

BILGISAYARLI KONTROL SİSTEMLERİ

DERS NOTU

Dr. Mehmet CANEVi
Bilgisayar Mühendisliđi



Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi
Türkiye

İçindekiler

1. Z ve S tanım bölgesi	5
2. Ayrıklaştırma	13
3. Fark Denklemleri	25
4. Zaman Domeni Kriterleri	31
5. Z Tanım Bölgesinde Kök Eğrisi	39
6. Z Tanım Bölgesinde Zaman Tanım Bölgesi İsterler	47
7. Z Tanım Bölgesinde P Kontrolör Tasarımı	53
8. Z Tanım Bölgesinde PD Kontrolör Tasarımı	59
9. Z Tanım Bölgesinde PI Kontrolör Tasarımı	63
10.Z Tanım Bölgesinde PID Kontrolör Tasarımı	67
11.Z Tanım Bölgesinde Durum Uzayı	71
12.Z Tanım Bölgesinde Durum Geri Besleme Kontrolörü	77
13.Z Tanım Bölgesinde Luenberger Gözleyicisi	83

Bölüm 1

Z ve S tanım bölgesi

Zaman tanım bölgesinden S tanım gölgesine dönüşüm

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \\ &= f(0) + f(T)e^{-Ts} + f(2T)e^{-2Ts} + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

olarak verilmiştir. Zaman tanım bölgesinden Z tanım bölgesine geçiş ise

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{Z}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \\ &= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

şeklindedir. S ve Z tanım bölgesi dönüşümlerine dikkat edilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(e^{Ts})^{-k} \\ \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ifadelerinden

$$z = e^{sT} \quad (1.4)$$

ilişkisi elde edilir. Z dönüşümü için çizelge Çizelge 1.1 ile verilmiştir.

Çizelge 1.1: S ve Z dönüşümü tablosu

Zaman domenı	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t - kT)$	e^{-kTs}	z^{-k}
$u(t) = 1$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{z \sin(wT)}{(z-1)(z^2-2z \cos(wT)+1)}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\frac{z(z-\cos(wT))}{(z-1)(z^2-2z \cos(wT)+1)}$

1. S dönüşümü

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \\
&= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=0}^{\infty} \\
&= \frac{e^{-s\infty}}{-s} - \frac{1}{-s} \\
&= -\frac{1}{-s} \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

olarak elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{1\} &= \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t} \\
&= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1 \\
&= \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1
\end{aligned} \tag{1.6}$$

elde edilir.

2.

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (1.7)$$

kullanarak $u = t$ ve $dv = e^{-st} dt$ olmak üzere

$$\begin{aligned} dv &= e^{-st} dt \\ \int dv &= \int e^{-st} dt \\ v &= \frac{e^{-st}}{-s} \end{aligned} \quad (1.8)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_{t=0}^{\infty} t e^{-st} dt \\ &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{\infty} \\ &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} t z^{t-1} &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \\ &= \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1 \end{aligned} \quad (1.10)$$

yardımıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{t\} &= \sum_{t=0}^{\infty} tT(z^{-1})^t \\
&= Tz^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} t(z^{-1})^{t-1} \\
&= T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \quad |z| < 1 \\
&= T \frac{\frac{1}{z}}{(1 - \frac{1}{z})^2}, \quad |z| < 1 \\
&= T \frac{\frac{1}{z}}{\frac{(z-1)^2}{z^2}}, \quad |z| < 1 \\
&= T \frac{z^2}{z(z-1)^2}, \quad |z| < 1 \\
&= \frac{Tz}{(z-1)^2}, \quad |z| < 1
\end{aligned} \tag{1.11}$$

olarak elde edilir.

1.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \tag{1.12}$$

ile verilen transfer fonksiyonunu kesirler toplamı olarak elde ediniz. Bu du-

rumda

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+1)} \\
 \frac{1}{(s+3)(s+1)} &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \\
 \frac{1}{(s+3)(s+1)} &= \frac{A(s+1) + B(s+3)}{(s+1)(s+3)} \\
 A(s+1) + B(s+3) &= 1 \\
 As + A + Bs + 3B &= 1 \\
 A + B &= 0 = A + 3B = 1 \\
 A = -B &= A + 3B = 1 \\
 -B + 3B &= 1 \\
 2B &= 1 \\
 B &= \frac{1}{2}, A = -\frac{1}{2} \\
 G(s) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+3}
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

elde edilir.

2.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \tag{1.14}$$

ile verilen sistemin basamak yanıtını($u(t) = 1$) hesaplayınız. Bunun için

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \\
 \frac{y(s)}{u(s)} &= \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \\
 y(s) &= \frac{u(s)}{s^2 + 4s + 3}
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

yazılır ve $u(t) = 1$ ise Laplace çizelgesinden $u(s) = \frac{1}{s}$ olduğundan

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \\ \frac{y(s)}{u(s)} &= \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \\ y(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)} \\ y(s) &= \frac{1}{s(s+1)(s+3)} \end{aligned} \tag{1.16}$$

dolayısıyla,

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{s(s+1)(s+3)} \\ \frac{1}{s(s+1)(s+3)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} \\ \frac{1}{s(s+1)(s+3)} &= \frac{A(s+1)(s+3) + B(s)(s+3) + Cs(s+1)}{s(s+1)(s+3)} \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} A(s+1)(s+3) + B(s)(s+3) + Cs(s+1) &= 1 \\ A(s^2 + 4s + 3) + B(s^2 + 3s) + C(s^2 + s) &= 1 \\ As^2 + 4As + 3A + Bs^2 + 3Bs + Cs^2 + Cs &= 1 \\ (A + B + C)s^2 + (4A + 3B + C)s + (3A) &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ 4A + 3B + C &= 0 \\ 3A &= 1 \end{aligned} \tag{1.18}$$

çözülürse

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3} \\ B + C &= -\frac{1}{3} \\ 3B + C &= -\frac{4}{3} \end{aligned} \tag{1.19}$$

ve sonuç olarak

$$\begin{aligned}
 y(s) &= \frac{1}{3} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{6} \frac{1}{s+3} \\
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{3} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{6} \frac{1}{s+3} \right\} \\
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{3} \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{6} \frac{1}{s+3} \right\} \\
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} + \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+3} \right\} \\
 y(t) &= \frac{1}{3} \{1\} - \frac{1}{2} \{e^{-t}\} + \frac{1}{6} \{e^{-3t}\} \\
 y(t) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \{e^{-t}\} + \frac{1}{6} \{e^{-3t}\}
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

elde edilir.

3. $\sin(t)$ fonksiyonunu sürekli zaman ve ayrık zamanda çizdiriniz. Python kodu

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("sin(t)")
plt.title("Sürekli zaman ayrık zaman karşılaştırması")

t=np.arange(0,10,0.01)
yt=np.sin(t)
plt.plot(t,yt, 'k')

T=0.5
t=np.arange(0,10,T)
yt=np.sin(t)
plt.stem(t,yt, 'r')
plt.show()

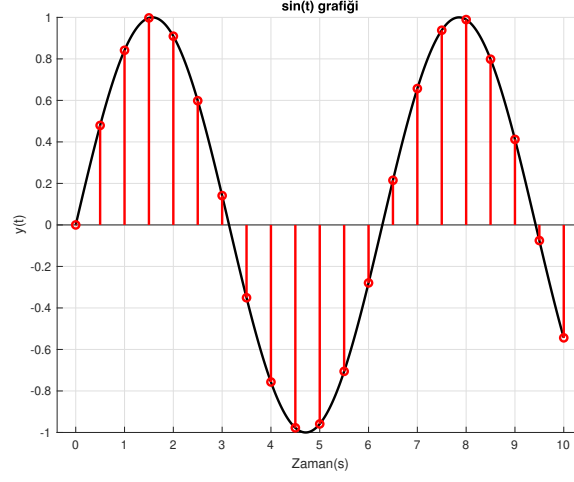
```

olarak verilmiştir. Şekil 1.1 ile elde edilen grafik verilmiştir.

- 4.

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6} \tag{1.21}$$

ifadesini basit kesir toplamına çeviriniz.



Şekil 1.1: $\sin(t)$ sürekli zaman ve ayrık zaman karşılaştırması

```
import sympy as sym
s=sym.Symbol('s')
Gs=1/(s**3+4*s**2+5*s+6)
print(sym.apart(Gs))
```

5. $\int_{t=0}^{\infty} te^{-st} dt$ ifadesini hesaplayınız.

```
import sympy as sym
t, s = sym.symbols('t s', real=True, positive=True)
integral = sym.integrate(t * sym.exp(-s * t), (t, 0, sym.oo))
print(integral)
```

Bölüm 2

Ayrıklaştırma

Türevin geometrik yorumu

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (2.1)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &\approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{(k+1)T - kT} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} \end{aligned} \quad (2.2)$$

elde edilir. Ayrık bir sinyalin türevi ardışık değerler farkının örnekleme zamanına oranı ile hesaplanabilmektedir. Örneğin, $y(kT) = \sin(kT)$ ve $T = 0.1$ olmak üzere

$$\frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} = 10(\sin((k+1)0.1) - \sin(0.1k)) \quad (2.3)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \{10 \sin(0.1), 10(\sin(0.2) - \sin(0.1)), 10(\sin(0.3) - \sin(0.2)), \dots\} \\ \{0.9983, 0.9884, 0.9685, \dots\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

elde edilir. $y(kT) = \sin(kT)$ sinyalinin türevinin $\frac{d\sin(t)}{dt} = \cos(t)$ olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned} \{\cos(0.1), \cos(0.2), \cos(0.3), \dots\} \\ \{0.9950, 0.9801, 0.9553, \dots\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

elde edilir ve ayrık türev ile benzer değerler olduğu görülmektedir. Bu yaklaşıklığın türeve yakınsaması için örnekleme zamanı T daha küçük seçilmelidir.

$$\frac{dq(t)}{dt} = x \quad (2.6)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= x \\ dq(t) &= xdt \\ \int dq(t) &= \int xdt \\ q(t) &= \int xdt \end{aligned} \quad (2.7)$$

elde edilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta q}{\Delta t} &= x \\ \frac{q((k+1)T) - q(kT)}{(k+1)T - kT} &= x \\ \frac{q((k+1)T) - q(kT)}{T} &= x \\ q((k+1)T) - q(kT) &= xT \\ q((k+1)T) &= q(kT) + xT \end{aligned} \quad (2.8)$$

ifadesi bulunur. Ayrık zamanda integral birikimli toplama karşılık gelmektedir. Bu karşılıklar Zero Order Hold (ZOH) ile elde edilmiştir. ZOH örnekleme zamanı boyunca değerlerin sabit olduğu varsayımına dayanmaktadır. Bu durum

$$x(t) = x(kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (2.9)$$

ile ifade edilebilir. ZOH için transfer fonksiyonu elde etmek amacıyla girişe $\delta(t)$ birim darbe fonksiyonu uygulanırsa çıkışında $u(t) - u(t-T)$ elde edilir. Bu durumda S tanımı bölgesinde çıkış ifadesi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t) - u(t-T)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-T)\} \\ &= \mathcal{L}\{u(t)\} - e^{-sT} \mathcal{L}\{u(t)\} \\ &= \frac{1}{s} - e^{-sT} \frac{1}{s} \\ &= (1 - e^{-sT}) \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (2.10)$$

şeklindedir. ZOH transfer fonksiyonu ile bir $G(s)$ sistemi birlikte Z dönüşümü yapılmalıdır. Örneğin,

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (2.11)$$

sistemi ayrıklaştırılmak istensin. Bu durumda $G_{ZOH}(s)G(s)$ ayrıklaştırılmalıdır. Bu sebeple,

$$L(s) = G_{ZOH}(s)G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s(s+1)} \quad (2.12)$$

ifadesi Z tanım bölgesine

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{L(s)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s(s+1)}\right\} \\ &= \mathcal{Z}\{1 - e^{-sT}\}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\ &= (1 - z^{-1})\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right) \\ &= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{z-1}{z-e^{-1}}\right) \\ &= \frac{1 - e^{-1}}{z - e^{-1}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

olarak dönüştürülür.

First Order Hold(FOH) yöntemi ise

$$x(t) = x(kT) + \frac{t - kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı $t = kT$ için $x(kT)$, $t = (k+0.5)T$ için

$$\begin{aligned} x(t) &= x(kT) + \frac{t - kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \\ &= x(kT) + \frac{kT + 0.5T - kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)) \\ &= x(kT) + 0.5(x((k+1)T) - x(kT)) \\ &= x(kT) + 0.5x((k+1)T) - 0.5x(kT) \\ &= 0.5x((k+1)T) + 0.5x(kT) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ve $t = (k + 1)T$ için ise

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(kT) + \frac{t - kT}{T}(x((k + 1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k + 1)T \\
 x(t) &= x(kT) + \frac{(k + 1)T - kT}{T}(x((k + 1)T) - x(kT)) \\
 x(t) &= x(kT) + x((k + 1)T) - x(kT) \\
 x(t) &= x((k + 1)T)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

olarak elde edilir. Görüldüğü üzere ZOH yönteminin aksine T süre boyunca değerler değişmektedir. FOH için birim darbe yanıtı

$$x(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{T} & 0 \leq t \leq \frac{1}{T} \\ -t + \frac{1}{T} & \frac{1}{T} \leq t \leq \frac{2}{T} \\ 0 & t > \frac{2}{T} \end{cases} \tag{2.17}$$

ve işlem kolaylığı açısından $T = 1$ alınırsa

$$x(t) = (1 - t)u(2 - t) + 2tu(1 - t) \tag{2.18}$$

şeklindedir. S dönüşümü sonucu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{(1 - t)u(2 - t)\} + \mathcal{L}\{2tu(1 - t)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 - t)(1 - u(t - 2))\} + \mathcal{L}\{2t(1 - u(t - 1))\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 - t)\} - \mathcal{L}\{(1 - t)u(t - 2)\} + \mathcal{L}\{2t\} - \mathcal{L}\{2tu(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 1)u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{2tu(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 1)u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{(2t - 2 + 2)u(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 1 - 1 + 1)u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{(2t - 2 + 2)u(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 2)u(t - 2) + u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{(2t - 2)u(t - 1) + 2u(t - 1)\} \\
 &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s} \\
 &= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} + \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} \\
 &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s} + \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \\
 &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2}(s + 1)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

elde edilir. FOH için transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} G_{FOH}(s) &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{T^2 s^2} \frac{Ts + 1}{T} \\ &= G_{ZOH}^2(s) \frac{Ts + 1}{T} \end{aligned} \quad (2.20)$$

şeklindedir. Örneğin daha önce Denklem 2.11 ile verilen sistemi FOH yöntemi ve yine aynı örnekleme zamanı ile ayıklaştırmak gerekirse

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{1}{s+1} G_{FOH}(s) \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{(1 - e^{-s})^2}{T^2 s^2} \frac{Ts + 1}{T} \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} (s+1) \\ &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

ifadesi Z dönüşümüne tabi tutulmalıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \right\} \\ &= \mathcal{Z} \{ (1 - e^{-s})^2 \} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} \\ &= (1 - z^{-1})^2 \frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 \frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (2.22)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere, birim gecikme elde edilmiştir.

1. $x(t) = \sin(t)$ fonksiyonunun türevini hesaplayıp çiziniz.

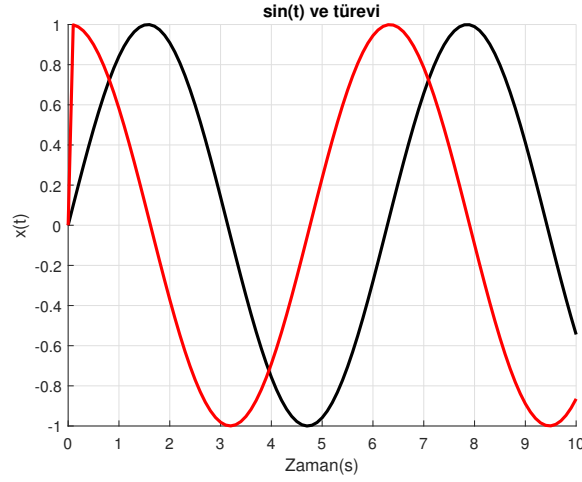
```
T=0.1
t=np.arange(0,10+1,T)
xt=np.sin(t)
dxt=np.zeros(t.shape)
for i in range(1,len(t)):
```

$$dxt[i] = (xt[i] - xt[i-1]) / T$$

```
plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("sin(t)")
plt.title("Sinus ve türevi")

plt.plot(t,xt,'k')
plt.plot(t,dxt,'r')
plt.show()
```

Şekil 2.1'de $\sin(t)$ ve türevi gösterilmiştir.



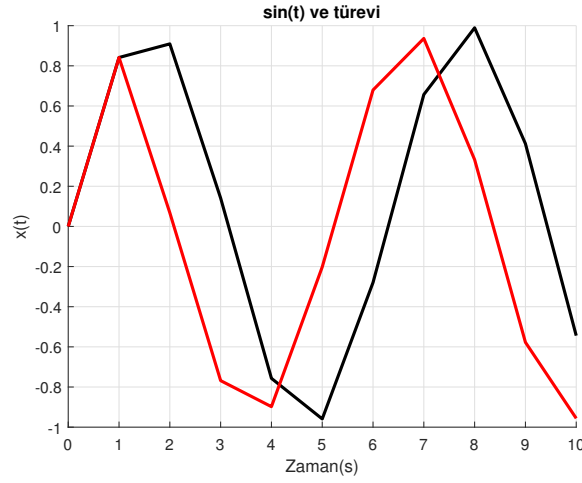
Şekil 2.1: $\sin(t)$ ve türevinin karşılaştırılması ($T = 0.1$)

Şekil 2.2'de daha düşük bir örnekleme zamanı seçilmiştir ve bu sebeple gerek sinyal gerekse türevi düşük kalitededir.

2. $x(t) = e^{-t}$ sinyalinin integralini hesaplayınız ve çizdiriniz.

