

# İçindekiler

1	Z ve S tanım bölgesi	3
---	----------------------	---



# Bölüm 1

## Z ve S tanım bölgesi

Zaman tanım bölgesinden S tanım bölgesine dönüşüm

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \\ &= f(0) + f(T)e^{-Ts} + f(2T)e^{-2Ts} + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

olarak verilmiştir. Zaman tanım bölgesinden Z tanım bölgesine geçiş ise

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{Z}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \\ &= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

şeklindedir. S ve Z tanım bölgesi dönüşümlerine dikkat edilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(e^{Ts})^{-k} \\ \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ifadelerinden

$$z = e^{sT} \quad (1.4)$$

ilişkisi elde edilir. Z dönüşümü için tablo Tablo 1.1 ile verilmiştir.

Tablo 1.1: S ve Z dönüşümü tablosu

Zaman domeni	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t - kT)$	$e^{-kTs}$	$z^{-k}$
$u(t) = 1$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{z\sin(wT)}{(z-1)(z^2-2z\cos(wT)+1)}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\frac{z(z-\cos(wT))}{(z-1)(z^2-2z\cos(wT)+1)}$

1.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \\
&= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=0}^{\infty} \\
&= \frac{e^{-s\infty}}{-s} - \frac{1}{-s} \\
&= -\frac{1}{-s} \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

2.

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{1.6}$$

kullanarak  $u = t$  ve  $dv = e^{-st} dt$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
dv &= e^{-st} dt \\
\int dv &= \int e^{-st} dt \\
v &= \frac{e^{-st}}{-s}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t\} &= \int_{t=0}^{\infty} t e^{-st} dt \\
 &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\
 &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{\infty} \\
 &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s^2} \\
 &= \frac{1}{s^2}
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=0}^{\infty} t z^{t-1} &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \\
 &= \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

yardımla

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{t\} &= \sum_{t=0}^{\infty} t T(z^{-1})^t \\
 &= T z^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} t (z^{-1})^{t-1} \\
 &= T \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad |z| < 1 \\
 &= T \frac{\frac{1}{z}}{(1-\frac{1}{z})^2}, \quad |z| < 1 \\
 &= T \frac{\frac{1}{z}}{\frac{(z-1)^2}{z^2}}, \quad |z| < 1 \\
 &= T \frac{z^2}{z(z-1)^2}, \quad |z| < 1 \\
 &= \frac{Tz}{(z-1)^2}, \quad |z| < 1
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

olarak elde edilir.