



MEKATRONİK BÖLÜMÜ
BİLGİSAYARLI KONTROL SİSTEMLERİ

| | | | | |
|-------------|-----------|--|--------|------------|
| Ders Kodu: | MKT2002 | | Tarih: | 07.03.2025 |
| Sınav Türü: | Ödev 0 | | Bitiş: | 14.03.2025 |
| Dönemi: | 2024-2025 | | Süre: | 1 Hafta |

| | |
|--------------|---------------|
| | Toplam |
| Puan: | 100 |
| Not: | 110 |

Uyarı:

- Soruları dikkatlice okuyunuz. Hesap makinesi kullanılabilir.
- İşlemleri atlamadan ve ayrıntılı olarak veriniz. Sadece nümerik yanıtlar veya çizimler ara işlemler olmadan kabul edilmemektedir.

Soru: Bir su kaynatıcısına ait transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{5}{s + 0.05} \left(\frac{^{\circ}C}{A} \right) \quad (1)$$

olarak verilmiştir. Bu sistemin girişi Amper(A) birimi ile akım ve çıkışı santigrad derece($^{\circ}C$) birimi ile sıcaklıktır. Örneklem süresi $T = 0.1$ olmak üzere sistem modelini ZOH yöntemini kullanarak z tanım bölgesinde elde ediniz($G(z) = ?$).

$$G(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{5}{s + 0.05} \frac{1 - e^{-0.1s}}{s} \right\} \quad (2)$$

$$= \left(\frac{z-1}{z} \right) \mathcal{Z} \left\{ \frac{5}{s^2 + 0.05s} \right\}$$

elde edilir. Gerekli parçalama

$$\frac{5}{s^2 + 0.05s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 0.05} \quad (3)$$

$$As + 0.05A + Bs = 5$$

$$(A + B)s + 0.05A = 5$$

ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 0.05A &= 5 \end{aligned} \quad (4)$$

ile $A = 100$ ve $B = -100$ olarak hesaplanır. Bu durumda,

$$\frac{5}{s^2 + 0.05s} = \frac{100}{s} - \frac{100}{s + 0.05} \quad (5)$$

ile

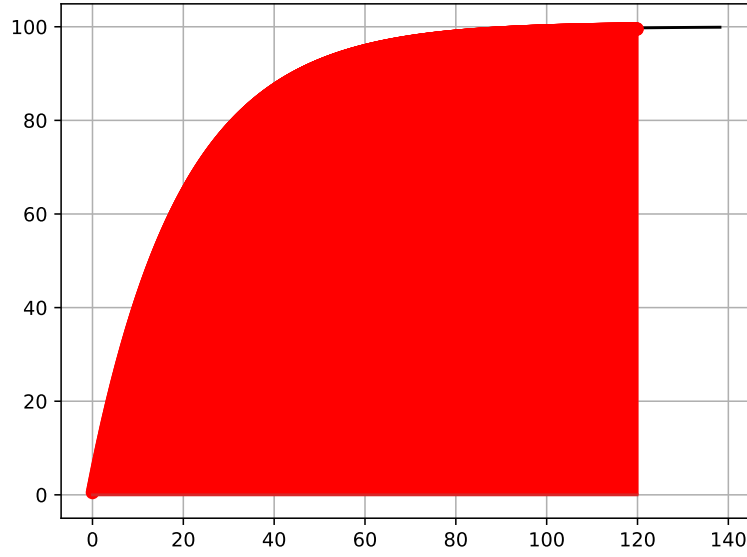
$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{100}{s} - \frac{100}{s + 0.05} \right\} = 100 \frac{z}{z-1} - 100 \frac{z}{z - e^{-0.005}} \quad (6)$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} G(z) &= \left(\frac{z-1}{z} \right) \mathcal{Z} \left\{ \frac{5}{s^2 + 0.05s} \right\} \\ &= \frac{z-1}{z} \left(100 \frac{z}{z-1} - 100 \frac{z}{z - e^{-0.005}} \right) \\ &= 100 \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-0.005}} \right) \\ &= 100 \left(1 - \frac{z-1}{z - e^{-0.005}} \right) \\ &= 100 \frac{1 - e^{-0.005}}{z - e^{-0.005}} \\ &= \frac{0.4988}{z - 0.995} \end{aligned} \quad (7)$$