```
T=0.1
t=np.arange(0,10+1,T)
xt=np.exp(-t)
q=np.zeros(np.size(t))
for i in range(1,len(t)):
    q[i]=q[i-1]+T*xt[i-1]

plt.grid('minor')
```



Şekil 2.2: $\sin(t)$ ve türevinin karşılaştırılması ($T = 1$)

```
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("e^(-t)")
plt.title("e^(-t) ve integrali")

plt.plot(t,xt,'k')
plt.plot(t,q,'r')
plt.show()
```

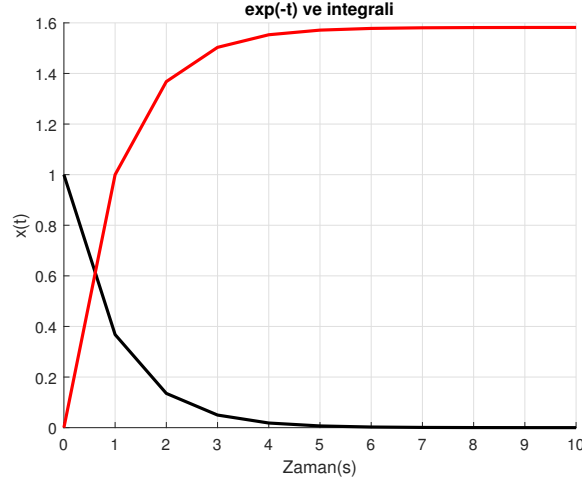
Şekil 2.3'de integral çizdirilmiştir.

3. ZOH yöntemini kullanarak $T = 1$ olmak üzere $x(kT) = 1$ sinyalinin veri tutucunu çıkışını çizdiriniz.

```
T=1
t=np.arange(0,3+1,T)
xt=np.array([1,2,-1,3])

T=0.01
tnew=np.arange(0,3+1,T)
yt=np.zeros(tnew.shape)
for i in range(0,len(t)):
    for j in range(0,100):
        yt[100*i+j]=xt[i]

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
```



Şekil 2.3: $\sin(t)$ ve integralinin karşılaştırılması ($T = 1$)

```
plt.ylabel("Veri tutucu")
plt.title("ZOH ornegi")

plt.stem(t,xt,'k')
plt.plot(tnew,yt,'r')
plt.show()
```

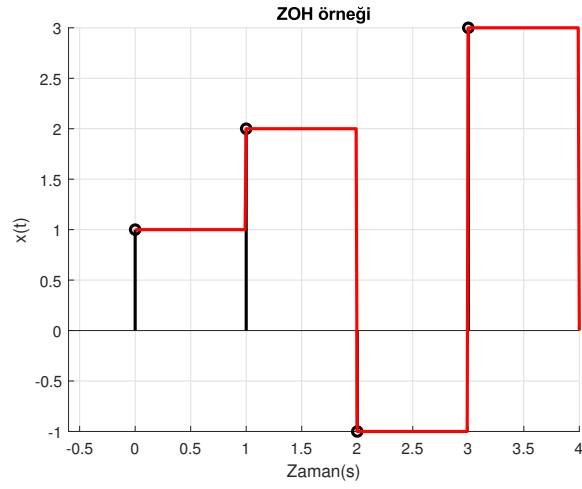
Şekil 2.4'de ZOH işleminin sonucu gösterilmiştir.

4. FOH yöntemini kullanarak $T = 1$ olmak üzere $x(kT) = 1$ sinyalini veri tutucunu çıkışını çizdiriniz.

```
T=1
t=np.arange(0,3+1,T)
xt=np.array([1,2,-1,3])

T=0.01
tnew=np.arange(0,3+1,T)
yt=np.zeros(tnew.shape)
for i in range(0,len(t)-1):
    for j in range(0,100):
        yt[100*i+j]=xt[i]+0.01*j*(xt[i+1]-xt[i])

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("Veri tutucu")
```

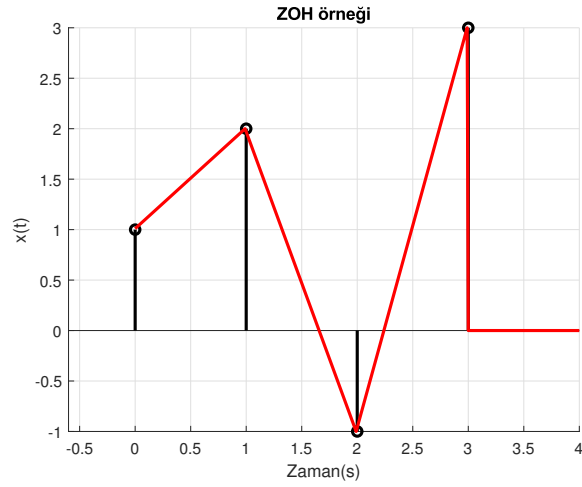


Şekil 2.4: ZOH örneği

```
plt.title("FOH örneği")

plt.stem(t,xt,'k')
plt.plot(tnew,yt,'r')
plt.show()
```

Şekil 2.5'de FOH işleminin sonucu gösterilmiştir.



Şekil 2.5: FOH örneği

5. Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad (2.23)$$

ile verilen sistemini ZOH yöntemini kullanarak Z tanım bölgesindeki ifadesini elde ediniz. $T = 0.1$ için basamak yanıtını karşılaştırınız.

$$\begin{aligned}
 L(s) &= G_{ZOH}(s)G(s) \\
 &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{s+2} \\
 &= (1 - e^{-sT}) \left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)} \right) \\
 L(z) &= \frac{1}{2} \mathcal{Z} \{1 - e^{-sT}\} \mathcal{Z} \left\{ \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+2)} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} (1 - z^{-1}) \left(\mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{(s+2)} \right\} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (1 - z^{-1}) \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-2T}} \right) \\
 &= \left(\frac{z-1}{2z} \right) \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-2T}} \right) \\
 &= 1 - \frac{(z-1)}{2z - 2e^{-2T}} \\
 &= \frac{z - e^{-2T} - (z-1)}{2z - 2e^{-2T}} \\
 &= \frac{1 - e^{-2T}}{2z - 2e^{-2T}}
 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$T = 0.1$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 L(z) &= 0.5 \frac{1 - e^{-0.2}}{z - e^{-0.2}} \\
 &= 0.5 \frac{1 - e^{-0.2}}{z - e^{-0.2}} \\
 &= \frac{0.09}{z - 0.82}
 \end{aligned} \quad (2.25)$$

elde edilir.

T=0.1
Gs=`control.tf(1,[1,2])`

```

t, y = control.step_response(Gs)
plt.plot(t,y,'k')
Gz=control.tf(0.09,[1,-0.82],dt=T)
t, y = control.step_response(Gz)
plt.stem(t,y,'r')
plt.show()

```

6. Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad (2.26)$$

ile verilen sistemini FOH yöntemini kullanarak Z tanım bölgesindeki ifadesini elde ediniz. $T = 0.1$ için basamak yanıtını karşılaştırmız.

$$\begin{aligned}
L(s) &= G_{FOH}(s)G(s) \\
L(s) &= G_{ZOH}^2(s) \frac{Ts+1}{T} G(s) \\
&= \frac{(1-e^{-sT})^2}{s^2} \frac{Ts+1}{Ts+2T} \\
&= (1-e^{-sT})^2 \frac{Ts+1}{Ts^2(s+2)}
\end{aligned} \quad (2.27)$$

elde edilir. Kesir ayırma işlemi için

$$\begin{aligned}
\frac{Ts+1}{s^2(s+2)} &= \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \\
\frac{Ts+1}{s^2(s+2)} &= \frac{(As+B)(s+2) + Cs^2}{s^2(s+2)} \\
Ts+1 &= (As+B)(s+2) + Cs^2 \\
Ts+1 &= As(s+2) + B(s+2) + Cs^2 \\
Ts+1 &= As^2 + Cs^2 + 2As + Bs + 2B \\
Ts+1 &= (A+C)s^2 + (2A+B)s + 2B
\end{aligned} \quad (2.28)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
A+C &= 0 \\
2A+B &= T \\
2B &= 1
\end{aligned} \quad (2.29)$$

çözülürse $B = 0.5$, $A = 0.5T - 0.25$ ve $B = -0.5T + 0.25$ hesaplanır. Yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{Ts + 1}{s^2(s + 2)} &= \frac{(0.5T - 0.25)s + 0.5}{s^2} + \frac{-0.5T + 0.25}{s + 2} \\ &= \frac{(0.5T - 0.25)}{s} + \frac{0.5}{s^2} + \frac{-0.5T + 0.25}{s + 2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

ve

$$\begin{aligned} &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{(0.5T - 0.25)}{s} + \frac{0.5}{s^2} + \frac{-0.5T + 0.25}{s + 2} \right\} \\ &= (0.5T - 0.25) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + 0.5 \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} - (0.5T - 0.25) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s + 2} \right\} \quad (2.31) \\ &= (0.5T - 0.25) \frac{z}{z - 1} + 0.5 \frac{Tz}{(z - 1)^2} - (0.5T - 0.25) \frac{z}{z - e^{-2T}} \end{aligned}$$

haliyle

$$= (1 - e^{-sT})^2 \left(\frac{(0.5T - 0.25)}{T} \frac{z}{z - 1} + \frac{0.5}{T} \frac{Tz}{(z - 1)^2} - \frac{(0.5T - 0.25)}{T} \frac{z}{z - e^{-2T}} \right) \quad (2.32)$$

Bölüm 3

Fark Denklemleri

Örnek sistemin ZOH yöntemi ile elde edilen ve Denklem 2.13 ile verilen sistem için

$$\begin{aligned} G_{ZOH}(z) &= \frac{1 - e^{-1}}{z - e^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}}{1 - e^{-1}z^{-1}} \\ \frac{y(z)}{u(z)} &= \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}}{1 - e^{-1}z^{-1}} \\ y(z)(1 - e^{-1}z^{-1}) &= \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}u(z)}{1 - e^{-1}z^{-1}} \\ y(z) - y(z - 1)e^{-1} &= (1 - e^{-1})u(z - 1) \\ y(z) &= y(z - 1)e^{-1} + (1 - e^{-1})u(z - 1) \\ y(z) &= 0.3679y(z - 1) + 0.6321u(z - 1) \end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir. Z tanım bölgesinde tanımlı transfer fonksiyonundan fark denklemine geçiş örnektir. Fark denklemleri programlama dilleri ile kolaylıkla gerçekleştirilebilmektedir. Benzer şekilde FOH yöntemi ile elde edilen ve Denklem 2.22 ile verilen ifade için

$$\begin{aligned} G_{FOH}(z) &= \frac{1}{z} \\ \frac{y(z)}{u(z)} &= z^{-1} \\ y(z) &= u(z - 1) \end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. Yay-Kütle-Damper sistemi için dinamikleri ifade eden denklem

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \tag{3.3}$$

olarak verilmiştir. Bu diferansiyel denklem S tanım bölgesine dönüştürülürse

$$\begin{aligned}
 ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) &= U(s) \\
 (ms^2 + bs + k)X(s) &= U(s) \\
 \frac{X(s)}{U(s)} &= \frac{1}{ms^2 + bs + k}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Denklem 3.3 ile verilen sistem için

$$\begin{aligned}
 m\frac{\Delta^2x}{(\Delta t)^2} + b\frac{\Delta x}{\Delta t} + kx(kT) &= u(kT) \\
 m\frac{\Delta(x(kT) - x((k-1)T))}{kT - (k-1)T} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{kT - (k-1)T} + kx(kT) &= u(kT) \\
 m\frac{\Delta x(kT) - \Delta x((k-1)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\
 m\frac{x(kT) - 2x((k-1)T) + x((k-2)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\
 m\frac{x(kT) - 2x((k-1)T) + x((k-2)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\
 (m + bT + kT^2)x(kT) &= (2m + bT)x((k-1)T) - mx((k-2)T) + T^2u(kT) \\
 x(kT) &= \frac{2m + bT}{m + bT + kT^2}x((k-1)T) - \frac{m}{m + bT + kT^2}x((k-2)T) + \frac{T^2}{m + bT + kT^2}u(kT)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Örnek olması için $m = 1 \text{ kg}$, $b = 1 \text{ Ns/m}$, $k = 1 \text{ Nm}$ ve $T = 0.1$ olmak üzere fark denklemi

$$x(kT) = 1.8919x((k-1)T) - 0.9009x((k-2)T) + 0.009009u(kT) \tag{3.6}$$

olarak elde edilir. Transfer fonksiyonundan yola çıkarak $\zeta = b\sqrt{m}/(2m\sqrt{k})$, $w_n = \sqrt{k}/\sqrt{m}$ ve $\phi = \cos^{-1}(\zeta)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-0.1s}}{s(s^2 + s + 1)} \right\} \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} \right\} \\
 &= \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}z^2 + ze^{-\zeta w_n T} \sin(w_n \sqrt{1-\zeta^2}T - \phi)}{z^2 - 2ze^{-\zeta w_n T} \cos(w_n \sqrt{1-\zeta^2}T) + e^{-2\zeta w_n T}} \right) \quad (3.7) \\
 &= \frac{0.004833z^3 - 0.0001585z^2 - 0.004675z}{z^4 - 2.895z^3 + 2.8z^2 - 0.9048z} \\
 &= \frac{0.004833z + 0.004675}{z^2 - 1.895z + 0.9048}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

1. Yay-kütle-damper sisteminin çıkış işaretini fark denklemlerini kullanarak elde ediniz.

