

# İçindekiler

1	Z ve S tanım bölgesi	3
2	Ayrıklaştırma	7
3	Fark Denklemleri	13
4	Zaman Domeni Kriterleri	17
5	Z Tanım Bölgesinde Kök Eğrisi	21
6	Z Tanım Bölgesinde Kontrolör Tasarımı	25



# Bölüm 1

## Z ve S tanım bölgesi

Zaman tanım bölgesinden S tanım bölgesine dönüşüm

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \\ &= f(0) + f(T)e^{-Ts} + f(2T)e^{-2Ts} + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

olarak verilmiştir. Zaman tanım bölgesinden Z tanım bölgesine geçiş ise

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{Z}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \\ &= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

şeklindedir. S ve Z tanım bölgesi dönüşümlerine dikkat edilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(e^{Ts})^{-k} \\ \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ifadelerinden

$$z = e^{sT} \quad (1.4)$$

ilişkisi elde edilir. Z dönüşümü için çizelge Çizelge 1.1 ile verilmiştir.

Çizelge 1.1: S ve Z dönüşümü tablosu

Zaman domenİ	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t - kT)$	$e^{-kTs}$	$z^{-k}$
$u(t) = 1$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{z\sin(wT)}{(z-1)(z^2-2z\cos(wT)+1)}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\frac{z(z-\cos(wT))}{(z-1)(z^2-2z\cos(wT)+1)}$

## 1. S dönüşümü

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \\
&= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=0}^{\infty} \\
&= \frac{e^{-s\infty}}{-s} - \frac{1}{-s} \\
&= -\frac{1}{-s} \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

olarak elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{1\} &= \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t} \\
&= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1 \\
&= \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1
\end{aligned} \tag{1.6}$$

elde edilir.

2.

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (1.7)$$

kullanarak  $u = t$  ve  $dv = e^{-st} dt$  olmak üzere

$$\begin{aligned} dv &= e^{-st} dt \\ \int dv &= \int e^{-st} dt \\ v &= \frac{e^{-st}}{-s} \end{aligned} \quad (1.8)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_{t=0}^{\infty} t e^{-st} dt \\ &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{\infty} \\ &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} t z^{t-1} &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \\ &= \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1 \end{aligned} \quad (1.10)$$

yardımıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{t\} &= \sum_{t=0}^{\infty} tT(z^{-1})^t \\
&= Tz^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} t(z^{-1})^{t-1} \\
&= T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \quad |z| < 1 \\
&= T \frac{\frac{1}{z}}{(1 - \frac{1}{z})^2}, \quad |z| < 1 \\
&= T \frac{\frac{1}{z}}{\frac{(z-1)^2}{z^2}}, \quad |z| < 1 \\
&= T \frac{z^2}{z(z-1)^2}, \quad |z| < 1 \\
&= \frac{Tz}{(z-1)^2}, \quad |z| < 1
\end{aligned} \tag{1.11}$$

olarak elde edilir.

## Bölüm 2

### Ayrıklaştırma

Türevin geometrik yorumu

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (2.1)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &\approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{(k+1)T - kT} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} \end{aligned} \quad (2.2)$$

elde edilir. Ayrık bir sinyalin türevi ardışık değerler farkının örnekleme zamanına oranı ile hesaplanabilmektedir. Örneğin,  $y(kT) = \sin(kT)$  ve  $T = 0.1$  olmak üzere

$$\frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} = 10(\sin((k+1)0.1) - \sin(0.1k)) \quad (2.3)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \{10 \sin(0.1), 10(\sin(0.2) - \sin(0.1)), 10(\sin(0.3) - \sin(0.2)), \dots\} \\ \{0.9983, 0.9884, 0.9685, \dots\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

elde edilir.  $y(kT) = \sin(kT)$  sinyalinin türevinin  $\frac{d\sin(t)}{dt} = \cos(t)$  olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned} \{\cos(0.1), \cos(0.2), \cos(0.3), \dots\} \\ \{0.9950, 0.9801, 0.9553, \dots\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

elde edilir ve ayrık türev ile benzer değerler olduğu görülmektedir. Bu yaklaşıklığın türeve yakınsaması için örnekleme zamanı  $T$  daha küçük seçilmelidir.

