Хроматические числа плоского тора, склеенного из параллелограмма

Толмачев Александр Дмитриевич
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Кавказский математический центр
`tolmachev.ad@phystech.edu`
Соавторы: Дмитрий Протасов, Всеволод Воронов
Секция: Теория чисел и дискретная математика

Пусть $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^2$ — произвольные векторы ненулевой длины $l_1 = |\vec{v_1}|$ и $l_2 = |\vec{v_2}|$ с углом $\alpha = \angle(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ между ними. Рассмотрим плоский тор $T^2_{l_1,l_2,\alpha}$ как фактор-пространство по решетке $\mathbb{R}^2/L$, где $L = \{m\vec{v_1} + n\vec{v_2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Другими словами, рассматривается плоский тор, склеенный из параллелограмма, со сторонами l_1, l_2 и углом α между ними.

Соответствующая метрика $\rho_{l_1,l_2,\alpha}$ расстояния на таком торе может быть выражена через стандартную евклидову метрику на плоскости следующим образом:

$$\rho_{l_1,l_2,\alpha}\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \min\left\{\left|(x_2 - x_1 + m) \cdot \vec{v_1} + (y_2 - y_1 + n) \cdot \vec{v_2}\right| : m, n \in \mathbb{Z}\right\},$$

что является кратчайшим расстоянием между точками $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ по поверхности тора (здесь и далее считаем, что $x_1, x_2, \in [0, 1]$, $y_1, y_2 \in [0, 1]$).

В работе рассматриваются оценки хроматических чисел тора $T^2_{l_1,l_2,\alpha}$ в зависимости от параметров l_1, l_2, α. Кроме того, получены некоторые оценки хроматических чисел с запрещенным расстоянием для такого тора.

Задача о хроматических числах различных множеств тесно связана с задачей о разбиении множеств на части меньшего диаметра. Данная работа расширяет предыдущие исследования авторов об оценках оптимальных разбиений тора и плоских множеств на части меньшего диаметра (см. [1, 2]). Отметим, что в отличие от работы [2], здесь рассматривается обобщение плоского тора со склейки из квадрата на склейку из произвольного параллелограмма, параметризуемого тремя параметрами. Авторами также получены некоторые оценки разбиений тора $T^2_{l_1,l_2,\alpha}$ на части меньшего диаметра, которые расширяют исследования из ранних статей [1, 2].

[1] A.D. Tolmachev, D.S. Protasov, V.A. Voronov, *Coverings of planar and three-dimensional sets with subsets of smaller diameter*, Discrete Applied Mathematics, 2022, v. 320, p. 270-281.

[2] D.S. Protasov, A.D. Tolmachev, V.A. Voronov, *Optimal partitions of the flat torus into parts of smaller diameter*, arxiv preprint. [2024] arXiv:2402.03997