```

m=1
b=1
k=1
T=0.1
fac1=(2*m+b*T)/(m+b*T+k*T**2)
fac2=-m/(m+b*T+k*T**2)
fac3=T**2/(m+b*T+k*T**2)
tvec=np.arange(0,10+1,T)
xt=np.zeros(tvec.shape)
ut=np.ones(tvec.shape)
for i in range(0,len(tvec)):
    if i==0:
        xt[i]=fac1*0+fac2*0+fac3*0
    elif i==1:
        xt[i]=fac1*xt[i-1]+fac2*0+fac3*ut[i-1]
    else:
        xt[i]=fac1*xt[i-1]+fac2*xt[i-2]+fac3*ut[i-1]

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("x(t)")
plt.title("Yay-kutle-damper sistem yaniti")

Gz=control.tf(1,np.array([m,b,k]))

```

```

tc, yc=control.step_response(Gz)
plt.plot(tc,yc,'k')
plt.stem(tvec,xt,'b')
plt.show()

```



Şekil 3.1: Yay-kütle-damper sisteminin çıkış işareti

2. Yay-kütle-damper sisteminin çıkış işaretini ayrık transfer fonksiyonu kullanarak elde ediniz.

```

m=1
b=1
k=1

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("x(t)")
plt.title("Yay-kutle-damper sistem yaniti")

Gz=control.tf(1,np.array([m,b,k]))
tc, yc=control.step_response(Gz)

Gz1=control.c2d(control.tf(1,np.array([m,b,k])),0.1)
tc1, yc1=control.step_response(Gz1)

Gz2=control.c2d(control.tf(1,np.array([m,b,k])),0.5)
tc2, yc2=control.step_response(Gz2)

```

```
plt.plot(tc,yc,'k')
plt.stem(tc1,yc1,'r')
plt.stem(tc2,yc2,'b')
plt.show()
```



Şekil 3.2: Yay-kütle-damper sisteminin çıkış işareti

Bölüm 4

Zaman Domeni Kriterleri

Sürekli zamanda tanımlı birinci dereceden bir transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{p}{s + p} \quad (4.1)$$

olarak verilsin. Birim basamak giriş için yanıt

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{s + p} \cdot \frac{1}{s} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + p} \right\} \\ &= 1 - e^{-pt} \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde hesaplanır. e^{-t} fonksiyonunun aldığı değerler için Çizelge 4.1 verilmiştir.

Görüldüğü üzere 4.1 ile verilen sistemin yanıtı p değişkeninin değerinden bağımsız olarak 1 değerine yakınsamaktadır. 1 değerini aşmamaktadır. Dolayısıyla aşım değeri %0'dır. Sürekli halde oturduğu değer %2 altı veya üstü ile tanımlanan %2'lik banda çıkmamak üzere girdiği zamana yerleşme zamanı denir. Bu tanımdan ve Çizelge 4.1'den yola çıkarak 4.1 ile verilen sistemin yerleşme zamanı $t_s = 4s$ 'dir. $p = 1$ olmaması durumunda zaman eksenini genişler veya daralır bu sebepten yerleşme zamanı

$$t_s = \frac{4}{p} \quad (4.3)$$

ile hesaplanır. İkinci dereceden bir sistem

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (4.4)$$

Çizelge 4.1: e^{-t} fonksiyonunun aldığı değerler

Zaman $t(s)$	Değer e^{-t}	$1 - e^{-t}$
1	0.3679	0.6321
2	0.1353	0.8647
3	0.0498	0.9502
4	0.0183	0.9817
5	0.0067	0.9933
6	0.0025	0.9975

ile tanımlanmaktadır. Burada ζ sönüm oranı ve w_n doğal frekans olarak adlandırılmaktadır. İkinci dereceden polinomun kökleri bulunurken faydalanan $\Delta = b^2 - 4ac$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\Delta &= (2\zeta w_n)^2 - 4w_n^2 \\
&= 4\zeta^2 w_n^2 - 4w_n^2 \\
&= 4w_n^2(\zeta^2 - 1)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir ve çözümün tipini belirlemek için

$$\begin{cases} \text{gerçel kök} & \Delta > 0 & \zeta > 1 \\ \text{çakışık kök} & \Delta = 0 & \zeta = 1 \\ \text{karmaşık kök} & \Delta < 0 & 0 < \zeta < 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

kullanılabilir. $\zeta > 1$ durumunda gerçel köklü çözüm olmasından dolayı sistem transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{p_1 p_2}{(s + p_1)(s + p_2)} \tag{4.7}$$

olarak güncellenebilir. $p_1 \gg p_2$ durumunda p_2 , $p_2 \gg p_1$ durumunda p_1 yanıtın hızını ve davranışını belirler. $\zeta = 1$ olması durumunda yanıt birinci dereceden bir sisteme göre daha yavaş olmaktadır. Haricinde, $0 < \zeta < 1$ durumunda

$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n}, \quad \text{Aşım} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{4.8}$$

ile hesaplanmaktadır. İkinci dereceden sistem yanıtı,

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta w_n t} \left[\cos(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t) \right] \tag{4.9}$$

ile ifade edilmektedir. Sinüzoidal terimler salınımlı olduklarından sadece $e^{-\zeta w_n t}$ terimi yerleşme zamanının hesabı için önemlidir ve birinci dereceden sistem ile aynı ifade kullanılmaktadır. Aşım için

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= 0 \\ \sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*)\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} - \sqrt{1-\zeta^2}w_n\right) &= 0 \\ \sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) &= 0 \\ \sqrt{1-\zeta^2}w_n t^* &= \pi \\ t^* &= \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}w_n}\end{aligned}\tag{4.10}$$

yanıtta yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}M_p &= e^{-\zeta w_n t^*} \left[\cos(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) \right] \\ &= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \left[\cos(\pi) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi) \right] \\ &= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\end{aligned}\tag{4.11}$$

elde edilir. Verilen yerleşme zamanı ve aşım formülleri kullanılarak sistem davranışı şekillendirilebilmektedir. Örneğin $t_s = 1$ ve aşım %10 olacak şekilde sistem transfer fonksiyonu seçilirse

$$\begin{aligned}\zeta &= -\frac{\log(0.1)}{\sqrt{\pi^2 + \log(0.1)^2}} = 0.591 \\ w_n &= \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{0.591} = 6.7682\end{aligned}\tag{4.12}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$G(s) = \frac{45.81}{s^2 + 8s + 45.81}\tag{4.13}$$

transfer fonksiyonu elde edilir.

1.

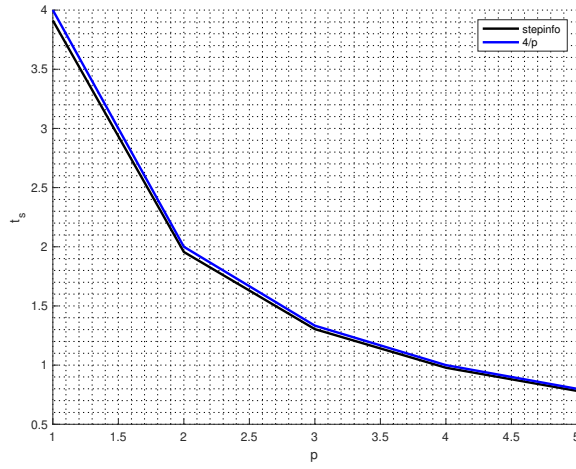
$$G(s) = \frac{p}{s+p}\tag{4.14}$$

ve $1 \leq p \leq 5$ olmak üzere yerleşme zamanı ile sistem kutubu arasındaki ilişkiyi elde ediniz.

```

pvec=1:1:5;
tsvec=zeros(size(pvec));
for i=1:length(pvec)
    pval=pvec(i);
    Gs=tf(pval,[1 pval]);
    info=stepinfo(Gs);
    tsvec(i)=info.SettlingTime;
end

```



Şekil 4.1: Denklem 4.14 ile verilen sistem için yerleşme zamanı

2. $0 < \zeta \leq 1$ ve $w_n = 2$ olmak üzere

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (4.15)$$

sisteminin yerleşme zamanının formülünü elde ediniz.

```

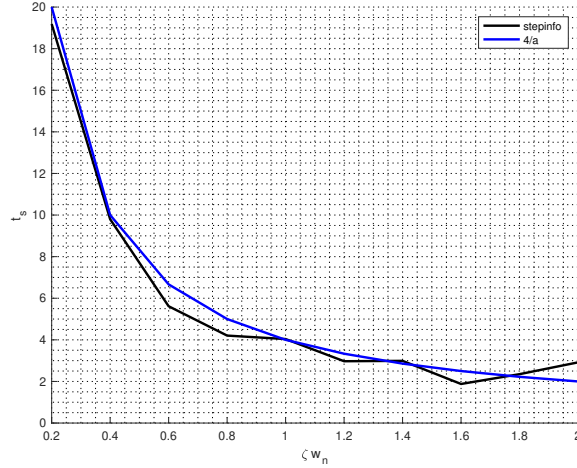
wn=2;
zetavec=0.1:0.1:1;
tsvec=zeros(size(zetavec));
for i=1:length(zetavec)
    zetaval=zetavec(i);
    Gs=tf(wn^2,[1 2*zetaval*wn wn^2]);

```

```

info=stepinfo(Gs);
tsvec(i)=info.SettlingTime;
end

```



Şekil 4.2: Denklem 4.15 ile verilen sistem için yerleşme zamanı

3. Denklem 4.15 sistemi için $1 \leq w_n \leq 5$ ve $\zeta = 0.6$ değerleri için yerleşme zamanı formülünü elde ediniz.

```

wnvec=1:5;
zeta=0.6;
tsvec=zeros(size(wnvec));
for i=1:length(wnvec)
    wnval=wnvec(i);
    Gs=tf(wn^2,[1 2*zeta*wnval wnval^2]);
    info=stepinfo(Gs);
    tsvec(i)=info.SettlingTime;
end

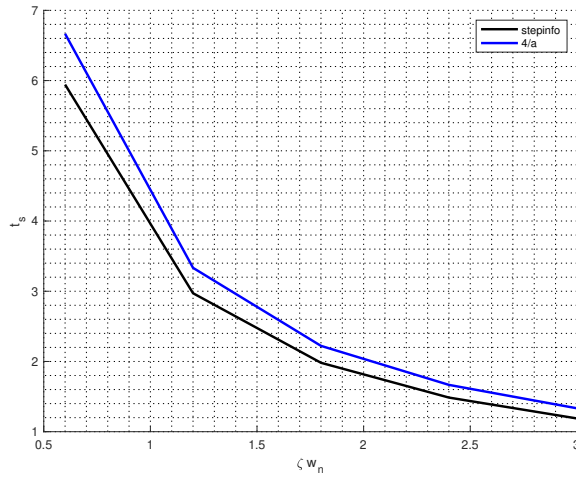
```

4. Denklem 4.15 sistemi için $0 < \zeta < 1$ ve $w_n = 2$ değerleri için aşımın ifadesini elde ediniz.

```

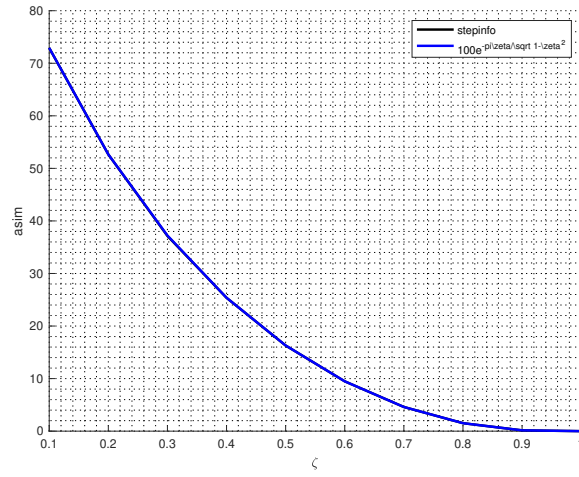
wn=2;
zetavec=0.1:0.1:1;

```



Şekil 4.3: Denklem 4.15 ile verilen sistem için yerleşme zamanı

