

MEKATRONİK BÖLÜMÜ
BİLGİSAYARLI KONTROL SİSTEMLERİ

Ders Kodu:	MKT2002		Tarih:	10.03.2025
Sınav Türü:	Ara Sınav		Saat:	10:00
Dönemi:	2024-2025		Süre:	90dk

Soru:	1a	1b	2a	2b	Toplam
Puan:	25	25	25	25	100
Not:	25	25	25	25	100

Uyarı:

- Soruları dikkatlice okuyunuz. Hesap makinesi kullanılabilir.
- Defter, kitap ve notlar açık bir sınavdır.
- İşlemleri atlamadan ve ayrıntılı olarak veriniz. Sadece nümerik yanıtlar veya çizimler ara işlemler olmadan kabul edilmemektedir.
- Yuvarlamalar 2 hane yapılacaktır. $1.99456 \approx 1.99$ olarak alınacaktır.

S1. İkinci dereceden bir sistem

$$G(s) = \frac{12}{s^2 + 5s + 4} \quad (1)$$

olarak verilmiştir.

(a) (25p) $G(s)$ transfer fonksiyonunun z tanım bölgesinde karşılığını $G(z)$ 'yi elde ediniz. Dönüşüm,

$$G(z) = \mathcal{Z} \left\{ (1 - e^{-sT}) \left(\frac{12}{s(s^2 + 5s + 4)} \right) \right\} \quad (2)$$

olmak üzere verilen transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} \frac{12}{s^3 + 5s^2 + 4s} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4} \\ &= \frac{As^2 + 5As + 4A + Bs^2 + 4Bs + Cs^2 + Cs}{s(s+1)(s+4)} \\ As^2 + 5As + 4A + Bs^2 + 4Bs + Cs^2 + Cs &= 12 \\ A + B + C &= 0 \quad 5A + 4B + C = 0 \quad 4A = 12 \\ A &= 3 \quad B = -4 \quad C = 1 \\ \frac{12}{s^3 + 5s^2 + 4s} &= \frac{3}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s+4} \end{aligned} \quad (3)$$

olarak parçalanır. Bu durumda

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left\{ (1 - e^{-sT}) \left(\frac{3}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s+4} \right) \right\} \\ &= (1 - z^{-1}) \left(\mathcal{Z} \left\{ \frac{3}{s} \right\} - \mathcal{Z} \left\{ \frac{4}{s+1} \right\} + \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s+4} \right\} \right) \\ &= \left(\frac{z-1}{z} \right) \left(\frac{3z}{z-1} - \frac{4z}{z-e^{-1}} + \frac{z}{z-e^{-4}} \right) \\ &= \frac{(3 + e^{-4} - 4e^{-1})z + (e^{-1} + 3e^{-5} - 4e^{-4})}{z^2 - (e^{-1} + e^{-4})z - e^{-5}} \\ &= \frac{1.55z + 0.31}{z^2 - 0.39z + 0.01} \end{aligned} \quad (4)$$

elde edilir.

- (b) (25p) $G(z)$ transfer fonksiyonu için fark denklemini elde ediniz. Elde edilen ifadeden yola çıkılarak fark denklemi

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{1.55z + 0.31}{z^2 - 0.39z + 0.01} \\
 \frac{y(k)}{u(k)} &= \frac{1.55z + 0.31}{z^2 - 0.39z + 0.01} \\
 (z^2 - 0.39z + 0.01)y(k) &= (1.55z + 0.31)u(k) \\
 (1 - 0.39z^{-1} + 0.01z^{-2})y(k) &= (1.55z^{-1} + 0.31z^{-2})u(k) \\
 y(k) - 0.39z^{-1}y(k) + 0.01z^{-2}y(k) &= 1.55z^{-1}u(k) + 0.31z^{-2}u(k) \\
 y(k) - 0.39y(k-1) + 0.01y(k-2) &= 1.55u(k-1) + 0.31u(k-2) \\
 y(k) &= 0.39y(k-1) - 0.01y(k-2) + 1.55u(k-1) + 0.31u(k-2)
 \end{aligned} \tag{5}$$

olarak hesaplanır.

S2. Zaman isterleri $t_s = 2s$ ve aşım %20 ve örnekleme zamanı $T = 0.5s$ olarak verilmiştir.

- (a) (25p) Kutupların konumunu z tanım bölgesinde elde ediniz ve z tanım bölgesinde çiziniz. Aşım kriterinden

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \frac{\log(0.2)}{\sqrt{\pi^2 + \log(0.2)^2}} \\
 &= 0.46
 \end{aligned} \tag{6}$$

ve yerleşme zamanından ise

$$\begin{aligned}
 w_n &= \frac{4}{t_s \zeta} \\
 &= \frac{4}{2 \cdot 0.45595} \\
 &= 4.39
 \end{aligned} \tag{7}$$

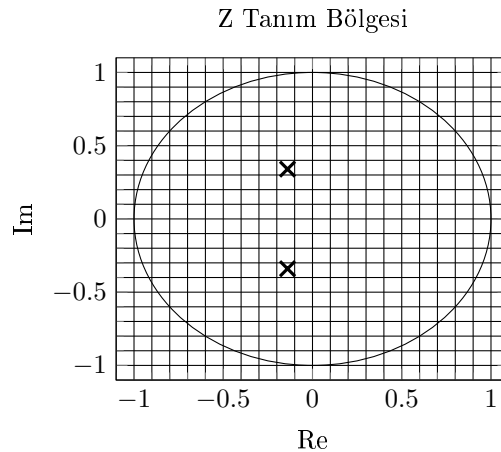
elde edilir. S tanım bölgesinde kutuplar

$$s = -2 \pm 3.90i \tag{8}$$

olarak tanımlanır. Z tanım bölgesine geçiş $z = e^{sT}$ ile yapılır ve z tanım bölgesinde kutuplar

$$\begin{aligned}
 z &= e^{0.5(-2 \pm 3.90i)} \\
 z &= e^{-1 \pm 1.95i} \\
 z &= e^{-1} / \pm 1.95 \\
 z &= 0.37 / \pm 111.73^\circ \\
 z &= -0.14 \pm 0.34i
 \end{aligned} \tag{9}$$

olarak elde edilir.



- (b) (25p) Z tanım bölgesinde elde edilen kutuplara sahip polinom $p(z)$ olmak üzere

$$G(z) = \frac{1}{p(z)} \tag{10}$$

olarak tanımlanan $G(z)$ transfer fonksiyonuna karşılık düşen fark denklemini elde ederek $0 \leq t \leq 2$ aralığında birim basamak yanıtını hesaplayınız ve yaklaşık olarak çiziniz. Transfer fonksiyonu

$$G(z) = \frac{1}{(z + 0.14 + 0.34i)(z + 0.14 - 0.34i)} = \frac{1}{z^2 + 0.28z + 0.14} \quad (11)$$

olarak elde edilir. Fark denklemi ise

$$\begin{aligned} \frac{y(k)}{u(k)} &= \frac{1}{z^2 + 0.28z + 0.14} \\ (z^2 + 0.28z + 0.14)y(k) &= u(k) \\ (1 + 0.28z^{-1} + 0.14z^{-2})y(k) &= z^{-2}u(k) \\ y(k) + 0.28z^{-1}y(k) + 0.14z^{-2}y(k) &= z^{-2}u(k) \\ y(k) + 0.28y(k-1) + 0.14y(k-2) &= u(k-2) \\ y(k) &= -0.28y(k-1) - 0.14y(k-2) + u(k-2) \end{aligned} \quad (12)$$

şeklindedir.

