Bölüm 2

Ayrıklaştırma

Türevin geometrik yorumu

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{2.1}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &\approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{(k+1)T - kT} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} \end{aligned} \tag{2.2}$$

elde edilir. Ayrık bir sinyalin türevi ardışık değerler farkının örnekleme zamanına oranı ile hesaplanabilmektedir. Örneğin, $y(kT) = \sin(kT)$ ve $T = 0.1$ olmak üzere

$$\frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} = 10(\sin((k+1)0.1) - \sin(0.1k)) \tag{2.3}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \{10\sin(0.1), 10(\sin(0.2) - \sin(0.1)), 10(\sin(0.3) - \sin(0.2)), \cdots\} \\ \{0.9983, 0.9884, 0.9685, \cdots\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

elde edilir. $y(kT) = \sin(kT)$ sinyalinin türevinin $\frac{d\sin(t)}{dt} = \cos(t)$ olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned} \{cos(0.1), cos(0.2), cos(0.3), \cdots\} \\ \{0.9950, 0.9801, 0.9553, \cdots\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

elde edilir ve ayrık türev ile benzer değerler olduğu görülmektedir. Bu yaklaşıklığın türeve yakınsaması için örnekleme zamanı T daha küçük seçilmelidir.

$$\frac{dq(t)}{dt} = x \tag{2.6}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{dq(t)}{dt} &= x \\
dq(t) &= xdt \\
\int dq(t) &= \int xdt \\
q(t) &= \int xdt
\end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta q}{\Delta t} &= x \\
\frac{q((k+1)T) - q(kT)}{(k+1)T - kT} &= x \\
\frac{q((k+1)T) - q(kT)}{T} &= x \\
q((k+1)T) - q(kT) &= xT \\
q((k+1)T) &= q(kT) + xT
\end{aligned} \tag{2.8}$$

ifadesi bulunur. Ayrık zamanda integral birikimli toplama karşılık gelmektedir. Bu karşılıklar Zero Order Hold(ZOH) ile elde edilmiştir. ZOH örnekleme zamanı boyunca değerlerin sabit olduğu varsayımına dayanmaktadır. Bu durum

$$x(t) = x(kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \tag{2.9}$$

ile ifade edilebilir. ZOH için transfer fonksiyonu elde etmek amacıyla girişe $\delta(t)$ birim darbe fonksiyonu uygulanırsa çıkışında $u(t) - u(t-T)$ elde edilir. Bu durumda S tanım bölgesinde çıkış ifadesi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u(t) - u(t-T)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-T)\} \\
&= \mathcal{L}\{u(t)\} - e^{-sT}\mathcal{L}\{u(t)\} \\
&= \frac{1}{s} - e^{-sT}\frac{1}{s} \\
&= (1 - e^{-sT})\frac{1}{s}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklindedir. ZOH transfer fonksiyonu ile bir $G(s)$ sistemi birlikte Z dönüşümü yapılmalıdır. Örneğin,

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \tag{2.11}$$

sistemi ayrıklaştırılmak istensin. Bu durumda $G_{ZOH}(s)G(s)$ ayrıklaştırılmalıdır. Bu sebeple,

$$L(s) = G_{ZOH}(s)G(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s(s+1)} \tag{2.12}$$

ifadesi Z tanım bölgesine

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{L(s)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s(s+1)}\right\} \\
&= \mathcal{Z}\{1-e^{-sT}\}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\
&= (1-z^{-1})\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{z}\right)\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right) \\
&= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-1}}\right) \\
&= \left(1-\frac{z-1}{z-e^{-1}}\right) \\
&= \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

olarak dönüştürülür.