$$\frac{dq(t)}{dt} = x \quad (2.6)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= x \\ dq(t) &= xdt \\ \int dq(t) &= \int xdt \\ q(t) &= \int xdt \end{aligned} \quad (2.7)$$

elde edilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta q}{\Delta t} &= x \\ \frac{q((k+1)T) - q(kT)}{(k+1)T - kT} &= x \\ \frac{q((k+1)T) - q(kT)}{T} &= x \\ q((k+1)T) - q(kT) &= xT \\ q((k+1)T) &= q(kT) + xT \end{aligned} \quad (2.8)$$

ifadesi bulunur. Ayrık zamanda integral birikimli toplama karşılık gelmektedir. Bu karşılıklar Zero Order Hold (ZOH) ile elde edilmiştir. ZOH örnekleme zamanı boyunca değerlerin sabit olduğu varsayımına dayanmaktadır. Bu durum

$$x(t) = x(kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (2.9)$$

ile ifade edilebilir. ZOH için transfer fonksiyonu elde etmek amacıyla girişe  $\delta(t)$  birim darbe fonksiyonu uygulanırsa çıkışında  $u(t) - u(t-T)$  elde edilir. Bu durumda S tanım bölgesinde çıkış ifadesi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t) - u(t-T)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-T)\} \\ &= \mathcal{L}\{u(t)\} - e^{-sT} \mathcal{L}\{u(t)\} \\ &= \frac{1}{s} - e^{-sT} \frac{1}{s} \\ &= (1 - e^{-sT}) \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (2.10)$$



şeklindedir. ZOH transfer fonksiyonu ile bir  $G(s)$  sistemi birlikte Z dönüşümü yapılmalıdır. Örneğin,

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (2.11)$$

sistemi ayrıklaştırılmak istensin. Bu durumda  $G_{ZOH}(s)G(s)$  ayrıklaştırılmalıdır. Bu sebeple,

$$L(s) = G_{ZOH}(s)G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s(s+1)} \quad (2.12)$$

ifadesi Z tanım bölgesine

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{L(s)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s(s+1)}\right\} \\ &= \mathcal{Z}\{1 - e^{-sT}\}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\ &= (1 - z^{-1})\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right) \\ &= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{z-1}{z-e^{-1}}\right) \\ &= \frac{1 - e^{-1}}{z - e^{-1}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

olarak dönüştürülür.

First Order Hold(FOH) yöntemi ise

$$x(t) = x(kT) + \frac{t - kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı  $t = kT$  için  $x(kT)$ ,  $t = (k+0.5)T$  için

$$\begin{aligned} x(t) &= x(kT) + \frac{t - kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \\ &= x(kT) + \frac{kT + 0.5T - kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)) \\ &= x(kT) + 0.5(x((k+1)T) - x(kT)) \\ &= x(kT) + 0.5x((k+1)T) - 0.5x(kT) \\ &= 0.5x((k+1)T) + 0.5x(kT) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ve  $t = (k + 1)T$  için ise

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(kT) + \frac{t - kT}{T}(x((k + 1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k + 1)T \\
 x(t) &= x(kT) + \frac{(k + 1)T - kT}{T}(x((k + 1)T) - x(kT)) \\
 x(t) &= x(kT) + x((k + 1)T) - x(kT) \\
 x(t) &= x((k + 1)T)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

olarak elde edilir. Görüldüğü üzere ZOH yönteminin aksine  $T$  süre boyunca değerler değişmektedir. FOH için birim darbe yanıtı

$$x(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{T} & 0 \leq t \leq \frac{1}{T} \\ -t + \frac{1}{T} & \frac{1}{T} \leq t \leq \frac{2}{T} \\ 0 & t > \frac{2}{T} \end{cases} \tag{2.17}$$

ve işlem kolaylığı açısından  $T = 1$  alınırsa

$$x(t) = (1 - t)u(2 - t) + 2tu(1 - t) \tag{2.18}$$

şeklindedir. S dönüşümü sonucu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{(1 - t)u(2 - t)\} + \mathcal{L}\{2tu(1 - t)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 - t)(1 - u(t - 2))\} + \mathcal{L}\{2t(1 - u(t - 1))\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 - t)\} - \mathcal{L}\{(1 - t)u(t - 2)\} + \mathcal{L}\{2t\} - \mathcal{L}\{2tu(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 1)u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{2tu(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 1)u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{(2t - 2 + 2)u(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 1 - 1 + 1)u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{(2t - 2 + 2)u(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 2)u(t - 2) + u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{(2t - 2)u(t - 1) + 2u(t - 1)\} \\
 &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s} \\
 &= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} + \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} \\
 &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s} + \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \\
 &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2}(s + 1)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

elde edilir. FOH için transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} G_{FOH}(s) &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{T^2 s^2} \frac{Ts + 1}{T} \\ &= G_{ZOH}^2(s) \frac{Ts + 1}{T} \end{aligned} \quad (2.20)$$

şeklindedir. Örneğin daha önce Denklem 2.11 ile verilen sistemi FOH yöntemi ve yine aynı örnekleme zamanı ile ayrıklaştırmak gerekirse

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{1}{s+1} G_{FOH}(s) \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{(1 - e^{-s})^2}{T^2 s^2} \frac{Ts + 1}{T} \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} (s+1) \\ &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

ifadesi Z dönüşümüne tabi tutulmalıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \right\} \\ &= \mathcal{Z} \{ (1 - e^{-s})^2 \} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} \\ &= (1 - z^{-1})^2 \frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \left( \frac{z-1}{z} \right)^2 \frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (2.22)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere, birim gecikme elde edilmiştir.



