особенно в многомерной постановке, известно меньше. Целью доклада будет привести новые результаты в этом направлении. Особенно интересны весовые неравенства, отвечающие степенным весам Данкля и (κ, a)-обобщенного преобразования Фурье, где есть дифференциально-разностные аналоги классических дифференциальных операторов. Одно из приложений данных результатов состоит в доказательстве обратных теорем теории приближений в соответствующих весовых пространствах L^p.

Аппроксимация системами периодических всплесков

Горшанова Анастасия
Санкт-Петербургский государственный университет
Соавторы: Лебедева Елена Александровна

Для произвольной системы периодических всплесков установлены конструктивные необходимые и достаточные условия, при которых система является фреймом Парсеваля. При изучении аппроксимационных свойств систем периодических всплесков, являющихся фреймами, рассматриваются понятия порядка аппроксимации фреймом и порядка аппроксимации периодическим кратномасштабным анализом (ПКМА). Известно, что порядок аппроксимации фреймом не превосходит порядка аппроксимации ПКМА. В докладе будут приведены условия, при которых эти порядки аппрроксимации совпадают.

Об одном классе интегральных операторов на интервале $(-1, 1)$

Данелян Елена Дмитриевна
Южный федеральный университет
danelian@sfedu.ru
Соавторы: Карапетянц А. Н.

Рассматриваются интегральные операторы типа Хаусдорфа на интервале $(-1, 1)$, которые естественным образом возникают в некоторых задачах теории интегральных уравнений и математической физики. А именно, при наличии измеримой функции k (нашего интегрального ядра) на интервале $(-1, 1)$ рассматривается интегральный оператор

$$K_\mu f(x) = \int_{-1}^{1} k(t) f(\varphi_x(t)) d\mu(t),$$

где μ – произвольная положительная мера Радона на $(-1, 1)$ и $\varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-xt}$, $x, t \in (-1, 1)$

инволютивный автоморфизм на $(-1,1)$ на весовых пространствах Лебега.

Рассматриваются алгебраические свойства для частного случая изучаемых операторов. Устанавливаются достаточные, а затем и необходимые условия ограниченности операторов в пространствах $L^p(v)$, в качестве следствий приводятся некоторые важные частные случаи операторов и некоторых весов. Применяется техника операторов с однородными ядрами с получением принципиально иных условий ограниченности, которые, тем не менее, дают схожие результаты в специальных частных случаях. Строятся аппроксимационные конструкции в рамках обсуждаемых операторов.

Радиально симметричные локально вогнутых функций и точные оценки распределений векторнозначных функций

Добронравов Егор Петрович
СПбГУ
yegordobronravov@mail.ru

Мы построим теорию, позволяющую вычислять радиально симметричные минимальные локально вогнутые функции по их аналогам меньшей размерности, а также приложения этой теории к построению точных оценок распределений векторнозначных функций. Также с помощью полученной теории построим несколько точных функций Беллмана и, соответственно, получим точные неравенства, оценивающие распределения функций.

Размерность мер с преобразованием Фурье в L_p

Добронравов Никита Петрович
СПбГУ
dobronravov1999@mail.ru

Принцип неопределённости в математическом анализе — это семейство фактов о том, что функция и её преобразование Фурье не могут быть одновременно малы. Одной из версий это принципа является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^d$ — компакт, такой что $\mathcal{H}_\alpha(S) < \infty$. Пусть обобщённая функция ζ такая что $supp(\zeta) \subset S$ и $\hat{\zeta} \in L_p(\mathbb{R}^d)$ для некоторого $p < \frac{2d}{\alpha}$. Тогда $\zeta = 0$.*

Здесь $\mathcal{H}_\alpha$ — это α-мера Хаусдорфа. Мы разобрали, что происходит в предельном случае $p = \frac{2d}{\alpha}$. Оказалось, что в этом случае принцип неопределённости неверен, а именно удалось доказать следующую теорему:

Теорема. *Существуют компакт $S \subset \mathbb{R}^d$ и такая вероятностная мера μ, что $supp(\mu) \subset S$, $\hat{\mu} \in L_p(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{H}_{\frac{2d}{p}}(S) = 0$.*

Сверхгладкие самоподобные B-сплайны

Зайцева Татьяна Ивановна
МГУ имени М. В. Ломоносова
zaitsevatanja@gmail.com

Тайлы это самоподобные компакты, порождённые одной матрицей растяжения, т. е. матрицей, у которой все собственные значения по модулю больше единицы. На основе этих множеств по аналогии с кардинальными B-сплайнами строятся тайловые B-сплайны — свёртки индикаторов тайлов, при этом многие свойства B-сплайнов сохраняются. В частности, они являются решениями специальных разностных уравнений со сжатием аргумента, что позволяет применять их в прикладных алгоритмах. Будет представлен новый способ вычисления их гладкости в L_2. По результатам вычислений обнаружилось несколько семейств "сверхгладких" сплайнов, гладкость которых превышает гладкость стандартных сплайнов соответствующих порядков.

[1] M. Charina, V. Yu. Protasov, *Regularity of anisotropic refinable functions*, Appl. Comput. Harmon. Anal., 47 (2019), 795 – 821.

[2] T. Eirola, *Sobolev characterization of solutions of dilation equations*, SIAM J. Math. Anal., 23 (1992), 1015 – 1030.

[3] A. Cohen, I. Daubechies, *A new technique to estimate the regularity of refinable functions*, Revista Mathematica Iberoamericana, 12 (1996), 527 – 591.

Пространство почти сходящихся последовательностей и инвариантные банаховы пределы

Зволинский Роман Евгеньевич
Воронежский государственный университет
roman.zvolinskiy@gmail.com

Банахов предел — положительный линейный ограниченный функционал, инвариантный относительно оператора сдвига, являющийся продолжением предела последовательности с пространства сходящихся последовательностей на пространство ограниченных последовательностей с сохранением нормы. Ограниченная последовательность действительных чисел называется почти сходящейся, если все банаховы пределы принимают на ней постоянное значение. Приводятся новые результаты о банаховых пределах, в частности, аналог критерия почти сходимости Г. Лоренца [1, Теорема 2]. Рассматриваются множества банаховых пределов, инвариантных относительно операторов растяжения, а также функциональные характеристики множества банаховых пределов.

[1] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta mathematica, 80(1), 1948, 167–190.

Точная оценка приближения оператором Саса–Миракьяна через второй модуль непрерывности

Ихсанов Лев Назарович
Санкт-Петербургский государственный университет
lv.ikhs@gmail.com

Основной результат нашей работы представляет собой оценка

$$|M_n f(x) - f(x)| \le \omega_2\left(f, 4\max\left\{\frac{1}{n}, \sqrt{\frac{x}{n}}\right\}\right).$$

Речь в докладе пойдёт о свойствах оператора Саса–Миракьяна, точности основного результата, а так же о методе, использованном в исследовании.

Пространства Морри с крайними показателями $1, \infty$

Калита Евгений Александрович
Институт прикладной математики и механики
ekalita@mail.ru

Рассматриваются пространства Морри $L_{1,a}$ и дуальные пространства Морри $L_{\infty,a}$. Устанавливается, что сингулярные интегральные операторы и максимальные операторы в этих пространствах сильно ограничены — в отличие от пространств Лебега L_1, L_∞. Также получены некоторые теоремы двойственности для этих пространств.

Операторы типа Хаусдорфа-Березина

Карапетянц Алексей Николаевич
ИММиКН ЮФУ и РНОМЦ ЮФУ
karapetyants@gmail.com
Соавторы: Миротин Адольф Рувимович

Вводятся и изучаются операторы типа Хаусдорфа-Березина на единичном шаре в $\mathbb{C}^n$. Приводятся достаточные условия ограниченности в Мёбиус-инвариантных пространствах, весовых пространствах Лебега и аналитических подпространствах, в пространствах Харди и др. Приводятся также необходимые условия ограниченности и в ряде случаев — критерии. Рассматривается также вопрос аппроксимация единицы такими операторами.

[1] Karapetyants, A., Samko, S., and Zhu, K. *A Class of Hausdorff-Berezin operators on the unit disc.* Complex Anal. Oper. Theory 13, 3853–3870 (2019).

[2] Karapetyants, A., Mirotin, A. *A class of Hausdorff-Zhu operators.* Anal. Math. Phys. 12, 79 (2022).

[3] Grudsky S., Karapetyants, A., Mirotin, A. *Estimates for singular numbers of Hausdorff-Zhu operators and applications.* Mathematical Methods in the Applied Sciences (2023).

[4] Karapetyants, A., Mirotin, A. *Hausdorff-Zhu operators on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$ (submitted, 2024).

[5] Karapetyants, A., Mirotin, A. *A class of Hausdorff-Berezin operators on the unit ball.* (submitted, 2024).

[6] Danelyan E., Karapetyants, A. *On a class of Hausdorff type operators on interval.* Mathematical Methods in the Applied Sciences (to appear, 2024).

Аппроксимация фреймоподобными мульти-всплесками

Кривошеин Александр Владимирович
Санкт-Петербургский государственный университет
krivosheinav@gmail.com

Квазипроекционный оператор, порождённый парой вектор-функций $\Phi, \widetilde{\Phi} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^r$, имеет вид

$$Q_j(\Phi, \widetilde{\Phi}, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \widetilde{\Phi}_{jk} \rangle \Phi_{jk},$$

где $\Phi_{jk} = |\det M|^{j/2} \Phi(M^j \cdot + k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, M – матрица растяжения. Изучены аппроксимационные свойства таких операторов и получены оценки погрешности в L_2-норме для широкого класса таких операторов.

Для масштабирующих вектор-функций $\Phi, \widetilde{\Phi}$ квазипроекционные операторы $Q_j(f, \Phi, \widetilde{\Phi})$ связаны с двойственными системами мульти-всплесков. Хотя общая схема построения двойственных фреймов мульти-всплесков в многомерном случае известна, ее реализация на практике является сложной задачей из-за необходимости обеспечения некоторых дополнительных свойств. Предложена конструкция фреймоподобных мульти-всплесков с отказом от фреймовости, но с сохранением возможности разложения функций аналогичного разложению по фреймам. Это упрощает задачу построения фреймоподобных мульти-всплесков. Установлены аппроксимационные свойства фреймоподобных мульти-всплесков. Предложены алгоритмы построения фреймоподобных мульти-всплесков с заданным порядком аппроксимации.

Псевдоинтегральное представление однородных полиномов

Кусраева Залина Анатольевна
Региональный научно-образовательный математический центр Южного федерального университета
zali13@mail.ru

В настоящем докладе вводятся классы полилинейных операторов и однородных полиномов в пространствах измеримых функций, допускающих псевдоинтегральное представление. Для таких нелинейных операторов устанавливается теорема типа Радона–Никодима. Этот факт обобщает аналогичный результат, доказанный ранее для линейных операторов в работе [1].

[1] Grobler, J. J., de Pagter, B., Rambane, D.T. *Lattice properties of operators defined by random measures*, Quaestiones Math. (2003). V. 26, N 3. P. 307–319.

Односторонние неравенства дискретизации и восстановление по выборке

Лимонова Ирина Викторовна
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук,
МЦМУ МИАН
limonova_irina@rambler.ru
Соавторы: Ю. В. Малыхин, В. Н. Темляков

В 2017 г. В. Н. Темляковым было начато систематическое изучение дискретизации по значениям в точках L_p-норм функций из конечномерных подпространств. Первые результаты в этом направлении были получены в 1930-е годы С. Н. Бернштейном, Й. Марцинкевичем и А. Зигмундом для одномерных тригонометрических полиномов. В настоящее время это обширная и активно развивающаяся область исследований, имеющая глубокие связи с другими важными направлениями (см. [1], [2]). В литературе основное внимание уделяется двусторонним неравенствам, которые показывают, что дискретная норма вектора–выборки ограничена снизу и сверху интегральной L_p-нормой функции, умноженной на некоторые константы. В последнее время в ряде работ результаты о дискретизации по значениям в точках успешно применялись в задачах восстановления по выборке. Более того, оказалось, что для некоторых из этих приложений достаточно иметь односторонние неравенства дискретизации, о которых и пойдет речь в докладе. Мы также рассмотрим приложения этих неравенств к задачам восстановления по выборке. Доклад основан на совместной работе с Ю. В. Малыхиным и В. Н. Темляковым [3].

[1] Ф. Дай, А. Примак, В. Н. Темляков, С. Ю.Тихонов, *Дискретизация интегральной нормы и близкие задачи*, УМН, 74:4(448) (2019), 3—58.

[2] B. Kashin, E. Kosov, I. Limonova, V. Temlyakov, *Sampling discretization and related problems*, J. Complexity, 71 (2022), Paper No. 101653.

[3] И. В. Лимонова, Ю. В. Малыхин, В. Н. Темляков, *Односторонние неравенства дискретизации и восстановление по выборке*, УМН, 79:3(477) (2024), 149–180.

Базисы Рисса, порожденные целочисленными сдвигами сплайнов

Мищенко Евгения Васильевна
Институт математики им. С. Л.Соболева
e.mishchenko@g.nsu.ru

Исследована так называемая устойчивость семейств целочисленных сдвигов B_m-сплайнов, представляющих собой m-кратную свертку функции-индикатора единичного отрезка, и экспоненциальных сплайнов $U_{m,p}$, являющихся свертками некоторой финитной функции экспоненциального вида и B_m-сплайна. Установить устойчивость семейства функций из гильбертова пространства H означает найти ненулевые конечные константы A и B, с помощью которых норма любой линейной комбинации из элементов этого семейства с коэффициентами из l_2 оценивается снизу и сверху через l_2 норму последовательности этих коэффицентов. Такие константы также называются границами Рисса. Если семейство функций устойчиво и вдобавок полно в H, то оно образует базис Рисса. При $A = B$ базис Рисса обращается в ортнормированный базис.

В рассматриваемом случае были найдены постоянные A и B для любых $m \in N, p \in R$, а также установлены некоторые предельные свойства экспоненциальных сплайнов при $p \to 0, \pm\infty$.

Работа выполнена в рамках государственного задания в Институте математики им. С. Л.Соболева СО РАН (проект №FWNF-2022-0008).

[1] M.A. Unser, *Splines: a perfect fit for medical imaging*, Proc. SPIE 4684, Medical Imaging 2002: Image Processing, (9 May 2002).

[2] Ch. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, San Diego, 1992.

[3] E.V. Mishchenko, *Determination of Riesz bounds for the spline basis with the help of trigonometric polynomials*, Siberian Mathematical Journal, 51, (2010), 660–666.

Двумерная теорема Харди–Литтлвуда

Оганесян Кристина Артаковна
Московский центр фундаментальной и прикладной математики (отделение МГУ)
oganchris@gmail.com

Мы докажем теорему Харди–Литтлвуда в двумерном случае для функций с обобщённо монотонными коэффициентами Фурье произвольного знака. Кроме того, мы приведём контрпример, устанавливающий точность результата в том смысле, что если естественным образом расширить рассматриваемый класс последовательностей, то соотношения Харди–Литтлвуда перестанут выполняться.

О сходимости чисто жадного алгоритма по нескольким словарям

Орлова Анастасия Сергеевна
МГУ имени М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
`Anastasia-Orlova1@ya.ru`

Обобщением чисто жадного алгоритма является чисто жадный алгоритм по нескольким словарям, на каждом шаге которого выбирается следующий приближающий вектор локально оптимальным образом из соответствующего словаря. Порядок словарей задаётся специальной последовательностью. Для классического случая чисто жадного алгоритма по одному словарю известно [1], что алгоритм сходится к приближаемому вектору. В работе [2] доказана слабая сходимость нового алгоритма, но вопрос сильной сходимости открыт. Для почти периодических последовательностей показано, что имеет место сильная сходимость чисто жадных приближений по нескольким словарям.

[1] L. K. Jones, *A simple lemma on greedy approximation in Hilbert space and convergence rates for projection pursuit regression and neural network training*, Ann. Statist, 20 (1992), 608–613.

[2] П. А. Бородин, Е. Копецка, *Слабые пределы последовательных проекций и жадных шагов*, Труды МИАН, 319 (2022), 64–72.

Вариационные задачи нелинейной теории упругости на группах Карно

Павлов Степан Валерьевич
Новосибирский Государственный Университет
`s.pavlov4254@gmail.com`
Соавторы: Водопьянов Сергей Константинович

Один из подходов к поиску положения, занимаемого гиперупругим телом Ω в результате воздействия на него известных внешних сил, состоит в нахождении отображения $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, доставляющего минимум функционала энергии

$$I(\varphi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\varphi(x))\, dx.$$

В прошлом веке Дж. Боллом были найдены соответствующие реальным материалам математические условия, при которых удается получить теорему о существовании минимума функционала I в некотором классе непрерывных отображений с обобщенными производными.

В работе [1] представлено приложение методов современного квазиконформного анализа к данной задаче — с их помощью в классе отображений с интегрируемым искажением установлено существование экстремального отображения, являющего взаимно однозначным. В настоящей работе этот подход развивается на группах Карно, обладающих существенно более сложной геометрией по сравнению с евклидовым пространством. Более подробные историческая справка и литература могут быть найдены в [1].

[1] Molchanova A., Vodopyanov S., *Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity*, Calc. Var., 59, №17 (2019).

[2] Водопьянов С. К., Павлов С. В., *Функциональные свойства пределов соболевских гомеоморфизмов с интегрируемым искажением*, Современная математика. Фундаментальные направления, 2024, Том 7, №3 (в печати).

О спектральном синтезе в пространстве решений систем уравнений в свертках на дискретных абелевых группах

Платонов Сергей Сергеевич
Петрозаводский государственный университет
ssplatonov@yandex.ru

Рассматриваются задачи о спектральном синтезе в топологическом векторном пространстве $\mathcal{M}(G)$ функций медленного роста на дискретной абелевой группе G. Доказывается, что в пространстве $\mathcal{M}(G)$ линейные подпространства, состоящие из решений систем уравнений в свертках, допускают спектральный синтез, т. е., что подпространство всех решений системы уравнений в свертках совпадает с замыканием в $\mathcal{M}(G)$ линейной оболочки всех экспоненциальных мономиальных решений этой системы.

[1] L. Székelyhidi, *On the principal ideal theorem and spectral synthesis on discrete Abelian groups*, Acta Math. Hung., 150:1 (2016), 228–233.

[2] S. S. Platonov, *On spectral analysis and spectral synthesis in the space of tempered functions on discrete abelian groups*, J. Fourier Anal. Appl. 24 (2018), 1340–1376.

О восстановлении конечно-аддитивных функций множеств двоичного типа

Плотников Михаил Геннадьевич
МГУ им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
mikhail.plotnikov@math.msu.ru

Пусть $\mathscr{B}$ — множество двоичных полуоткрытых кубов из $[0,1)^d$, QM — множество конечно-аддитивных функций из $\mathscr{B}$ в $\mathbb{C}$ (называемых *квазимерами*). Рассмотрена задача о том, при каких условиях можно полностью восстановить квазимеру τ из некоторого подкласса QM, если знать значения τ на всех двоичных кубах, лежащих в заданном открытом множестве $G \subset [0,1)^d$. В качестве ингредиентов этой задачи мы берем обобщенные двоичные классы Коробова, состоящие из квазимер, чьи коэффициенты Фурье по системе Уолша имеют не более чем степенную скорость убывания, а также модельные множества G типа Шапиро, обладающие определенной двоичной структурой.

Изучен вопрос о взаимоотношениях между параметром обобщенного двоичного класса Коробова и энтропией "слоев" d-мерного множества G типа Шапиро, при которых любая квазимера из данного класса может быть распознана по своим значениям на лежащих в G двоичных кубах. В этом направлении найдены условия, являющиеся в определенном смысле окончательными.

[1] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша: теория и применение*, М.: Наука, 1987.

[2] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Budapest: Academiai Kiado, 1990.

Вещественная интерполяция пространств типа Харди

Руцкий Дмитрий Владимирович
Санкт-Петербургское отделение Математического институтаим. В. А.Стеклова РАН
rutsky@pdmi.ras.ru

Пространства типа Харди для квазинормированных решёток измеримых функций X на единичной окружности $\mathbb{T}$ задаются как $X_A = X \cap N^+$, где N^+ — граничный класс Смирнова. В частности, для пространств Лебега получаются обычные пространства Харди $(L_p)_A = H_p$.

В докладе будет рассмотрен вопрос о характеризации K-замкнутости и устойчивости вещественной интерполяции пар (X_A, Y_A) таких пространств в достаточно общей ситуации. Первое свойство означает, что произвольные измеримые разложения в $X + Y$ функций из $X_A + Y_A$ могут быть исправлены до аналитических с оценками норм слагаемых через исходное разложение. Второе свойство — это формула $(X_A, Y_A)_{\theta,q} = \left[(X, Y)_{\theta,q}\right]_A$.

Оказывается, оба эти свойства можно охарактеризовать в терминах свойства ограниченной BMO-регулярности: для всяких функций $f \in X$, $g \in Y$ существуют некоторые функции $u \in X$ и $v \in Y$ с оценками норм через f и g, такие, что $u + v \geqslant |f| + |g|$ и $\log u/v$ лежит в BMO с подходящей оценкой нормы. Это свойство обобщает известное свойство BMO-регулярности, где вместо условия мажорирования в совокупности имеется индивидуальное мажорирование: $u \geqslant |f|$ и $v \geqslant |g|$. Такую характеризацию удаётся установить для общей ситуации, где от решёток требуется лишь свойство Фату, хотя технически она получается довольно сложной и громоздкой. С другой стороны, в важном частном случае $Y = L_\infty$ этот результат можно получить довольно элементарными средствами.

[1] S. V. Kisliakov, *Interpolation of H^p-spaces: some recent developments*, Function spaces, interpolation spaces, and related topics (Haifa, 1995), Israel Math. Conf. Proc., vol. 13, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999, pp. 102–140.

[2] D. V. Rutsky, *Real Interpolation of Hardy-type Spaces and BMO-regularity*, Journal Fourier Anal. Appl, 26 (2020), no. 4, 1–40.

[3] Д. В. Руцкий, *Вещественная интерполяция пространств типа Харди: анонс и некоторые замечания*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 480 (2019), 170–190.

Приближение подпространствами безусловных тел

Рютин Константин Сергеевич
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, механико-математический факультет МГУ
kriutin@yahoo.com
Соавторы: Ю. В. Малыхин

Будут представлены результаты, продолжающие исследования начатые Ю. В. Малыхиным, по жесткости (несжимаемости) случайных векторов и выпуклых множеств. Авторами было доказано, что любое безусловное множество в $\mathbb{R}^N$ инвариантное относительно циклических перестановок координат является жестким в метрике ℓ_q^N, $1 \leq q \leq 2$, т. е. не может быть хорошо приближено линейными подпространствами размерности существенно меньшей N. Стартовой точкой была задача о поперечнике по Колмогорову множества, полученного из заданного вектора $x \in \mathbb{R}^N$ всевозможными перестановками координат и расстановками знаков

Доказательство развивает подход, предложенный Е. Д. Глускиным для оценки поперечника множества $B_\infty^N \cap kB_1^N$ — пересечения куба и октаэдра, на общий случай усредненных поперечников по Колмогорову безусловных случайных векторов или же случайных векторов с независимыми, нулевыми в среднем компонентами. Доказана общая оценка снизу для усредненного поперечника по Колмогорову через слабые моменты биортогонального случайного вектора.

Получены следствия для безусловных множеств, инвариантных относительно транзитивного действия некоторой группы перестановок координат. Установлены нижние оценки поперечников шаров в смешанных нормах $B^{s,b}_{q_1,q_2}$ и некоторых множеств матриц. Поперечники шаров в смешанных нормах активно изучаются различными авторами, начиная с 80х годов. Поперечники же так называемых транзитивных множеств (орбит конечной подгруппы ортогональной группы) исследовались в недавних работах B. Green, A. Sah, M. Sawhney, Y. Zhao.

Банаховы пределы

Семенов Евгений Михайлович
Воронежский государственный университет
nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru

Банахов предел — это инвариантный относительно сдвига неотрицательный линейный функционал единичной нормы на пространстве ограниченных последовательностей ℓ_∞. Будут изложены основные свойства банаховых пределов, приложения к анализу и результаты последних лет.

Дифференциальная эквивалентность по Колмогорову и дескриптивный подход к определению интегралов

Скворцов Валентин Анатольевич
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
vaskvor2000@yahoo.com

Рассматриваются обобщения конструкции интеграла Колмогорова (см. [1]) на случай весьма общего дифференциального базиса. Поскольку конструкция интеграла Колмогорова базируется на обобщенных суммах Римана, то наибольшее влияние эти идеи оказали на теорию неабсолютных интегралов римановского типа и, прежде всего, на теорию интегралов Хенстока–Курцвейля. В качестве одного из примеров идеи, нашедшей очень широкое применение в современной теории, является колмогоровское понятие дифференциальной эквивалентности, получившее в теории Хенстока–Курцвейля название вариационной эквивалентности, которую мы рассматриваем в применении к базисам в абстрактном пространстве с мерой. Вариационный интеграл, определяемый с помощью понятия вариационной эквивалентности, выявляет тесную связь между интегрированием и дифференцированием относительно базиса.

С понятием вариационной эквивалентности связано понятие вариационной меры, что в свою очередь позволяет получать дескриптивные характеристики неабсолютных интегралов в стиле теорем типа Радона–Никодима.

Рассматриваются примеры применения введенных интегралов в гармоническом анализе на компактных группах специального вида.

[1] А. Н. Колмогоров, *Исследование понятия интеграла* // *Избранные труды. Математика и механика*, М.: Наука, 1985.

Плотность сумм сдвигов одной функции для действия компактной группы

Скворцов Юрий Александрович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
iura.skvortsov2@gmail.com

Пусть связная компактная топологическая группа G со счетной базой непрерывно и транзитивно действует на хаусдорфовом топологическом пространстве X. Доказывается существование такой функции f на X, для которой суммы $\sum_{k=1}^{n} f(g_k x)$ плотны в пространствах с нулевым средним $C^0(X)$ и $L_p^0(X)$, $1 \le p < \infty$.

Уточнение оценки Меньшова L_2-нормы мажоранты частных сумм

Солодов Алексей Петрович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
apsolodov@mail.ru

Теорема Меньшова–Радемахера о точном множителе Вейля для сходимости почти всюду по любой ортонормированной системе основана на оценке нормы максимального оператора. Меньшов показал, что L_2-норма мажоранты частных сумм с коэффициентами c_n по любой ортонормированной системе, состоящей из N функций, не превосходит L_2-нормы самой частной суммы с теми же коэффициентами, умноженной на величину $\log_2 N + 1$. Впоследствии Беннетт показал, что L_1-норма мажоранты частных сумм с коэффициентами, равными единице, по любой ортонормированной системе, состоящей из N функций, не превосходит L_∞-нормы самой частной суммы с некоторыми коэффициентами, по модулю не превосходящими единицы, умноженной на величину $\pi^{-1} \ln N + o(1)$, причем постоянная π^{-1} — точная. Этот результат Беннетт использовал для усиления неравенства Меньшова, получив асипмтотически точную оценку.

Предложен метод усиления доказательства Меньшова, позволяющий уточнить оценку L_2-нормы мажоранты частных сумм непосредственно. В частности, показано, что множитель $\log_2 N + 1$ в оценке Меньшова можно заменить на $0.5 \log_2 N + 1$. Развитие этого метода позволит, на наш взгляд, лучше изучить структуру ортонормированных систем с экстремально большой нормой мажоранты частных сумм.

Ассоциированная рефлексивность некоторых функциональных классов

Степанов Владимир Дмитриевич
ВЦ ДВО РАН, МИАН
stepanov@mi-ras.ru

В докладе рассматривается задача об описании ассоциированных и дважды ассоциированных пространств к функциональным классам, включающим как идеальные, так и неидеальные структуры. Последние включают в себя двухвесовые пространства Соболева первого порядка на положительной полуоси [1]. Показано, что, в отличие от понятия двойственности, ассоциированность может быть "сильной"и "слабой". В то же время дважды ассоциированные пространства делятся еще на три типа. В этом контексте установлено, что пространство функций Соболева с компактным носителем обладает слабо ассоциированной рефлексивностью, а сильно ассоциированное к слабо ассоциированному пространству состоит только из нуля [2]. Аналогичными свойствами обладают весовые пространства типа Чезаро и Копсона, для которых проблема полностью изучена и установлена их связь с пространствами Соболева со степенными весами [3]. В качестве приложения рассматривается проблема ограниченности преобразования Гильберта из весового пространства Соболева в весовое пространство Лебега [4].

Работа поддержана Российским Научным Фондом (https://rscf.ru/project/24-11-00170/, Project 19-11-00087).

[1] Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова, *Характеризация функциональных пространств, ассоциированных с весовыми пространствами Соболева первого порядка на действительной оси*, Успехи матем. наук, 74:6 (2019), 119–158.

[2] В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова, *О сильной и слабой ассоциированности весовых пространств Соболева первого порядка*, Успехи матем. наук, 78:1 (2023), 167–204.

[3] V. D. Stepanov, *On Cesàro and Copson type function spaces. Reflexivity*, J. Math. Anal. Appl., 507:1 (2022), Paper No. 125764, 18 pp.

[4] V. D. Stepanov, *On the boundedness of the Hilbert transform from weighted Sobolev space to weighted Lebesgue space*, J. Fourier Anal. Appl., 28 (2022), Paper No. 46, 17 pp.

Фреймы в банаховом пространстве

Терехин Павел Александрович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
terekhinpa@mail.ru

Для банаховых фреймов будут рассмотрены задачи квантования коэффициентов фреймовых разложений и восстановления сигнала по модулям измерений.

Операторы Римана–Лиувилля в пространствах Бесова

Ушакова Елена Павловна
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
elenau@inbox.ru

Рассматриваются свойства операторов интегрирования Римана–Лиувилля $I^{\alpha}_{\pm}$ положительных порядков α [1] в пространствах Бесова с весовыми функциями типа Мукенхоупта на $\mathbb{R}$. Найдены условия для выполнения неравенств, связывающих нормы образов и прообразов $I^{\alpha}_{\pm}$. В качестве инструментов решения задачи используются системы сплайновых всплесков и соответствующие им теоремы декомпозиции. Полученные результаты применяются к исследованию поведения последовательностей аппроксимативных и энтропийных чисел $I^{\alpha}_{\pm}$, а также к изучению свойств преобразования Гильберта.

Доклад основан на результатах публикаций [2-5]. Исследование поддержано грантом Российского научного фонда № 24-11-00170, https://rscf.ru/project/24-11-00170/.

[1] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения*, М.: Наука и техника, 1987.

[2] Е. П. Ушакова, *Образы операторов интегрирования в весовых функциональных пространствах*, Сибирский математический журнал, 63:6 (2022), 1382–1410.

[3] Е. П. Ушакова, К. Э. Ушакова, *Неравенства для норм с дробными интегралами*, Алгебра и анализ, 35:3 (2023), 185–219.

[4] E. P. Ushakova, *Boundedness of the Hilbert transform in Besov spaces*, Anal. Math., 49:4 (2023), 1137–1174.

[5] E. P. Ushakova, *The study by splines of norm inequalities for Riemann–LIouville operators in weighted Besov spaces*, Journal of Mathematical Sciences, (2023), accepted.

Теорема Арвесона о продолжении для условно унитальных вполне положительных отображений

Яшин Всеволод Игоревич
Математический институт им. Стеклова РАН, Российский Квантовый Центр
yashin.vi@mi-ras.ru

Условно унитальные вполне положительные отображения используются для характеризации генераторов унитальных вполне положительных динамических полугрупп на C^*-алгебрах. В работе предложено обобщение этого понятия на случай отображений между операторными системами. При таком обобщении условно унитальные вполне положительные отображения оказываются инфинитезимальными приращениями унитальных вполне положительных отображений. Изучаются базовые свойства условно унитальных вполне положительных отображений, доказываются двойственность Чоя–Ямиолковского для таких отображений и теорема типа Арвесона о продолжении для вполне ограниченных условно унитальных вполне положительных отображений в конечномерные C^*-алгебры.

[1] В. И. Яшин, *Теорема Арвесона о продолжении для условно унитальных вполне положительных отображений*, Труды МИАН, 324, МИАН, М., 2024, 277–291

Геометрия

Интегрируемые двумерные геодезические потоки в магнитном поле

Агапов Сергей Вадимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
agapov.sergey.v@gmail.com

В докладе речь пойдет об интегрируемых геодезических потоках на двумерных поверхностях в ненулевом магнитном поле. Известно, что требование интегрируемости таких потоков одновременно на всех (или хотя бы на нескольких различных) уровнях энергии является весьма ограничительным (см., например, [1], [2]). С другой стороны, хорошо известны примеры метрик и магнитных полей, допускающих дополнительный интеграл лишь на фиксированном уровне энергии. Так, например, в [3], [4] доказано, что на двумерном торе существуют семейства аналитических римановых метрик и магнитных полей с дополнительным квадратичным по импульсам первым интегралом. Различные примеры локальных рациональных по импульсам первых интегралов магнитных геодезических потоков в явном виде построены в [5].

Доклад основан на совместных работах с М. Бялым, А. А. Валюженичем, А. Е. Мироновым, А. И. Поташниковым, В. В. Шубиным.

[1] И.А. Тайманов, *О первых интегралах геодезических потоков на двумерном торе*, Труды МИАН, 295 (2016), 241–260.

[2] S. Agapov, A. Valyuzhenich, *Polynomial integrals of magnetic geodesic flows on the 2-torus on several energy levels*, Disc. Cont. Dyn. Syst. - A., 39:11 (2019), 6565–6583.

[3] B. Dorizzi, B. Grammaticos, A. Ramani, P. Winternitz, *Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials*, J. Math. Phys., 26:12 (1985), 3070–3079.

[4] S.V. Agapov, M. Bialy, A.E. Mironov, *Integrable magnetic geodesic flows on 2-torus: new examples via quasi-linear system of PDEs*, Comm. Math. Phys., 351:3 (2017), 993–1007.

[5] S. Agapov, A. Potashnikov, V. Shubin, *Integrable magnetic geodesic flows on 2-surfaces*, Nonlinearity, 36:4 (2023), 2128–2147.

Роль полярного преобразования в построении двойственного многогранника к выпуклому и звездчатому многограннику

Антипова Любовь Александровна
РГПУ им. А. И. Герцена
pridoroga31@ya.ru
Соавторы: Вернер Алексей Леонидович

Каждому многограннику в трехмерном пространстве можно поставить в соответствие двойственный ему абстрактный многогранник, то есть такой, вершинам, ребрам и граням которого отвечают соответственно грани, ребра и вершины исходного, и при этом инцидентным парам элементов одного многогранника соответствуют инцидентные пары второго. Возникает вопрос —- существует ли универсальный способ построения двойственного многогранника?

В евклидовом трехмерном пространстве двойственный многогранник к выпуклому многограннику можно построить с помощью полярного преобразования относительно некоторой сферы. Для выпуклого многогранника, обладающего центром симметрии, можно использовать сферу с центром в этой точке. В случае существования описанной сферы, вписанной сферы или средневписанной сферы за центр поляритета можно брать центр соответствующей сферы. Заметим, что, меняя расположение центра сферы относительно данного многогранника, меняется результирующая форма двойственного многогранника. Также известно, что выбор центра сферы, относительно которой осуществляется построение полярного многогранника, определяет его с точностью до подобия. Таким образом, применение полярного преобразования является универсальным способом построения двойственных многогранников к выпуклым.

В докладе будет обобщено понятие полярного образа многогранника с выпуклого случая на множество звездчатых многогранников и предъявлен универсальный способ построения двойственных многогранников к звездчатым. Рассматривая класс однородных многогранников в соответствии со статьей [1], будет получен класс двойственных многогранников и доказаны их свойства.

[1] Антипова Л. А. Конфигурации полярно-двойственных многогранников. Каталановы звезды / Антипова Л. А. // Современные проблемы математики и математического образования: Герценовские чтения, 76 : сборник научных статей Международной научной конференции, Санкт-Петербург, 18-20 апреля 2023 года / Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена. — Санкт-Петербург, 2023. — С. 326-332. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=54907979.

О невырожденности полурассеивающих бильярдов в нормированных пространствах

Баринов Роман Васильевич
МКН СПбГУ
rbarinov2013@yandex.ru

Известно, что бильярдные траектории в дополнении нескольких выпуклых множеств (т. е. полурассеивающие бильярды) в евклидовом пространстве имеют локально конечное число отражений от стенок, а при некоторых условиях невырожденности — и глобально конечное, но построенная теория не обобщается на неевклидов случай.

В докладе представлены аналогичные вопросы для бильярдов в неевклидовых нормированных пространствах, а также доказано, что в полурассеивающем бильярде в нормированном пространстве любая бильярдная траектория конечной длины содержит конечное число отражений, откуда следует локальная конечность отражений.

О гамильтоновости в задаче о движении твёрдого тела в потоке частиц

Верёвкин Григорий Александрович
МЦМУ Московский центр фундаментальной и прикладной математики

В работе обсуждается вопрос о гамильтоновости задачи о движении твердого тела с точкой закрепления (неподвижной точкой) в потоке частиц. Динамическая система не гамильтонова, если рассматривать тела произвольной формы, однако при выполнении некоторых условий на форму тела и расположение точки закрепления система может быть гамильтоновой. Примеры таких тел можно найти в работе А. А.Бурова и А. В.Карапетяна, где также были выписаны некоторые достаточные условия для того, чтобы рассматриваемая система была гамильтоновой. Как оказалось, эти условия можно ослабить, получив тем самым критерий гамильтоновости рассматриваемой системы с заданным гамильтонианом. Также для этой задачи получены условия на расположение точки закрепления в прямоугольном параллелепипеде, при которых уравнения движения будут гамильтоновы. Рассматривается прямоугольная призма, расположение в ней точки закрепления.

[1] Гаджиев М.М., Кулешов А.С. О движении твёрдого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. №3, с. 58-68.

[2] Буров А.А., Карапетян А.В. О движении твердого тела в потоке частиц // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 77-81.

[3] Сазонов В.В. Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника // Институт прикладной математики АН СССР. 1988. Препринт №107. 23 с.

[4] Рыбникова Т.А.. Трещев Д.В. Существование инвариантных торов в задаче о движении спутника с солнечным парусом // Космические исследования. 1990. Т. 28. №2. С. 309-312.

Многомерные биллиардные книжки и их топологические свойства

Кибкало Владислав Александрович
МГУ имени М. В. Ломоносова; Московский центр фунд. и прикл. матем
slava.kibkalo@gmail.com

Топологический подход к интегрируемым гамильтоновым системам, развитый в работах А. Т. Фоменко и его научной школы [1]. Недавно класс интегрируемых биллиардов в областях, ограниченных софокусными квадриками, был существенно расширен В. В. Ведюшкиной, что позволило промоделировать биллиардами широкий класс слоений и особенностей интегрируемых систем с 2 степенями свободы. А именно, был построен класс биллиардных книжек, склеенных (по гладким граничным дугам) из двумерных софокусных областей с плоской метрикой. Ребра (1-клетки) оснащены циклическими перестановками, а вершины (0-клетки) — условиями коммутирования.

Автором предложено и изучено многомерное обобщение биллиардных книжек для софокусного семейства $\sum_{i=1}^n x_i^2/(a_i - \lambda) = 1$ квадрик в $\mathbb{R}^n$. Такая книжка есть CW-комплекс X^n с проекцией $\pi : X^n \to \mathbb{R}^n$, являющейся изометрией на замыкании каждой n-мерной клетки $\bar{e}^n$. Каждая $n-1$-мерная клетка e_i^{n-1} проецируется на одну из квадрик $\lambda = \lambda_i$, возможно, вырожденную (при $\lambda = a_i$) и оснащается циклической перестановкой на множестве n-клеток, в чью границу входит. Каждая клетка e^k отвечает связному пересечению $n-k$-квадрик, каждой из которых отвечает перестановка, составленная из циклических перестановок тех клеток, чьи гиперграни проецируются на эту квадрику.

Теорема 1. *Многомерная билллиардная книжка и система биллиарда на ней корректно определяются циклическими перестановками на гипергранях e^{n-1} при условии коммутирования перестановок, отвечающих $n-2$-мерным клеткам. Биллиардный поток остается непрерывен вблизи траекторий, проходящих через точки клеток e^k для $k < n-1$.*

С помощью новых систем удалось реализовать биллиардами (с точностью до послойного гомеоморфизма) особенности определенных классов, встречающиеся в интегрируемых системах с 3 и более ст. св. (реализация инвариантов седловых особенностей в системах с 2 ст. св. обсуждается в [3]).

Теорема 2. *Многомерными билллиардными книжками топологически реализуются невырожденные особенности коранга 1 интегрируемых систем с n ст. св., а также (при добавлении к системе билларда центрального потенциала Гука) седловые и седло-фокусные особенности ранга 0 интегрируемых систем с 3 степенями свободы.*

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 22-71-10106.

[1] Alexey Bolsinov, Anatoly Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Publ. house "Udmurt Univ.", Izhevsk, 1999.

[2] V. V. Vedyushkina, I. S. Kharcheva, *Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems*, Sb. Math., 209:12 (2018), 1690–1727.

[3] Anatoly Fomenko, Vladislav Kibkalo, *Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms*, Understanding Complex Systems, Springer, Cham, 2021.

Тропический закон взаимности Вейля

Магин Матвей Ильич
Санкт-Петербургский государственный университет, МЦМУ им. Леонарда Эйлера
matheusz.magin@gmail.com
Соавторы: Калинин Никита Сергеевич

В комплексной геометрии широко известен *закон взаимности Вейля*: если f и g — мероморфные функции на компактной римановой поверхности S с непересекающимися дивизорами, то выполняется тождество $\prod_{z\in S} f(z)^{\mathrm{ord}_z g} = \prod_{z\in S} g(z)^{\mathrm{ord}_z f}$, где $\mathrm{ord}_z f$ — минимальная степень в разложении f в ряд Лорана в окрестности точки z. Топологическое доказательство этого результата принадлежит А. Бейлинсону.

Мы с Никитой Калининым двумя существенно различными способами доказали полный тропический аналог этого утверждения. А именно, что для тропических мероморфных функций f и g на компактной тропической кривой Γ выполняется тождество $\sum_{x\in\Gamma} \mathrm{ord}_x g \cdot f(x) = \sum_{x\in\Gamma} \mathrm{ord}_x f \cdot g(x)$.

Доказательство Никиты Сергеевича опирается на технику *тропической модификации* и использует *тропическую теорему Менелая*. Идея моего доказательства состоит в том, что утверждение можно доказать для ребра, а затем проверить, что произведение Вейля выдерживает склейку. Оказалось, что аналогично можно делать для римановой поверхности: разрезать её на цилиндры и штаны и выразить произведение Вейля через интеграл от некоторой функции по границе куска. Таким образом при помощи идей доказательства тропического закона Вейля было также получено альтернативное топологическое доказательство "классического" закона Вейля. Доклад будет посвящен изложению этих результатов.

[1] Nikita Kalinin, *A guide to tropical modifications*, arXiv, 2024.

[2] A. Khovanskii, *Logarithmic functional and the Weil reciprocity law*, Computer Algebra 2006, 85-108.

О статических многообразиях с краем

Медведев Владимир Олегович
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Статические многообразия с краем были введены в геометрию совсем недавно и сразу же вызвали живой интерес в связи с их приложениями к различным вопросам геометрической теории относительности. В римановой геометрии данные многообразия возникают естественным образом при изучении вопросов деформации скалярной кривизны многообразий с краем. Родственным понятием является понятие статической тройки, чья важность была осознана в классических работах Кобаяши, Ляфонтэна и Бургиньона. В докладе будут обсуждаться свойства статических многообразий с краем и их приложения.

[1] L. Ambrozio. On static three-manifolds with positive scalar curvature. Journal of Differential Geometry, 107(1):1–45, 2017.

[2] T. Cruz and F. Vitorio. Prescribing the curvature of Riemannian manifolds with boundary. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 58(4):124, 2019.

[3] T. Cruz and I. Nunes. On static manifolds satisfying an overdetermined Robin type condition on the boundary. Proceedings of the American Mathematical Society, 151(11): 4971–4982, 2023.

[4] V.Medvedev. On static manifolds with boundary. In progress.

Разложение Коджимы одного класса гиперболических 3-многообразий с вполне геодезическим краем

Нигомедьянов Даниил Дамирович
МЦМУ им. Леонарда Эйлера
danil.nig1@gmail.com
Соавторы: Фоминых Евгений Анатольевич

Коджима доказал, что всякое гиперболическое многообразие с вполне геодезическим краем допускает каноническое разложение на выпуклые гиперболические многогранники. В размерности три это разложение двойственно катлокусу края многообразия. Этот инвариант играет ключевую роль в табулировании гиперболических 3-многообразий. Доклад будет посвящен классу гиперболических 3-многообразий с вполне геодезическим краем, триангуляционная сложность которых равняется первому числу Бетти этих многообразий с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, и каноническому разложению таких многообразий.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда No 22-11-00299.

Атлас бифуркационных диаграмм системы трёх вихрей со связью

Пальшин Глеб Павлович
Московский физико-технический институт
palshin.gp@phystech.edu

Полностью изучена грубая топология многопараметрического семейства интегрируемых систем гамильтоновой механики, которое описывает движение двух свободных вихрей при наличии третьего, закреплённого в начале координат (см. [1], [2]). Модель обобщает два частных случая: динамику гидродинамических параллельных вихревых нитей в безграничной идеальной жидкости при наличии топографической неоднородности (в виде горы, острова и т. д.) и динамику магнитных вихрей в ферромагнетиках при наличии закреплённой завихренности (вызванной, например, дефектом среды).

Для данной модели получен явный вид бифуркационной диаграммы отображения момента, вычислены индексы критических подмногообразий, изучена топология изоэнергетических поверхностей, построены инварианты Фоменко слоения Лиувилля (грубые молекулы). Результаты представлены в виде атласа пополненных бифуркационных диаграмм, который каждому набору значений параметров системы ставит в соответствие определённый тип диаграммы, оснащённый топологическими инвариантами.

[1] Г. П. Пальшин, *О некомпактной бифуркации в одной обобщенной модели вихревой динамики*, ТМФ, 212:1 (2022), 972–983.

[2] Г. П. Пальшин, *Топология слоения Лиувилля в обобщенной задаче трех вихрей со связью*, Матем. сб., 215:5 (2024), 106–145.

Мультиобходы и многогранники бинарных деревьев

Щербаков Олег Сергеевич
МГУ им. М. В. Ломоносова, МГТУ им. Н. Э. Баумана
shcherbakovos@yandex.ru

Одномерная задача Громова о минимальном заполнении конечного метрического пространства [1] возникла как обобщение задачи Штейнера о кратчайшей сети и задачи Громова о минимальном заполнении гладкого риманова многообразия. Задача заключается в поиске взвешенного дерева наименьшего веса, соединяющего данное метрическое пространство так, что для любых точек метрического пространства вес единственного пути, соединяющего их в дереве, был не меньше расстояния между ними в метрическом пространстве.

Формула веса миимального заполнения [2] использует т. н. мультиобходы бинарного дерева, в частности, неприводимые мультиобходы. Другой подход — рассмотреть задачу с точки зрения линейного программирования [3]. При таком подходе возникают так называемые многогранники бинарных деревьев.

Оказывается, между вершинами многогранников бинарных деревьев и неприводимыми мультиобходами есть естественная биекция [4]. Автору удалось получить оценки на кратности неприводимых мультиобходов, найти их нормальную форму и описать для некоторых типов бинарных деревьев их многогранники.

[1] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении.* // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 5.С. 65-118.

[2] Еремин А.Ю. *Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства.* Матем. сб., 2013. Т.204, №9. С.51-72.

[3] Ivanov A., Tuzhilin A. *Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space* // Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhauser, Cham. 2022. pp. 165-182.

[4] Щербаков О.С. *Многогранники бинарных деревьев, строение многогранника дерева типа "змея".* Чебышёвский сб., 2022. Т.23, №85. С.136-151.

Дифференциальные уравнения и динамические системы

Динамика многозвенного колесного робота: частные решения и неограниченное ускорение

Артемова Елизавета Марковна
Уральский математический центр, УдГУ
liz-artemova2014@yandex.ru
Соавторы: Бизяев Иван Алексеевич

Построена математическая модель, описывающая движение многозвенного колесного робота, в рамках неголономной модели. Подробно рассмотрено движение по инерции. Указаны неподвижные точки редуцированной системы и проанализирована их устойчивость, найдены инвариантные многообразия. Для случая трех платформ (звеньев) приведены фазовый портрет при движении на инвариантном многообразии, а также траектории движения точек закрепления колесных пар трехзвенника. Кроме того, рассмотрено движение в случае когда на ведущей платформе находится ротор, угловая скорость которого является периодической функцией времени. Показано существование траекторий, для которых одна из компонент скорости неограниченно возрастает, и найдена для нее асимптотика.

О существовании бесконечных всюду разрывных спектров показателей неколебимости знаков дифференциальных уравнений третьего порядка

Артисевич Анжела Евгеньевна
Адыгейский государственный университет
artisevichangela@gmail.com
Соавторы: Сташ Айдамир Хазретович

Найдены всюду разрывные спектры характеристических частот и показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений с непрерывными на положительной полуоси коэффициентами. Для любого не более чем счетного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует уравнение с наперед заданным порядком $n > 2$, у которого спектры характеристик колеблемости совпадают с этим множеством.

Для заданного порядка $n > 2$ существует уравнение, спектры характеристик колеблемости которого совпадает с множеством иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$, дополненным числом нуль.

Об эквивалентностях семейств квадратных матриц

Асташов Евгений Александрович
МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет
ast-ea@yandex.ru
Соавторы: Н. Т. Абдрахманова, А. В. Терентьев

В работах [1-4] рассматриваются задачи классификации простых аналитических семейств квадратных, симметричных и кососимметричных матриц — общего вида, а также с ограничениями типа (не)чётности по совокупности параметров. Такие матрицы можно рассматривать как матрицы линейных отображений/операторов либо как матрицы (косо)симметричных билинейных форм.

Доклад будет посвящен обсуждению различных отношений эквивалентности матричных семейств и соответствующих понятий простых ростков (т. е. ростков с конечным числом примыкающих орбит), а также сопоставлению решений соответствующих задач классификации.

[1] J. W. Bruce, F. Tari, *On Families of Square Matrices*, Cadernos de Mathematica, 3 (2002), 217–242.

[2] J. W. Bruce, *On Families of Symmetric Matrices*, Moscow mathematical journal, 3 (2003), 335–360.

[3] G. J. Haslinger, *Families of Skew-symmetric Matrices*, Ph. D. thesis, University of Liverpool, 2001.

[4] N. T. Abdrakhmanova, E. A. Astashov, *Simple germs of skew-symmetric matrix families with oddness or evenness properties*, Journal of Mathematical Sciences, 270 (2023), 625-639.

О сингулярных решениях нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера высокого порядка и их асимптотических свойствах

Асташова Ирина Викторовна
МГУ имени М. В.Ломоносова, РЭУ имени Г. В. Плеханова
ast.diffiety@gmail.com

Обсуждается существование и асимптотическое поведение сингулярных решений уравнения

$$y^{(n)} = p(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})|y|^k \operatorname{sign} y, \tag{1}$$

где $n \geq 2$, $k > 0, k \neq 1$, p — положительная непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица по последним n переменным.

Продолжено исследование при $k > 1$ гипотезы И. Кигурадзе [1, Problem 16.4] о степенном асимптотическом поведении всех таких решений, имеющих “blow-up” в некоторой конечной точке. Показано, что для слабо нелинейных уравнений эта гипотеза справедлива, а для сильно нелинейных уравнений степенное поведение таких решений становится нетипичным, если порядок уравнения $n \geq 12$. Полученные результаты дополняют и расширяют результаты работы [2].

