Bölüm 1

Z ve S tanım bölgesi

Zaman tanım bölgesinden S tanım gölgesine dönüşüm

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \\ &= f(0) + f(T)e^{-Ts} + f(2T)e^{-2Ts} + \cdots \end{aligned} \tag{1.1}$$

olarak verilmiştir. Zaman tanım bölgesinden Z tanım bölgesine geçiş ise

$$\begin{aligned} F(z) = \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \\ &= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \cdots \end{aligned} \tag{1.2}$$

şeklindedir. S ve Z tanım bölgesi dönüşümlerine dikkat edilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(e^{Ts})^{-k} \\ \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \end{aligned} \tag{1.3}$$

ifadelerinden

$$z = e^{sT} \tag{1.4}$$

ilişkisi elde edilir. Z dönüşümü için çizelge Çizelge 1.1 ile verilmiştir.

Çizelge 1.1: S ve Z dönüşümü tablosu

Zaman domeni	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t-kT)$	e^{-kTs}	z^{-k}
$u(t)=1$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{zsin(wT)}{(z-1)(z^2-2zcos(wT)+1)}$
$cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\frac{z(z-cos(wT))}{(z-1)(z^2-2zcos(wT)+1)}$

1. S dönüşümü

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}dt \\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{\infty} \\ &= \frac{e^{-s\infty}}{-s} - \frac{1}{-s} \\ &= -\frac{1}{-s} \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned} \tag{1.5}$$

olarak elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{1\} &= \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1 \\ &= \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1\end{aligned} \tag{1.6}$$

elde edilir.

2.

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{1.7}$$

kullanarak $u = t$ ve $dv = e^{-st}dt$ olmak üzere

$$\begin{aligned} dv &= e^{-st}dt \\ \int dv &= \int e^{-st}dt \\ v &= \frac{e^{-st}}{-s} \end{aligned} \tag{1.8}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_{t=0}^{\infty} te^{-st}dt \\ &= t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s}dt \\ &= t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s}e^{-st}\bigg|_{t=0}^{\infty} \\ &= t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned} \tag{1.9}$$

elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} tz^{t-1} &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1 \end{aligned} \tag{1.10}$$

yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{t\} &= \sum_{t=0}^{\infty} tT(z^{-1})^{t} \\
&= Tz^{-1}\sum_{t=0}^{\infty} t(z^{-1})^{t-1} \\
&= T\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}, \quad |z|<1 \\
&= T\frac{\frac{1}{z}}{(1-\frac{1}{z})^{2}}, \quad |z|<1 \\
&= T\frac{\frac{1}{z}}{\frac{(z-1)^{2}}{z^{2}}}, \quad |z|<1 \\
&= T\frac{z^{2}}{z(z-1)^{2}}, \quad |z|<1 \\
&= \frac{Tz}{(z-1)^{2}}, \quad |z|<1
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

olarak elde edilir.

1.

$$G(s) = \frac{1}{s^{2}+4s+3} \tag{1.12}$$

ile verilen transfer fonksiyonunu kesirler toplamı olarak elde ediniz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+1)} \\
\frac{1}{(s+3)(s+1)} &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+1} \\
\frac{1}{(s+3)(s+1)} &= \frac{A(s+1)+B(s+3)}{(s+1)(s+3)} \\
A(s+1)+B(s+3) &= 1 \\
As + A + Bs + 3B &= 1 \\
A + B = 0 &= A + 3B = 1 \\
A = -B &= A + 3B = 1 \\
-B + 3B &= 1 \\
2B &= 1 \\
B &= \frac{1}{2},\ A = -\frac{1}{2} \\
G(s) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

elde edilir.