## Bölüm 3

### Fark Denklemleri

Örnek sistemin ZOH yöntemi ile elde edilen ve Denklem 2.13 ile verilen sistem için

$$\begin{aligned} G_{ZOH}(z) &= \frac{1 - e^{-1}}{z - e^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}}{1 - e^{-1}z^{-1}} \\ \frac{y(z)}{u(z)} &= \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}}{1 - e^{-1}z^{-1}} \\ y(z)(1 - e^{-1}z^{-1}) &= \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}u(z)}{1 - e^{-1}z^{-1}} \\ y(z) - y(z - 1)e^{-1} &= (1 - e^{-1})u(z - 1) \\ y(z) &= y(z - 1)e^{-1} + (1 - e^{-1})u(z - 1) \\ y(z) &= 0.3679y(z - 1) + 0.6321u(z - 1) \end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir. Z tanım bölgesinde tanımlı transfer fonksiyonundan fark denklemine geçiş örnektir. Fark denklemleri programlama dilleri ile kolaylıkla gerçekleştirilebilmektedir.

```
u=ones(1,length(t));
y=zeros(1,length(t));

for i=2:length(t)
    y(i)=exp(-T)*y(i-1)+(1-exp(-T))*u(i);
end
```

Benzer şekilde FOH yöntemi ile elde edilen ve Denklem 2.22 ile verilen ifade için

$$\begin{aligned} G_{FOH}(z) &= \frac{1}{z} \\ \frac{y(z)}{u(z)} &= z^{-1} \\ y(z) &= u(z - 1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

elde edilir. Yay-Kütle-Damper sistemi için dinamikleri ifade eden denklem

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \quad (3.3)$$

olarak verilmiştir. Bu diferansiyel denklem S tanım bölgesine dönüştürülürse

$$\begin{aligned} ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) &= U(s) \\ (ms^2 + bs + k)X(s) &= U(s) \\ \frac{X(s)}{U(s)} &= \frac{1}{ms^2 + bs + k} \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. Denklem 3.3 ile verilen sistem için

$$\begin{aligned} m\frac{\Delta^2x}{(\Delta t)^2} + b\frac{\Delta x}{\Delta t} + kx(kT) &= u(kT) \\ m\frac{\Delta(x(kT) - x((k-1)T))}{kT - (k-1)T} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{kT - (k-1)T} + kx(kT) &= u(kT) \\ m\frac{\Delta x(kT) - \Delta x((k-1)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\ m\frac{x(kT) - 2x((k-1)T) + x((k-2)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\ m\frac{x(kT) - 2x((k-1)T) + x((k-2)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\ (m + bT + kT^2)x(kT) &= (2m + bT)x((k-1)T) - mx((k-2)T) + T^2u(kT) \\ x(kT) &= \frac{2m + bT}{m + bT + kT^2}x((k-1)T) - \frac{m}{m + bT + kT^2}x((k-2)T) + \frac{T^2}{m + bT + kT^2}u(kT) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Örnek olması için  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $b = 1 \text{ Ns/m}$ ,  $k = 1 \text{ Nm}$  ve  $T = 0.1$  olmak üzere fark denklemi

$$x(kT) = 1.8919x((k-1)T) - 0.9009x((k-2)T) + 0.009009u(kT) \quad (3.6)$$

olarak elde edilir. Transfer fonksiyonundan yola çıkarak  $\zeta = b\sqrt{m}/(2m\sqrt{k})$ ,  $w_n = \sqrt{k}/\sqrt{m}$  ve  $\phi = \cos^{-1}(\zeta)$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
G(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-0.1s}}{s(s^2 + s + 1)} \right\} \\
&= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} \right\} \\
&= \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}z^2 + ze^{-\zeta w_n T} \sin(w_n \sqrt{1-\zeta^2}T - \phi)}{z^2 - 2ze^{-\zeta w_n T} \cos(w_n \sqrt{1-\zeta^2}T) + e^{-2\zeta w_n T}} \right) \quad (3.7) \\
&= \frac{0.004833z^3 - 0.0001585z^2 - 0.004675z}{z^4 - 2.895z^3 + 2.8z^2 - 0.9048z} \\
&= \frac{0.004833z + 0.004675}{z^2 - 1.895z + 0.9048}
\end{aligned}$$

elde edilir.