Будет обсуждаться вопрос о качественном и асимптотическом поведении сингулярных решений этого уравнения при $0 < k < 1$.

Работа выполнена при частичной поддержке РНФ (Проект 20-11-20272).

[1] I. T. Kiguradze, T. A. Chanturia, *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1993.

[2] Astashova I. *Atypicality of power-law solutions to Emden–Fowler type higher order equations* // St. Petersburg Mathematical Journal. **31** (2020), pp. 297–311.

Сосуществование нетривиальных гиперболических аттракторов и изолированных периодических орбит

Баринова Марина Константиновна
НИУ ВШЭ, Нижний Новгород
`mkbarinova@yandex.ru`

Из результатов А. Брауна 2010 года известно, что собственные нетривиальные гиперболические аттракторы Ω-устойчивых 3-диффеоморфизмов могут быть лишь двух типов: растягивающиеся аттракторы (одномерные и двумерные, ориентируемые и неориентируемые), топологическая размерность которых совпадает с размерностью неустойчивых многообразий точек аттрактора, и двумерные Аносовские торы — ручно вложенные 2-торы, ограничение диффеоморфизма на которые сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора. В докладе будут приведены результаты работы [1], в которой было показано, что если все нетривиальные множества Ω-усточивого диффеоморфизма являются аттракторами, то они не могут быть Аносовскими торами и одномерными ориентируемыми растягивающимися аттракторами. Также были получены нижние оценки на количество изолированных периодических орбит для диффеоморфизмов, все нетривиальные базисные множества которых являются двумерными аттракторами [2].

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

[1] M.K. Barinova, O.V. Pochinka, E.I. Yakovlev, *On a structure of non-wandering set of an Ω-stable 3-diffeomorphism possessing a hyperbolic attractor*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 44-1 (2024), 1-17.

[2] M. Barinova, *On isolated periodic points of diffeomorphisms with expanding attractors of codimension 1*, Cornell University. Series math "arxiv.org 2024.

Динамика сферической оболочки с подвижным твердым телом внутри

Бердникова Анна Сергеевна
Уральский математический центр, УдГУ, Ижевск
bas.main78@gmail.com
Соавторы: Бизяев Иван Алексеевич

Рассмотрена движущаяся на горизонтальной плоскости система, состоящая из двух тел: оболочки и каркаса. Оболочка — динамически симметричное твердое тело, которое снаружи ограничено поверхностью сферы, а внутри имеет полость. Каркас — твердое тело, которое закреплено внутри оболочки и относительно нее вращается с постоянной угловой скоростью.

Предполагается, что оболочка катится без проскальзывания. В этом случае задача сводится к анализу двумерного отображения Пуанкаре, на котором в зависимости от величины угловой скорости найдены различные регулярные аттракторы: неподвижные точки различных периодов и притягивающие торы. Подробно проанализирована траектория точки контакта оболочки на плоскости. Численно получены параметры, при которых увеличивается кинетическая энергия шара, что приводит к его ускорению при движении.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (FEWS-2020-0009).

Динамика велосипеда: регулярные и хаотические траектории

Бизяев Иван Алексеевич
Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет
bizyaevtheory@gmail.com
Соавторы: Бердникова А. С.

Рассмотрена задача о движении по инерции роликового велосипеда на горизонтальной плоскости. В этой модели велосипед представляет собой связку двух твердых тел (рама и руль), в которой каждое тело опирается на горизонтальную плоскость лезвием или роликом, которое препятствует движению тела в фиксированном направлении [1, 2]. Получена математическая модель, описывающая динамику данной неголономной модели велосипеда. Она сводится к анализу пяти нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию поступательной скорости точки контакта руля, двух компонент угловых скоростей и углов поворота руля относительно рамы и наклона рамы. Проанализирован размер области начальных условий в фазовом пространстве исходной нелинейной редуцированной системы, из которой траектории асимптотически стремятся к прямолинейному движению (бассейн притяжения). Показано, что при некотором выборе параметров существует достаточно большие начальные значения для углов поворота руля и наклона рамы, при которых велосипед возвращается к прямолинейному движению. Найдены условия, в которых прямолинейное движение теряет устойчивость после бифуркации Андронова-Хопфа. В результате в редуцированной системе возникает устойчивое периодическое решение.

[1] J. D. G. Kooijman, J. P. Meijaard, J. M. Papadopoulos, A. Ruina, A. L. Schwab, *A Bicycle Can Be Self-Stable without Gyroscopic or Caster Effects*, Science, 2011, vol. 332, no. 6027, pp. 339–342.

[2] R. S. Hand, *Comparisons and Stability Analysis of Linearized Equations of Motion for a Basic Bicycle Model*, Master's Thesis, Ithaca, N.Y., Cornell Univ., 1988, 200 pp.

Инвариантные множества диффеоморфизмов с гомоклиническими точками

Васильева Екатерина Викторовна
Санкт-Петербургский государственный университет
e.v.vasilieva@spbu.ru

Рассматривается диффеоморфизм f плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Предполагается, что собственные числа матрицы $Df(0)$ λ, μ положительны и $\lambda\mu < 1$.

В работах [1], [2] изучалась окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки, в предположении, что касание устойчивого и неустойчивого многообразия в гомолинической точке является касанием конечного порядка. Из этих работ следует, что в окрестности гомоклинической точки может лежать бесконечное множество устойчивых двухобходных и трехобходных периодических точек. Существование бесконечного множества устойчивых перидических траекторий зависит от значения величины $(-\ln\lambda)(\ln\mu)^{-1}$.

Предполагается, что касание устойчивого многообразия с неустойчивым в гомоклинической точке не является касанием конечного порядка. Пример двумерного диффеоморфизма с таким касанием устойчивого многообразия с неустойчивым приведен в [3]. Известно [4], что в произвольной окрестности гомоклинической точки может лежать бесконечное множество однообходных устойчивых периодических точек исходного диффеоморфизма, причем характеристические показатели этих точек отделены от нуля. В этом случае существование бесконечного множества устойчивых перидических траекторий не зависит от значения величины $(-\ln\lambda)(\ln\mu)^{-1}$.

Цель доклада — показать, что в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки могут лежать инвариантные множества диффеоморфизма f. Каждое из множеств включает в себя подкову Смейла и бесконечое множество таких кривых, что траектории точек, принадлежащих этим кривым, не покидают расширенной окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки.

[1] Иванов Б. Ф., *Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой*, Дифференц. уравнения, 15 (1979), 8, 1411-1419.

[2] Гонченко С. В., Тураев Д. В. Шильников Л. П., *Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической точкой*, Докл. РАН, 330 (1993), 2, 144-147.

[3] Плисс В. А. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений*, Наука, 1977.

[4] Васильева Е. В. *Диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками*, Дифференц. уравнения, 48 (2012), 3, 307-315.

Особенности построения уравнения нестационарного движения твердого тела в жидкости

Ветчанин Евгений Владимирович
Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет
VEugene186@yandex.ru

Рассматривается процедура построения уравнений плоскопараллельного движения твердого тела с острой кромкой в жидкости. Участвующие в построении уравнений сила и момент сил вычислены на основе модели идеальной жидкости, движение которой описывается комплексным потенциалом. Результаты расчетов, выполенные на основе построенной модели, сравниваются с результатами численных экспериментов с использованием уравнений Навье–Стокса. Показано, что построенная модель требует корректировок, в частности, масштабирования коэффициентов присоединенных масс и добавления запаздываний. Последнее приводит к возникновению уравнений с запаздывающим аргументом при описании движения твердого тела в жидкости и указывает на необходимость учета предыстории движения системы.

Стабилизация траекторий решения нелокального уравнения неразрывности

Волков Алексей Михайлович
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
volkov@imm.uran.ru

Нелокальное уравнение неразрывности описывает систему бесконечного числа однотипных частиц, взаимодействующих друг с другом через общее поле. Решением данного уравнения является вероятностная мера, отражающая распределение частиц по пространству. Предполагается, что пространство мер наделено метрикой Канторовича. Рассматривается задача стабилизации такого решения, в случае управляемой динамики. Построена стратегия, обеспечивающая локальную стабилизацию в смысле приведения решения в некоторую ограниченную окрестность заданного положения равновесия. Также построена стратегия, реализующая глобальную стабилизацию в смысле приведения предельного состояния решения в заданное положение равновесия.

Движение эллиптического профиля с присоединенным вихрем в идеальной жидкости

Гаврилова Анна Михайловна
Уральский математический центр, УдГУ
Ann.gavrilova5@mail.ru
Соавторы: Артемова Елизавета Марковна

Рассматривается движение эллиптического профиля в идеальной несжимаемой жидкости в предположении, что с профилем связан вихрь интенсивности Γ, расположенный на некотором расстоянии от него. Используя подход предложенный Седовым [1] были получены выражения для сил и момента, действующих на профиль со стороны жидкости. Построены уравнения движения эллиптического профиля с присоединенным вихрем.

Показано, что случае постоянной интенсивности вихря $\Gamma = \mathrm{const}$ в рассматриваемой системе существует два частных случая, в которых система интегрируема. Для каждого случая предложена процедура редукции, показано существование неподвижных точек, соответствующих периодическому движению профиля с вихрем. Приведены бифуркационные диаграммы и указаны характерные фазовые портреты. В общем случае показано, что в системе существует неустойчивый предельный цикл.

[1] Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966.

Классификация НМС-потоков с единственной скрученной седловой орбитой на ориентируемых 4-многообразиях

Галкин Владислав Дмитриевич
НИУ ВШЭ, Нижний Новгород
vgalkin@hse.ru
Соавторы: Починка О. В., Шубин Д. Д.

Топологической эквивалентности потоков Морса-Смейла без неподвижных точек (НМС-потоков) в предположениях различной общности посвящен целый ряд статей. В случае малого числа орбит для таких потоков иногда удается получить исчерпывающую классификацию, с перечислением всех типов многообразий, допускающих рассматриваемые потоки, всех классов эквивалентности на допустимом многообразии, а также с решением задачи реализации. Настоящая статья также относится к циклу таких работ. Именно, рассмотрен класс НМС-потоков с единственной седловой орбитой, в предположении, что она скрученная, на замкнутых ориентируемых 4-многообразиях. Доказано, что единственным 4-многообразием, допускающим рассматриваемые потоки является многообразие $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$. Также установлено, что такие потоки разбиваются в точности на восемь классов эквивалентности и в каждом классе эквивалентности построен стандартный представитель.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Диаграмма Кирби как полный инвариант полярных потоков на четырехмерых многообразиях

Гуревич Елена Яковлевна
НИУ ВШЭ, Нижний Новгород
els93@yandex.ru

В докладе рассматривается класс структурно устойчивых потоков на замкнутых многообразиях размерности 4 в предположении, что неблуждающее множество любого потока конечно и состоит из единственного стока, единственного источника и произвольного числа седловых состояний равновесия типа $(2, 2)$. Из [1], [2] следует, что для любого такого потока существует энергетическая функция — функция Морса, строго убывающая вдоль незамкнутых траекторий и имеющая критическую точку в каждом состоянии равновесия. Отсюда следует, что многообразие M^4 допускает разложение на ручки с одной ручкой индекса 0, несколькими ручками индекса 2 (их число равно числу седловых состояний равновесия) и одной ручкой индекса 4. Согласно [3], [4] такое разложение и, как следствие, топология многообразия M^4 определяется некоторым классом эквивалентности *диаграммы Кирби* — оснащенного зацепления на сфере S^3, несущего информацию о приклеивании ручек индекса 2. Мы показываем, что диаграмма Кирби является полным топологическим инвариантом для потоков из рассматриваемого класса и обсуждаем связь между преобразованиями Кирби и бифуркациями потоков.

Исследования выполнены при поддержке программы “Научный фонд Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ)”.

[1] S. Smale, *On gradient dynamical systems*, Annals of Mathematics, 74 (1961), 199-206

[2] K. R. Meyer, *Energy functions for Morse-Smale systems*, Amer. J. Math., 90 (1968), 1031-1040.

[3] R. Kirby, *A calculus for framed links in S^3*, Invent. Math, 45 (1978), 35-56.

[4] de Sa, E.C., *A link calculus for 4-manifolds*, In: Fenn, R. (eds) Topology of Low-Dimensional Manifolds. Lecture Notes in Mathematics, 722 (1979), 16-31.

Анализ установившегося движения роллер рейсера с периодическим управлением

Иванова Татьяна Борисовна
Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
tbesp@rcd.ru
Соавторы: А. А. Килин

В этой работе мы рассматриваем задачу об управляемом движении роллер рейсера по плоскости.Это система состоит из двух соединенных между собой (с помощью цилиндрического шарнира) платформ, на каждой из которой находится жестко закрепленная колесная пара. При этом предполагается, что в точках контакта колес с плоскостью выполняются условия непроскальзывания (неголономная связь) и действует сила вязкого трения. Продвижение роллер рейсера реализуется за счет периодических колебаний платформ относительно друг друга. Мы предполагаем, что угол между платформами (управляющая функция) является заданной периодической функцией времени. В работе [1] показано, что этом случае все траектории приведенной системы асимптотически стремятся к периодическим решениям.В данной работе исследуются траектории роллер рейсера, соответствующие этим периодическим решениям, в зависимости от параметров управления и массо-геометрических характеристик системы. Определены типы возможных траекторий и проанализирована зависимость средней скорости продвижения вдоль прямой от параметров.

[1] I. A. Bizyaev, A. V. Borisov, I. S. Mamaev, *Exotic dynamics of nonholonomic roller racer with periodic control*, Regul. Chaotic Dyn., 23(7) (2018), 983–994.

О существовании локально-интегральных поверхностей у существенно нелинейных систем общего вида

Ильин Юрий Анатольевич
Санкт-Петербургский Государственный университет, математико-механический факультет
iljin_y_a@mail.ru

В докладе рассматривается существенно нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = X(t, x, y), \dot{y} = Yt, x, y)$ в окрестности нулевого решения. Правые части предполагаются непрерывными по всем аргументам и непрерывно дифференцируемыми по x и y. Термин существенно нелинейная означает, что матрицы Якоби правых частей обращаются в ноль на нулевом решении. Тем не менее, для таких систем можно доказывать теоремы о существовании устойчивых и неустойчивых локально-интегральных поверхностей, являющихся аналогами известных теорем Ляпунова и Перрона для систем с невырожденным линейным приближением. Ключевые условия для существенно нелинейных систем формулируются на языке логарифмических норм матриц Якоби, которые как бы заменяют условия на собственные числа или характеристические показатели, используемые для квазилинейных систем. Очень ценно, что условия на логарифмические нормы являются коэффициентно проверяемыми условиями. Интегральные поверхности играют важную роль как в локально-качественной теории динамических систем, так и в задаче об устойчивости (в том числе и условной) нулевого решения, так что результаты, о которых планируется рассказать, могут иметь самое широкое применение.

Как правило, при доказательстве теорем о существовании локально-интегральных поверхностей существенно используется блочно-диагональный вид системы первого приближения. Для квазилинейных систем это не является ограничением и всегда может быть достигнуто приведением или к Жордановой форме (в автономном случае) или преобразованием Перрона (в неавтономном). Для существенно нелинейных систем такое преобразование в принципе невозможно. Поэтому приходиться рассматривать системы, являющиеся как бы возмущением блочно-диагональной системы. Год назад автору удалось несколько отойти от этого ограничения и найти условия существование интегральных поверхностей у систем, не являющихся возмущением блочно-диагональных. Об этом также планируется рассказать в докладе.

Шильниковский хаос в модели роста раковых клеток

Каратецкая Ефросиния Юрьевна
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”
ekarateczkaya@hse.ru

Моделирование роста раковых клеток — одна из важнейших задач в области изучения живых систем. Это важный инструмент в исследовании рака и разработке новых методов лечения, позволяющий понять механизмы взаимодействия инфицированных клеток с окружающими тканями и оценить влияние различных внешних и внутренних факторов на их рост. В данном докладе будут представлены результаты исследования хаотической динамики в модели де Пиллиса и Радунской, описывающей взаимодействие раковых клеток с двумя типами эффекторных клеток [1,2]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1) - a_{12}x_1x_2 - a_{13}x_1x_3, \\ \dot{x}_2 = r_2x_2(1 - x_2) - a_{21}x_1x_2, \\ \dot{x}_3 = \frac{r_3x_1x_3}{x_1+k_3} - a_{31}x_1x_3 - d_3x_3 \end{cases} \tag{6.1}$$

Из работ [3,4] известно, что в системе (1) может возникнуть спиральный хаос, связанный с возникновением седло-фокусной петли Шильникова. Показано, что странные аттракторы рождаются в результате реализации сценария Шильникова [5]. Основная часть работы посвящена изучению бифуркаций коразмерности два, которые являются организационными центрами в рассматриваемой системе. В частности, описывается сценарий бифуркации состояния равновесия в случае, когда оно имеет пару нулевых собственных значений (бифуркация Богданова-Такенса), а также ноль и пару чисто мнимых собственных значений (бифуркация Ноль-Хопф). Показано, как эти бифуркации связаны с возникновением аттракторов Шильникова.

Данная работа подготовлена в ходе проведения исследования в рамках проекта "Зеркальные лаборатории НИУ ВШ".

[1] De Pillis, L. G.; Radunskaya, A. (2001). A Mathematical Tumor Model with Immune Resistance and Drug Therapy: An Optimal Control Approach. Journal of Theoretical Medicine, 3(2), 79–100.

[2] de Pillis L.G., Radunskaya A. (2003). The dynamics of an optimally controlled tumor model: A case study. Math. Comp. Modelling 37(11), 1221, 1221-1244.

[3] Itik, M. & Banks, S. P. (2010). Chaos in a threedimensional cancer model, Int. J. Bifurcation and Chaos 20, 71–79.

[4] Duarte, J.; Januário, C.; Rodrigues, C.; Sardanyés, J.(2013). Topological Complexity And Predictability In The Dynamics Of A Tumor Growth Model With Shilnikov's Chaos. International Journal Of Bifurcation And Chaos, 23(7), 1350124.

[5] Shilnikov L.P. (1965). On one case of the existence of a countable set of periodic motions. Dokl. Akad. Nauk SSSR., 169, 3, 558–561

Квазинормальные формы для систем двух уравнений с большим запаздыванием

Кащенко Сергей Александрович
Региональный научно-образовательный математический центр "Центр интегрируемых систем", Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

kasch@uniyar.ac.ru
Соавторы: А. О. Толбей

Рассматривается локальная динамика систем двух уравнений с запаздыванием. Основное предположение заключается в том, что параметр запаздывания является достаточно большим. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и показано, что они имеют бесконечную размерность. Методы исследования, основанные на применении теории инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм, оказываются непосредственно неприменимыми. Использованы и получили дальнейшее развитие методы бесконечномерной нормализации. В качестве основных результатов построены специальные нелинейные краевые задачи, которые играют роль нормальных форм. Их нелокальная динамика определяет поведение всех решений исходной системы в окрестности состояния равновесия. Результаты существенно отличаются от соответствующих утверждений для нелинейных уравнений второго порядка с большим запаздыванием.

Бифуркационный анализ задачи о качении омнишара по плоскости

Килин Александр Александрович
Удмуртский государственный университет
kilin@rcd.ru
Соавторы: Т. Б. Иванова

Рассмотрена задача о тяжелом неуравновешенном шаре с осесимметричным распределением масс (сферический волчок), который катится по горизонтальной плоскости с частичным проскальзыванием. Полагается, что шар не проскальзывает (катится) в направлении проекции оси симметрии на опорную плоскость. При этом в направлении, перпендикулярном к указанному, шар может скользить относительно плоскости.Рассматриваемая задача описывается в рамках неголоносмной модели, при этом на систему накладывается только одна неголономная связь [1]. В [2] показано, что рассматриваемая система допускает избыточный набор первых интегралов и инвариантную меру, что позволяет свести ее к одной степени свободы.Полученная система зависит от констант четырех первых интегралов и двух массо-геометрических параметров. В работе проводится бифуркационный анализ и классификация различных типов движения рассматриваемой системы. Кроме того, показано, что накладываемая связь вырождается в некоторых точках конфигурационного пространства системы. Это приводит к появлению в системе особенностей, вблизи которых наблюдаются интересные динамические эффекты.

[1] A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, *Dynamics and control of an omniwheel vehicle*, Regul. Chaotic Dyn., 20(2) (2015), 153–172.

[2] A. A. Kilin, T. B. Ivanova, *The Integrable Problem of the Rolling Motion of a Dynamically*

Symmetric Spherical Top with One Nonholonomic Constraint, Russian J. Nonlinear Dyn., 19(1) (2023), 3—17.

Об управлении существенными спектрами показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем

Лобода Надежда Алексеевна
Адыгейский государственный университет
`n-loboda@yandex.ru`
Соавторы: Сташ Айдамир Хазретович

Установлена возможность управления не более чем счетными спектрами показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными и ограниченными на положительной полуоси коэффициентами. Для любой последовательности (q_i) положительных рациональных чисел, сходящейся к нулю, существует двумерная система, спектры показателей колеблемости которой совпадает с множеством $\{q_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Кроме того, для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует двумерная система (периодическая, если все элементы заданного множества соизмеримы), у которой спектры показателей колеблемости совпадают с этим множеством.

В обоих случаях все значения указанных показателей являются существенными, т. е. принимаются на решениях множества начальных значений которых в $\mathbb{R}^2$ имеют положительные меры Лебега.

Одномерные конечнозонные операторы Шредингера как предел коммутирующих разностных операторов

Маулешова Гульнара Сайновна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
`mauleshova@math.nsc.ru`

В докладе будет рассказано, что одномерный конечнозонный оператор Шредингера может быть получен предельным переходом из разностного оператора второго порядка, который коммутирует с некоторым разностным оператором нечетного порядка, коэффициенты этих разностных операторов являются функциями на прямой и зависят от малого параметра. При этом спектральная кривая разностных операторов не зависит от малого параметра и совпадает со спектральной кривой оператора Шредингера.

Доклад основан на совместных результатах с А. Е. Мироновым.

О системе нелинейных интегральных уравнений, описывающей динамику пространственных моментов

Нестеренко Полина Сергеевна
Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет ВМК
polina_nesterenko2024@mail.ru

В данной работе изучается система (6.2) нелинейных интегральных уравнений, дополненная условием (6.3) на бесконечности, возникающая в модели динамики популяции неподвижных биологических организмов, предложенная У. Дикманом и Р. Лоу.

$$\begin{cases} 0 = (b-d)N - \overline{s}\int_{B(r_\omega)} C(y)\,dy, \\ 0 = \overline{b}I_{r_m}(x)N + \overline{b}\int_{B(r_m)} C(x+y)\,dy - (d+\overline{s}I_{r_\omega}(x))C(x) - \\ -\overline{s}\int_{B(r_\omega)} T(x,y)\,dy. \end{cases} \tag{6.2}$$

$$\lim_{\|x\|_{R^n}\to+\infty} C(x) = N^2 \tag{6.3}$$

Система (6.2) описывает состояние равновесия сообщества в случае кусочно-константных ядер разброса и конкуренции. Система (6.2) с помощью замыкания пространственных моментов естественным образом сводится к нелинейному интегральному уравнению. Основной целью работы является исследование вышеуказанного нелинейного интегрального уравнения и ответ на вопрос о существовании его решения. Это исследование проводится путем построения нелинейного интегрального оператора, порожденного уравнением, для которого решается поставленная задача, опираясь на известный результат М. А. Красносельского о существовании неподвижной точки у операторного уравнения. В работе получены условия на биологические параметры, достаточные для существования нетривиального решения данного уравнения.

О колеблемости решений одного скалярного дифференциального уравнения с запаздыванием

Нестеров Павел Николаевич
ЯрГУ им. П. Г. Демидова, РНОМЦ "Центр интегрируемых систем"
p.nesterov@uniyar.ac.ru

В работе строятся асимптотические представления при $t\to\infty$ для решений следующего скалярного дифференциального уравнения с переменным запаздыванием:

$$\dot{x} = -a(t)x(t-\tau(t)), \qquad t \ge t_0 > 0. \tag{1}$$

Здесь функции $a(t)$ и $\tau(t)$ предполагаются действительными и непрерывными на промежутке $[t_0, \infty)$. Основной рассматриваемый в докладе вопрос касается изучения осцилляционных свойств решений указанного уравнения в так называемом критическом случае, когда $a(t)\tau(t) \to \frac{1}{e}$. Мы воспользуемся некоторым вариантом метода центральных многообразий, в котором уравнение (1) рассматривается как возмущение автономного уравнения с запаздыванием

$$\dot{x} = -\frac{1}{e}x(t-1).$$

В докладе будет построена двумерная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая в главном динамику решений уравнения (1). Асимптотическое интегрирование этой системы позволяет получить ответ на вопрос о колеблемости решений исходного уравнения.

О системе интегральных уравнений, возникающих в модели стационарных биологических сообществ

Никитин Алексей Антонович
МГУ им. М. В. Ломоносова, факультет ВМК
nikitin@cs.msu.ru

В работе рассматриваются основные подходы к изучению стохастического процесса популяционной динамики неподвижных особей с непрерывным временем и пространством, основанного на модели У. Дикмана и Р. Лоу. Динамика пространственного паттерна в этой модели описывается при помощи иерархии уравнений пространственных статистик, которые описывают среднюю плотность и пространственное распределение индивидов, организованных в пары, тройки, четверки, и т. д. В качестве пространственных статистик используются факториальные меры пространственных моментов, которые в случае пары особей пропорциональны функции радиального распределения или функции парной корреляции.

Описывается метод замыкания пространственных моментов и приводятся различные методы исследования получающейся системы интегро-дифференциальных уравнений, соответствующей динамике пространственных моментов этого процесса. Пространственные моменты, полученные при использовании различных методов и замыканий, валидируются при сравнении с пространственными статистиками симуляции стохастического пространственно-временного точечного процесса рождения-разброса-смерти в ограниченной области с периодическими граничными условиями.

[1] Николаев М. В., Никитин А. А., Дикман У. Применение обобщённого принципа неподвижных точек к исследованию системы нелинейных интегральных уравнений, возникающей в модели популяционной динамики // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 9. 1242-1250.

О классе устойчивой изотопической связности градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерного тора

Ноздринова Елена Вячеславовна
НИУ Высшая Школа Экономики, Международная лаборатория динамических систем и приложений
maati@mail.ru
Соавторы: Починка Ольга Витальевна

В докладе речь пойдет о замкнутых связных ориентируемых поверхностях M^2 и сохраняющих ориентацию гомеоморфизмах или диффеоморфизмах, заданных на них. *Диффеотопность диффеоморфизмов* $f_0, f_1 : M^2 \to M^2$ означает существование некоторой гладкой дуги $\{f_t : M^2 \to M^2, t \in [0,1]\}$, соединяющей их в пространстве диффеоморфизмов. Если диффеотопные диффеоморфизмы являются *структурно устойчивыми* (качественно не меняющими своих свойств при малых шевелениях), то естественно ожидать существования *устойчивой дуги* (качественно не меняющей своих свойств при малых шевелениях) их соединяющей. В этом случае, следуя Ш. Ньюхаусу, Дж. Палису, Ф. Такенсу [1], говорят, что диффеоморфизмы $f_0, f_1 : M^2 \to M^2$ *устойчиво изотопны* или принадлежат одному и тому же классу *устойчивой изотопической связности*.

Простейшими структурно устойчивыми диффеоморфизмами поверхностей являются *градиентно-подобные* преобразования, имеющие конечное гиперболическое неблуждающее множество, инвариантные многообразия различных седловых точек которого не пересекаются. Однако, даже градиентно-подобные диффеоморфизмы 2-сферы, которые всегда диффеотопны, в общем случае не являются устойчиво изотопными. Для таких диффеоморфизмов полная классификация, с точностью до устойчивой изотопности, получена Е. Ноздриновой и О. Починкой [2] (см., также обзор [3] по известным на сегодняшний день препятствиям к существованию устойчивых дуг между диффеоморфизмами многообразий). Препятствием к существованию устойчивой дуги между диффеоморфизмами 2-сферы является различие в их периодических данных, что впервые было замечено П. Бланшаром [4].

Хорошо известно, что диффеоморфизмы 2-тора диффеотопны тогда и только тогда, когда индуцированный ими изоморфизм фундаментальной группы задается одной и той же матрицей $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbb{Z})$, то есть A — целочисленная квадратная матрица второго порядка с определителем, равным 1. Устойчивая связность изотопных тождественному диффеоморфизмов исследована в работе [5], где показано, что диффеоморфизмы, имеющие одинаковые периодические данные могут не соединяться устойчивой дугой из-за разности гомотопических типов кривых, составленных из инвариантных многообразий седловых точек.

В настоящей работе рассмотрен класс G градиентно-подобных диффеоморфизмов 2-тора, индуцирующих изоморфизм фундаментальной группы, определяемый матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Основным результатом, представленным в докладе является доказательство теоремы, что для любых диффеоморфизмов класса G существует соединяющая их устойчивая дуга.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

[1] S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Publications mathematiques de l' I.H.E.S, 57 (1983), 5–71.

[2] E. Nozdrinova, O. Pochinka, *Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 41:3 (2021), 1101–1131.

[3] T. Medvedev, E. Nozdrinova, O. Pochinka, *Components of Stable Isotopy Connectedness of Morse – Smale Diffeomorphisms*, Regular and Chaotic Dynamics, 27:1 (2022), 77–97.

[4] P. R. Blanchard, *Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces*, Duke Mathematical Journal, 47:1 (1980), 33–46.

[5] Д. А. Баранов, Е. В. Ноздринова, О. В. Починка, *Сценарий устойчивого перехода от изотопного тождественному диффеоморфизма тора к косому произведению грубых преобразований окружности*, Уфимский математический журнал, 16:1 (2024), 11–23.

Об эндоморфизмах n-мерного тора с гиперболическими сжимающимися репеллерами коразмерности один

Петрова Юлия Эдуардовна
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Нижний Новгород, Россия.
yepetrova@hse.ru

В данном докладе представлено обощение результатов, полученных для двумерного тора в работе В. З. Гринеса, Е. В. Жужомы, Е. Д. Куренкова, “О DA-эндоморфизмах двумерного тора”, на n-мерный ($n \geqslant 3$) тор. Рассматриваются непрерывные отображения n-мерного тора, которые индуцируют гиперболическое действие в фундаментальной группе посредством целочисленной гиперболической матрицы, у которой одно собственное значение по модулю больше единицы и $n-1$ меньше единицы. Предлагается конструкция C^∞- гладкого эндоморфизма, который задается как суперпозиция эндоморфизма Аносова типа $(1, n-1)$ и некоторого потока. Эта суперпозиция представляет собой k-листное накрытие и локальный диффеоморфизм, имеющий притягивающий гиперболический сток и нетривиальный сжимающийся репеллер, который является ламинацией коразмерности 1.

Бифуркационный анализ и абсолютная динамика эллипсоида вращения на плоскости

Пивоварова Елена Николаевна
Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет
enpiv@rcd.ru
Соавторы: А. А. Килин

Рассматривается задача о качении эллипсоида вращения по плоскости в предположении, что в точке контакта отсутствует проскальзывание, а проекция угловой скорости эллипсоида на вертикаль равна нулю (модель качения резинового тела). Как известно [1,2], задача о качении тела вращения произвольной формы в рамках модели резинового тела является интегрируемой и сводится к квадратурам. Более того, дополнительные интегралы системы, описывающей качение тела, представляются в элементарных функциях независимо от формы тела, что значительно упрощает анализ динамики рассматриваемой системы.

Показано существование частных решений эллипсоида, соответствующих его положениям равновесия, качению по окружности, либо качению вдоль прямой. При помощи бифуркационного анализа динамики рассматриваемой системы, была выполнена полная классификация движений в зависимости от параметров эллипсоида (смещения центра масс и соотношений полуосей) и начальных условий (наклона оси симметрии и угловой скорости). Построены все возможные типы бифуркационных диаграмм, и для каждого типа приведены фазовые портреты системы.

Выполнена классификация траекторий движения эллипсоида на основе анализа квадратуры, описывающей динамику его центра масс. Показано, что в общем случае траектории движения центра масс эллипсоида являются квазипериодическими замкнутыми кривыми. Тем не менее, при определенных значениях параметров и начальных условий возможны замкнутые периодические траектории, либо траектории, неограниченно уходящие на бесконечность.

[1] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, *Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems*, Regular and Chaotic Dynamics, 13 (2008), 443–490.

[2] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, I. A. Bizyaev, *The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere*, Regular and Chaotic Dynamics, 18 (2013), 277–328.

Условная локальная идентифицируемость бесконечномерного параметра в динамических системах

Пилюгин Сергей Юрьевич и Шалгин Владимир Сергеевич
Санкт-Петербургский государственный университет
`sergeipil47@mail.ru`

Рассматриваются динамические системы с непрерывным и дискретным временем, зависящие от бесконечномерного параметра. Фиксируются начальное данное траектории и эталонное значение параметра (таким образом, выделяется эталонная траектория). Изучается следующая задача: указать такие семейство допустимых параметров и множество точек наблюдения, что если параметр из этого семейства достаточно близок к эталонному, а соответствующая траектория совпадает с эталонной во всех точках наблюдения, то её параметр совпадает с эталонным.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00025, `https://rscf.ru/project/23-21-00025/`.

О степенной скорости сходимости эргодических средних для групп $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{Z}^d$

Подвигин Иван Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
`ipodvigin@math.nsc.ru`

Скорость сходимости эргодических средних в L_2 норме зависит от двух составляющих. Во-первых, от асимптотики на бесконечности преобразования Фурье индикатора усредняющего множества и, во-вторых, от поведения спектральной меры в окрестности нуля. Известно, что асимптотика преобразования Фурье индикатора существенно зависит от полной кривизны границы усредняющего множества. В докладе рассматриваются два противоположных случая: усреднение вдоль шаров или эллипсоидов [1] (кривизна границы нигде не зануляется) и усреднение вдоль кубов или параллелепипедов [2] (кривизна границы нулевая). В обоих случаях приводятся критерии степенной скорости сходимости для всех возможных параметров степеней.

[1] И.В. Подвигин *О степенной скорости сходимости в эргодической теореме Винера*, Алгебра и анализ, 35:6 (2023), 159–168.

[2] А.Г. Качуровский, И.В. Подвигин, В.Э. Тодиков, А.Ж. Хакимбаев, *Спектральный критерий степенной скорости сходимости в эргодической теореме для $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ действий*, Сиб. мат. журн., 65:1 (2024), 92–114.

Асимптотические режимы в гамильтоновых системах с затухающими стохастическими возмущениями

Султанов Оскар Анварович
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН
oasultanov@gmail.com

Рассматривается класс асимптотически автономных систем дифференциальных уравнений на плоскости с осциллирующими коэффициентами. Предполагается, что предельная система является гамильтоновой с устойчивым равновесием. Обсуждается влияние стохастических возмущений типа белый шума на устойчивость системы при условии, что интенсивность возмущений затухает со временем, а частота удовлетворяет условию резонанса. Показано, что в возмущенной системе имеют место различные долговременные асимптотические режимы, при этом условия стохастической устойчивости равновесия зависят от реализуемого режима и скорости затухания возмущений. В частности, доказана возможность устойчивой фазовой синхронизации в осциллирующих системах за счет затухающих стохастических возмущений. Предлагаемый анализ основан на комбинации метода усреднения и построения стохастических функций Ляпунова.

[1] O. A. Sultanov, *Stability of asymptotically Hamiltonian systems with damped oscillatory and stochastic perturbations*, Communications on Pure and Applied Analysis, 23 (2024), 432–462.

[2] O. A. Sultanov, *Long-term behaviour of asymptotically autonomous Hamiltonian systems with multiplicative noise*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 22 (2023), 1818–1851.

Отсутствие энергетической функции для 2-диффеоморфизмов с подковой Смейла

Тирская Карина Юрьевна
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”

В данной работе рассматривается вопрос существования энергетической функции у диффеоморфизмов на плоскости, имеющих нульмерное базисное множество с парами сопряженныть точек. Для потоков, заданных на компактных многообразиях, такой вопрос не стоит, тк было доказано, что для любого такого потока есть энергетическая функция. Однако не все дискретные динамические системы обладают энергетической функцией. Первоначальные результаты в данной области были достигнуты Д. Пикстоном в 1977 году. В своей работе [1] он продемонстрировал существование энергетической функции Морса для любого диффеоморфизма Морса—Смейла на поверхности. Кроме того, в той же работе Д. Пикстон представил диффеоморфизм

Морса—Смейла на трёхмерной сфере, который не обладает энергетической функцией Морса. На сегодняшний день известно, что Ω-устойчивые 2-диффеоморфизмы, не имеющие нульмерных нетривиальных базисных множеств, обладают энергетической функцией [1], [2], [3]. В 2022 году Баринова М. К. в своей работе [4] доказала, что если 2-диффеоморфизм имеет хотя бы одно нульмерное базисное множество без пар сопряжённых точек, то у него отсутствует энергетическая функция. До настоящего времени вопрос о существовании энергетической функции для диффеоморфизма с нульмерным базисным множеством, содержащим пары сопряжённых точек, оставался нерешённым. Одним из классических примеров таких множеств является подкова Смейла, которая и является предметом данного исследования. Основным результатом данной работы является следующее утверждение:

Если хотя бы одно из базисных множеств Ω-устойчивого диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ является подковой Смейла на диске, то диффеоморфизм f не обладает энергетической функцией.

[1] Pixton D. Wild unstable manifolds. *Topology*. 1985;16(2):167-172. `https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3`.

[2] Mitryakova TM, Pochinka OV, Shishenkova AE. Energy function for diffeomorphisms on surfaces with finite hyperbolic chain recurrent set. *Middle Volga Mathematical Society*. 2012;14(1):98-106.

[3] Grines VZ, Noskova MK, Pochinka OV. The construction of an energy function for three-dimensional cascades with a two-dimensional expanding attractor. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*. 2015;76(2):237-249. `https://doi.org/10.1090/mosc/249`.

[4] Barinova M. On Existence of an Energy Function for Ω-stable Surface Diffeomorphisms. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022; 43:3317–3323. `https://doi.org/10.1134/S1995080222020020`.

Необходимые условия для задач управления на бесконечном промежутке со слабо обгоняющим критерием оптимальности

Хлопин Дмитрий Валерьевич
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
khlopin@imm.uran.ru

В задачах управления на бесконечности принцип максимума Л. С. Понтрягина, как система необходимых условий оптимальности, не имеет “общепризнанного” условия трансверсальности на правом конце. Для одного из самых общих в таких задачах критериев, слабо обгоняющего критерия, недавно удалось подобрать краевое условие [1], необходимое без каких-либо асимптотических требований на систему. Это условие не может быть усилено как минимум в некоторых линейных задачах, что, впрочем, не мешает ему в тех же задачах выделять даже континуальный пучок подозрительных на оптимальность экстремалей. Поэтому интересны и асимптотические предположения, при которых, воспользовавшись условием трансверсальности, можно было бы получить ровно одно решение сопряженной системы. Такие асимптотические предположения на систему, не слабее работ [1,2], также удалось получить. Основным идеям, позволившим это сделать, а также разбору нескольких примеров задач управления, и планируется посвятить доклад.

[1] D. Khlopin, *Necessary conditions in infinite-horizon control problems that need no asymptotic assumptions.* Set-Valued and Variational Analysis, 31:2 (2023), 8.

[2] С. М. Асеев, В. М. Вельов, *Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике*, УМН, 74:6 (2019), 3–54

Построение гладких дуг “источник-сток” на двумерной сфере

Цаплина Екатерина Вадимовна
Аффилиация докладчика
ktsaplina11@mail.com
Соавторы: Починка О. В., Ноздринова Е. В.

Пусть $\Phi : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \to \mathbb{S}^2$ — гладкое отображение, при каждом фиксированном $t \in [0, 1]$ являющееся диффеоморфизмом $\Phi(x, t) = \phi_t(x)$ сферы $\mathbb{S}^2$. Однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $\phi_t : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2, t \in [0, 1]$ называется *гладкой дугой*, соединяющей диффеоморфизмы ϕ_0, $\phi_1 \in Diff(\mathbb{S}^2)$.

Отношение связанности гладкой дугой определяет отношение эквивалентности на множестве $Diff(\mathbb{S}^2)$ диффеоморфизмов сферы и разбивает это множество на два класса эквивалентности, состоящих из сохраняющих и меняющих ориентацию диффеоморфизмов согласно работе [1]. При этом в каждом классе существуют диффеоморфизмы “источник-сток”, неблуждающее множество которых состоит из двух гиперболических точек: источника и стока. Более того, все такие сохраняющие (меняющие) ориентацию диффеоморфизмы попарно топологически, но не гладко, сопряжены (см., например, [2]). Поэтому, в общем случае дуга, соединяющая два диффеоморфизма “источник-сток”, претерпевает бифуркации, в том числе и разрушающие динамику “источник-сток”. В силу чего такая дуга может оказаться *неустойчивой*, в смысле чувствительности к малым шевелениям [3].

Основным результатом настоящей работы является конструктивное доказательство теоремы о том, что любые два сохраняющих (меняющих) ориентацию диффеоморфизма “источник-сток” двумерной сферы соединяются гладкой дугой, состоящей из диффеоморфизмов “источник-сток”.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований

НИУ ВШЭ.

1. Munkres J., Differentiable isotopies on the 2-sphere // Michigan Mathematical Journal. – 1960. – Т. 7. – №. 3. – С. 193-197.
2. Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V., Dynamical systems on 2-and 3-manifolds // Cham : Springer, 2016. – Т. 46.
3. Newhouse S. , Palis J., Takens F., Stable arcs of diffeomorphisms, Bull. Amer. Math. Soc., 82:3 (1976), 499–502.

О классификации гомеоморфизмов трёхмерных многообразий с псевдоаносовскими аттракторами и репеллерами

Чилина Екатерина Евгеньевна
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
k.chilina@yandex.ru

Доклад посвящен топологической классификации сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов f замкнутого ориентируемого топологического 3-многообразия M^3, неблуждающее множество $NW(f)$ которых состоит из конечного числа компонент связности $B_0, \dots, B_{m-1}$, удовлетворяющих для любого $i \in \{0, \dots, m-1\}$ следующим условиям:

1. B_i является цилиндрическим вложением замкнутой ориентируемой поверхности рода большего единицы;
2. существует натуральное число k_i такое, что $f^{k_i}(B_i) = B_i$, $f^{\tilde{k}_i}(B_i) \neq B_i$ для любого натурального $\tilde{k}_i < k_i$ и ограничение отображения $f^{k_i}|_{B_i}$ топологически сопряжено сохраняющему ориентацию псевдоаносовскому гомеоморфизму;
3. B_i является либо аттрактором, либо репеллером гомеоморфизма f^{k_i}.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Итерационное решение ОДУ применением аппроксимации Паде

Шапеев Василий Павлович
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича
shapeev.vasily@mail.ru

Аппроксимацией Паде задачи Коши и краевых задач для ОДУ получены приближенные задачи, являющиеся проекциями исходных дифференциальных задач в пространства дробно-рациональных функций. Искомые приближенные решения отыскиваются в виде аппроксимантов Паде $[L/M]$, которые записываются с неопределенными коэффициентами. Для построения приближенного решения дифференциальной задачи на отрезке решения задачи задаются узлы сетки — точки коллокации. При этом количество узлов сетки берется больше числа коэффициентов $[L/M]$. Коллокациями в узлах сетки уравнений приближенной задачи, соответствующей решаемой дифференциальной задаче, получается переопределенная система нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) относительно коэффициентов $[L/M]$. Ее решение после предварительного преобразования полученных уравнений отыскивается в итерационном процессе, в котором численные значения некоторых частей нелинейных уравнений на текущей итерации берутся с предыдущей итерации так, что на каждой итерации решается переопределенная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) — линейная задача наименьших квадратов.

Предложенный алгоритм решения задач для ОДУ запрограммирован на языках системы МАТЕМАТИКА и С. Построены высокоточные решения различных задач для ОДУ. Погрешность полученных решений близка к величине погрешности округления чисел на компьютере. Показано значительное превосходство по точности предложенного алгоритма над стандартной процедурой NDSOLVE решения задачи Коши для ОДУ в системе МАТЕМАТИКА, а также над методом Рунге-Кутта четвертого порядка аппроксимации.

В численных экспериментах решения конкретных ОДУ показаны зависимость точности решения от степени полиномов L и M, зависимость обусловленности получающихся СЛАУ от степени их переопределенности и сложности выражений ОДУ, зависимость скорости сходимости итераций от способа линеаризации СНАУ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда грантом по проекту РНФ № 23-21-00499.

История математики

Два портрета на фоне эпохи

Апушкинская Дарья Евгеньевна и Назаров Александр Ильич
РУДН; ПОМИ РАН и СПбГУ
apushkinskaya@gmail.com,al.il.nazarov@gmail.com

Начало XX века в России. Эпоха расцвета промышленности, науки, культуры, и в то же время - эпоха нарастания общественных противоречий, вылившихся в кровавую кашу гражданской войны. Эпоха неустойчивости и “экспоненциального разбегания” человеческих судеб. Мы рассмотрим этот период на примере двух “мировых линий” с близкими начальными условиями.

Владимир Иванович Смирнов и Яков Давидович Тамаркин - ровесники, друзья, выпускники Петербургского университета. Выдающиеся математики, ставшие и выдающимися организаторами науки и создателями научных школ – один в Советском Союзе, другой в Соединенных Штатах Америки. Драматических, а порой и трагических поворотов в их биографиях хватило бы на пару голливудских боевиков. Сино́псис такого боевика мы и хотим представить слушателям.

В поисках теней: загадки Московской топологической конференции

Апушкинская Дарья Евгеньевна и Назаров Александр Ильич
РУДН; ПОМИ РАН и СПбГУ
al.il.nazarov@gmail.com,apushkinskaya@gmail.com
Соавторы: Г. И. Синкевич

Первая международная топологическая конференция проходила в Москве с 4 по 10 сентября 1935 года. Это была вторая (после конференции по дифференциальной геометрии 1934 г.) специализированная конференция в истории международного математического сообщества, собравшая выдающийся состав участников из 10 стран

Европы и Америки. Представленные на ней результаты оказали колоссальное влияние на развитие топологии.

Работа конференции была широко освещена как в официальных публикациях, так и в многочисленных воспоминаниях участников. Тем не менее фактическая информация (список докладчиков, количество докладов и т. д.) почти во всех источниках была дана неполно или неточно, а зачастую и противоречиво, что довольно загадочно для события, произошедшего сравнительно недавно.

Основываясь на доступных источниках, мы попытались представить полную и непротиворечивую картину событий. В частности, мы приводим полный список докладов и докладчиков, а также даем полное описание фотографии участников конференции.

Доклад основан на статье [1].

[1] D.E. Apushkinskaya, A.I. Nazarov, G.I. Sinkevich, *In Search of Shadows: The First Topological Conference, Moscow 1935*, The Mathematical Intelligencer, 41:4 (2019), 37-42.

Об отечественных научных школах нелинейного функционального анализа в 1940-х-1960-х гг.

Богатов Егор Михайлович
ГФ НИТУ МИСИС; СТИ НИТУ МИСИС
embogatov@inbox.ru

Рассмотрение истории математики через призму научных школ даёт дополнительное представление о математике и её истории [1]. Математические мыслительные средства, выработанные в рамках какой-либо научной школы, являются продуктом коллективной деятельности, что многократно увеличивает скорость их приведения в систему, генерацию продуктивных методов их использования и распространение в пределах национальных и международных научных сообществ.

Основным результатом работы является:

1. введение в историко-научный оборот в области математики XX в. нового материала - истории отечественных школ нелинейного функционального анализа (НФА);
2. характеризация научных школ НФА, функционирующих в СССР в 1940-х-1960-х гг. с выделением времени и места их основания, руководителей и основных представителей, продолжительности функционирования и конкретизацией области исследований;
3. определение вклада отечественных школ НФА в развитие следующих его разделов - вариационного исчисления в целом, теории ветвления и бифуркаций, теории положительных операторов, топологических методов нелинейного анализа, вариационных и приближённых методов решения нелинейных операторных уравнений.

[1] Demidov S. L'histoire des mathématiques en Russie et l'URSS en tant qu'histoire des écoles // ИМИ. 2-я серия. Спец. выпуск. М., 1997. С.9-21.

Вспоминая Людвига Прандтля

Богданов Андрей Николаевич и Кондратьев Игорь Михайлович
НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова, МГТУ имени Н. Э. Баумана
bogdanov@imec.msu.ru

Работы Людвига Прандтля (1875–1953) в области механики жидкости и газа (МЖГ) давно известны в нашей стране и получили признание отечественных специалистов. Однако наряду с фундаментальным вкладом в МЖГ научные интересы Прандтля реализовались также в теории упругости, теории пластичности и строительной механики [1].

Регулярно отмечавшиеся юбилеи Людвига Прандтля и связанные с его именем даты становились поводом к анализу его научного наследия и вклада в науку его учеников и последователей. Примечательно, что хотя подобный анализ проводился с разных позиций, заслуги Прандтля не подвергались сомнению, а многие, даже не знавшие ученого лично, называли его своим научным наставником [2, 3]. Имя Прандтля часто вспоминали и наши соотечественники, в том числе и на проводившихся у нас юбилейных научных мероприятиях [4].

Отрадно, что разрешение многих принципиальных проблем МЖГ в развитие идей Прандтля на качественно более высоком уровне было получено в трудах советских и российских ученых-механиков [5–10].

[1] А.Н. Боголюбов, *Математики. Механики. Биографический справочник*, Киев: Наукова думка, 1983. 639 с.

[2] *Говорят руководители ЦАГИ. Нейланд Владимир Яковлевич* / В.В. Лазарев ЦАГИ. Цаговцы. Время. М.: Капитал-Пресс, 2021. 192 с.

[3] Е.А. Гаев, *Людвиг Прандтль в гидромеханике прошлого и будущего* // Прикладна гідромеханіка. 2014. Т.16. С.3–16.

[4] О.А. Олейник, *К математической теории пограничного слоя. Доклад прочитан 20 октября 1967 г. на Юбилейной сессии Общего собрания Отделения математики АН СССР* // Математические заметки. 1968. Т.3, № 4. С.473–480.

[5] В.В. Сычев, А.И. Рубан , Вик.В. Сычев, Г.Л. Королев , *Асимптотическая теория отрывных течений*, Москва: Наука, 1987.

[6] В.Я. Нейланд, В.В. Боголепов, Г.Н. Дудин, И.И. Липатов, *Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа*, М.: Физматлит, 2003. 456 с.

[7] В.И. Жук, *Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны*, М.: Наука, 2001. 167 с.

[8] О.С. Рыжов, *О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околозвуковых скоростях внешнего потока* // Докл. АН СССР. 1977. Т.236. № 5. С.1091–1094.

[9] А.Н. Богданов, В.Н. Диесперов, В.И. Жук, *Неклассические трансзвуковые пограничные слои. К преодолению некоторых тупиковых ситуаций в аэродинамике больших скоростей* // ЖВММФ. 2018, т. 58, № 2, с. 270–280.

[10] А.Н. Богданов, *К математическому моделированию взаимодействующего трансзвукового пограничного слоя с нелинейным профилем невозмущенной скорости* // Докл. РАН. 2021. Т.501. № 1. С.29–32.

Академия наук и школьное математическое образование (XVIII–XX вв.)

