

Bölüm 2

Ayrıklaştırma

Türevin geometrik yorumu

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (2.1)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &\approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{(k+1)T - kT} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} \end{aligned} \quad (2.2)$$

elde edilir. Ayrık bir sinyalin türevi ardışık değerler farkının örnekleme zamanına oranı ile hesaplanabilmektedir. Örneğin, $y(kT) = \sin(kT)$ ve $T = 0.1$ olmak üzere

$$\frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} = 10(\sin((k+1)0.1) - \sin(0.1k)) \quad (2.3)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \{10 \sin(0.1), 10(\sin(0.2) - \sin(0.1)), 10(\sin(0.3) - \sin(0.2)), \dots\} \\ \{0.9983, 0.9884, 0.9685, \dots\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

elde edilir. $y(kT) = \sin(kT)$ sinyalinin türevinin $\frac{d\sin(t)}{dt} = \cos(t)$ olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned} \{\cos(0.1), \cos(0.2), \cos(0.3), \dots\} \\ \{0.9950, 0.9801, 0.9553, \dots\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

elde edilir ve ayrık türev ile benzer değerler olduğu görülmektedir. Bu yaklaşıklığın türe ve yakınsaması için örnekleme zamanı T daha küçük seçilmelidir.

$$\frac{dq(t)}{dt} = x \quad (2.6)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= x \\ dq(t) &= xdt \\ \int dq(t) &= \int xdt \\ q(t) &= \int xdt \end{aligned} \quad (2.7)$$

elde edilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta q}{\Delta t} &= x \\ \frac{q((k+1)T) - q(kT)}{(k+1)T - kT} &= x \\ \frac{q((k+1)T) - q(kT)}{T} &= x \\ q((k+1)T) - q(kT) &= xT \\ q((k+1)T) &= q(kT) + xT \end{aligned} \quad (2.8)$$

ifadesi bulunur. Ayrık zamanda integral birikimli toplama karşılık gelmektedir. Bu karşılıklar Zero Order Hold(ZOH) ile elde edilmiştir. ZOH örnekleme zamanı boyunca değerlerin sabit olduğu varsayımına dayanmaktadır. Bu durum

$$x(t) = x(kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (2.9)$$

ile ifade edilebilir. ZOH için transfer fonksiyonu elde etmek amacıyla girişe $\delta(t)$ birim darbe fonksiyonu uygulanırsa çıkışında $u(t) - u(t-T)$ elde edilir. Bu durumda S tanım bölgesinde çıkış ifadesi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t) - u(t-T)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-T)\} \\ &= \mathcal{L}\{u(t)\} - e^{-sT} \mathcal{L}\{u(t)\} \\ &= \frac{1}{s} - e^{-sT} \frac{1}{s} \\ &= (1 - e^{-sT}) \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (2.10)$$

şeklindedir. ZOH transfer fonksiyonu ile bir $G(s)$ sistemi birlikte Z dönüşümü yapılmalıdır. Örneğin,

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (2.11)$$

sistemi ayrıklaştırılmak istensin. Bu durumda $G_{ZOH}(s)G(s)$ ayrıklaştırılmalıdır. Bu sebeple,

$$L(s) = G_{ZOH}(s)G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s(s+1)} \quad (2.12)$$

ifadesi Z tanım bölgesine

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{L(s)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s(s+1)}\right\} \\ &= \mathcal{Z}\{1 - e^{-sT}\}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\ &= (1 - z^{-1})\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right) \\ &= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{z-1}{z-e^{-1}}\right) \\ &= \frac{1 - e^{-1}}{z - e^{-1}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

olarak dönüştürülür.

