Bölüm 11

Z Tanım Bölgesinde Durum Uzayı

Yay-kütle-damper sisteminin dinamikleri $x(t)$ yer değiştirme olmak üzere

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \tag{11.1}$$

ile verilmiştir. Verilen ikinci dereceden diferansiyel denklemi iki adet birinci dereceden diferansiyel denkleme çevirmek mümkündür. Bunun için $x_1(t) \triangleq x(t)$ tanımlanır ve

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{x}(t) \triangleq x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{x}(t) \end{aligned} \tag{11.2}$$

tanımlanır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) &= u(t) \\ m\dot{x}_2(t) + bx_2(t) + kx_1(t) &= u(t) \\ m\dot{x}_2(t) &= -bx_2(t) - kx_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{b}{m}x_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{aligned} \tag{11.3}$$

elde edilir. Diferansiyel denklem takımı

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{b}{m}x_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{aligned} \tag{11.4}$$

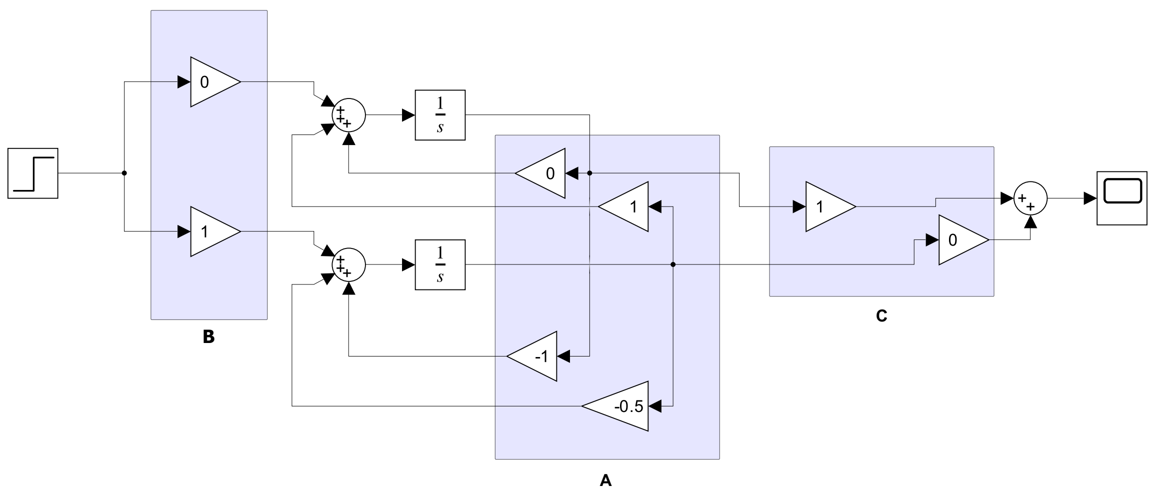
ve hatta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \tag{11.5}$$

elde edilir. Sistem için parametreler $m = 1$, $b = 0.5$ ve $k = 1$ olmak üzere durum uzayı modeli

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.6}$$

olarak elde edilir. `Simulink` modeli Şekil 11.1 ile verilmiştir.



Şekil 11.1: Yay-kütle-damper sistemine ait durum uzay modeli

Ayrık durum uzayı ZOH yöntemi ile türevin yorumuna dayanmaktadır ve

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \tag{11.7}$$

ile durum uzayı

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \begin{bmatrix} x_1(kT) - x_1((k-1)T) \\ x_2(kT) - x_2((k-1)T) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u((k-1)T) \\ y((k-1)T) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.8}$$

olarak elde edilmektedir. Matematiksel işlemler sonucu

$$\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix} u((k-1)T)$$

$$y((k-1)T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} \tag{11.9}$$

ve sonuç olarak

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ -T & 1-0.5T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix} u((k-1)T) \\ y((k-1)T) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.10}$$

