

## Bölüm 3

### Fark Denklemleri

Örnek sistemin ZOH yöntemi ile elde edilen ve Denklem 2.13 ile verilen sistem için

$$\begin{aligned} G_{ZOH}(z) &= \frac{1 - e^{-1}}{z - e^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}}{1 - e^{-1}z^{-1}} \\ \frac{y(z)}{u(z)} &= \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}}{1 - e^{-1}z^{-1}} \\ y(z)(1 - e^{-1}z^{-1}) &= \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}u(z)}{1 - e^{-1}z^{-1}} \\ y(z) - y(z - 1)e^{-1} &= (1 - e^{-1})u(z - 1) \\ y(z) &= y(z - 1)e^{-1} + (1 - e^{-1})u(z - 1) \\ y(z) &= 0.3679y(z - 1) + 0.6321u(z - 1) \end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir. Z tanım bölgesinde tanımlı transfer fonksiyonundan fark denklemine geçiş örnektir. Fark denklemleri programlama dilleri ile kolaylıkla gerçekleştirilebilmektedir. Benzer şekilde FOH yöntemi ile elde edilen ve Denklem 2.22 ile verilen ifade için

$$\begin{aligned} G_{FOH}(z) &= \frac{1}{z} \\ \frac{y(z)}{u(z)} &= z^{-1} \\ y(z) &= u(z - 1) \end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. Yay-Kütle-Damper sistemi için dinamikleri ifade eden denklem

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \tag{3.3}$$

olarak verilmiştir. Bu diferansiyel denklem S tanım bölgesine dönüştürülürse

$$\begin{aligned}
 ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) &= U(s) \\
 (ms^2 + bs + k)X(s) &= U(s) \\
 \frac{X(s)}{U(s)} &= \frac{1}{ms^2 + bs + k}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Denklem 3.3 ile verilen sistem için

$$\begin{aligned}
 m\frac{\Delta^2 x}{(\Delta t)^2} + b\frac{\Delta x}{\Delta t} + kx(kT) &= u(kT) \\
 m\frac{\Delta(x(kT) - x((k-1)T))}{kT - (k-1)T} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{kT - (k-1)T} + kx(kT) &= u(kT) \\
 m\frac{\Delta x(kT) - \Delta x((k-1)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\
 m\frac{x(kT) - 2x((k-1)T) + x((k-2)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\
 m\frac{x(kT) - 2x((k-1)T) + x((k-2)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\
 (m + bT + kT^2)x(kT) &= (2m + bT)x((k-1)T) - mx((k-2)T) + T^2u(kT) \\
 x(kT) &= \frac{2m + bT}{m + bT + kT^2}x((k-1)T) - \frac{m}{m + bT + kT^2}x((k-2)T) + \frac{T^2}{m + bT + kT^2}u(kT)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Örnek olması için  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $b = 1 \text{ Ns/m}$ ,  $k = 1 \text{ Nm}$  ve  $T = 0.1$  olmak üzere fark denklemi

$$x(kT) = 1.8919x((k-1)T) - 0.9009x((k-2)T) + 0.009009u(kT) \tag{3.6}$$

olarak elde edilir. Transfer fonksiyonundan yola çıkarak  $\zeta = b\sqrt{m}/(2m\sqrt{k})$ ,  $w_n = \sqrt{k}/\sqrt{m}$  ve  $\phi = \cos^{-1}(\zeta)$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-0.1s}}{s(s^2 + s + 1)} \right\} \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} \right\} \\
 &= \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}z^2 + ze^{-\zeta w_n T} \sin(w_n \sqrt{1-\zeta^2}T - \phi)}{z^2 - 2ze^{-\zeta w_n T} \cos(w_n \sqrt{1-\zeta^2}T) + e^{-2\zeta w_n T}} \right) \\
 &= \frac{0.004833z^3 - 0.0001585z^2 - 0.004675z}{z^4 - 2.895z^3 + 2.8z^2 - 0.9048z} \\
 &= \frac{0.004833z + 0.004675}{z^2 - 1.895z + 0.9048}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir.

1. Yay-kütle-damper sisteminin çıkış işaretini fark denklemlerini kullanarak elde ediniz.

---

```

m=1
b=1
k=1
T=0.1
fac1=(2*m+b*T)/(m+b*T+k*T**2)
fac2=-m/(m+b*T+k*T**2)
fac3=T**2/(m+b*T+k*T**2)
tvec=np.arange(0,10+1,T)
xt=np.zeros(tvec.shape)
ut=np.ones(tvec.shape)
for i in range(0,len(tvec)):
    if i==0:
        xt[i]=fac1*0+fac2*0+fac3*0
    elif i==1:
        xt[i]=fac1*xt[i-1]+fac2*0+fac3*ut[i-1]
    else:
        xt[i]=fac1*xt[i-1]+fac2*xt[i-2]+fac3*ut[i-1]

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("x(t)")
plt.title("Yay-kutle-damper sistem yaniti")

```

```
Gz=control.tf(1,np.array([m,b,k]))
tc, yc=control.step_response(Gz)
plt.plot(tc,yc,'k')
plt.stem(tvec,xt,'b')
plt.show()
```



Şekil 3.1: Yay-kütle-damper sisteminin çıkış işareti

2. Yay-kütle-damper sisteminin çıkış işaretini ayrık transfer fonksiyonu kullanarak elde ediniz.

```
m=1
b=1
k=1
```

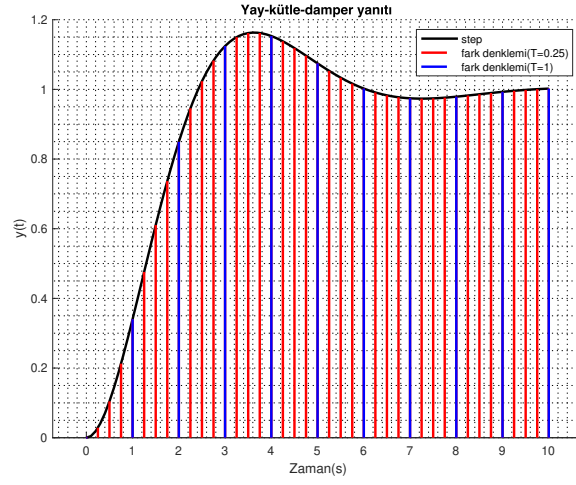
```
plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("x(t)")
plt.title("Yay-kutle-damper sistem yaniti")
```

```
Gz=control.tf(1,np.array([m,b,k]))
tc, yc=control.step_response(Gz)
```

```
Gz1=control.c2d(control.tf(1,np.array([m,b,k])),0.1)
tc1, yc1=control.step_response(Gz1)
```

```
Gz2=control.c2d(control.tf(1,np.array([m,b,k])),0.5)
tc2, yc2=control.step_response(Gz2)
```

```
plt.plot(tc,yc,'k')
plt.stem(tc1,yc1,'r')
plt.stem(tc2,yc2,'b')
plt.show()
```



Şekil 3.2: Yay-kütle-damper sisteminin çıkış işareti