Son olarak,

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{0.4988}{z - 0.995} \\
 G(z^{-1}) &= \frac{0.4988z^{-1}}{1 - 0.995z^{-1}} \\
 \frac{x}{u} &= \frac{0.4988z^{-1}}{1 - 0.995z^{-1}} \\
 (1 - 0.995z^{-1})x &= 0.4988z^{-1}u \\
 x[i] - 0.995x[i-1] &= 0.4988u[i-1] \\
 x[i] &= 0.995x[i-1] + 0.4988u[i-1]
 \end{aligned} \tag{8}$$



Şekil 1: ZOH ile ayırıklaştırma sonucu elde edilen yanıt

Extra: $G(s)$ ve $G(z)$ modellerinin basamak yanıtı ($u(t) = 1$) karşılaştırmız. ($G(s)$ için plot, $G(z)$ için stem kullanınız)

FOH yöntemini kullanırsak

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{5}{s + 0.05} \frac{(1 - e^{-0.1s})^2 (Ts + 1)}{Ts^2} \right\} \\
 &= \left(\frac{(z - 1)^2}{z^2} \right) \mathcal{Z} \left\{ \frac{5(s + 10)}{s^3 + 0.05s^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{9}$$

elde edilir. Kesirler çarpımı kesirler toplamına dönüştürülürse

$$\begin{aligned}
 \frac{5(s + 10)}{s^3 + 0.05s^2} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + 0.05} \\
 5s + 50 &= As(s + 0.05) + B(s + 0.05) + Cs^2 \\
 5s + 50 &= A(s^2 + 0.05s) + B(s + 0.05) + Cs^2 \\
 5s + 50 &= As^2 + 0.05As + Bs + 0.05B + Cs^2 \\
 5s + 50 &= As^2 + Cs^2 + 0.05As + Bs + 0.05B \\
 5s + 50 &= (A + C)s^2 + (0.05A + B)s + 0.05B
 \end{aligned} \tag{10}$$

sonucu

$$\begin{aligned}
 A + C &= 0 \\
 0.05A + B &= 5 \\
 0.05B &= 50
 \end{aligned} \tag{11}$$

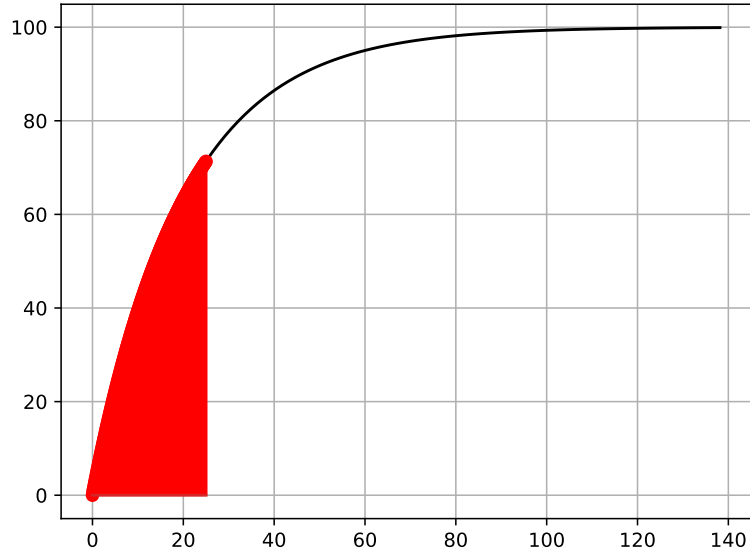
çözümü olarak $A = -19900$, $B = 1000$ ve $C = 19900$ elde edilir ve dolayısıyla,

$$\frac{5(s + 10)}{s^3 + 0.05s^2} = -\frac{19900}{s} + \frac{1000}{s^2} + \frac{19900}{s + 0.05} \tag{12}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \left(\frac{(z-1)^2}{z^2} \right) \mathcal{Z} \left\{ -\frac{19900}{s} + \frac{1000}{s^2} + \frac{19900}{s+0.05} \right\} \\
 &= \left(\frac{(z-1)^2}{z^2} \right) \left(\mathcal{Z} \left\{ -\frac{19900}{s} \right\} + \mathcal{Z} \left\{ \frac{1000}{s^2} \right\} + \mathcal{Z} \left\{ \frac{19900}{s+0.05} \right\} \right) \\
 &= \left(\frac{(z-1)^2}{z^2} \right) \left(-\frac{19900z}{z-1} + \frac{100z}{(z-1)^2} + \frac{19900z}{z-e^{-0.005}} \right) \\
 &= \frac{0.7483z - 0.2496}{z^2 - 0.9950z}
 \end{aligned} \tag{13}$$

elde edilir.



Şekil 2: FOH ile ayrıklaştırma sonucu elde edilen yanıt