elde edilir. Örnekleme zamanı $T = 0.1$ olmak üzere durum uzayı modeli

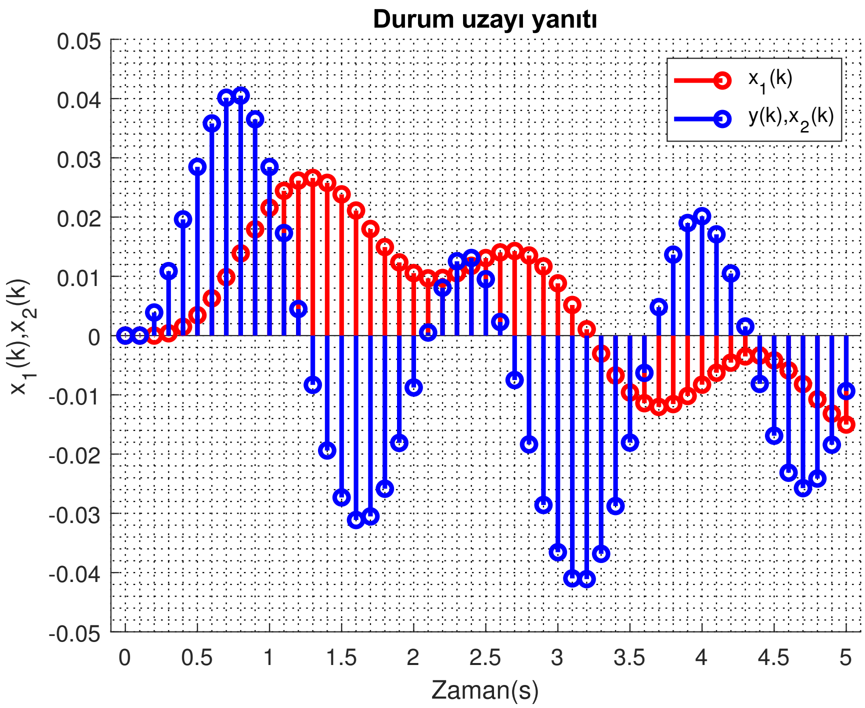
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k-1] \\ x_2[k-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u[k-1] \\ y[k-1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k-1] \\ x_2[k-1] \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.11}$$

şeklindedir. Durum uzayı modeli denklemleri

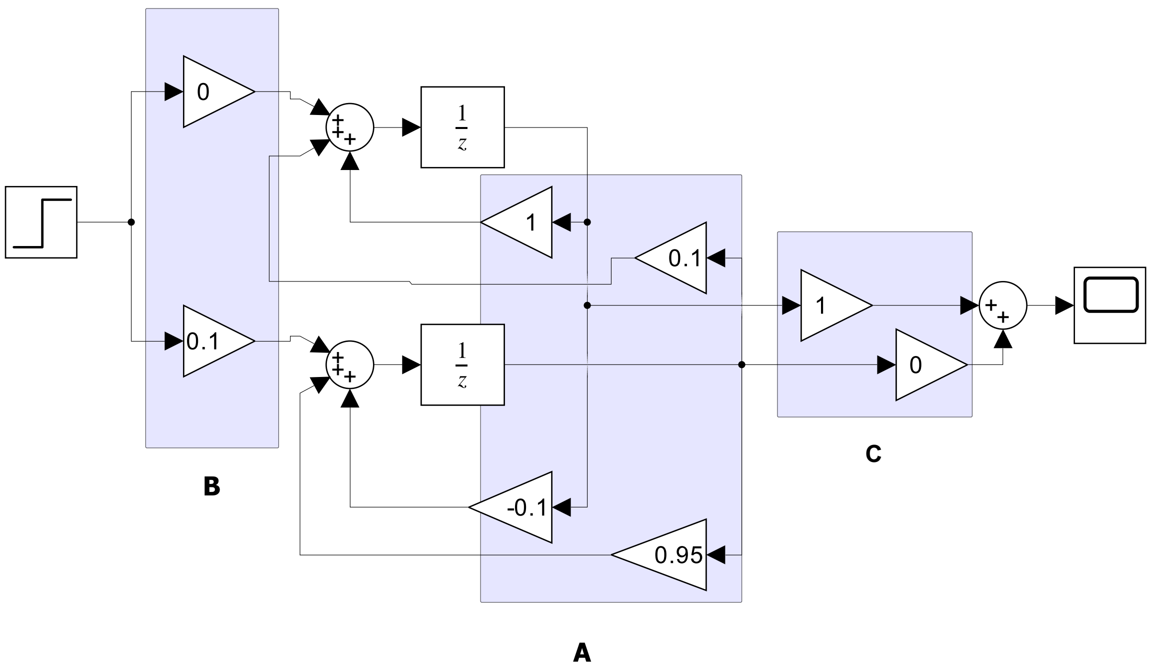
$$\begin{aligned} x_1[k] &= x_1[k-1] + 0.1x_2[k-1] \\ x_2[k] &= -0.1x_1[k-1] + 0.95x_2[k-1] + 0.1u[k-1] \\ y[k-1] &= x_1[k-1] \end{aligned} \tag{11.12}$$

şeklindedir. Girişine $sin(4t)$ uygulandığında elde edilen yanıt Şekil 11.2 ile verilmiştir.

`Simulink` modeli Şekil 11.3 ile verilmiştir.



Şekil 11.2: Yay-kütle-damper sistemine ait durum uzay modeli yanıtı



Şekil 11.3: Yay-kütle-damper sistemine ait ayrık durum uzay modeli