О проблеме продолжения Уитни для пространств Соболева

Тюленев Александр Иванович
МЦМУ МИАН
tyulenev-math@yandex.ru,tyulenev@mi-ras.ru
Секция: Пленарный доклад

В 1934 году Х. Уитни поставил следующую задачу. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, а $S \subset \mathbb{R}^n$ — непустое замкнутое множество. Для заданной функции $f : S \to \mathbb{R}$ требуется найти условия, необходимые и достаточные для существования функции $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$, являющейся продолжением f, т.е. $F|_S = f$. В полной общности эта проблема была решена Ч. Фефферманом в середине 2000-ых. Большой интерес представляет аналогичная задача, сформулированная в контексте пространств Соболева $W_p^m(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$. Такая задача ещё очень далека от своего окончательного решения.

На данный момент окончательные ответы получены лишь в случае $m = 1$, $p > n$ в работах П. Шварцмана. Некоторые результаты при $p > n$ и $m \in \mathbb{N}$ получены в работах Ч. Феффермана и его учеников. Также в последние два года Ч. Фефферманом и его учениками предпринимаются попытки продвижения в случае $m = n = 2$ и $p > 1$, однако и здесь ситуация далека от своего окончательного решения.

Основной фокус доклада – случай $m = 1$, $n \geq 2$ и $p \in (1, n]$. В таком диапазоне параметров ранее задача рассматривалась лишь для регулярных по Альфорсу–Давиду множеств $S \subset \mathbb{R}^n$. Недавно удалось получить окончательные ответы для существенно более широкого класса “толстых” множеств, введённого В. Рычковым. Более того, в контексте абстрактных метрических пространств с мерой удаётся получить естественное обобщение как этих результатов, так и некоторых результатов П. Шварцмана, относящихся к случаю $m = 1$ и $p \in (n, \infty)$. Наконец, если множество $S \subset \mathbb{R}^n$ не удовлетворяет каким-либо дополнительным условиям регулярности, то удаётся получить почти точное описание следа пространств Соболева на S.