Бусев Василий Михайлович

vbusev@yandex.ru

В докладе планируется осветить вклад Академии наук и ее членов в развитие школьного математического образования. Математические науки изучались в академических гимназии и университете (XVIII в.), ряд учебников школьного уровня был написан Л. Эйлером, С. Я. Румовским, Г. В. Крафтом, а ближе к концу XVIII столетия – выпускниками гимназии и университета Я. П. Козельским, М. Е. Головиным. В первой четверти XIX века основными учебниками математики для гимназий были руководства Н.И. Фусса, составленные под влиянием идей Л. Эйлера.

Позднее влияние на постановку преподавания математики в средних учебных заведениях оказали Д. М. Перевощиков, М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, Н. В. Бугаев, О. И. Сомов (авторы программ и учебников), П.Л. Чебышев (как член Ученого комитета Министерства народного просвещения).

Традиция участия математического сообщества в развитии школьного математического образования возрождается в середине 1930-х годов. Большое внимание вопросам преподавания математики в школе уделял А. Я. Хинчин.

Наибольшее влияние на школьное образование (в том числе, математическое) Академия наук СССР оказала в период с начала 1960-х по конец 1970-х годов, когда под руководством ученых было проведено обновление содержания предметов преподавания и созданы новые учебники. Тогда же по инициативе ученых были созданы специализированные физико-математические школы, научно-популярный журнал “Квант”. В 1980-е годы появились учебники, написанные при участии А. Д. Александрова, А. В. Погорелова, А. Н. Тихонова, С. М. Никольского. В 1990-е годы по ряду причин ученые в значительной степени утратили влияние на школьное образование (если не принимать во внимание влияние посредством учебников, которые продолжали использоваться в школах и после распада СССР).

О тождестве Эйлера

Синкевич Галина Ивановна
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
galina.sinkevich@gmail.com

Об истории формул и тождества Эйлера много писали, но в ней остается немало противоречий и лакун. Еще когда Эйлер был ребенком, равенство $\ln(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) = x\sqrt{-1}$ было получено в словесной форме при расчете поверхности геоида Р. Коутсом (R. Cotes) с помощью метода логарифмических пропорций. Некоторые комментаторы полагают, что у Коутса содержалась ошибка. Так ли это?

В 1743–1748 гг. Эйлер определил показательную функцию через ряды синуса и косинуса и получил уравнение $\cos\phi + \sqrt{-1}\sin\phi = e^{\sqrt{-1}\phi}$, а также выразил тригонометрические функции через экспоненту. Но у Эйлера нет знаменитого тождества $e^{i\pi} = -1$, или $e^{i\pi} + 1 = 0$. Нам удалось выяснить, когда и у кого оно появилось впервые. Мы покажем, как постепенно менялось мнение об этой формуле как о незначительном частном случае и до признания ее красивейшей формулой математики.

[1] Синкевич Г.И. История самой красивой формулы математики. Тождество Эйлера // История науки и техники, 2023, **3**. – с. 3–25.

Н. Н. Лузин и математика XX века

Демидов Сергей Сергеевич
МГУ им. М.В. Ломоносова
serd42@mail.ru

Н. Н. Лузин (1883 – 1950) известен выдающимися результатами в теории множеств и теории функций. Ему принадлежат важные достижения в теории поверхностей, в теории дифференциальных уравнений и других разделах математики. Высокую оценку в научном сообществе получили его философские идеи, в частности, соображения, касающиеся оснований математики, а также его оригинальные историко-математические исследования. Особенным образом следует отметить его педагогический дар, позволивший ему внести важный вклад в отечественную науку и образование и создать одну из важнейших научных школ XX столетия — Московскую школу теории функций, ставшую одним из краеугольных камней Советской математической школы, одной из наиболее влиятельных в математической науке столетия.

В докладе будут обсуждаться обстоятельства выбора Н. Н. Лузиным направлений его исследований, а также их воздействие на развитие математики в нашей стране и в мире.

Первые академики России по прикладной математике

Демидова Ирина Ивановна
СПбГУ
maria_ib@mail.ru

Для развития российской науки в 1724 году Пётр 1 пригласил иностранных учёных, среди которых был Даниил Бернулли (1700–1782). Он имел медицинское образование, защитил диссертацию по физиологии дыхания, выпустил “Математические упражнения”. Это позволило ему получить звание академика Болонской академии наук. В Петербургской АН Д. Бернулли одним из первых изучал движения мышц. В монографии “Гидродинамика или записки о силах и движениях жидкостей” (1738) он первым вывел основное уравнение стационарного движения идеальной жидкости. Показал возможность изучения кровообращения и предложил способ измерения давления крови в сосудах.

Позднее при изучении взаимосвязи между скоростью, с которой течёт кровь, и ее давлением к Даниилу присоединился Леонард Эйлер (1707–1783). Эйлер впервые сформулировал задачу о движении крови по сосудам с учётом изменения свойств стенок сосудов. Эйлер решал задачу о критической нагрузке при сжатии стержня. Спустя почти сто лет его формула была применена для расчета прочности опор железнодорожных мостов. В биомеханике эту формулу можно применить для оценки допустимой нагрузки на кости в зависимости от состояния тканей, т.е. при учете изменения величины модуля Юнга от времени, возраста, соотношения компонентов структуры и других параметров. В своих исследованиях Бернулли и Эйлер показали возможные применения математики к решению биомеханических задач.

Почти через 100 лет выпускник École Polytechnique Габриель Ламе (1795–1870) был приглашён Александром I для чтения лекций по инженерным наукам. Ламе также включился в решение разнообразных технических задач, среди них задача о действии внешнего и внутреннего давлений на сферу или цилиндр. В XX веке задача Ламе была использована для определения напряжённого состояния и разрушения биоконструкций сферической и цилиндрической форм.

Из истории высшего математического образования в Оренбургском крае

Зубова Инна Каримовна
Оренбургский государственный университет
zubova-inna@yandtx.ru
Соавторы: Игнатушина Инесса Васильевна

Говоря о предыстории высшего образования в Оренбургском крае, нельзя не вспомнить о тех средних учебных заведениях, в которых уже начиная с 30-х гг. XIX в.

работали выпускники лучших университетов страны, приезжавшие сюда по назначению и, как правило, сразу начинавшие играть значительную роль в общественной и культурной жизни города. Эти преподаватели сыграли большую роль в формировании предпосылок для создания в городе высших учебных заведений. Авторы останавливаются на деятельности некоторых преподавателей математики, которые не только добросовестно выполняли служебные обязанности, но и все свои знания, энтузиазм и творческие возможности отдавали делу просвещения, организуя научные кружки, читая публичные лекции, совершенствуясь в методике преподавания своих предметов. Достойными преемниками этих преподавателей являются специалисты советского времени, которых можно назвать создателями современных вузов города. Оренбургский государственный университет, возникший на базе политехнического института — сегодня крупнейший вуз области. Богатую историю имеет и Оренбургский педагогический университет, который в этом году отмечает свое 105-летие. В докладе представлен краткий обзор истории этих высших учебных заведений Оренбурга и деятельности преподавателей математики, на протяжении многих лет в них трудившихся.

Трудный путь в науку Ольги Цубербиллер

Избачков Юрий Сергеевич
Российский научно-исследовательский институт культурного и природного наследия имени Д. С. Лихачёва
strax5nature@gmail.com
Соавторы: Рыбак Кирилл Евгеньевич, доктор культурологии

Ольга Николаевна Губонина (в замужестве Цубербиллер) (1885-1975) — известный математик и педагог, автор задачника “Задачи и упражнения по аналитической геометрии”, выдержавшего внушительное количество переизданий, в том числе на иностранных языках, в течение нескольких десятилетий была заведующей кафедрой Института тонких химических технологий (Московского государственного университета тонких химических технологий имени М.В.Ломоносова). Кроме того, Ольга Николаевна известна своими дружескими связями с представителями творческой интеллигенции Серебряного века, театральными деятелями, художниками и даже адептами советских эзотерических кружков. Становление и развитие ученого обуславливаются причинами, которые побудили его выбрать научное поприще. У Цубербиллер путь в науку был гораздо более сложным, нежели его описывали советские биографы. Ольга Николаевна в советское время по понятным причинам была вынуждена скрывать свое родство с купцами-миллионщиками, дворянское происхождение и связь с деятельностью партии эсеров. В 1906-1911 годах она была вовлечена в работу Междупартийного Красного Креста (структура помощи политическим арестантам и ссыльным). Ее дедушка Петр Ионович Губонин из крепостных через благотворительность дослужится до чина тайного советника. Ни коим образом не умаляя математические способности Ольги Николаевны, отметим, что учреждённая Петром Ионовичем в 1870-е гг. стипендия очевидно способствовала ее обучению на матема-

тическом отделении Московских Высших Женских Курсах (один из ее преподавателей был получателем стипендии еще до ее рождения). В 1908 году родственники выдали Ольгу Николаевну замуж за товарища прокурора Московской Судебной Палаты Владимира Владимировича Цубербиллера (1866-1910). При этом сын Владимира Владимировича от первого брака — Владимир был младше Ольги Николаевны всего на семь лет. В 1911 году после смерти Владимира Владимировича его сын Владимир и вдова Ольга Николаевна были арестованы в рамках уголовного дела о распространении нелегальной литературы и участии в запрещенном преступном сообществе. Владимир Цубербиллер взял вину на себя, и очевидно не без усилий бывших коллег мужа, Ольга Николаевна была представлена случайным свидетелем развернутой пасынком революционной работы. По результатам рассмотрения дела суд приговорил Владимира Цубербиллера к тюремному заключению сроком на один год, а его соучастников Эмиля Нордштрема и Николая Витка (в будущем известного советского ученого-урбаниста) на 8 месяцев. Полагаем, такое серьезное потрясение заставило Ольгу Николаевну пересмотреть свое участие в революционной деятельности и сконцентрироваться на научной работе, к которой у нее были очевидные способности. Принимала участие в работе Московского математического общества.

Д. Д. Мордухай-Болтовской и его связь с Петербургским университетом

Налбандян Юлия Сергеевна
Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича
ysnalbandyan@sfedu.ru

Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской, по праву считающийся одним из основателей ростовской математической школы, учился в Санкт-Петербургском университете в 1894–1898 гг. По рекомендации К.А. Поссе и А.А. Маркова по окончании университета он был направлен в Варшаву, в Варшавский политехнический институт, “штатным преподавателем с функциями ассистента” при Г.Ф. Вороном. Впоследствии Мордухай-Болтовской сдавал в Санкт-Петербурге магистерские экзамены и в 1906 г. защитил магистерскую диссертацию. Став профессором Варшавского Императорского университета, переехав вместе с университетом в Ростов-на-Дону, он всегда тепло вспоминал своих учителей, которые, по его образному выражению, “жили под солнцем Чебышёва”. К этой школе на правах внука он причислял и себя.

В докладе предполагается остановиться на студенческих годах выдающегося математика, проанализировать трудности, с которыми он столкнулся в первые годы своей работы (например, упор на практические занятия в политехническом институте), а также рассмотреть его взаимоотношения с такими учёными как А. А. Марков, К. А. Поссе, Г. Ф. Вороной, И. Л. Пташицкий. Используются материалы из опубликованных статей, архивные документы и письма Д. Д. Мордухай-Болтовского, адресованные сыну.

О докладе Эйлера 1752 г. “Principia motus fluidorum”

Овсянников Владислав Михайлович
Российский университет транспорта (РУТ-МИИТ)
OvsyannikovVM@yandex.ru

Обсуждается уравнение неразрывности Эйлера для несжимаемой жидкости в классической работе “Principia motus fluidorum” 1752 г. на латыни, выведенное при использовании линейного лагранжева закона движения жидкой частицы с учетом членов второго и третьего порядков малости по времени, содержащее квадратичный и кубичный инварианты тензора скоростей деформаций. Его запись для сжимаемой среды, произведенная в 2006 г., показала генерацию волн давления и звука, генерируемого аналогичными членами высокого порядка малости волнового уравнения. Принцип построения математики, высказанный Гауссом в переписке с Шумахером, требует учета членов высокого порядка малости при решении задач механики, описывающихся дифференциальными волновыми уравнениями второго и третьего порядков по времени. Л. И. Седов в курсе “Механика сплошной среды” отмечал, что неучет квадратичного и кубичного инвариантов превращает уравнение неразрывности в приближенное равенство.

О работах математиков, погибших в годы Великой Отечественной войны

Одинец Владимир Петрович

w.p.odyniec@mail.ru

В докладе рассказывается о работах математиков — выпускников различных вузов СССР, кроме Ленинградского университета, погибших в годы Великой Отечественной войны. Описываются результаты работ и их распределение по математическим направлениям: динамические системы, алгебра колец, теория Галуа, геометрия банаховых пространств, теория упругости и др., актуальных в довоенный период.

История аналитических множеств
Островский Алексей Владимирович
История математики

Определение аналитических множеств, появившееся в мемуаре Лузина [1], [2], стало основным пунктом обвинений, предъявленных Н.Н. Лузину его учениками. По их мнению, приоритетным является другое определение аналитических множеств, что выкристаллизовалось в известной формулировке “А-операция, так же как и А-множества, названы Суслиным в честь открывшего их П.С. Александрова”. Мнение о влиянии Александрова на открытие А-множеств популярно до сегодняшнего времени и тем самым явно или косвенно поддерживает ряд обвинений Лузину. Предлагаемый автором подход, базирующийся на сравнении оригинальных теорем и их доказательств, позволяет аргументированно реабилитировать Лузина.

[1] Лузин Н.Н. *Лекции об аналитических множествах и их приложениях*, — М., 1953.

[2] Лузин Н.Н. *Собрание Сочинений*, т. 1—3. — М., 1953—1959.

Российской науке – 300 лет. Петербургская школа прикладной математики и кораблестроения

Павилайнен Галина Вольдемаровна и Поляхова Елена Николаевна
Санкт-Петербургский государственный университет
`g.pavilaynen@spbu.ru`

В докладе делается обзор развития прикладной математики и кораблестроения в юбилейный год Российской Академии наук, Академического университета и Академической гимназии, когда необходимо вспомнить и оценить заново достижения и открытия многих поколений учёных. В предисловии ко второму изданию книги “Очерки истории отечественного кораблестроения”, опубликованной под редакцией Г. В. Павилайнен в издательстве “ВВМ” в 2023 году, академик Н. Ф. Морозов пишет: “Россия – морская держава, и достижения отечественного кораблестроения, великие имена Л. Эйлера, А.Н. Крылова, И.Г. Бубнова, С.О. Макарова, В.В. Новожилова наши отечественные приоритеты, научные прорывы в различных областях гидродинамики, теории корабля, механике разрушения, создании новых конструкционных материалов, обязательно должны становиться предметом изучения историков науки и публиковаться в научных и научно-популярных журналах, в монографиях и учебниках по истории”. Огромно влияние Академии наук с самого её основания в научном кораблестроении. Завершение создания русского регулярного военного флота и учреждение в России Академии наук совпали по времени. Для этого были как объективные, так и субъективные предпосылки. Среди субъективных — реформаторская роль Петра I и появление на научном небосклоне звезды Леонарда Эйлера, научные труды которого до сих пор не исследованы до конца и каждый раз изумляют исследователей гениальными научными предвидениями. Основателем отечественной Академии наук (была открыта в 1724 г.) явился Пётр I, который уже с 1717 г. состоял членом Парижской Академии наук. Опыт стран Западной Европы подсказывал, что отсутствие масштабного мореплавания вело к отставанию России в развитии астрономии и механики. Россия не имела не только флота, но и даже выходов к Балтийскому и Чёрному морям. К концу правления Петра I страна превратилась в крупную морскую державу. Один из секретов такого превращения состоит в научном подходе к созданию флота. Крупнейший вклад в кораблестроение внёс Л. Эйлер (1707—1783). Академик А. Н. Крылов писал: “В нашей Академии наук зародилась теория корабля в виде двухтомного сочинения Л. Эйлера”. Трактат о “Морской науке”, написанный по заказу Академии наук, вышел в Петербурге на латинском языке в

1749 году. Много выдающихся флотоводцев снискали славу в России и обеспечили ее морское превосходство во все времена.

История математики: научная дисциплина или беллетристика?

Полотовский Григорий Михайлович
ВШЭ-Нижний Новгород
polotovsky@gmail.com

Речь пойдёт о многократно повторяемых мифах при устном или письменном изложении историко-математических сведений, а также о некорректном изложении фактов, порождающем новые мифы. В качестве конкретных примеров будут рассмотрены мифы, относящиеся к истории античной математики, математики XIX века и современной математики.

Семён Ефимович Белозёров: к 120-летию со дня рождения

Пырков Вячеслав Евгеньевич
Южный федеральный университет
vepyrkov@sfedu.ru

В докладе будут освещены уточненные и ранее неизвестные сведения о творческом пути и научном наследии С.Е. Белозёрова — историка математики, ректора Ростовского университета (1938–1954). Эти сведения касаются его деятельности по созданию кафедры Истории физико-математических наук и по руководству этой кафедрой, постановки курса "История математики", а также создания историко-математической школы в Ростовском университете.

[1] С.Е. Белозёров, *Математика в Ростовском университете*, Историко-математические исследования. Вып.VI (1953), 247-352.

[2] С.Е. Белозёров, *Первые шаги в исследовательской работе по истории наук*, Ученые записки Ростовского-н/Д государственного университета им. В.М. Молотова. Т.XXIV. Труды кафедры истории наук. Вып.1 (1955), 213-214.

Обсуждение аналогов теоремы Дезарга

Селиверстов Александр Владиславович
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
slvstv@iitp.ru
Соавторы: Алексей А. Бойков (РТУ МИРЭА)

Целью работы служит иллюстрация изменений в доказательствах теорем с развитием многомерной геометрии. Теорема Дезарга (Girard Desargues, 1591–1661) о перспективных треугольниках переносится на случай перспективных тетраэдров. Эту теорему о тетраэдрах впервые доказал Понселе (Jean-Victor Poncelet, 1788–1867). Теорема может быть доказана как в трёхмерном проективном пространстве, так и вовлекая многомерное проективное пространство. Ранние публикации упоминают только первое доказательство, а второе было найдено позже. По свидетельству Нины Васильевны Наумович, выход в пятимерное пространство использовал в 1913 г. Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876–1952). С другой стороны, в 1899 г. Гильберт (David Hilbert, 1862–1943) показал, что нельзя вывести теорему Дезарга из аксиом проективной плоскости. Астроном Моултон (Forest Ray Moulton, 1872–1952) упростил доказательство в 1902 г. Поэтому доказательство теоремы Дезарга о перспективных треугольниках на плоскости требует выхода в трёхмерное пространство. Начиная с работ Кэли (Arthur Cayley, 1821–1895) и Шлефли (Ludwig Schläfli, 1814–1895) в середине XIX века, многомерная геометрия быстро развивалась. Геометрический смысл алгебраических уравнений от многих переменных был осознан к 1844 г., прежде чем многомерная геометрия стала общепризнанной. Но даже в начале XX века доказательство теоремы о перспективных тетраэдрах, использующее выход в многомерное пространство, не было привлекательным из-за возможности провести доказательство в трёхмерном пространстве. Напротив, в середине XX века доказательство, вовлекающее многомерное пространство, стало восприниматься как естественное обобщение доказательства теоремы Дезарга. Многомерные пространства стали обычными. При этом снизился интерес к основаниям геометрии. Но расширение доступных методов позволяет поддерживать единство математики, чтобы видеть красоту взаимосвязей между разделами.

Якоб Герман о развитии геометрии и о значении Академии для государства. Речь на открытом заседании Петербургской Академии наук, 1726 г.

Синкевич Галина Ивановна
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
galina.sinkevich@gmail.com

Якоб Герман (1678–1733), швейцарский математик и механик, любимый ученик Якоба

Бернулли, родственник Леонарда Эйлера, был первым профессором высшей математики Петербургской академии наук. Ему, известному математику, самому старшему из академиков, светскому и разносторонне образованному человеку, надлежало выступать на открытых заседаниях в присутствии императрицы. Он прибыл в Петербург в 1725 г. и выступал на первом (1725) и втором (1726) открытых заседаниях Академии. После смерти Петра I перспективы существования Академии стали неясны. Речь Германа можно смело назвать программной, или, как мы сейчас бы сказали, пленарной, так как она, по словам автора, раскрывает не только "начало, развитие и торжество математики", но и дает современную к тому моменту картину состояния математики, определяет задачи для молодых академиков по развитию математики и механики и обучению студентов. Главной же целью Германа было внушить сильным мира сего мысль о необходимости сохранения Академии для государства. Речь 1726 г. "О происхождении и развитии геометрии" была опубликована на латыни в 1728 г. и без малого 300 лет оставалась непереведенной. Русский перевод будет звучать впервые.

[1] J. Hermann. De ortu et progressu Geometriae. Sermones in secundo solenni Academiae Scientiarum imperialis conventu die 1 augusti anni MDCCXXVI publice recitati. Petropoli, 1728. - 125 p.

История появления опционных контрактов. Решение задачи о справедливой цене опциона со времен античности до наших времен

Смирнова Вера Андреевна
Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический Университет
vera-sm@yandex.ru

1. Появление опционов (античные времена). Использование их математиком Фалесом.
2. Средние века. Опционные контракты для голландских торговцев тюльпанами.
3. Девятнадцатый век. Кризис торговли опционами.
4. Двадцатый век. Создание фондовых бирж и плавающего валютного курса.

   Задача о справедливой цене опциона превращается в корректно поставленную математическую.
5. Современное состояние задачи о вычислении справедливой цены опциона и ее связь с развитием теории случайных процессов.

Геометрическое искусство стран Исламского Востока

Щетников Андрей Иванович
ООО “Новая школа”, Новосибирск
a.schetnikov@gmail.com

Исламский геометрический орнамент возникает в конце X века на территории государства Саманидов со столицей в Бухаре, а затем эта традиция развивается на обширной территории от Индии до Магриба, вплоть до наших дней. Будучи формой архитектурного декора, это искусство является в высокой степени математизированным, связанным с плоскими кристаллографическими группами и задачами замощения плоскости, с приближёнными построениями и вычислениями, а в современных публикациях прослеживается его связь с квазикристаллами и фрактальными структурами. Создание таких орнаментов невозможно без хорошего знания геометрии, и к нему приложили руку многие математики средневекового Востока, среди которых есть такие значимые для истории нашей науки фигуры, как Омар Хайям.

Элементы теории поля в работах академика О. И. Сомова

Юлина Анна Олеговна
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
parfenova19761976@mail.ru

Петербургский математик и механик О. И. Сомов первый в России использовал аппарат векторного исчисления в курсе теоретической механики. Ему принадлежит введение математического понятия градиента, годографа, векторного произведения, линии и поверхности уровня, потенциала и их геометрического и векторного смысла. Все вопросы механики Сомов рассматривает в тесной взаимосвязи с математикой. В его фундаментальных работах блестяще показано как математический анализ помогает раскрывать законы движения и действия сил природы с одной стороны, а с другой как механика помогает развитию аналитических и геометрических методов исследования. Однако же работы академика Сомова незаслуженно забыты. Постараемся восполнить этот пробел в данном докладе.

[1] Сомов О.И. Рациональная механика. Кинематика. С-Петербург. Типография Императорской Академии Наук. 1872г.- 491 с.

[2] Сомов О.И. О решении одного вопроса механики, предложенного Абелем // Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.9, кн.1. т. 1866г. Раздельная пагинация. 491 с.

[3] А. О. Юлина. Векторное исчисление в механике Сомова. // История науки и техники. 2023. №3. с. 26-33.

Комплексный анализ

Сюръективность и инъективность операторов свертки: некоторые междисциплинарные результаты

Андреева Татьяна Михайловна
Южный федеральный университет
metzi@yandex.ru

Пусть G — выпуклая ограниченная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G, $V=(v_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность возврастающих функций, непрерывных в G. Обозначим $VH(G):=\bigcup_{n=1}^{\infty} H_{v_n}(G)$, где

$$H_{v_n}(G):=\left\{f\in H(G):||f||_{v_n}:=\sup_{z\in G}\frac{|f(z)|}{e^{v_n(z)}}\right\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

В работе рассматриваются решения уравнения свертки $\mu * f = g$, где $\mu : VH(G+K)\to VH(G)$ — аналитический функционал с носителем в выпуклом компакте K.

Основные результаты основаны на условиях сюръективности обозначенных операторов [1, 2]. Рассматриваются некоторые междисциплинарные вопросы, которые сводятся к качественным свойствам описанных в докладе отображений.

[1] Abanin A. V, Andreeva T. M.On the surjectivity of the convolution operator in spaces of holomorphic functions of a prescribed growth // Vladikavkaz. Mat. Zh.—2018.— 20(2). —Pp. 3–15.

[2] Abanin A. V, Andreeva T. M.Analytic Description of the Spaces Dual to Spaces of Holomorphic Functions of Given Growth on Caratheodory Domains // Mat. Zametki.— 2018.— 104:3. —Pp. 323–335.

О формулах суммирования, скрытых в преобразованиях гипергеометрических функций с произвольным аргументом

Бахтин Кирилл Евгеньевич
РНОМЦ “Дальневосточный центр математических исследований”, ДВФУ
bakhtin.ke@dvfu.ru
Соавторы: Прилепкина Е. Г.

Хорошо известны преобразования Эйлера-Пфаффа для гипергеометрической функции Гаусса. В последствии было открыто несколько преобразований подобного типа, общий вид которых можно записать в форме

$$F\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\middle| Mx^w\right) = V(1-x)^\lambda F\left(\begin{matrix}\mathbf{c}\\ \mathbf{d}\end{matrix}\middle| \frac{Dx^u}{(1-x)^v}\right), \quad x \in G,$$

где F — обобщенная гипергеометрическая функция, $\mathbf{c}, \mathbf{d}$, V и λ функции, зависящие от векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, $w, u \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{Z}, M, D$ — некоторые константы, и G является областью комплексной плоскости $\mathbb{C}_x$. Очевидно, что если некоторые функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ раскладываются в области G в степенные ряды, то в преобразовании $f(x) = g(x)h(x)$, $x \in G$, скрыта некоторая формула суммирования. В данном докладе мы показываем, что преобразования типа Эйлера–Пфаффа основаны на формулах суммирования для конечных гипергеометрических функций. Обсуждаются также обобщения известной формулы суммирования Карлсона-Минтона.

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение №075-02-2024-1440 от 28 февраля 2024 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

Решение уравнения Абловица-Ладика с помощью алгоритма Шура

Губкин Павел Васильевич
ПОМИ РАН
gubkinpavel@pdmi.ras.ru
Соавторы: Бессонов Роман Викторович

Рассмотрим аналитическую функцию f, действующую из единичного круга $\mathbb{D}$ в себя. Для нее можно определить последовательность функций $f_0 = f, f_1, f_2, \ldots$ удовлетворяющих соотношениям

$$zf_{n+1} = \frac{f_n - f_n(0)}{1 - \overline{f_n(0)} f_n}, \qquad n \geq 0,$$

при этом каждая из функций f_n будет снова действовать из $\mathbb{D}$ в $\mathbb{D}$. Алгоритмом Шура называется построение последовательности $\{f_n(0)\}_{n\geq 0}$ по функции f, такая последовательность может быть любой последовательностью комплексных чисел из единичного круга. На докладе мы обсудим вопросы, связанные с устойчивостью алгоритма Шура и то, как это построение позволяет решать дифференциальное уравнение Абловица-Ладика

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t,n) = i\big(1 - |q(t,n)|^2\big)\big(q(t,n-1) + q(t,n+1)\big), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Доклад основан на результатах, полученных в работе [1].

[1] Bessonov R. V., Gubkin P. V. Stability of Schur's iterates and fast solution of the discrete integrable NLS //arXiv preprint `arXiv:2402.02434`. – 2024.

Доминирующие множества для модельных пространств

Дубцов Евгений Сергеевич
ПОМИ РАН
dubtsov@pdmi.ras.ru
Соавторы: А. Б. Александров

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$ обозначает ограниченную симметричную область и $b\mathcal{D}$ — граница Шилова области $\mathcal{D}$. Пусть β — единственная нормированная положительная радоновская мера, заданная на границе $b\mathcal{D}$ и инвариантная относительно всех линейных автоморфизмов области $\mathcal{D}$. Далее, пусть I — внутренняя функция, заданная на области $\mathcal{D}$. Измеримое множество $E \subset b\mathcal{D}$ называется *доминирующим* для большого модельного множества $H^2 \ominus IH^2$, если $\beta(E) < 1$ и

$$\|f\|^2_{H^2} \leq C \int_E |f|^2 \, d\beta$$

для всех $f \in H^2 \ominus IH^2$. В докладе получен результат о композициях с внутренними функциями, из которого, в частности, следует, что доминирующие множества существуют для каждого пространства $H^2 \ominus IH^2$.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда №24-11-00087.

Однопараметрические семейства конформных отображений

Дютин Андрей Юрьевич
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета
dyutin.andrei2016@yandex.ru

Получен приближённый метод нахождения конформного отображения концентрического кольца на произвольную двусвязную многоугольную область. Этот метод основан на идеях, связанных с параметрическим методом Левнера–Комацу. Мы рассматриваем гладкие однопараметрические семейства конформных отображений $\mathcal{F}(z,t)$ концентрических колец на двусвязные многоугольные области $\mathcal{D}(t)$, которые получаются из фиксированной двусвязной многоугольной области $\mathcal{D}$ проведением конечного числа прямолинейных или в общем случае полигональных разрезов переменной длины; при этом мы не требуем монотонности семейства областей $\mathcal{D}(t)$. В интегральное представление для конформных отображений $\mathcal{F}(z,t)$ входят неизвестные (акцессорные) параметры. Мы находим дифференциальное уравнение в частных производных, которому удовлетворяют такие семейства конформных отображений, и выводим из него систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику акцессорных параметров при изменении параметра t и динамику конформного модуля данной двусвязной области в зависимости от параметра t. Отметим, что в правые части полученной системы ОДУ входят функции, которые являются скоростями движения концевых точек разрезов. Это позволяет полностью контролировать динамику разрезов, в частности, добиваться их согласованного изменения в случае, если в области $\mathcal{D}$ проводится более одного разреза. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие эффективность предложенного метода.

Об одном подклассе модельных поверхностей

Заволокин Илья Игоревич
Математический институт им. В. А. Стеклова
ilia.zavolokin@math.msu.ru

В докладе будет рассказано о подклассе модельных поверхностей CR-типа (1, 3). Данный подкласс выделяется специфичным типом по Блуму-Грэму, при котором он, с одной стороны, не является типом общего положения, а с другой, оставляет возможность для реализации голоморфно однородных поверхностей. Будет рассказано о пространстве модулей и единственной однородной модельной поверхности $\mathcal{C}$ данного Блум-Грэм типа. Также будет рассказано о семействе однородных поверхностей, получающихся как орбиты действия группы голоморфных автоморфизмов $\mathcal{C}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00196, https://rscf.ru/project/24-11-00196/

Нули дзета-функции Римана, возмущения самосопряженных операторов и парные корреляции последовательностей

Капустин Владимир Владимирович
ПОМИ РАН
kapustin@pdmi.ras.ru

Множество нулей дзета-функции Римана, развернутое на вещественную ось, рассматривается как спектр малого возмущения самосопряжённого оператора, спектр которого есть вещественная последовательность, получаемая регуляризацией множества нулей дзета-функции. Для конструкций такого вида рассматривается задача о возможности реализации с помощью самосопряженных возмущений конечного ранга свойства Х.Монтгомери о парных корреляциях для нулей дзета-функции.

В докладе будут представлены результаты совместной работы с Д. Н. Запорожцем.

Конформное отображение кольца на двусвязный многоугольник

Колесников Иван Александрович
Региональный научно-образовательный математический центр, Томский государственный университет
ia.kolesnikov@mail.ru

Рассматривается семейство конформных отображений кольца на семейство двусвязных многоугольников, получаемое из начального многоугольника движением некоторых из его вершин при условии сохранения углов. Для семейства отображений и его параметров получены дифференциальные уравнения второго порядка по параметру t, отвечающему за "деформацию" семейства областей, позволяющие пошагово строить отображение на заданный двусвязный многоугольник. Результат обобщает метод, предложенный в [1].

[1] Колесников И.А. *Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца*, Сиб. матем. журн. Т., 62:4. (2021), 784–802.

Обратная задача по резонансам для энергозависимых потенциалов

Коротяев Евгений Леонидович
Матмех СПбГУ, С. Петербург
korotyaev@gmail.com
Соавторы: A. Mantile, Д. Мокеев

Мы рассматриваем уравнения Шрёдингера с потенциалами, зависящими от энергии и имеющими компактный носитель, на полупрямой. Сначала мы получаем оценки числа собственных значений и резонансов для наших комплекснозначных потенциалов. Затем мы рассмотриваем специальный класс энергозависимых уравнений Шрёдингера без собственных значений. Здесь мы решаем обратную задачу по резонансам и описываем множества изо-резонансных потенциалов. Наша стратегия заключается в использовании соответствия между уравнениями Шрёдингера и Дирака на полупрямой. В качестве побочного результата мы описываем аналогичные множества для оператора Дирака и показываем, что задача рассеяния для уравнения Шредингера или оператора Дирака с произвольным граничным условием могут сводится к задаче рассеяния с условием Дирихле.

Доклад основан на статье [1].

[1] Korotyaev, E.; Mantile, A.; Mokeev, D. Inverse resonance problems for energy-dependent potentials on the half-line, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 56(2024), №2, 2115-2148.

Аналог теоремы Жюлиа–Каратеодори в случае нескольких граничных неподвижных точек

Кудрявцева Ольга Сергеевна
Московский центр фундаментальной и прикладной математики; Волгоградский государственный технический университет
kudryavceva_os@mail.ru

Изучаются свойства голоморфных отображений единичного круга в себя в терминах неподвижных точек и угловых производных. Классическая теорема Жюлиа–Каратеодори, связывающая поведение функции внутри круга со значением угловой производной в граничной неподвижной точке, играет важную роль в геометрической теории функций комплексного переменного. В частности, из теоремы Жюлиа–Каратеодори можно получить точные неравенства для тейлоровских коэффициентов на классе функций с внутренней и граничной неподвижными точками. В 1982 г. Кавен и Поммеренке установили интересное обобщение теоремы Жюлиа–Каратеодори, позволившее им вывести оценку первого коэффициента на классе функций, сохраняющих начало координат и произвольный конечный набор граничных точек. Мы получим новое обобщение теоремы Жюлиа–Каратеодори, которое содержит результат Кавена–Поммеренке в качестве частного случая и позволяет решать разнообразные экстремальные задачи на классах функций с неподвижными точками. В частности, мы применим полученное обобщение теоремы Жюлиа–Каратеодори для решения задач об областях взаимного изменения тейлоровских коэффициентов и об областях однолистного покрытия.

О некоторых экстремальных задачах для целых функций экспоненциального типа

Манов Анатолий Дмитриевич
Донецкий государственный университет
manov.ad@ro.ru

В работе рассматривается экстремальная задача, связанная с множеством непрерывных положительно определённых функций на $\mathbb{R}^n$, носитель которых содержится в замкнутом шаре радиуса $r > 0$, а значение в нуле фиксировано (класс $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$).

При фиксированном $r > 0$ требуется найти точную верхнюю грань функционала специального вида на множестве $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$.

Получено общее решение данной задачи. Как следствие, получены новые точные неравенства для производных целых функций экспоненциального сферического типа $\leqslant r$.

Гиперэллиптические римановые поверхности и их многомерные аналоги

Медных Александр Дмитриевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
smedn@mail.ru

Основная цель настоящего доклада — введение в теорию гиперэллиптических поверхностей и их трехмерных и одномерных аналогов. Доклад содержит конструктивное описание гиперэллиптических многообразий в случае малой размерности и их основных свойств. Будут приведены дискретные и многомерные варианты теорем Фаркаша, Кра и Акколы, хорошо известными в комплексном анализе. Также мы даем частичный ответ на задачу де Франшиса, поставленную в 1913 году. Точнее, мы даем структурное описание всех голоморфных отображений между римановыми поверхностями рода три и рода два. В результате получаем точную верхнюю оценку размера множества таких отображений. Результаты получены совместно с И. А. Медных.

[1] Mednykh, A. D., Mednykh, I.A., *The equivalence classes of holomorphic mappings of genus 3 Riemann surfaces onto genus 2 Riemann surfaces*, Sib. Math. J., 57:6 (2016), 1055–1065.

[2] Mednykh, I. A., *Discrete analogs of Farkas and Accola's theorems on hyperelliptic coverings of a Riemann surface of genus 2*, Math. Notes, 96:1 (2014), 84–94.

[3] Mednykh, I. A., *On the sharp upper bound for the number of holomorphic mappings of Riemann surfaces of low genus*, Sib. Math. J., 53:2 (2012), 259–273.

[4] Mednykh, I. A., *Classification up to equivalence of the holomorphic mappings of Riemann surfaces of low genus*, Sib. Math. J., 51:6 (2010), 1091–1103.

[5] A.D. Mednykh, M. Reni, *Twofold unbranched coverings of genus two 3-manifolds are hyperelliptic*, Isr. J. Math., 123 (2001), 149–155.

Структурная теорема для характерестических полиномов Лапласа циркулянтных графов

Медных Илья Александрович
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
ilyamednykh@mail.ru

Данной доклад посвящен изучению характеристических полиномов матрицы Лапласа циркулянтных графов. Показано, что он представляется в виде конечного произведения алгебраических функций, вычисленных в корнях линейной комбинации полиномов Чебышева. Важным следствием полученного результата является свойство периодичности характеристических полиномов, вычисленных в предписанных целых числах. Также доказано, что с точностью до явно указанных линейных множителей, характеристические полиномы циркулянтных графов всегда являются полными квадратами. Указанный подход может быть применен для описания характерестических полиномов различных бесконечных семейств таких как тэта-графы, гантельные графы, bug-графы и другие графы с малым числом вершин большой валентности.

О бесконечно дифференцируемых функциях, допускающих продолжение до целых

Мусин Ильдар Хамитович
ИМВЦ УФИЦ РАН
musin_ildar@mail.ru

Будут рассматриваться различные подпространства пространства Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на неограниченных выпуклых множествах Ω многомерного вещественного пространства. В силу определённых условий функции этих подпространств будут допускать (единственное) продолжение до целых функций в $\mathbb{C}^n$. Будет дано описание пространств указанных продолжений. Для рассматриваемых пространств гладких функций будет получено описание сопряжённого в терминах преобразования Фурье-Лапласа в случае $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ и доказана теорема типа Пейли-Винера в случае, когда $\Omega = \mathbb{R}^n$. Будут даны приложения этих результатов, относящиеся к теории дифференциально-разностных операторов.

Применение конформного радиуса в геометрической теории функций и краевых задачах

Насыров Семен Рафаилович
Казанский (Приволжский) федеральный университет
semen.nasyrov@yandex.ru

Как известно, одной из наиболее интересных характеристик в геометрической теории функций комплексного переменного является конформный радиус области.

В докладе мы описываем применения конформного радиуса в некоторых задачах комплексного анализа: во внешней обратной краевой задаче в постановке Ф. Д. Гахова, в интегралах Кристоффеля–Шварца, дающих конформные отображения на внешность многоугольников, при изучении гиперболической геометрии многоугольных областей, при оценке полунормы Блоха конечных произведения Бляшке.

Исследование проведено при финансовой поддержке РНФ, грант № 23-11-00066.

Точки ветвления диагоналей рядов Лорана рациональных функций

Почекутов Дмитрий Юрьевич
Сибирский федеральный университет
dpotchekutov@sfu-kras.ru

Для рациональной функции двух комплексных переменных с помощью понятия амебы алгебраической кривой мы можем рассмотреть всевозможные ее разложения в ряды Лорана с центром в начале координат. Известно, что полная диагональ такого ряда Лорана является алгебраической функцией. Мы описываем порядки точек ветвления диагонали в терминах логарифмического отображения Гаусса полярной кривой рациональной функции.

Конформные отображения и спектральная задача Дирихле для оператора Лапласа

Пчелинцев Валерий Анатольевич
Томский государственный университет
va-pchelintsev@yandex.ru
Соавторы: Ухлов А. Д.

Доклад посвящен спектральным свойствам оператора Лапласа в терминах конформной геометрии области, используя понятие конформной регулярной области. Предложенный метод базируется на конформном анализе эллиптических операторов. На этом пути нами получены оценки спектральной устойчивости для оператора Лапласа с краевым условием Дирихле в двухсвязных областях с негладкими границами.

Исследования поддержаны РНФ (грант № 23-21-00080).

Формальная классификация голоморфно однородных CR-многообразий

Степанова Мария Александровна
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
step_masha@mail.ru

Мы покажем, что с точностью до формальной эквивалентности число параметров, задающих голоморфно однородное многообразие фиксированного CR-типа (n, K), конечно (здесь n — CR-размерность, K — коразмерность). Этого естественно ожидать, исходя из имеющихся списков голоморфно однородных многообразий малых размерностей: списки состоят из семейств уравнений, зависящих лишь от конечного числа параметров (см. список литературы). Вопрос о конечности числа параметров возникает естественно еще и потому, что все имеющиеся классификации основаны на классификациях алгебр Ли малых размерностей (размерность алгебры должна быть равна размерности многообразия). А число параметров, задающих алгебры Ли фиксированной размерности, конечно (в качестве параметров можно выбрать структурные константы алгебры). Трудность состоит в том, что у одной алгебры может быть несколько неэквивалентных реализаций в виде векторных полей.

Также мы приведем оценку на число параметров, зависящую только от n и K.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00196, https://rscf.ru/project/24-11-00196/.

[1] E. Cartan, “Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l’espace de deux variables complexes”, Ann. Math. Pura Appl, 11:4 (1932), 17–90.

[2] V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy, “Classification Of Homogeneous CR-Manifolds In Dimension 4”, Journal of Mathematical Analysis and Application, 374 (2011) 655-672.

[3] А. В. Лобода, “Голоморфно однородные вещественные гиперповерхности в C3”, Тр. ММО, 81, № 2, МЦНМО, М., 2020, 205–280.

Субфункции на интервалах и голоморфные функции на плоскости и круге

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Институт математики с ВЦ Уфимского федерального исследовательского центра РАН
khabib-bulat@mail.ru
Соавторы: Р. Р. Мурясов

Пусть W — класс непрерывных функций на интервале I вещественной оси $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$. Функцию $f\colon I \to \mathbb{R}$, следуя Ж. Валирону и Э. Бекенбаху, 1932–37 гг., называем W-субфункцией, если для любых двух пар чисел $c_1, c_2 \in W$ и функций $w_1, w_2 \in W$ и любого отрезка $[a, b] \subseteq I$ из неравенств $f(x) \leqslant c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)$ при $x := a, b$ следует то же неравенство при всех $x \in [a, b]$. Планируется сначала дать обзор по различным классам таких W-субфункций, дополненный новыми результатами по ним. Вторая часть доклада будет содержать применения различных классов W-субфункций к голоморным функциям в круге и на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Основную роль при этом будут играть как давно используемые классы p-тригонометрически выпуклых функций при $p \geqslant 0$, так и недавно привлечённые нами к этим вопросам p-степенно и p-гиперболически выпуклые функции, а также иные классы W-субфункций. Классы субгармонических функций с разделёнными переменными, построенные как произведения субфункций, применяются нами к исследованию распределений корней голоморфных в круге и целых функций, аппроксимации экспоненциальными и более общими системами целых функций в разнообразных пространствах функций на компактах и областях в $\mathbb{C}$, к построению новых шкал роста целых или голоморфных в единичном круге функций.

Оценки весовых сумм коэффициентов аналитических функций в круге

Хасянов Рамис Шавкятович
Санкт-Петербургский государственный университет
st070255@student.spbu.ru

В докладе будет рассказано об оценках следующих функционалов в классах аналитических функций в круге:

$$\sum_{n\geq m} c_n|a_n|^2 r^{2n} \text{ и } \sum_{n\geq m} c_n|a_n|r^n, \quad 0\leq r<1,\ m\geq 0.$$

Частными случаями этих сумм являются функционал площади, вторая норма на окружности и мажорантный ряд. Мы развиваем метод И.Р. Каюмова и С. Поннусами [2], используя в оценках результат Э. Райха [3], который обобщает теорему Голузина о мажорации подчинённых функций [4]. Сначала мы докажем общую теорему, после чего сформулируем важные следствия, например, мы докажем точную оценку площади образа круга радиуса r под действием ограниченной в единичном круге функции.

[1] Khasyanov R., *The Bohr radius and the Hadamard convolution operator*, J. Math. Anal. Appl., 127782, (2024).

[2] Kayumov I., Ponnusamy S., *Bohr's inequalities for the analytic functions with lacunary series and harmonic functions*, J. Math. Anal. Appl., V.465, No.2, (2018), 857–871.

[3] Reich E., *An inequality for subordinate analytic functions*, Pacific J. Math., V.4, No.2, (1954), 259–274.

[4] Голузин Г. М., *О мажорации подчинённых функций*, Матем. сб., Т.29, №71, (1951), 209–224.

Наилучшее приближение функций в пространстве Харди и точные значения n-поперечников некоторых классов аналитических функций

Шабозов Мирганд Шабозович
Таджикский национальный университет
shabozov@mail.ru

В докладе излагаются решение экстремальных задач наилучших полиномиальных приближений аналитических в круге $U_R := \{z\in\mathbb{C} : |z| < R\}$ функций, принадлежащих пространству Харди $H_{q,R} := H_q(U_R),\ 1\leq q\leq\infty$.

Пусть $H_{q,R}^{(r)} := \left\{f\in H_{q,R} : \|f^{(r)}\|_{q,R} < \infty\right\}$. Найдены точные неравенства между наилучшим полиномиальным приближением функций $f\in H_{q,\rho}^{(r)}$ ($r\in\mathbb{Z}_+$, $1\leq q\leq\infty$, $0<\rho<R$) и усредненным модулем гладкости угловых граничных значений производных r-го порядка $f^{(r)}\in H_{q,R}$. Для класса $W_{q,R}^{(r)}(\Phi)$ функций $f\in H_{q,R}^{(r)}$, для которых при любых $k\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $k>r$ усредненные модули гладкости граничных значений производной r-го порядка $f^{(r)}$, мажорируемые в системе точек $\{\pi/(2k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, заданной мажорантой Φ, вычислены точные значения различных n-поперечников в норме пространства $H_{q,\rho}$ ($1\leq q\leq\infty$, $0<\rho<R$).

Математическая логика и теоретическая информатика

Эффективные квантовые алгоритмы поиска в словаре

Аблаев Фарид Мансурович
Казанский федеральный университет
farid.ablayev@gmail.com
Соавторы: Марат Аблаев, Наиля Салехова

В последние десятилетия развиты различные подходы к решению проблемы поиска в словаре. Различные варианты классических алгоритмов требуют линейного (от объема словаря) числа запросов [1].

Квантовые алгоритмы квадратично ускоряют процесс запросов. Квантовые алгоритмы используют метод квантового амплитудного усиления, лежащий в основе известного алгоритма Гровера, который квадратично ускоряет процесс поиска. Информация, достаточная для знакомством с этими алгоритмами, приводится, например, в [2].

Мы описываем наш классически-квантовый алгоритм поиска [2] и представляем новый подход к поиску элемента в словаре, основанный на квантовом хешировании (quantum hashing) и квантовой технике отпечатков (quantum fingerprinting). Мы предлагаем “чистый” квантовый алгоритм, который, по сути, является дальнейшим “шагом” по сравнению с нашим недавним гибридным классически-квантовым алгоритмом поиска в словаре [2].

[1] Knuth, D.E.; Morris, J.H., Jr.; Pratt, V.R. *Fast pattern matching in strings*, SIAM J. Comput. 1977, 6, 323–350.

[2] F. Ablayev, M. Ablayev, N. Salekhova *Hybrid Classical–Quantum Text Search Based on Hashing*, Mathematics 2024, 12(12), 1858; https://doi.org/10.3390/math12121858.

Наследственно алгоритмические отношения в структурах

Алаев Павел Евгеньевич
НГУ, ИМ СО РАН
alaev@math.nsc.ru

Пусть структура A лежит в некотором классе сложности K. Тогда n-местное отношение R на A называется наследственно K-отношением, если в любой другой структуре B из K, изоморфной A, образ R относительно любого изоморфизма между A и B тоже лежит в классе K.

В докладе будут рассмотрены некоторые вопросы, связанные с описанием отношений с таким свойством в структурах, вычислимых за полиномиальное время, и примитивно рекурсивных структурах, в первую очередь в полях.

О примитивно рекурсивных алгебраических структурах

Баженов Николай Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск) и Новосибирский государственный университет
n.bazhenov@g.nsu.ru

В последние годы в рамках теории вычислимости активно развивается теория пунктуальных структур. Бесконечную алгебраическую структуру S называют пунктуальной, если носитель для S равен множеству всех натуральных чисел, а сигнатурные функции и предикаты структуры S являются примитивно рекурсивными. Методы теории пунктуальных структур находят применение не только в классической теории конструктивных моделей, но и в других областях математической логики и теоретической информатики.

В докладе обсуждаются недавние результаты по теории пунктуальных структур, а также приложения для вычислимых польских пространств и для теории нумераций.

К проблеме унификации для логики доказунмости GLP

Беклемишев Лев Дмитриевич
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
bekl@mi-ras.ru

Мы покажем, что полимодальная логика доказуемости GLP в языке по крайней мере с двумя модальностями и одной переменной имеет нулевой тип унификации. Более подробно, мы покажем, что унифицируемая формула $[1]p$ не имеет максимальных унификаторов и предъявим для неё бесконечную порождающую систему унификаторов. Далее, мы покажем, что существует алгоритм, позволяющий определить, унифицируема ли данная формула в GLP. Наконец, мы обсудим арифметические аналоги проблем унификации и допустимости правил вывода для GLP и сформулируем несколько открытых вопросов.

Полнота инфинитарного аналитического исчисления для бесконечнозначной логики Лукасевича первого порядка

Герасимов Александр Сергеевич
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
`alexander.s.gerasimov@ya.ru`

Бесконечнозначная логика Лукасевича первого порядка Ł∀ является одной из важнейших математических нечетких логик и служит для формализации приближенных рассуждений. Множество всех общезначимых Ł∀-предложений (достаточно богатой сигнатуры) неперечислимо. В [1] М. Баац и Дж. Меткалф предложили для логики Ł∀ инфинитарное аналитическое гиперсеквенциальное исчисление, но привели существенно неверное доказательство его полноты, что нам подтвердил Дж. Меткалф. В [3] мы доказали полноту этого исчисления для предваренных Ł∀-предложений. Теперь, опираясь также на вспомогательное исчисление из [2] и на результаты из [4] по сравнению исчислений для Ł∀, мы устанавливаем полноту указанного инфинитарного исчисления (для произвольных Ł∀-предложений).

[1] M. Baaz, G. Metcalfe, *Herbrand's theorem, skolemization and proof systems for first-order Łukasiewicz logic*, Journal of Logic and Computation, Vol. 20, No. 1 (2010), 35–54.

[2] А. С. Герасимов, *Бесконечнозначная логика Лукасевича первого порядка: гиперсеквенциальные исчисления без структурных правил и поиск вывода предваренных предложений*, Математические труды, т. 20, N 2 (2017), 3–34.

[3] A. S. Gerasimov, *Repetition-free and infinitary analytic calculi for first-order rational Pavelka logic*, Siberian Electronic Mathematical Reports, Vol. 17 (2020), 1869–1899.

[4] A. S. Gerasimov, *Comparing calculi for first-order infinite-valued Łukasiewicz logic and first-order rational Pavelka logic*, Logic and Logical Philosophy, Vol. 32, No. 2 (2022), 269–318.

