İçindekiler

Bölüm 1

Z ve S tanım bölgesi

Zaman tanım bölgesinden S tanım gölgesine dönüşüm

$$
\begin{aligned}
F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \\
&= f(0) + f(T)e^{-Ts} + f(2T)e^{-2Ts} + \cdots
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

olarak verilmiştir. Zaman tanım bölgesinden Z tanım bölgesine geçiş ise

$$
\begin{aligned}
F(z) = \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \\
&= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \cdots
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

şeklindedir. S ve Z tanım bölgesi dönüşümlerine dikkat edilirse

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(e^{Ts})^{-k} \\
\mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

ifadelerinden

$$
z = e^{sT} \tag{1.4}
$$

ilişkisi elde edilir. Z dönüşümü için tablo Tablo 1.1 ile verilmiştir.

Tablo 1.1: S ve Z dönüşümü tablosu

Zaman domeni	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t-kT)$	e^{-kTs}	z^{-k}
$u(t)=1$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{zsin(wT)}{(z-1)(z^2-2zcos(wT)+1)}$
$cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\frac{z(z-cos(wT))}{(z-1)(z^2-2zcos(wT)+1)}$

1. S dönüşümü

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}dt \\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{\infty} \\ &= \frac{e^{-s\infty}}{-s} - \frac{1}{-s} \\ &= -\frac{1}{-s} \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned} \tag{1.5}$$

olarak elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{1\} &= \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z|>1 \\ &= \frac{z}{z-1}, \quad |z|>1\end{aligned} \tag{1.6}$$

elde edilir.

2.

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{1.7}$$

kullanarak $u = t$ ve $dv = e^{-st}dt$ olmak üzere

$$\begin{aligned} dv &= e^{-st}dt \\ \int dv &= \int e^{-st}dt \\ v &= \frac{e^{-st}}{-s} \end{aligned} \tag{1.8}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_{t=0}^{\infty} te^{-st}dt \\ &= t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s}dt \\ &= t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s}e^{-st}\bigg|_{t=0}^{\infty} \\ &= t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned} \tag{1.9}$$

elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} tz^{t-1} &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1 \end{aligned} \tag{1.10}$$

yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{t\} &= \sum_{t=0}^{\infty} tT(z^{-1})^{t} \\
&= Tz^{-1}\sum_{t=0}^{\infty} t(z^{-1})^{t-1} \\
&= T\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad |z|<1 \\
&= T\frac{\frac{1}{z}}{(1-\frac{1}{z})^2}, \quad |z|<1 \\
&= T\frac{\frac{1}{z}}{\frac{(z-1)^2}{z^2}}, \quad |z|<1 \\
&= T\frac{z^2}{z(z-1)^2}, \quad |z|<1 \\
&= \frac{Tz}{(z-1)^2}, \quad |z|<1
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

olarak elde edilir.

Bölüm 2

Ayrıklaştırma

Türevin geometrik yorumu

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{2.1}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &\approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{(k+1)T - kT} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} \end{aligned} \tag{2.2}$$

elde edilir. Ayrık bir sinyalin türevi ardışık değerler farkının örnekleme zamanına oranı ile hesaplanabilmektedir. Örneğin, $y(kT) = \sin(kT)$ ve $T = 0.1$ olmak üzere

$$\frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} = 10(\sin((k+1)0.1) - \sin(0.1k)) \tag{2.3}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \{10\sin(0.1), 10(\sin(0.2) - \sin(0.1)), 10(\sin(0.3) - \sin(0.2)), \cdots\} \\ \{0.9983, 0.9884, 0.9685, \cdots\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

elde edilir. $y(kT) = \sin(kT)$ sinyalinin türevinin $\frac{d\sin(t)}{dt} = \cos(t)$ olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned} \{cos(0.1), cos(0.2), cos(0.3), \cdots\} \\ \{0.9950, 0.9801, 0.9553, \cdots\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

elde edilir ve ayrık türev ile benzer değerler olduğu görülmektedir. Bu yaklaşıklığın türeve yakınsaması için örnekleme zamanı T daha küçük seçilmelidir.

$$\frac{dq(t)}{dt} = x \tag{2.6}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= x \\ dq(t) &= xdt \\ \int dq(t) &= \int xdt \\ q(t) &= \int xdt \end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta q}{\Delta t} &= x \\ \frac{q((k+1)T) - q(kT)}{(k+1)T - kT} &= x \\ \frac{q((k+1)T) - q(kT)}{T} &= x \\ q((k+1)T) - q(kT) &= xT \\ q((k+1)T) &= q(kT) + xT \end{aligned} \tag{2.8}$$

ifadesi bulunur. Ayrık zamanda integral birikimli toplama karşılık gelmektedir. Bu karşılıklar Zero Order Hold(ZOH) ile elde edilmiştir. ZOH örnekleme zamanı boyunca değerlerin sabit olduğu varsayımına dayanmaktadır. Bu durum

$$x(t) = x(kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \tag{2.9}$$

ile ifade edilebilir. ZOH için transfer fonksiyonu elde etmek amacıyla girişe $\delta(t)$ birim darbe fonksiyonu uygulanırsa çıkışında $u(t) - u(t-T)$ elde edilir. Bu durumda S tanım bölgesinde çıkış ifadesi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t) - u(t-T)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-T)\} \\ &= \mathcal{L}\{u(t)\} - e^{-sT}\mathcal{L}\{u(t)\} \\ &= \frac{1}{s} - e^{-sT}\frac{1}{s} \\ &= (1 - e^{-sT})\frac{1}{s} \end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklindedir. ZOH transfer fonksiyonu ile bir $G(s)$ sistemi birlikte Z dönüşümü yapılmalıdır. Örneğin,