2.

$$G(s) = \frac{1}{s^2+4s+3} \tag{1.14}$$

ile verilen sistemin basamak yanıtını($u(t) = 1$) hesaplayınız. Bunun için

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{s^2+4s+3} \\
\frac{y(s)}{u(s)} &= \frac{1}{s^2+4s+3} \\
y(s) &= \frac{u(s)}{s^2+4s+3}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

yazılır ve $u(t) = 1$ ise Laplace çizelgesinden $u(s) = \frac{1}{s}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{s^2+4s+3} \\
\frac{y(s)}{u(s)} &= \frac{1}{s^2+4s+3} \\
y(s) &= \frac{1}{s(s^2+4s+3)} \\
y(s) &= \frac{1}{s(s+1)(s+3)}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
y(s) &= \frac{1}{s(s+1)(s+3)} \\
\frac{1}{s(s+1)(s+3)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} \\
\frac{1}{s(s+1)(s+3)} &= \frac{A(s+1)(s+3) + B(s)(s+3) + Cs(s+1)}{s(s+1)(s+3)} \\
A(s+1)(s+3) + B(s)(s+3) + Cs(s+1) &= 1 \\
A(s^2+4s+3) + B(s^2+3s) + C(s^2+s) &= 1 \\
As^2 + 4As + 3A + Bs^2 + 3Bs + Cs^2 + Cs &= 1 \\
(A+B+C)s^2 + (4A+3B+C)s + (3A) &= 1
\end{aligned} \tag{1.17}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
A+B+C &= 0 \\
4A+3B+C &= 0 \\
3A &= 1
\end{aligned} \tag{1.18}$$

çözülürse

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{3} \\
B+C &= -\frac{1}{3} \\
3B+C &= -\frac{4}{3}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

ve sonuç olarak

$$\begin{aligned}
y(s) &= \frac{1}{3}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{s+3} \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{s+3}\right\} \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{6}\frac{1}{s+3}\right\} \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \\
y(t) &= \frac{1}{3}\{1\} - \frac{1}{2}\left\{e^{-t}\right\} + \frac{1}{6}\left\{e^{-3t}\right\} \\
y(t) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left\{e^{-t}\right\} + \frac{1}{6}\left\{e^{-3t}\right\}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

elde edilir.

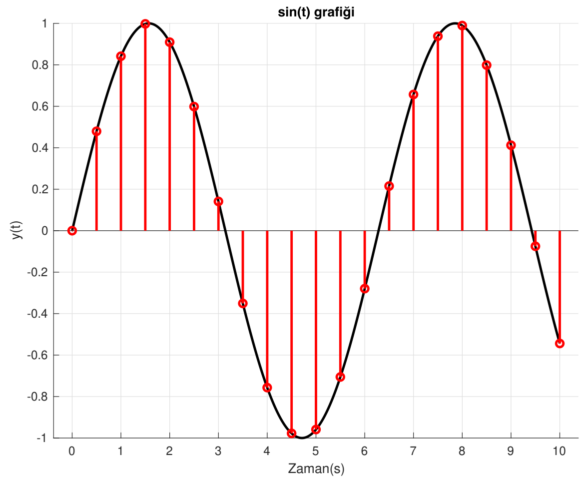
3. $sin(t)$ fonksiyonunu sürekli zaman ve ayrık zamanda çizdiriniz. `Python` kodu

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("sin(t)")
plt.title("Surekli zaman ayrik zaman karsilastirmasi")

t=np.arange(0,10,0.01)
yt=np.sin(t)
plt.plot(t,yt,'k')

T=0.5
t=np.arange(0,10,T)
yt=np.sin(t)
plt.stem(t,yt, 'r')
plt.show()
```

olarak verilmiştir. Şekil 1.1 ile elde edilen grafik verilmiştir.

4.
$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6} \tag{1.21}$$

ifadesini basit kesir toplamına çeviriniz.



Şekil 1.1: $sin(t)$ sürekli zaman ve ayrık zaman karşılaştırması

```
import sympy as sym
s=sym.Symbol('s')
Gs=1/(s**3+4*s**2+5*s+6)
print(sym.apart(Gs))
```

5. $\int_{t=0}^{\infty} te^{-st}dt$ ifadesini hesaplayınız.

```
import sympy as sym
t, s = sym.symbols('t s', real=True, positive=True)
integral = sym.integrate(t * sym.exp(-s * t), (t, 0, sym.oo))
print(integral)
```