Сложность идеалов в вычислимых булевых алгебрах

Гончаров Сергей Савостьянович
Институт математики СО РАН
`s.s.goncharov@mail.ru`

Мы рассмотрим алгоритмические свойства идеалов в вычислимых булевых алгебрах. В [1] были рассмотрены проблемы вычислимости для подструктур и факторов. Эти проблемы были изучены для булевых алгебр и некоторых их обогащений в [2]. Мы решили вопрос о связях вычислимости и разрешимости для булевых алгебр и их идеалов, а также родственные вопросы.

[1] Yu. L. Ershov and S. Goncharov, *Constructive models*, Consultant Bureau, 2000.

[2] S. S. Goncharov, *Countable Boolean Algebras and Decidability*, Plenum, .New York, 1997

Кванторная модальная логика Белнапа–Данна

Грефенштейн Александр Витальевич
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
`aleksandrgrefenstejn@gmail.com`
Соавторы: Сперанский Станислав Олегович

Кванторная интуиционистская логика, QInt, играет ключевую роль в конструктивной математике. Но, хотя из каждого вывода Φ в интуиционистской теории чисел можно извлечь способ верификации Φ, вывод $\neg\Phi$ не даёт прямого способа фальсификации Φ, а лишь сводит предположение о верификации Φ к абсурду. С целью устранения этого недостатка Д. Нельсон предложил обогатить язык QInt путём добавления "сильного отрицания", которое отвечает непосредственно за фальсификацию; см. [1]. Так возникла логика QN3. Позднее было описано её полезное обобщение QN4, которое позволяет работать с противоречивыми данными; см. [2]. Стоит отметить, что при удалении импликации QN4 превращается в кванторную версию хорошо известной *четырёхзначной логики Белнапа–Данна*; см. [3].

Важную роль в понимании QInt играет её точное вложение в модальную логику QS4. Хотелось бы иметь аналогичное понимание QN3 и QN4. В пропозициональном случае эта задача была решена в [4], где С. П. Одинцов и Х. Вансинг разработали пропозициональную *модальную логику Белнапа–Данна*, BK. Однако до сих пор ничего не было известно о ситуации в кванторном случае, несмотря на то что конструктивные теории формулируются именно в кванторном языке. С целью устранения данного недостатка мы разработали кванторную версию BK, обозначаемую через QBK; см. [5]. Получены кванторные обобщения теорем о сильной полноте для BK и некоторых важных её расширений (относительно подходящей семантики типа Крипке) из [4], а также показано, что QN3 и QN4 точно вкладываются в подходящие QBK-расширения. Кроме того, мы получили полезные результаты об интерполяционных свойствах QBK-расширений.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 23-11-00104, https://rscf.ru/project/23-11-00104/.

[1] D. Nelson, Constructible falsity, *Journal of Symbolic Logic*, **14**:1 (1949), 16–26.

[2] A. Almukdad, D. Nelson, Constructible falsity and inexact predicates, *Journal of Symbolic Logic*, **49**:1 (1984), 231–233.

[3] N. Belnap, A useful four-valued logic, in: J. M. Dunn, G. Epstein, eds., *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, D. Reidel, 1977, 8–37.

[4] S. P. Odintsov, H. Wansing, Modal logics with Belnapian truth values, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, **20**:3 (2010), 279–301.

[5] А. В. Грефенштейн, С. О. Сперанский, О кванторной версии модальной логики Белнапа–Данна, *Математический сборник*, **215**:3 (2024), 37–69.

Динамическая эпистемическая логика для групп агентов с ресурсными ограничениями

Долгоруков Виталий Владимирович
НИУ ВШЭ
vdolgorukov@gmail.com
Соавторы: Максим Гладышев, Рустам Галимуллин

Доклад будет посвящен приложениям динамической эпистемической логики в теоретической информатике, в частности, логикам, моделирующим взаимодействие рациональных агентов с ограниченными ресурсами ([1], [2]). Будет представлена динамическая эпистемическая логика для групп агентов, позволяющая моделировать совместное использование ресурсов для получения общего знания. Будут представлены результаты, касающиеся полноты и разрешимости данной логики.

[1] Dolgorukov V., Galimullin R., Gladyshev M. Dynamic *Epistemic Logic of Resource Bounded Information Mining Agents*, AAMAS '24: Proceedings of the 23rd International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems. Auckland : International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2024, 481–489.

[2] Dolgorukov V., Gladyshev M. *Dynamic Epistemic Logic for Budget-Constrained Agents*, Dynamic Logic. New Trends and Applications. 4th International Workshop, DaLí 2022, Haifa, Israel, July 31–August 1, 2022, Revised Selected Papers Vol. 13780. Cham : Springer, 2023, 56–72.

Алгоритмы сравнения периодических строк

Золотов Борис Алексеевич
Санкт-Петербургский государственный университет, МЦМУ им. Леонарда Эйлера
`boris.a.zolotov@yandex.com`
Соавторы: Гаевой Никита Сергеевич, Тискин Александр Владимирович

Задача поиска наибольшей общей подпоследовательности *(LCS)* формулируется следующим образом: по паре входных строк a, b определить длину наибольшей строки, которая являлась бы подпоследовательностью обеих этих строк. Это важнейшая алгоритмическая задача, имеющая множество применений. А. В. Тискиным была предложена алгебраическая интерпретация для этой задачи и её аналогов (задачи о редакционном расстоянии, о взвешенном выравнивании и других). Основные объект этой интерпретации — моноид Гекке и представление его элементов в виде липких кос. Алгебраическая интерпретация неожиданно эффективна для решения задачи LCS в случае, когда одна или обе входные строки имеют период (представляются как конкатенация нескольких копий одной строки). Случай, когда только одна из двух входных строк периодична, был решен ранее при помощи обобщения указанной интерпретации на аффинный моноид Гекке. Центральный результат настоящего доклада — алгоритмически эффективное сведение умножения в аффинном моноиде Гекке к умножению в стандартном моноиде Гекке. С его помощью нами разработан эффективный алгоритм для более общего случая, когда обе строки периодичны. Предлагаемый алгоритм был реализован Н. С. Гаевым, полученная программа способна находить длину наибольшей общей подпоследовательности для пар периодических строк, размеры которых не позволили бы обработать их известными ранее алгоритмами.

[1] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming: Sorting and Searching, Volume 3.* Addison Wesley, 1998.

[2] Joel Brewster Lewis, *Affine symmetric group,* WikiJournal of Science, 4(1):3, 2021.

[3] A. Tiskin, *Semi-local string comparison: Algorithmic techniques and applications,* Mathematics in Computer Science, 1(4):571–603, 2008.

[4] A. Tiskin, *Periodic String Comparison,* In Proceedings of CPM, volume 5577 of Lecture Notes in Computer Science, pages 193–206, 2009.

[5] A. Tiskin, *Fast Distance Multiplication of Unit-Monge Matrices,* Algorithmica, 71:859–888, 2015.

Комбинаторная сложность и ее модификации. Оценки для слов Штурма

Кирова Валерия Орлановна
МГУ им.М.В.Ломоносова
kirova_vo@mail.ru

В 1940 году в своей работе Hedlund G.A., Morse M. ставят вопрос о множестве подслов заданной длины бесконечного слова и вводят понятие функции комбинаторной сложности. Классом слов с наименьшей комбинаторной сложностью являются слова Штурма. Концепция комбинаторной сложности была развита путем введения функций арифметической и полиномиальной сложности, начало изучения которых положили Теорема Ван дер Вардена об одноцветных арифметических прогрессиях и полиномиальная Теорема Ван дер Вардена, представленная в 1996 г в работе Leibman A., Bergelson V. Введенные функции прежде всего были рассмотрены на классе слов с наименьшей комбинаторной сложностью — словах Штурма, для которых получены интересные оценки.

[1] Hedlund G.A. , Morse M. *Symbolic dynamics* Amer. J. Math, 1938, 815-866.

[2] Avgustinovich S., Fon-Der-Flaass D., Frid A. *Arithmetical complexity of infnite words* Proc. Words, Languages and Combinatorics III, 2000. Singapore: World Scientifc, 2003. P. 51-62.

[3] Leibman A., Bergelson V. *Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemeredi's theorems*, Journal of the American Math Society, Vol. 9, 1996, 725-753.

[4] Kirova V.O., Godunov I.V. *On the complexity functions of Sturmian words* Chebyshevskii sbornik, 2023, vol. 24, no. 4, pp. 63-44.

Аксиоматизация арифметики Бюхи

Ковалёв Константин Андреевич
МФТИ
kovalev.ka@phystech.edu

Арифметикой Бюхи (с основанием $p \geq 2$) называется теория натуральных чисел в языке с нулем, функцией последователя, сложением и специальной функцией, обозначаемой V_p, которая число n отображает в наибольшую степень p, делящую n. Хорошо известно, что данная теория является разрешимой, однако неизвестно никакой явной аксиоматизации этой теории (есть некоторые отрицательные результаты, см. [1]). Цель данной работы состоит в отыскании такой аксиоматизации. Наша аксиоматизация состоит из некоторого конечного числа простых аксиом (похожих на арифметику Робинсона) и схемы аксиом вида $\exists x\ \phi(x) \to \exists x \leq n_\phi\ \phi(x)$, где n_ϕ подбирается так, чтобы данная формула была истинна в стандартной модели. Выбор такого числа

n_ϕ опирается на важное свойство арифметики Бюхи, а именно, что любое определимое в рассматриваемом языке множество A является p-автоматным (т. е., множество p-ичных записей элементов A распознаваемо некоторым конечным автоматом).

[1] Alexander Zapryagaev, *Some properties of Büchi Arithmetics*, arXiv:2310.16019 [math.LO], 2023.

О группе вычислимых автоморфизмов порядка на вещественных числах

Корнев Руслан Александрович
Новосибирский государственный университет, МЦМУ в Академгородке
kornevrus@gmail.com

Изучаются алгебраические свойства группы $\mathrm{Aut}_c(\mathbb{R})$ вычислимых автоморфизмов линейного порядка $(\mathbb{R}, \leqslant)$ в сравнении с классической группой всех автоморфизмов этого порядка, а также группой $\mathrm{Aut}_c(\mathbb{Q})$ вычислимых автоморфизмов порядка на рациональных числах. Обсуждаются привычные для этой тематики вопросы в применении к $\mathrm{Aut}_c(\mathbb{R})$: показывается, что эта группа не является делимой, содержит в точности три нетривиальные нормальные подгруппы, а также содержит элемент, не сопряжённый со своим квадратом (т.о., критерий Холланда не выполняется в $\mathrm{Aut}_c(\mathbb{R})$).

Показывается, что $\mathrm{Aut}_c(\mathbb{R})$ содержит бамп, не сопряжённый со своим квадратом. Кроме того, любое вычислимо перечислимое вещественное число z реализуется в качестве верхней границы некоторого бампа из $\mathrm{Aut}_c(\mathbb{R})$. Эти свойства отличают $\mathrm{Aut}_c(\mathbb{R})$ от $\mathrm{Aut}_c(\mathbb{Q})$.

Также обсуждаются определимые в языке теории групп свойства $\mathrm{Aut}_c(\mathbb{R})$.

Теория обучения интеллектуальных систем

Нечесов Андрей Витальевич
Математический центр в Академгородке: ИМ СО РАН и НГУ
nechesov@math.nsc.ru
Соавторы: Сергей Гончаров

В докладе будет рассмотрена теория обучения интеллектуальных систем. Данная тематика взяла свое начало с двух довольно популярных логических направлений: концепции семантического программирования и концепции задачного подхода. В рамка этих двух концепций мы идем от понятия задачи, ее решения и эффективности решения в сторону построения систем искусственного интеллекта, в основе которых лежит логическое мышление. Это удается достичь за счет формализации понятия знания и иерархии знаний. Что позволяет строить динамические деревья знаний и, в конечном счете, эффективно выдавать финальный результат. Данная теория обучения может стать хорошей альтернативой нейронным сетям или усиливать и контролировать их в выдаче правильных ответов.

[1] Goncharov, S.; Nechesov, A. AI-Driven Digital Twins for Smart Cities. Eng. Proc. 2023, 58, 94. https://doi.org/10.3390/ecsa-10-16223

[2] Vityaev, E.E.; Goncharov, S.S.; Gumirov, V.S.; Mantsivoda, A.V.; Nechesov, A.V.; Sviridenko, D.I. Task approach: on the way to trusting artificial intelligence. WORLD CONGRESS SYSTEMS THEORY, ALGEBRAIC BIOLOGY, ARTIFICIAL INTELLIGENCE: Mathematical Foundations and Applications SELECTED WORKS. 2023. pp. 179-243, https://doi.org/10.18699/sblai2023-41

[3] Goncharov, S.; Nechesov, A. Semantic programming for AI and Robotics, SIBIRCON, 2022, pp. 810-815, https://doi.org/10.1109/SIBIRCON56155.2022.10017077

Семантика логики свидетельств первого порядка со связывающей модальностью

Попова Елена Леонидовна
НИУ ВШЭ
elpop.logics@gmail.com
Соавторы: Яворская Татьяна Леонидовна

Работа посвящена семантике логики свидетельств первого порядка. Пропозициональные логики свидетельств были введены С. Артемовым в [1]. Они сформулированы в расширении пропозиционального языка формулами вида t:F, где t — свидетельский терм, F — формула. Подразумеваемая семантика таких атомов "t является свидетельством F". Для таких логик изучена семантика в стиле Крипке и арифметическая семантика, а также их связь с модальной логикой [2].

Логика свидетельств первого порядка была введена в работе [3]. Свидетельские формулы t:F в этой логике доопределены таким образом, чтобы сделать возможным различие между локальными и глобальными параметрами. А именно, рассматриваются формулы вида $t :_X$ F, где X – список параметров (т. е. свободных переменных), которые являются глобальными, т. е., открытыми для подстановки.

В работе [3] описана логика доказательств первого порядка FOLP и арифметическая семантика для нее. Семантика в стиле возможных миров Крипке была описана в [4], там же доказаны полнота и корректность.

В нашей статье рассматривается логика доказательств первого порядка $FOLP^{\Box}$ в языке, расширенном модальностью Box, которая также допускает связывание параметров. Для этой логики мы описываем модели в стиле Фиттинга, доказываем полноту и корректность относительно этих моделей. В отличие от подхода, выбранного М.Фиттингом, мы описываем модели с терминах означивания свободных переменных, не используя расширение языка с помощью дополнительных констант. Это позволяет придать семантической значение формулам, содержащим свободные переменные. Главными результатами являются полнота и корректность логики $FOLP^{\Box}$ в описанной семантике.

[1] S.N. Artemov. Operational modal logic. Technical Report 95-29, Mathematical Sciences Institute, Cornell University, 1995.

[2] S.N. Artemov, M. Fitting, Justification Logic. Reasoning with reasons, Cambridge University Press, 2019.

[3] S.N. Artemov, T.L. Yavorskaya. On first order logic of proofs. Moscow Mathematical Journal, 1:475–490, 2001.

[4] M. Fitting. Possible world semantics for first-order logic of proofs. Annals of Pure and Applied Logic, 165(1):225–240, 2014.

Исчисление Ламбека с омега-итерацией

Пшеницын Тихон Григорьевич
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
tpshenitsyn@mi-ras.ru

Исчисление Ламбека — субструктурная логика, аксиоматизирующая инэквациональную теорию полугрупп с делениями; она находит применения в лингвистике для моделирования синтаксиса естественных языков. В литературе изучаются расширения исчисления Ламбека различными операциями. Одной из таких операций является итерация Клини, которую можно рассматривать как “конечную итерацию”: если R — это отношение, то R^* — его рефлексивное транзитивное замыкание, состоящее из n-кратных композиций R с собой для $n \in \mathbb{N}$. Исчисление Ламбека с итерацией Клини и с решеточными операциями называется логикой действий. В статье [1] вводится инфинитарная логика действий и доказывается, что задача выводимости в этом исчислении Π^0_1-полна.

Нами вводится и исследуется расширение исчисления Ламбека с помощью бесконечной итерации, или ω-итерации. Данная операция мотивирована теорией формальных языков с бесконечными словами. В рассматриваемой логике секвенции имеют вид $\Pi \vdash B$, где Π — либо конечная, либо бесконечная последовательность формул. Вводится правило сечения и доказывается его допустимость. Доказывается полнота исчисления Ламбека с ω-итерацией относительно реляционных моделей. Наконец, устанавливается нижняя оценка на сложность задачи выводимости для конечных секвенций в этом исчислении: показывается, что данная задача Π^1_2-трудна. Таким образом, исчисление с бесконечной итерацией оказывается существенно сложнее исчисления с конечной итерацией.

[1] Palka, E. (2007). An infinitary sequent system for the equational theory of *-continuous action lattices. Fundamenta Informaticae 78(2), 295–309.

Сложность пропозициональных доказательств

Разборов Александр Александрович
Чикагский университет; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
razborov@mi-ras.ru

Теория сложности пропозициональных доказательств преимущественно изучает вопросы существования эффективных (по отношению к различным моделям) доказательств бескванторных утверждений, представимых в языке логики высказываний. Несмотря на ограниченность такого языка, запас утверждений, к которым теория применима, достаточно велик: помимо традиционных "комбинаторных принципов" и других математических теорем, они появляются, помимо прочего, в комбинаторной оптимизации, теории SAT-решателей и исследовании операций.

В своём докладе я попытаюсь дать краткое введение в эту область и, если останется время, также расскажу о недавних результатах в этом направлении.

Проблемы выполнимости и допустимости многоагентных модальных логиках с мульти-означиваниями

Рыбаков Владимир Владимирович
Институт Математики и фундаментальной информатики, Красноярск, Сибирский Федеральный Университет
Vladimir_Rybakov@mail.ru

Мы изучаем реляционные Крипке-Хинтикка подобные модели, описывающие исследование информации на корректность и совместимость суждений агентов (о накопленной информации). Базой служат реляционные модели с мультиагентными отношениями достижимости и мульти-означиваниями истинностных значений информации. Соответственно, выбранный логический язык – это язык мульти-модальной логики модифицированной в указанном направлении. Предложенные правила вычисления истинности скомпонованных формул отличаются от стандартных в отношении того, что модальности могут переключать мульти-означивания. Концепция общепринятого знания, при таком подходе, претерпевает значительные изменения и отличается от трактовки сорта итерации S5-модальностей, принятой широка в начале исследования концепции общезначимости.

В техническом отношении, мы общепринято начинаем с проблемы разрешимости проблемы выполнимости и разрешимости самих предложенных логик. Найдено положительное решение указанных проблем и для введенных логик найдены алгоритмы разрешимости. Более трудная и интригующая часть состоит в попытках расширить такие результаты на алгоритмы распознающие допустимость правил вывода. Здесь нам удается расширить найденную ранее технику, включающую концепцию проективных подстановок, и найденную возможность абсорбирования внешних информационных состояний. Это позволяет в указанных случаях решить проблему допустимости.

Благодарности: Эта работа выполнена при поддержке фонда РНС (Проект – 23-21-00213).

Двусторонний вывод с режимом применения для зависимых типов с неявными аргументами

Соколов Павел Павлович
МФТИ
sokolov.p64@gmail.com

Системы типов с зависимыми типами, изначально применявшиеся в инструментах интерактивного доказательства теорем в качестве универсального логического основания, постепенно начинают вводиться в существующие языки программирования общего назначения или даже становятся основой для новых языков программирования с целью более тонкого контроля за поведением программы, уменьшения вероятности ошибки программиста и повышения его удобства.

Прежде всего, использование той или иной системы типов в языке выражается в компиляторе в виде алгоритма, разрешающего задачу типизации: имеет ли данное выражение t данный тип T? И, вообще говоря, в системах с зависимыми типами решение этой задачи нетривиально и в классическом варианте требует от программиста большого числа аннотаций типами, что мешает эргономике и загрязняет код. В данном докладе мы рассмотрим недавно появившуюся технику двустороннего вывода типов с режимом применения и применим её в построении системы с зависимыми типами с неявными аргументами, критическим образом сокращающую необходимое от программиста число аннотаций типов.

[1] Richard A. Eisenberg, *Dependent Types in Haskell: Theory and Practice* [Doctoral dissertation, University of Pennsylvania]. arXiv, 2017.

[2] Ningning Xie, Bruno C. d. S. Oliveira, *Let Arguments Go First*, Programming Languages and Systems. ESOP 2018. Lecture Notes in Computer Science. 10801 (2018), 272-299.

О нижних сложностных оценках в кванторной вероятностной логике

Сперанский Станислав Олегович
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
katze.tail@gmail.com

Доклад посвящён двум естественным обогащениям популярной бескванторной <<полиномиальной>> вероятностной логики из [1]. Одно из них, обозначаемое через $\mathrm{QPL}^{\mathrm{e}}$, получается посредством добавления кванторов по произвольным событиям, а в другом, обозначаемом через $\underline{\mathrm{QPL}}^{\mathrm{e}}$, используются кванторы по пропозициональным формулам (т.е. фактически по событиям, выразимым посредством таких формул). Предыдущие доказательства результатов о нижних сложностных оценках для $\mathrm{QPL}^{\mathrm{e}}$ и $\underline{\mathrm{QPL}}^{\mathrm{e}}$ сильно зависели от наличия умножения и, стало быть, от полиноминальности на бескванторном уровне; см. [2] и [3]. В настоящем докладе будет показано, как можно получить те же самые нижние оценки для фрагментов $\mathrm{QPL}^{\mathrm{e}}$ и $\underline{\mathrm{QPL}}^{\mathrm{e}}$, в которых допускаются лишь линейные комбинации весьма специального вида. Также мы обсудим, что происходит при добавлении кванторов по вещественным числам к $\mathrm{QPL}^{\mathrm{e}}$ и $\underline{\mathrm{QPL}}^{\mathrm{e}}$.

[1] R. Fagin, J. Y. Halpern, N. Megiddo. A logic for reasoning about probabilities. *Information and Computation* 87(1–2), 78–128, 1990.

[2 S. O. Speranski. Complexity for probability logic with quantifiers over propositions. *Journal of Logic and Computation* 23(5), 1035–1055, 2013.

[3] S. O. Speranski. Quantifying over events in probability logic: An introduction. *Mathematical Structures in Computer Science* 27(8), 1581–1600, 2017.

Элиминация кванторов для экзистенциальной арифметики Бюхи

Старчак Михаил Романович
Санкт-Петербургский государственный университет
`m.starchak@spbu.ru`

Доклад посвящён двум алгоритмам элиминации кванторов [1, 2], которые оперируют с экзистенциальными ($\exists$-)формулами арифметики Бюхи $\mathrm{Th}\langle\mathbb{N}; 0, 1, +, V_k, \leq\rangle$, где $k \geq 2$ есть некоторое фиксированное натуральное число, а V_k есть двухместный предикат, истинный в точности для пар $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, таких что y есть наибольшая степень k, делящая x.

В работе [1] впервые даётся полное описание множеств $S \subseteq \mathbb{N}$, определимых с помощью $\exists$-формул арифметики Бюхи. До этого результата было известно лишь, что не все k-регулярные предикаты являются $\exists$-определимыми [3]. Алгоритм элиминации кванторов из [1] пригоден и для доказательства принадлежности $\exists\mathrm{Th}\langle\mathbb{N}; 0, 1, +, V_k, \lambda x.2^x, \leq\rangle$ классу NExpTime. Однако, в результате совместной работы с Д. Чистиковым и А. Мансутти [2], удалось построить альтернативный алгоритм элиминации кванторов, который позволил доказать принадлежность указанной теории классу NP. Этот результат усиливает и обобщает принадлежность $\exists$-арифметики Бюхи классу NP [4] и $\exists$-арифметики Семёнова классу NExpTime [5]. На пути построения разрешающей процедуры из класса NP было получено доказательство принадлежности классической задачи целочисленного линейного программирования классу NP посредством элиминации кванторов.

[1] M. Starchak, *Existential Definability of Unary Predicates in Büchi Arithmetic*, In CiE, 2024.

[2] D. Chistikov, A. Mansutti, and M. Starchak, *Integer Linear-Exponential Programming in NP by Quantifier Elimination*, In ICALP, 2024.

[3] C. Haase, J. Różycki, *On the Expressiveness of Büchi Arithmetic*, In FoSSaCS, 2021.

[4] F. Guépin, C. Haase, and J. Worrell. *On the Existential Theories of Büchi Arithmetic and Linear p-adic Fields*, In LICS, 2019.

[5] M. Benedikt, D. Chistikov, and A. Mansutti, *The Complexity of Presburger Arithmetic with Power or Powers*, In ICALP, 2023.

Структуры на сигнатурах структур

Стукачев Алексей Ильич
Новосибирский государственный университет
aistu@math.nsc.ru

В математической лингвистике слова естественного языка используются как символы (или знаки) для обозначения сущностей, свойств сущностей, свойств свойств сущностей и т. д. Совокупность этих слов, символов или знаков образует лексикон или сигнатуру. Однако это не просто множество, на нем существует определенная структура. Например, каждое слово имеет грамматическую категорию (иногда две и более), обладать монотонностью разной направленности и т. д.

В докладе рассматриваются проблемы сложности структур такого типа в терминах Σ-определимости и Σ-сводимости [1], и обсуждаются некоторые новые результаты из [2, 3, 4].

[1] A.I. Stukachev, *Effective model theory: an approach via Sigma-definability*, Lecture Notes in Logic, 41 (2013), 164-197.

[2] A.S. Burnistov, A.I. Stukachev, *Generalized computable models and Montague semantics*, Studies in Computational Intelligence, 1081 (2023), 107-124.

[3] A.S. Burnistov, A.I. Stukachev, *Computable functionals of finite types in Montague semantics*, Lecture Notes in Computer Science (to appear).

[4] A.I. Stukachev, U.D. Penzina, *Skolem functions and generalized quantifiers for negative polarity items semantics*, Lecture Notes in Networks and Systems (to appear).

Минимальные нумерации вычислимых и обобщенно вычислимых семейств

Файзрахманов Марат Хайдарович
Региональный научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа, Казанский (Приволжский) федеральный университет
marat.faizrahmanov@gmail.com

В докладе рассматриваются минимальные вычислимые и обобощенно вычислимые в рамках подхода С. С. Гончарова и А. Сорби нумерации счетных семейств подмножеств натурального ряда. Излагаются результаты о возможных спектрах минимальных нумераций (обобщенно) вычислимых семейств, о совместимости свойств минимальности с другими распространенными в литературе свойствами нумераций — свойства полноты, предполноты, слабой предполноты и т.д. Рассматриваются известные важные подклассы минимальных нумераций, такие как однозначные (фридберговы), разрешимые и позитивные нумерации.

Абелева периодичность морфических слов

Филимонова Арина Николаевна
СПбГУ
arina4filimonova@gmail.com
Соавторы: С. А. Пузынина

Цель настоящего исследования — дать характеризацию морфизмов над конечным алфавитом, порождающих абелево периодические слова. Два слова u и v называются *абелево эквивалентными*, если в слове u можно переставить местами буквы так, чтобы получилось слово v. Слово w называется *абелево периодическим*, если w представляет из себя конкатенацию абелево эквивалентных слов. Говоря об абелево периодичских бесконечных словах, мы будем допускать наличие предпериода, то есть условие абелевой периодичности должно начинаться с некоторого индекса.

Морфизмом называется эндоморфизм на множестве слов, сохраняющий конкатенацию. Если морфизм f нестирающий, то есть образ никакого слова не пуст, и образ некоторой буквы a начинается с a и имеет длину больше двух, то говорят, что морфизм порождает бесконечное слово $w = \lim_{n\to\infty} f^n(a)$. Построение бесконечных слов с помощью морфизмов является одной из основных конструкций бесконечных слов в комбинаторике слов. Одним из ее преимуществ является возможность порождать слова быстро.

Всякому морфизму f над алфавитом $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ ставится в соответствие матрица $M(f)$ размера $n \times n$, коэффициенты которой таковы: m_{ij} равно количеству вхождений буквы a_i в слово $f(a_j)$. Обозначим собственные числа такой матрицы за $\theta_1,\ \theta_2\ \dots, \theta_n$ (числа пронумерованы в порядке убывания их модуля). В терминах такой матрицы можно, в частности, получить некоторые необходимые условия абелевой периодичности.

Получены следующие результаты. Во-первых, задача решена для бинарных равноблочных (образы букв имеют равную длину) морфизмов:

Теорема 1. *Пусть f равноблочный морфизм над бинарным алфавитом. Тогда морфическое слово $f^{\omega}(a)$ абелево периодично в следующих случаях и только в них:*

1. *Морфизму f соответствует матрица с $\theta_2 = 0$, то есть матрица вида $\begin{pmatrix} A & A \\ B & B \end{pmatrix}$;*
2. *Морфизм f имеет вид $f(a) = a(ba)^k$, $f(b) = b(ab)^k$ для некоторого k.*

Для неравноблочных бинарных морфизмов получен ряд необходимых и ряд достаточных условий абелевой периодичности. Для произвольных бинарных морфизмов остаётся неразобранным только случай $\theta_2 = 0$, то есть не получена характеризация абелевой периодичности морфизмов, которым отвечают матрицы вида $\begin{pmatrix} A & \alpha A \\ B & \alpha B \end{pmatrix}$.

Результаты получены совместно с С. А. Пузыниной.

О нефундированных доказательствах

Шамканов Данияр Салкарбекович
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
daniyar.shamkanov@gmail.com

В последнее десятелетие явно возрос интерес к дедуктивным системам, допускающим циклические и более общие нефундированные выводы. Данного рода системы возникают при изучении логик, отражающих различные аспекты индуктивных рассуждений, а также в области логик доказуемости. Стоит напомнить, что нефундированные выводы представляют собой произвольные, возможно бесконечные, деревья формул (или секвенций), построенные по заданным правилам вывода. Обычно на бесконечные ветви нефундированных выводов дополнительно накладывают различные условия для обеспечения корректности. С точки зрения струкутрной теории доказательств естественно возникает вопрос о нормализации выводов в нефундированных системах. Несколько лет назад нами совместно с Ю.В. Саватеевым был предложен подход к устранению сечения в данных системах с привлечением теоремы о неподвижной точке для сжимающих отображений из непустых сферически полных ультраметрических пространств в себя. Мы рассмотрим, как работает этот подход на примере модальной логики транзитивного замыкания K^+. Если позволит время, то мы также обсудим семантику нефундированных систем на примере модального исчисления предикатов QGL с нефундированными доказательствами. Недавно вместе с П.М. Разумным мы показали, что данное исчисление является полным относительно топологической семантики, в то время как исходная система без нефундированных доказательств неполна.

Математическое образование и просвещение

Популяризация математики в России

Андреев Николай Николаевич
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поговорим об образованности и ориентирах общества, математическом образовании и необходимости популяризации математики сквозь призму времени. Начав с последней четверти XIX века, обсудим первую четверть века XXI.

О содержании и результатах диагностики математического мышления школьников на переходе из начальных классов в основную школу

Аронов Александр Моисеевич и Знаменская Оксана Витальевна
Московский городской педагогический университет, Сибирский федеральный университет

aronovam@mgpu.ru;ovznamenskaya@sfu-kras.ru

Рассматривается подход к математическому мышлению как системе средств организации математической деятельности. В основе этого подхода лежит трехуровневая модель "Дельта", позволяющая диагносцировать понимание и рефлексию при решении школьниками математических задач. Будут представлены результаты диагностики школьников 4–6 классов и дан анализ этих результатов с точки зрения выявления мыслительных средств, необходимых для освоения математических способов решения. Указаны риски на переходе из начальных классов в основную школу, связанные с дефицитами мышления учеников в понятиях начальной школы. Полученные данные диагностики позволяют проектировать дифференцированное обучение, применять методы индивидуализации и персонализации.

О развитии навыков коммуникации в области математики у обучающихся старших классов на занятии в игровом формате

Бегунц Александр Владимирович
МЦМУ "Московский центр фундаментальной и прикладной математики"
alexander.begunts@math.msu.ru

Разработана методика проведения занятий с группой обучающихся старших классов, позволяющая за счет привлечения игрового формата развить у участников навыки коммуникации в области математики.

"Внутренний диалог", являясь одной из основных форм мышления, в том числе математического, формируется посредством интериоризации коммуникативных форм межсубъектного взаимодействия. Известно, что совместное обсуждение и поиск решений математических задач являются мощным средством развития интеллектуальных способностей старшеклассников и содействуют повышению их интереса к изучению предмета (см., например, [1]). В то же время зачастую организованная коммуникация в области математики обучающихся в школе практически отсутствует, а стихийная сводится к бездумному переписыванию у одноклассников заданных на дом заданий.

Помимо регулярных и системных мероприятий, направленных на задействование коммуникативного ресурса в течение учебного года, сотрудниками лаборатории "Современные образовательные технологии в математике" МЦМУ "Московский центр фундаментальной и прикладной математики" разработаны и апробированы в рамках внеурочных мероприятий (см. [2]) игровые форматы проведения учебных занятий, содействующие развитию навыков коммуникации школьников в области математики.

Представим один из этих форматов. Школьники разбиваются на команды так, чтобы в каждой команде были представители нескольких последовательных классов (например, 8, 9 и 10). Всем командам выдаются одинаковые комплекты заданий, после чего команды одновременно приступают к их выполнению. Жюри принимает выполненное задание устно от одного из членов команды. Этот участник имеет право взять с собой и опираться на написанный им текст решения задачи и обязан давать устные пояснения по требованию члена жюри. Система начисления баллов организована так, что команде выгоднее, чтобы решали задачу старшеклассники (это увеличивает количество решенных задач), а рассказывал ее решение жюри младшеклассник (это увеличивает количество баллов за каждую задачу). В результате возникает ситуация необходимости коммуникации между учащимися, не просто транслирующей текст решения, а обеспечивающей понимание самого решения.

Об этом формате, методике его применения и результатах апробации и пойдет речь в докладе.

[1] Зильберберг Н. И. Приобщение к математическому творчеству. Уфа: Башкирское книжное издательство, 1988. 96 с.

[2] Бегунц А. В., Гашков С. Б., Татаринова Е. Я. Зимние и летние школы классов при мехмате МГУ // Потенциал. Математика. Физика. Информатика. 2023. № 1. С. 17–24.

Алгебраические структуры в музыке

Благовещенская Екатерина Анатольевна
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I
kblag2002@yahoo.com
Соавторы: Александр Костроминов, Евгений Спиридонов

Найдены различные способы формализации музыкальных построений, которые дают возможность анализировать существующие в них внутренние закономерности и формулировать их в терминах алгебраических структур. Среди многочисленных связей музыки и математики существуют формальные связи, близкие к фундаментальной алгебре и обусловленные достаточно жесткой структурой музыкальных построений. Как известно, в алгебре с помощью операций и соотношений между элементами, подчиняющихся определенным законам, задаются связи на элементах множеств, которыми определяются различные алгебраические структуры. Поскольку природа самих элементов не важна, при осуществлении данного подхода допускается его распространение на множества элементов различной природы, в том числе, на звуки. Мы ограничимся звуками дискретной системы, создаваемыми при игре на фортепиано. При этом делается теоретическое предположение об идеальной ситуации, в которой акустический интервал октава равномерно делится на 12 полутонов. Музыкальный фрагмент (произведение) может рассматриваться как элемент множества с двумя алгебраическими операциями: сложение (коммутативная операция, заключающаяся в одновременном звучании нот, создающим аккорд) и умножение (некоммутативная операция, заключающаяся в последовательном звучании отдельно взятых нот или аккордов). Образующими данной структуры являются сами ноты. Коммутативность первой операции и ассоциативность обеих позволяют рассматривать данную структуру как квази-кольцевую структуру. Добавление временной характеристики (длительности звучания), превращает данную структуру в предалгебу, в которой определено умножение на элементы некоторого числового множества. Таким образом, имеет место скрытое математическое моделирование при создании музыкальных произведений, благозвучность которых не учитывается в данной модели. Для удовлетворения этого требования можно использовать добавление некоторых ограничений. Однако, подчеркнем, что формализация языка музыки не включает такую важную составляющую как талант композитора, обладание которым недоступно искусственному интеллекту.

О понятии математической грамотности

Боровских Алексей Владиславович
МГУ имени М.В.Ломоносова
aleksey.borovskikh@math.msu.ru

Математической грамотностью называется интеллектуальная способность, состоящая во владении математическими знаковыми средствами и проявляющаяся в решении задач с использованием этих средств. Она обеспечивает выстраивание отношения между задачей, сформулированной на общеупотребительном или профессиональном языке, и задачей математической. В состав математической грамотности входят:

- анализ задачи и выделение необходимых данных;
- схематизация основных отношений между этими данными;
- поиск таких же математических отношений и перенос на них данных задачи;
- формулировка, с помощью схемы, математической постановки задачи;
- решение математической задачи в рамках той или иной системы операций со знаковыми средствами;
- переход, при необходимости, от одной знаковой системы к другой (например, от алгебраической к графической и обратно);
- формулировка ответа для математической задачи;
- интерпретация ответа и, при необходимости, промежуточных результатов, на схеме;
- формулировка ответа на исходную задачу в терминах этой задачи и оценка соответствия ответа смыслу задачи.

Математическая грамотность характеризуется:

- набором освоенных знаковых средств и способов их использования;
- классом решаемых задач.

[1] Боровских А.В. *О понятии математической грамотности*, Педагогика, 86 (2022), 3, 33–45.

Изменение целей математического образования в контексте развития цифровых технологий

Вдовин Евгений Петрович
Тюменский государственный университет
`e.p.vdovin@utmn.ru`

В предлагаемом докладе мы различим на принципиальном уровне несколько тактов действий человека в ситуации достижения какой-либо цели (примеры таких различений приведены в [1] и [2]). На основании сформированного различения мы покажем, как выглядят текущие цели массового математического образования, сформулируем тезис о том, что в сложившейся технологической ситуации все эти цели сейчас закрывают цифровые технологии. После этого будут сформулированы те цели, которые более соответствуют сложившейся технологической ситуации. Завершим доклад примерами из практики автора и его команды по перестройке математического образования в соответствии с новыми целями.

[1] Werner Blum, Rita Borromeo Ferri, *Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt?*, Journal of Mathematical Modelling and Application, 1 (2009), No. 1, 45–58.

[2] А.В. Боровских, *О понятии математической грамотности*, Бедагогика, 86 (2022), 36 33–45.

Выборочный анализ статистики ОГЭ и ЕГЭ по математике

Воронов Всеволод Александрович
Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
`v-vor@yandex.ru`

Статистические данные, которые обрабатывают Федеральный институт педагогических измерений и Рособрнадзор по результатам государственной итоговой аттестации в 9 и 11 классах школы, к сожалению, лишь частично являются открытыми. Далеко не все регионы публикуют статистические отчеты, и не всегда статистический отчет по единой форме доступен для страны в целом. Деперсонифицированная база результатов ОГЭ/ЕГЭ доступна лишь на информационных ресурсах отдельных регионов. Анализ статистики затрудняется, кроме того, запретом на публикацию контрольно-измерительных материалов, не имеющим срока давности. Тем не менее на основе неполных данных можно сделать ряд любопытных наблюдений.

1. Для Сибири и Дальнего Востока типичны сравнительно низкие результаты по профильной математике в сравнении с регионами Европейской части. Это не всегда может быть объяснено различным уровнем социально-экономического развития регионов.
2. Из тех регионов, для которых статистика доступна, наилучшие показатели по профильной математике имеет Татарстан.
3. В 2021-м году средний балл ЕГЭ по профильной математике в Москве был ниже, чем в среднем по России.
4. В нескольких регионах на графике распределения баллов ОГЭ по математике наблюдается резкое падение числа участников при переходе от 19 первичных баллов к 20 (граница первой части ОГЭ).
5. В статистических отчетах редко указывают процент двоек, полученных в основной период (без учета пересдач).

Учебный курс “Культура математических рассуждений” для студентов-программистов в техническом вузе

Герасимов Александр Сергеевич
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
alexander.s.gerasimov@ya.ru

Представляется учебный курс “Культура математических рассуждений”, введенный автором доклада для студентов, обучающихся по направлению подготовки “Фундаментальная информатика и информационные технологи” в Санкт-Петербургском политехническом университете. Целью этого курса является систематическое освоение базовых приемов математических рассуждений, что нужно по меньшей мере для доказательства корректности алгоримов, которые изучаются в последующем курсе “Алгоритмы и анализ сложности”, также читаемом автором доклада. На курс “Культура математических рассуждений” отведено 30 академических часов практических занятий, включающих в себя элементы лекции. Большая часть этого курса посвящена изучению исчисления натуральных выводов в стиле С. Яськовского, построению формальных доказательств (или выводов) в этом исчислении и построению неформальных (или содержательных) доказательств, близких по структуре к формальным. Также в данном курсе систематизируются базовые понятия и факты теории множеств; изучаются метод возвратной индукции (применяемый, в частности, для доказательства корректности рекурсивных алгоритмов) и метод инвариантов циклов для доказательства корректности алгоритмов,содержащих циклы.

Использование балльно-рейтинговой системы для геймификации учебного процесса

Даровская Ксения Александровна
Первый МГМУ имени И. М. Сеченова, Российский университет дружбы народов
k.darovsk@gmail.com

Геймификацию можно определить как “использование игровых элементов в неигровых ситуациях” (К. Вербах). Основной целью применения игровых технологий в образовании мы будем считать рост вовлеченности обучающихся в учебную деятельность.

Балльно-рейтинговую систему (БРС), часто сопряженную ECTS (European Credit Transfer and Accumulation System), можно рассматривать как инструмент формализации отметки. В настоящем докладе планируется обсудить приемы использования БРС, позволяющие геймифицировать процесс обучения математике в вузе и школе.

Что данные национальных оценочных процедур говорят о качестве математического образования в школе

Денисенко Илья Сергеевич
ФГБУ Федеральный институт оценки качества образования
ilya.denisenko@gmail.com

Мероприятия по оценке качества образования (МОКО) позволяют получать данные о качестве математической подготовки в российских школах. Анализ данных способствует выявлению ограничений, с которыми российские школьники из разных образовательных организаций сталкиваются при изучении математики; позволяет определить факторы, способствующие развитию математических навыков, оценивать влияние углубленного изучения математики на уровень обученности, находить практики преодоления контекстных вызовов, и изучать связь результатов освоения школьной программы по математике с дальнейшей образовательной траекторией обучающихся. Изучение получаемых от МОКО данных позволяет формулировать и уточнять запрос на развитие математического просвещения в общеобразовательной школе.

Неосократический диалог в обучении стереометрии

Дзюба Марина Витальевна
Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена
marinafrolova25@mail.ru

Во время доклада будут описаны основные принципы метода неосократического диалога при обучении стереометрии. Отдельное внимание будет уделено отличиям этого метода, от известного проблемного обучения в педагогике. Особый акцент будет сделан на проблемно-диалогической форме работы с учащимися, разработанной в трудах Е. Л. Мельниковой.

Центральным вопросом станет описание методики применение метода неосократического диалога на заключительном этапе решения стереометрических задач с использованием опорных конструкций и метода варьирования задач, который поможет создать живое исследование на уроках геометрии.

Использование платформы GeoLin для проведения ранжирующего теста с целью определения уровня освоения дисциплин математического цикла в высшей школе

Ершов Александр Романович
Университет ИТМО, НОЦ Математики
alex2002andr@mail.ru

В работе представлена информация о том, как в Университете ИТМО проводится тест на определение уровня знаний математики у студентов первого курса. Представлено описание возможностей платформы GeoLin, структура теста. Представлена аналитика результатов теста 2023 года. Показано решение таких задач как составление портрета целевой аудитории, алгоритм подбора задач. Приведены пример заданий для теста и данные, полученные в ходе тестирования, которые используются для дальнейшей аналитики.

[1] Математика. Адаптационный курс : учеб. пособие / ЗЕНШ при СФУ; сост. : А.М. Кытманов, Е.К. Лейнартас, С.Г. Мысливец. — Красноярск ИПК СФУ, 2009. — 196 с.

[2] Математика и математическое образование: проблемы, технологии, перспективы. Материалы 42-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Смоленск, 2023. С. 170-173.

Большая математическая мастерская: итоги потока “Образование”

Карпенко Анастасия Валерьевна
Новосибирский государственный университет, НГУ
anastasia.v.karpenko@gmail.com
Соавторы: Абдыкеров Жанат Сергеевич

Большая математическая мастерская (БММ) — научно-образовательное мероприятие, в рамках которого команды школьников, студентов и педагогов при сопровождении кураторов в интенсивном формате работают над решением реальных задач, имеющих математическую составляющую.

БММ реализуется с 2020 года. В 2024 году площадками для проведения Мастерской выступили: Математический центр в Академгородке, Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Региональный научно-образовательный математический центр Томского государственного университета, Региональный научно-образова-тельный математический центр Адыгейского государственного университета — “Кавказский математический центр” и Школа компьютернаых наук Тюменского государственного университета.

С момента создания БММ приросла не только количественно, но и качественно: в 2021 появился школьный поток, а с 2022 года Мастерская набирает проекты в области образования. Реализация в параллели потоков для школьников и педагогов позволяет педагогам за время Мастерской планировать и проводить полноценные эксперименты, а также обобщать полученный опыт.

Так, например, команда проекта <<Исследовательские блуждания по стереометрической задаче>> в рамках первого модуля проработала концепт применения метода работы с задачной ситуацией, дважды аппробировали его на школьниках, а затем обобщила результаты в виде заметки об использовании метода при решении стереометрических задач.

Другим примером результата проекта является полноценная потенциально коммерциализуемая игра “Геоформы”, геймифицирующая изучение школьного курса геометрии 7-9 классов. Игра разработана помандой проекта “Использование игровых инструментов в преподавании математики”, аппробирована на БММ и представлена на Августовской конференции в г. Томске в 2023 году.

В рамках доклада будет представлен концепт реализации потока “Образование” на Большой математической мастерской, а также результаты, которых удалось добиться командам проектов.

Вариативный виток спиральной модели как средство развития математического мышления школьников

Картвелишвили Татьяна Александровна
МГУ им. М.В.Ломоносова
tgs497@gmail.com
Соавторы: Сергеев Игорь Николаевич

В последнее время все большее развитие получают учебные программы по математике, построенные на основе дидактической спирали. Как известно, спиральная модель включает в себя семь основных витков. Но особый интерес представляет собой финальный — вариативный виток. Именно на нем происходит настоящее развитие и формирование математического мышления школьников. Переходя на вариативный виток, обучающийся сталкивается с нетривиальной для него задачей — выбором наилучшего подхода к решению сложных и нестандартных задач. И именно тут они окончательно уходят от действий по "алгоритму", испытывая на себе акт дифференциации и получая средства для решения необходимых математических проблем.

Как правило, рассматриваются четыре основных подхода: алгебраический, логический, функциональный и графический, но если подумать, то можно добавить еще и арифметический, комбинаторный, вероятностный и топологический подходы. В данном докладе, помимо анализа всего вариантивного витка, мы особо остановимся на логическом подходе и его преиуществах. Ведь, согласно Пиаже, именно логика является единственным и главным критерием мышления, таким образом, развитие логики и математического мышления неотделимо связаны друг с другом.

Развитие математического мышления у студентов — одна из целей их математического образования

Кленина Людмила Ивановна

Рассматривается роль математического мышления студентов в системе их математического образования. Отмечено снижение численности студентов вузов, обучающихся по направлениям, требующих развитого математического мышления. Описаны логические формы как одного из компонентов зоны дальнего развития, предложенного Л.С. Выготским. В заключении отмечено, что достаточно часто студенты младших курсов покидают вуз ещё до начала экзаменационной сессии и не попадают в зону их дальнего развития. И делается вывод о том, что развитие математического мышления у студентов должно стать одной из целей их математического образования в вузах.

Система каскадно-водопадного обучения на примере матричной алгебры и генетических технологий

Лисица Андрей Валерьевич
ФГАОУ ВО "Тюменский государственный университет"
lisitsa052@gmail.com
Соавторы: Андреюк Денис Сергеевич, Российская ассоциация содействия науке (РАСН); Козлова Анна Сергеена, ФГБНУ "Научно-исследовательский институт биомедицинской химии имени В. Н. Ореховича" (ИБМХ)

Рассматриваются результаты применения системы "Таблекс" (разработчик — ООО "КуБ") на базе Центра научно-практического образования ИБМХ с 2021 по 2024 г. Система [1] предоставляет возможность организации научных кружков для школьников и студентов. Проведены следующие курсы: генетические технологии (сборка геномов), анализ широкомасштабных протеомных и метаболомных данных, 3D моделирование белков, с применением облачных технологий Яндекс-Клауд. Математическое мышление формируется с использованием стандартных модулей Питона — а именно гистограмм, диаграмм Венна, методов распознавания образов, анализ главных компонент, дисперсионный анализ.

Особенностью методологии преподавания в системе "Таблекс" является парное программирование, где есть роли пилота, штурмана и инструктора. Пилоты и штурманы, достигая уровня инструктора, вовлекаются в систему монетизации и школьник может заработать до 500 рублей в день. Результатом такого подхода являются команды, которые обновляют кадровый состав при реализации федеральных программ, связанных с генетическими технологиями и применением искусственного интеллекта. Общая логика построения кадрового резерва предложена в рамках системы "Кванториум".

[1] http://oookub.ru/tablex-main.html "Таблекс - каскадно-водопадная система обучения" св. о рег. программы для ЭВМ №2022685715 от 27.12.2022.

О развитии математического мышления преподавателей Малого мехмата

Мелешкина Анна Владимировна
МЦМУ "Московский центр фундаментальной и прикладной математики"
anna.meleshkina@math.msu.ru
Соавторы: Лисицын Михаил Денисович

Малый мехмат МГУ — это система математических кружков для школьников 5-11 классов при механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова.

В рамках тематических занятий ученики знакомятся с новыми математическими понятиями, идеями, конструкциями, выполняют решение соответствующих задач и демонстрируют результат преподавателям.

Старшими преподавателями на Малом мехмате являются сотрудники и выпускники разных кафедр механико-математического факультета, но значимую помощь им оказывают студенты и аспиранты, которые в ходе своей работы заблаговременно знакомятся с подготовленным материалом по новой теме (теоретической частью и задачами) и осуществляют во время занятий коммуникацию со школьниками по поводу решений, а также фактов из математики, которые могут не относиться прямым образом к теме занятия.

Замечено, что такая деятельность приводит к изменению мышления преподавателей, в частности, связанному с математическими мыслительными средствами и способами их применения. Например, анализируя предварительное авторское решение некоторой задачи, студент может не только познакомиться с новым способом использования какого-то отношения между математическими объектами, но и задуматься о том, какие изменения, сохраняющие общую правильность, допускает предложенное решение, где проходят границы данного способа. Ведь если преподаватель, учитывая, что ему предстоит оценивать потенциально разнообразные решения школьников, захочет заранее подготовиться к разным вариантам, то ему следует увидеть в предложенном тексте не просто последовательность действий, нацеленных на определённый результат, а лишь одну из таких возможных последовательностей.

В докладе, подготовленном исполнительным директором и руководителями параллелей Малого мехмата, будут представлены результаты анализа соответствующих изменений, полученные на основании работы в течение учебного года.

Структура математического образования для IT-специальностей в Университете ИТМО

Москаленко Мария Александровна
НОЦ Математики Университета ИТМО
moskalenko.mary@gmail.com
Соавторы: Табиева Арина Вадимовна, Трифанов Александр Игоревич

В докладе будет представлена структура математического образования для IT-специальностей Университета ИТМО. В современных реалиях выпускник, чтобы быть востребованным специалистом на рынке труда, должен обладать набором уникальных компетенций, что возможно только при персонифицированном образовательном треке. Персонификация образования возможна только при наличии понятных критериев, отвечающих современным требованиям стандартов математических дисциплин. Критерии позволяют сформировать единую образовательную среду, которая предоставляет одинаковые возможности каждому студенту и соответствует следующим потребностям обучающихся: получение качественного образования, защита от перегрузок, сохранение психического и физического здоровья. В рамках образовательной системы, созданной благодаря критериям, возникает преемственность образовательных программ на разных ступенях образования, что вкупе с инструментами обратной связи между студентами и педагогами позволяет выйти на новый уровень качества математического образования.