```
osvec=zeros(size(zetavec));
for i=1:length(zetavec)
    zetaval=zetavec(i);
    Gs=tf(wn^2,[1 2*zetaval*wn wn^2]);
    info=stepinfo(Gs);
    osvec(i)=info.Overshoot;
end
```



Şekil 4.4: Denklem 4.15 ile verilen sistem için aşım

Bölüm 5

Z Tanım Bölgesinde Kök Eğrisi

Z tanım bölgesinde bir transfer fonksiyonu $T = 0.2$ olmak üzere

$$G(z) = \frac{1}{z^3 + 0.4z^2 - 0.37z - 0.04} \quad (5.1)$$

olarak verilmiştir. P kontrolör ile kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{kG(z)}{1 + kG(z)} \\ T(z) &= \frac{\frac{k}{z^3 + 0.4z^2 - 0.37z - 0.04}}{1 + \frac{k}{z^3 + 0.4z^2 - 0.37z - 0.04}} \\ T(z) &= \frac{k}{z^3 + 0.4z^2 - 0.37z - 0.04 + k} \end{aligned} \quad (5.2)$$

olarak hesaplanır. Karakteristik polinomunda k değıştikçe köklerin aldığı değeri Çizelge 5.1 ile verilmiştir. Her kutbun kendi hareketinin görselleştirildiği çizime **Kök Eğrisi** denir. Sisteme ait kök eğrisi Şekil 5.3 ile verilmiştir.

Şekil 5.3 ile verilen ayırık noktalar birleştirildiğinde Şekil 5.4 oluşmaktadır.

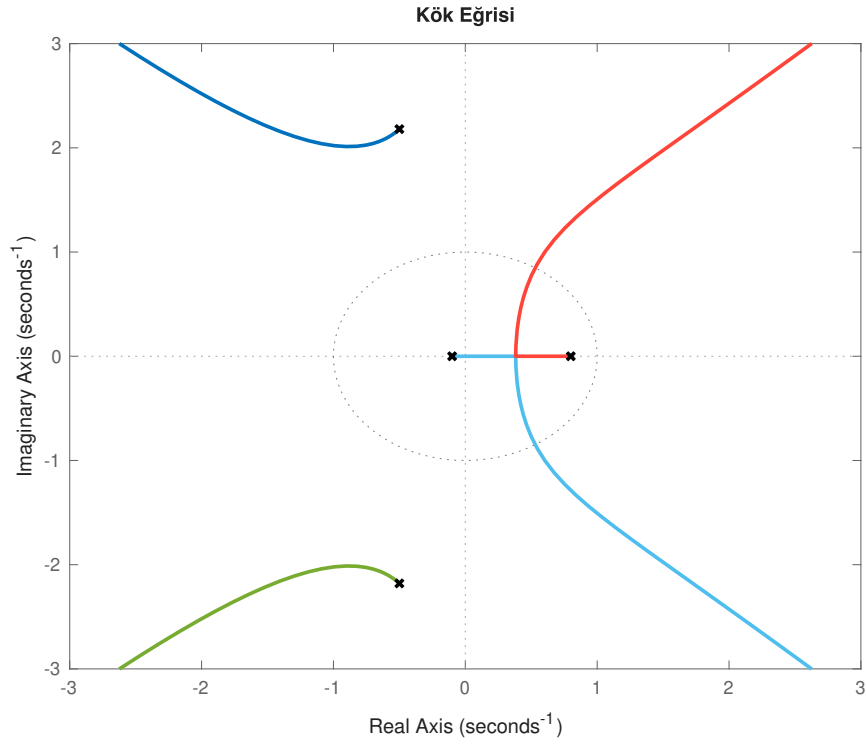
S tanım bölgesinde kararlılık sınırı $s = jw$ ile elde edilmektedir ve bu durumda $\zeta = 0$ 'dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{-\zeta w_n t} \left[\cos(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t) \right] \\ &= 1 - \cos(w_n t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

elde edilmektedir. Görüldüğü üzere sistem yanıtı salınımlıdır. Girişe uygulanan birim

Çizelge 5.1: k 'nın değişimine göre polinomun köklerinin yada sistem kutuplarının değişimi

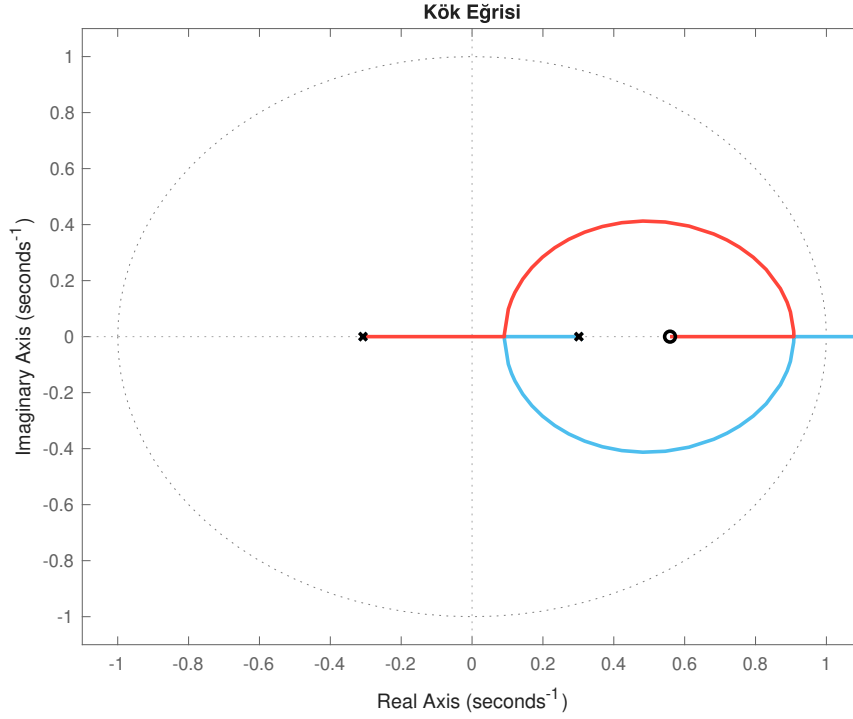
k	z_1	z_2	z_3
0.1	-0.8909	$0.2455 + 0.0843i$	$0.2455 - 0.0843i$
0.2	-0.9594	$0.2797 + 0.2975i$	$0.2797 - 0.2975i$
0.3	-1.0160	$0.3080 + 0.4013i$	$0.3080 - 0.4013i$
0.4	-1.0649	$0.3325 + 0.4770i$	$0.3325 - 0.4770i$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots



Şekil 5.1: Sisteme ait kök eğrisi

basamak sinyaline karşın sistem salınım yapmakta ve giriş sinyali değerine yakınsamamaktadır. Z tanım bölgesine $z = e^{sT}$ ile geçiş yapılrsa

$$\begin{aligned}
 z &= e^{iwT} \\
 z &= e^{i\theta} \\
 z &= 1/\underline{\theta}
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$



Şekil 5.2: Sisteme ait kök eğrisi

elde edilir. Dikkat edilirse açı değişmekte fakat genlik sabittir ve bu ifade birim çemberi tanımlamaktadır. S tanım bölgesinde kutup z tanım bölgesinde

$$\begin{aligned}
 z &= e^{(-\sigma \pm iw)T} \\
 z &= e^{-\sigma T} e^{\pm iwT} \\
 z &= e^{-\sigma T} \angle \pm wT
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

şeklinde yer alacaktır. Burada σ değeri yarıçapı belirlemektedir. S tanım bölgesinde baskın kutuplar z tanım bölgesinde birim çembere yakın kutuplar, baskın olmayan kutuplar ise birim çemberin merkezine yakın kutuplardır.

1. Transfer fonksiyonu

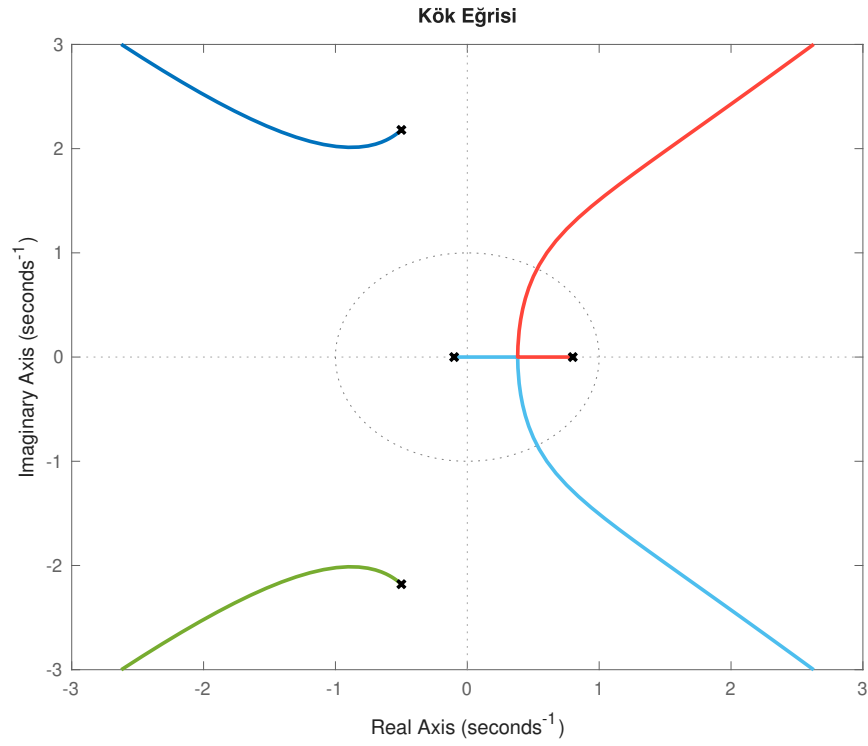
$$G(z) = \frac{1}{z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 3.58z - 0.4} \tag{5.6}$$

ile verilen sisteme ait kök eğrisini çiziniz.

