Lógica Proposicional
Lógica y Matemática Discreta
Marzo de 2020

1. Proposiciones.

Una **proposición** es una oración declarativa o una expresión que es verdadera o falsa, pero **no** ambas. De esta manera, una proposición tiene un **valor de verdad**, que puede ser **T**, si es verdadera o puede ser **F**, si es falta. Si consideramos solamente proposiciones matemáticas, algunos ejemplos de proposiciones verdaderas son:

- "7 es un número primo".
- "$1 = 1$".
- "3 es divisor de 21".
- "La solución de $3x - 2 = 10$ es 4".

Algunos ejemplos de proposiciones falsas son:

- "103 es un número entero negativo".
- "$24 < 10$".
- "4 es divisor de 21".
- "La solución de $3x - 2 = 10$ es 1".

Algunos ejemplos de expresiones que no son proposiciones:

- "424".
- "$3x - 2 = 10$".
- "¿Cuál es la solución de $3x - 2 = 10$?".

Generalmente, para referirnos a proposiciones específicas o en forma general (a cualquier proposición) se utilizan letras minúsculas. Por ejemplo,
p: 25 es un número entero par.
q: 1 = 1.
r: $3x + 2$ *es una ecuación.*
Las proposiciones no solamente tienen porque referir a expresiones matemáticas, también podemos tener proposiciones que son afirmaciones de situaciones cotidianas.

- "Montevideo es la capital de Uruguay".
- "Juan ganó el 5 de oro".
- "Hoy está lloviendo".

2. Conectivas Lógicas.

Las proposiciones no solamente se conforman por afirmaciones con un valor de verdad, también existen proposiciones que su valor de verdad depende de la unión de varias proposiciones mediante el uso de conectivas lógicas. Estas conectivas son, ni más ni menos, que las operaciones booleanas que se ha visto en clase con su tabla de verdad y su definición en Haskell. En el formalismo de la Lógica Proposicional utilizaremos otros símbolo parar referirnos a estas "operaciones" que llamamos conectivas lógicas, pero que semánticamente son las mismas.

Conectiva	Símbolo lógico	Símbolo Hs
negación	$\neg$	`not`
conjunción (and)	$\wedge$	`(&&)`
disyunción (or)	$\vee$	`(||)`
implicación	$\supset$	`(>>)`
doble implicación	$\Leftrightarrow$	`(==)`

Negación

Una manera de obtener otras proposiciones a partir de otras, es utilizando la palabra **"no"**. Dada una proposición cualquiera p, podemos formar una nueva proposición "**No es verdadero que** p". Por ejemplo, si consideramos la proposición verdadera:

El número 4 es un entero par.

podemos formar la nueva proposición:

No es verdadero que *el número 4 es un entero par.*

la cual es evidentemente falsa.

Se usa el símbolo $\neg$ para indicar la frase "no es verdadero que". Así que $\neg p$ significa que la proposición p no es verdadera.

Otras maneras que expresar el ejemplo de $\neg p$ son:

- Es falso que el número 4 es un entero par.
- El número 4 no es un entero par.

Conjunción

Podremos utilizar la palabra **"y"** para conectar dos proposiciones y crear una nueva propsición. Por ejemplo podemos conectar:

p: El número 4 es un entero par.

q: El número 5 es un entero impar.

para formar la nueva proposición:

r: El número 4 es un entero par ***y*** *el número 5 es un entero impar.*

La proposición r afirma que p y q son ambas verdaderas. Como p y q, en efecto son verdaderas, la proposición r también lo es.

Así que dadas dos proposiciones cualesquiera p y q, podemos combinarlas para formar una nueva proposición "p y q", que sustituyendo por el símbolo de la conectiva correspondiente tendríamos $p \wedge q$.

La proposición $p \wedge q$ es verdadera solo si ambas proposiciones son verdaderas, como podemos observar en la tabla de verdad de la conectiva $\wedge$.

Disyunción

Podemos también conectar dos proposiciones utilizando la palabra **"o"** para crear una nueva proposición. Dadas dos proposiciones cualesquiera p y q, la afirmación "p o q" significa que una o ambas proposiciones son verdaderas. Esto difiere del significado usual que tiene "o" en el lenguaje cotidiano, donde significa una alternativa o la otra, de manera excluyente, cuando hay dos alternativas. De esta manera, por ejemplo, la proposición:

El número 4 es un entero par **o** *el número 5 es un entero impar.*

es verdadera.

