Bölüm 4

Zaman Domeni Kriterleri

Sürekli zamanda tanımlı birinci dereceden bir transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{p}{s+p} \tag{4.1}$$

olarak verilsin. Birim basamak giriş için yanıt

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{s+p}\cdot\frac{1}{s}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+p}\right\} \\ &= 1 - e^{-pt} \end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklinde hesaplanır. e^{-t} fonksiyonunun aldığı değerler için Çizelge 4.1 verilmiştir. Görüldüğü üzere 4.1 ile verilen sistemin yanıtı p değişkeninin değerinden bağımsız olarak 1 değerine yakınsamaktadır. 1 değerini aşmamaktadır. Dolayısıyla aşım değeri %0'dır. Sürekli halde oturduğu değerin %2 altı veya üstü ile tanımlanan %2'lik banda çıkmamak üzere girdiği zamana yerleşme zamanı denir. Bu tanımdan ve Çizelge 4.1'den yola çıkarak 4.1 ile verilen sistemin yerleşme zamanı $t_s = 4\,s$'dir. $p = 1$ olmaması durumunda zaman ekseni genişler veya daralır bu sebepten yerleşme zamanı

$$t_s = \frac{4}{p} \tag{4.3}$$

ile hesaplanır. İkinci dereceden bir sistem

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \tag{4.4}$$

Çizelge 4.1: e^{-t} fonksiyonunun aldığı değerler

Zaman $t(s)$	Değer e^{-t}	$1-e^{-t}$
1	0.3679	0.6321
2	0.1353	0.8647
3	0.0498	0.9502
4	0.0183	0.9817
5	0.0067	0.9933
6	0.0025	0.9975

ile tanımlanmaktadır. Burada ζ sönüm oranı ve w_n doğal frekans olarak adlandırılmaktadır. İkinci dereceden polinomun kökleri bulunurken faydalanılan $\Delta = b^2 - 4ac$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\zeta w_n)^2 - 4w_n^2 \\ &= 4\zeta^2 w_n^2 - 4w_n^2 \\ &= 4w_n^2(\zeta^2 - 1) \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir ve çözümün tipini belirlemek için

$$\begin{cases} \text{gerçel kök} & \Delta > 0 \quad \zeta > 1 \\ \text{çakışık kök} & \Delta = 0 \quad \zeta = 1 \\ \text{karmaşık kök} & \Delta < 0 \quad 0 < \zeta < 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

kullanılabilir. $\zeta > 1$ durumunda gerçel köklü çözüm olmasından dolayı sistem transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{p_1 p_2}{(s+p_1)(s+p_2)} \tag{4.7}$$

olarak güncellenebilir. $p_1 >> p_2$ durumunda p_2, $p_2 >> p_1$ durumunda p_1 yanıtın hızını ve davranışını belirler. $\zeta = 1$ olması durumunda yanıt birinci dereceden bir sisteme göre daha yavaş olmaktadır. Haricinde, $0 < \zeta < 1$ durumunda

$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n}, \quad \text{Aşım} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{4.8}$$

ile hesaplanmaktadır. İkinci dereceden sistem yanıtı,

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta w_n t}\left[\cos(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t)\right] \tag{4.9}$$

ile ifade edilmektedir. Sinüzoidal terimler salınımlı olduklarından sadece $e^{-\zeta w_n t}$ terimi yerleşme zamanının hesabı için önemlidir ve birinci dereceden sistem ile aynı ifade kullanılmaktadır. Aşım için

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= 0 \\ \sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*)(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} - \sqrt{1-\zeta^2}w_n) &= 0 \\ \sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) &= 0 \\ \sqrt{1-\zeta^2}w_n t^* &= \pi \\ t^* &= \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}w_n} \end{aligned} \tag{4.10}$$

yanıtta yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} M_p &= e^{-\zeta w_n t^*}\left[\cos(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*)\right] \\ &= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\left[\cos(\pi) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\pi)\right] \\ &= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Verilen yerleşme zamanı ve aşım formülleri kullanılarak sistem davranışı şekillendirilebilmektedir. Örneğin $t_s = 1$ ve aşım %10 olacak şekilde sistem transfer fonksiyonu seçilirse

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{\log(0.1)}{\sqrt{\pi^2 + \log(0.1)^2}} = 0.591 \\ w_n &= \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{0.591} = 6.7682 \end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$G(s) = \frac{45.81}{s^2 + 8s + 45.81} \tag{4.13}$$

transfer fonksiyonu elde edilir.

