İçindekiler

Bölüm 1

Z ve S tanım bölgesi

Zaman tanım bölgesinden S tanım gölgesine dönüşüm

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \\ &= f(0) + f(T)e^{-Ts} + f(2T)e^{-2Ts} + \cdots \end{aligned} \tag{1.1}$$

olarak verilmiştir. Zaman tanım bölgesinden Z tanım bölgesine geçiş ise

$$\begin{aligned} F(z) = \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \\ &= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \cdots \end{aligned} \tag{1.2}$$

şeklindedir. S ve Z tanım bölgesi dönüşümlerine dikkat edilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(e^{Ts})^{-k} \\ \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \end{aligned} \tag{1.3}$$

ifadelerinden

$$z = e^{sT} \tag{1.4}$$

ilişkisi elde edilir. Z dönüşümü için tablo Tablo 1.1 ile verilmiştir.

Tablo 1.1: S ve Z dönüşümü tablosu

Zaman domeni	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t-kT)$	e^{-kTs}	z^{-k}
$u(t)=1$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{zsin(wT)}{(z-1)(z^2-2zcos(wT)+1)}$
$cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\frac{z(z-cos(wT))}{(z-1)(z^2-2zcos(wT)+1)}$

1. S dönüşümü

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}dt \\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{\infty} \\ &= \frac{e^{-s\infty}}{-s} - \frac{1}{-s} \\ &= -\frac{1}{-s} \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned} \tag{1.5}$$

olarak elde edilir. Z dönüşümü ise

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{1\} &= \sum_{t=0}^{\infty} z^{t-1} \\
&= z^{-1} + 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \\
&= z^{-1} + \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \\
&= \frac{1-z+z}{z(1-z)}, \quad |z| < 1 \\
&= \frac{1}{z(1-z)}, \quad |z| < 1
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

2.

$$
\int u dv = uv - \int v du \tag{1.7}
$$

kullanarak $u = t$ ve $dv = e^{-st}dt$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
dv &= e^{-st}dt \\
\int dv &= \int e^{-st}dt \\
v &= \frac{e^{-st}}{-s}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

ve dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\} &= \int_{t=0}^{\infty} te^{-st}dt \\
&= t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s}dt \\
&= t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s}e^{-st}\bigg|_{t=0}^{\infty} \\
&= t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s^2} \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty} tz^{t-1} &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1\end{aligned} \tag{1.10}$$

yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{t\} &= \sum_{t=0}^{\infty} tT(z^{-1})^t \\ &= Tz^{-1}\sum_{t=0}^{\infty} t(z^{-1})^{t-1} \\ &= T\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad |z| < 1 \\ &= T\frac{\frac{1}{z}}{(1-\frac{1}{z})^2}, \quad |z| < 1 \\ &= T\frac{\frac{1}{z}}{\frac{(z-1)^2}{z^2}}, \quad |z| < 1 \\ &= T\frac{z^2}{z(z-1)^2}, \quad |z| < 1 \\ &= \frac{Tz}{(z-1)^2}, \quad |z| < 1\end{aligned} \tag{1.11}$$

olarak elde edilir.