## Bölüm 4

# Zaman Domeni Kriterleri

Sürekli zamanda tanımlı birinci dereceden bir transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{p}{s + p} \quad (4.1)$$

olarak verilsin. Birim basamak giriş için yanıt

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{s + p} \cdot \frac{1}{s} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + p} \right\} \\ &= 1 - e^{-pt} \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde hesaplanır.  $e^{-t}$  fonksiyonunun aldığı değerler için Çizelge 4.1 verilmiştir.

Görüldüğü üzere 4.1 ile verilen sistemin yanıtı  $p$  değişkeninin değerinden bağımsız olarak 1 değerine yakınsamaktadır. 1 değerini aşmamaktadır. Dolayısıyla aşım değeri %0'dır. Sürekli halde oturduğu değer %2 altı veya üstü ile tanımlanan %2'lik banda çıkmamak üzere girdiği zamana yerleşme zamanı denir. Bu tanımdan ve Çizelge 4.1'den yola çıkarak 4.1 ile verilen sistemin yerleşme zamanı  $t_s = 4s$ 'dir.  $p = 1$  olmaması durumunda zaman eksenini genişler veya daralır bu sebepten yerleşme zamanı

$$t_s = \frac{4}{p} \quad (4.3)$$

ile hesaplanır. İkinci dereceden bir sistem

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (4.4)$$

Çizelge 4.1:  $e^{-t}$  fonksiyonunun aldığı değerler

Zaman $t(s)$	Değer $e^{-t}$	$1 - e^{-t}$
1	0.3679	0.6321
2	0.1353	0.8647
3	0.0498	0.9502
4	0.0183	0.9817
5	0.0067	0.9933
6	0.0025	0.9975

ile tanımlanmaktadır. Burada  $\zeta$  sönüm oranı ve  $w_n$  doğal frekans olarak adlandırılmaktadır. İkinci dereceden polinomun kökleri bulunurken faydalanan  $\Delta = b^2 - 4ac$  hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\Delta &= (2\zeta w_n)^2 - 4w_n^2 \\
&= 4\zeta^2 w_n^2 - 4w_n^2 \\
&= 4w_n^2(\zeta^2 - 1)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir ve çözümün tipini belirlemek için

$$\begin{cases} \text{gerçel kök} & \Delta > 0 & \zeta > 1 \\ \text{çakışık kök} & \Delta = 0 & \zeta = 1 \\ \text{karmaşık kök} & \Delta < 0 & 0 < \zeta < 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

kullanılabilir.  $\zeta > 1$  durumunda gerçel köklü çözüm olmasından dolayı sistem transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{p_1 p_2}{(s + p_1)(s + p_2)} \tag{4.7}$$

olarak güncellenebilir.  $p_1 \gg p_2$  durumunda  $p_2$ ,  $p_2 \gg p_1$  durumunda  $p_1$  yanıtın hızını ve davranışını belirler.  $\zeta = 1$  olması durumunda yanıt birinci dereceden bir sisteme göre daha yavaş olmaktadır. Haricinde,  $0 < \zeta < 1$  durumunda

$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n}, \quad \text{Aşım} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{4.8}$$

ile hesaplanmaktadır. İkinci dereceden sistem yanıtı,

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta w_n t} \left[ \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t) \right] \tag{4.9}$$

ile ifade edilmektedir. Sinüzoidal terimler salınımlı olduklarından sadece  $e^{-\zeta w_n t}$  terimi yerleşme zamanının hesabı için önemlidir ve birinci dereceden sistem ile aynı ifade kullanılmaktadır. Aşım için

$$\begin{aligned}
 \frac{dy(t)}{dt} &= 0 \\
 \sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} - \sqrt{1-\zeta^2}w_n \right) &= 0 \\
 \sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) &= 0 \\
 \sqrt{1-\zeta^2}w_n t^* &= \pi \\
 t^* &= \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}w_n}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

yanıtta yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 M_p &= e^{-\zeta w_n t^*} \left[ \cos(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) \right] \\
 &= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \left[ \cos(\pi) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi) \right] \\
 &= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Verilen yerleşme zamanı ve aşım formülleri kullanılarak sistem davranışı şekillendirilebilmektedir. Örneğin  $t_s = 1$  ve aşım %10 olacak şekilde sistem transfer fonksiyonu seçilirse

$$\begin{aligned}
 \zeta &= -\frac{\log(0.1)}{\sqrt{\pi^2 + \log(0.1)^2}} = 0.591 \\
 w_n &= \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{0.591} = 6.7682
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$G(s) = \frac{45.81}{s^2 + 8s + 45.81} \tag{4.13}$$

transfer fonksiyonu elde edilir.