First Order Hold(FOH) yöntemi ise

$$x(t) = x(kT) + \frac{t-kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \le t \le (k+1)T \tag{2.14}$$

olarak tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı $t = kT$ için $x(kT)$, $t = (k+0.5)T$ için

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(kT) + \frac{t-kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \le t \le (k+1)T \\
&= x(kT) + \frac{kT+0.5T-kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)) \\
&= x(kT) + 0.5(x((k+1)T) - x(kT)) \\
&= x(kT) + 0.5x((k+1)T) - 0.5x(kT) \\
&= 0.5x((k+1)T) + 0.5x(kT)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

ve $t = (k+1)T$ için ise

$$\begin{aligned} x(t) &= x(kT) + \frac{t-kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \\ x(t) &= x(kT) + \frac{(k+1)T-kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)) \\ x(t) &= x(kT) + x((k+1)T) - x(kT) \\ x(t) &= x((k+1)T) \end{aligned} \tag{2.16}$$

olarak elde edilir. Görüldüğü üzere ZOH yönteminin aksine T süre boyunca değerler değişmektedir. FOH için birim darbe yanıtı

$$x(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{T} & 0 \leq t \leq \frac{1}{T} \\ -t + \frac{1}{T} & \frac{1}{T} \leq t \leq \frac{2}{T} \\ 0 & t > \frac{2}{T} \end{cases} \tag{2.17}$$

ve işlem kolaylığı açısından $T = 1$ alınırsa

$$x(t) = (1-t)u(2-t) + 2tu(1-t) \tag{2.18}$$

şeklindedir. S dönüşümü sonucu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{(1-t)u(2-t)\} + \mathcal{L}\{2tu(1-t)\} \\ &= \mathcal{L}\{(1-t)(1-u(t-2))\} + \mathcal{L}\{2t(1-u(t-1))\} \\ &= \mathcal{L}\{(1-t)\} - \mathcal{L}\{(1-t)u(t-2)\} + \mathcal{L}\{2t\} - \mathcal{L}\{2tu(t-1)\} \\ &= \mathcal{L}\{(1+t)\} + \mathcal{L}\{(t-1)u(t-2)\} - \mathcal{L}\{2tu(t-1)\} \\ &= \mathcal{L}\{(1+t)\} + \mathcal{L}\{(t-1)u(t-2)\} - \mathcal{L}\{(2t-2+2)u(t-1)\} \\ &= \mathcal{L}\{(1+t)\} + \mathcal{L}\{(t-1-1+1)u(t-2)\} - \mathcal{L}\{(2t-2+2)u(t-1)\} \\ &= \mathcal{L}\{(1+t)\} + \mathcal{L}\{(t-2)u(t-2) + u(t-2)\} - \mathcal{L}\{(2t-2)u(t-1) + 2u(t-1)\} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s} \\ &= \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s} + \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2} \\ &= \frac{(1-e^{-s})^2}{s} + \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \\ &= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}(s+1) \end{aligned} \tag{2.19}$$

elde edilir. FOH için transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} G_{FOH}(s) &= \frac{(1-e^{-s})^2}{T^2s^2}\frac{Ts+1}{T} \\ &= G_{ZOH}^2(s)\frac{Ts+1}{T} \end{aligned} \tag{2.20}$$

şeklindedir. Örneğin daha önce Denklem 2.11 ile verilen sistemi FOH yöntemi ve yine aynı örnekleme zamanı ile ayrıklaştırmak gerekirse

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{1}{s+1}G_{FOH}(s) \\ &= \frac{1}{s+1}\frac{(1-e^{-s})^2}{T^2s^2}\frac{Ts+1}{T} \\ &= \frac{1}{s+1}\frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}(s+1) \\ &= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \end{aligned} \tag{2.21}$$

ifadesi Z dönüşümüne tabi tutulmalıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left\{\frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}\right\} \\ &= \mathcal{Z}\{(1-e^{-s})^2\}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &= \left(1-z^{-1}\right)^2\frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \left(\frac{z-1}{z}\right)^2\frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z} \end{aligned} \tag{2.22}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere, birim gecikme elde edilmiştir.

1. $x(t) = sin(t)$ fonksiyonunun türevini hesaplayıp çiziniz.