First Order Hold(FOH) yöntemi ise

$$x(t) = x(kT) + \frac{t - kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı $t = kT$ için $x(kT)$, $t = (k+0.5)T$ için

$$\begin{aligned} x(t) &= x(kT) + \frac{t - kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \\ &= x(kT) + \frac{kT + 0.5T - kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)) \\ &= x(kT) + 0.5(x((k+1)T) - x(kT)) \\ &= x(kT) + 0.5x((k+1)T) - 0.5x(kT) \\ &= 0.5x((k+1)T) + 0.5x(kT) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ve $t = (k + 1)T$ için ise

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(kT) + \frac{t - kT}{T}(x((k + 1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k + 1)T \\
 x(t) &= x(kT) + \frac{(k + 1)T - kT}{T}(x((k + 1)T) - x(kT)) \\
 x(t) &= x(kT) + x((k + 1)T) - x(kT) \\
 x(t) &= x((k + 1)T)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

olarak elde edilir. Görüldüğü üzere ZOH yönteminin aksine T süre boyunca değerler değişmektedir. FOH için birim darbe yanıtı

$$x(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{T} & 0 \leq t \leq \frac{1}{T} \\ -t + \frac{1}{T} & \frac{1}{T} \leq t \leq \frac{2}{T} \\ 0 & t > \frac{2}{T} \end{cases} \tag{2.17}$$

ve işlem kolaylığı açısından $T = 1$ alınır

$$x(t) = (1 - t)u(2 - t) + 2tu(1 - t) \tag{2.18}$$

şeklindedir. S dönüşümü sonucu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{(1 - t)u(2 - t)\} + \mathcal{L}\{2tu(1 - t)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 - t)(1 - u(t - 2))\} + \mathcal{L}\{2t(1 - u(t - 1))\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 - t)\} - \mathcal{L}\{(1 - t)u(t - 2)\} + \mathcal{L}\{2t\} - \mathcal{L}\{2tu(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 1)u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{2tu(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 1)u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{(2t - 2 + 2)u(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 1 - 1 + 1)u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{(2t - 2 + 2)u(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 2)u(t - 2) + u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{(2t - 2)u(t - 1) + 2u(t - 1)\} \\
 &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s} \\
 &= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} + \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} \\
 &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s} + \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \\
 &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2}(s + 1)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

elde edilir. FOH için transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} G_{FOH}(s) &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{T^2 s^2} \frac{Ts + 1}{T} \\ &= G_{ZOH}^2(s) \frac{Ts + 1}{T} \end{aligned} \quad (2.20)$$

şeklindedir. Örneğin daha önce Denklem 2.11 ile verilen sistemi FOH yöntemi ve yine aynı örnekleme zamanı ile ayıklaştırmak gerekirse

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{1}{s+1} G_{FOH}(s) \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{(1 - e^{-s})^2}{T^2 s^2} \frac{Ts + 1}{T} \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} (s+1) \\ &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

ifadesi Z dönüşümüne tabi tutulmalıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \right\} \\ &= \mathcal{Z} \{ (1 - e^{-s})^2 \} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} \\ &= (1 - z^{-1})^2 \frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 \frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (2.22)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere, birim gecikme elde edilmiştir.

1. $x(t) = \sin(t)$ fonksiyonunun türevini hesaplayıp çiziniz.

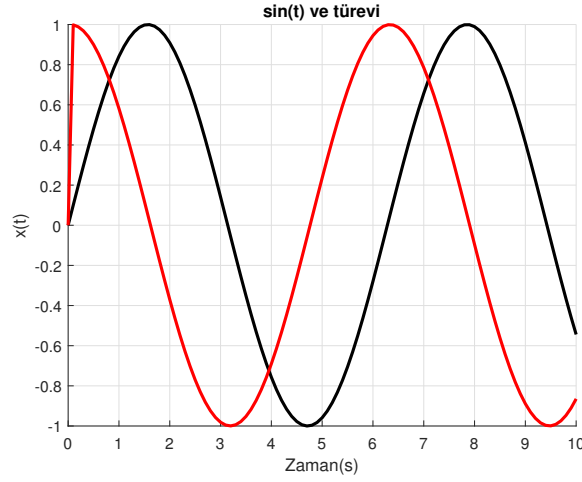
```
T=0.1
t=np.arange(0,10+1,T)
xt=np.sin(t)
dxt=np.zeros(t.shape)
for i in range(1,len(t)):
```

$$dxt[i]=(xt[i]-xt[i-1])/T$$

```
plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("sin(t)")
plt.title("Sinus ve türevi")

plt.plot(t,xt,'k')
plt.plot(t,dxt,'r')
plt.show()
```

Şekil 2.1'de $\sin(t)$ ve türevi gösterilmiştir.