## Bölüm 5

### Z Tanım Bölgesinde Kök Eğrisi

Z tanım bölgesinde bir transfer fonksiyonu  $T = 0.2$  olmak üzere

$$G(z) = \frac{1}{z^3 + 0.4z^2 - 0.37z - 0.04} \quad (5.1)$$

olarak verilmiştir. P kontrolör ile kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{kG(z)}{1 + kG(z)} \\ T(z) &= \frac{\frac{k}{z^3 + 0.4z^2 - 0.37z - 0.04}}{1 + \frac{k}{z^3 + 0.4z^2 - 0.37z - 0.04}} \\ T(z) &= \frac{k}{z^3 + 0.4z^2 - 0.37z - 0.04 + k} \end{aligned} \quad (5.2)$$

olarak hesaplanır. Karakteristik polinomunda  $k$  değıştikçe köklerin aldığı değeri Çizelge 5.1 ile verilmiştir. Her kutbun kendi hareketinin görselleştirildiği çizime **Kök Eğrisi** denir. Sisteme ait kök eğrisi Şekil 5.1 ile verilmiştir.

Şekil 5.1 ile verilen ayırık noktalar birleştirildiğinde Şekil 5.2 oluşmaktadır.

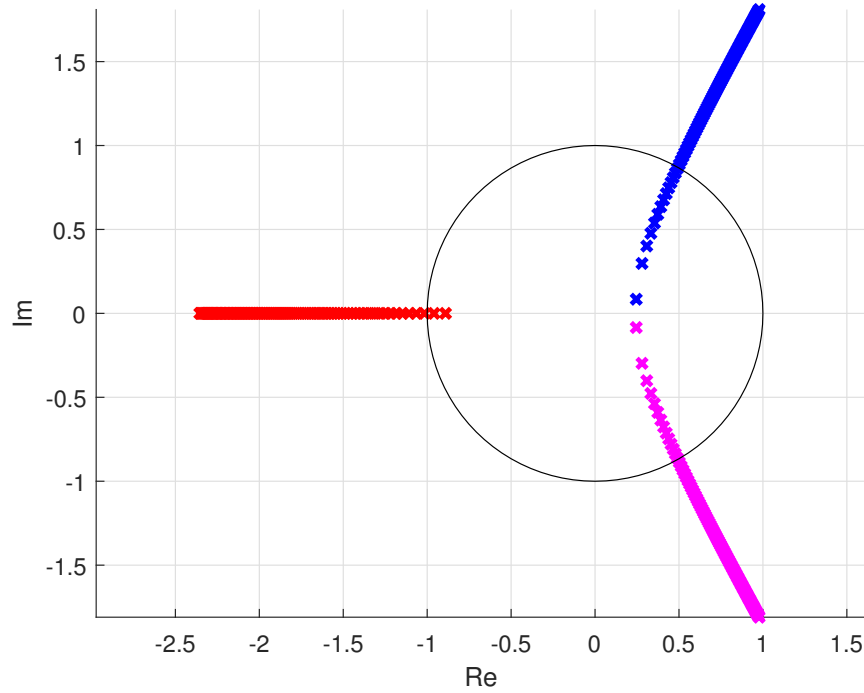
S tanım bölgesinde kararlılık sınırı  $s = jw$  ile elde edilmektedir ve bu durumda  $\zeta = 0$ 'dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{-\zeta w_n t} \left[ \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t) \right] \\ &= 1 - \cos(w_n t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

elde edilmektedir. Görüldüğü üzere sistem yanıtı salınımlıdır. Girişe uygulanan birim

Çizelge 5.1:  $k$ 'nın değişimine göre polinomun köklerinin yada sistem kutuplarının değişimi

$k$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
0.1	-0.8909	$0.2455 + 0.0843i$	$0.2455 - 0.0843i$
0.2	-0.9594	$0.2797 + 0.2975i$	$0.2797 - 0.2975i$
0.3	-1.0160	$0.3080 + 0.4013i$	$0.3080 - 0.4013i$
0.4	-1.0649	$0.3325 + 0.4770i$	$0.3325 - 0.4770i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