Проблема систематических ошибок в освоении темы “Площадь” по результатам мониторинга на платформе “Учи.ру”

Москаленко Ольга Борисовна
ООО “Учи.ру”
Olga.b.moskalenko@yandex.ru

В начальной школе учащиеся знакомятся с рядом величин, одной из которых является площадь. В рамках этой темы изучаются способы сравнения и измерения площадей фигур, понятие квадратного сантиметра и другие единицы измерения площади, а также правило нахождения площади прямоугольника по известным длинам его сторон. В 2021-2022 учебном году задачи на тему “Площадь” были предложены ученикам 4 и 6 классов в рамках мониторинга на платформе “Учи.ру”. Каждую из этих задач решали более 30 тысяч учащихся. Анализ результатов мониторинга, полученных на столь большой выборке, позволяет, во-первых, отличить систематические ошибки учащихся от случайных, а во-вторых, рассматривать в качестве основного фактора влияния методику изложения темы “Площадь” в учебниках для начальной школы. Это ставит проблему о выявлении тех дефектов методики обучения, которые привели к совершению учащимися систематических ошибок в задачах мониторинга. Цель исследования состояла в том, чтобы выяснить, представлены ли в учебниках для начальной школы все составляющие, необходимые для успешного решения задач мониторинга, и если представлены, то в какой мере. Рассмотрены три УМК из Федерального перечня, и для каждого из них обоснована необходимость применения учителем дополнительных упражнений к тем, что представлены в учебнике, а также предложены источники, в которых содержатся недостающие упражнения.

[1] Боровских А.В. О понятии математической грамотности // Педагогика. 2022, Т. 86. № 3. С. 33-45.

[2] Вертгеймер М. Продуктивное мышление. М.: Прогресс, 1987.

[3] Эльконин Б.Д. Строение действия и периодизация Д.Б. Эльконина // Деятельностный подход в образовании: монография. Книга 3 / Составитель В.А. Львовский. М.: Некоммерческое партнерство “Авторский Клуб”, 2020. С. 104-117.

О математической визуализации в образовательном процессе

Никитин Алексей Антонович
МГУ им. М. В. Ломоносова, факультет ВМК
nikitin@cs.msu.ru

Настоящая работа посвящена вопросу использования современных информационных технологий в аудиторном образовательном процессе. В ней подчёркивается необходимость объединения символьной и визуальной математики, описываются проблемы, связанные с этим вопросом, делается обзор существующих систем и определяются требования, которым должна удовлетворять современная система визуализации. В работе обсуждаются существующие наработки, созданные командой авторов. Описывается работа библиотеки визуализаций visualmath.ru. Этот ресурс содержит объёмный архив текстовых и визуальных модулей, на основе которых преподаватели смогут создавать свои лекции-презентации, снабжённые большим количеством визуальных материалов. Другой важнейшей частью доклада является описание работы быстрых и мощных графических JavaScript-библиотек: Skeleton и Grafar. Первая из этих библиотек предназначена для отображения двумерных графиков и способна обрабатывать очень большие массивы элементов за исключительно короткое время, а вторая позволяет визуализировать красивейшие трёхмерные объекты, прорабатывать их освещённость, прозрачность и т.п. В заключении приводится ряд примеров использования вышеописанных библиотек. Демонстрируются уже созданные визуализации для курсов математического анализа и аналитической геометрии.

[1] Karpov A. D., Klepov V. Y., Nikitin A. A. On mathematical visualization in education // Communications in Computer and Information Science. — 2020. — Vol. 1140, no. 1. — P. 11–27.

Математическое образование: Тревожность или Восторженность?

Семенов Алексей Львович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, РФ; Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена
alsemenov@math.msu.ru

Во всем мире, в том числе, и в России, в частности, на заседании Президиума РАН, обсуждается вопрос о математической тревожности. Конечно, имеется в виду прежде всего тревожность обучающихся. Притом обсуждаемая тревожность отличается от филологической, исторической, химической и пр.

В докладе предлагается гипотеза о том, что (школьная) математическая тревожность не вытекает непосредственно из природы математического знания, оставим в стороне предположение о ее генетической предопределенности. Она связана с тем, каким образом формулируются цели математического образования и какими путями они достигаются.

Перестанем требовать от ребенка скорость и безошибочность в решении задач по заученному алгоритму. Предложим ему решать неожиданную задачу – задачу, которую неизвестно, как решать [1]. Такие задачи человечество изобретало и предлагало детям и взрослым в течение тысячелетий. Сегодня они составляют основу олимпиады «Кенгуру», во многом сформированную Марком Ивановичем Башмаковым.

Предложение ученику интересных задач, которые неизвестно, как решать, естественно сочетается с расширением круга рассматриваемых математических объектов и конструкций. Они возникают в контексте «традиционных занимательных», «олимпиадных» задач.

Такое построение математического образования восходит к школе Лузина, математическим олимпиадам и кружкам матклассам системы Н. Н. Константинова [2],

С конца 1980-х гг. автор настоящего доклада вместе со своими коллегами реализует данный подход в учебниках по математике и информатике для начальной школы, используемых в сотнях российских школ.

[1] E.J. Barbeau, P.J. Taylor (eds.). Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. *The 16th ICMI Study,* New ICMI Study Series, v. 12 (2009). Springer Science + Business Media, LLC, 336 p. DOI: 10.1007/978-0-387-09603-2.

[3] Н.Н. Константинов, А.Л. Семенов Результативное образование в математической школе. *Чебышёвский сборник,* 22(1) (2021), 413–446.

Создание благоприятной психологической обстановки на занятиях в группах

Смирнова Вера Андреевна

В докладе рассматривается методика комфортного общения со студентами, направленная на повышения среднего балла группы на экзамене. Она разработана на основе 30-летнего педагогического опыта автора и анализа отзывов студентов разных вузов в интернете.

1. Постановка задачи.
2. Приоритеты.
3. Чего нельзя делать.
4. Как добиться сдачи индивидуальных заданий вовремя.
5. Организация успешного написания контрольных.

6. Взаимоотношения преподавателя и студентов.
7. О чем говорить не стоит.
8. Об организации экзамена.
9. Заключение.

Математический анализ и теория чисел в высшей школе

Чубариков Владимир Николаевич
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
chubarik2020@mail.ru

В сообщении предполагается дать взгляд на опыт преподавания математического анализа и теории чисел на механико-математическром факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

О введении бесконечно-малых в курсе матанализа

Щепин Евгений Витальевич
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
scepin@mi-ras.ru

В докладе изложен подход к введению и активному использованию актуально бесконечно-малых величин в начальном курсе математического анализа, который достаточно строг и хорошо адаптирован к применениям в физике и геометрии. Для описания дифференциалов функций одной переменной используются числа, известные под именем *дуальных*, которые автор предпочитает называть *числами двойной точности*, мотивируя это название компьютерной аналогией. Числа двойной точности представляют собой минимальное неархимедово расширение действительных чисел. А именно, к полю действительных чисел добавляется один "идеальный"бесконечно-малый элемент, обозначаемый $\sqrt{0}$, который положителен но имеет нулевой квадрат. В результате возникает линейно упорядоченное кольцо чисел вида $a + b\sqrt{0}$ с интуитивно понятными операциями сложения и умножения. Для определения значений трансцендентных функций на числах двойной точности достаточно постулировать, что все известные для них нестрогие неравенства для действительных чисел остаются справедливыми для чисел двойной точности.

Связь с теорией пределов обеспечивается следующей моделью построения чисел двойной точности. Действительные числа интерпретируются как постоянные последовательности. $\sqrt{0}$ интерпретируется как монотонная стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел o_n. А числа двойной точности интерпретируются как сходящиеся последовательности x_n, такие что сходятся последовательности отношений $\frac{x_n - \lim x_n}{o_n}$. Число двойной точности $a + b\sqrt{0}$ представляется как совокупность всех последовательностей с описанными условиями сходимости, для которых $\lim x_n = a$, $\lim \frac{x_n - a}{o_n} = b$.

Прикладная математика и математическое моделирование

Многоконтинуальное усреднение

Аммосов Дмитрий Андреевич
Институт математики и информатики, Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова
`dmitryammosov@gmail.com`

Многие прикладные задачи являются многомасштабными по своей природе, с неоднородностями на различных масштабах и высоким контрастом. Для решения таких задач часто применяют методы усреднения, в которых вычисляются эффективные свойства в каждой макромасштабной точке. Однако в ряде случаев, особенно при высоком контрасте, этого оказывается недостаточно, поскольку требуется больше усредненных коэффициентов для точного моделирования.

В данном докладе рассматривается применение нового метода многоконтинуального усреднения для задач с высоким контрастом и без разделения масштабов. Данный метод представляет собой гибкий и в то же время строгий подход для вывода многоконтинуальных моделей. Основная идея метода заключается в построении специальных задач на ячейках в расширенных представительных элементах с ограничениями для учета различных эффектов. Решение задач на ячейках позволяет получить разложение искомой функции по континуумам, а затем с помощью некоторых операций вычислить эффективные свойства и вывести соответствующую многоконтинуальную модель.

Моделирование воздействия вихревых структур на сверхзвуковое обтекания крыла

Борисов Виталий Евгеньевич
ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
borisov@keldysh.ru
Соавторы: Константиновская Т. В., Луцкий А. Е.

В работе представлены результаты численного исследования сверхзвукового обтекания тандема крыльев (пара: крыло–генератор и основное крыло) с углом атаки 20°, актуальность которого связана, в частности, со сложностями проведения натурных экспериментов [1,2]. Расчеты проводились для прямоугольных в плане крыльев с острыми кромками и ромбовидным основанием. Рассматривались две конфигурации тандема, отличающиеся полуразмахом первого по потоку крыла-генератора, которое составляло половину либо равнялось полуразмаху основного крыла. Для численного расчета использовалась система осредненных по Рейнольдсу и Фавру нестационарных уравнений Навье–Стокса (URANS) с моделью турбулентности Спаларта–Аллмараса. Расчеты проводились на гибридной суперкомпьютерной системе К-60 [3] с помощью авторского программного комплекса ARES для расчета трехмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа. Показано развитие взаимодействия вихревых структур в зависимости от полуразмаха крыла-генератора, а также изменение зоны обратного течения на подветренной стороне основного крыла. Проведено сравнение с результатами обтекания крыла в невозмущенном набегающем потоке.

[1] Гайфуллин А.М. Вихревые течения. –М.: Наука, 2015. 319 с.

[2] Borisov V.E., Davydov A.A., Konstantinovskaya T.V., Lutsky A.E., Shevchenko A.M., Shmakov A.S. Numerical and experimental investigation of a supersonic vortex wake at a wide distance from the wing // AIP Conference Proceedings. 2018. 2027, 030120.

[3] Вычислительный комплекс К-60. [Электронный ресурс]. URL: https://www.kiam.ru/MVS/resourses/k60.html

Метод построения ортогональной генерирующей системы узлов разностной сетки для области с криволинейной границей с помощью квазиконформного отображения

Вozианова Анна Викторовна
Университет ИТМО
vozianova@itmo.ru
Соавторы: Бебех К. В.

Активное развитие проектирования и создания композитных структур со сложной геометрией элементарных ячеек, требует развития и модификации существующих численных методов для учета локальных геометрических особенностей подобных структур. В данной работе предложен метод построения ортогональной генерирующей системы узлов разностной сетки для области с искривленной границей.

В ортогональной сетке все недиагональные элементы метрического тензора g равны нулю:

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0,\ i \neq j,\ \sqrt{detg} = \sqrt{g_{11}g_{22}} = h_{xi}h_{\eta}$$

где $g_{11},\ g_{22}$ - коэффициенты метрического тензора, $h_{xi},\ h_{\eta}$ - коэффициенты Ламе. Двумерная ортогональная сетка должна удовлетворять уравнениям Бельтрами:

$$f\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta},\ f\frac{\partial y}{\partial \eta} = -\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

где $f = \frac{h_{xi}}{h_{\eta}}$ - функция искажения. Мощным аппаратом для нахождения материальных параметров структуры с помощью метрического тензора и геометрии среды является новая наука о манипуляции излучением — трансформационная оптика [1].

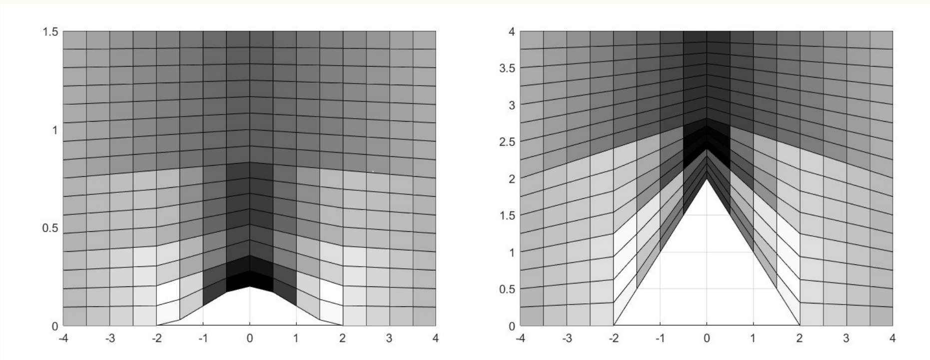


Рис. 11.1: Разностная сетка и распределение показателя преломления в анизотропном материале (a) произвольное искажение границы, (b) линейное искажение границы.

Предложенный метод аппробирован на проектировании анизотропного материала с различным показателем преломления в каждой ячейке, как показано на рисунке.

[1] UlfLeonhardt, Tomas Philbin , *Geometry and light: the science of invisibility*, Mineola, New-York: Dover Publication, Inc., 2010.

Структура внутренних волн в расчетах движения неоднородной жидкости с использованием численной модели ROMS

Володько Ольга Станиславовна
Институт вычислительного моделирования СО РАН, обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН
olga.pitalskaya@gmail.com
Соавторы: Мальцев Е. Д.

Течения и внутренние волны в озерах в основном вызываются ветровыми воздействиями. Понимание пространственной структуры обеспечивает основу для понимания последующих физических, химических и биологических процессов. Но, как правило, натурные измерения гидрофизических характеристик (скорости течения, температуры и солености воды), могут быть проведены только в нескольких конкретных точках. При проведении численных расчетов мы имеем значения гидрофизических характеристик в каждой точке разностной сетки и можем на основании этих данных определить горизонтальную структуру внутренних волн. В настоящей работе на основе данных численных расчетов, полученных с использованием численной модели ROMS (Regional Oceanic Modeling System), определены время возникновения внутренних волн в зависимости от направления и силы ветра, характер изменения возвышения свободной поверхности и изоповерхностей температуры. Для интерпретации полученных в расчетах результатов был проведен переход от σ-координат к декартовым, что позволило идентифицировать наиболее длинные волны как одноузловые сейши. С применением линейной модели трехмерного течения двухслойной жидкости проведена оценка длины вращающейся сейши.

Игры среднего поля в динамике социальных протестов

Глухов Антон Иосифович
Международный математический центр ИМ СО РАН
a.glukhov@g.nsu.ru
Соавторы: Шишленин Максим Александрович

Доклад посвящен математическому моделированию социальной динамики общества и решению обратных задач на основе концепции “игр среднего поля” [1]. В последние годы во всем мире наблюдается рост социальной напряженности общества, которая проявляется в виде социальных протестов. Понимание динамики уличных протестов и изучение факторов, которые могут повлиять на их возникновение, продолжительность, а также интенсивность, принципиально важно для стабильного и устойчивого развития общества.

Разработана комбинированная математическая модель, для изучения динамики социальных протестов с учетом индивидуальности поведения агентов в разных группах, на основе подхода “игр среднего поля” и модели социальных протестов, основанной на динамическом моделировании. При исследовании прямой задачи реализован разностный метод для решения сопряженной системы дифференциальных уравнений в частных производных Колмогорова-Фоккера-Планка и Гамильтона-Якоби-Беллмана, а поиск оптимального управления сведен к итерационному алгоритму [2]. Алгоритм решения обратной задачи состоит в минимизации целевого функционала методом дифференциальной эволюции. Разработанные алгоритмы апробированы на статистических данных социального движения во Франции (2018–2019 гг.) [3].

[1] M. Lasry and P.-L. Lions, Mean field games, Jpn. J. Math., vol. 2 (1), 2007, pp. 229-260.

[2] Lachapelle, J. Salomon, G. Turinici. Computation of mean field equilibria in economics// Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2010. Vol. 20. – P. 567-588.

[3] URL: `https://www.interieur.gouv.fr`.

Численные методы решения задач конвекции-диффузии на основе метода характеристик

Голубев Роман Андреевич
Институт вычислительного моделирования СО РАН
rgolubev@icm.krasn.ru
Соавторы: Шайдуров Владимир Викторович

В работе предлагаются разностные схемы для решения одномерного и двумерного уравнения конвекции-диффузии с оператором конвекции в недивергентной форме. Здесь в качестве материальной производной по направлению "потока"принят оператор переноса, для аппроксимации которого используется метод характеристик. Для эллиптической же части применяются методы конечных разностей. Для построения разностных схем рассматриваются два подхода, называемые полулагранжевыми: эйлерово-лагранжев и лагранжево-эйлеров. Первый из них реализуется на равномерной пространственно-временной сетке. Второй, лагранжево-эйлеров, реализуется на неравномерной пространственной сетке, получаемой путем пересечения характеристических кривых, выпущенных из равномерно расположенных узлов в начальный момент времени, с равномерно расположенными временными слоями. Для построенных разностных схем обоснованы порядки точности, а также проведены вычислительные эксперименты.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

Двумерная постановка задачи гидродинамического истечения атмосфер планет

Горбунова Ксения Дмитриевна
Институт вычислительного моделирования СО РАН
gorbunova.kd@icm.krasn.ru
Соавторы: Н. В. Еркаев

Рассмотрена двумерная задача о нестационарном истечении верхних слоев атмосферы планеты в результате нагрева жестким ультрафиолетовым излучением Звезды. В отличие от одномерной постановки, учитывается особенность распространения и поглощения ультрафиолетового излучения и добавляется меридиональная составляющая скорости, которая становится больше с увеличением угла отклонения от центральной оси, направленной на родительскую звезду.

Для расчетов использовались физические характеристики теплого мини-Нептуна TOI-421c и его родительской звезды [1], компактная схема типа Мак-Кормака и метод Рунге-Кутты четвертого порядка [2]. Сравнение с одномерными результатами, полученными ранее [3,4], показало, что они значительно завышают общий расход газа, в связи с этим был подобран параметр для одномерной постановки, позволяющий получить более реалистичную оценку потери массы атмосферы.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

[1] Carleo, I., Gandolfi, D., et al., *The multiplanet system TOI-421: A warm Neptune and a super puffy Mini-Neptune transiting a G9 V star in a visual binary*, The Astronomical Journal, 160 (2020), 114–137.

[2] JavanNezhad, R., Meshkatee, A.H., et al., *High-order compact MacCormack scheme for two-dimensional compressible and non-hydrostatic equations of the atmosphere*, Dynamics of Atmospheres and Oceans, 75 (2016), 102–117.

[3] Еркаев Н.В., Горбунова К.Д., *Компактная разностная схема для гидродинамической модели истечения атмосфер планет*, Вычислительные технологии, 29 № 1 (2024), 5–17.

[4] Erkaev, N.V., Gorbunova, K.D., *Magnetic Barrier in Front of Exoplanets Interacting with Stellar Wind*, Springer, 2022.

Сравнительный анализ численных методов решения обратной задачи определения источника акустических волн

Губер Алексей Владимирович
МЦМУ в Академгородке
alexej.guber@yandex.ru
Соавторы: Шишленин Максим Александрович

В работе исследована обратная задача определения источника волн в двумерном случае.

Рассмотрим прямую задачу для уравнения акустики в области $\Omega = \{(x, y) : x \in (0, L_x), y \in (0, L_y)\}$:

$$u_{tt} = \mathrm{div}(c^2(x, y)\nabla u), \qquad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T),$$

$$u|_{t=0} = q(x, y), \qquad u_t|_{t=0} = 0,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Подобные задачи возникают во многих приложениях. Например, в задачах распространения волны цунами $c(x, y) = \sqrt{gh(x, y)}$ — скорость распространения волн, $h(x, y)$ глубина океана, $g = 9.81$ м/с^2 ускорение свободного падения [1, 2].

Обратная задача состоит в определении функции $q(x, y)$ по дополнительной информации [3]:

$$u(x_n, y_n, t) = f_n(t), \qquad n = \overline{1, N}.$$

Здесь (x_n, y_n) — расположение приемников, N — количество приёмников.

В операторной форме обратная задача формулируется в виде $Aq = f$.

Проведён сравнительный анализ таких численных методов решения данной задачи, как матричный метод (с использованием Tensor-Train разложения), нейронные сети PINN, градиентный метод.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

[1] В. М. Кайстренко. Обратная задача на определение источника цунами, Сб.: Волны цунами. Труды САХКНИИ, 1972. Вып.29.С.82-92.

[2] Воронина Т.А. Определение пространественнго распределения источников колебаний по дистанционным измерениям в конечном числе точек, СибЖВМ.2004.-Т.7, №3. С.203–211.

[3] М. А. Шишленин. Матричный метод в задачах определения источников колебаний, Сиб. электрон. матем. изв., 11 (2014), С.161–С.171.

Удаление сингулярности поля упругих напряжений на основе неевклидовой модели сплошной среды

Гузев Михаил Александрович
Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток
guzev@iam.dvo.ru

Рассматривается сингулярные решения для поля упругих напряжений плоскодеформированного состояния сплошной среды. Построена схема минимального расширения классической модели упругой сплошной среды на пути отказа от условия совместности Сен-Венана для деформаций, что приводит к неевклидовой модели сплошной среды. В рамках этой модели показано, что поле полных напряжений не содержит сингулярностидеформированного состояния сплошной среды.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института прикладной математики ДВО РАН (тема No. 075-00459-24-00).

Создание программного комплекса квантово-химических расчетов, обладающих повышенной точностью и быстродействием

Даньшин Артем Александрович
НИЦ "Курчатовский институт"
danshin_aa@nrcki.ru
Соавторы: А. А. Ковалишин

Существующие методы квантовой химии обладают большой вычислительной сложностью в большинстве приложений в химии, физике конденсированного состояния, биохимии и фармакологии, что ограничивает их область применимости. Поэтому необходимо развивать новые численные методы и математические модели, которые позволят на порядки ускорить вычисления, не теряя в точности. В докладе рассматриваются методы квантового Монте-Карло, Хартри-Фока, пост-Хартри-Фока и теории функционала плотности как с точки зрения численной реализации [1], так и методологических аспектов [2, 3]. Представленные результаты легли в основу программного комплекса, предназначенного для расчета структуры и свойств многоэлектронных систем.

[1] A. A. Danshin, A. A. Kovalishin, *Operator Spectrum Transformation in Hartree–Fock and Kohn–Sham Equations*, Doklady Mathematics, 107 (2023), 17–20.

[2] A. A. Danshin, A. A. Kovalishin, M. I. Gurevich, *Approach to determine nodal surfaces of some s-electron systems*, Physical Review E, 108 (2023), 015305.

[3] A. A. Danshin, A. A. Kovalishin, *High-Performance Computing in Solving the Electron Correlation Problem*, Lecture Notes in Computer Science, 13708 (2022), 140-151.

О влиянии различных факторов на устойчивость течений жидкости

Демьянко Кирилл Вячеславович
ИВМ им. Г.И. Марчука РАН
k.demyanko@inm.ras.ru

Изучение влияния различных факторов на характеристики линейной устойчивости ламинарных течений жидкости является основой для разработки перспективных методов пассивного управления ламинарно-турбулентным переходом, актуальных для приложений, связанных, например, с производством и оптимизацией элементов конструкций морских судов и дозвуковых летательных аппаратов. К таким факторам относится податливость обтекаемой поверхности, ее форма, а также соотношение геометрических масштабов течения в направлении, перпендикулярном направлению основного течения. На примере ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости в каналах различного сечения с твердыми или податливыми стенками, а также пограничного слоя над продольно оребренной поверхностью в докладе обсуждаются результаты численного исследования влияния перечисленных факторов на характеристики модальной и немодальной линейной устойчивости, необходимые для описания так называемых естественного и докритического сценариев ламинарно-турбулентного перехода соответственно.

Математическое моделирование излучения плазменной антенны и исследование ее характеристик методом поверхностного резонанса в тлеющем разряде

Киселев Глеб Борисович
Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт физики
kiselev.gleb.97@gmail.com
Соавторы: Желтухин Виктор Семенович, Шемахин Александр Юрьевич

Работа включает две основные части. Первая посвящена исследованию длин волн электромагнитных полей, генерируемых плазменной антенной в зависимости от давления. Исследование проводилось путем моделирования в среде Comsol Multiphysics тлеющего разряда вдоль трубки (одномерная постановка). По полученным распределениям тока в плазме была полученная диаграмма направленности и пространственное распределение электромагнитного поля (решение уравнений Максвелла в двумерной постановке) [1].

Вторая часть работы посвящена исследованию неинвазивного метода измерения электронной плотности приповерхностного слоя ртутного тлеющего разряда, который основан на определении резонансных частот между самим слоем разряда и частотой источника. Полученные данные были верифицированы с помощью численной модели, построенной в среде Comsol Multiphysics, и эмиссионной спектроскопией [2].

[1] Terentev, T.N., Kiselev, G.B., Shemakhin, A.Y. et al. *Influence of Pressure on Plasma Antenna Resonance Wavelength*. High Energy Chem 58, 190–193 (2024).

[2] Shemakhin Y. A. et al., *Spectral studies of inductively coupled plasma characteristics of low pressure discharges for two configurations of vacuum chambers*, Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2022. – V. 2270. – №. 1. – p. 012007.

Моделирование динамики эпидемий в зависимости от социально-экономических процессов с применением искусственного интеллекта

Криворотько Ольга Игоревна
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
o.i.krivorotko@math.nsc.ru
Соавторы: Н. Ю. Зятьков, А. В. Неверов, С. И. Кабанихин

В работе формулируются и анализируются математические модели распространения инфекционных заболеваний в регионах Российской Федерации, основанные на системах дифференциальных уравнений и законе действующих масс с учетом возрастных особенностей с привлечением моделей нейронных сетей [1]. Анализ идентифицируемости моделей основывается на методе чувствительности Соболя [2].

Моделирование эпидемий COVID-19 и туберкулеза с учетом социально-экономических характеристик регионов РФ проводилось с применением генеративно-состязательных и рекуррентных нейронных сетей [2] в комбинации с дифференциальными моделями. В работе проведен статистический анализ реальных данных, приведены области применения математических моделей и показаны результаты моделирования и прогнозирования эпидемической ситуации COVID-19 и туберкулеза в регионах РФ.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

[1] O. Krivorotko, S Kabanikhin, *Artificial intelligence for COVID-19 spread modeling*, J. Inverse Ill-Posed Probl. (2024).

[2] О.И. Криворотько, С.И. Кабанихин, В.С. Петракова, *Идентифицируемость математических моделей эпидемиологии: туберкулез, ВИЧ, COVID-19*, Математическая биология и биоинформатика, 18(1) (2023), 177-214.

[3] О.И. Криворотько, Н.Ю. Зятьков, С.И. Кабанихин, *Моделирований эпидемий: нейросеть на основе данных и SIR-модели*, Журнал вычислительной математики и математической физики, 63(10) (2023), 1733-1746.

ИИ вино, шоколад и тд. Или как решать задачи оптимизации, когда сравнивать можно только значения целевой функции?

Лобанов Александр Владимирович
МФТИ, Сколтех, ИСП РАН
lobbsasha@mail.ru
Соавторы: Александр Гасников, Андрей Краснов

Часто растущая область оптимизации «черного ящика» сталкивается с проблемами из-за ограниченного понимания механизмов целевой функции. Чтобы решить такие проблемы, в этой работе мы сосредотачиваемся на детерминистской концепции Order Oracle, которая использует только порядковый доступ между значениями функций (возможно, с некоторым ограниченным шумом), но не предполагает доступа к их значениям. В качестве теоретических результатов мы предлагаем новый подход к созданию неускоренных алгоритмов оптимизации (полученный путем интеграции Order Oracle в существующие "инструменты" оптимизации) в невыпуклых, выпуклых и сильно выпуклых настройках, который не уступает как SOTA алгоритмам координатного спуска с оракулом первого порядка, так и SOTA алгоритмам с Order Oracle с точностью до логарифмического коэффициента. Более того, используя предложенный подход, мы предоставляем первый ускоренный алгоритм оптимизации с использованием Order Oracle. Наконец, наши теоретические результаты демонстрируют эффективность предложенных алгоритмов посредством численных экспериментов.

Критические переходы в моделях процессов агрегации и дробления вещества

Матвеев Сергей Александрович
ИВМ РАН и МГУ имени М. В. Ломоносова
matseralex@gmail.com
Соавторы: Роман Дьяченко и Павел Крапивский

В настоящем докладе будут разобраны несколько примеров критических переходов в математических моделях процессов агрегации и дробления вещества. Эти процессы широко распространены в природе и часто описываются при помощи больших или даже формально бесконечных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Эти системы можно исследовать при помощи численных методов различной природы, в том числе методов Монте Карло и классических разностных схем типа Рунге-Кутты. В данном докладе мы покажем, что использование конечных выборок частиц в методах Монте Карло может приводить к принципиальным различиям между “разыгрываемым” случайным процессом и решением исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений. Такое различие мы будем называть эффектом конечной выборки при моделировании процессов агрегации. Эти эффекты можно наблюдать с ростом объёмов используемой выборки в методах Монте Карло вплоть до миллиардов частиц [1].

Вторым видом критических переходов в моделях агрегации вещества является явление золь-гель перехода в случае быстро растущих коэффициентов агрегации. Для задач данного типа с источником мономеров мы покажем, что поведение решения после критической точки существенно зависит от формы записи системы исследуемых дифференциальных уравнений. Эффекты такого типа не могут наблюдаться для задач кинетики агрегации с “медленно” растущими коэффициентами, удовлетворяющими закону сохранения массы. Полученные наблюдения напоминают нам знаменитую дискуссию о природе явления золь-гель перехода между химиками П. Флори и У. Стокмайером, а также имеют прямое отношение к явлению перколяции при росте случайных графов в модели Эрдёша-Реньи [2]. Обе работы [1],[2], обсуждаемые в докладе, выполнены при поддержке отделения Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН.

[1] Dyachenko, R. R., Matveev, S. A., Krapivsky, P. L. (2023). Finite-size effects in addition and chipping processes. Physical Review E, 108(4), 044119.

[2] Krapivsky, P. L., Matveev, S. A. (2024). Gelation in input-driven aggregation. arXiv preprint arXiv:2404.01032.

Дискретные динамические системы, обратные задачи и связанные вопросы численного моделирования

Михайлов Александр Сергеевич и Михайлов Виктор Сергеевич
ПОМИ РАН, СПбГУ
mikhaylov@pdmi.ras.ru

Мы дадим обзор по применению метода Граничного управления к одномерным динамическим дискретным задачам. Этот подход применялся авторами к решению классических проблем моментов, построению функции Вейля для матриц Якоби, пространствами де Бранжа, струнам Стильтьема-Крейна. В докладе мы сфокусируемся на применеии этого подхода к численному моделированию задач управления и обратных задач для волнового уравнения на графах-деревьях и к решению одномерной обратной задачи для параболического уравнения.

Применение PINN в SIR модели игры среднего поля

Неверов Андрей Вячеславович
Институт математики им. Соболева СО РАН
a.neverov@g.nsu.ru
Соавторы: Криворотько Ольга Игоревна

Рассматривается пространственная эпидемиологическая SIR модель, в которой люди распределены в некотором населенном пункте и стремятся не стать инфицированными. Для реализации взаимодействия большого населения в условиях эпидемии применен подход игр среднего поля [1], характеризующийся совместным решением систем уравнений в частных производных типа Колмогорова-Фоккера-Планка и Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Для численной реализации математического моделирования распространения эпидемии в популяции с учетом оптимального управления применяется метод машинного обучения, а именно физически информированные нейронные сети (PINN) с различными модификациями [2]. Рассматривается возможность решения коэффициентных обратных задач, где информация вводится в виде дополнительных уравнений.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2024-0002 “Обратные некорректные задачи и машинное обучение в биологических, социально-экономических и экологических процессах”.

[1] V. Petrakova, O. Krivorotko, Mean Field Optimal Control Problem for Predicting the Spread of Viral Infections, *19th International Asian School-Seminar on Optimization Problems of Complex Systems (OPCS)*, (2023), 79-84.

[2] M. Raissi, P. Perdikaris, G.E. Karniadakis, Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, 378 (2019), 686-707.

Численное решение обратных задач для гиперболических уравнений, основанное на прямой линейной обработке данных

Новиков Никита Сергеевич
ИМ СО РАН
novikov-1989@yandex.ru

В докладе мы построим многомерный аналог уравнения Гельфанда–Левитана–Крейна для задачи определения плотности из уравнения акустики по измеренным на поверхности откликам на систему зондирующих сигналов. Рассматривается переопределённая система задач, в которой используется отклик от (бесконечного) семейства источников.Тем самым метод использует больше информации, чем это обычно требуется для доказательства теоремы единственности. Преимуществом же данного подхода является сведение нелинейной задачи к системе линейных уравнений, а также возможность вычисления неизвестного коэффициента без многократного решения прямой задачи. В докладе рассматриваются аналоги метода для других обратных задач для гиперболических уравнений, приводятся результаты численного решения обратной задачи, а также обсуждается вопрос использования подходов, основанных на глубоком обучении для решения обратной задачи в рамках рассматриваемого подхода.

Крестовые аппроксимации на основе подматриц большого проективного объема

Осинский Александр Игоревич
Сколковский институт науки и технологий; Институт вычислительной математики имени Г. И. Марчука РАН
osinskiy1189@gmail.com

Крестовые аппроксимации часто используются в вычислительной математике в качестве замены сингулярного разложения. Основная причина состоит в существенно более высокой скорости их построения, а также в отсутствии необходимости знать все элементы приближаемой матрицы. В данном докладе будет показано, что часто можно быстро строить крестовые аппроксимации с точностью по норме Фробениуса сколь угодно близкой к сингулярному разложению. Это позволяет использовать крестовую аппроксимацию в качестве приближенного проектора на множество матриц фиксированного ранга. Таким образом можно существенно ускорить методы переменных проекций и проекций градиента на пространство малоранговых матриц. В частности, в алгоритмах восстановления матриц и построения неотрицательных аппроксимаций.

Моделирование вариативного течения инфекции на основе гибридных уравнений с запаздыванием

Переварюха Андрей Юрьевич
Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН
madelf@rambler.ru

Обсудим гибридные модели с вероятностной компонентой для сценариев развития ситуации инвазионного процесса в биосистеме с адаптивным сопротивлением. Представим несколько аспектов запаздывания. Частный случай инвазии с неопределенно запаздывающим ответом это иммунный ответ на коронавирус, который может быть или сильным или медленно возникающим по целому ряду не полностью детерменированных факторов. Нами предложено включение в модель возмущенного равномерно распределенной на $[0,1]$ σ репродуктивного запаздывания $x(t-\tau\times\sigma)$ с целью получить варианты поведения траектории, которые соответствуют динамике концентрации вирионов при различных сценариях развития инфекции в организме. Варианты развития отличаются от быстрого выздоровления, до летального варианта. Наиболее сложный для моделирования сценарий хронизации после острой фазы. В предложенной нами модели получен вариант хронизации без необходимости дальнейшего увеличения r, $H = 1/3K$:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N(t-\tau\times\sigma)}{\mathcal{K}}\right)\left(H - N(t-\gamma)\right), \gamma < \tau. \tag{1}$$

Используем в новой форме модели вместо квадратичной зависимости логарифмическую форму регуляции:

$$\frac{dN}{dt} = r\ln\left(\frac{\mathcal{K}}{N(t-\tau)}\right) - \mathbb{Q}N(t-\nu), \tag{2}$$

В таком варианте уравнения с внешним воздействием биотической среды дополнение модели фактором противодействия с отдельным запаздыванием изменит качественный характер решения для описания острой фазы инфекции.

Разностные схемы с хорошо контролируемой диссипацией для решения уравнений модели Капилы

Полехина Рузана Рамилевна
ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
tukhvatullinarr@gmail.com
Соавторы: Савенков Е. Б.

Работа посвящена применению разностной схемы с хорошо контролируемой диссипацией для решения уравнений модели Капилы, описывающей двухфазные течения. Последняя является неконсервативной системой гиперболических уравнений первого порядка и, таким образом, требует указания конкретного вида регуляризующего диссипативного оператора, выделяющего единственное решение задачи. Суть схем с хорошо контролируемой диссипацией заключается в том, что диссипативный оператор, который определяется видом их первого дифференциального приближения, совпадает с точностью до малых высшего порядка с заданным, использованным при определении обобщенного решения в континуальной постановке. В результате ожидается сходимость численного решения схемы к заданному решению. Численные эксперименты, представленные в работе, демонстрируют эффективность такого подхода. В качестве точных решений использованы численные решения типа бегущей волны, полученные другим методом.

Метод типа Ландена для вычисления функций Вейерштрасса

Смирнов Матвей Станиславович
Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН
matsmir98@gmail.com

Метод Ландена широко известен в контексте эллиптических интегралов и функций Якоби. Его суть состоит в замене модулярных параметров, соответствующих удвоению одного из периодов. Повторение этой процедуры приводит к эффективному вычислительному методу, в особенности, потому что эллиптический модуль при этом сходится квадратично быстро. В отличие от функций Якоби, функции Вейерштрасса традиционно мало применяются в вычислительной практике. Данный доклад будет посвящен новому методу вычисления функций Вейерштрасса, основанному на идеях, аналогичных методу Ландена. Полученный метод также устойчив и имеет квадратичную сходимость. Будет показано как на этом пути можно получить эффективный метод вычисления периодов и отображения Абеля для данных инвариантов Вейерштрасса эллиптической кривой.

Применение упрощенной модели жидкого кристалла в акустическом приближении для анализа эффекта ориентационной термоупругости

Смолехо Ирина Владимировна
Институт вычислительного моделирования СО РАН
ismol@icm.krasn.ru

В работе проведен анализ эффекта ориентационной термоупругости в слое нематического жидкого кристалла, возникающий при нагревании части границы слоя. При этом использовалась упрощенная двумерная динамическая модель жидкого кристалла в акустическом приближении [1]. В основе решения уравнений модели лежит метод двуциклического расщепления по пространственным переменным с применением конечно-разностной схемы распада разрыва Годунова при решении уравнений акустики и схемы Иванова с контролируемой диссипацией энергии, при решении уравнения теплопроводности. Проведена серия расчетов, отображающая невозможность измения ориентации молекул жидкого кристалла только за счет теплового воздействия на границе. Выдвинута гипотеза, что эффект ориентационной термоупругости будет наблюдаться при учете сил поверхностного натяжения.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

[1] *Sadovskii V., Sadovskaya O.* Acoustic approximation of the governing equations of liquid crystals under weak thermomechanical and electrostatic perturbations // Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures. Ser.: Advanced Structured Materials, V. 87. Cham: Springer, 2018. Chapt. 17. P. 297–341.

Моделирование динамики планктонного сообщества озера Байкал

Сурнин Павел Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Математический центр в Академгородке
p.surnin@internet.ru

Планктонное сообщество играет значимую роль в формировании качества воды поверхностных источников, используемых для систем хозяйственно-питьевого водоснабжения. Важно отметить, что 70% производимого кислорода вырабатывается фитопланктоном [1]. Моделирование сезонных особенностей является основной задачей в понимание развития фитопланктона и прогнозирование возможных последствий, связанных с поступлением в воду продуктов жизнедеятельности и отмирания клеток фитопланктона.

В докладе будет приведен анализ данных планктонного сообщества озера Байкал. На основе математической модели [2], состоящей из системы нелинейных уравнений реакции-диффузии, проведено моделирование динамики распределения биомассы зоопланктона и фитопланктона, а также концентрации кислорода в зависимости от глубины. Приведен сравнительный анализ решения прямой задачи конечно-разностным методом и методом конечных элементов. Приведены постановки обратных задач.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

[1] R. Lindsey, S. Michon, *What are Phytoplankton?*, NASA, Web, 22 (2011).

[2] Y. Sekerci, S. Petrovskii, *Mathematical Modelling of Plankton-Oxygen Dynamics Under the Climate Change*, Bulletin of mathematical biology, 11 (2015)

Молекулярно-динамическое моделирование взаимодействия газовой смеси с графеновыми мембранами

Челнокова Анна Сергеевна
Региональный научно-образовательный математический центр Томского государственного университета

smolina-nyuta@mail.ru
Соавторы: Бубенчиков Алексей Михайлович

Наноструктуры на основе углерода, такие как графен, углеродные нанотрубки и фуллерены, привлекли широкое внимание исследователей по всему миру благодаря своим уникальным свойствам. В наномасштабе одним из устоявшихся подходов к изучению подобных структур является молекулярно-динамическое моделирование. Оно особенно полезно для количественной оценки основных взаимодействий и динамических процессов, определяющих коэффициенты адсорбции или диффузии.

В настоящее время в качестве перспективного фильтрующего материала рассматриваются графеноподобные мембраны, и существует необходимость в разработке теоретических подходов для изучения диффузии и сорбции, которые включают межчастичные взаимодействия для предоставления точной информации о массопереносе.

В докладе будет представлена математическая модель взаимодействия компонент газовой смеси He, Ar и Xe с графеновыми листами, в том числе имеющими дефекты. Силы взаимодействия описаны с использованием потенциалов Леннарда-Джонса и Бреннера второго рода. Приведено сравнение коэффициентов проницаемости различных газовых компонент через графеновые листы с дефектами с применением вышеуказанных потенциалов. Представлены оценки температуры газовой смеси и графеновой мембраны.

Теория вероятностей

О моменте вырождения ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона при условии большого числа частиц за всю историю

Бакай Гавриил Андреевич
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
gavrik_lur_bakay@mail.ru

Пусть случайные величины $X, X_{i,j},\ i,j \in \mathbb{N}$, являются независимыми и одинаково распределенными и принимают целые неотрицательные значения. Положим

$$Z_0 := 1, \quad Z_n := \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X_{n,j}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Случайный процесс $\{Z_n,\ n \geq 0\}$ называют *ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона*. Пусть

$$T := \min\{k \in \mathbb{N} :\ Z_k = 0\}, \quad \xi := \sum_{j=1}^{+\infty} Z_j.$$

Известно ([1]), что в предположениии $\mathbf{E}X = 1,\ 0 < \mathbf{D}X = \sigma^2 < +\infty$ имеет место сходимость

$$\mathbf{P}(T/\sqrt{n} \leq x | \xi = n) \to F(x), \quad n \to \infty,\ x > 0,$$

где $F(x)$ — некоторая функция распределения.

Автором доказано выполнение равномерного по $k/n = k(n)/n \in [a,b] \subset (0,1)$ соотношения

$$\mathbf{P}(T = k | \xi = n) \sim nF_0\left(\frac{k}{n}\right) \exp\left(-L\left(\frac{k}{n}\right) n\right), \quad n \to \infty,$$

и получены выражения для функций F_0 и L.

[1] D. Aldous, *The continuum random tree. II. An overview*, Stochastic analysis, 167 (1990), 23-70.

Распределение длины очереди в системе обслуживания со смешанной приоритетной дисциплиной в условиях критической загрузки

Берговин Алексей Константинович
МГУ имени М.В. Ломоносова, МЦМУ "Московский центр фундаментальной и прикладной математики"
alexey.bergovin@gmail.com

В данном докладе рассматривается система обслуживания с приоритетами, функционирующая в условиях критической загрузки, а, именно, исследуется поведение длины очереди, когда одновременно и время стремится к бесконечности, и загрузка к единице, такую постановку предложил Ю.В. Прохоров в [1].

Рассматривается система в которой три пуассоновских входящих потока, каждый из которых имеет свою функцию распределения времени обслуживания, в системе есть бесконечное число мест в очереди для ожидания и один обслуживающий прибор. Приоритетная дисциплина является смешанной, установлены следующие приоритеты: относительный приоритет между требованиями первого и второго потоков и между требованиями второго и третьего потоков, а для требований первого и третьего потоков — абсолютный приоритет с обслуживанием занового прерванного требования. Будем считать, что первый поток имеет наивысший приоритет, а третий — низший.

Используя соотношения, которым удовлетворяет преобразование Лалпаса совместной производящей функции количества требований каждого приоритетного класса в системе, полученные в работе [2], были найдены предельные распределения для количества требований наименее приоритетного класса системы в условиях критической загрузки.

[1] Прохоров Ю.В. Переходные явления в процессах массового обслуживания // Литовский математический сборник. 1963. Т.3, № 1. С. 199 — 206.

[2] Берговин А.К., Ушаков В.Г. Исследование систем обслуживания со смешанными приоритетами // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17, Вып. 2. С. 57 – 61.

Принцип пуассонизации для эмпирических точечных процессов

Борисов Игорь Семенович
Институт математики им. С.Л. Соболева, ММЦ ИМ СО РАН
sibam@math.nsc.ru

В докладе будет обсуждаться методика доказательства неравенств и предельных теорем, связывающих распределения эмпирических и сопровождающих пуассоновских точечных процессов. Будет сформулирован принцип пуассонизации при изучении предельного поведения распределений аддитивных функционалов от групповых частот. В частности, будет продемонстрировано применение этого принципа при исследовании предельного поведения статистик типа “Хи-квадрат” при одновременным неограниченным возрастанием объема наблюдений и числа групп, а также известных аддитивных функционалов в бесконечных полиномиальных схемах размещения частиц по ячейкам.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации 075-15-2022-281.

Бесконечномерные компакты и гауссовские процессы

Досполова Мария Каиржановна
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А.Стеклова РАН
dospolova.maria@yandex.ru

Пусть K — выпуклое компактное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. У каждого такого компакта K есть характеристики, которые не зависят от размерности объемлющего пространства d, а зависят только от внутренней геометрии K. Они называются *внутренними объемами* K, обозначаются через $V_k(K)$, $k = 0, 1, \dots, d$ и определяются как коэффициенты в формуле Штейнера. Штейнер показал, что объем λ-окрестности компакта K представляется многочленом от λ с коэффициентами $V_k(K)$ (где нормировка подобрана специальным образом).

Известно еще одно, эквивалентное первому, определение внутренних объемов: $V_k(K)$ — это средний объем проекции K на случайное k-мерное линейное подпространство, выбранное по мере Хаара.

Воспользовавшись независимостью внутренних объемов от размерности, Судаков и Шеве обобщили данное понятие на бесконечномерные выпуклые множества в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Оказалось, что, помимо вышеприведенных определений, у внутренних объемов существует гауссовское представление (Судаков [1] и Цирельсон [2]), которое позволяет изучать их с вероятностной точки зрения. Обнаружение глубокой связи между внутренними объемами и гауссовскими процессами позволило решить задачи на стыке теории вероятностей и выпуклой геометрии.

В докладе мы рассмотрим дальнейшие свойства бесконечномерных компактов и их связь с гауссовскими процессами.

[1] В. Н. Судаков, *Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероят-*

ностных распределений, Труды МИАН, 141 (1976), 3-191.

[2] Б. С. Цирельсон, *Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига. II*, Теория вероятн. и ее примен., 30:4 (1985), 772-779.

[3] R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and integral geometry*, Springer, 2008.

[4] B. Klartag, V. Milman, *The slicing problem by Bourgain. In Analysis at large. Dedicated to the life and work of Jean Bourgain*, Springer, 2022.

Рекомендательная система для микрофинансовых организаций

Дудукалов Дмитрий Витальевич
ИМ СО РАН
d.dudukalov@g.nsu.ru
Соавторы: Прокопенко Евгений Игоревич, Савинкина Екатерина Николаевна

На данный момент работа большинства микрофинансовых организаций (МФО) в России происходит через интернет. Посредством сайта-агрегатора пользователи могут искать подходящие для себя МФО. Возникает задача правильного, в каком-то смысле, ранжирования всех представленных на данном сайте-агрегаторе МФО, для улучшения пользовательского опыта. В докладе будет рассказано о разработанных нами модели ранжирования МФО основанной на цепях Маркова и методе сравнения двух моделей ранжирования.

Принцип умеренно больших уклонений для произведений независимых сумм независимых случайных величин

Ефремов Егор Владимирович
Стажер-исследователь, ИМ СО РАН (Новосибирск, Россия)
efremov.eg.v@yandex.ru

Был получен принцип умеренно больших уклонений (п.у.б.у.) для последовательности произведений независимых сумм независимых и одинаково распределенных положительных случайных величин, удовлетворяющих условию Крамера и дополнительному моментному условию. В качестве следствия был получен п.у.б.у. для последовательности определителей матриц Уишарта.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации

№075-15-2022-281.

Динамические вероятностные эволюционные игры и их приложения

Житлухин Михаил Валентинович
МИАН им. В.А. Стеклова
mikhailzh@mi-ras.ru

Под *динамической вероятностной эволюционной игрой* мы понимаем систему взаимодействующих агентов (игроков), описываемую случайным процессом R_t со значениями в множестве $\{r \in \mathbb{R}_+^M : r^1 + \ldots + r^M = 1\}$, который показывает насколько "успешны" стратегии игроков — чем координата R_t^m ближе к 1, тем "успешнее" стратегия игрока m.

Главным образом нас будут интересовать стратегии, называемые *выживающими*, для которых процесс R_t^m остается отделенным от нуля с вероятностью 1 на бесконечном промежутке времени независимо от стратегий, используемых оппонентами. Интерес изучения выживающих стратегий объясняется тем, что присутствие использующих их игроков позволяет предсказать, как будет развиваться игра при времени $t \to \infty$.

Доклад будет основан на цикле работ автора за последние несколько лет, в которых изучались вопросы существования выживающих стратегий и их конструктивного построения в конкретных моделях игр, возникающих в экономических приложениях.

О близости распределений последовательных сумм на выпуклых множествах и в метрике Прохорова

Зайцев Андрей Юрьевич
ПОМИ РАН
zaitsev@pdmi.ras.ru

Мы обсуждаем результаты работ докладчика [1, 2]. Пусть $X_1, X_2, \ldots,$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы в d-мерном евклидовом пространстве с распределением F. Тогда $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ имеет распределение F^n (степени мер понимаются в смысле свертки). Пусть $R(F, G) = \sup |F(A) - G(A)|$, где супремум берется по всем выпуклым подмножествам d-мерного евклидова пространства. Тогда для любых нетривиальных распределений F найдется $c(F)$, зависящее только от F и такое, что $R(F^n, F^{n+1})$ не превосходит $c(F)$, деленного на корень из n, для любых натуральных n. Распределение F считается тривиальным, если оно сосредоточено на аффинной гиперплоскости, не содержащей начало координат. Ясно, что для таких F имеет место равенство $R(F^n, F^{n+1}) = 1$.

Аналогичный результат получен также для расстояния Прохорова между распределениями векторов S_n и S_{n+1}, нормированных на корень из n. При этом утверждение остается верным для любых распределений, в том числе и тривиальных.

[1] А. Ю. Зайцев, *О близости распределений последовательных сумм в метрике Прохорова*, Теория вероятн. и ее примен., 69 (2024), 272–284.