```

T=0.2;
den=[1 0.3 4.22 -3.58 -0.4];
poles=roots(den);
Gz=tf(1,den,T);
figure(1);
rlocus(Gz);

```



Şekil 5.3: Denklem 5.6 ile verilen sistem için kök eğrisi

2.

$$p(z) = z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 0.4 - 3.58kz + 2k \quad (5.7)$$

ile verilen polinomu için k parametresinin değişimine göre köklerin yer değiş-

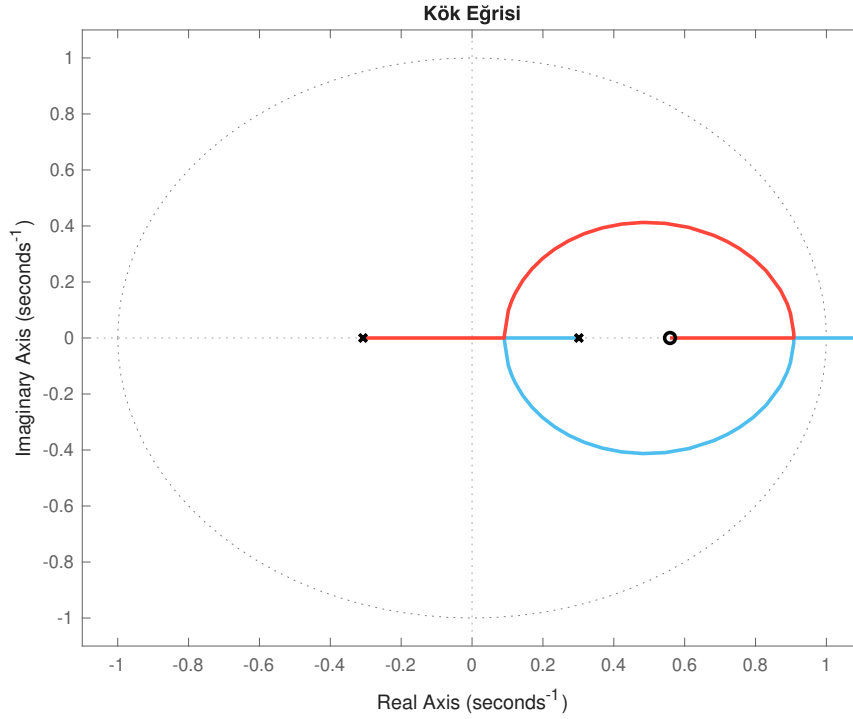
tirmesini çiziniz.

$$\begin{aligned}
 z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 0.4 - 3.58kz + 2k &= 0 \\
 (z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 0.4) + (-3.58z + 2)k &= 0 \\
 1 + k \frac{-3.58z + 2}{z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 0.4} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

ile

$$G(z) = \frac{-3.58z + 2}{z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 0.4} \tag{5.9}$$

sistemi elde edilir. Kök eğrisi ise Şekil 5.4 ile verilmiştir.



Şekil 5.4: Denklem 5.7 ile verilen sistem için kök eğrisi

3. Denklem 5.9 ile verilen sistemin gerçel ekseninde ayrılma noktası/noktalarını

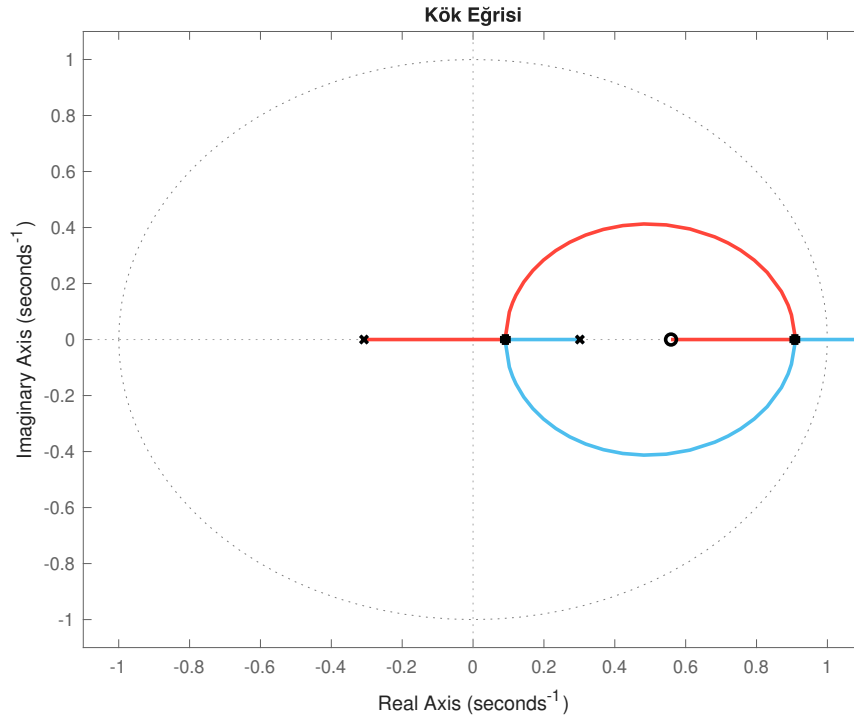
hesaplayınız. Ayrılma noktalarının hesabı

$$\begin{aligned}
z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 0.4 - 3.58kz + 2k &= 0 \\
1 + k \frac{-3.58z + 2}{z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 0.4} &= 0 \\
k &= -\frac{z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 0.4}{-3.58z + 2} \\
\frac{dk}{dz} &= \frac{d}{dz} \left(-\frac{z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 0.4}{-3.58z + 2} \right) \\
\frac{dk}{dz} &= \frac{\frac{d}{dz}(z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 0.4)(-3.58z + 2)}{(-3.58z + 2)^2} \\
&\quad - \frac{\frac{d}{dz}(-3.58z + 2)(z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 0.4)}{(-3.58z + 2)^2} \\
\frac{dk}{dz} &= \frac{(4z^3 + 0.9z^2 + 8.44z)(-3.58z + 2) - 3.58(z^4 + 0.3z^3 + 4.22z^2 - 0.4)}{(-3.58z + 2)^2} \\
\frac{dk}{dz} &= \frac{-17.9z^4 + 3.704z^3 - 43.52z^2 + 16.88z + 1.432}{(-3.58z + 2)^2} \\
\frac{dk}{dz} &= \frac{(z - 0.0912)(z - 0.9082)(z + 0.2272 + 1.2485i)(z + 0.2272 - 1.2485i)}{(-3.58z + 2)^2}
\end{aligned}$$

ile verilmiştir ve çözüm

$$z = 0.0912, 0.9082, -0.2272 - 1.2485i, -0.2272 + 1.2485i \quad (5.10)$$

şeklindedir. Sanal kısmı olan çözümler gerçel ekseninde olmadığından $z = 0.0912$ ve 0.9082 olmalıdır. Şekil 5.5 ile verilen kök eğrisinde ayrılma noktaları işaretlenmiştir. Görüldüğü üzere ayrılma noktaları kutupların reel ekseninde karşılaştığı ve karşılaştıktan sonra sanal bileşene sahip olarak hareket ettikleri, kutup çiftine dönüştükleri, noktalardır.



Şekil 5.5: Denklem 5.9 ile verilen sistem için kök eğrisi ve ayrılma noktaları

Bölüm 6

Z Tanım Bölgesinde Zaman Tanım Bölgesi İsterler

Zaman tanım bölgesi isterleri s tanım bölgesinde tanımlanmıştır ve z tanım bölgesine

$$z = e^{sT} \quad (6.1)$$

ile geçiş yapılmaktadır. Bu durumda s tanım bölgesinde isterlerin karşılık düştüğü konumlar bir dönüşüm sonucu z tanım bölgesinde konumlanmaktadır. S tanım bölgesinde bir kutup

$$s = -\sigma + w_d i \quad (6.2)$$

olmak üzere z tanım bölgesinde

$$\begin{aligned} z &= e^{-\sigma T + w_d T i} \\ z &= e^{-\sigma T} e^{w_d T i} \\ z &= e^{-\sigma T} \underline{e^{w_d T i}} \\ z &= e^{-\sigma T} \cos w_d T + e^{-\sigma T} \sin w_d T i \\ z &= e^{-\zeta w_n T} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n T) + e^{-\zeta w_n T} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n T) i \end{aligned} \quad (6.3)$$

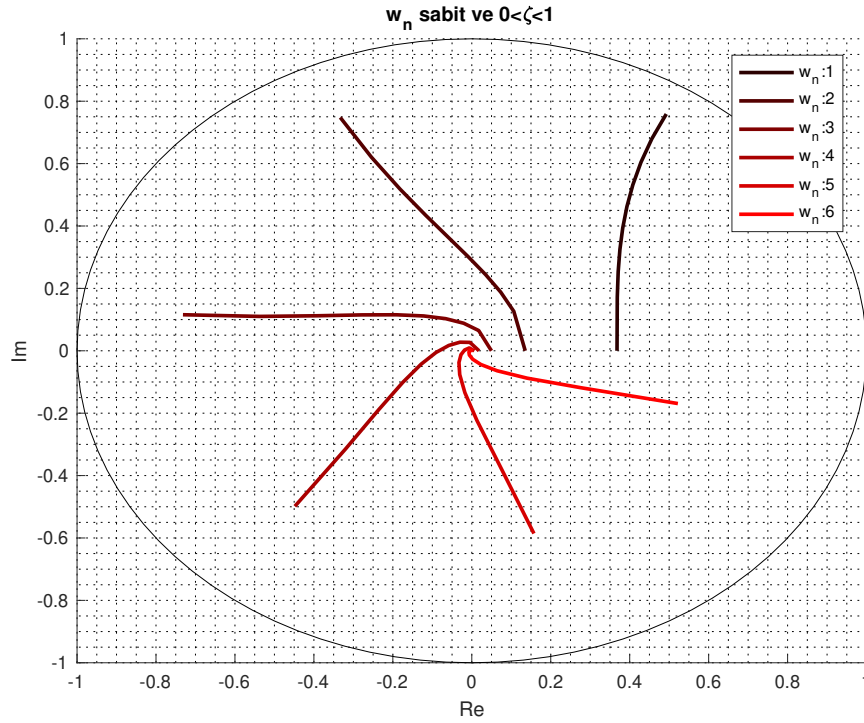
olarak elde edilir. Görüldüğü üzere s tanım bölgesinden z tanım bölgesine geçiş durumunda kutupsal koordinatlar elde edilmektedir. İncelemelerin basit olması amacıyla örnekleme zamanı $T = 1$ olsun. $w_n = 1$ olmak üzere

$$z = e^{-\zeta} \underline{e^{j\sqrt{1 - \zeta^2}}} \quad (6.4)$$

elde edilir. ζ arttıkça yarıçap küçülmektedir ve açı azalmaktadır. Çizelge 6.1 ile verilene göre yarıçapın küçüldüğü ve açının azaldığı görülmektedir.

Çizelge 6.1: $w_n = 1$ için yarıçap ve açının değişimi

Yarıçap	Açı
0.9048	57.0086°
0.8187	56.1382°
0.7408	54.6567°
0.6703	52.5124°
0.6065	49.6196°
0.5488	45.8366°
0.4966	40.9174°
0.4493	34.3775°
0.4066	24.9747°
0.3679	0°

Şekil 6.1: ζ değişiminin z tanım bölgesindeki izdüşümü

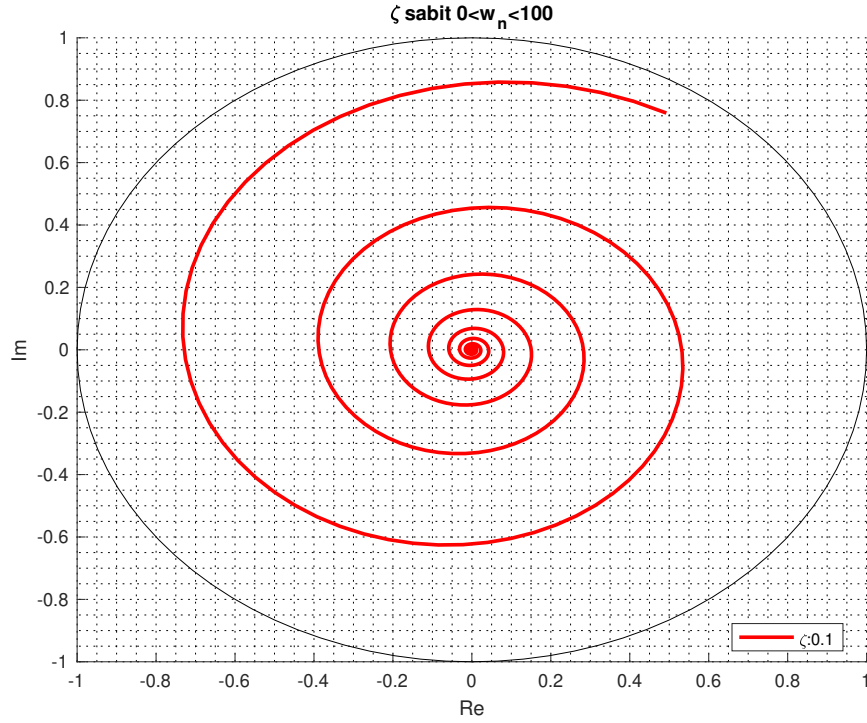
$\zeta = 0.1$ olmak üzere

$$z = e^{-0.1w_n} / 0.995w_n \quad (6.5)$$

elde edilir. w_n arttıkça yarıçap küçülür ve açı artar.

Çizelge 6.2: $\zeta = 0.1$ için yarıçap ve açının değişimi

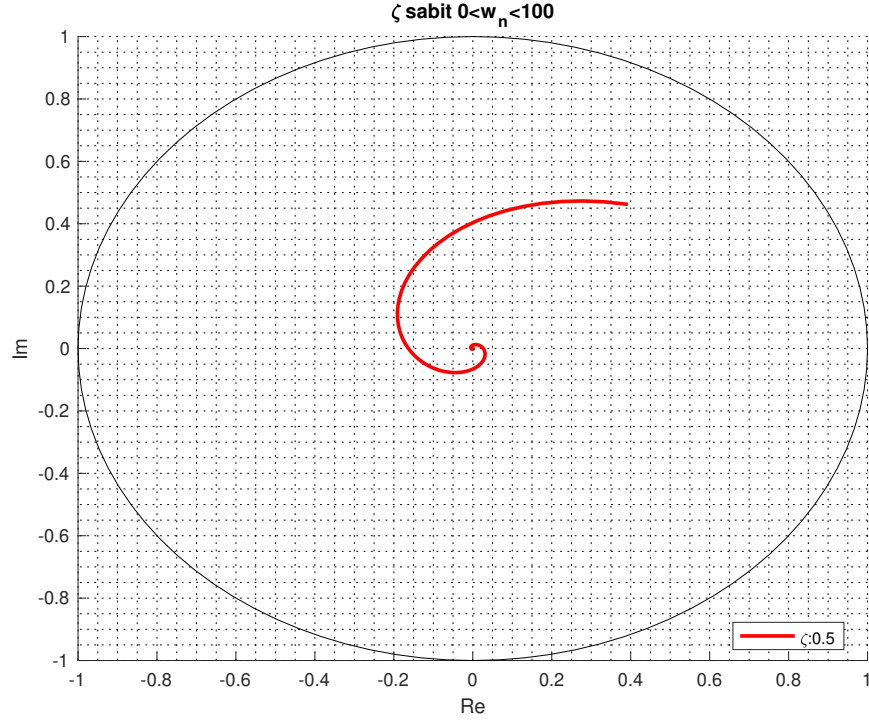
Yarıçap	Açı
0.90484	57.009°
0.81873	114.02°
0.74082	171.03°
0.67032	228.03°
0.60653	285.04°
0.54881	342.05°

Şekil 6.2: w_n değişiminin z tanım bölgesindeki izdüşümü ($\zeta = 0.1$)

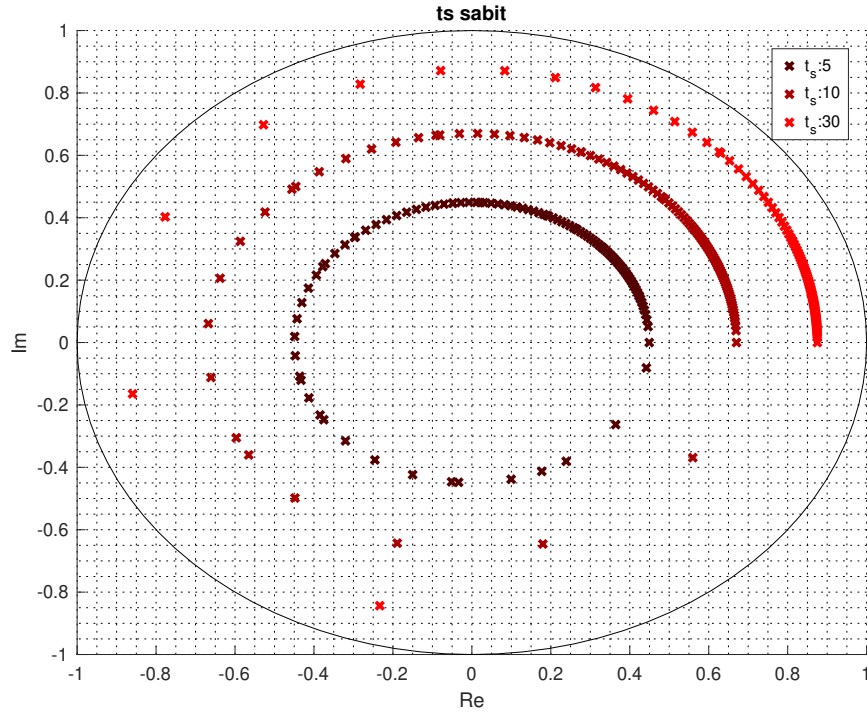
$t_s = 5$ ise $\zeta w_n = 0.8$ olur ve

$$\begin{aligned}
 z &= e^{-\zeta w_n} \bigg/ \sqrt{1 - \zeta^2 w_n} \\
 z &= e^{-0.8} \bigg/ \sqrt{1 - \zeta^2 \frac{0.8}{\zeta}}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

elde edilir. ζ arttıkça yarıçap değişmez ve açı azalır.

Şekil 6.3: w_n değişiminin z tanım bölgesindeki izdüşümü ($\zeta = 0.5$)Çizelge 6.3: $t_s = 5$ için yarıçap ve açının değişimi

Yarıçap	Açı
0.44933	224.55°
0.44933	105.02°
0.44933	61.115°
0.44933	34.377°
0.44933	0°



Şekil 6.4: t_s sabit durumunun z tanım bölgesindeki izdüşümü

Bölüm 7

Z Tanım Bölgesinde P Kontrolör Tasarımı

1. Geçici hal yanıtını şekillendirecek isterler dikkate alınarak s tanım bölgesinde baskın kutuplar seçilir.
2. Baskın kutuplar $z = e^{sT}$ ilişkisi ile z tanım bölgesine aktarılır.
3. Kontrol edilecek sistem Z tanım bölgesine geçirilir.
4. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu elde edilir ve kutup atama yapılır.

Örnek sistem

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad (7.1)$$

z tanım bölgesinde $T = 0.2$ olmak üzere

$$G(z) = \frac{0.1648}{z - 0.6703} \quad (7.2)$$

olarak elde edilmektedir. Yerleşme zamanı $t_s = 1$ ve aşım %10 isterleri verilmiştir. Bu durumda $\zeta = 0.591$ ve $w_n = 6.7664$ seçilir. Seçilen sönüm oranı ve doğal frekans ile baskın kutuplar

$$s_{1,2} = -4 \pm 5.4575i \quad (7.3)$$

şeklinde hesaplanır. $z = e^{sT}$ ifadesi ile z tanım bölgesinde kutuplar

$$z_{1,2} = 0.2072 \pm 0.3987i \quad (7.4)$$

ve kutuplardan oluşturulacak polinom

$$p(z) = z^2 - 0.4144z + 0.2019 \quad (7.5)$$

olarak hesaplanır. P tipi kontrolör ile kapalı çevrim transfer fonksiyonunun ifadesi

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{kG(z)}{1 + kG(z)} \\ &= \frac{k \frac{0.1648}{z-0.6703}}{1 + k \frac{0.1648}{z-0.6703}} \\ &= \frac{k(0.1648)}{z - 0.6703 + k(0.1648)} \\ &= \frac{0.1648k}{z + 0.1648k - 0.6703} \end{aligned} \quad (7.6)$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere karakteristik polinom birinci dereceden elde edilmiştir ve her iki isterlerin sağlanması mümkün değildir. Yerleşme zamanı sağlanmak istenirse,