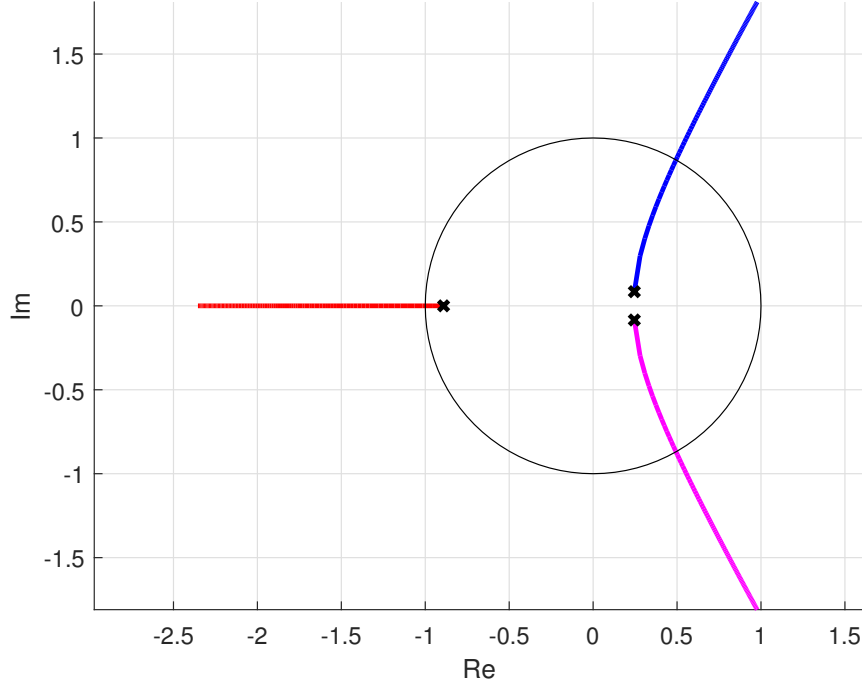


Şekil 5.1: Sisteme ait kök eğrisi

basamak sinyaline karşın sistem salınım yapmakta ve giriş sinyali değerine yakınsamamaktadır. Z tanım bölgesine  $z = e^{sT}$  ile geçiş yapılırsa

$$\begin{aligned}
 z &= e^{iwT} \\
 z &= e^{i\theta} \\
 z &= 1/\theta
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

elde edilir. Dikkat edilirse açı değişmekte fakat genlik sabittir ve bu ifade birim



Şekil 5.2: Sisteme ait kök eğrisi

çemberi tanımlamaktadır. S tanım bölgesinde kutup z tanım bölgesinde

$$\begin{aligned}
 z &= e^{(-\sigma \pm iw)T} \\
 z &= e^{-\sigma T} e^{\pm iwT} \\
 z &= e^{-\sigma T} \underline{\underline{\angle \pm wT}}
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

şeklinde yer alacaktır. Burada  $\sigma$  değeri yarıçapı belirlemektedir. S tanım bölgesinde baskın kutuplar z tanım bölgesinde birim çembere yakın kutuplar, baskın olmayan kutuplar ise birim çemberin merkezine yakın kutuplardır.





## Bölüm 6

# Z Tanım Bölgesinde Kontrolör Tasarımı

1. Geçici hal yanıtını şekillendirecek isterler dikkate alınarak  $s$  tanım bölgesinde baskın kutuplar seçilir.
2. Baskın kutuplar  $z = e^{sT}$  ilişkisi ile  $z$  tanım bölgesine aktarılır.
3. Kontrol edilecek sistem  $Z$  tanım bölgesine geçirilir.
4. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu elde edilir ve kutup atama yapılır.

Örnek sistem

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad (6.1)$$

$z$  tanım bölgesinde  $T = 0.2$  olmak üzere

$$G(z) = \frac{0.1648}{z - 0.6703} \quad (6.2)$$

olarak elde edilmektedir. Yerleşme zamanı  $t_s = 2$  ve aşım %10 isterleri verilmiştir. Bu durumda  $\zeta = 0.591$  ve  $w_n = 6.7664$  seçilir. Seçilen sönüm oranı ve doğal frekans ile baskın kutuplar

$$s_{1,2} = -4 \pm 5.4575i \quad (6.3)$$

şeklinde hesaplanır.  $z = e^{sT}$  ifadesi ile  $z$  tanım bölgesinde kutuplar

$$z_{1,2} = 0.2072 \pm 0.3987i \quad (6.4)$$

ve kutuplardan oluşturulacak polinom

$$p(z) = z^2 - 0.4144z + 0.2019 \quad (6.5)$$

olarak hesaplanır. P tipi kontrolör ile kapalı çevrim transfer fonksiyonunun ifadesi

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{kG(z)}{1 + kG(z)} \\ &= \frac{k \frac{0.1648}{z-0.6703}}{1 + k \frac{0.1648}{z-0.6703}} \\ &= \frac{k(0.1648)}{z - 0.6703 + k(0.1648)} \\ &= \frac{0.1648k}{z + 0.1648k - 0.6703} \end{aligned} \quad (6.6)$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere karakteristik polinom birinci dereceden elde edilmiştir ve her iki isterlerin sağlanması mümkün değildir. Yerleşme zamanı sağlanmak istenirse,

$$s = -\frac{4}{t_s} = -4 \quad (6.7)$$

ve z tanım bölgesinde

$$z = e^{sT} = e^{-0.8} = 0.4493 \quad (6.8)$$

elde edilir. Bu durumda P kontrolör

$$\begin{aligned} -0.1648k + 0.6703 &= 0.4493 \\ k &= 1.341 \end{aligned} \quad (6.9)$$

