

İçindekiler

1	Z ve S tanım bölgesi	3
---	----------------------	---

Bölüm 1

Z ve S tanım bölgesi

Zaman tanım bölgesinden S tanım bölgesine dönüşüm

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \\ &= f(0) + f(T)e^{-Ts} + f(2T)e^{-2Ts} + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

olarak verilmiştir. Zaman tanım bölgesinden Z tanım bölgesine geçiş ise

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{Z}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \\ &= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

şeklindedir. S ve Z tanım bölgesi dönüşümlerine dikkat edilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(e^{Ts})^{-k} \\ \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ifadelerinden

$$z = e^{sT} \quad (1.4)$$

ilişkisi elde edilir. Z dönüşümü için tablo Tablo 1.1 ile verilmiştir.

Tablo 1.1: S ve Z dönüşümü tablosu

Zaman domenı	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t - kT)$	e^{-kTs}	z^{-k}
$u(t) = 1$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{z \sin(wT)}{(z-1)(z^2-2z \cos(wT)+1)}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\frac{z(z-\cos(wT))}{(z-1)(z^2-2z \cos(wT)+1)}$

1. S dönüşümü

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \\
&= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=0}^{\infty} \\
&= \frac{e^{-s\infty}}{-s} - \frac{1}{-s} \\
&= -\frac{1}{-s} \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

olarak elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{1\} &= \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t} \\
&= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1 \\
&= \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1
\end{aligned} \tag{1.6}$$

elde edilir.

2.

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (1.7)$$

kullanarak $u = t$ ve $dv = e^{-st} dt$ olmak üzere

$$\begin{aligned} dv &= e^{-st} dt \\ \int dv &= \int e^{-st} dt \\ v &= \frac{e^{-st}}{-s} \end{aligned} \quad (1.8)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_{t=0}^{\infty} t e^{-st} dt \\ &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{\infty} \\ &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} t z^{t-1} &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \\ &= \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1 \end{aligned} \quad (1.10)$$

yardımıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{t\} &= \sum_{t=0}^{\infty} tT(z^{-1})^t \\
&= Tz^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} t(z^{-1})^{t-1} \\
&= T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \quad |z| < 1 \\
&= T \frac{\frac{1}{z}}{(1 - \frac{1}{z})^2}, \quad |z| < 1 \\
&= T \frac{\frac{1}{z}}{\frac{(z-1)^2}{z^2}}, \quad |z| < 1 \\
&= T \frac{z^2}{z(z-1)^2}, \quad |z| < 1 \\
&= \frac{Tz}{(z-1)^2}, \quad |z| < 1
\end{aligned} \tag{1.11}$$

olarak elde edilir.