

Многомерные билиардные книжки и их топологические свойства

Кибкало Владислав Александрович

МГУ имени М. В. Ломоносова; Московский центр фонд. и прикл. матем

slava.kibkalo@gmail.com

Секция: Геометрия

Топологический подход к интегрируемым гамильтоновым системам, развитый в работах А. Т. Фоменко и его научной школы [1]. Недавно класс интегрируемых билиардов в областях, ограниченных софокусными квадриками, был существенно расширен В. В. Ведюшкиной, что позволило промоделировать билиардами широкий класс слоений и особенностей интегрируемых систем с 2 степенями свободы. А именно, был построен класс билиардных книжек, склеенных (по гладким граничным дугам) из двумерных софокусных областей с плоской метрикой. Ребра (1-клетки) оснащены циклическими перестановками, а вершины (0-клетки) — условиями коммутирования.

Автором предложено и изучено многомерное обобщение билиардных книжек для софокусного семейства $\sum_{i=1}^n x_i^2 / (a_i - \lambda) = 1$ квадрат в \mathbb{R}^n . Такая книжка есть CW -комплекс X^n с проекцией $\pi : X^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, являющейся изометрией на замыкании каждой n -мерной клетки \bar{e}^n . Каждая $n - 1$ -мерная клетка e_i^{n-1} проецируется на одну из квадратов $\lambda = \lambda_i$, возможно, вырожденную (при $\lambda = a_i$) и оснащается циклической перестановкой на множестве n -клеток, в чью границу входит. Каждая клетка e^k отвечает связному пересечению $n - k$ -квадрат, каждой из которых отвечает перестановка, составленная из циклических перестановок тех клеток, чьи гиперграницы проецируются на эту квадрат.

Теорема 1. *Многомерная билиардная книжка и система билиарда на ней корректно определяются циклическими перестановками на гипергранях e^{n-1} при условии коммутирования перестановок, отвечающих $n - 2$ -мерным клеткам. Билиардный поток остается непрерывен вблизи траекторий, проходящих через точки клеток e^k для $k < n - 1$.*

С помощью новых систем удалось реализовать билиардами (с точностью до послойного гомеоморфизма) особенности определенных классов, встречающиеся в интегрируемых системах с 3 и более ст. св. (реализация инвариантов седловых особенностей в системах с 2 ст. св. обсуждается в [3]).

Теорема 2. *Многомерными билиардными книжками топологически реализуются невырожденные особенности коранга 1 интегрируемых систем с n ст. св., а также (при добавлении к системе билиарда центрального потенциала Гука) седловые и седло-фокусные особенности ранга 0 интегрируемых систем с 3 степенями свободы.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 22-71-10106.

- [1] Alexey Bolsinov, Anatoly Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Publ. house "Udmurt Univ.", Izhevsk, 1999.

- [2] V. V. Vedyushkina, I. S. Kharcheva, *Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems*, Sb. Math., 209:12 (2018), 1690–1727.
- [3] Anatoly Fomenko, Vladislav Kibkalo, *Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms*, Understanding Complex Systems, Springer, Cham, 2021.