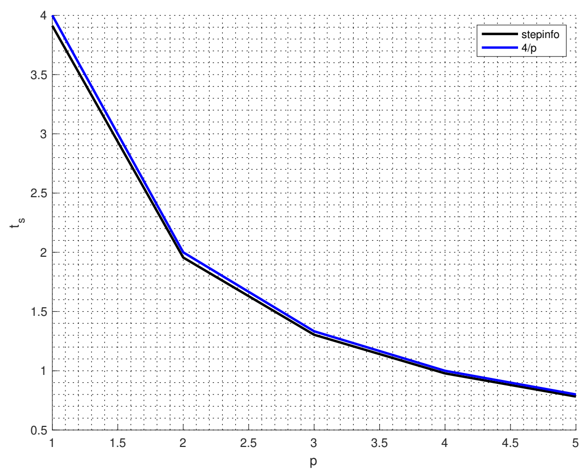
1. $$G(s) = \frac{p}{s+p} \tag{4.14}$$

   ve $1 \leq p \leq 5$ olmak üzere yerleşme zamanı ile sistem kutubu arasındaki ilişkiyi elde ediniz.

```
pvec=np.arange(1,5+1,1)
tsvec=np.zeros(pvec.shape)
for i in range(0,len(pvec)):
    pval=pvec[i]
    Gs=control.tf(pval,np.array([1,pval]))
    info=control.step_info(Gs)
    tsvec[i]=info['SettlingTime']

plt.grid('minor')
plt.xlabel("p")
plt.ylabel("ts")
plt.title("p ile ts arasindaki iliski")

plt.plot(pvec,tsvec,'b')
plt.show()
```



Şekil 4.1: Denklem 4.14 ile verilen sistem için yerleşme zamanı

2. $0 < \zeta \leq 1$ ve $w_n = 2$ olmak üzere

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \tag{4.15}$$

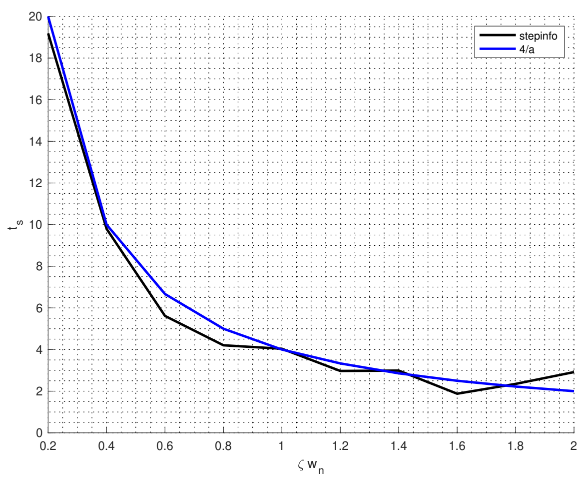
sisteminin yerleşme zamanının formülünü elde ediniz.

```
wn=2
zetavec=np.arange(0.1,1,0.1)
tsvec=np.zeros(zetavec.shape)
```

```
tsformula=np.zeros(zetavec.shape)
for i in range(0,len(zetavec)):
    zetaval=zetavec[i]
    Gs=control.tf(wn**2,np.array([1,2*zetaval*wn,wn**2]))
    info=control.step_info(Gs)
    tsvec[i]=info['SettlingTime']
    tsformula[i]=4/(zetaval*wn)

plt.grid('minor')
plt.xlabel("zeta wn")
plt.ylabel("ts")
plt.title("zeta wn ile ts arasindaki iliski")


plt.plot(zetavec*wn,tsformula,'k')
plt.plot(zetavec*wn,tsvec,'b')
plt.show()
```