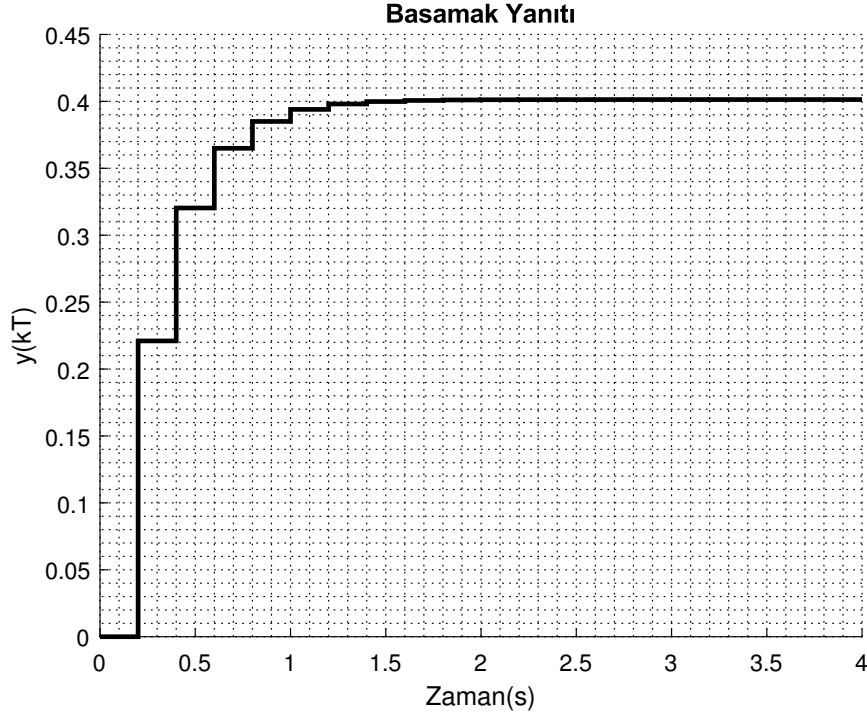
şeklindedir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$T(z) = \frac{0.221}{z - 0.4493} \quad (6.10)$$

şeklindedir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonuna ait basamak yanıtı Şekil 6.1 ile verilmiştir.

PD kontrolör transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(z) &= K_p + K_d(1 - z^{-1}) \\ &= K_p + K_d\left(\frac{z-1}{z}\right) \\ &= \frac{K_p z + K_d z - K_d}{z} \\ &= \frac{(K_p + K_d)z - K_d}{z} \end{aligned} \quad (6.11)$$



Şekil 6.1: P kontrol için kapalı çevrim basamak yanıtı

olmak üzere kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 T(z) &= \frac{F(z)G(z)}{1 + F(z)G(z)} \\
 &= \frac{\frac{(K_p + K_d)z - K_d}{z} \frac{0.1648}{z - 0.6703}}{1 + \frac{(K_p + K_d)z - K_d}{z} \frac{0.1648}{z - 0.6703}} \\
 &= \frac{0.1648(K_d + K_p)z - 0.1648 - K_d}{z^2 + (0.1648(K_p + K_d) - 0.6703)z - 0.1648K_d}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

şeklindedir. Bu durumda tasarım problemi

$$\begin{aligned}
 0.1648(K_p + K_d) - 0.6703 &= -0.4144 \\
 -0.1648K_d &= 0.2019
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

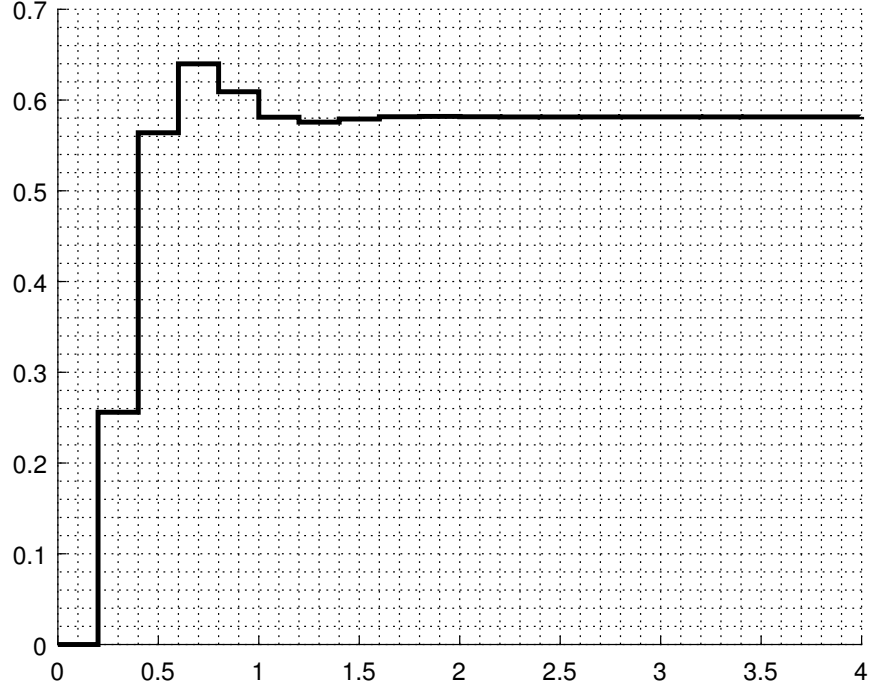
ve çözüm ise  $K_d = -1.2251$  ve  $K_p = 2.7778$  olarak elde edilir. PD kontrolör