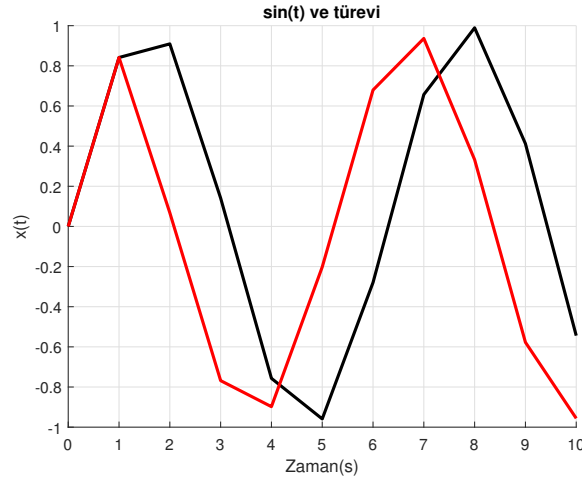
Şekil 2.1: $\sin(t)$ ve türevinin karşılaştırılması ($T = 0.1$)

Şekil 2.2'de daha düşük bir örnekleme zamanı seçilmiştir ve bu sebeple gerek sinyal gerekse türevi düşük kalitededir.

2. $x(t) = e^{-t}$ sinyalinin integralini hesaplayınız ve çizdiriniz.

```
T=0.1
t=np.arange(0,10+1,T)
xt=np.exp(-t)
q=np.zeros(np.size(t))
for i in range(1,len(t)):
    q[i]=q[i-1]+T*xt[i-1]

plt.grid('minor')
```



Şekil 2.2: $\sin(t)$ ve türevinin karşılaştırılması($T = 1$)

```
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("e-t")
plt.title("e-t ve integrali")

plt.plot(t,xt,'k')
plt.plot(t,q,'r')
plt.show()
```

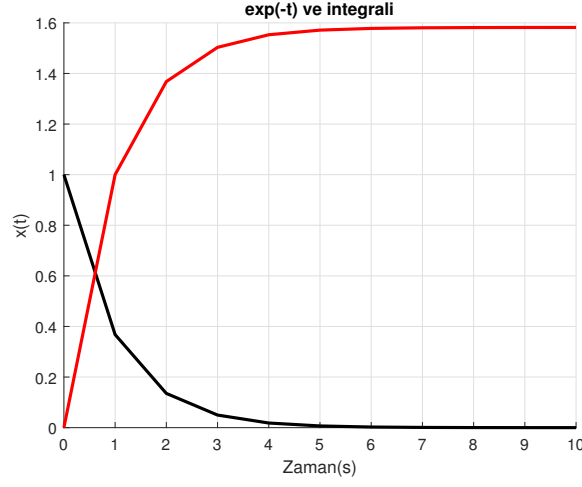
Şekil 2.3'de integral çizdirilmiştir.

3. ZOH yöntemini kullanarak $T = 1$ olmak üzere $x(kT) = 1$ sinyalinin veri tutucunu çıkışını çizdiriniz.

```
T=1
t=np.arange(0,3+1,T)
xt=np.array([1,2,-1,3])

T=0.01
tnew=np.arange(0,3+1,T)
yt=np.zeros(tnew.shape)
for i in range(0,len(t)):
    for j in range(0,100):
        yt[100*i+j]=xt[i]

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
```



Şekil 2.3: $\sin(t)$ ve integralinin karşılaştırılması ($T = 1$)

```
plt.ylabel("Veri tutucu")
plt.title("ZOH ornegi")

plt.stem(t,xt,'k')
plt.plot(tnew,yt,'r')
plt.show()
```

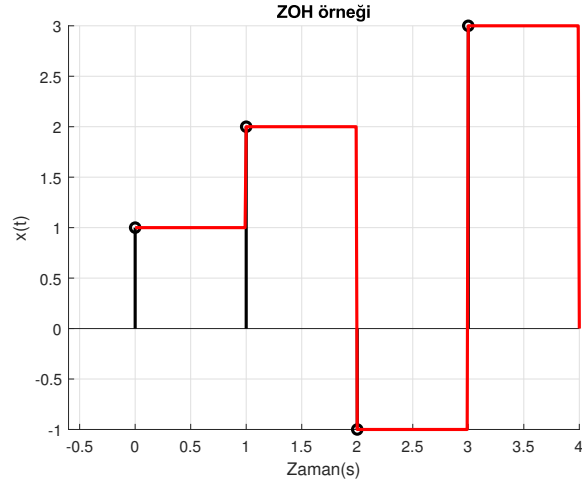
Şekil 2.4'de ZOH işleminin sonucu gösterilmiştir.