Se utiliza el símbolo $\vee$ para indicar la palabra "o", y por lo tanto la nueva proposición sería expresada como $p \vee q$.

Implicación

Otra manera de conectar dos proposiciones es mediante el uso de la implicación. Dadas dos proposiciones cualesquiera p y q, podemos formar la nueva proposición "**Si** p **, entonces** q." Esta proposición se escribe de forma simbólica como $p \supset q$, la cual también se lee "p implica q". Que la proposición $p \supset q$ es verdadera significa que *si* p es verdadera *entonces* q también debe ser verdadera (p verdadera obliga a que q sea verdadera). Una proposición de la forma $p \supset q$ se la conoce también como **implicancia lógica**; q será verdadera bajo condición de que p sea verdadera. Por lo tanto el significado de $p \supset q$ nos dice que la única manera en que la proposición $p \supset q$ es falsa, es cuando p es verdadera y q falsa.

En el lenguaje español, las expresiones más comunes que significan $p \supset q$ son las siguientes:

- Si p, entonces q.
- q, si p.
- q, siempre que p.
- p es una condición suficiente para q.
- p, solo si q.

Doble Implicación

Dadas dos proposiciones cualesquiera p y q, podemos considerar tanto $p \supset q$ como su recíproco $q \supset p$. En primer lugar, $p \supset q$ no es lo mismo que $q \supset p$, pues tienen distinto significado, y en consecuencia, pueden tener valores de verdad diferentes.

Consideremos ahora la proposición más compleja, teniendo en cuenta el uso de los paréntesis

$$(p \supset q) \wedge (q \supset p)$$

Ésta afirma que tanto $p \supset q$ como $q \supset p$ son verdaderas. Se utiliza el símbolo $\Leftrightarrow$ para expresar este significado. Ahora podemos leer a $q \supset p$ como "p si q" y $p \supset q$ como "p, solo si q". En consecuencia, leemos $p \Leftrightarrow q$ como "p **si y solo si** q", y que tiene como significado p será verdadera bajo condición de q **y** que q será verdadera bajo condición de p. Esto quiere decir que el valor de verdad de $p \Leftrightarrow q$ será verdadero si ambas son verdaderas ó falsas.

3. Equivalencia Lógica.

Dos **proposiciones lógicamente equivalentes** son dos proposiciones cuyos valores de verdad coinciden, y que de esta manera tienen el mismo significado.

Una manera de comprobar que dos proposiciones son equivalentes es observando las tablas de verdad de cada una de ellas.

Por ejemplo, las proposiciones $p \Leftrightarrow q$ y $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ son lógicamente equivalentes como se ve en la siguiente **tabla de verdad**.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	T	F	**T**	**T**
T	F	F	T	F	F	**F**	**F**
F	T	T	F	F	F	**F**	**F**
F	F	T	T	F	T	**T**	**T**

Esto se evidencia con la coincidencia línea por línea de las dos últimas columnas. Por lo tanto, podemos decir que las proposiciones $p \Leftrightarrow q$ y $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ son lógicamente equivalentes y lo expresamos de la siguiente manera:

$$p \Leftrightarrow q \approx (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Un ejemplo importante de equivalencia lógica es el siguiente.

$$p \supset q \approx \neg p \vee q$$

Que son lógicamente equivalentes como podemos ver en la siguiente tabla.

p	q	$\neg p$	$p \supset q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	**T**	**T**
T	F	F	**F**	**F**
F	T	T	**T**	**T**
F	F	T	**T**	**T**

?1. Otras equivalencias lógicas importantes son las conocidas como **Leyes de De Morgan**, que quedarán comprobarlas como ejercicio para el lector.

1. $\neg(p \wedge q) \approx (\neg p) \vee (\neg q)$
2. $\neg(p \vee q) \approx (\neg p) \wedge (\neg q)$

?2. Además de las Leyes de De Morgan, existe otra equivalencia lógica que es trivial pero muy conveniente para más adelante. Es el caso de la doble negación de una proposición, se puede demostrar rápidamente escribiendo su tabla de verdad.

$$\neg\neg p \approx p$$

A veces nos podemos encontrar con casos en los que demostrar una equivalencia lógica mediante el uso de las tablas de verdad correspondientes se puede hacer muy tedioso ya sea por la cantidad de proposiciones que contengan o por la cantidad de conectivas.