$$s = -\frac{4}{t_s} = -4 \quad (7.7)$$

ve z tanım bölgesinde

$$z = e^{sT} = e^{-0.8} = 0.4493 \quad (7.8)$$

elde edilir. Bu durumda P kontrolör

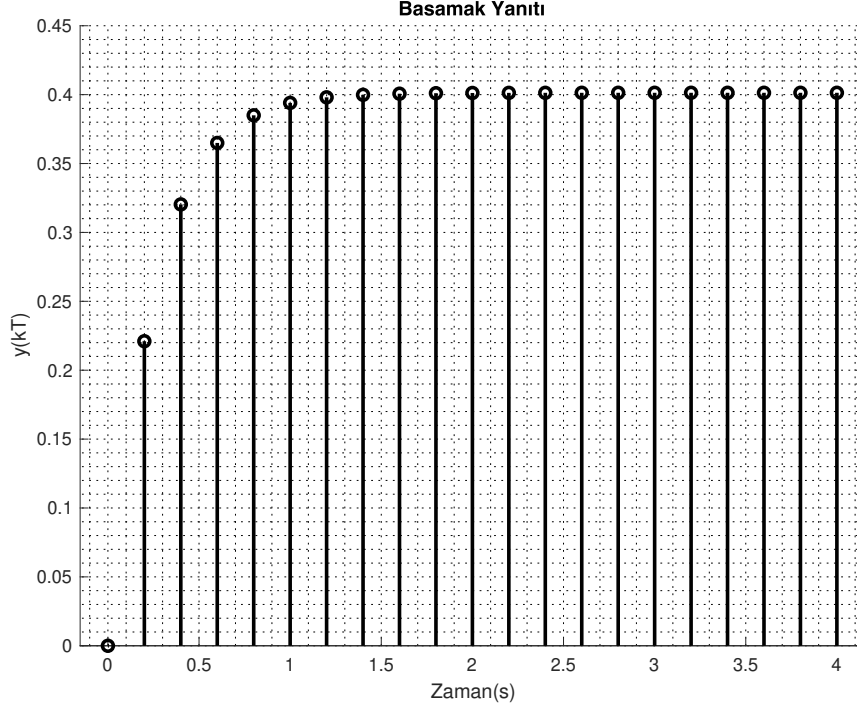
$$\begin{aligned} -0.1648k + 0.6703 &= 0.4493 \\ k &= 1.341 \end{aligned} \quad (7.9)$$

şeklindedir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$T(z) = \frac{0.221}{z - 0.4493} \quad (7.10)$$

şeklindedir.

Tasarıma ait kök eğrisi Şekil 7.2 ile verilmiştir. Seçilen w_n değerine karşılık değişken ζ değeri için eğri gösterilmiştir ve belirli bir aşımaya karşılık düşen ζ değeri için tasarım noktası gösterilmiştir. Bu nokta yerleşme zamanı isteri ile elde edilen yarıçaplı çember üzerindedir. Dikkat edilirse tasarımda ζ parametresi kullanılamamıştır, çünkü kapalı çevrim karakteristik polinomunun derecesi yetersiz kalmıştır. Sadece yerleşme zamanını karşılayacak gerçel bir kutup seçilebilmektedir ve bu z tanım bölgesinde Şekil 7.2'deki kök eğrisinde gösterilen çembere karşılık düşmektedir.



Şekil 7.1: P kontrol için kapalı çevrim basamak yanıtı ($k = 1.341$)

Tasarlanan P kontrolörün Kapalı çevrim transfer fonksiyonuna ait basamak yanıtı Şekil 7.1 ile verilmiştir. Görüldüğü üzere aşım yapmayan fakat yerleşme zamanı isterini karşılayan bir yanıt elde edilmiştir. Ayrıca, tasarım giriş sinyalini belirli bir hata ile izlemektedir.

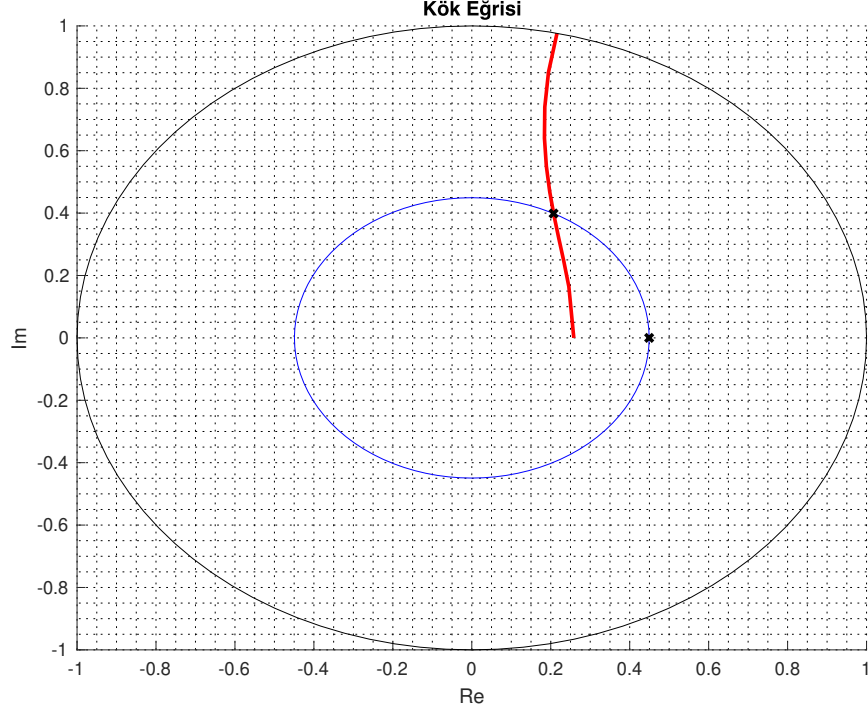
P kontrolör için bir diğer alternatif ise

$$\begin{aligned} -0.1648k + 0.6703 &= -0.4493 \\ k &= 6.7937 \end{aligned} \quad (7.11)$$

şeklindedir ve kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$T(z) = \frac{1.1199}{z + 0.4496} \quad (7.12)$$

şeklindedir. Basamak yanıtı Şekil 7.3'de verilmiştir.



Şekil 7.2: P kontrol için kök eğrisi

$z = -0.4496$ çözümü için s tanım bölgesine dönüşüm sonucu

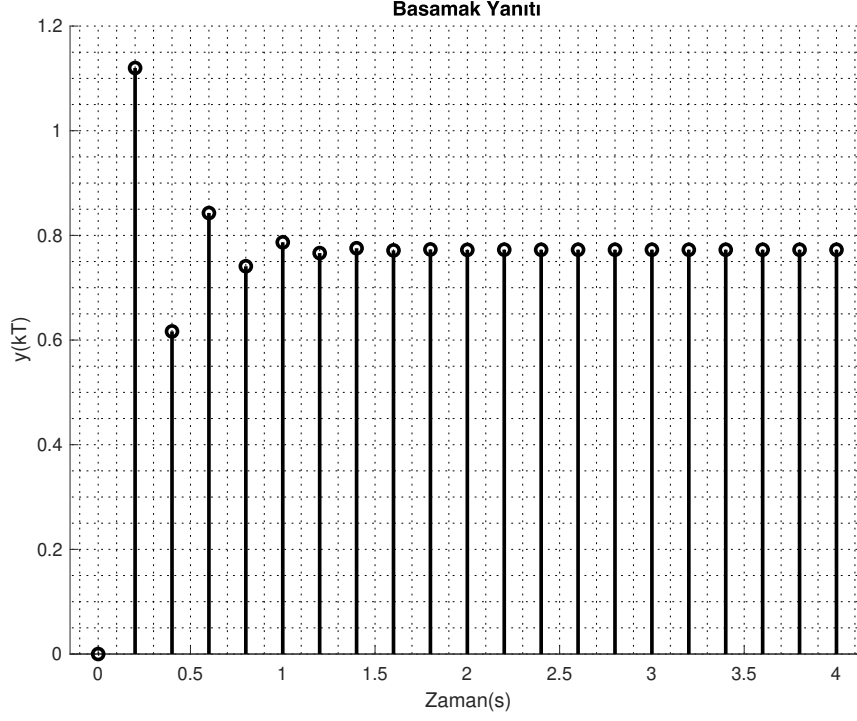
$$\begin{aligned}
 z &= e^{0.2s} \\
 s &= \frac{\log z}{0.2} \\
 s &= 5 \log(-0.4496) \\
 s &= -3.9970 + 15.7080i
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

elde edilir. Sönüm oranı ζ

$$\begin{aligned}
 \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{15.708}{3.997} \right) \\
 \theta &= 75.7237^\circ \\
 \zeta &= \cos(\theta) \\
 \zeta &= 0.2466
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

olarak hesaplanır ve aşım

$$100e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = \%44.96 \tag{7.15}$$



Şekil 7.3: P kontrol için kapalı çevrim basamak yanıtı($k = 6.7937$)

olarak elde edilir. Birinci dereceden bir sistem s tanım bölgesinde aşım yapamazken bu durum z tanım bölgesinde geçerli değildir. Sistem kutupları s tanım bölgesinde gerçel olmak durumundadır, fakat z tanım bölgesinde bir kutup negatif gerçel olması sonucu tanım bölgesinde karmaşık sayıya karşılık düşmektedir. Bu sebeple z tanım bölgesinde aşım yapılabilir.

Bölüm 8

Z Tanım Bölgesinde PD Kontrolör Tasarımı

Örnek sistem

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad (8.1)$$

z tanım bölgesinde $T = 0.2$ olmak üzere

$$G(z) = \frac{0.1648}{z - 0.6703} \quad (8.2)$$

olarak elde edilmektedir. Yerleşme zamanı $t_s = 1$ ve aşım %10 isterleri verilmiştir. Bu durumda $\zeta = 0.591$ ve $w_n = 6.7664$ seçilir. Seçilen sönüm oranı ve doğal frekans ile baskın kutuplar

$$s_{1,2} = -4 \pm 5.4575i \quad (8.3)$$

şeklinde hesaplanır. $z = e^{sT}$ ifadesi ile z tanım bölgesinde kutuplar

$$z_{1,2} = 0.2072 \pm 0.3987i \quad (8.4)$$

ve kutuplardan oluşturulacak polinom

$$p(z) = z^2 - 0.4144z + 0.2019 \quad (8.5)$$

olarak hesaplanır. PD kontrolör transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(z) &= K_p + K_d(1 - z^{-1}) \\ &= K_p + K_d\left(\frac{z-1}{z}\right) \\ &= \frac{K_p z + K_d z - K_d}{z} \\ &= \frac{(K_p + K_d)z - K_d}{z} \end{aligned} \quad (8.6)$$

olmak üzere kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 T(z) &= \frac{F(z)G(z)}{1 + F(z)G(z)} \\
 &= \frac{\frac{(K_p + K_d)z - K_d}{z} \frac{0.1648}{z - 0.6703}}{1 + \frac{(K_p + K_d)z - K_d}{z} \frac{0.1648}{z - 0.6703}} \\
 &= \frac{0.1648(K_d + K_p)z - 0.1648 - K_d}{z^2 + (0.1648(K_p + K_d) - 0.6703)z - 0.1648K_d}
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

şeklindedir. Bu durumda tasarım problemi

$$\begin{aligned}
 0.1648(K_p + K_d) - 0.6703 &= -0.4144 \\
 -0.1648K_d &= 0.2019
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

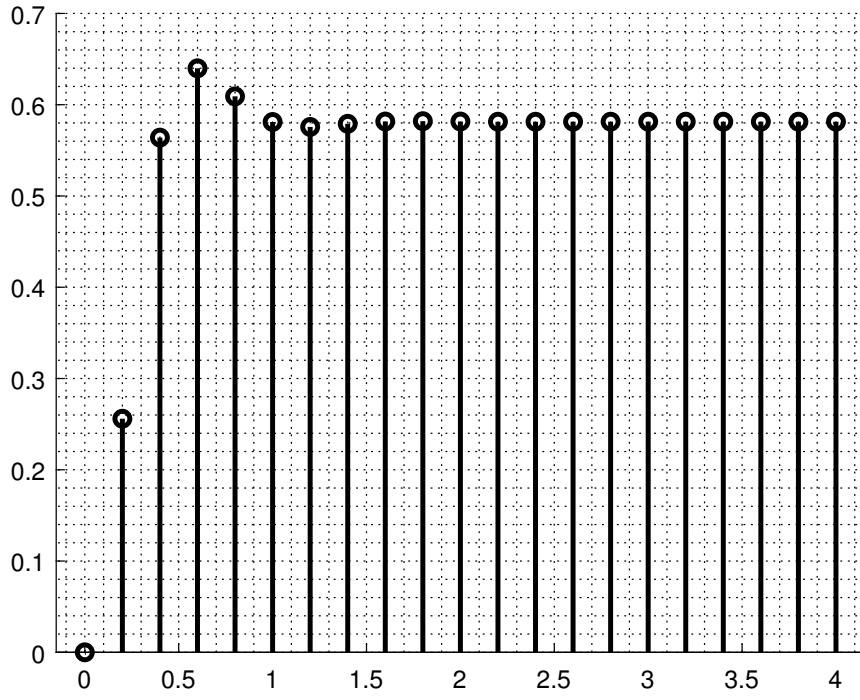
ve çözüm ise $K_d = -1.2251$ ve $K_p = 2.7778$ olarak elde edilir. PD kontrolör

$$F(z) = \frac{1.553z + 1.225}{z} \tag{8.9}$$

ve kapalı çevrim transfer fonksiyonu ifadesi

$$T(z) = \frac{0.2559z + 0.2019}{z^2 - 0.4144z + 0.2019} \tag{8.10}$$

olarak elde edilir. Kapalı çevrim basamak yanıtı Şekil 8.1 ile gösterilmiştir. Kapalı çevrim basamak yanıtı isterleri sağlamaktadır, ama giriş işaretini P kontrolör tasarımı-
mında olduğu gibi belirli bir hata ile izleyebilmektedir.



Şekil 8.1: PD kontrol için kapalı çevrim basamak yanıtı

Bölüm 9

Z Tanım Bölgesinde PI Kontrolör Tasarımı

Örnek sistem

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad (9.1)$$

z tanım bölgesinde $T = 0.2$ olmak üzere

$$G(z) = \frac{0.1648}{z - 0.6703} \quad (9.2)$$

olarak elde edilmektedir. Yerleşme zamanı $t_s = 1$ ve aşım %10 isterleri verilmiştir. Bu durumda $\zeta = 0.591$ ve $w_n = 6.7664$ seçilir. Seçilen sönüm oranı ve doğal frekans ile baskın kutuplar

$$s_{1,2} = -4 \pm 5.4575i \quad (9.3)$$

şeklinde hesaplanır. $z = e^{sT}$ ifadesi ile z tanım bölgesinde kutuplar

$$z_{1,2} = 0.2072 \pm 0.3987i \quad (9.4)$$

ve kutuplardan oluşturulacak polinom

$$p(z) = z^2 - 0.4144z + 0.2019 \quad (9.5)$$

olarak hesaplanır. PI kontrolörü

$$\begin{aligned} F(z) &= K_p + \frac{K_i z}{z-1} \\ &= \frac{(K_p + K_i)z - K_p}{z-1} \end{aligned} \quad (9.6)$$

olarak tanımlanmıştır. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 T(z) &= \frac{F(z)G(z)}{1 + F(z)G(z)} \\
 &= \frac{\frac{(K_p+K_i)z-K_p}{z-1} \frac{0.1648}{z-0.6703}}{1 + \frac{(K_p+K_i)z-K_p}{z-1} \frac{0.1648}{z-0.6703}} \\
 &= \frac{0.1648(K_p + K_i)z - 0.1648K_p}{z^2 + (0.1648(K_p + K_i) - 1.6703)z + 0.6703 - 0.1648K_p}
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

şeklindedir. Tasarım problemi

$$\begin{aligned}
 0.1648(K_p + K_i) - 1.6703 &= -0.4144 \\
 0.6703 - 0.1648K_p &= 0.2019
 \end{aligned} \tag{9.8}$$

ve çözüm ise $K_p = 2.8423$ ve $K_i = 4.7784$ şeklindedir. Bu durumda PI kontrolör

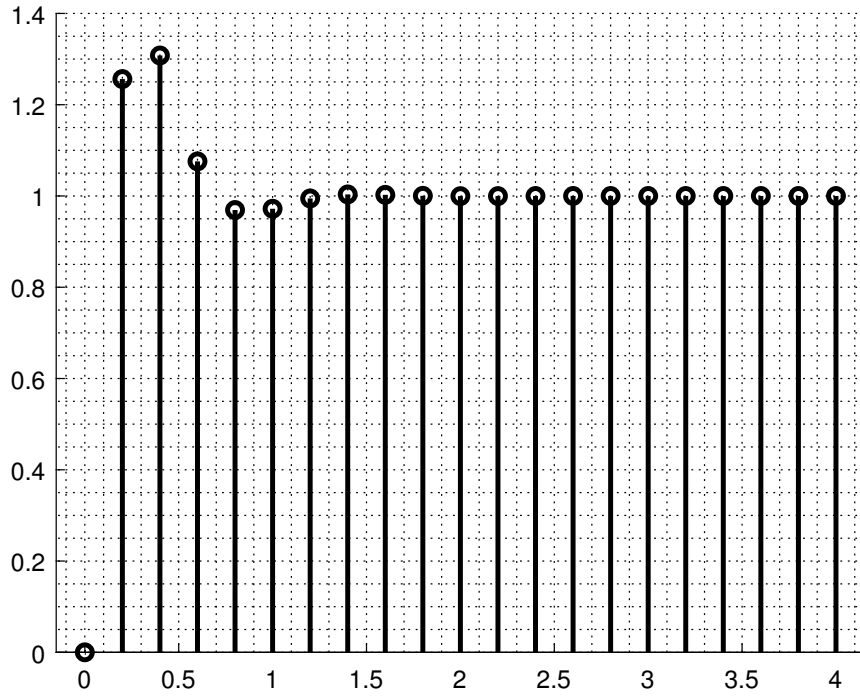
$$F(z) = \frac{7.621z - 2.842}{z - 1} \tag{9.9}$$

ve kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 T(z) &= \frac{1.256z - 0.4685}{z^2 - 0.4141z + 0.2018} \\
 &= \frac{1.2562(z - 0.373)}{z^2 - 0.4141z + 0.2018}
 \end{aligned} \tag{9.10}$$

olarak elde edilir.

Kapalı çevrim basamak yanıtı için yerleşme zamanı $t_s = 1.2$ s ve aşım %30.79'dur. İsterler tam sağlanmasa da yerleşme zamanı kabul edilebilir elde edilmiştir.



Şekil 9.1: PI kontrol için kapalı çevrim basamak yanıtı