4. FOH yöntemini kullanarak $T = 1$ olmak üzere $x(kT) = 1$ sinyalini veri tutucunu çıkışını çizdiriniz.

```
T=1
t=np.arange(0,3+1,T)
xt=np.array([1,2,-1,3])

T=0.01
tnew=np.arange(0,3+1,T)
yt=np.zeros(tnew.shape)
for i in range(0,len(t)-1):
    for j in range(0,100):
        yt[100*i+j]=xt[i]+0.01*j*(xt[i+1]-xt[i])

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("Veri tutucu")
```

Şekil 2.4: ZOH örneği

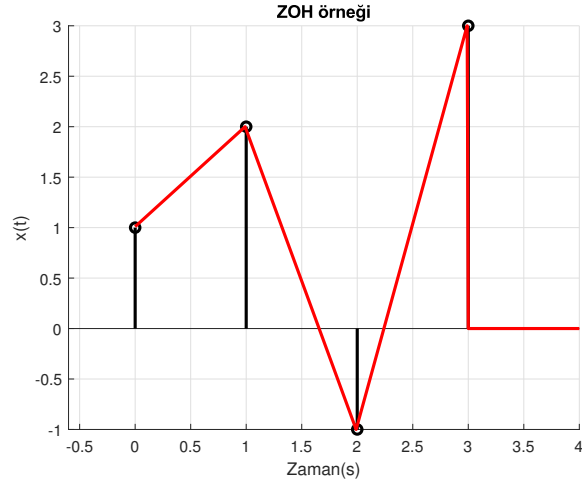
```
plt.title("FOH örneği")
```

```
plt.stem(t,xt,'k')
```

```
plt.plot(tnew,yt,'r')
```

```
plt.show()
```

Şekil 2.5’de FOH işleminin sonucu gösterilmiştir.



Şekil 2.5: FOH örneği

5. Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad (2.23)$$

ile verilen sistemini ZOH yöntemini kullanarak Z tanım bölgesindeki ifadesini elde ediniz. $T = 0.1$ için basamak yanıtını karşılaştırınız.

$$\begin{aligned}
 L(s) &= G_{ZOH}(s)G(s) \\
 &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{s+2} \\
 &= (1 - e^{-sT}) \left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)} \right) \\
 L(z) &= \frac{1}{2} \mathcal{Z} \{1 - e^{-sT}\} \mathcal{Z} \left\{ \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+2)} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} (1 - z^{-1}) \left(\mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{(s+2)} \right\} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (1 - z^{-1}) \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-2T}} \right) \\
 &= \left(\frac{z-1}{2z} \right) \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-2T}} \right) \\
 &= 1 - \frac{(z-1)}{2z - 2e^{-2T}} \\
 &= \frac{z - e^{-2T} - (z-1)}{2z - 2e^{-2T}} \\
 &= \frac{1 - e^{-2T}}{2z - 2e^{-2T}}
 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$T = 0.1$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 L(z) &= 0.5 \frac{1 - e^{-0.2}}{z - e^{-0.2}} \\
 &= 0.5 \frac{1 - e^{-0.2}}{z - e^{-0.2}} \\
 &= \frac{0.09}{z - 0.82}
 \end{aligned} \quad (2.25)$$

elde edilir.