Considerando que ya hemos demostrado varias equivalencias lógicas que involucran conectivas que aparecen frecuentemente, podemos utilizar esas equivalencias para hacer demostraciones sobre otras.

Demos por demostradas las siguientes equivalencias lógicas (algunas demostradas aquí y otras por el lector):

1. $\neg\neg p \approx p$
2. $\neg(p \wedge q) \approx (\neg p) \vee (\neg q)$
3. $\neg(p \vee q) \approx (\neg p) \wedge (\neg q)$
4. $p \supset q \approx \neg p \vee q$

¿Será la siguiente equivalencia lógica cierta?

$$\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) \approx (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r)$$

Nos podemos ver tentados de hacer las tablas correspondientes, pero es que tendremos que hacer aproximadamente 11 tablas de verdad completando 8 filas. Sin embargo, conocemos varias equivalencias que ya hemos demostrado que se podrían aplicar en ambos lados de esta nueva equivalencia. Entonces el objetivo será aplicar equivalencias que conozcamos de antemano a ambos lados de la nueva equivalencia hasta obtener dos proposiciones que a "simple vista" sean lógicamente equivalentes.

$$\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) \approx (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r)$$

$$\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) \quad \vdots \quad (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r)$$

Observando ambos lados de la equivalencia, nos parece conveniente "deshacernos" de las conectivas $\supset$ del lado derecho, ya que en la izquierda no aparece ninguna implicación. Conocemos la equivalencia número 4 (del listado anterior), que nos menciona que una implicación entre dos proposiciones equivale a $\neg p \vee q$. En este caso, la proposición $(\neg p \supset q)$ cumple el rol de p y $\neg(p \supset \neg r)$ el rol de q, por lo tanto aplicando la equivalencia del lado derecho tenemos:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) \approx (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r)} \\
\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) & (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(\neg p \supset q) \vee \neg(p \supset \neg r)
\end{array}$$

Aplicamos nuevamente la misma equivalencia en la proposición $\neg(\neg p \supset q)$

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) \approx (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r)} \\
\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) & (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(\neg p \supset q) \vee \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(\neg\neg p \vee q) \vee \neg(p \supset \neg r)
\end{array}$$

Nos ha aparecido una proposición con una doble negación, tenemos una equivalencia al respecto así que vamos a aplicarla.

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) \approx (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r)} \\
\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) & (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(\neg p \supset q) \vee \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(\neg\neg p \vee q) \vee \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 1.} \\
 & \neg(p \vee q) \vee \neg(p \supset \neg r)
\end{array}$$

Todavía nos queda otra implicación para aplicar una equivalencia.

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) \approx (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r)} \\
\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) & (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(\neg p \supset q) \vee \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(\neg\neg p \vee q) \vee \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 1.} \\
 & \neg(p \vee q) \vee \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee \neg r)
\end{array}$$

En este punto podemos observar que ya casi tenemos las mismas conectivas con las mismas proposiciones de cada lado de la equivalencia. Si comparamos ambos lados, en la izquierda hay dos conectivas $\wedge$ y en la derecha ninguna, pero si observamos bien, tenemos $\neg p \vee \neg r$ y teniendo en cuenta la equivalencia número 2, la misma nos dice que equivale lógicamente con $\neg(p \vee r)$.

Por lo tanto:

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) \approx (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r)} \\
\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) & (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(\neg p \supset q) \vee \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(\neg\neg p \vee q) \vee \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 1.} \\
 & \neg(p \vee q) \vee \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 2.} \\
 & \neg(p \vee q) \vee \neg\neg(p \wedge r)
\end{array}
$$

Y nuevamente lo mismo, volvemos a tener la disyunción entre dos negaciones de proposiciones (por más que una de ellas tenga doble negación).

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) \approx (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r)} \\
\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) & (\neg p \supset q) \supset \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(\neg p \supset q) \vee \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(\neg\neg p \vee q) \vee \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 1.} \\
 & \neg(p \vee q) \vee \neg(p \supset \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 4.} \\
 & \neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee \neg r) \\
 & \textit{por equivalencia 2.} \\
 & \neg(p \vee q) \vee \neg\neg(p \wedge r) \\
 & \textit{por equivalencia 2.} \\
\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) & \neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r))
\end{array}
$$

En este momento, hemos alcanzando a tener dos expresiones lógicamente equivalentes, ya que son exactamente la misma proposición.

Por lo tanto, las dos proposiciones que queríamos averiguar si eran lógicamente equivalentes, efectivamente lo son.