Bölüm 10

Z Tanım Bölgesinde PID Kontrolör Tasarımı

Örnek sistem

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad (10.1)$$

z tanım bölgesinde $T = 0.2$ olmak üzere

$$G(z) = \frac{0.1648}{z - 0.6703} \quad (10.2)$$

olarak elde edilmektedir. Yerleşme zamanı $t_s = 1$ ve aşım %10 isterleri verilmiştir. Bu durumda $\zeta = 0.591$ ve $w_n = 6.7664$ seçilir. Seçilen sönüm oranı ve doğal frekans ile baskın kutuplar

$$s_{1,2} = -4 \pm 5.4575i \quad (10.3)$$

şeklinde hesaplanır. $z = e^{sT}$ ifadesi ile z tanım bölgesinde kutuplar

$$z_{1,2} = 0.2072 \pm 0.3987i \quad (10.4)$$

ve kutuplardan oluşturulacak polinom

$$p(z) = z^2 - 0.4144z + 0.2019 \quad (10.5)$$

olarak hesaplanır. PID kontrolör

$$\begin{aligned}
 F(z) &= K_p + \frac{K_i z}{z-1} + K_d \frac{z-1}{z} \\
 &= \frac{K_p(z^2 - z) + K_i z^2 + K_d(z-1)^2}{z^2 - z} \\
 &= \frac{K_p z^2 - K_p z + K_i z^2 + K_d z^2 - 2K_d z + K_d}{z^2 - z} \\
 &= \frac{(K_p + K_i + K_d)z^2 - (K_p + 2K_d)z + K_d}{z^2 - z}
 \end{aligned} \tag{10.6}$$

olarak tanımlanmıştır. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 T(z) &= \frac{F(z)G(z)}{1 + F(z)G(z)} \\
 &= \frac{\frac{(K_p + K_i + K_d)z^2 - (K_p + 2K_d)z + K_d}{z^2 - z} \cdot \frac{0.1648}{z - 0.6703}}{1 + \frac{(K_p + K_i + K_d)z^2 - (K_p + 2K_d)z + K_d}{z^2 - z} \cdot \frac{0.1648}{z - 0.6703}} \\
 &= \frac{0.1648((K_p + K_i + K_d)z^2 - (K_p + 2K_d)z + K_d)}{(z^2 - z)(z - 0.6703) + 0.1648((K_p + K_i + K_d)z^2 - (K_p + 2K_d)z + K_d)}
 \end{aligned} \tag{10.7}$$

olmaktadır. Bu durumda tasarım problemi

$$\begin{aligned}
 0.1648(K_p + K_i + K_d) - 1.6703 &= p - 0.4144 \\
 0.6703 - 0.1648(K_p + 2K_d) &= 0.2019 - 0.4144p \\
 0.1648K_d &= 0.2019p
 \end{aligned} \tag{10.8}$$

olarak verilir. Burada polinom dereceleri eşitlemek amacıyla tasarlanan polinom $s+p$ terimi ile çarpılmıştır. Görüldüğü üzere bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla olması sebebiyle birden çok çözüm bulunmaktadır. Bu durum bir fırsata çevrilirse, isterleri sağlama konusunda bir eniyileştirme işlemi yapılabilir. Bunun için parametrik çözüm elde edilmelidir. p , k_d ve k_i kalan parametre k_p cinsinden elde edilirse

$$\begin{aligned}
 p &= 15.51k_p - 44.08 \\
 k_d &= 19k_p - 54 \\
 k_i &= 74.1k_p - 205.8
 \end{aligned} \tag{10.9}$$

olarak bulunur. Kapalı çevrim sistemin kararlılığı açısından $|p| < 1$ şartı sağlanmalıdır. Bu sebeple k_p için sınır değerler

$$15.51k_p - 44.08 = 1, \quad 15.51k_p - 44.08 = -1 \tag{10.10}$$

denklemleri çözülerek

$$2.7778 < k_p < 2.9067 \quad (10.11)$$

elde edilir. Bu aralıkta değerler tek tek seçilir ve kapalı çevrim transfer fonksiyonu ve elde edilen yerleşme zamanı ve aşım verileri ile

$$J(k_p) = \frac{|t_s - 1|}{2} + \frac{|os - 10|}{20} \quad (10.12)$$

amaç fonksiyonunda yerine yazılır. $J(k_p)$ 'yi en az yapan k_p değeri $k_p = 2.7998$ olarak elde edilir. Bu durumda kontrolör parametreleri $k_d = -0.8067$ ve $k_i = 1.6319$ ve dolayısıyla kontrolör transfer fonksiyonu

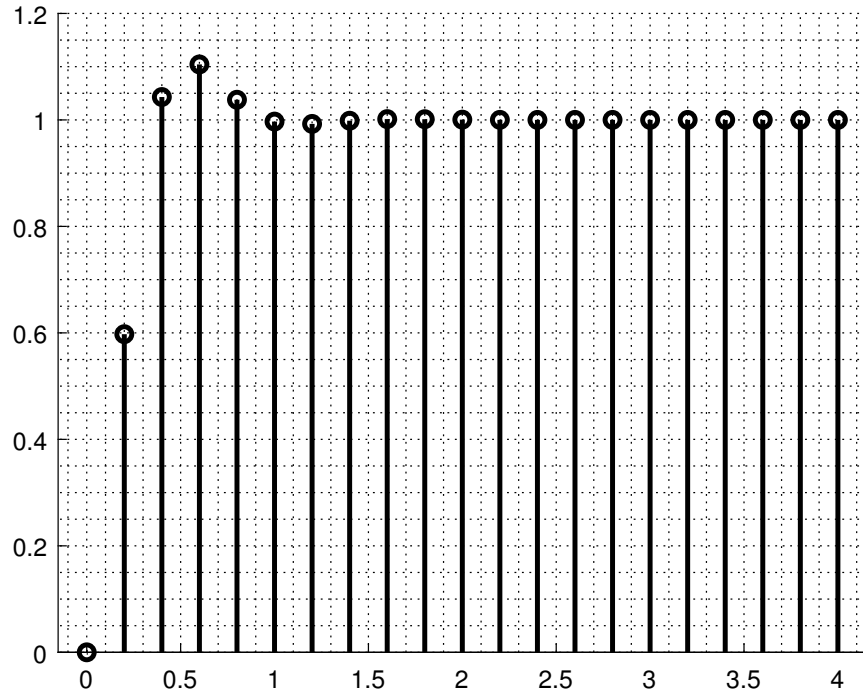
$$F(z) = \frac{3.625z^2 - 1.186z - 0.8067}{z^2 - z} \quad (10.13)$$

şeklindedir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{0.5975z^2 - 0.1956z - 0.133}{z^3 - 1.073z^2 + 0.4748z - 0.133} \\ &= \frac{0.59754(z - 0.663)(z + 0.3357)}{(z - 0.6585)(z^2 - 0.4143z + 0.2019)} \\ &\approx \frac{0.6014(z + 0.3357)}{z^2 - 0.4143z + 0.2019} \end{aligned} \quad (10.14)$$

olarak hesaplanmaktadır. Görüldüğü üzere yakın bir kutup ve sıfır mevcuttur. Bu yakınlık bir götürmeye sebep olarak istenen kutup dağılımına daha yakın bir kapalı çevrim sistem elde edilmektedir. Basamak yanıtı Şekil 10.1 ile verilmiştir.

Görüldüğü üzere isterlere oldukça yakın değerler elde edilmiştir. Bunun sebebi, PID kontrolörün fazladan parametreye sahip olması ve bu parametre kullanılarak bir eniyileştirme işleminin mümkün olmasıdır.



Şekil 10.1: PID kontrol için kapalı çevrim basamak yanıtı

Bölüm 11

Z Tanım Bölgesinde Durum Uzayı

Yay-kütle-damper sisteminin dinamikleri $x(t)$ yer değiştirme olmak üzere

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \quad (11.1)$$

ile verilmiştir. Verilen ikinci dereceden diferansiyel denklemini iki adet birinci dereceden diferansiyel denkleme çevirmek mümkündür. Bunun için $x_1(t) \triangleq x(t)$ tanımlanır ve

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{x}(t) \triangleq x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{x}(t) \end{aligned} \quad (11.2)$$

tanımlanır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) &= u(t) \\ m\dot{x}_2(t) + bx_2(t) + kx_1(t) &= u(t) \\ m\dot{x}_2(t) &= -bx_2(t) - kx_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{b}{m}x_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{aligned} \quad (11.3)$$

elde edilir. Diferansiyel denklem takımı

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{b}{m}x_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{aligned} \quad (11.4)$$

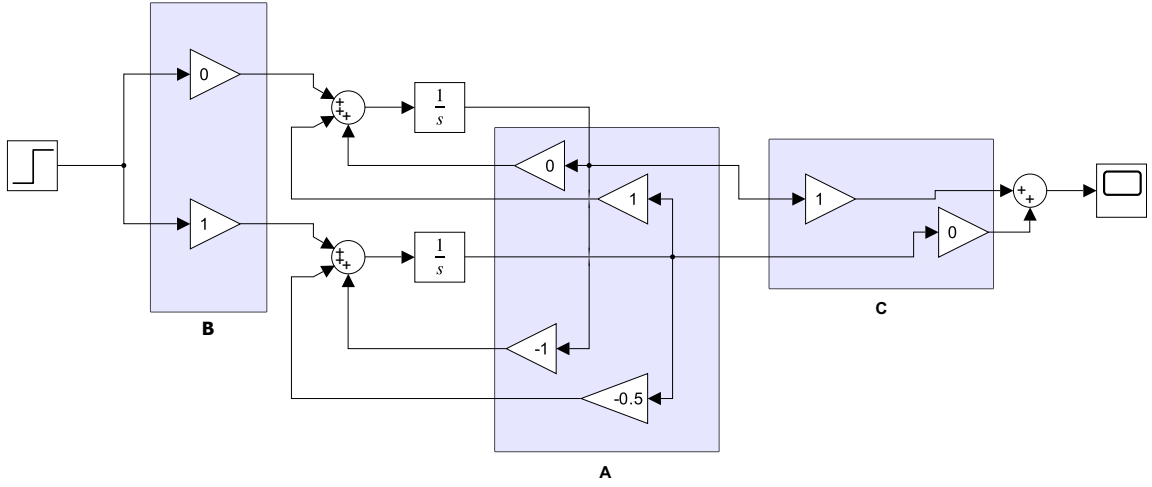
ve hatta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \quad (11.5)$$

elde edilir. Sistem için parametreler $m = 1$, $b = 0.5$ ve $k = 1$ olmak üzere durum uzayı modeli

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.6)$$

olarak elde edilir. Simulink modeli Şekil 11.1 ile verilmiştir.



Şekil 11.1: Yay-kütle-damper sistemine ait durum uzayı modeli

Ayrık durum uzayı ZOH yöntemi ile türevin yorumuna dayanmaktadır ve

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \quad (11.7)$$

ile durum uzayı

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \begin{bmatrix} x_1(kT) - x_1((k-1)T) \\ x_2(kT) - x_2((k-1)T) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u((k-1)T) \\ y((k-1)T) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.8)$$

olarak elde edilmektedir. Matematiksel işlemler sonucu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix} u((k-1)T) \\ y((k-1)T) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.9)$$

ve sonuç olarak

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ -T & 1 - 0.5T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix} u((k-1)T) \\ y((k-1)T) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1((k-1)T) \\ x_2((k-1)T) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.10)$$

elde edilir. Örnekleme zamanı $T = 0.1$ olmak üzere durum uzayı modeli

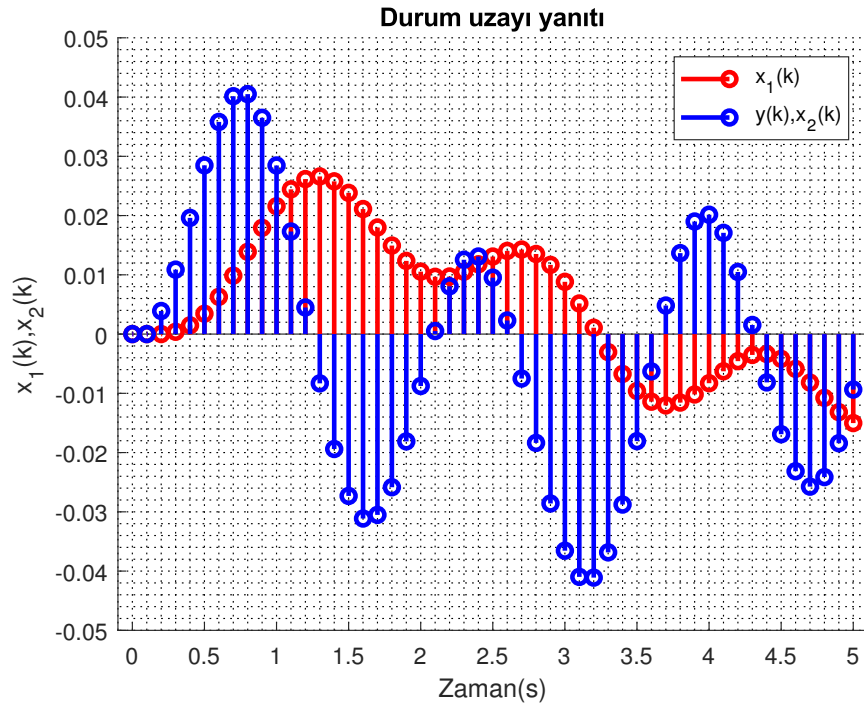
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k-1] \\ x_2[k-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u[k-1] \\ y[k-1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k-1] \\ x_2[k-1] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.11)$$

şeklindedir. Durum uzayı modeli denklemleri

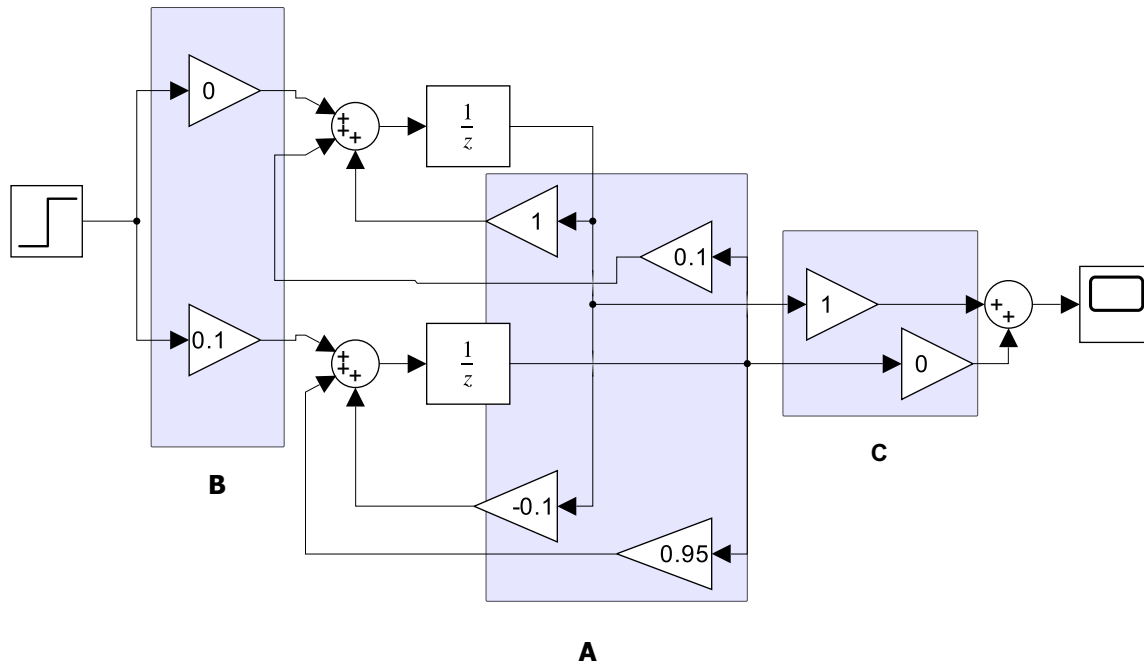
$$\begin{aligned} x_1[k] &= x_1[k-1] + 0.1x_2[k-1] \\ x_2[k] &= -0.1x_1[k-1] + 0.95x_2[k-1] + 0.1u[k-1] \\ y[k-1] &= x_1[k-1] \end{aligned} \quad (11.12)$$