$$F(z) = \frac{1.553z + 1.225}{z} \tag{6.14}$$

ve kapalı çevrim transfer fonksiyonu ifadesi

$$T(z) = \frac{0.2559z + 0.2019}{z^2 - 0.4144z + 0.2019} \quad (6.15)$$

olarak elde edilir.



Şekil 6.2: PD kontrol için kapalı çevrim basamak yanıtı

PI kontrolörü

$$\begin{aligned} F(z) &= K_p + \frac{K_i z}{z - 1} \\ &= \frac{(K_p + K_i)z - K_p}{z - 1} \end{aligned} \quad (6.16)$$

olarak tanımlanmıştır. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{F(z)G(z)}{1 + F(z)G(z)} \\ &= \frac{\frac{(K_p + K_i)z - K_p}{z - 1} \frac{0.1648}{z - 0.6703}}{1 + \frac{(K_p + K_i)z - K_p}{z - 1} \frac{0.1648}{z - 0.6703}} \\ &= \frac{0.1648(K_p + K_i)z - 0.1648K_p}{z^2 + (0.1648(K_p + K_i) - 1.6703)z + 0.6703 - 0.1648K_p} \end{aligned} \quad (6.17)$$

şeklindedir. Tasarım problemi

$$\begin{aligned} 0.1648(K_p + K_i) - 1.6703 &= -0.4144 \\ 0.6703 - 0.1648K_p &= 0.2019 \end{aligned} \quad (6.18)$$

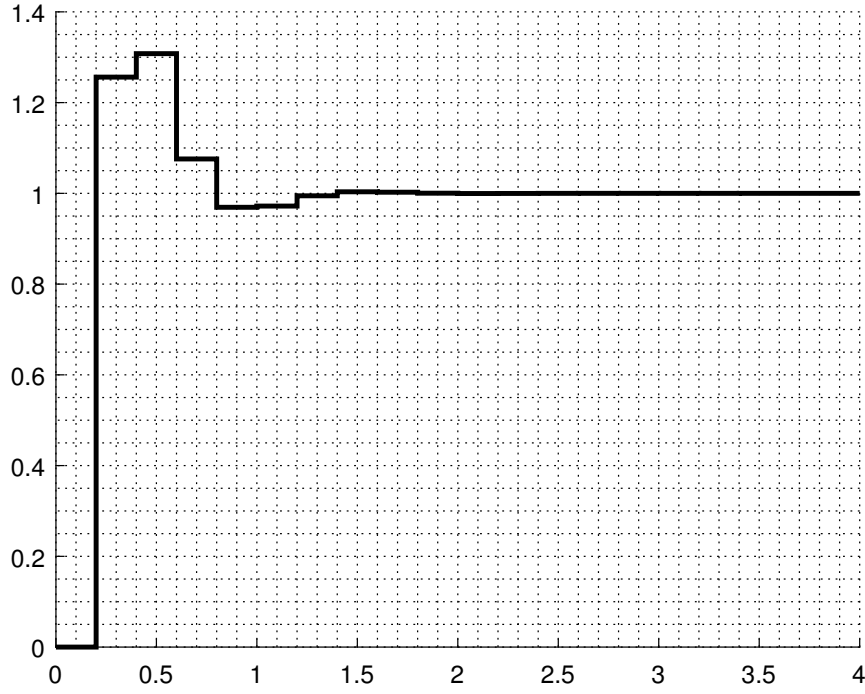
ve çözüm ise  $K_p = 2.8423$  ve  $K_i = 4.7784$  şeklindedir. Bu durumda PI kontrolör

$$F(z) = \frac{7.621z - 2.842}{z - 1} \quad (6.19)$$

ve kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1.256z - 0.4685}{z^2 - 0.4141z + 0.2018} \\ &= \frac{1.2562(z - 0.373)}{z^2 - 0.4141z + 0.2018} \end{aligned} \quad (6.20)$$

olarak elde edilir.



Şekil 6.3: PI kontrol için kapalı çevrim basamak yanıtı