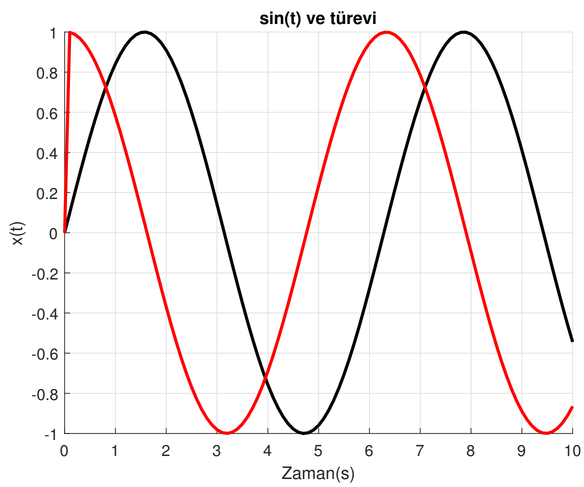
```
T=0.1
t=np.arange(0,10+1,T)
xt=np.sin(t)
dxt=np.zeros(t.shape)
for i in range(1,len(t)):
```

```
    dxt[i]=(xt[i]-xt[i-1])/T

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("sin(t)")
plt.title("Sinus ve turevi")

plt.plot(t,xt,'k')
plt.plot(t,dxt,'r')
plt.show()
```

Şekil 2.1'de $sin(t)$ ve türevi gösterilmiştir.



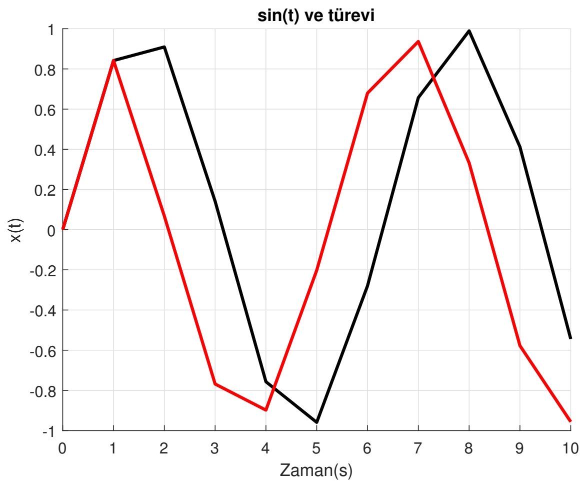
Şekil 2.1: $sin(t)$ ve türevinin karşılaştırılması($T = 0.1$)

Şekil 2.2'de daha düşük bir örnekleme zamanı seçilmiştir ve bu sebeple gerek sinyal gerekse türevi düşük kalitededir.

2. $x(t) = e^{-t}$ sinyalinin integralini hesaplayınız ve çizdiriniz.

```
T=0.1
t=np.arange(0,10+1,T)
xt=np.exp(-t)
q=np.zeros(np.size(t))
for i in range(1,len(t)):
    q[i]=q[i-1]+T*xt[i-1]

plt.grid('minor')
```



Şekil 2.2: $sin(t)$ ve türevinin karşılaştırılması($T = 1$)

```
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("e^(-t)")
plt.title("e^(-t) ve integrali")

plt.plot(t,xt,'k')
plt.plot(t,q,'r')
plt.show()
```

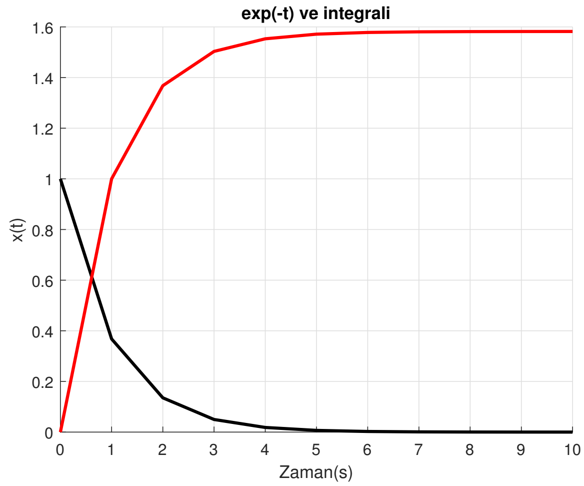
Şekil 2.3'de integral çizdirilmiştir.