[2] А. Ю. Зайцев, *Оценки устойчивости по количеству слагаемых для распределений последовательных сумм независимых одинаково распределенных векторов*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 525 (2023), 86–95.

Свойства семейства случайных внешних мер, ассоциированных с бесконечной урновой схемой

Ковалевский Артем Павлович
Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН
artyom.kovalevskii@gmail.com
Соавторы: Берхане Абебе Андемикаэль

Урновой схемой называется вероятностная модель, в которой шары последовательно и независимо друг от друга раскладываются по урнам. Предполагается, что для всех шаров есть одно и то же распределение вероятностей попадания в каждую из урн. В простейшем случае урн конечное число, и вероятности попадания в каждую урну одинаковы. Бесконечная урновая схема предполагает, что урн счетное число, в этом случае вероятность попадания шара в урну обязательно зависит от номера урны. Одна из изучаемых статистик — число непустых урн после бросания n шаров.

Итак, будем предполагать, что урн счетное число, и зафиксируем вероятности попадания шара в каждую из урн (одинаковые для всех шаров). Для произвольного подмножества A отрезка $[0, 1]$ рассмотрим не все номера шаров от 1 до n, а только те из них, которые попали в множество nA, и изучим число непустых урн после бросания шаров с номерами из множества nA. Это число неотрицательно, и в случае пустого множества A тождественно равно нулю. Кроме того, оно удовлетворяет свойству сигма-субаддитивности: если A является подмножеством счетного объединения множеств, то число непустых урн для номеров из nA не превосходит суммы чисел, посчитанных таким же образом по каждому из этих множеств. Таким образом, число непустых урн для номеров шаров из nA, где A — произвольное подмножество из $[0, 1]$, удовлетворяет всем свойствам внешней меры на отрезке $[0, 1]$.

Изучается сужение этого семейства случайных внешних мер на класс множеств A, образованных объединением конечного числа промежутков. Для этого сужения мы доказываем закон больших чисел и центральную предельную теорему.

Об асимптотике вероятностей невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде с замораживаниями

Коршунов Иван Дмитриевич
МГУ
IDKorshunov@mail.com

Известно, что ветвящийся процесс в случайной среде хорошо описывается соответствующим случайным блужданием

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

где $\xi_k = \ln \varphi'_{\eta_k}(1)$, $\varphi_x(t)$ и η_k — производящая функция числа потомков и случайная среда. В докладе будет рассмотрен вопрос вырождения ветвящегося процесса в случайной среде с заморозками при $\mathrm{E}\xi_1 = 0$, отличающегося от обычного ВПСС тем, что каждая среда устанавливается на несколько поколений. Оказывается, что данный вопрос так же тесно связан со случайным блужданием

$$S_n = \tau_1\xi_1 + \ldots + \tau_n\xi_n,$$

где $\xi_k = \ln \varphi'_{\eta_k}(1)$, $\varphi_x(t)$ и η_k — производящая функция числа потомков и случайная среда, а τ_k — длительность k-й заморозки.

В докладе будет показано, что, если число потомков любой частицы имеет геометрическое распределение, а также при определенных условиях на моменты ξ и на замораживания $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ вероятность выживания всего процесса удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\mathrm{P}\left(Z_{s_n} > 0\right) \sim \frac{c}{\sqrt{\tau_1^2 + \ldots + \tau_n^2}},\ n \to \infty$$

для некоторой положительной константы c, где $s_n = \tau_1 + \ldots + \tau_n$.

Концепция плотных данных в задачах непараметрической регрессии

Линке Юлиана Юрьевна
Институт математики им. С. Л. Соболева, ММЦ ИМ СО РАН
linke@math.nsc.ru

Рассматриваются классические задачи регрессии: оценивание регрессионной функции по наблюдениям ее зашумленных значений в некотором известном наборе точек из области ее определения, называемых регрессорами, а также оценивание функций среднего и ковариации случайного процесса в схеме, когда каждая из независимых копий этого процесса наблюдается в зашумленном варианте в том или ином наборе регрессоров. В многочисленных работах, посвященных решению этих задач, модели с детерминированными и случайными регрессорами принято рассматривать отдельно, при этом регрессоры либо некоторым регулярным образом заполняют область задания регрессионной функции или случайного процесса, либо состоят из независимых одинаково распределенных или слабо зависимых случайных величин. В докладе предложена концепция плотных данных и новые классы оценок ядерного типа, позволяющие в едином подходе рассматривать модели с детерминированными или случайными регрессорами и существенно ослабить известные условия на регрессоры без какой-либо спецификации их типа. Условия в терминах плотных данных по существу являются необходимыми для оценивания функций с той или иной точностью.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации 075-15-2022-281.

Периодические симметричные ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с несколькими типами частиц

Лукашова Ирина Игоревна
Санкт-Петербургский международный математический Институт им. Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН
ilukashova072@gmail.com

В докладе рассматривается модель ветвящегося случайного блуждания с n типами частиц на решетке $\mathbb{Z}^d$ с непрерывным временем и источниками ветвления, расположенными периодически на $\mathbb{Z}^d$. Предполагается, что в начальный момент времени в некоторой точке находится одна частица типа i.

Для данного процесса строится оператор, описывающий эволюцию среднего числа частиц типа j, и исследуются его спектральные свойства. В результате будет получена асимптотика среднего числа частиц типа j при $t \to \infty$.

Об асимптотическом поведении среднего значения функционалов от случайного поля частиц, задаваемого ветвящимся случайным блужданием

Люлинцев Андрей Валерьевич
ПОМИ РАН
lav_100k@mail.ru

Рассматривается однородный марковский процесс с непрерывным временем на фазовом пространстве $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, который мы интерпретируем как движение частицы. Частица может переходить только в соседние точки $\mathbb{Z}_+$, то есть при каждой смене положения частицы ее координата изменяется на единицу. Процесс снабжен механизмом ветвления. Источники ветвления могут находиться в каждой точке $\mathbb{Z}_+$. В момент ветвления новые частицы появляются в точке ветвления и дальше начинают эволюционировать независимо друг от друга (и от остальных частиц) по тем же законам, что и начальная частица. В каждый момент времени t мы имеем случайное поле на $\mathbb{Z}_+$, состоящее из частиц, имеющихся в системе в этот момент. Рассматриваются функционалы от этого поля вида $\sum_{(m_j, m_k)} \Phi(m_j, m_k)$, где суммирование происходит по всем упорядоченным парам (m_j, m_k) различных частиц поля. Изучается асимптотическое поведение среднего значения данного функционала при $t \to +\infty$.

О неравенствах для объемов случайных симплексов

Мосеева Татьяна Дмитриевна
СПбГУ, ПОМИ РАН
polezina@yandex.ru

В 1971 году Майлзом была получена явная формула для моментов объема случайного симплекса, часть вершин которого выбирается равномерно внутри единичного шара, а часть — равномерно на единичной сфере. Из данного результата следует, что при фиксированном количестве вершин симплекса его средний объем возрастает при увеличении количества вершин, выбираемых на границе шара.

Равномерное распреление внутри или на границе единичного шара можно рассматривать как частный случай бета-распределения: в первом случае параметр равен 0, а равномерное распределение на единичной сфере получается как предел бета-распределений при стремлении параметра к -1. Рассмотрим случайный симплекс, часть вершин которого выбрана в соответствии с бета-распределением с параметром β_1, а часть — с параметром $\beta_2 < \beta_1$. Оказывается, чем больше вершин выбирается со вторым параметром (при фиксированном общем количестве вершин), тем больше средний объем рассматриваемого симплекса.

Доклад посвящен данному обобщению результата Майлза, а также более общим условиям на распределение вершин симплексов, при которых мы можем получить аналогичные соотношения на объемы.

О нормальной аппроксимации и мультипликативном бутстреп методе для алгоритмов стохастической аппроксимации

Наумов Алексей Александрович
НИУ ВШЭ; Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
anaumov@hse.ru
Соавторы: С. Самсонов, Э. Мулин, К.-М. Шао, Ж.-С. Жанг

В работе получена оценка Берри-Эссеена многомерного нормального приближения для усреднения Поляка-Рупперта итераций алгоритма линейной стохастической аппроксимации (LSA) с убывающим шагом. Полученные результаты показывают, что наибольшая скорость нормальной аппроксимации достигается при выборе шага $\alpha_k \asymp k^{-1/2}$. Кроме того, мы доказываем неасимптотическую валидность мультипликативного бутстреп метода построения доверительных множеств для оценки параметров с помощью LSA.

Аксиомы рациональности фон Неймана–Моргенштерна и неравенства в анализе

Осипов Николай Николаевич
ПОМИ РАН

Меняющееся благосостояние агента, делающего ставки на результаты бросков честной монеты, является классическим примером случайного процесса с мартингальным свойством. В такой игре не существует стратегии, которая бы давала положительное математическое ожидание прибыли. Однако задача о том, можно ли рационально выбрать стратегию, отличную от бездействия, остается осмысленной и нетривиальной: оказывается, что есть некоторый "зазор" между полным отказом от игры и полностью нерациональным экономическим поведением, которое нарушает базовые аксиомы рациональности фон Неймана–Моргенштерна. Решая задачу об описании этого "зазора" и поиске в рамках него оптимальных стратегий, мы придем к функциям Беллмана, которые ранее возникали в решении полностью абстрактных задач о поиске точных констант в неравенствах из анализа. Тем самым мы получим естественную экономическую интерпретацию для этих неравенств и связанных с ними функций Беллмана.

Аналог формулы Фейнмана-Каца для многомерного уравнения Шрёдингера

Платонова Мария Владимировна
ПОМИ РАН, СПбГУ
mariyaplat@gmail.com

Мы предложим вероятностный метод построения аппроксимации решения задачи Коши для многомерного уравнения Шрёдингера с ограниченным потенциалом в виде математических ожиданий функционалов от точечного случайного поля.

Предельные теоремы для вероятностной модели биржевого стакана

Прасолов Тимофей Вячеславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
t.prasolov@g.nsu.ru
Соавторы: Тарасенко А. А.

Биржевой стакан — это таблица заявок на покупку/продажу определенного количества актива. В нашей работе рассматривается модель, где цены заявок выбираются из фиксированного конечного множества, а размещения и отмены заявок и сделки по заявкам с наилучшей ценой происходят согласно независимым процессам Пуассона.

В работах предшественников рассматривался случай, когда сделки совершаются только для одной заявки. В случае, когда сделка может происходить по нескольким заявкам одновременно, приведены достаточные условия эргодичности системы. Для среднего арифметического между наилучшими ценами на покупку и продажу приводятся оценка вероятности при следующем изменении пойти вверх и результаты численных симуляций.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-281.

О точности оценивания ковариационной матрицы многомерного случайного вектора

Пучкин Никита Андреевич
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
npuchkin@hse.ru
Соавторы: Ф. Носков, М. Рахуба, В. Спокойный

Пусть $X, X_1, \ldots, X_n$ — центрированные независимые одинаково распределенные случайные векторы в $\mathbb{R}^d$ с конечным вторым моментом. Одной из классических задач математической статистики является оценивание ковариационной матрицы $\Sigma = \mathbb{E}XX^\top$ по конечной выборке $(X_1, \ldots, X_n)$. Основной интерес представляет случай, когда значение d велико. Чтобы избежать проклятия размерности, обычно на распределение случайного вектора X и, в частности, на вид его ковариационной матрицы накладываются дополнительные ограничения. В рамках доклада будет показано, что при достаточно мягких условиях возможно оценить Σ с точностью, определяемой лишь ее следом и объемом выборки n, а не размерностью пространства d. Более того, результат может быть улучшен, если предположить, что Σ представима в виде суммы нескольких произведений Кронекера матриц меньшего размера. Доклад основан на совместной работе с Ф. Носковым и В. Спокойным [1], а также с М. Рахубой [2].

[1] N. Puchkin, F. Noskov, V. Spokoiny, *Sharper dimension-free bounds on the Frobenius distance between sample covariance and its expectation*, Bernoulli (to appear), arXiv:2308.14739.

[2] N. Puchkin, M. Rakhuba, *Dimension-free structured covariance estimation*, The 37th Annual Conference on Learning Theory (COLT 2024, to appear), arXiv:2402.10032.

Об эффективном оценивании функции регрессии с дискретным временем

Пчелинцев Евгений Анатольевич
Томский государственный университет
evgen-pch@yandex.ru
Соавторы: Никифоров Н. И., Пергаменщиков С. М.

Рассматривается задача статистического непараметрического оценивания для модели дискретной регрессии. На основе метода оценивания, развитого в [1], строится новая процедура оценивания, для которой установлено, что скорость сходимости является почти параметрической (с точностью до логарифмического коэффициента), т. е. устанавливается свойство суперэффективности. Более того, в этом случае вычисляется константа Пинскера для соболевского класса с экспоненциальными коэффициентами.

[1] E. A. Pchelintsev, S. M. Pergamenshchikov, M. A. Povzun, *Efficient estimation methods for non-Gaussian regression models in continuous time*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 74 (2022), 113–142.

Гладкая выпуклая онлайн оптимизация с использованием предсказаний

Рохлин Дмитрий Борисович
Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета и Региональный научно-образовательный математический центр Южного федерального университета
dbrohlin@sfedu.ru

Рассмотрим последовательность выпуклых L-гладких функций $f_t(w)$, $w \in \mathcal{W}$. Базовая версия задачи онлайн оптимизации состоит отыскании последовательности w_t, обеспечивающей равномерную оценку сожаления $R_T(w) = \sum_{t=1}^T (f_t(w_t) - f_t(w)) = o(T)$. В градиентных методах на каждом шаге алгоритм получает информацию о градиенте $g_t = \nabla f_t(w_t)$ в запрашиваемой точке. В докладе рассматривается случай, когда доступны предсказания $\hat{g}_t$ градиента. Большинство соответствующих оценок сожаления содержат слагаемые вида $\|g_t - \hat{g}_t\|$ и являются неявными, так как точка w_t неизвестна в момент использования предсказания $\hat{g}_t$. В докладе обсуждаются, в частности, результаты недавней работы [1], где получены явные оценки сожаления в терминах ошибок предсказания градиента. В случае когда $f_t(w) = \ell(w, z_t)$, где z_t — эргодический марковский процесс с неизвестным переходным ядром, и ℓ является липшицевой по второму аргументу, данный результат непосредственно приводит к оценке сожаления в терминах $\varepsilon_t = \|z_t - \mathrm{E}(z_t|z_{t-1})\|$. Аппроксимация условного математического ожидания $\mathrm{E}(z_t|z_{t-1})$ на основе выборки $z_1, \dots, z_{t-1}$, и оценка математического ожидания ε_t о инвариантной мере также могут быть найдены с использованием онлайн-оптимизации: [2]. Одним из приложений является задача лог-оптимального инвестирования.

[1] P.Z. Scroccaro, A.S. Kolarijani, P.M. Esfahani, *Adaptive composite online optimization: Predictions in static and dynamic environments*, IEEE Transactions on Automatic Control, 68 (2023), 2906–2921.

[2] A. Agarwal, J.C. Duchi, *The generalization ability of online algorithms for dependent data*, IEEE Transactions on Information Theory, 59 (2012), 573–587.

Периодические ветвящиеся диффузионные процессы в $\mathbb{R}^d$

Рядовкин Кирилл Сергеевич
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А.Стеклова РАН
kryadovkin@gmai.com

Мы рассмотрим диффузионный ветвящийся процесс в $\mathbb{R}^d$. Будем предполагать, что перемещение частиц в пространстве описывается стохастическим дифференциальным уравнением, коэффициенты которого являются периодическими в $\mathbb{R}^d$ функциями. В каждой точке $\mathbb{R}^d$ частица может умереть и породить случайное число потомков. Среднее число потомков при одном делении мы будем также предполагать периодическим в $\mathbb{R}^d$ с теми же периодами. При условии, что в начальный момент времени есть только одна частица, и все частицы эволюционируют независимо друг от друга, мы опишем асимптотическое поведение среднего числа частиц в ограниченном множестве при больших временах.

Нормальная аппроксимация и мультипликативный бутстрап для алгоритмов линейной стохастической аппроксимации с усреднением

Самсонов Сергей Владимирович
НИУ ВШЭ
svsamsonov@hse.ru
Соавторы: Эрик Мулине, Ки-Ман Шао, Жуо-Сон Жэнг, Алексей Наумов

В данной работе нами получены оценки типа Берри-Эссена точности нормальной аппроксимации для итераций линейной стохастической аппроксимации с усреднением Поляка-Рупперта и убывающим шагом. Наши результаты показывают, что наилучшая скорость нормальной аппроксимации достигается при выборе наиболее агрессивного шага $\alpha_k \asymp k^{-1/2}$. Также мы показываем, как этот результат может быть использован для построения неасимптотических доверительных интервалов для оценки параметров в линейной стохастической аппроксимации с использованием мультипликативного бутстрапа. Мы иллюстрируем наши результаты на примере задачи оценке политики в обучении с подкреплением.

О формуле Ито для винеровского процесса

Смородина Наталия Васильевна
ПОМИ РАН
smorodina@pdmi.ras.ru

Показано, что в классической формуле Ито для винеровского процесса $w(t)$ можно заменить вторую производную, понимаемую в смысле обычного дифференцирования, на вторую производную в смысле дифференцирования обобщенных функций. Это можно сделать в случае, когда первая производная принадлежит классу $L_{2,loc}(\mathbb{R})$. Ранее, в работе [1] при тех же условиях была получена другая форма последнего слагаемого в формуле Ито.

Теорема. *Пусть функция* $v \in L_{2,loc}(\mathbb{R})$, *функция* V *есть первообразная* v *(т.е.* $V' = v$*), а обобщенная функция* v' *есть производная* v *в смысле дифференцирования обобщенных функций. Пусть* $\{v_\varepsilon\}$ *— произвольное семейство абсолютно непрерывных функций, такое, что для любого* $N > 0$ *выполнено* $\lim_{\varepsilon\to 0} \|v_\varepsilon - v\|_{L_2[-N,N]} = 0$. *Тогда*

1. *Существует предел по вероятности* $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^t v'_\varepsilon(w(\tau))\,d\tau$, *и этот предел не зависит от выбора семейства* v_ε. *Для данного предела используем обозначение* $\int_0^t v'(w(\tau))\,d\tau$.
2. *Справедлива формула Ито* $V(w(t)) = V(w(0)) + \int_0^t v(w(\tau))\,dw(\tau) + \frac{1}{2}\int_0^t v'(w(\tau))\,d\tau$.

[1] H. Föllmer , Ph. Protter , A. N. Shiryayev, *Quadratic Covariation and an Extension of Ito's Formula ,* Bernoulli, 1/2(1995), 149–169.

Быстрый состоятельный сеточный алгоритм кластеризации

Тарасенко Антон Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
tarasenko@math.nsc.ru
Соавторы: Бериков В. Б., Пестунов И. А., Рузанкин П. С., Рылов С. А.

Предлагается быстрый и состоятельный сеточный алгоритм, который оценивает количество кластеров для наблюдений в R^d и строит их приближения. Временная сложность алгоритма может быть сведена к линейной без потери свойства состоятельности.

Несмотря на то, что сеточные алгоритмы демонстрируют впечатляющую производительность, обеспечивая эффективную обработку больших наборов данных, их эвристическая природа часто оставляет место для неопределенности относительно достоверности их результатов. Теоретическая состоятельность, однако, обозначает способность алгоритма, при определенных условиях, давать корректные оценки как количества кластеров, так и их состава. Помимо теоретического доказательства состоятельности, мы проводим численные симуляции и тесты на реальных наборах данных, чтобы сравнить производительность нового алгоритма с устоявшимися сеточными методами.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-281.

Предельные теоремы для спектра случайных матриц с блочной структурой

Тихомиров Александр Николаевич
Коми научный центр
antikhom@gmail.com

Рассматриваются матрицы смежности двудольных графов и циркулянтные блочные матрицы со случайными блоками большой размерности. Получены достаточные условия сходимости эмпирических спектральных функций распределения к предельным законам. Рассмотрена модель произведения циркулянтных блочных матриц и сформулированы достаточные условия сходимости эмпирической функции распределения сингулярных чисел для случая независимых несимметричных блоков.

Распределение числа целых точек внутри случайно сдвинутого многоугольника

Токмачев Александр Сергеевич
ПОМИ РАН
chief.tokma4eff@yandex.ru

Рассмотрим выпуклое тело K в $\mathbb{R}^d$. Пусть X обозначает количество точек решетки $\mathbb{Z}^d$, попадающих внутрь копии K, сдвинутой на случайный вектор из $[0,1]^d$. Хорошо известно, что в таком случае математическое ожидание X равно объему тела K. В докладе будут представлены результаты, связанные с распределением величины X в случае, когда K — многоугольник, вершины которого являются точками решетки. В частности, будет приведено описание дисперсии X в геометрических терминах.

О приближениях для сумм слабо зависимых случайных величин

Ульянов Владимир Васильевич
МГУ имени М.В. Ломоносова и НИУ ВШЭ

Пусть $(X_i, i \in J)$ - семейство локально зависимых неотрицательных целочисленных случайных величин. Рассмотрим сумму $W = \sum_{i \in J} X_i$. Сначала мы устанавливаем общую верхнюю границу для $d_{TV}(W, M)$, используя метод Стейна, где целевая переменная M является смесью распределения Пуассона и биномиального или отрицательного биномиального распределения.В качестве приложений мы получаем оптимальный порядок $O(|J|^{-1})$ ошибки приближения для распределений (k_1, k_2)- серий и k-серий. Наши результаты значительно улучшают существующие результаты порядка $O(|J|^{-1/2})$. Более того, используя недавний результат Бобкова и Ульянова [1] по уточнению центральной предельной теоремы для независимых слагаемых с целыми значениями, мы получаем асимптотические разложения для функции распределения W. Доклад основан на препринте [2].

[1] С. Г. Бобков, В. В. Ульянов, *Поправка Чебышёва–Эджворта в центральной предельной теореме для целочисленных независимых слагаемых*, Теория вероятностей и ее применения, 66(2022), вып.4, 676–692.

[2] Zhonggen Su, Vladimir V. Ulyanov, Xiaolin Wang, *Approximation of Sums of Locally Dependent Random Variables via Perturbation of Stein Operator*, https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.09770.

Об усиленной лемме Бореля–Кантелли и динамических системах

Фролов Андрей Николаевич
Санкт-Петербургский государственный университет
a.frolov@spbu.ru

Пусть $\{A_n\}$– последовательность событий таких, что ряд из их вероятностей расходится. Пусть S_n– сумма индикаторов первых n событий из этой последовательности и $E_n = ES_n$. Сумму S_n можно рассматривать как число успехов в первых n зависимых испытаниях с меняющейся вероятностью успеха. Таким образом, мы имеем дело с обобщением схемы Бернулли. Естественными задачами для рассматриваемой схемы являются получение усиленного закона больших чисел и оценивание скорости сходимости в нем. При этом сумму S_n центрируют ее средним и нормируют некоторой функцией от него. Подобные результаты называют усиленными формами леммы Бореля–Кантелли. Если в качестве вероятностного пространства выступает пространство с мерой и сохраняющим эту меру преобразованием, то подобные результаты называют динамическими вариантами леммы Бореля–Кантелли. Они дают представление о статистических свойствах соответствующих динамических систем. В докладе обсуждаются варианты усиленной леммы Бореля–Кантелли и их применения к динамическим системам со степенным убыванием корреляций (не обязательно суммируемых).

Рационально-безгранично делимые распределения

Хартов Алексей Андреевич
ИППИ РАН им. А. А. Харкевича, Смоленский Государственный Университет
alexeykhartov@gmail.com

Рационально-безгранично делимые распределения — это новый класс вероятностных законов, который является естественным и весьма существенным расширением хорошо известного семейства *безгранично делимых законов*, играющих фундаментальную роль в теории вероятностей. По определению распределение называется рационально-безгранично делимым, если его свёртка с некоторым безгранично делимым распределением безгранично делима. Интересно, что характеристические функции, соответствующие таким распределениям, допускают представление Леви-Хинчина с немонотонной (в общем случае) спектральной функцией. Класс всех таких распределений выделен относительно недавно, но он уже нашел применения в физике, финансовой математике, теории чисел и других областях.

В докладе будет дан обзор новых и самых новых теоретических результатов о свойствах этого класса.

О предельных свойствах модели системы нейронов “интегрировать-и-сработать”

Храмов Александр Вадимович
ИМ СО РАН
a.khramov@g.nsu.ru

В работе изучается многомерный случайный процесс в непрерывном времени

$$Z(t) = (Z_1(t), \ldots, Z_N(t)),\ \ t > 0,$$

где N – число нейронов, Z_i – положительный потенциал i-го нейрона и процесс $Z(t)$ непрерывен справа и имеет конечные пределы слева. С течением времени потенциалы нейронов линейно снижаются, а при достижении нуля нейрон посылает сигналы всем остальным нейронам.

В предшествующих работах (см. [1, 2, 3]) подробно изучен случай, когда все сигналы между нейронами неотрицательны. Случай с наличием отрицательных связей рассмотрен лишь с жёсткими ограничениями на взаимосвязь между нейронами ([4]).

В данной работе рассмотрен случай двух нейронов, когда один из них (ингибитор) посылает неотрицательные импульсы, а другой (возбудитель) — неположительные. Рассматривается положительная возвратность процесса.

[1] Cottrell M., *Mathematical analysis of a neural network with inhibitory coupling*, Stochastic Processes and their applications, 40.1 (1992), 103-126.

[2] Karpelevich F., Malyshev V. A., Rybko A. N., *Stochastic evolution of neural networks*, Markov Processes and Related Fields, 1.1 (1995), 141-161.

[3] Prasolov T. V., *Stochastic stability of a system of perfect integrate-and-fire inhibitory neurons*, Сибирские электронные математические известия. 17.0 (2020), 971-987.

[4] Cottrell M., Turova T. S., *Use of an hourglass model in neuronal coding*, Journal of applied probability, 37.1 (2000), 168-186.

Пороговые вероятности для свойств раскрасок случайных гиперграфов

Шабанов Дмитрий Александрович
МФТИ

Доклад посвящен исследованию пороговых вероятностей для свойств раскрасок случайных гиперграфов в классической биномиальной модели $H(n,k,p)$. Данная модель представляет собой схему Бернулли на множестве k-подмножеств n-элементного множества (вершин): каждое такое подмножество включается в $H(n,k,p)$ в качестве ребра независимо от других с вероятностью $p \in (0,1)$. Мы рассматриваем ситуацию, когда $k \geq 2$ фиксировано, $n \to \infty$, а $p = p(n)$ некоторым образом зависит от n. Цель работы — поиск точных пороговых вероятностей для свойств дробной $(a:b)$-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$. Напомним, что для фиксированных целых чисел $a > b \geq 1$ функция $\widehat{p}_{a,b} = \widehat{p}_{a,b}(n)$ является точной пороговой вероятностью для свойств дробной $(a:b)$-раскрашиваемости в модели $H(n,k,p)$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} P(H(n,k,p) \text{ — } (a:b)\text{-раскрашиваем}) = \begin{cases} 1, & \forall np(n) \leq (1-\varepsilon)\widehat{p}_{a,b}(n), \\ 0, & \forall np(n) \geq (1+\varepsilon)\widehat{p}_{a,b}(n). \end{cases}$$

В докладе мы представим ряд результатов об оценках $\widehat{p}_{a,b}$ для некоторых значений пар (a,b).

Существование марковского равновесия для игр среднего поля

Шатилович Дмитрий Вячеславович
МГУ имени М. В.Ломоносова
dmitriy.shatilovich@math.msu.ru

Задача оптимального управления, которая соответствует исследованию марковского равновесия в игре среднего поля с неуправляемой диффузией и линейным по управлению сносом, имеет вид

$$\begin{cases} J(\alpha(\cdot), \mu_\cdot) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f\left(t, X_t, \mu_t, \alpha(t, X_t)\right) dt + g(X_T, \mu_T)\right] \longrightarrow \inf\limits_{\alpha(\cdot)\in\mathcal{A}}, \\ dX_t = \sigma\left(t, X_t, \mu_t\right) dW_t + \left(b\left(t, X_t, \mu_t,\right) + \alpha(t, X_t)\right) dt, \\ \mu_t = \mathrm{Low}(X_t). \end{cases}$$

Игры среднего поля были введены независимо в работах [1], [2] и заключались в исследовании определенного класса стохастических дифференциальных игр с большим числом игроков. В играх среднего поля каждый игрок учитывает поведение других агентов через эмпирическое распределение. В литературе по статистической физике это распределение принято называть средним полем.

Три основных вопроса, которые рассматриваются в теории игр среднего поля, касаются существования решения, единственности решения и сходимости равновесия в случае конечного числа игроков. Доклад будет посвящен вопросу существования решения. Существование марковского равновесия для игр среднего поля было доказано в работе [3]. В докладе будет рассмотрен новый метод исследования игр среднего поля, позволяющий обосновать существование марковского равновесия при предположениях, более слабых, чем в работе [3]. Так условие липшицевости коэффициентов уравнения будет заменено условием непрерывности. Ключевую роль в данном подходе играют уравнения Колмогорова, которые подробно исследовались в работе [4].

[1] M. Huang, R. Malhamé, P. Caines, Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean–Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle, Commun. Inf. Syst. 6 (3) (2006) 221–252.

[2] J.M. Lasry, P.L. Lions, Mean field games, Jpn. J. Math. 2 (2007) 229–260.

[3] Lacker, D. Mean field games via controlled martingale problems: existence of markovian equilibria. Stochastic Processes and their Applications, 125(7):2856–2894.

[4] V. I. Bogachev, M. Röckner, S. V. Shaposhnikov. Uniqueness Problems for Degenerate Fokker–Planck–Kolmogorov Equations. Journal of Mathematical Sciences, vol. 207, p. 147–165.

Оценки для характеристических функций при известных трех моментах

Шевцова Ирина Геннадьевна
МГУ имени М. В. Ломоносова
ishevtsova@cs.msu.ru

В докладе будут представлены оценки для характеристических функций в терминах первых трех моментов, влекущие, например, разнообразные уточнения формулы Тейлора. Рассматриваемый случай, когда в оценки входят моменты порядка не выше трех, имеет краеугольное значение для построения оценок скорости сходимости в таких фундаментальных теоремах теории вероятностей, как закон больших чисел и центральная предельная теорема. При этом некоторые из представленных оценок допускают обобщения (уточнения) с моментами более высокого порядка.

Вероятности нижних больших уклонений ветвящихся процессов в случайной среде в первой зоне уклонений

Шкляев Александр Викторович
МИАН
ashklyaev@gmail.com

Исследование вероятностей больших уклонений ветвящихся процессов в случайной среде (ВПСС) началось с работ М.В. Козлова 2006 и 2009 годов, в которых рассматривалась точная асимптотика вероятностей больших уклонений для случая геометрического числа непосредственных потомков одной частицы, позднее результаты были обобщены до локальной асимптотики К.Ю. Денисовым в 2021 году. В 2018-2022 рядом исследователей был совершен прорыв, позволивший исследовать точную асимптотику вероятностей больших уклонений без предположений о типе распределения, см. [1-3].

Асимптотика вероятностей нижних больших уклонений для надкритических ВПСС исследована гораздо хуже. В этой области К.Ю. Денисовым в 2022-2024 годах был получен ряд результатов в случае геометрического распределения, в случае общего распределения известна лишь грубая асимптотика (см. [4]). Настоящая работа является первой работой, исследующей точную асимптотику вероятностей нижних больших уклонений без предположений о типе распределения.

Более конкретно, пусть $\{Z_n\}$ — ВПСС, для количества непосредственных потомков одной частицы которого мы будем использовать общее обозначение X, $\{S_n\}$ — случайное блуждание с шагами $\{\xi_i\}$, $\mu > 0$ — среднее сопровождающего блуждания. Рассматривается асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(0 < \ln Z_n < x), \quad x/n \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq (0, \mu).$$

Для такого рода вероятностей в строго надкритическом случае ($m(-1) = \mathbf{E}\xi e^{-\xi} > 0$) рассматривают две зоны больших уклонений: верхняя $x/n \in (m(-1), \mu)$ и нижняя $x/n \in (0, \mu)$. В работе [4] показано, что логарифмическая асимптотика при этом имеет существенно различный вид.

Настоящая работа посвящена асимптотике указанных вероятностей в верхней зоне уклонений. Положим $m^* = m(-1)$ в строго надкритическом случае и $m^* = 0$ в слабо докритическом ($\mathbf{E}\xi e^{-\xi} < 0$) или умеренно докритическом ($\mathbf{E}\xi e^{-\xi} = 0$) случаях.

Теорема. *Пусть при некотором* $h^- \in (-1, 0)$ *выполнены условия* $\mathbf{E}e^{h\xi} < +\infty$, $\mathbf{E}X^{1-h} < +\infty$, $h \in (h^-, 0]$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(0 < \ln Z_n < x) \sim I\left(\frac{x}{n}\right) \mathbf{P}(S_n \le x), \quad I(\theta) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}^{(h_\theta)}\left(\left(\frac{Z_n}{e^{S_n}}\right)^{h_\theta}; Z_n > 0\right),$$

причем асимптотика равномерна по x/n *из любого подкомпакта внутри* (m^*, μ).

Для получения указанной теоремы потребовались новые оценки для гармонических моментов естественного мартингала для ВПСС, расширяющие ранее полученные оценки I. Grama, Q. Liu, E. Miqueu (2017, 2023). Отметим, что нам удалось получить результаты для общего ВПСС, в то время как предыдущие результаты касались процессов с нулевой вероятностью гибели частицы.

[1] Шкляев А. В. Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. II //Дискретная математика. – 2020. – Т. 32. – №. 1. – С. 135-156.

[2] Buraczewski D., Dyszewski P. Precise large deviation estimates for branching process in random environment. // preprint: arXiv:1706.03874. 2017.

[3] Struleva M. A., Prokopenko E. I. Integro-local limit theorems for supercritical branching process in a random environment //Statistics & Probability Letters. – 2022. – Т. 181. – С. 109234.

[4] Bansaye V., Böinghoff C. Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2013. – Т. 282. – С. 15-34.

О росте случайных разбиений с обобщенной мерой Ювенса

Якубович Юрий Владимирович
Санкт-Петербургский государственный университет
y.yakubovich@spbu.ru

Мерой Ювенса с параметром $\theta > 0$ называют вероятностную меру на разбиениях целого числа n, получаемую как образ вероятностной меры на перестановках n объектов, для которой мера пропорциональна параметру θ в степени количества циклов, при отображении, сопоставляющей перестановке разбиение на длины ее циклов. Под обобщенной мерой Ювенса мы понимаем меру, параметризованную последовательностью неотрицательных чисел $(\theta_k)_{k\geq 1}$, где вес θ_k отвечает циклам длины k. Эти меры активно изучаются последнее время, см. [1, 2] и ссылки в этих статьях. В докладе описывается явная конструкция построения случайных разбиений путем последовательного марковского добавления в него слагаемых, начиная с пустого разбиения нуля, со следующим свойством: при условии, что на некотором шаге получилось разбиение числа n, это будет случайное разбиение с обобщенным распределением Ювенса. Приводятся точные и асимптотические результаты об этой модели, а также некоторые следствия из них.

[1] N. M. Ercolani, D. Ueltschi, *Cycle structure of random permutations with cycle weights*, Random Struct. Alg., 44 (2014), 109–133.

[2] А. Л. Якымив, *О порядке случайной подстановки с весами циклов*, Теория вероятн. и ее примен., 63:2 (2018), 261–283.

Спектральные методы и их применения в стохастическом анализе

Яровая Елена Борисовна
МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, МИАН им. В. А. Стеклова РАН
elena.yarovaya@math.msu.ru

Развитие спектральной техники позволит получить предельные теоремы о численностях частиц в ветвящемся случайном блуждании по точкам многомерной решетки в предположении существования источников ветвления (т.е. точек решетки, в которых возможны размножение и гибель частиц) как с положительной, так и с отрицательной интенсивностью ветвления. Будут представлены результаты о связи между структурой спектра эволюционного оператора и геометрическим расположением источников ветвления на многомерной решетке. Как правило, в более ранних исследованиях случайное блуждание, лежащее в основе процесса предполагалось симметричным Показано, что полученные результаты остаются справедливыми при замене условия самосопряженности оператора, задающего случайное блуждание, на более слабое условие подобия самосопряженному. Таким образом, с привлечением спектральной техники решены задачи, связанные с многоточечными возмущениями операторов, возникающих в эволюционных уравнениях для первых моментов численностей частиц в многотипных ветвящихся случайных блужданиях и доказан ряд новых предельных теорем о поведении популяций и субпопуляций частиц в ветвящемся случайном блуждании.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 23-11-00375, в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

Теория чисел и дискретная математика

Формы Якоби и модулярные дифференциальные уравнения

Адлер Дмитрий Всеволодович
МЦМУ им. Леонарда Эйлера
`dmitry.v.adler@gmail.com`

Одним из примеров автоморфных форм, возникающих в различных областях математики, являются формы Якоби. Впервые возникшие в работах И.И. Пятецкого-Шапиро, классические формы Якоби были подробно изучены в книге “Теория форм Якоби” М. Эйхлера и Д. Загье.

Для классических модулярных форм можно определить дифференциальный оператор, увеличивающий вес модулярной формы на 2. Как следствие, можно получить дифференциальные уравнения на модулярные формы относительно этого оператора. Примерами таких уравнений являются система дифференциальных уравнений Рамануджана и уравнение Канеко-Загье.

Оказывается, что для форм Якоби также можно определить аналогичный дифференциальный оператор, являющийся своего рода эллиптизацией оператора теплопроводности. В своём докладе я расскажу об этом дифференциальном операторе, о дифференциальных уравнениях на формы Якоби, а также о возникающих приложениях. Данный доклад основан на совместных работах с В.А. Гриценко.

О первых моментах L-функций симметрического квадрата модулярных форм

Балканова Ольга Германовна
МИАН РАН
balkanova@mi-ras.ru
Соавторы: Д. А. Фроленков

Теория L-функций является одним из основных направлений современной аналитической теории чисел. Особый интерес для изучения представляют собой свойства данных функций на критической прямой и в центральной точке.

В докладе мы рассмотрим L-функции симметричного квадрата, определяемые рядом Дирихле с коэффициентами, равными коэффициентам Фурье модулярных форм от квадрата индекса суммирования. А именно, мы докажем новые асимптотические формулы для первого момента заданных L-функций в центральной точке в предположении, что вес или уровень модулярной формы стремится к бесконечности.

Пороговая вероятность наличия триангуляции k-угольника в случайном графе

Вахрушев Степан Викторович
Санкт-Петербургский государственный университет, Московский физико-технический институт
vakhrushev.sv@phystech.edu
Соавторы: Жуковский Максим Евгеньевич

В 1991-ом году Бела Боллобаш и Алан Фриз нашли пороговую вероятность для нахождения копии тригнуляции треугольника в случайном графе $G(n,p)$ с точностью до логарифмического множителя. В нашей работе мы находим данную пороговую вероятность триангуляции k-угольника с точностью до константы. Для этого мы используем недавно разработанную технологию процесса фрагментации и q-spread леммы. Оказывается, что необходимое условие на соотношение количества вершин и рёбер в подграфе в случае планарной триангуляции эквивалентно тому, что любой простой цикл ограничивает небольшое количество вершин. Более точно, отношение длины цикла к количеству "внутренних" вершин не менее чем данное отношение для исходной границы k-угольника: $\frac{k}{n-k}$. Данное условие проверяется в работе для конкретной триангуляции, состоящей из вложенных друг в друга циклов.

[1] B. Bollobás, A. M. Frieze, *Spanning maximal planar subgraphs of random graphs*, Random Structures & Algorithms, **2**:2 (1991) 225-231.

[2] A.E. Díaz, Y. Person, *Spanning F-cycles in random graphs*, Combinatorics, Probability and Computing, **32**:5 (2023) 833-850.

[3] J. Kahn, B. Narayanan and J. Park, *The threshold for the square of a Hamilton cycle*, Proceedings of the American Mathematical Society **149** (2020), 3201-3208.

[4] O. Riordan, *Spanning subgraphs of random graphs*, Combinatorics, Probability and Computing, **9**:2 (2000), 125-148.

О дистанционных графах, вложенных в векторное пространство над конечным полем

Воронов Всеволод Александрович
Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
v-vor@yandex.ru
Соавторы: Д. Д. Черкашин

Рассмотрим граф $G_q^{(n)}$, вершинами которого являются точки n-мерного векторного пространства $\mathbb{F}_q^n$, где $q = p^k$, p простое; ребрами соединены пары точек $x, y \in \mathbb{F}_q^n$, евклидово расстояние между которыми равно единице. Свойства данного класса графов изучались в работах А. Иосевича и соавторов [1, 2]. В частности, из оценок мощности подмножества $\mathbb{F}_q^n$, в котором реализуются все расстояния, следует, что хроматическое число $\chi(G_q^{(n)})$ стремится к бесконечности при фиксированном $n \geq 2$ и $q \to \infty$. При этом оценка, которую можно получить на основе работы [1], при малых q является достаточно грубой.

В докладе будут представлены новые оценки хроматических чисел $G_q^{(n)}$, полученные методами спектральной теории графов, а также оценки, основанные на явных построениях.

[1] A. Iosevich, M. Rudnev, *Erdos distance problem in vector spaces over finite fields*, Transactions of the American Mathematical Society, 359 (2007), 6127–6142.

[2] A. Iosevich, H. Parshall, *Embedding distance graphs in finite field vector spaces*, J. Korean Math. Soc., 56 (2019), 1515–1528.

О группах, порождённых инволюциями таблиц Юнга

Германсков Михаил Витальевич
МЦМУ им. Леонарда Эйлера, СПбГУ
mgermanskov@gmail.com

Каждой диаграмме Юнга можно сопоставить группу, действующую на множестве таблиц Юнга той же формы. Эта группа порождена инволюциями, которые меняют местами числа i и $i+1$ в таблице, если соответствующие клетки не соседние; в противном случае таблица остаётся неизменной. Такие группы, отвечающие двустрочечным диаграммам, являются либо знакопеременными, либо симметрическими. В докладе я расскажу, как различать эти два случая, глядя на двоичные записи длин двух строк.

[1] А. М. Вершик, Н. В. Цилевич, “Группы, порожденные инволюциями ромбовидных графов, и деформации ортогональной формы Юнга”, Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. XXX, Зап. научн. сем. ПОМИ, 481, ПОМИ, СПб., 2019, 29–38

[2] М. В. Германсков, *“Описание групп, порожденных инволюциями двухстрочечных таблиц Юнга”*, Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XXXIV, Зап. научн. сем. ПОМИ, 517, ПОМИ, СПб., 2022, 70–81

[3] М. Германсков, *“Классификация групп, порожденных инволюциями двустрочечных таблиц Юнга”*, Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XXXV, Зап. научн. сем. ПОМИ, 528, ПОМИ, СПб., 2023, 107–115

О некоторых вопросах цепных дробей с рациональными неполными частными с левым сдвигом

Дмитрий Александрович Долгов
ИВМиИТ КФУ
Dolgov.kfu@gmail.com

Цепные дроби с рациональными неполными частными с левым сдвигом получаются при помощи обобщенного алгоритма Соренсона вычисления НОД двух натуральных чисел. Один из вариантов таких дробей выглядит следующим образом:

$$\cfrac{y_0}{x_0}{k_0}^{e_0}+\cfrac{\delta_0}{\left(\cfrac{x_0 y_1}{x_1}{k_1}^{e_1}+\cfrac{\delta_1}{\left(\ddots+\cfrac{y_n {k_n}^{e_n}\prod\limits_{\substack{i<n,\\ i\not\equiv n \mod 2}} x_i}{x_n\prod\limits_{\substack{j<n,\\ j\equiv n \mod 2}} x_j}\right)}\right)},$$

где величина δ_i равняется либо 1, либо -1 в зависимости от знака линейной комбинации входных чисел в алгоритме Соренсона, x_i, y_i – ненулевые целые числа, а k_i – элементы заранее зафиксированной последовательности $\mathbb{K}$ (см. [1, 2]).

Многие классические результаты теории цепных дробей в данном случае не будут наблюдаться. Во-первых, разложение в такую дробь может быть неоднозначно. Во-вторых, рассматривая бесконечные цепные дроби, в общем случае ничего нельзя сказать о монотонности последовательности подходящих дробей (аналогично и континуантов таких дробей). Из этого можно заключить, что приближение иррациональных чисел при помощи таких дробей в общем случае может не выполняться. В докладе предполагается обсудить эти вопросы, представить условия при которых для данного класса дробей представленные задачи будут эффективно решаться.

[1] J. Sorenson, *Two Fast GCD Algorithms*, J. of Algorithms, vol. 16, no. 1 (1994), 110-144.

[2] D. A. Dolgov, *On the continued fraction with rational partial quotients*, Chebyshevskii Sbornik, (2024).

О минимальных многочленах остаточных дробей алгебраических иррациональностей

Добровольский Николай Николаевич
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
nikolai.dobrovolsky@gmail.com

В докладе рассматриваются вид и свойства минимальных многочленов остаточных дробей в разложении алгебраических чисел в цепные дроби.

Показано, что для чисто-вещественных алгебраических иррациональностей α степени $n \geq 2$, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, последовательность остаточных дробей α_m является последовательностью приведённых алгебраических иррациональностей.

Дано определение обобщённого числа Пизо, которое отличается от определения чисел Пизо отсутствием требования целочисленности.

Показано, что для произвольной вещественной алгебраической иррациональности α степени $n \geq 2$, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, последовательность остаточных дробей α_m является последовательностью обобщённых чисел Пизо.

Найдена асимптотическая формула для сопряжённых чисел к остаточным дробям обобщённых чисел Пизо. Из этой формулы вытекает, что сопряжённые к остаточной дроби α_m концентрируются около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ либо в интервале радиуса $O\left(\frac{1}{Q_{m-1}^2}\right)$ в случае чисто-вещественной алгебраической иррациональности, либо в круге такого же радиуса в общем случае вещественной алгебраической иррациональности, имеющей комплексные сопряжённые числа.

Установлено, что, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, справедлива рекуррентная формула для неполных частных q_m разложения вещественной алгебраической иррациональности α, выражающая q_m через значения минимального многочлена $f_{m-1}(x)$ для остаточной дроби α_{m-1} и его производной в точке q_{m-1}.

Найдены рекуррентные формулы для нахождения минимальных многочленов остаточных дробей с помощью дробно-линейных преобразований. Композиция этих дробно-линейных преобразований является дробно-линейным преобразование, переводящем систему сопряжённых к алгебраической иррациональности α в систему сопряжённых к остаточной дроби, обладающую ярко выраженным эффектом концентрации около рациональной дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

Установлено, что последовательность минимальных многочленов для остаточных дробей образует последовательность многочленов с равными дискриминантами.

В заключении поставлена проблема о структуре рационального сопряжённого спектра вещественного алгебраического иррационального числа α и о его предельных точках.

Семейства перестановок без s-паросочетаний

Иноземцев Эдуард Леонидович
Московский физико-технический институт
eduard_inozemtsev@bk.ru
Соавторы: Колупаев Дмитрий, Купавский Андрей

Обозначим через S_n семейство всех перестановок $[n] \to [n]$. Перестановки $\sigma, \pi \in S_n$ пересекаются, если найдется такой элемент $i \in [n]$, что $\sigma(i) = \pi(i)$. Семейство $\mathcal{F} \subset S_n$ называется пересекающимся, если любые два множества $A, B \in \mathcal{F}$ пересекаются. Деза и Франкл [1] показали, что пересекающееся семейство перестановок имеет размер не более чем $(n-1)!$. Через $\nu(\mathcal{F})$ обозначим максимальное количество попарно непересекающихся элементов $\mathcal{F}$. Мы доказали следующий результат. Пусть $\mathcal{F} \subset S_n$, $\nu(\mathcal{F}) < s$ и $s \leq \frac{n}{C \log_2(n)}$, тогда $|\mathcal{F}| \leq (s-1)(n-1)!$. Основным инструментом доказательства является техника разреженных приближений (spread approximations) из статьи Купавского и Захарова [2].

[1] M. Deza, P. Frankl, *On the maximum number of permutations with given maximal or minimal distance*, J. Combin. Theory, Ser. A 22 (1977), 352–360.

[2] A. Kupavskii and D. Zakharov, *Spread approximations for forbidden intersections problems*, arXiv:2203.13379v2 (2022).

Комбинаторный поиск при шуме

Кабатянский Григорий Анатольевич
Сколтех
g.kabatyansky@skoltech.ru

Начиная с задачи (игры) Реньи-Улама хорошо известно, что присутствие шума может сделать простую комбинаторную задачу нетривальной, например, поиск единственного дефектного элемента среди N, если разрешается задавать вопросы, на которые оракул отвечает ДА или НЕТ, но один раз оракул может обмануть, см. [1]. В докладе мы рассмотрим задачу о поиске фальшивых монет на неточных весах, да еще и в предположении, что веса фальшивых монет могут быть различны и неизвестны. Мы рассматриваем шум комбинаторной, а не случайной природы, например, суммарная величина шума (в той или иной метрике) не превышает некий порог. Известно, что эта задача тесно связана с задачей поиска носителя разреженного вектора по линейным зашумленным измерениям. Мы покажем, что для ее решения достаточно использовать не так называемые RIP матрицы, см. [2-4], а их ослабленный вариант, когда для матрицы H и любого K-разреженного вектора $\mathbf{x}$ (т.е. в нем не более K координат, отличных от нуля) для некоторого $\delta < 1$ справедливо неравенство $(1-\delta)||\mathbf{x}|| \leq ||H\mathbf{x}||$.

[1] Ulam S.M. *Adventures of a Mathematician*. New York: Scribner, 1976.

[2] Donoho D.L. *Compressed Sensing*, IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. № 4. P. 1289–1306.

[3] Candes E.J., Tao T. *Near-Optimal Signal Recovery From Random Projections: Universal Encoding Strategies?*, IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. № 12. P. 5406–5425.

[4] Кашин Б.С., Темляков В.Н. *Замечание о задаче сжатого измерения*, Матем. заметки. 2007. Т. 82. № 6. С. 829–837.

Суммы квадратов, функции Бесселя и последовательности модулярных форм

Калмынин Александр Борисович
НИУ ВШЭ и МИАН им. В. А. Стеклова
alkalb1995cd@mail.ru

Задача о промежутках между суммами двух квадратов — один из самых известных открытых вопросов в аналитической теории чисел. Оказывается, что данную задачу можно связать с поведением некоторой функции от двух переменных, которая обладает свойствами, сходными с тета-функцией Якоби. В докладе будет представлена конструкция данной функции в виде ряда с функциями Бесселя и её связь с теорией модулярных и квазимодулярных форм при помощи модулярных дифференциальных операторов. Кроме того, мы покажем, что её разложение в ряд Тейлора по одной из переменных может быть описано в терминах дифференциальной рекуррентной последовательности рациональных функций, обладающих очень специальными свойствами. Данная конструкция обобщается на случай произвольных модулярных форм относительно конгруэнц-подгруппы уровня 2. В частности, в таких терминах можно переформулировать гипотезу Лемера о необращении в нуль τ-функции Рамануджана.

Теорема Ван дер Вардена в комбинаторике слов

Кирова Валерия Орлановна
МГУ им. М. В. Ломоносова
kirova_vo@mail.ru

Теорема Ван дер Вардена, которую А. Я. Хинчин называл жемчужиной теорией чисел, внесла большой вклад в комбинаторику слов, положив в 2000 г. начало исследованию функции арифметической сложности бесконечных слов, обобщив понятие классической функции комбинаторной сложности. В своей работе, Avgustinovich S. V., Fon-der-Flaass D. G., Frid A. помимо введения понятия функции арифметической сложности, представили теоремы Семереди и Ван дер Вардена в терминах комбинаторики слов. В 1996 г. Leibman A., Bergelson V. представили теорему Ван дер Вардена для полиномиального случая. Эта теорема положила начало исследованию функции полиномиальной сложности — более обобщенной модификацией комбинаторной и арифметической сложности. Введенные функции прежде всего были рассмотрены на классе слов с наименьшей комбинаторной сложностью — словах Штурма, для которых получены интересные оценки.