şeklindedir. Girişine $\sin(4t)$ uygulandığında elde edilen yanıt Şekil 11.2 ile verilmiştir.

Simulink modeli Şekil 11.3 ile verilmiştir.



Şekil 11.2: Yay-kütle-damper sistemine ait durum uzay modeli yanıtı



Şekil 11.3: Yay-kütle-damper sistemine ait ayrık durum uzay modeli

Bölüm 12

Z Tanım Bölgesinde Durum Geri Besleme Kontrolörü

Durum uzay modeli

$$x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1), \quad y(k-1) = Cx(k-1) \quad (12.1)$$

olmak üzere

$$u(k-1) = Kx(k-1) \quad (12.2)$$

kontrolörüne **Durum Geri Besleme** kontrolörü adı verilmektedir. Dikkat edilirse bu kontrol kuralı

$$\begin{aligned} u(k-1) &= Kx(k-1) \\ u(k-1) &= [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ \vdots \\ x_n(k-1) \end{bmatrix} \\ u(k-1) &= k_1x_1(k-1) + k_2x_2(k-1) + \cdots + k_nx_n(k-1) \end{aligned} \quad (12.3)$$

olarak yazılabilir. Bu kontrolör ile kapalı çevrim durum uzay modeli

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-1), \quad y(k-1) = Cx(k-1) \\ x(k) &= Ax(k-1) + BKx(k-1), \quad y(k-1) = Cx(k-1) \\ x(k) &= (A + BK)x(k-1), \quad y(k-1) = Cx(k-1) \end{aligned} \quad (12.4)$$

78BÖLÜM 12. Z TANIM BÖLGESİNDE DURUM GERİ BESLEME KONTROLÖRÜ

olarak elde edilir. Kapalı çevrim modelin z tanım bölgesi ifadesi

$$\begin{aligned}
 x(k) &= (A + BK)x(k-1) + Br(k-1), & y(k-1) &= Cx(k-1) \\
 z^1 x(k-1) &= (A + BK)x(k-1) + Br(k-1), & y(k-1) &= Cx(k-1) \\
 (zI - (A + BK))x(k-1) &= Br(k-1), & y(k-1) &= Cx(k-1) \\
 x(k-1) &= (zI - (A + BK))^{-1} Br(k-1), & y(k-1) &= Cx(k-1) \\
 y(k-1) &= C(zI - (A + BK))^{-1} Br(k-1) & & (12.5) \\
 \frac{y(k-1)}{r(k-1)} &= C(zI - (A + BK))^{-1} B
 \end{aligned}$$

şeklindedir ve karakteristik polinom

$$p_c(z) = \det(zI - (A + BK)) \quad (12.6)$$

ile hesaplanır. Bu polinom için kutuplar seçilirken K kontrolör matrisi hesaplanır. Bu işlem için

$$K = - [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]^{-1} p_d(A) \quad (12.7)$$

burada $p_d(z)$ atanmak istenen polinom olmak üzere formülü kullanılabilir.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k-1] \\ x_2[k-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u[k-1] \\
 y[k-1] &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1[k-1] \\ x_2[k-1] \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (12.8)$$

ile verilen sistem için yerleşme zamanı $t_s = 1$, s ve aşım %10 olacak şekilde bir durum geri besleme kontrolörü tasarlansın. Aday karakteristik polinom

$$\begin{aligned}
 p_d(s) &= s^2 + 8s + 45.7844 \\
 &= (s + 4 + 5.4575i)(s + 4 - 5.4575i)
 \end{aligned} \quad (12.9)$$

şeklindedir ve z tanım Bölgesinde

$$\begin{aligned}
 p_d(z) &= (z - 0.57295 - 0.34794i)(z - 0.57295 + 0.34794i) \\
 &= z^2 - 1.146z + 0.4493
 \end{aligned} \quad (12.10)$$

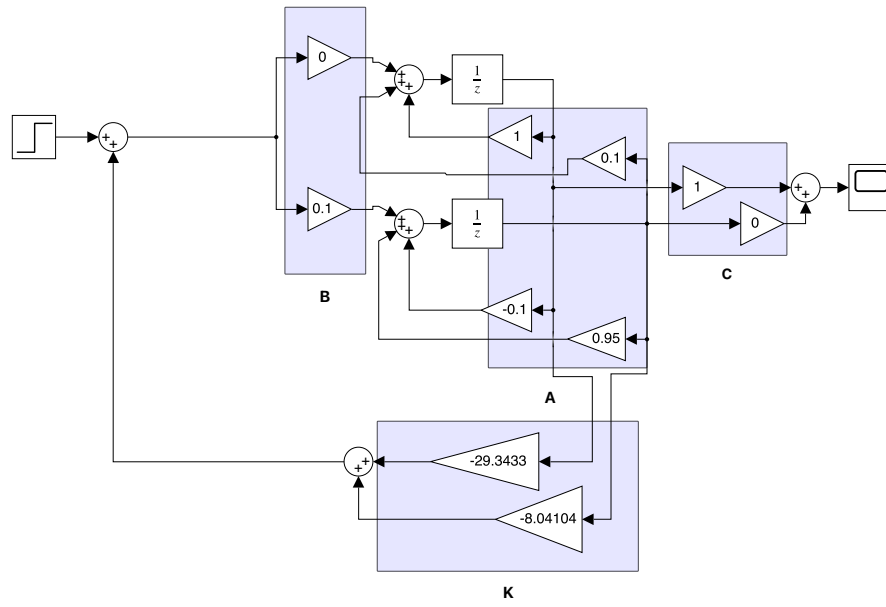
şeklindedir. $p_d(A)$ terimi

$$\begin{aligned}
 p_d(A) &= z^2 - 1.146z + 0.4493 \Big|_{z=A} \\
 &= A \cdot A - 1.146A + 0.4493I \\
 &= \begin{bmatrix} 0.99 & 0.195 \\ -0.195 & 0.8925 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.146 & 0.1146 \\ -0.1146 & 1.0887 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4493 & 0 \\ 0 & 0.4493 \end{bmatrix} \quad (12.11) \\
 &= \begin{bmatrix} 0.2934 & 0.0804 \\ -0.0804 & 0.2532 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

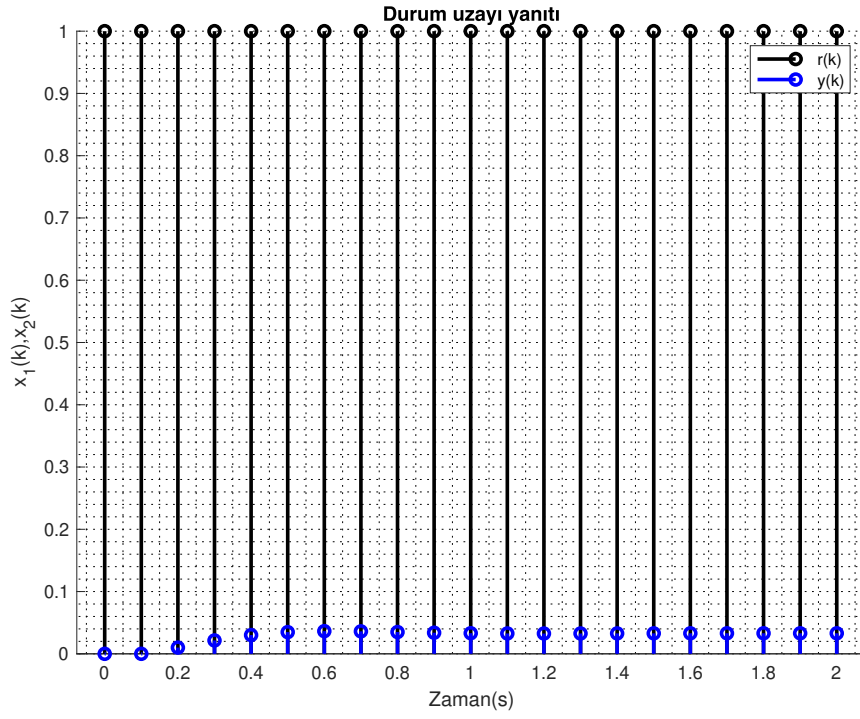
olarak hesaplanır ve geri besleme kontrolörü

$$\begin{aligned}
 K &= - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.0100 \\ 0.1 & 0.0950 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.2934 & 0.0804 \\ -0.0804 & 0.2532 \end{bmatrix} \quad (12.12) \\
 &= \begin{bmatrix} -29.3433 & -8.04104 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

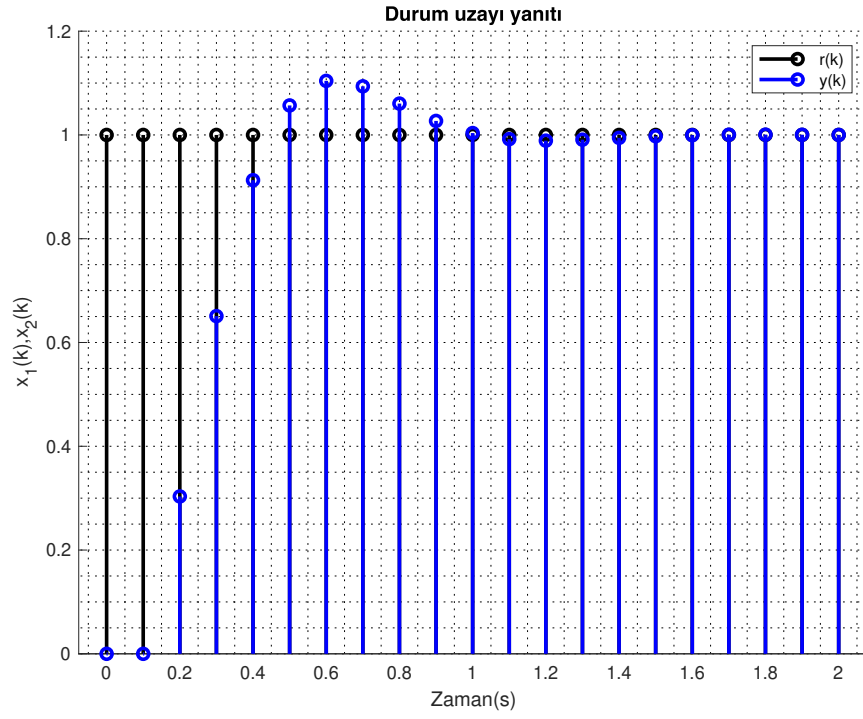
olarak elde edilir. Durum uzayı modeli ve geri besleme kontrolörü ile birlikte Şekil 12.1 ile gösterilmiştir.



Şekil 12.1: Yay-kütle-damper sistemine ait ayrık durum uzay modeli ve geri besleme kontrolörü



Şekil 12.2: Yay-kütle-damper sistemine ait ayrık durum uzay modeli ve geri besleme kontrolörü basamak yanıtı



Şekil 12.3: Yay-kütle-damper sistemine ait ayrık durum uzay modeli ve geri besleme kontrolörü ön filtreli basamak yanıtı

Bölüm 13

Z Tanım Bölgesinde Luenberger Gözleyicisi

Durum uzay modeli

$$x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1), \quad y(k-1) = Cx(k-1) \quad (13.1)$$

olmak üzere **Luenberger Gözleyicisi**

$$\hat{x}(k) = A\hat{x}(k-1) + Bu(k-1) + L(y(k-1) - \hat{y}(k-1)), \quad \hat{y}(k-1) = C\hat{x}(k-1) \quad (13.2)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada sistem modelinin bir benzeri kullanılmaktadır, fakat ek bir terim olarak sistem çıkışı ve gözleyici çıkışı farkının L terimi ile çarpımı gözleyici durumlarına etki etmektedir. Bu etkinin seçilmesine gözleyici tasarımı denmektedir. Gözleyicinin amacı sistem durumlarını hesaplamaktır. Bu sebeple sistem durumları ve gözleyici durumları arasındaki fark, veya hata, $e(k)$ olmak üzere

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (13.3)$$

olarak tanımlanır. Hatanın değişimi ise $\Delta e(k)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\Delta e(k) &= \Delta(x(k) - \hat{x}(k)) \\
&= \Delta x(k) - \Delta \hat{x}(k) \\
&= \frac{x(k) - x(k-1)}{T} - \frac{\hat{x}(k) - \hat{x}(k-1)}{T} \\
&= \frac{Ax(k-1) - x(k-1) - A\hat{x}(k-1) - L(y(k-1) - \hat{y}(k-1)) + \hat{x}(k-1)}{T} \\
&= \frac{Ae(k-1) - e(k-1) - LC(x(k-1) - \hat{x}(k-1))}{T} \\
&= \frac{Ae(k-1) - e(k-1) - LCE(k-1)}{T}
\end{aligned} \tag{13.4}$$

$$e(k) - e(k-1) = (A - LC - I)e(k-1)$$

$$e(k) = (A - LC)e(k-1)$$

elde edilir. Elde edilen sistemin kararlı kılınması durumunda

$$\begin{aligned}
e(k) &\rightarrow 0 \\
x(k) - \hat{x}(k) &\rightarrow 0 \\
x(k) &\rightarrow \hat{x}(k)
\end{aligned} \tag{13.5}$$

olacağından, gözleyici çalışacaktır. Bunun için,

$$p_c(s) = \det(sI - (A - LC)) \tag{13.6}$$

ile elde edilen polinomun kutuplarının kararlı olacak şekilde seçilmesi gerekmektedir. Gözleyici katsayısı L

$$L = p_d(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13.7}$$

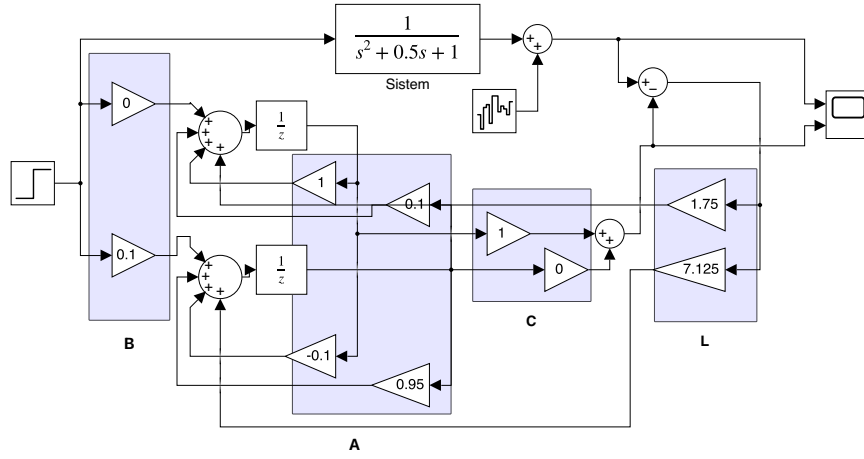
ile seçilebilmektedir. Örnek olarak

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k-1] \\ x_2[k-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u[k-1] \\
y[k-1] &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1[k-1] \\ x_2[k-1] \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{13.8}$$

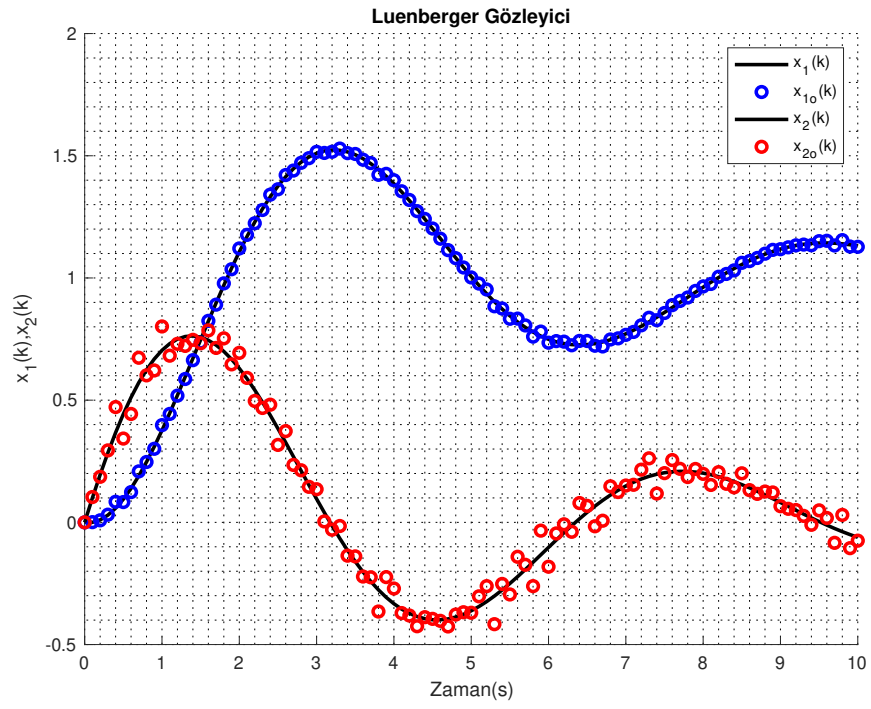
ile verilen sistem için gözleyici katsayısı

$$\begin{aligned}
 L &= p_d(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1750 \\ -0.175 & 0.7125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1.75 \\ 7.125 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{13.9}$$

olarak hesaplamaktır. Elde edilen Luenberger gözleyicisi Şekil 13.1 ile gösterilmektedir.



Şekil 13.1: Yay-kütle-damper sistemine ait gözleyici



Şekil 13.2: Yay-kütle-damper sistemine ait gözleyici yanıtı