3. ZOH yöntemini kullanarak $T = 1$ olmak üzere $x(kT) = 1$ sinyalini veri tutucunu çıkışını çizdiriniz.

```
T=1
t=np.arange(0,3+1,T)
xt=np.array([1,2,-1,3])

T=0.01
tnew=np.arange(0,3+1,T)
yt=np.zeros(tnew.shape)
for i in range(0,len(t)):
    for j in range(0,100):
        yt[100*i+j]=xt[i]

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
```



Şekil 2.3: $sin(t)$ ve integralinin karşılaştırılması$(T = 1)$

```
plt.ylabel("Veri tutucu")
plt.title("ZOH ornegi")

plt.stem(t,xt,'k')
plt.plot(tnew,yt,'r')
plt.show()
```

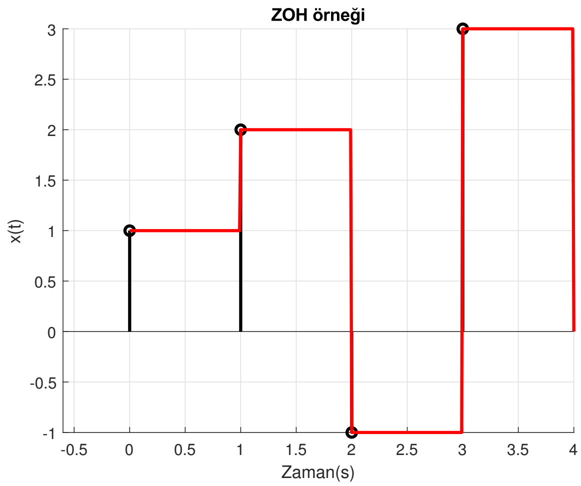
Şekil 2.4'de ZOH işleminin sonucu gösterilmiştir.

4. FOH yöntemini kullanarak $T = 1$ olmak üzere $x(kT) = 1$ sinyalini veri tutucunu çıkışını çizdiriniz.

```
T=1
t=np.arange(0,3+1,T)
xt=np.array([1,2,-1,3])

T=0.01
tnew=np.arange(0,3+1,T)
yt=np.zeros(tnew.shape)
for i in range(0,len(t)-1):
    for j in range(0,100):
        yt[100*i+j]=xt[i]+0.01*j*(xt[i+1]-xt[i])

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("Veri tutucu")
```

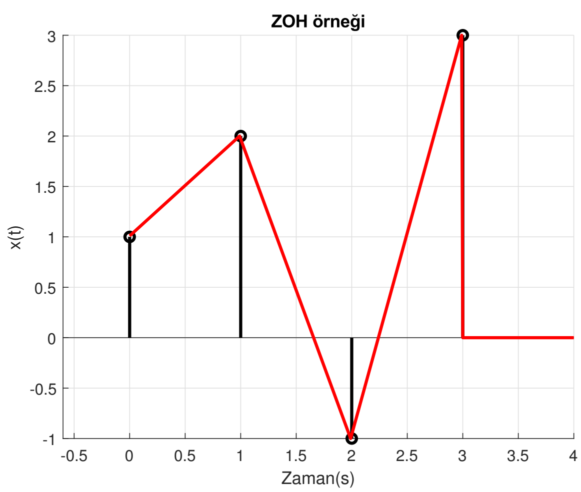


Şekil 2.4: ZOH örneği

```
plt.title("FOH ornegi")

plt.stem(t,xt,'k')
plt.plot(tnew,yt,'r')
plt.show()
```

Şekil 2.5'de FOH işleminin sonucu gösterilmiştir.



Şekil 2.5: FOH örneği

5. Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \tag{2.23}$$

ile verilen sistemini ZOH yöntemini kullanarak Z tanım bölgesindeki ifadesini elde ediniz. $T = 0.1$ için basamak yanıtını karşılaştırınız.