[1] Hedlund G.A. , Morse M. *Symbolic dynamics* Amer. J. Math, 1938, 815-866.

[2] Avgustinovich S., Fon-Der-Flaass D., Frid A. *Arithmetical complexity of infnite words* Proc. Words, Languages and Combinatorics III, 2000. Singapore: World Scientifc, 2003. P. 51-62.

[3] Leibman A., Bergelson V. *Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemeredi's theorems*, Journal of the American Math Society, Vol. 9, 1996, 725-753.

[4] Kirova V.O., Godunov I.V. *On the complexity functions of Sturmian words* Chebyshevskii sbornik, 2023, vol. 24, no. 4, pp. 63-44.

О максимальном количестве k-клик в графе расстояний

Короткова Дарья Алексеевна
Студент МФТИ
alekhina.da@phystech.edu
Соавторы: Андрей Купавский

Рассматривается вопрос об оценке максимального числа k-клик $c_k(G^{(n)})$, содержащихся в качестве подграфов в графе единичных расстояний (графе диаметров) $G^{(n)}$ при заданном количестве вершин n в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Показывается, что при достаточно больших n графы, максимизирующие значение $c_k(G^{(n)})$, удовлетворяют так называемой конструкции Ленца.

[1] Konrad J. Swanepoel, *Unit distances and diameters in Euclidean spaces*, Discrete & Computational Geometry (2009), 1-27.

[2] P. Erdős, *On the number of complete subgraphs contained in certain grap*, Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Science (1962).

[3] Jürgen Eckhoff, *A new Turán-type theorem for cliques in graphs*, Discrete Mathematics (2004), 113-122.

Обзор результатов о полиадических числах Лиувилля

Крупицын Евгений Станиславович
Московский педагогический государственный университет
krupitsin@gmail.com

В 1844 г. Ж. Лиувилль [1,2] опубликовал теорему, согласно которой алгебраическое число не может хорошо приближаться рациональными числами и построил пример трансцендентного числа? допускающего сколь угодно высокий порядок приближения рациональными числами. Фактически работы Лиувилля были началом теории трансцендентных чисел.

Исследования, связанные с числами Лиувилля актуальны по сей день. Можно отметить таких ученых как P. Erdös, M. Waldschmidt и многие другие.

Доклад посвящен обзору результатов о полиадических числах Лиувилля.

[1] J. Liouville, *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même reductible à des irrationelles algébriques* , Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), 1844, no. 18, pp. 883–885.

[2] J. Liouville, *Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationelles algébriques inséré dans le Compte rendu de la dernière séance*, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), 1844, no. 18, pp. 910–911.

Экстремальные задачи о перестановках

Купавский Андрей Борисович
МФТИ, СПБГУ, КМЦ
kupavskii@ya.ru

Экстремальная комбинаторика изучает наибольшие структуры с заданными ограничениями. Данный доклад посвящен задачам в духе экстремальной теории множеств, которые при этом в качестве класса объектов рассматривают перестановки. В частности, я расскажу про задачу Франкла и Дезы о t-пересекающихся перестановках, а также о более общих результатах, касающихся семейств перестановок с запрещёнными пересечениями и запрещёнными подконфигурациями.

Неравенство Эрдёша для примитивных множеств

Кучерявый Петр Алексеевич
НИУ ВШЭ
peter.ktchr@gmail.com

Множество натуральных чисел A называется примитивным, если никакой элемент A не делит другой элемент A. Например, множество $A = \{m, m+1, \dots, 2m-1\}$ является примитивным. Обозначим $\Omega(n)$ количество простых делителей n с учетом кратности. Для любого k множество $\mathbb{P}_k = \{n : \Omega(n) = k\}$ также является примитивным множеством. Эрдёш в 1935 году доказал, что $\sum_{a\in A} \frac{1}{a \log a}$ равномерно ограничено по всем выборам примитивного множества A. Это утверждение допускает такое обобщение. Положим $f_z(A) = \sum_{a\in A} \frac{z^{\Omega(a)}}{a(\log a)^z}$, где $z \in \mathbb{R}_{>0}$. Тогда $f_z(A)$ равномерно ограничено по всем выборам примитивного множества A при фиксированном $z \in (0, 2)$. Мы обсудим это утверждение, а также некоторые другие обобщения классических результатов про примитивные множества. В частности будет обсуждаться асимптотика $f_z(\mathbb{P}_k)$ при растущем k.

Полиномиальные зависимости в задаче Франкла-Фюреди о запрещенных подсолнухах с фиксированным размером ядра

Носков Федор Андреевич
Московский физико-технический институт
noskov.fa@phystech.edu
Соавторы: Андрей Купавский

Назовем систему s различных множеств $S_1, \dots, S_s$ подсолнухом с яром размера $t-1$, если существует множество C размера $t-1$ такое, что любые два множества S_i, S_j пересекаются ровно по C: $S_i \cap S_j = C$. В 1987 году Франкл и Фюреди рассмотрели следующую задачу: каков максимальный размер подсемейства $\binom{[n]}{k}$, не содержащего подсолнуха с s лепестками и ядром размера $t-1$? Они нашли асимптотически точную верхнюю границу при n стремящемся к бесконечности и k, s, t фиксированными, $k \geq 2t-1$. В настоящем докладе мы найдем размер максимального семейства при $n \geq 2^{15} s t^2 k \log k$ и $k \geq 2t-1$ с точностью до аддитивной ошибки порядка $O\left(\frac{(2st)^t \log n}{n^{1/3}}\right)\binom{n-t}{k-t}$.

О влиянии перестановок переменных на энтропию определенных наборов значений мультипликативных функций

Преображенский Сергей Николаевич
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Мы рассматриваем наборы значений мультипликативных функций, возникающие при применении метода уменьшения энтропии Т. Тао в задаче о двухточечных корреляциях, и влияние перестановок переменных на энтропию этих наборов.

[1] S. Chowla, *The Riemann hypothesis and Hilbert's tenth problem*, Gordon and Breach, New York, 1965.

[2] T. Tao, *The logarithmically averaged Chowla and Elliott conjectures for two-point correlations*, Forum of Mathematics, Pi, 4, e8 (2016), 36 pages.

Числа, удаленные от простых, образуют базис порядка 2

Радомский Артём Олегович
Национальный исследовательский университет <<Высшая школа экономики>>
artyom.radomskii@mail.ru
Соавторы: Габдуллин Михаил Рашидович

Пусть $f(n)$ обозначает расстояние от n до ближайшего простого числа. Заметим, что из асимптотического закона распределения простых чисел следует, что среднее значение $f(n)$ (взятое по всем $n \leq N$) имеет порядок хотя бы $\ln N$. Пусть функция $g(n) \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Следуя Форду, Хис-Брауну и Конягину [1], назовем n *числом, удаленным от простых с функцией g*, если

$$f(n) \geq g(n) \ln n.$$

Напомним, что множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется *базисом порядка k*, если всякое достаточно большое натуральное число может быть представлено в виде суммы k слагаемых, принадлежащих A. Мы доказываем, что числа, удаленные от простых с функцией

$$g(n) = (\ln \ln n)^{1/325565},$$

образуют базис порядка 2. Более точно, справедлив следующий результат (см. [2]).

Теорема. *Всякое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде суммы $N = n_1 + n_2$, где*

$$f(n_i) \geq (\ln N)(\ln \ln N)^{1/325565},$$

для $i = 1, 2$.

[1] K. Ford, D.R. Heath-Brown, S. Konyagin, *Large gaps between consecutive prime numbers containing perfect powers*, Analytic number theory, 2015, Springer, Cham, pp. 83–92.

[2] М. Р. Габдуллин, А. О. Радомский, *Числа, удаленные от простых, образуют базис порядка 2*, Математический сборник, 215 (2024), выпуск 5, 47–70.

Проблема положительности перманента полистохастических матриц

Тараненко Анна Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
taa@math.nsc.ru

Многомерную матрицу назовем полистохастической, если все ее элементы неотрицательны, а сумма элементов в любой линии равна единице. Перманент матрицы равен сумме по всем ее диагоналям произведений элементов, стоящих на диагоналях.

Для двумерных полистохастических матриц теорема Биркгофа (которую можно получить из теоремы Кенига–Холла) утверждает положительность перманента, а гипотеза ван дер Вардена позволяет указать матрицы, на которой перманент достигает минимальных значений.

В данном докладе мы рассмотрим вопросы о положительности и минимуме перманента полистохастических матриц больших размерностей. В том числе, обсудим связь этих задач с поиском трансверсалей в латинских квадратах и гиперкубах, проблемой многомерного обобщения теоремы Кенига–Холла и с совершенными сочетаниями в однородных многодольных гиперграфах. Наконец, будет представлено несколько свежих результатов для полистохастических матриц малых порядков или матриц, получаемых при помощи различных произведений.

Хроматические числа плоского тора, склеенного из параллелограмма

Толмачев Александр Дмитриевич
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Кавказский математический центр
tolmachev.ad@phystech.edu
Соавторы: Дмитрий Протасов, Всеволод Воронов

Пусть $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^2$ — произвольные векторы ненулевой длины $l_1 = |\vec{v_1}|$ и $l_2 = |\vec{v_2}|$ с углом $\alpha = \angle(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ между ними. Рассмотрим плоский тор $T^2_{l_1,l_2,\alpha}$ как фактор-пространство по решетке $\mathbb{R}^2/L$, где $L = \{m\vec{v_1} + n\vec{v_2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Другими словами, рассматривается плоский тор, склеенный из параллелограмма, со сторонами l_1, l_2 и углом α между ними.

Соответствующая метрика $\rho_{l_1,l_2,\alpha}$ расстояния на таком торе может быть выражена через стандартную евклидову метрику на плоскости следующим образом:

$$\rho_{l_1,l_2,\alpha}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \min\left\{\Big|(x_2 - x_1 + ml_1) \cdot \vec{v_1} + (y_2 - y_1 + nl_2) \cdot \vec{v_2}\Big| : m, n \in \mathbb{Z}\right\},$$

что является кратчайшим расстоянием между точками $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ по поверхности тора (здесь и далее считаем, что $x_1, x_2, \in [0, l_1]$, $y_1, y_2 \in [0, l_2]$).

В работе рассматриваются оценки хроматических чисел тора $T^2_{l_1,l_2,\alpha}$ в зависимости от параметров l_1, l_2, α. Кроме того, получены некоторые оценки хроматических чисел с запрещенным расстоянием для такого тора.

Задача о хроматических числах различных множеств тесно связана с задачей о разбиении множеств на части меньшего диаметра. Данная работа расширяет предыдущие исследования авторов об оценках оптимальных разбиений тора и плоских множеств на части меньшего диаметра (см. [1, 2]). Отметим, что в отличие от работы [2], здесь рассматривается обобщение плоского тора со склейки из квадрата на склейку из произвольного параллелограмма, параметризуемого тремя параметрами. Авторами также получены некоторые оценки разбиений тора $T^2_{l_1,l_2,\alpha}$ на части меньшего диаметра, которые расширяют исследования из ранних статей [1, 2].

[1] A.D. Tolmachev, D.S. Protasov, V.A. Voronov, *Coverings of planar and three-dimensional sets with subsets of smaller diameter*, Discrete Applied Mathematics, 2022, v. 320, p. 270-281.

[2] D.S. Protasov, A.D. Tolmachev, V.A. Voronov, *Optimal partitions of the flat torus into parts of smaller diameter*, arxiv preprint. [2024] arXiv:2402.03997

О периодичности последовательностей Сомоса по модулю произвольного натурального числа

Устинов Алексей Владимирович
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, г. Москва
ustinov.alexey@gmail.com

Для целого числа $k \geq 4$ последовательность Сомоса–k — это последовательность, порожденная квадратичным рекуррентным соотношением вида

$$s_{n+k}s_n = \sum_{j=1}^{[k/2]} \alpha_j s_{n+k-j}s_{n+j},$$

где α_j — константы, а $s_0, \ldots, s_{k-1}$ — начальные условия. Среди всех последовательностей Сомоса выделяется важный подкласс, обладающих различными нетривиальными свойствами. Это подкласс *последовательностей конечного ранга*. Последовательность $\{s_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ имеет (конечный) ранг r, если максимальный ранг двух бесконечных матриц

$$\left(s_{m+n}s_{m-n}\right)\Big|_{m,n=-\infty}^{\infty}, \qquad \left(s_{m+n+1}s_{m-n}\right)\Big|_{m,n=-\infty}^{\infty}$$

равен r. Если $r = 2$, то общий член последовательности Сомоса может быть выражен в терминах эллиптической функции. Общую последовательность конечного ранга можно рассматривать как последовательность, скрывающую за собой более сложную теорему сложения.

Доклад будет в посвящен доказательству периодичности целочисленных последовательностей конечного ранга по модулю произвольного натурального числа. В частности, это означает, что с помощью последовательностей конечного ранга можно строить криптографические протоколы, аналогичные тем, что строятся на эллиптических кривых.

Доклад будет сделан по результатам статьи [1].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-41-05001, https://rscf.ru/project/22-41-05001/.

[1] А. В. Устинов, *О периодичности последовательностей Сомоса по модулю m*, Матем. заметки, 115:3 (2024), 439–449.

О моментах симметричных квадратичных L-функций форм Маасса и их приложениях

Фроленков Дмитрий Андреевич
МИАН им. В.А. Стеклова РАН
frolenkov@mi-ras.ru
Соавторы: О. Г. Балканова

Пусть $\{u_j(z)\}$ — ортонормированный базис Гекке пространства параболических форм Маасса уровня один. Известно, что каждая функция $u_j(z)$ может быть разложена в ряд Фурье, при этом сами коэффициенты Фурье $\lambda_j(n)$ мультипликативны. Ряд Дирихле с коэффициентами $\lambda_j(n^2)$ называют симметричной квадратичной L-функцией формы Маасса. Назовем m-м моментом данной L-функции-среднее значение ее m-ой степени при усреднении по спектральному параметру формы Маасса. В докладе речь пойдет о поведении первого и второго моментов симметричных квадратичных L-функций форм Маасса, о различных следствиях полученных результатов, а также о том, как данные L-функции и их моменты связаны с теоремой о простых геодезических.

Накрытия полных графов: симметрии и ассоциированные объекты

Циовкина Людмила Юрьевна
ИММ УрО РАН, УрФУ
l.tsiovkina@gmail.com

Доклад посвящен исследованию задачи классификации дистанционно регулярных накрытий полных графов, группа автоморфизмов которых вершинно-транзитивна и имеет не более двух орбит в ее индуцированном действии на множестве дуг накрытия. Из работ автора [2] и [3] следует, что новые накрытия с транзитивной на дугах группой автоморфизмов могут быть обнаружены лишь в небольшом числе открытых подслучаев, когда такая группа индуцирует некоторую аффинную группу подстановок ранга 2 на множестве фибр накрытия. В общем случае рассматриваемая задача далека от решения и остается актуальной в контексте проблем поиска новых конструкций накрытий с различными параметрами и ассоциированных с ними объектов (например, обобщенных матриц Адамара или равноугольных множеств прямых). В докладе мы сосредоточимся на исследовании этой задачи для большого класса т.н. абелевых (в смысле Годсила и Хензеля [1]) накрытий, новый всплеск интереса к которым вызван их приложениями в дискретной геометрии. Будет представлен способ ее частичного сведения к рассмотрению фактор-накрытий, группа автоморфизмов которых наследует указанные свойства и индуцирует группу подстановок ранга ≤ 3 на множестве фибр, а также методы классификации, основанные на классификации таких групп подстановок и включающие специальную технику ограничения спектра накрытий в зависимости от вида индуцируемой группы. Особое внимание будет уделено исследованию абелевых накрытий из нескольких потенциально бесконечных классов, которое, в том числе, мотивировано проблемами существования и построения равноугольных жестких фреймов с заданными параметрами.

[1] C. D. Godsil, A. D. Hensel, *Distance regular covers of the complete graph*, J. Comb. Theory Ser. B., 56 (1992) 205–238.

[2] L. Yu. Tsiovkina, *Arc-transitive groups of automorphisms of antipodal distance-regular graphs of diameter 3 in affine case*, Sib. Elektron. Mat. Izv., 17 (2020) 445–495.

[3] L. Yu. Tsiovkina, *Covers of complete graphs and related association schemes*, J. Comb. Theory Ser. A., 191 (2022) 105646.

Бесконечная алгебраическая независимость рядов с периодическими коэффициентами

Чирский Владимир Григорьевич
МГУ им. М. В. Ломоносова
vgchirskii@yandex.ru

Рассмотрим ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^i n!\, z^n, \tag{1}$$

коэффициенты которых – целые числа с условиями $a_{n+T}^i = a_n^i, i = 1, \ldots, m$. Такие ряды, если они отличны от многочленов, расходятся в поле $\mathbb{C}$.

Эти ряды сходятся в полях p–адических чисел, что позволяет рассматривать бесконечномерные векторы, координаты которых представляют собой суммы рассматриваемых рядов в полях p-адических чисел. Это позволяет ввести понятия бесконечной и глобальной линейной или алгебраической независимости. В работах [1, 2] установлены теоремы, подобные теоремам А. Б. Шидловского для E-функций (ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$).

Суммы этих рядов (1) в кольце полиадических чисел, т.е. в прямом произведении колец целых p–адических чисел обозначим $\alpha_i^{(p)}, i = 1, \ldots, m$. Утверждается, что если векторы $A_i = (a_0^i, \ldots, a_{T-1}^i), i = 1, \ldots, m$ линейно независимы, то полиадические числа $\alpha_i^{(p)}, i = 1, \ldots, m$ бесконечно алгебраически независимы.

[1] Chirskii V.G. Product Formula, *Global relations and Polyadic Integers* //Russ. J. Math. Phys. 2019. V.26. No.3 P.286-305.

[2] Bertrand D.,Chirskii V.G., Yebbou J. *Effective estimates for global relations on Euler-type series* //Ann.Fac.Sci.Toulouse.2004.V.13,No.2.P.241-260.

Об экстремальных множествах произведений и частных конечных числовых множеств

Штейников Юрий Николаевич
НИЦ Курчатовский испнтитут, НИИСИ
yuriisht@yandex.ru

Произведением множеств A и B называется множество AB, которое по определению есть $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Обозначим через $[N]$ интервал натуральных чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ и пусть $M_N = |[N][N]|$. Одна из давних классических задач П. Эрдеша о таблице умножения ставит вопрос об отыскании правильного порядка роста величины M_N при $N \to \infty$. П. Эрдешем и впоследствии К.Фордом были установлены точные порядок роста этой величины. Некоторые направления дальнейших исследований, тесно связанной с этой задачей, были предложены Х. Силлеруело с соавторами. Он формулируется следующим образом. Каков максимальный размер множества $A \subset [N]$, что $|AA| \sim |A|^2/2$. К. Форд доказал существование множества с такими свойствами, размер которого достаточно близок к оптимальной границе. В своем докладе я расскажу об уточнении этого результата, а также о ряде задач, возникающих в теории произведений и частных целочисленных множеств.

[1] К. Форд, “Экстремальные свойства произведений множеств”, Труды МИАН, 303 (2018), 239–245

[2] Ю. Н. Штейников, “Множества с экстремальным свойством произведения и его вариации”, Матем. заметки, 114:6 (2023), 922–930.

[3] Х. Силлеруело, Д. С. Рамана, О. Рамаре, “Частные и произведения подмножеств нулевой плотности множества натуральных чисел”, Труды МИАН, 296 (2017), 58–71 .

[4] Ю. Н. Штейников, “Частные плотных подмножеств целых чисел и короткие расстояния элементов произведения”, Матем. заметки, 111:1 (2022), 117–124

О новых результатах для формул двойных сумм типа Гекке

Эрик Мортенсон
СПбГУ
etmortenson@gmail.com

В этом докладе будут представлены недавние результаты в области фальшивых тета-функций и ложных тета-функций с приложениями к тождествам типа Рамануджана для фальшивых тета-функций, а также к модифицированным струнным функциям.

Об одной теоретико-числовой сумме

Юделевич Виталий Викторович
МГУ им. М.В. Ломоносова
Vitaliiyudelevich@mail.ru

В докладе пойдёт речь о доказательстве асимптотической формулы

$$\sum_{n\leqslant x}{}' \frac{r(n)}{r(n+1)} = x(\ln x)^{-3/4}(c+o(1)), \quad (x\to +\infty),$$

где $r(n)$ обозначает число представлений n суммою двух квадратов:

$$r(n) = \#\left\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2 : n = a^2+b^2\right\},$$

c — это некоторая положительная постоянная, а штрих означает суммирование по тем n, для которых $r(n+1)\neq 0$.

Топология

Евклидов объем конического многообразия над гиперболическим узлом является алгебраическим числом

Абросимов Николай Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
abrosimov@math.nsc.ru
Соавторы: А. А. Колпаков, А. Д. Медных

Доклад основан на нашей совместной работе с А. А. Колпаковым и А. Д. Медных [1].

Гиперболическая структура на трехмерном коническом многообразии с узлом в качестве сингулярного множества как правило может быть деформирована в предельную евклидову структуру. В нашей работе мы показываем, что соответствующий нормированный евклидов объем многообразия всегда является алгебраическим числом, то есть корнем некоторого многочлена с целочисленными коэффициентами. Этот результат служит обобщением (для конических многообразий) известной теоремы Сабитова об объемах евклидовых многогранников, давшей ответ на проблему кузнечных мехов. Установленный нами факт выделяется на фоне гиперболических объемов, теоретико-числовая природа которых обычно весьма сложна. Кроме указанной теоремы, в нашей работе предложен алгоритм, позволяющий явно вычислить минимальный многочлен для нормированного евклидова объема.

Пример: Коническое многообразие над узлом 5_2 имеет нормированный евклидов объем

$$1/\left(6\sqrt{-6+68\sqrt{2}+4\sqrt{983}+946\sqrt{2}}\right) = 0.009909630999945638\ldots$$

Его минимальный многочлен имеет вид

$$785065068490752\,x^8 + 412091172864\,x^6 + 64457856\,x^4 - 864\,x^2 - 1.$$

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0005).

[1] N. Abrosimov, A. Kolpakov, A. Mednykh, *Euclidean volumes of hyperbolic knots*, Proc. Amer. Math. Soc., 152 (2024), 869–881.

Производная дифференциальная геометрия

Айвазьян Аршак Владимирович
НИУ ВШЭ
aivazian.arshak@gmail.com

Кольцо гладких функций гладкого многообразия имеет естественную дополнительную структуру: к набору элементов $a_1, .., a_n$ можно применить не только целочисленный многочлен $p \in \mathbb{Z}[x_1, .., x_n]$ (что в точности составляет структуру кольца), а любую гладкую функцию $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Категория C^∞-колец (то есть, множеств, снабженных согласованным действием гладких функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ для всех n) — это обычная алгебраическая категория со всеми их общими местами и хорошими свойствами. Дульная ей категория *гладких локусов* Locus — это естественный сеттинг для дифференциальной геометрии, аналогичный схемной революции в алгебраической геометрии. В качестве некоторых ярких преимуществ, на ряду с гладкими многообразиями, она единообразно включает, например, гладкие многообразия с углами или стратификациями, инфинитезимальные пространства и др. Со всеми релевантными геометрическими понятиями и структурами для всех её объектов (например, расслоения струй являются просто пространствами отображений из соответствующих инфинитезимальных пространств). Также она имеет все пределы и копределы, что, например, позволяет прямо говорить о пространствах струй бесконечного порядка (подпространства которых суть дифференциальные уравнения на исходном многообразии, как это развито в подходе Виноградова, Красильщика, Вербовецкого и других). За подробностями отсылаем к классическому тексту I. Moerdijk, G. E. Reyes, “Models for smooth infinitesimal analysis”, (1991) и другой литературе.

При этом, ровно как и в алгебраической геометрии, такая настройка все ещё несет такие изъяны, как геометрически неправильное поведение нетрансверсальных пересечений. И так же естественный контекст исправляющий это — производная дифференциальная геометрия — реализуется естественным переходом от C^∞ колец к симплициальным C^∞-кольцам, локализованным в слабых эквивалентностях. Альтернативный эквивалентный язык (в духе соответствия Дольда-Кана): C^∞ дифференциально-градуированные алгебры, локализованные в слабых эквивалентностях. Классические локусы вкладываются в производные как полная подкатегория и включение сохраняет трансверсальные пересечения, но не все пределы. В соответствии с D. I. Spivak, “Derived Smooth Manifolds”, (2010), производные пересечения в точности ведут себя как форма пересечениях на гомологических классах (что дуально по Пуанкаре умножению в когомологиях). А, например, производный локус нулей (вместо усеченного классического) возникает в BV-BRST формализме. О роли производной геометрии в квантовой теории поля см., например, L. Alfonsi, “Higher geometry in physics”, (2023), L. Alfonsi, C. A. S. Young, “Towards non-perturbative BV-theory via derived differential geometry”, (2023), G. Giotopoulos, H. Sati, “Field Theory via Higher Geometry I: Smooth Sets of Fields", (2023), J. P. Pridham, "An outline of shifted Poisson structures and deformation quantisation in derived differential geometry", (2020). Производная геометрия помимо этого имеет также серьезные приложения в классической гладкой геометрии как обсуждается, например, в D. Joyce, "Algebraic Geometry over C^∞-rings", (2016).

В этом докладе будет дан краткий обзор области и некоторые новые результаты.

Коэффициенты дробных скручиваний Дена кос на поверхностях

Алексеев Илья Сергеевич
СПбГУ
ilyaalekseev@yahoo.com
Соавторы: Малютин Андрей Валерьевич и Ионин Василий Андреевич

Коэффициент дробного скручивания Дена (или *закрученность*) — это рационально-значный инвариант сопряженности в группе классов отображений $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ компактной поверхности Σ с непустым краем (и, возможно, конечным числом отмеченных точек), который измеряет то, насколько автогомеоморфизм поверхности «перекручивает» окрестность заданной граничной компоненты ∂ этой поверхности. Закрученность является псевдохарактером (отображением, «похожим» на гомоморфизм), принимает единичное значение на скручивании Дена T_∂ вдоль компоненты ∂ и неотрицательные значения на всех тех элементах группы $\mathrm{Mod}(\Sigma)$, которые «переводят направо» каждую дугу с началом на компоненте ∂.

Коэффициенты дробных скручиваний Дена играют заметную роль в маломерной топологии и динамике. В литературе они впервые появились в работе [1], и с тех пор получили ряд различных эквивалентных определений: в терминах теории Нильсена–Тёрстона [2,5], в терминах левоинвариантных порядков на группах классов отображений [3,15,16], в терминах гомологий Хегора–Флоера [9,11,14], в терминах введённых А. Пуанкаре числа переноса и числа вращения [2,10]. Подобное разнообразие позволяет закрученности проникать в контактную топологию [6,7], теорию слоений на трёхмерных многообразиях [8,12], теорию узлов [2,4,11,14], теорию пространств модулей [13].

Первые исследования закрученности относятся к теории кос. Так, группа классов отображений диска с n отмеченными точками изоморфна *группе кос Артина B_n*, то есть фундаментальной группе конфигурационного пространства наборов из n различных точек на диске D^2, и в этом случае коэффициент дробного скручивания Дена показывает, насколько сильно коса «закручена» или «перекручена» [2]. В случае же произвольной поверхности Σ имеется точная последовательность Бирман, которая устанавливает связь между группой кос $B_n(\Sigma)$ этой поверхности и группой классов отображений $\mathrm{Mod}(\Sigma; \{x_1, \dots, x_n\})$ поверхности, получающейся из Σ добавлением n отмеченных точек $x_1, \dots, x_n$. Данная последовательность позволяет задать коэффициенты дробных скручиваний Дена для кос на произвольных поверхностях с непустым краем, однако такой подход не охватывает важный случай групп кос замкнутых поверхностей.

В работе [5] были предложены аналоги коэффициентов дробных скручиваний Дена на группах кос Артина B_n, которые измеряют «закрученность косы вокруг той или иной её нити». Мы исследуем возможность переноса данных понятий с диска на произвольные поверхности. Наш подход предполагает обращение к задаче поднятия *гомоморфизма-протаскивания* (от англ. *pushing*) относительно *гомоморфизма-заклеивания* (от англ. *capping*), фигурирующих в длинной точной последовательности Бирман. Мы показываем, что данная задача поднятия имеет решение в случае сферы, проективной плоскости, тора, бутылки Клейна и всех поверхностей с непустым краем, что позволяет построить искомые аналоги коэффициентов дробного скручивания Дена для кос на этих поверхностях. Кроме того, мы устанавливаем неразрешимость указанной задачи поднятия на всех остальных замкнутых поверхностях.

Данный круг идей приводит нас к аналогам известной в теории кос проблемы расщепления последовательности Фаделла–Нойвирта, проблеме непрерывного построения векторных полей с заданными нулями и ряду родственных задач.

[1] D. Gabai, U. Oertel, *Essential laminations in 3-manifolds*, The Annals of Mathematics **130** (1989), no. 1, 41–73.

[2] А. В. Малютин, *Закрученность (замкнутых) кос*, Алгебра и анализ, **16** (2004), № 5, 59–91.

[3] K. Honda, W. H. Kazez, G. Matić, *Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary*, Inventiones Mathematicae **169** (2007), no. 2, 427–49.

[4] T. Ito, *Braid ordering and the geometry of closed braid*, Geometry & Topology, **15** (2011), no. 1, 473–98.

[5] И. А. Дынников, В. А. Шастин, *О независимости некоторых псевдохарактеров на группах кос*, Алгебра и анализ, **24** (2012), № 6, 21–41.

[6] W. H. Kazez, R. Roberts, *Fractional Dehn twists in knot theory and contact topology*, Algebraic & Geometric Topology **13** (2013), no. 6, 3603–37.

[7] J. B. Etnyre, J. Van Horn-Morris, *Monoids in the mapping class group*, Geometry & Topology Monographs **19** (2015), no. 1, 319–65.

[8] T. Ito, K. Kawamuro, *Essential open book foliations and fractional Dehn twist coefficient*, Geometriae Dedicata **187** (2017), no. 1, 17–67.

[9] M. Hedden, T. E. Mark, *Floer homology and fractional Dehn twists*, Advances in Mathematics **324** (2018), 1–39.

[10] А. В. Малютин, *Эффект целочисленного квантования числа вращения в группах кос*, Труды МИАН **305** (2019), 197–210.

[11] P. Feller, D. Hubbard, *Braids with as many full twists as strands realize the braid index*, Journal of Topology **12** (2019), no. 4, 1069–1092.

[12] D. Hubbard et al, *Braids, fibered knots, and concordance questions*, in: Research directions in symplectic and contact geometry and topology (2021), 293–24.

[13] X. L. Liu, *Fractional Dehn twists and modular invariants*, Science China Mathematics **64** (2021), no. 8, 1735–44.

[14] P. Feller, *The slice-Bennequin inequality for the fractional Dehn twist coefficient*, arxiv.org/abs/2204.05288v2.

[15] P. Feller, D. Hubbard, H. Turner, *The Dehn twist coefficient for big and small mapping class groups*, arxiv.org/abs/2308.06214v1.

[16] A. Clay, T. Ghaswala, *Cofinal elements and fractional Dehn twist coefficients*, International Mathematics Research Notices **2024** (2024), no. 9, 7401–20.

Проблема Кервера в стабильной теории гомотопий и ее обобщение

Ахметьев Петр Михайлович
ИЗМИРАН
pmakhmet@mail.ru

Проблема Кервера в стабильной теории гомотопий состоит в перечислении списка размерностей, в которых существует погружение коразмерности 1 замкнутого ориентированного многообразия с Арф-инвариантом 1. Первый интересный пример имеется в размерности 30. Цель доклада — геометрическая конструкция указанного многообразия как в работе [1].

Далее мы обобщим конструкцию и построим бесконечную серию погружений замкнутых многообразий размерностей $2^l - 2$ в коразмерности $2^{l-1} - 1$, $l \geq 5$, которые оснащены с коразмерности 2^{l-1} (1-стабильно-оснащенные погружения) со скрученным Арф-инвариантом 1.

Кроме того, мы докажем, что список размерностей, в которых существует оснащенные многообразия с Арф-инвариантом 1 конечен, а также представим доказательство того, что в размерности 126 не существует оснащенного многообразия, представляющего элемент стабильной гомотопической группы сфер $\pi_{126+128}(S^{128})$, если такой элемент денадстраивается в группу $\pi_{126+128-9}(S^{128-9})$.

[1] J.D.S. Jones, *The Kervaire invariant of extended power manifolds* Topology 17 (1978) 249-266.

Инварианты заузленных тел с ручками

Бардаков Валерий Георгиевич
ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета
bardakova@math.nsc.ru
Соавторы: Федосеев Денис Александрович

Одним из обобщений теории узлов является теория пространственных графов, в которой под пространственным графом понимается вложение графа в трехмерное пространство. Два пространственных графа называются эквивалентными если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм объемлющего пространства, переводящий один граф в другой. Если рассмотреть граф, состоящий из одной вершины и одного ребра, то полученная теория будет совпадать с теорией узлов. Та же теория получится если заменить такой граф его регулярной окрестностью (полноторием). Если же взять тело с двумя ручками и изучать его вложения, то получим теорию, отличную от теории вложения соответствующего графа.

Разницу между вложениями тел с ручками и вложениями соответствующих графов хорошо видно на примере топологического человечка [1, рисунок 306], который может распутать пальцы. Если же взять соответствующий пространственный граф, то он не эквивалентен плоскому графу. Что произойдет если у человечка есть часы? Рисунок 307 показывает, что трюк, используемый ранее не годится. Тем не менее остается такой вопрос: может ли человечек с часами распутать пальцы и снять часы?

В докладе мы расскажем о так называемых G-системах квандлов, введенных в [2] для построения инвариантов заузленных тел с ручками, введем алгебраическую систему, дающую инвариант пространственного графа и дадим ответ на вопрос, сформулированный выше.

[1] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии*, Изд-во МГУ, 1991.

[2] A.Ishii, *Moves and invariants for knotted handlebodies*, Algebr. Geom. Topol. 8 (2008), 1403-1418.

О типичности гиперболических узлов

Белоусов Юрий Станиславович
Международный математический институт имени Л. Эйлера
bus99@yandex.ru
Соавторы: А. В. Малютин

Знаменитая теорема Терстона 1978 года о классификации узлов утверждает, что каждый узел либо торический, либо сателлитный, либо гиперболический. До недавнего времени существовала гипотеза (известная как гипотеза Адамса) утверждающая, что доля гиперболических узлов среди всех простых узлов с n или менее пересечениями стремится к 1 при стремлении n к бесконечности. В 2017 году А. Малютин показал, что это утверждение противоречит нескольким другим правдоподобным гипотезам. Наконец, в 2019 году в совместной работе с А. Малютиным было установлено, что гипотеза Адамса неверна. В докладе мы обсудим ключевые компоненты её опровержения.

[1] Y. Belousov, A. Malyutin *Hyperbolic knots are not generic*, arXiv:1908.06187, 2019.

Синтаксическая алгебра и связь с топологией

Голубь Никита Игоревич
Лаборатория Чебышева, СПбГУ
n.golub2001@gmail.com

Доклад посвящен обьектам, которые мы называем функториальными языками. Первый пример такого языка был построен Романом Михайловым и Сергеем Ивановым. В их работе они показали, что рассмотрев функториальные идеалы $r \equiv (R-1)\mathbb{Z}[F] \subset f \equiv \triangle(F) \subset \mathbb{Z}[F]$, где $\mathbb{Z}[-]$ - функтор строящий по свободному копредставлению $1 \to R \to F \to G \to 1$ группы G групповое кольцо группы $Z[F]$, и считая старшие пределы $lim^i_{Pres(G)}(w(f,r)|_{Pres(G)})$, где $w(f,r)$ — сумма пересечений мономов составленных из произведений r, f идеалов, мы можем описать многие известные производные функторы из категории групп в абелевы группы $(G_{ab}, Tor(H_2(G), H_2(G)), H_{2i+1}(G)\ldots)$. Однако далее это явление осталось без заслуженного на наш взгляд продвижения.

Мы построим ряд новых языков, продемонстрируем вкратце как можно строить функториальные языки повсюду в математике. Покажем, что применяя алгебраическую K-теорию к некоторым категориям функторов, ассоциированных с функториальными языками, из $S \to Spectra$, где $S \subset Gr$ подкатегория категории групп, мы строим интересные инварианты от подкатегорий S. Все это намекает на то, что подобные функториальные языки на самом деле играют роль своеобразных коэффициентов для специфических теорий когомологий, которые мы называем поточными когомологиями, которые в случае fr-языка дают абелевы группы $\mathcal{FH}^*(S; fr)$. Функториальные языки связаны с проблемами в K-теории групповых колец групп, что заходит на территорию важной топологической гипотезы: гипотезы Фаррелла-Джоунса.

Действия торов и кватернионных торов на произведениях сфер

Гугнин Дмитрий Владимирович
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова
dmitry-gugnin@yandex.ru

Речь пойдет о действиях торов (стандартных компактных торов, а также их кватернионных аналогов) на произведениях сфер [1]. Мы покажем, что пространство орбит некоторого специального действия тора на произведении произвольного конечного набора сфер гомеоморфно сфере (размерность каждой сферы набора в случае тора должна быть не меньше 2, в случае кватернионного тора — не меньше 4). Для $k \geq 2$ сфер в наборе действует тор T^{k-1}, в кватернионном случае — тор $\mathrm{Sp}(1)^{k-1}$. Аналогичное утверждение для вещественного тора $\mathbb{Z}_2^{k-1}$ было доказано автором в 2019 году [2]. Основным содержанием данных теорем является явно выписываемая вещественно аналитическая формула канонической проекции на пространство орбит (стандартную круглую сферу). Также будет сформулирована естественная гипотеза о неуменьшаемости ранга тора $k-1$, доказанная автором для случая вещественного тора в 2023 году [3].

[1] А. А. Айзенберг, Д. В. Гугнин, *О действиях торов и кватернионных торов на произведениях сфер*, Топология, геометрия, комбинаторика и математическая физика, Сборник статей. К 80-летию члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Труды МИАН, 326, МИАН, М., 2024 (в печати).

[2] Д. В. Гугнин, *Разветвленные накрытия многообразий и nH-пространства*, Функц. анализ и его прил., 53:2 (2019), 68–71.

[3] Д. В. Гугнин, *О несвободных действиях коммутирующих инволюций на многообразиях*, Матем. заметки, 113:6 (2023), 820–826.

Оценки объемов гиперболических зацеплений через число скручиваний в диаграмме

Егоров Андрей Александрович
ИМ СО РАН, НГУ, НОМЦ ТГУ
a.egorov2@g.nsu.ru
Соавторы: Веснин А.Ю.

В приложении к работе [1] приведена верхняя оценка на объём гиперболического зацепления через число скручиваний в его диаграмме. В этом докладе я расскажу о новой верхней оценке для объёмов гиперболических зацеплений, которая улучшает оценку из [1] в случае, если диаграмма зацепления имеет более восьми скручиваний.

[1] M. Lackenby , *The volume of hyperbolic alternating link complements. With an appendix by I. Agol and D. Thurston*, Proceedings of the London Mathematical Society, **88** (2004), 204–224.

Циклическая упорядочиваемость и группы виртуальных узлов

Иванов Максим Эдуардович
Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Узлом называется вложение окружности в трёхмерную сферу, рассматриваемое с точностью до объемлющей изотопии. Классическим инвариантом узла является его группа. Группа G называется левоупорядочиваемой, если существует порядок в G, инвариантный относительно умножения слева, т.е. для любых g, h, k из G верно, что из $g < h$ следует $kg < kh$. Понятие циклической упорядочиваемости группы является естественным обобщением левоупорядочиваемости. Неформально, оно говорит о том, что элементы группы G можно расположить на окружности таким образом, чтобы относительное положение элементов оставалось неизменным при умножении слева на любой элемент из группы. Известно, что все группы узлов являются левоупорядочиваемыми. Луис Кауфман, в конце 90-х, ввел теорию виртуальных узлов как обобщение классической. В докладе мы обсудим группы виртуальных узлов и свойство циклической упорядочиваемости.

Конфигурационные пространства, косы и гомотопические группы

Ионин Василий Андреевич
Лаборатория Чебышева, СПбГУ
ionin.code@gmail.com

Доклад посвящен некоторым примечательным связям между косами и гомотопическими группами сфер. Мы приведем обзор ключевых аспектов этой темы, а также некоторые новые результаты. В частности, мы построим симплициальную группу на коммутантах $[P_n, P_n]$ групп крашеных кос. Анализируя коммутант конструкции Милнора, мы сможем показать, что эта симплициальная группа гомотопически эквивалентна трехмерной сфере S^3. В качестве приложения мы покажем, как эта экономная модель для трехмерной сферы приводит к некоторым интересным формулам типа Ву для групп $\pi_n(S^3)$.

Продолжения представлений группы кос на моноид сингулярных кос

Козловская Татьяна Анатольевна
старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета
t.kozlovskaya@math.tsu.ru
Соавторы: Бардаков Валерий Георгиевич, Нафаа Чбили.

Сингулярные узлы были определены для изучения инвариантов конечного порядка (инвариантов Васильева-Гусарова) классических узлов. Для изучения сингулярных узлов были введены моноид сингулярных кос SM_n и группа сингулярных кос SG_n. Группы сингулярных крашеных кос изучались в работах [1]-[4].

Естественным подходом к построению инвариантов узлов является построение различных представлений группы кос. Используя представление Артина автоморфизмами свободной группы, можно найти группу соответствующего зацепления. Используя приведенное представление Бурау, можно найти полином Александера соответствующего узла.

О. Дашбах и Б. Гемейн изучали представления моноида сингулярных кос эндоморфизмами свободной группы. Также они построили линейное представление моноида сингулярных кос SM_n и доказали, что при $n = 3$ это представление точно.

В работе [5] построены линейные представления и представления эндоморфизмами свободной группы F_n моноида и группы сингулярных кос, продолжающие представления группы кос Артина. Доказано, что построенное продолжение представления Бурау группы сингулярных кос приводимо.

Одним из известных точных линейных представлений группы кос B_n является представление Лоуренса-Краммера-Бигелоу (ЛКБ). Возникает естественный вопросу о линейности группы SB_n.

В работе [5] построено линейное представление группы сингулярных кос, которое является продолжением представления ЛКБ, и вычислен дефект этого продолжения по отношению к внешнему произведению двух продолжений представления Бурау.

[1] V.G. Bardakov, T.A. Kozlovskaya, *On 3-strand singular pure braid group*, J. Knot Theory Ramif., 29(10), (2020), 2042001 (20 pages).

[2] V.G. Bardakov, T.A. Kozlovskaya, *Singular braids, singular links and subgroups of camomile type*. (2023), arXiv:2212.08267.

[3] K. Gongopadhyay, T. Kozlovskaya, O. Mamonov, *On some decompositions of the 3-strand singular braid group*, Topology Appl. 283(1), (2020), Article 107394.

[4] T.A. Kozlovskaya, *Structure of 4-strand singular pure braid group*, Siberian Electronic Mathematical Reports, 19(1), (2022), 18–33,

[5] V.G. Bardakov, N. Chbili, T.A. Kozlovskaya, *Extensions of braid group representations to the monoid of singular braids*. (2024), arXiv:2403.00516.

Степень обобщенной полухарактеристики

Лаврухин Виктор Александрович
ФМКН СПбГУ

Понятие полухарактеристики замкнутого многообразия было введено Кервером в 1956 году [3] и неоднократно использовалось в работах по дифференциальной топологии и теории кобордизмов [4], [5], [6]. В статьях [1] и [2] С. С. Подкорытовым было доказано, что полухарактеристика вложенного подмногообразия квадратично зависит от характеристической функции множества его ростков как подмножества множества всех ростков подмногообразий.

С каждым соотношением на числа Штифеля—Уитни $(n+1)$-мерных многообразий можно связать "вторичный" инвариант λ замкнутых n-мерных многообразий с дополнительной структурой на касательном расслоении, который принимает значения в $\mathbb{Z}/4$. Полухарактеристика Кервера (принимающая значения в $\mathbb{Z}/2 \subseteq \mathbb{Z}/4$) соответствует соотношению $w_{n+1} + v^2_{\frac{n+1}{2}}$. При кобордизмах с разумной дополнительной структурой инвариант λ, либо сохраняется, либо, подобно полухарактеристике, меняется на относительную эйлерову характеристику кобордизма. Аналогично полухарактеристике Кервера, инвариант λ обладает квадратичным свойством.

[1] Подкорытов С. С. О числах Штифеля–Уитни и полухарактеристике //Алгебра и анализ. – 2002. – Т. 14. – №. 5. – С. 171-187.

[2] Подкорытов С. С. Квадратичное свойство рациональной полухарактеристики //Записки научных семинаров ПОМИ. – 2000. – Т. 267. – №. 0. – С. 241-259.

[3] Kervaire M. A. Courbure intégrale généralisée et homotopie : дис. – ETH Zurich, 1956.

[4] Lusztig G., Milnor J., Peterson F. P. Semi-characteristics and cobordism //Topology. – 1969. – Т. 8. – №. 4. – С. 357-359.

[5] Stong R. E. Semi-characteristics and free group actions //Compositio Mathematica. – 1974. – Т. 29. – №. 3. – С. 223-248.

[6] Tang Z. Bordism theory and the Kervaire semi-characteristic //Science in China Series A: Mathematics. – 2002. – Т. 45. – С. 716-720.

О двух проблемах Ролфсена

Мелихов Сергей Александрович
МИАН
melikhov@mi-ras.ru

50 лет назад Д. Ролфсен поставил две проблемы [1]: (а) Всякий ли узел в S^3 изотопен (=гомотопен в классе вложений) кусочно-линейному или, эквивалентно, тривиальному узлу? В частности, изотопен ли кусочно-линейному узлу слинг Бинга? (б) Если два кусочно-линейных зацепления в S^3 изотопны, будут ли они кусочно-линейно изотопны?

Ответ на вопрос (б) утвердителен, если инварианты конечного порядка дают полную классификацию кусочно-линейных зацеплений [2]. Слинг Бинга не изотопен никакому кусочно-линейному узлу: (i) изотопией, продолжающейся до изотопии двухкомпонентного зацепления с коэффициентом зацепления 1; (ii) в классе узлов, являющихся пересечениями вложенных цепочек полноториев [4]. Причём результат (i) сохраняет силу, если дополнительной компоненте разрешить самопересекаться и даже заменяться на новую, если она представляет тот же класс сопряжённости в $G/[G', G'']$, где G — фундаментальная группа дополнения к исходной компоненте [4]. Доказательства основаны на прояснении геометрического смысла определяемых с помощью полинома Конвея от двух переменных формальных аналогов производных инвариантов Кохрана для двухкомпонентных зацеплений с коэффициентом зацепления 1 [3].

[1] D. Rolfsen, *Some counterexamples in link theory*, Canadian J. Math. 26 (1974)

[2] S. A. Melikhov, *Topological isotopy and finite type invariants*, arXiv:2406.09331

[3] S. A. Melikhov, *Two-variable Conway polynomial and Cochran's derived invariants*, arXiv:math/0312007v3 (2024).

[4] S. A. Melikhov, *Is every knot isotopic to the unknot?*, arXiv:2406.09365

Геометрические свойства графов хирургий в маломерной топологии

Миллер Алексей Юрьевич
ПОМИ РАН
miller.m2@mail.ru

Последние двадцать лет вопрос о локальном и глобальном геометрическом поведении графов преобразований различных маломерных объектов получает особенное внимание. В этом докладе мы обсудим ряд продвижений в этом направлении, а именно: доказательство гипотезы Жиса–Гамбаду о поведении гордиевых графов на бесконечности, техники, позволяющие обнаружить исключительный локальный геометрический паттерн (в духе Баадера и Хирасавы–Учиды) в гордиевом графе переключения перекрёстков и расположение в Большом графе хирургий Дена одного примечательного класса трехмерных многообразий.

Пополнения Боусфилда-Кана подстягиваемых копредставлений и ациклические разложения Дрора

Михович Андрей Михайлович
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
amikhovich@gmail.com

Как показали Беррик и Хилман, для любого стягиваемого копредставления его конечное копредставление асферично тогда и только тогда, когда верна гипотеза асферичности Уайтхеда. При этом, как известно, если гипотеза Уайтхеда не верна, то накрытие, соответствующее радикалу Адамса, является ацикличным 2-комплексом. В начале 70-х Дрор показал, как можно исследовать ациклические пространства с помощью ациклических разложений и их алгебраических инвариантов. Для подстягиваемых копредставлений удобно использовать относительные ациклические разложения, которые строятся с использованием целочисленного пополнения Боусфилда-

Кана. Мы показываем, что целочисленное пополнение Боусфилда-Кана конечного подстягиваемого копредставления асферично и проводим вычисления в его разложении Дрора.

[1] Andrey M. Mikhovich. Bousfield-Kan completions of subcontractible presentations, doi:10.13140/rg.2.2.14640.78088/2

[2] A. J. Berrick and J. A. Hillman. Whitehead's asphericity question and its relation to other open problems. In Algebraic topology and related topics, Trends Math., pages 27–49. Birkhauser/Springer, Singapore, 2019.

[3] Emmanuel Dror. Homology spheres. Isr. J. Math., 15:115–129, 1973.

Полином Ямады К4-кривых и полином Джонса ассоциированных зацеплений

Ошмарина Ольга Андреевна
ТГУ, НГУ
`o.oshmarina@g.nsu.ru`
Соавторы: Веснин А. Ю.

В теории заузленных графов нередко используются методы, пришедшие из теории узлов. Так, для графов строятся полиномиальные инварианты, наиболее известными из которых являются полином Ямады [1] и полином Егера [2].

В работе [3] была доказана эквивалентность полиномов Ямады и Егера для планарных графов, а также была изучена связь, возникающая между полиномом Ямады тета-кривой и полиномом Джонса зацепления, однозначно строящегося по заузленному тета-графу. В данном докладе мы представим аналогичные результаты для заузленных $\mathbb{K}_4$-графов [4].

[1] S. Yamada, *An invariant of spatial graphs*, Graph Theory, 13 (1989), 537–551.

[2] F. Jaeger, *On some graph invariants related to the Kauffman polynomial*, Progress in knot theory and related topics, 56 (1997), 69–82.

[3] Y. Huh, *Yamada polynomial and associated link of theta-curves*, Discrete Mathematics, 347 (2024).

[4] O. Oshmarina, A. Vesnin, *Polynomials of complete spatial graphs and Jones polynomial of related links*, 2024, preprint arXiv:2404.12264.

Сильное сходство отображений

Подкорытов Семён Сергеевич
ПОМИ РАН
`ssp@pdmi.ras.ru`

На множестве гомотопических классов отображений $[X, Y]$ для каждого $r = 0, 1, \ldots$ есть отношение r-сходства, эквивалентность. Гипотеза: если отображение $a : X \to Y$ $(p-1)$-сходно с постоянным, а отображение $b : Y \to Z$ $(q-1)$-сходно с постоянным, то их композиция $b \circ a$ $(pq-1)$-сходна с постоянным отображением. Утверждение гипотезы верно, если отображение b *сильно* $(q-1)$*-сходно* с постоянным. Гипотетически, r-сходство и сильное r-сходство равносильны. Мы доказываем, что произведение Уайтхеда q сомножителей сильно $(q-1)$-сходно с постоянным отображением.