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \tag{2.11}$$

sistemi ayrıklaştırılmak istensin. Bu durumda $G_{ZOH}(s)G(s)$ ayrıklaştırılmalıdır. Bu sebeple,

$$L(s) = G_{ZOH}(s)G(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s(s+1)} \tag{2.12}$$

ifadesi Z tanım bölgesine

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{L(s)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s(s+1)}\right\} \\
&= \mathcal{Z}\{1-e^{-sT}\}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\
&= (1-z^{-1})\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{z}\right)\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right) \\
&= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-1}}\right) \\
&= \left(1-\frac{z-1}{z-e^{-1}}\right) \\
&= \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

olarak dönüştürülür.

First Order Hold(FOH) yöntemi ise

$$x(t) = x(kT) + \frac{t-kT}{T}(x((k+1)T)-x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \tag{2.14}$$

olarak tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı $t = kT$ için $x(kT)$, $t = (k+0.5)T$ için

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(kT) + \frac{t-kT}{T}(x((k+1)T)-x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \\
&= x(kT) + \frac{kT+0.5T-kT}{T}(x((k+1)T)-x(kT)) \\
&= x(kT) + 0.5(x((k+1)T)-x(kT)) \\
&= x(kT) + 0.5x((k+1)T) - 0.5x(kT) \\
&= 0.5x((k+1)T) + 0.5x(kT)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

ve $t = (k+1)T$ için ise

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x(kT) + \frac{t-kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \le t \le (k+1)T \\
x(t) &= x(kT) + \frac{(k+1)T-kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)) \\
x(t) &= x(kT) + x((k+1)T) - x(kT) \\
x(t) &= x((k+1)T)
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

olarak elde edilir. Görüldüğü üzere ZOH yönteminin aksine T süre boyunca değerler değişmektedir. FOH için birim darbe yanıtı

$$
x(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{T} & 0 \le t \le \frac{1}{T} \\ -t + \frac{1}{T} & \frac{1}{T} \le t \le \frac{2}{T} \\ 0 & t > \frac{2}{T} \end{cases} \tag{2.17}
$$

ve işlem kolaylığı açısından $T = 1$ alınırsa

$$
x(t) = (1-t)u(2-t) + 2tu(1-t) \tag{2.18}
$$

şeklindedir. S dönüşümü sonucu

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{(1-t)u(2-t)\} + \mathcal{L}\{2tu(1-t)\} \\
&= \mathcal{L}\{(1-t)(1-u(t-2))\} + \mathcal{L}\{2t(1-u(t-1))\} \\
&= \mathcal{L}\{(1-t)\} - \mathcal{L}\{(1-t)u(t-2)\} + \mathcal{L}\{2t\} - \mathcal{L}\{2tu(t-1)\} \\
&= \mathcal{L}\{(1+t)\} + \mathcal{L}\{(t-1)u(t-2)\} - \mathcal{L}\{2tu(t-1)\} \\
&= \mathcal{L}\{(1+t)\} + \mathcal{L}\{(t-1)u(t-2)\} - \mathcal{L}\{(2t-2+2)u(t-1)\} \\
&= \mathcal{L}\{(1+t)\} + \mathcal{L}\{(t-1-1+1)u(t-2)\} - \mathcal{L}\{(2t-2+2)u(t-1)\} \\
&= \mathcal{L}\{(1+t)\} + \mathcal{L}\{(t-2)u(t-2) + u(t-2)\} - \mathcal{L}\{(2t-2)u(t-1) + 2u(t-1)\} \\
&= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s} \\
&= \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s} + \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2} \\
&= \frac{(1-e^{-s})^2}{s} + \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \\
&= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}(s+1)
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

elde edilir. FOH için transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} G_{FOH}(s) &= \frac{(1-e^{-s})^2}{T^2 s^2}\frac{Ts+1}{T} \\ &= G_{ZOH}^2(s)\frac{Ts+1}{T} \end{aligned} \tag{2.20}$$

şeklindedir. Örneğin daha önce Denklem 2.11 ile verilen sistemi FOH yöntemi ve yine aynı örnekleme zamanı ile ayrıklaştırmak gerekirse

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{1}{s+1}G_{FOH}(s) \\ &= \frac{1}{s+1}\frac{(1-e^{-s})^2}{T^2 s^2}\frac{Ts+1}{T} \\ &= \frac{1}{s+1}\frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}(s+1) \\ &= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \end{aligned} \tag{2.21}$$

ifadesi Z dönüşümüne tabi tutulmalıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left\{\frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}\right\} \\ &= \mathcal{Z}\{(1-e^{-s})^2\}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &= \left(1-z^{-1}\right)^2\frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \left(\frac{z-1}{z}\right)^2\frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z} \end{aligned} \tag{2.22}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere, birim gecikme elde edilmiştir.

Bölüm 3

Fark Denklemleri