T=0.1
Gs=`control.tf(1,[1,2])`

```

t, y = control.step_response(Gs)
plt.plot(t,y,'k')
Gz=control.tf(0.09,[1,-0.82],dt=T)
t, y = control.step_response(Gz)
plt.stem(t,y,'r')
plt.show()

```

6. Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad (2.26)$$

ile verilen sistemini FOH yöntemini kullanarak Z tanım bölgesindeki ifadesini elde ediniz. $T = 0.1$ için basamak yanıtını karşılaştırmız.

$$\begin{aligned}
L(s) &= G_{FOH}(s)G(s) \\
L(s) &= G_{ZOH}^2(s) \frac{Ts+1}{T} G(s) \\
&= \frac{(1-e^{-sT})^2}{s^2} \frac{Ts+1}{Ts+2T} \\
&= (1-e^{-sT})^2 \frac{Ts+1}{Ts^2(s+2)}
\end{aligned} \quad (2.27)$$

elde edilir. Kesir ayırma işlemi için

$$\begin{aligned}
\frac{Ts+1}{s^2(s+2)} &= \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \\
\frac{Ts+1}{s^2(s+2)} &= \frac{(As+B)(s+2) + Cs^2}{s^2(s+2)} \\
Ts+1 &= (As+B)(s+2) + Cs^2 \\
Ts+1 &= As(s+2) + B(s+2) + Cs^2 \\
Ts+1 &= As^2 + Cs^2 + 2As + Bs + 2B \\
Ts+1 &= (A+C)s^2 + (2A+B)s + 2B
\end{aligned} \quad (2.28)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
A+C &= 0 \\
2A+B &= T \\
2B &= 1
\end{aligned} \quad (2.29)$$

çözülürse $B = 0.5$, $A = 0.5T - 0.25$ ve $B = -0.5T + 0.25$ hesaplanır. Yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{Ts + 1}{s^2(s + 2)} &= \frac{(0.5T - 0.25)s + 0.5}{s^2} + \frac{-0.5T + 0.25}{s + 2} \\ &= \frac{(0.5T - 0.25)}{s} + \frac{0.5}{s^2} + \frac{-0.5T + 0.25}{s + 2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

ve

$$\begin{aligned} &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{(0.5T - 0.25)}{s} + \frac{0.5}{s^2} + \frac{-0.5T + 0.25}{s + 2} \right\} \\ &= (0.5T - 0.25) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + 0.5 \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} - (0.5T - 0.25) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s + 2} \right\} \\ &= (0.5T - 0.25) \frac{z}{z - 1} + 0.5 \frac{Tz}{(z - 1)^2} - (0.5T - 0.25) \frac{z}{z - e^{-2T}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

haliyle

$$= (1 - z^{-1})^2 \left(\frac{(0.5T - 0.25)}{T} \frac{z}{z - 1} + \frac{0.5}{T} \frac{Tz}{(z - 1)^2} - \frac{(0.5T - 0.25)}{T} \frac{z}{z - e^{-2T}} \right) \quad (2.32)$$

elde edilir. $T = 0.1$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &= (1 - z^{-1})^2 \left(-2 \frac{z}{z - 1} + 5 \frac{0.1z}{(z - 1)^2} + 2 \frac{z}{z - 0.82} \right) \\ &= (1 - z^{-1})^2 \left(\frac{-2z(z - 1)(z - 0.82) + 0.5z(z - 0.82) + 2z(z - 1)^2}{(z - 0.82)(z - 1)^2} \right) \\ &= z(1 - z^{-1})^2 \left(\frac{-2(z - 1)(z - 0.82) + 0.5(z - 0.82) + 2(z - 1)^2}{(z - 0.82)(z - 1)^2} \right) \\ &= z(1 - z^{-1})^2 \left(\frac{-2z^2 + 3.64z - 1.64 + 0.5z - 0.41 + 2z^2 - 4z + 2}{(z - 0.82)(z - 1)^2} \right) \\ &= z(1 - z^{-1})^2 \left(\frac{3.64z - 1.64 + 0.5z - 0.41 - 4z + 2}{(z - 0.82)(z - 1)^2} \right) \\ &= z(1 - z^{-1})^2 \left(\frac{0.14z - 0.05}{(z - 0.82)(z - 1)^2} \right) \\ &= \frac{0.14z - 0.05}{(z - 0.82)z} \\ &= \frac{0.14z - 0.05}{z^2 - 0.82z} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Kod ise

```
T=0.1
Gs=control.tf(1,[1,2])
t, y = control.step_response(Gs)
plt.plot(t,y,'k')
Gz=control.tf([0.14,-0.05],[1,-0.82,0],dt=T)
print(Gz)
t, y = control.step_response(Gz)
plt.stem(t,y,'r')
plt.show()
```

şeklindedir.