Лежандровы лаврентьевские кривые

Прасолов Максим Вячеславович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
0x00002A@gmail.com

Контактной структурой на гладком трёхмерном многообразии называется распределение плоскостей, которое в окрестности любой точки может быть задано ядром такой 1-формы α, что $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ всюду в этой окрестности. Мы рассматриваем задачу сглаживания кусочно-гладких объектов на трёхмерном многообразии в присутствии контактной структуры. Основная трудность здесь — определить, в каком смысле сглаженный объект эквивалентен исходному. Мы расскажем о том, что удалось сделать для лежандровых подмногообразий — таких одномерных подмногообразий, которые касаются контактной структуры в каждой точке.

Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда № 22-11-00299.

[1] M. Prasolov, Legendrian Lavrentiev Links, *Preprint.* arXiv:2404.13473.

Порядки гомотопических инвариантов отображений в пространства Эйленберга–Маклейна

Фомин Сергей Вадимович
СПбГУ
sf2902@mail.ru

Пусть X, Y — топологические пространства, A — абелева группа, тогда на множестве функций $[X, Y] \to A$ (гомотопических инвариантов) можно определить меру сложности, называемую порядком. Инварианты конечного порядка можно понимать как гомотопические аналоги инвариантов Васильева узлов (см. предложение 2 в [1]). Пусть A, B — абелевы группы, тогда у функции из A в B можно определить её степень. Это непосредственный аналог степени многочлена.

Если Y — это H-пространство, то множество $[X, Y]$ — это абелева группа. В статье [2] доказано, что, если $Y = S^1$, порядок гомотопического инварианта равен его степени как отображения между абелевыми группами. В дипломной работе докладчика доказано двойное неравенство на порядок в терминах степени, если X — конечный CW-комплекс, Y — $K(G, n)$-пространство (G абелева), и исследован вопрос достижения верхнего и нижнего пределов в этом неравенстве. Доклад будет посвящён результатам этой работы.

[1] Подкорытов С. С. Об отображениях сферы в односвязное пространство //Записки научных семинаров ПОМИ. – 2005. – Т. 329. – №. 0. – С. 159-194.

[2] Подкорытов С. С. О гомотопических инвариантах отображений в окружность //Записки научных семинаров ПОМИ. – 2009. – Т. 372. – С. 187-202.

Прямоугольные диаграммы тугих слоений в дополнениях к узлам

Чернавских Михаил Михайлович
МИАН им. Стеклова
`mike.chernavskikh.at.gmail.com`
Соавторы: Иван Алексеевич Дынников

Тугие слоения являются важным инструментом маломерной топологии. А именно, следуя работам Д. Габая [2] и У. Тёрстона [3], тугие слоения можно использовать для сертификации рода узла. Развивая формализм прямоугольных диаграмм поверхностей [1], совместно с И. А. Дынниковым мы предложили универсальный способ представления слоений в дополнениях к узлам в трёхмерной сфере и показали, что любое тугое слоение конечной глубины может быть представлено таким образом.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00299, https://rscf.ru/project/22-11-00299/.

[1] Dynnikov I., Prasolov M. Rectangular diagrams of surfaces: representability, Matem. Sb. 208 (2017), no. 6, 55–108; translation in Sb. Math. 208 (2017), no. 6, 781–841, arXiv:1606.03497.

[2] D. Gabai, Foliations and the topology of 3-manifolds. III., J. Differential Geom.26 (1987), no.3, 479–536.

[3] W. P. Thurston, A norm for the homology of 3-manifolds. Mem. Amer. Math. Soc.59 (1986), no.339, i–vi and 99–130.

Сравнение лежандровых узлов с нетривиальной группой симметрии

Шастин Владимир Алексеевич
МГУ им. М.В. Ломоносова
vashast@gmail.com
Соавторы: М.В. Прасолов

В работе [1] был построен алгоритм сравнения лежандровых узлов. Если группа симметрий узла тривиальна, соответствующий алгоритм значительно упрощается (см. [2]). В случае нетривиальной группы симметрии возникают дополнительные трудности: нужно проанализировать подгруппу группы симметрий, порождённую лежандровыми изотопиями. В докладе будут предъявлены порождающие лежандровы изотопии в случае узлов 7_4, 9_{48}, 10_{136}, что позволяет завершить классификацию лежандровых узлов сложности не выше 9. Доклад основан на совместной работе с М.В. Прасоловым [3].

[1] I. Dynnikov, M. Prasolov. An algorithm for comparing Legendrian knots. *Preprint* arXiv:2309.05087

[2] I. Dynnikov, V. Shastin. Distinguishing Legendrian knots with trivial orientation--preserving symmetry group. *Algebraic & Geometric Topology* **23-4** (2023), 1849–1889. arXiv:1810.06460.

[3] M. Prasolov, V. Shastin Distinguishing Legendrian Knots in Topological Types 7_4, 9_{48}, 10_{136} with maximal Thurston-Benequin number, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **33-01** (2024). arXiv:2306.15461

Проблема Арнольда о гельдеровом отображении квадрата на куб.

Щепин Евгений Витальевич
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
scepin@mi-ras.ru

В докладе представлено построение отображения $\alpha\colon I^2 \to I^3$ двумерного квадрата на трехмерный куб, которое для некоторой константы C при любых точках квадрата $x, y \in I^2$ удовлетворяет неравенству

$$|\alpha(x) - \alpha(y)|^3 \leq C|x - y|^2$$

Отображение α решает задачу Арнольда 1988-5 из книги “Задачи Арнольда” Фазис, Москва 2000.

Уравнения в частных производных, математическая физика и спектральная теория

Аппроксимации вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби первого порядка

Авербух Юрий Владимирович
ИММ УрО РАН
averboukh@gmail.com

Уравнения Гамильтона-Якоби в том числе описывают функции цены в задачах оптимального управления и вариационного исчисления. Аппроксимировав исходную задачу динамической оптимизации марковским процессом принятия решений с фазовым пространством, являющимся ϵ-сетью фазового пространства в исходной задаче, мы получаем приближение уравнения Гамильтона-Якоби первого порядка системой дифференциальных или алгебраических уравнений, возникающих как уравнение Беллмана во вспомогательном марковском процессе принятия решений. В докладе этот подход будет развит для эволюционного, стационарного уравнений Гамильтона-Якоби, а также для уравнения, возникающего в рамках слабой КАМ теории.

Аналитическое представление σ-функции Вейерштрасса и её вычисление

Алексеев Максим Максимович
ФИЦ ИЦ РАН
alienkseev@gmail.com
Соавторы: Безродных Сергей Игоревич

Функции Вейерштрасса возникают естественным образом в контексте *эллиптических функций* — двоякопериодечиских мероморфных функций, описывающих решения дифференциальных уравнений в механике, реализующих некоторые классические конформные отображения и формирующих фундамент трансцендентых методов в алгебраической геометрии. Одной из функций Вейерштрасса является *σ-функция* — целая функция одного комплексного переменного, которая может быть использована для вычисления любой эллиптической функции с согласованной периодической структурой.

В данном докладе будут представлены результаты исследования *системы уравнений в частных производных* для σ-функции Вейерштрасса [1] и эквивалентных ей счетных системы ОДУ, а также будут описаны новые *рекуррентные и нерекуррентные представления для коэффициентов* ряда Тейлора [2]. Кроме того, будет затронута тематика вычисления эллиптических функций и функций Вейерштрасса с известной относительной точностью на основании расчётов значений σ-функции.

[1] Weierstrass K. *Zur Theorie der elliptischen Functionen*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1882-1883.

[2] Alekseev M., Bezrodnykh S. *System of Partial Differential Equations and Analytical Representations of the Weierstrass Sigma Function*, Mathematical Notes, 114 (2024), 1094–1102.

Обратные задачи математической физики

Белишев Михаил Игоревич
ПОМИ РАН
belishev@pdmi.ras.ru

В докладе приводятся различные постановки обратных задач математической физики и описаны связи обратных задач с другими разделами математики: теорией систем, теорией управления, УЧП, банаховыми алгебрами и теорией операторов.

[1] М.И.Белишев, *Граничное управление и томография римановых многообразий*, Успехи Математических Наук, 72 (2017), 4(436), 3-66.

О стационарных решениях системы уравнений Власова-Пуассона с внешним магнитным полем

Беляева Юлия Олеговна
Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
yilia-b@yandex

Для описания высокотемпературной плазмы существует несколько подходов. Классификация этих подходов основывается на необходимой степени детализации исследуемых процессов. В рамках доклада будет рассмотрена модель кинетики двукомпонентной высокотемпературной плазмы: система уравнений Власова-Пуассона с внешним магнитным полем и самосогласованным электрическим полем в области с границей.

Будут построены новые классы стационарных решений для первой смешанной задачи для системы уравнений Власова-Пуассона в цилиндрической области с носителями функций распределения заряженных частиц, лежащими на расстоянии от границ цилиндра и нетривиальным потенциалом электрического поля. Построенные решения соответствуют удержанию плазмы строго внутри реактора.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

[1] Belyaeva Yu. O., Gebhard B., Skubachevskii A. L., A general way to confined stationary Vlasov-Poisson plasma configurations, Kinetic and Related Models, Vol. 14, N. 2, 257-282 (2021).

Об эллиптических уравнениях и краевых задачах в областях с негладкой границей

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
vbv57@inbox.ru

Доклад посвящен развитию теории эллиптических псевдодифференциальных уравнений в областях с негладкой границей. В отличие от работы [1], где такая теория построена для областей с гладкой границей, здесь требуется дополнительное условие на символ оператора. Двумерная ситуация была подробно описана автором в [2] , а к настоящему моменту получены многомерные обобщения двумерных результатов и изучены некоторые дискретные варианты.

[1] Г.И. Эскин, *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений*, Наука, 1973.

[2] V.B Vasil'ev, *Wave factorization of elliptic symbols: theory and applications. Introduction to the theory of boundary value problems in non-smooth domains*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

О малых движениях пространственного маятника с полостью, целиком заполненной вязкоупругой жидкостью

Войтицкий Виктор Иванович
Математический институт имени С. М. Никольского, РУДН
voytitskiy_vi@rudn.ru
Соавторы: Цветков Денис Олегович (КФУ имени В. И. Вернадского)

Рассматривается линеаризованная проблема малых пространственных движений маятника с полостью целиком заполненной вязкоупругой жидкостью обобщенной модели Олдройта. С применением теории операторов, действующих в гильбертовом пространстве, задача сводится к дифференциально-операторному уравнению первого порядка с главным макси-мальным аккретивным оператором. Отсюда при естественных условиях на начальные данные и правую часть доказывается теорема о существовании и единственности сильного решения. Соответствующая спектральная задача имеет дискретный спектр, располага-ющийся в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. С помощью теории операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой доказано, что невещественный спектр содержит не более конечного числа собственных значений, при этом предельными точками кроме бесконечности являются также некоторые положительные числа (являющиеся нулями характеристической функ-ции). Эта модель обобщает случай классической вязкой жидкости в полости, где спектральная задача дискретный спектр с единственной предельной точкой на бесконечности. Для частей корневых элементов установлено, что они образуют (после проектирования) базисы Рисса с конечным дефектом в основных гильбертовых пространствах.

[1] Батыр Э.И., Копачевский Н.Д., *Малые движения и нормальные колебания системы сочленённых гиростатов*// СМФН. – 2013, том 49. – С. 5–88.

[2] Войтицкий В.И., Копачевский Н.Д., *О колебаниях сочлененных маятников с полостями, заполненными однородными жидкостями*// СМФН. – 2019, том 65, выпуск 3. – С. 434–512.

Асимптотики длинных нелинейных береговых волн и их связь с биллиардами с полужесткими стенками

Вотякова Мария Михайловна
Москва, МФТИ, ИПМех РАН
votiakova.mm@phystech.edu
Соавторы: С. Ю. Доброхотов, Д. С. Миненков

Под береговыми волнами мы понимаем периодические или близкие к периодическим по времени гравитационные волны на воде в бассейне глубины $D(x)$, $x = (x_1, x_2)$, локализованные в окрестности береговой линии $\Gamma^0 = \{D(x) = 0\}$. В двух конкретных примерах мы строим отвечающие береговым волнам асимптотические решения системы нелинейных уравнений мелкой воды в виде параметрически заданных функций, определяемых через асимптотики линеаризованной системы (см. [1]), которые в свою очередь связаны с асимптотическими собственными функциями оператора $\hat{L} = -\nabla g D(x) \nabla$. Область определения оператора — гладкие функции $\xi(x)$ в области $\Omega = \{x : D(x) > 0\}$ с конечной энергией: $|\xi|_{x\in\Gamma^0} < \infty$. Также обсуждается связь построенных асимптотик с классическими (почти интегрируемыми) “биллиардами с полужесткими стенками”.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 24-11-00213.

[1] S.,Y. Dobrokhotov, D.S. Minenkov, V.E. Nazaikinskii // Russ. J. Math. Phys. — 2022. — vol. 29, — p. 28–36.

Краевая задача для системы интегро–дифференциальных уравнений, возникающая в физике плазмы

Гордеева Надежда Михайловна
Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), Москва
nmgordeeva@bmstu.ru

Рассматривается основанная на системе уравнений Больцмана–Максвелла модель воздействия электрического поля на слой плазмы. В качестве невозмущенной плотности распределения заряженных частиц принимается функция Ферми–Дирака или Максвелла. Для описания состояния плазмы в предположении малой амплитуды внешнего электрического поля рассматривается краевая задача для системы двух интегро-дифференциальных уравнений. Искомыми величинами в них являются: возмущение функции распределения электронов и возмущение напряженности электрического поля. Система зависит от двух комплексных параметров, характеризующих свойства плазмы и внешнее поле, а в качестве ядра интегрального оператора принята функция, родственная распределению Ферми–Дирака или Максвелла.

В работе построено аналитическое представление общего решения указанной системы интегро-дифференциальных уравнений в виде интеграла с явно выписанным ядром. Такой вид решения найден с помощью новых, являющихся развитием работ И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, результатов в теории преобразования Фурье обобщенных функций. Для плотности интегральных представлений решения возникает сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши на вещественной прямой. Решение этого интегрального уравнения получено с использованием метода Ф. Д. Гахова и Н. И. Мусхелишвили и теории задачи Римана линейного сопряжения. Представлены результаты численной реализации построенного решения и исследована его зависимость от параметров задачи.

Тождество ошибки для некоторых задач с препятствием

Даровская Ксения Александровна
Первый МГМУ имени И. М. Сеченова, Российский университет дружбы народов
k.darovsk@gmail.com

Рассмотрим задачу минимизации функционала, порожденного линейным дифференциальным оператором, на некотором выпуклом замкнутом множестве. Подобные постановки возникают во многих прикладных областях, в частности, в механике — при изучении поведения упругих балок и пластин над жестким препятствием.

Если нас интересуют приближенные решениях таких задач, то для измерения их "качества" (т. е. близости к точному решению) хорошо себя зарекомендовали функциональные апостериорные оценки, поскольку они не накладывают условий на способ построения аппроксимаций. Особую роль в получении апостериорных оценок играет так называемое "тождество ошибки" (ТО), описывающее разрыв между точным решением задачи и произвольной функцией из соответствующего энергетического класса.

В рамках доклада предполагается обсудить новый подход к получению ТО для задачи с линейным дифференциальным оператором и гладким тензором и сформулировать соответствующий общий результат. В качестве иллюстрации будут представлены удобные формы тождества ошибки для гармонической и бигармонической задач с толстым препятствием.

Настоящее исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-11-00073.

Проблемы устойчивости фигур равновесия вращающейся капиллярной двухфазной жидкости

Денисова Ирина Владимировна
Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург
denisovairinavlad@gmail.com

Обсуждается вопрос устойчивости вращения вязкой двухфазной капли, состоящей из сжимаемой и несжимаемой жидкостей. Предполагается, что угловая скорость мала, а форма капли близка к двухслойной фигуре равновесия, при этом внутренней является несжимаемая жидкость. Она ограничена замкнутой неизвестной поверхностью, не пересекающейся с внешней границей. Сжимаемая жидкость баротропна. На границах действуют силы поверхностного натяжения. Решение стационарной задачи с неизвестными границами для уравнений Навье–Стокса, соответствующих медленному жёсткому вращению двухфазной капли, даёт существование фигур равновесия $\mathcal{F}^+$, $\mathcal{F}$, близких к вложенным шарам $B_{R_0^\pm}$ соответствующего радиуса ($R_0^+ < R_0^-$); $|\mathcal{F}^+| = |B_{R_0^+}|$, $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{F}$. Доказательство проводится с помощью теоремы о неявной функции [1]. Глобальная разрешимость задачи без вращения была доказана в [2]. Там была получена устойчивость состояния покоя капли с начальной границей раздела жидкостей близкой к шару. Исследование проводится в случае отсутствия силы тяжести, т. е. наше двухфазное тело можно рассматривать, например, как планету с газовой атмосферой.

[1] И. В. Денисова, Алгебра и анализ, **36**(3) (2024), 62–80.

[2] В. А. Солонников, Алгебра и анализ, **32**(1) (2020), 121-186.

Работа выполнена по теме государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ для ИПМаш РАН № 124040800009-8.

Усреднение гиперболических уравнений: операторные оценки при учёте корректоров

Дородный Марк Александрович
Санкт-Петербургский государственный университет
mdorodni@yandex.ru
Соавторы: Суслина Т. А.

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряжённый сильно эллиптический дифференциальный оператор A_ε второго порядка. Предполагается, что коэффициенты оператора A_ε периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Мы изучаем поведение операторов $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ и $A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ при малом ε и $\tau \in \mathbb{R}$. Результаты применяются к усреднению решений задачи Коши для гиперболического уравнения $\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -(A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau)$ с начальными данными из специального класса. При фиксированном τ получена аппроксимация решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$, а также аппроксимация решения по норме в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon)$. В этих аппроксимациях учитываются корректоры. Отслежена зависимость погрешностей от параметра τ.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-11-00092, https://rscf.ru/project/22-11-00092/.

О малых движениях системы тел с жидкостями под действием упругих и демпфирующих сил

Закора Дмитрий Александрович
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
dmitry.zkr@gmail.com
Соавторы: Фордук К. В.

Исследуются линейные двумерные задачи о малых движениях и нормальных колебаниях системы твёрдых тел, частично заполненных вязкими либо идеальными жидкостями и последовательно соединённых пружинами.

Доказаны теоремы о разрешимости соответствующих начально-краевых задач. Исследованы задачи о нормальных колебаниях этих систем. В частности, установлены локализация спектра и асимптотические формулы для различных ветвей спектра, доказаны свойства полноты и базисности систем корневых элементов.

О регуляризации фундаментального решения оператора Лапласа

Иванов Александр Валентинович
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН, Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия
regul1@mail.ru
Соавторы: Н. В. Харук

Данный доклад посвящен описанию некоторых результатов, касающихся регуляризации фундаментального решения оператора Лапласа в контексте исследования квантово-полевых моделей. Планируется обсудить процесс появления расходимостей, методы регуляризации и условие их применимости, а также некоторые утверждения, касающиеся регуляризации обрезанием в координатном представлении.

Спектральные свойства обыкновенного дифференциального оператора четного порядка с интегральными условиями

Карамян Рубен Дженсикович
Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
rkaramyan@yandex.ru

Рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор четного порядка с нелокальными краевыми условиями и спектральным параметром. Граничные условия задаются интегралами Римана, которые содержат как неизвестную функцию, так и производные от неизвестной функции. В пространстве Соболева вводится эквивалентная норма, зависящая от спектрального параметра λ. Получены результаты о фредгольмовой разрешимости и спектре задачи, а также априорная оценка решений задачи при достаточно больших значениях параметра λ в терминах эквивалентных норм.

[1] Karamyan R. D., Skubachevskii A. L., *Spectral Properties of the Fourth Order Differential Operator with Integral Conditions*, Lobachevskii J. Math., 2024, Vol. 45, No. 4, pp. 1561–1577.

Исследование граничных интегральных уравнений Фредгольма второго рода, условно эквивалентных трехмерной задаче дифракции акустических волн. Осреднение слабо сингулярных интегральных операторов и численное решение трехмерных задач Неймана для уравнения Гельмгольца

Каширин Алексей Алексеевич
Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук
elomer@mail.ru
Соавторы: Смагин Сергей Иванович, Погорелов Сергей Анатольевич

Рассматривается задача дифракции стационарных акустических волн на трехмерном однородном включении. Аналитическое решение этой задачи может быть найдено лишь в исключительных случаях, поэтому чаще всего она решается численно. Эффективные алгоритмы численного решения задачи дифракции могут быть созданы на основе условно эквивалентных ей граничных интегральных уравнений с одной неизвестной функцией. Различные уравнения такого вида получены в работе [1].

Используя теорию Фредгольма, мы исследуем два слабо сингулярных интегральных уравнения второго рода, к каждому из которых может быть сведена задача дифракции, на их собственных частотах. В этих случаях уравнения, в отличие от исходной задачи, некорректно разрешимы. Поскольку для областей общей формы собственные частоты неизвестны, это может привести к недостоверным результатам при численном решении данных уравнений. Установлено, что одно из них на собственных частотах может не иметь решения, а другое разрешимо неединственным образом. При этом существует единственное решение второго уравнения, которое позволяет найти решение задачи дифракции. На всех частотах оно может быть найдено приближенно методом интерполяции [2].

Для численного решения указанных уравнений необходимо построить дискретные аналоги поверхностных потенциалов и их нормальных производных. Для этого может быть использован метод осреднения интегральных операторов со слабыми особенностями в ядрах. В результате интегральные уравнения аппроксимируются системами линейных алгебраических уравнений с легко вычисляемыми коэффициентами, которые затем решаются численно обобщенным методом минимальных невязок (GMRES). После этого приближенное решение исходной задачи находится в любой точке пространства.

Ранее такой подход использовался для приближенного решения трехмерных задач Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца потенциалами простого слоя [3], [4]. Мы получили формулы для нормальной производной потенциала простого слоя и применили их для численного решения трехмерных задач Неймана для уравнения Гельмгольца. Результаты численных экспериментов демонстрируют возможности данного подхода.

[1] R. E. Kleinman, P. A. Martin, *On single integral equations for the transmission problem of acoustics*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 48 (1988), 307–325.

[2] А. А. Каширин, С. И. Смагин, *О численном решении скалярных задач дифракции в интегральных постановках на спектрах интегральных операторов*, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 494 (2020), 38–42.

[3] А. А. Каширин, С. И. Смагин, *О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов*, ЖВМиМФ, 52 (2012), 1492–1505.

[4] С. И. Смагин, *О численном решении интегрального уравнения I рода со слабой особенностью в ядре на замкнутой поверхности*, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 505 (2022), 14–18.

О динамике уравнения с запаздыванием, диффузией и неклассическими граничными условиями

Кащенко Илья Сергеевич
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
iliyask@uniyar.ac.ru
Соавторы: Кащенко С. А., Масленников И. Н.

Работа посвящена исследованию уравнения в частных производных с запаздыванием, диффузией и с неклассическими краевыми условиями вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u(t-T,x), u(t,x)), \quad 0 < x < 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = \alpha u(t, x_0), \quad 0 \le x_0 < 1.$$

Будет обсуждаться устойчивость нетривиального состояния равновесия и возникающие бифуркации.

Существование локального ренормализованного решения эллиптического уравнения с переменными показателями в пространстве $\mathbb{R}^n$

Кожевникова Лариса Михайловна
Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий
kosul@mail.ru

Концепция ренормализованных решений является важным шагом в изучении общих вырождающихся эллиптических уравнений с данными в виде меры. Первоначальное определение приведено в работе [1] и распространено М. Ф. Бидо-Верон [2] в локальную и очень полезную форму для уравнения с p-лапласианом, поглощением и мерой Радона μ:

$$-\Delta_p u + |u|^{p_0-2}u = \mu, \quad p \in (1, n), \quad p < p_0. \tag{1}$$

В частности, М. Ф. Бидо-Верон доказала существование в пространстве $\mathbb{R}^n$ локального энтропийного решения уравнения (1) с правой частью из пространства $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. В монографии [3] Л. Верон обобщил понятия локального ренормализованного решения для уравнения со степенными нелинейностями вида

$$-\mathrm{div}\, \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) + b(\mathrm{x}, u, \nabla u) = \mu. \tag{2}$$

В докладе понятие локального ренормализованного решения адаптируется на уравнение вида (2) с переменными показателями роста. В локальном пространстве Соболева с переменным показателем доказано существование локального ренормализованного решения уравнения (2) с $\mu \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Ранее автором в работе [4] для уравнения вида (2) с $p(\mathrm{x})$-ростом и общей мерой Радона μ с конечной полной вариацией доказано существование ренормализованного решения задачи Дирихле в ограниченной области Ω.

[1] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet, *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 28:4 (1999), 741–808.

[2] M. F. Bidaut-Véron, *Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data*, Adv. Nonlinear Stud., 3:1 (2003), 25–63.

[3] L. Véron, *Local and global aspects of quasilinear degenerate elliptic equations. Quasilinear elliptic singular problems*, World Sci. Publ., Hackensack, 2017.

[4] Л. М. Кожевникова, *Ренормализованные решения эллиптических уравнений с переменными показателями и данными в виде общей меры*, Матем. сб., 211:12 (2020), 83–122.

О разрушении решений эволюционных неравенств высокого порядка

Коньков Андрей Александрович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
konkov@mech.math.msu.su
Соавторы: А. Е. Шишков

Рассматривается задача Коши

$$\partial_t^k u - \sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x,t,u) \geq f(|u|) \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \partial_t u(x,0) = u_1(x), \ldots, \partial_t^{k-1} u(x,0) = u_{k-1}(x) \geq 0, \tag{2}$$

где $k, m, n \geq 1$ и a_α — каратеодориевы функции такие, что

$$|a_\alpha(x,t,\zeta)| \leq A|\zeta|^p, \quad |\alpha| = m, \quad A, p = const > 0,$$

для почти всех $(x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ и для всех $\zeta \in \mathbb{R}$.

Для слабых решений (1), (2) найдены точные условия blow-up. В случае степенной нелинейности $f(\zeta) = \zeta^\lambda$ наши условия совпадают с условиями, раннее полученными в работах [1–4] и, в частности, с известными условиями Фуджиты-Хаякавы и Като. Нам также удалось обобщить результаты работы [5] на случай неравенств высокого порядка вида (1). При этом в отличие от [5] мы не накладываем никаких условий эллиптичности на коэффициенты a_α дифференциального оператора. Нам также не требуются никакие условия роста на решение задачи Коши на начальные значения. Все формулировки и доказательства доступны в архиве Корнельского университета [6].

[1] Yu. V.Egorov, V. A. Galaktionov, V. A. Kondratiev, S. I. Pohozaev, *On the necessary conditions of global existence of solutions to a quasilinear inequality in the half-space*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1: Math. 330 (2000), 93–98.

[2] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 13 (1966), 109–124.

[3] K. Hayakawa, *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations*, Proc. Japan Acad. 49 (1973), 503–505.

[4] T. Kato, *Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations*, Commun. Pure Appl. Math. 33 (1980), 501–505.

[5] R. Laister, M. Sierżęga, *A blow-up dichotomy for semilinear fractional heat equations*, Math. Ann. 381 (2021), 75–90.

[6] A. A. Kon'kov, A. E. Shishkov, *On blow-up conditions for nonlinear higher order evolution inequalities*, arXiv:2309.00574 [math.AP], DOI: 10.48550/arXiv.2309.00574

Усреднение уравнений равновесия волокнистого композита методом двухмасштабной сходимости

Леонова Эвелина Ивановна
Новосибирский государственный университет; Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

e.leonova1@g.nsu.ru

Доклад посвящен исследованию статической задачи антиплоского сдвига волокнистого композита, армированного тонкими нитями. Исходная постановка содержит два малых параметра δ и ε, которые отвечают за толщину нити и расстояние между соседними нитями соответственно. Изучено асимптотическое поведение решений при стремлении параметров к нулю — сначала параметра δ, затем параметра ε. Оба предельных перехода математически строго обоснованы. Предельный переход при $\delta \to 0+$ основан на асимптотическом методе, предложенном в [1]. Предельный переход при $\varepsilon \to 0+$ представляет собой процедуру гомогенизации, основанную на применении метода двухмасштабной сходимости Г. Аллера и соавторов [2]. Проведены численные расчеты, которые показывают хорошую сходимость с теоретическими результатами.

[1] A. I. Furtsev, E. M. Rudoy, *Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the Kirchhoff-Love theory of plates,* International Journal of Solids and Structures, 2020, Vol. 202, P. 562–574.

[2] G. Allaire, A. Damlamian, U. Hornung, *Two-scale convergence on periodic surfaces and applications,* Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media, 1996, P. 15–25.

Условия подчиненности для систем минимальных дифференциальных операторов в пространствах Соболева

Лиманский Дмитрий Владимирович
Донецкий государственный университет, г. Донецк
d.limanskiy.dongu@mail.ru

В работе приводится обзор результатов об априорных оценках для систем минимальных дифференциальных операторов в шкале пространств $L^p(\Omega)$, где $p \in [1, \infty]$. Приведены результаты о характеризации эллиптических и l-квазиэллиптических систем при помощи априорных оценок в изотропных и анизотропных пространствах Соболева $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$. При заданном наборе $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ доказаны критерии существования l-квазиэллиптических и слабо коэрцитивных систем, а также указаны широкие классы слабо коэрцитивных в $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, неэллиптических и неквазиэллиптических систем. Кроме того, описаны линейные пространства операторов, подчиненных в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-норме тензорному произведению двух эллиптических дифференциальных полиномов.

[1] Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд, *Об условиях подчиненности для систем минимальных дифференциальных операторов*, Современная математика. Фундаментальные направления, 70:1 (2024), 121-149.

Асимптотики типа шепчущей галереи в трехмерной области, диффеоморфной полноторию

Миненков Дмитрий Сергеевич
ИПМех им. А. Ю. Ишлинского РАН, МГУ им. М. В. Ломоносова
minenkov.ds@gmail.com

Рассматривается задача на собственные функции для оператора Лапласа внутри трехмерной области вращения Ω, диффеоморфной полноторию, с условиями Дирихле на границе. Построена серия асимптотических собственных чисел и функций (квазимод) $\{E_k, u_k\}_{k=k_0}^{\infty}$ типа шепчущей галереи (см. [1]):

$$\|\Delta u_k - E_k u_k\|_{L^2(\Omega)} = O(k^{2/3}), \quad \|u_k\|_{L^2(\Omega)} \sim 1, \quad E_k \asymp k^2, \quad E_{k+1} - E_k \asymp k, \quad k \to \infty.$$

Именно, исследуются коротковолновые асимптотики, локализованные у границы или у части границы $\partial\Omega$. Исходная задача сводится к решению одномерных уравнений с помощью адиабатического приближения, применяемого в виде операторного разделения переменных (см. [2]).

Результаты получены совместно с С. А. Сергеевым в МГУ им. М. В. Ломоносова в рамках гранта РНФ 22-71-10106.

[1] D. S. Minenkov, S. A. Sergeev, *Asymptotics of the Whispering Gallery-Type in the Eigenproblem for the Laplacian in a Domain of Revolution Diffeomorphic To a Solid Torus*, Russ. J. Math. Phys. 30 4 (2023), 599-620.

[2] С. Ю. Доброхотов, *Методы Маслова в линеаризованной теории гравитационных волн на поверхности жидкости*, Докл. АН СССР 269 1 (1983), 76–80.

Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме

Мишулович Арсений Александрович
Санкт-Петербургский государственный университет
st062829@student.spbu.ru

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка $\mathcal{A}_\varepsilon$ с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами: $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla + \varepsilon^{-2} p(\mathbf{x}/\varepsilon)$. Известно, что спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет зонную структуру: он является объединением замкнутых отрезков (спектральных зон). Зоны могут перекрываться. Между зонами могут открываться лакуны. Согласно гипотезе Бете-Зоммерфельда, в многомерном случае число лакун конечно. Получена аппроксимация резольвенты в регулярной точке оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$, близкой к краю внутренней спектральной лакуны, по “энергетической” норме (т.е. по операторной норме из пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ в класс Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$).

Исследование поддержано Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075–15–2022–287 от 06.04.2022).

Вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред

Осмоловский Виктор Георгиевич
Санкт-Петербургский государственный университет
victor.osmolovskii@gmail.com

В докладе обсуждается свойства решений вариационной задачи для класса невыпуклых функционалов, возникающих при описании процесса фазовых переходов в механике сплошных сред. Особое внимание уделяется зависимости состояний равновесия от параметров задачи, например, температуры и области, занимаемой двухфазовой средой. Показано, какие из явно получаемых результатов для одномерного случая, хотя бы на качественном уровне переносятся на многомерный. Приводится пример регуляризации функционала энергии, основанный на учёте поверхностногй энергии границы раздела фаз, гарантирующей существование решений в любых областях при всех значениях температуры.

[1] V.G. Osmolovskii, *Boundary Value Problems with Free Surfaces in the Theory of Phase Transitions*, Differential Equations, Vol.53, N13 (2017), 1734-1763.

[2] В.Г. Осмоловский, *Математические вопросы теории фазовых переходов в механике сплошных сред*, Алгебра и анализ, т.29, N5, (2012), 111–178.

[3] В.Г. Осмоловский, *Метод расщепления в вариационной задаче теории фазовых переходов в механике двухфазовых сплошных сред*, Проблемы математического анализа, вып.126, (2024), 17–28.

Об автомодельных решениях задачи Стефана с бесконечным числом фазовых переходов

Панов Евгений Юрьевич
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

В области $t, x > 0$ рассматривается задача Стефана для уравнения теплопроводности с фазовыми переходами при температурах $u_i > u_0$, $i \in \mathbb{N}$. Считаем, что $u_{i+1} > u_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$ и что $\lim_{i\to\infty} u_i = u_* \le +\infty$. Здесь i-ая фаза соответствует температурному интервалу (u_i, u_{i+1}) и характеризуется коэффициентами диффузии $a_i > 0$ и теплопроводности

$k_i > 0$, $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. На неизвестных линиях $x = x_i(t)$ фазовых переходов, где $u = u_i$, задается условие Стефана $d_i x_i'(t) + k_i u_x(t, x_i(t)+) - k_{i-1} u_x(x, x_i(t)-) = 0$, $i \in \mathbb{N}$, $d_i \geq 0$. Ставятся также начальное и краевое условия $u(0, x) \equiv u_0$, $u(t, 0) \equiv u_*$. Изучаются убывающие по $\xi = x/\sqrt{t}$ автомодельные решения $u = u(\xi)$. Оказалось, что условия Стефана на линиях фазовых переходов $\xi = \xi_i$ сводятся к равенствам $\frac{\partial}{\partial \xi_i} E(\bar{\xi}) = 0$, где $E(\bar{\xi}) = -\sum_{i=0}^{\infty} k_i (u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \xi_i^2/4$, $F(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2/4} ds$ и $\xi_0 = +\infty$. Этот функционал задан на выпуклом конусе $\{\, \bar{\xi} = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_\infty \mid \xi_i > \xi_{i+1} > 0 \; \forall i \in \mathbb{N} \,\}$ и является коэрцитивным и строго выпуклым функционалом. Если $E(\bar{\xi}) \not\equiv +\infty$, то существует единственная точка $\bar{\xi}^0$ глобального минимума функционала E. Координаты ξ_i^0 этой точки определяют решение нашей задачи. Показано, что в случае $E(\bar{\xi}) \equiv +\infty$ решение может отсутствовать.

Асимптотическое решение уравнения типа Шредингера для случая двух близких точек вырождения

Перель Мария Владимировна
Кафедра высшей математики и математической физики, СПбГУ
m.perel@spbu.ru

Асимптотические разложения решения дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $\mathbf{K}(x)\mathbf{\Psi} = -i\varepsilon \mathbf{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial x}$, $\varepsilon \ll 1$, где $\mathbf{K}(x)$, $\mathbf{\Gamma}$– самосопряженные операторы, строятся на основе собственных значений $\beta_n(x)$ и собственных элементов $\boldsymbol{\varphi}_n(x)$ линейного операторного пучка $\mathbf{K}(x)\boldsymbol{\varphi}_n(x) = \beta_n(x)\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}_n(x)$. Если невырожденное $\beta_n(x)$ отделено от остального спектра постоянной, не зависящей от ε, $\beta = \beta_n(x)$ и $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_n(x)$ – гладкие функции, то соответствующее разложение называем адиабатическим. Оно, как правило, неприменимо вблизи локальных точек вырождения, то есть таких x_*, в которых $\beta = \beta_n(x)$ пересекается с другим собственным значением $\beta = \beta_j(x)$. Если $\mathbf{K}(x) = \mathbf{K}_0(x) + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{B}$, причем собственные значения $\beta_n^0(x)$ и $\beta_j^0(x)$ невозмущенной спектральной задачи, пересекаются в некоторой точке x_*, $\beta_n^0(x) - \beta_j^0(x) \approx Q(x - x_*)$, собственное пространство, соответствующее собственному значению $\beta_n^0(x_*) = \beta_j^0(x_*)$ двумерно, весь остальной спектр отделен от $\beta_n^0(x)$ и $\beta_j^0(x)$, то на интервале изменения x, содержащем x_*, найдено асимптотическое решение возмущенной задачи. В случае, когда на краях этого интервала адиабатические разложения применимы, выведена явно матрица перехода, связывающая главные члены адиабатических разложений с разных сторон от точки x_*. Рассмотрены задачи, к которым применен полученный результат [1]. Они описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнениями в частных производных, причем $\mathbf{K}(x)$ является дифференциальным по любым переменным, кроме x. Приводится матрица перехода для случая, когда двукратно вырожденное собственное значение имеет геометрическую кратность один.

[1] Ignat V. Fialkovsky, Maria V. Perel, *Mode transformation for a Schrödinger type equation: Avoided and unavoidable level crossings*, J Math Phys, 61 (2020), 043506.

Теорема единственности типа Кружкова для системы законов сохранения, описывающей химическое заводнение

Растегаев Никита Владимирович
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А.Стеклова РАН
rastmusician@gmail.com
Соавторы: Матвеенко С. Г.

Рассматривается система из двух гиперболических законов сохранения

$$\begin{cases} s_t + f(s,c)_x = 0, \\ (cs + a(c))_t + (cf(s,c))_x = 0, \end{cases}$$

обычно описывающая заводнение нефтяного пласта раствором химического агента. Эта система не является ни истинно нелинейной, ни строго гиперболической, что ограничивает применение к ней общих результатов, относящихся к строго гиперболическим истинно нелинейным системам. Решения некоторых начально-граничных задач (например, задачи Римана [1] или задачи закачки оторочки химического агента [2], [3]) для этой системы были исследованы ранее. В работах [2], [3] решения строятся методом характеристик с использованием перехода к лагранжевым координатам, в которых уравнения разделяются. При этом вопрос единственности построенных решений не исследован.

Мы используем предложенную замену координат для доказательства теоремы единственности типа Кружкова для решения начально-краевой задачи при определенных ограничениях на начальные данные и класс допустимых слабых решений. При определении допустимости разрывов используется локальный вариант критерия малого параметра (исчезающая вязкость).

[1] Johansen T. and Winther R., *The solution of the Riemann problem for a hyperbolic system of conservation laws modeling polymer flooding*, SIAM journal on mathematical analysis, 1988, 19(3), 541–566.

[2] Pires A. P., Bedrikovetsky P. G. and Shapiro A. A., *A splitting technique for analytical modelling of two-phase multicomponent flow in porous media*, Journal of Petroleum Science and Engineering, 2006, 51(1-2), 54–67.

[3] Ribeiro P. M. and Pires A. P., *The displacement of oil by polymer slugs considering adsorption effects*, SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 2008, September, SPE-115272.

Спетральные серии оператора Шрёдингера с дельта-потенциалом в полюсах двух- и трехмерных поверхностей вращения

Рыхлов Владислав Владимирович
Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
vladderq@gmail.com
Соавторы: А. И. Шафаревич

Рассматривается спектральная задача для оператора Шрёдингера

$$H\psi = E\psi + o(h), \quad H = -\frac{h^2}{2}\Delta + \delta_{x_1}(x) + \delta_{x_2}(x), \quad x \in M,$$

где $h \to +0$, x_j — полюса M, M — двумерная $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ или трехмерная $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ поверхность вращения:

$$M^2 = \{(v(s)\cos\varphi, v(s)\sin\varphi, w(s)) \,\big|\, s \in [s_1, s_2], \varphi \in \mathbb{S}^1\} \quad \text{и}$$

$$M^3 = \{(v(s)\cos\theta\cos\varphi, v(s)\cos\theta\sin\varphi, v(s)\sin\theta, w(s)) \,\big|\, s \in [s_1, s_2], \varphi \in \mathbb{S}^1, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\},$$

$s \in [s_1, s_2]$ — натуральный параметр кривой $(v(s), w(s)) \subset \mathbb{R}^2$, и значения s_j соответствуют точкам x_j.

Оператор H определен на функциях из $L^2(M)$ как самосопряженное расширение оператора Δ, действующего на функциях $\psi_0 \in W_2^2(M)$, обращающихся в нуль в полюсах x_j. В области определения оператора H лежат функции, имеющие особенности в точках x_j, а именно, для $\psi \in D(H)$ имеется асимптотическое равенство [1] при $x \to x_j$

$$\psi(x) = -\frac{a_j}{2\pi}\ln d(x, x_j) + b_j + o(1) \text{ на } M^2, \quad \psi(x) = \frac{a_j}{4\pi}\frac{1}{d(x, x_j)} + b_j + o(1) \text{ на } M^3, \tag{15.1}$$

где $d(x, x_j)$ — геодезическое расстояние на M между точками x и x_j, а коэффициенты a_j при сингулярной части и b_j при регулярной связаны следующим образом:

$$i(\mathbf{I} + U)a + \frac{2}{h^2}(\mathbf{I} - U)b = 0, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{15.2}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, U — некоторый унитарный оператор.

В работе получены явные выражения для условий квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова, позволяющие изучить поведение асимптотического спектра. Асимптотические собственные функции имеют представление в терминах функций Бесселя и Неймана.

1. J. Brüning, V. A. Geyler, Scattering on compact manifolds with infinitely thin horns, J. Math. Phys., 44:2 (2003), 371–405

2. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, Изд. Наука, Москва, 1976
3. W. Wasow, Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations, Изд. Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1965

Многоточечные формулы в обратных задачах и их численная реализация

Сивкин Владимир Николаевич
МГУ им. Ломоносова
name@gmail.com
Соавторы: Новиков Р. Г.

В ряде обратных задач рассеяния возникают асимптотические разложения, старшие члены которых содержат основную информацию о неизвестной функции. Чтобы повысить скорость сходимости, к таким разложениям можно применять метот многоточечных формул, предложенный в [1]. При этом, сами многоточечные формулы неустойчивы к шуму, и требуют дополнительных модификаций. В работе [2], в частности, представлена численная регуляризации многоточечных формул. При этом, реализованы различные формулы для нахождения преобразования Фурье потенциала рассеяния уравнения Шредингера по данным амплитуды рассеяния при нескольких высоких энергиях. Данные формулы, в частности, улучшают классическую медленно сходящуюся формулу Борна-Фаддеева.

[1] R.G. Novikov, *Multipoint formulas for scattered far field in multidimensions*, Inverse Problems 36.9 (2020): 095001.
[2] R.G. Novikov, V.N. Sivkin, G.V. Sabinin, *Multipoint formulas in inverse problems and their numerical implementation*, Inverse Problems, 2023, 39 (12), pp.125016.

Асимптотика решений начально-краевой задачи для одномерного уравнения Клейна-Гордона и моделирование распространения акустических возмущений в атмосфере

Смирнова Екатерина Сергеевна
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН; Балтийский Федеральный Университет им. Канта
smirnova.ekaterina.serg@gmail.com

В работе рассматривается начально-краевая задача для одномерного уравнения Клейна-Гордона $h^2\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - h^2 c^2(y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a(y)U = 0$ с переменными коэффициентами на полуосях $y \geq 0$, $\tau \geq 0$, из физической задачи о моделировании волновых возмущений, распространяющихся в атмосферном газе. Построено асимптотическое при $0 < h << 1$ решение этой задачи. Показано, что оно состоит из двух частей [1, 2]: погранслойной быстроубывающей при отдалении от точки $y = 0$ и бегущей осциллирующей, представляемой в виде канонического оператора Маслова.

Работа выполнена по теме государственного задания №124012500437-9.

[1] S. Dobrokhotov, E. Smirnova, *Asymptotics of the Solution of the Initial Boundary Value Problem for the One-Dimensional Klein–Gordon Equation with Variable Coefficients,* Russian Journal of Mathematical Physics, 31:2 (2024), 187-198.

[2] Е.С. Смирнова, *Асимптотика решения одной начально-краевой задачи для одномерного уравнения Клейна–Гордона на полуоси,* Математические заметки, 114:4 (2023), 602-614.

О построении решений одномерной системы мелкой воды над ровным наклонным дном с помощью дробных производных

Сударикова Ольга Сергеевна
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук
sudarikova.os@phystech.edu
Соавторы: Дмитрий Сергеевич Миненков

Рассматривается одномерная нелинейная система уравнений мелкой воды, описывающая набег необрушающихся длинных волн на пологий берег. С помощью специальной замены система асимптотически сводится к линеаризованной системе мелкой воды (эквивалентной волновому уравнению с переменной скоростью), заданной в фиксированной области с вырождением функции дна на границе. Асимптотики нелинейной системы таким образом строятся с помощью решений линеаризованной системы [1]. Для линеаризованной системы известны асимптотики в виде стоячих или бегущих волн, а в специальных случаях и семейства точных решений (для ровного наклонного или параболического дна). С помощью дифференцирования по времени можно строить новые точные решения линеаризованной системы. В данной работе исследуются точные решения, полученные с помощью дробного дифференцирования по времени решений в виде бегущих волн из [2]. Также обсуждается связь некоторых определений дробного дифференцирования и вопрос удобной реализации финальных формул с помощью программных пакетов.

Работа выполнена по теме государственного задания ИПМех РАН (№ госрегистрации 124012500442-3).

[1] Dobrokhotov S.Yu, Minenkov D.S., Nazaikinskii V.E., *Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem for the Nonlinear Shallow Water Equations in a Basin with a Gently Sloping Beach*, Russian J. of Math. Phys., 2022, T.29 № 1. C.28-36

[2] Доброхотов С. Ю., Тироцци Б., *Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью* $c = \sqrt{x}$, УМН, 2010, Т. 65. В. 1 (391). С. 185-186.

Усточивость МГД течений полимерной жидкости в цилиндрическом канале (обобщение модели Виноградова-Покровского)

Ткачев Дмитрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева
tkachev@math.nsc.ru
Соавторы: Бибердорф Элина Арнольдовна

Изучается устойчивость состояния покоя для течений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в бесконечном цилиндрическом канале в классе осесимметрических возмущений. В качестве математической модели используется структурно-феноменологическая модель Виноградова–Покровского [1, 2].

Сформулированы два уравнения для радиальной компоненты скорости, в основном определяющие спектр задачи в случае абсолютной проводимости $b_m = 0$ и в общем случае $b_m \neq 0$. Проведенные вычислительные эксперименты показывают, что с ростом частоты возмущений вдоль оси канала у спектрального уравнения (в случае $b_m = 0$) появляются собственные значения с положительными вещественными частями, однако по величине они малы.

В целом исследования показывают, что введение в модель внешнего магнитного поля позволяет ослабить или даже погасить линейную неустойчивость по Ляпунову состояния покоя в отличие от базовой модели [3].

Работа первого автора выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

[1] Pokrovskii V. N., *The mesoscopic theory of polymer dynamics*, Springer Ser. Chem. Phys., 95, Springer, Dordrecht (2010).

[2] Altukhov Yu. A., Gusev A. S., Pishnograi G. V., *Introduction into mesoscopic theory of flowing polymeric systems*, Alt. GPA, Barnaul (2012).

[3] Tkachev D. L. and Biberdorf E. A., *Spectrum of a problem about the flow of a polymeric viscoelastic fluid in a cylindrical channel (Vinogradov-Pokrovski model)*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **20**(2), 1269–1289 (2023).

След резольвенты оператора Лапласа на метрическом графе

Толченников Антон Александрович
ИПМех РАН, Механико-математический факультет МГУ

Доклад будет посвящен оператору Лапласа на метрическом конечном графе $G = (V, E)$ с длинами ребер $\{l_j\}_{j=1}^{|E|}$, который на каждом ребре задан выражением $-\frac{d^2}{dx^2}$, а в вершинах графа заданы граничные условия, обеспечивающие самосопряженность оператора. Для работы с такими операторами есть эффективный метод — формализм Крейна, позволяющий удобно записывать резольвенту такого оператора и вычислять его след (или след подходящей степени резольвенты в случае пространств большей размерности, например, декорированных графов). Каждый такой оператор однозначно определяется лагранжевой плоскостью в $\mathbb{C}^{|2E|} \oplus \mathbb{C}^{2|E|}$: $\Lambda \leftrightarrow \Delta^\Lambda$. Цель — написать коэффициенты разложения $\mathrm{tr}(\Delta^\Lambda - z)^{-1}$ при больших z (за исключением сектора, содержащего положительную вещественную полуось). Первые два слагаемых в разложении особенно просты: $\mathrm{tr}(\Delta^\Lambda + w^2)^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^{|E|} l_i}{2w} + \frac{|E| - \dim \Lambda \cap \Lambda_X}{2w^2} + O(w^{-3})$, где $\Lambda_X = \mathbb{C}^{2|E|} \oplus 0$. Этот подход, связанный с резольвентной формулой Крейна, можно применять для более сложных пространств – декорированных графов.

Работа поддержана грантом РНФ 22-11-00272.

Bi-непрерывные полугруппы и их аппроксимации в задачах квантовой механики

Уткин Андрей Владимирович
МИАН
`utkin.av@phystech.edu`

Доклад посвящен одному из способов вывода стохастической квантовой динамики, однородной во времени, с использованием приближением дискретными во времени процессами. Исследуются условия, при которых итерации Чернова марковских операторов $\mathbf{F}_{t/N}^N$ аппроксимируют bi-непрерывную полугруппу на некотором функциональном пространстве.

Исследуется также обобщение конструкции на случай процессов случайных преобразований метрического пространства и квантовый аналог, в котором структура метрического пространства определяется на подмножестве квантовых состояний.

[1] A.S. Holevo. Statistical Structure of Quantum Theory. — Quantum Information and Computation vol. 3(2) pp. 191-192 (2003).

[2] A.A. Albanese, E. Mangino, Trotter-Kato theorems for bi-continuous semigroups and applications to Feller semigroups. // Journal of Mathematical Analysis and Applications vol. 289(2) pp. 477-492 (2004)

Гипотеза Пойа для задачи Дирихле в кольце на плоскости

Филонов Николай Дмитриевич
ПОМИ РАН
filonov@pdmi.ras.ru
Соавторы: М. Левитин, И. Полтерович, Д. Шер

В 1954 г. Г. Пойа предположил, что

$$N(\Omega,\lambda) \leq \frac{|\Omega|\lambda}{4\pi} \quad \text{при всех} \quad \lambda \geq 0.$$

Здесь Ω — ограниченная область на плоскости, λ — спектральный параметр, $N(\Omega,\lambda)$ — считающая функция собственных значений оператора Лапласа задачи Дирихле в Ω.

Мы докажем эту гипотезу для произвольного кольца на плоскости

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : r < |x| < R \right\}.$$