Şekil 4.2: Denklem 4.15 ile verilen sistem için yerleşme zamanı

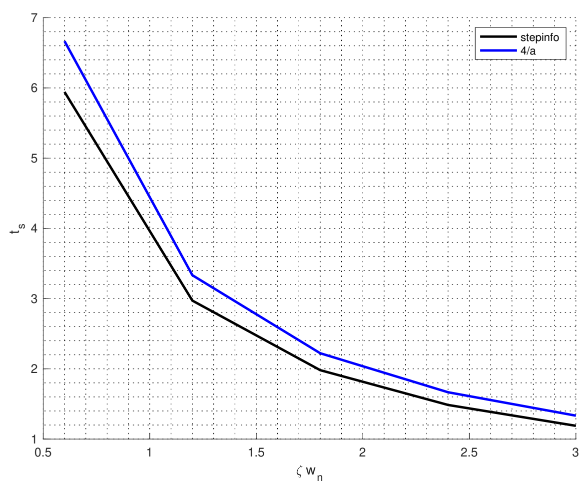
3. Denklem 4.15 sistemi için $1 \leq w_n \leq 5$ ve $\zeta = 0.6$ değerleri için yerleşme zamanı formülünü elde ediniz.

```
zeta=0.6
wnvec=np.arange(1,5+1,1)
tsvec=np.zeros(wnvec.shape)
tsformula=np.zeros(wnvec.shape)
for i in range(0,len(wnvec)):
```

```
        wnval=wnvec[i]
        Gs=control.tf(wnval**2,np.array([1,2*zeta*wnval,wnval**2]))
        info=control.step_info(Gs)
        tsvec[i]=info['SettlingTime']
        tsformula[i]=4/(zeta*wnval)

    plt.grid('minor')
    plt.xlabel("zeta wn")
    plt.ylabel("ts")
    plt.title("zeta wn ile ts arasindaki iliski")


    plt.plot(zeta*wnvec,tsformula,'k')
    plt.plot(zeta*wnvec,tsvec,'b')
    plt.show()
```



Şekil 4.3: Denklem 4.15 ile verilen sistem için yerleşme zamanı

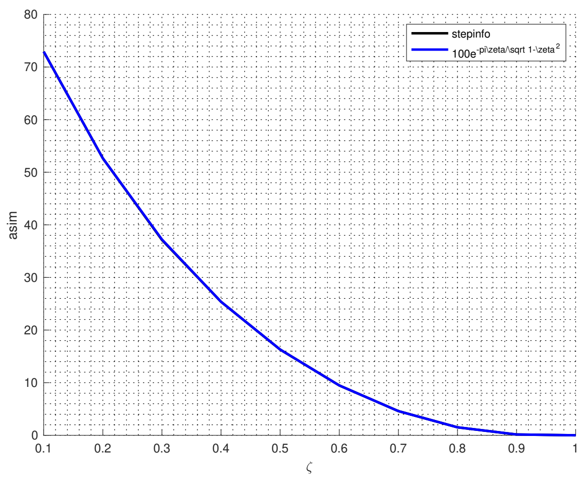
4. Denklem 4.15 sistemi için $0 < \zeta < 1$ ve $w_n = 2$ değerleri için aşımın ifadesini elde ediniz.

```
    wn=2
    zetavec=np.arange(0.1,1,0.1)
    osvec=np.zeros(zetavec.shape)
    osformula=np.zeros(zetavec.shape)
    for i in range(0,len(zetavec)):
        zetaval=zetavec[i]
        Gs=control.tf(wn**2,np.array([1,2*zetaval*wn,wn**2]))
```

```
    info=control.step_info(Gs)
    osvec[i]=info['Overshoot']
    osformula[i]=100*np.exp(-np.pi*zetaval/np.sqrt(1-zetaval**2))

plt.grid('minor')
plt.xlabel("zeta")
plt.ylabel("ts")
plt.title("zeta ile asim arasindaki iliski")


plt.plot(zetavec*wn,osformula,'k',linewidth=3)
plt.plot(zetavec*wn,osvec,'b')
plt.show()
```



Şekil 4.4: Denklem 4.15 ile verilen sistem için aşım