$$\begin{aligned}
L(s) &= G_{ZOH}(s)G(s) \\
&= \frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+2} \\
&= (1-e^{-sT})\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}\right) \\
L(z) &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{1-e^{-sT}\right\}\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+2)}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}(1-z^{-1})\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}\right) \\
&= \frac{1}{2}(1-z^{-1})\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2T}}\right) \\
&= \left(\frac{z-1}{2z}\right)\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2T}}\right) \\
&= 1 - \frac{(z-1)}{2z-2e^{-2T}} \\
&= \frac{z-e^{-2T}-(z-1)}{2z-2e^{-2T}} \\
&= \frac{1-e^{-2T}}{2z-2e^{-2T}}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$T = 0.1$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
L(z) &= 0.5\frac{1-e^{-0.2}}{z-e^{-0.2}} \\
&= 0.5\frac{1-e^{-0.2}}{z-e^{-0.2}} \\
&= \frac{0.09}{z-0.82}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

elde edilir.

```
T=0.1
Gs=control.tf(1,[1,2])
```

```
t, y = control.step_response(Gs)
plt.plot(t,y,'k')
Gz=control.tf(0.09,[1,-0.82],dt=T)
t, y = control.step_response(Gz)
plt.stem(t,y,'r')
plt.show()
```

---

6. Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \tag{2.26}$$

ile verilen sistemini FOH yöntemini kullanarak Z tanım bölgesindeki ifadesini elde ediniz. $T = 0.1$ için basamak yanıtını karşılaştırınız.

$$\begin{aligned} L(s) &= G_{FOH}(s)G(s) \\ L(s) &= G^2_{ZOH}(s)\frac{Ts+1}{T}G(s) \\ &= \frac{(1-e^{-sT})^2}{s^2}\frac{Ts+1}{Ts+2T} \\ &= (1-e^{-sT})^2\frac{Ts+1}{Ts^2(s+2)} \end{aligned} \tag{2.27}$$

elde edilir. Kesir ayırma işlemi için

$$\begin{aligned} \frac{Ts+1}{s^2(s+2)} &= \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \\ \frac{Ts+1}{s^2(s+2)} &= \frac{(As+B)(s+2)+Cs^2}{s^2(s+2)} \\ Ts+1 &= (As+B)(s+2)+Cs^2 \\ Ts+1 &= As(s+2)+B(s+2)+Cs^2 \\ Ts+1 &= As^2+Cs^2+2As+Bs+2B \\ Ts+1 &= (A+C)s^2+(2A+B)s+2B \end{aligned} \tag{2.28}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ 2A+B &= T \\ 2B &= 1 \end{aligned} \tag{2.29}$$

çözülürse $B = 0.5$, $A = 0.5T - 0.25$ ve $B = -0.5T + 0.25$ hesaplanır. Yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{Ts+1}{s^2(s+2)} &= \frac{(0.5T-0.25)s+0.5}{s^2} + \frac{-0.5T+0.25}{s+2} \\ &= \frac{(0.5T-0.25)}{s} + \frac{0.5}{s^2} + \frac{-0.5T+0.25}{s+2} \end{aligned} \tag{2.30}$$

ve

$$\begin{aligned} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{(0.5T-0.25)}{s} + \frac{0.5}{s^2} + \frac{-0.5T+0.25}{s+2}\right\} \\ &= (0.5T-0.25)\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 0.5\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - (0.5T-0.25)\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= (0.5T-0.25)\frac{z}{z-1} + 0.5\frac{Tz}{(z-1)^2} - (0.5T-0.25)\frac{z}{z-e^{-2T}} \end{aligned} \tag{2.31}$$

haliyle

$$= (1-z^{-1})^2\left(\frac{(0.5T-0.25)}{T}\frac{z}{z-1} + \frac{0.5}{T}\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(0.5T-0.25)}{T}\frac{z}{z-e^{-2T}}\right) \tag{2.32}$$

elde edilir. $T = 0.1$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &= (1-z^{-1})^2\left(-2\frac{z}{z-1} + 5\frac{0.1z}{(z-1)^2} + 2\frac{z}{z-0.82}\right) \\ &= (1-z^{-1})^2\left(\frac{-2z(z-1)(z-0.82) + 0.5z(z-0.82) + 2z(z-1)^2}{(z-0.82)(z-1)^2}\right) \\ &= z(1-z^{-1})^2\left(\frac{-2(z-1)(z-0.82) + 0.5(z-0.82) + 2(z-1)^2}{(z-0.82)(z-1)^2}\right) \\ &= z(1-z^{-1})^2\left(\frac{-2z^2 + 3.64z - 1.64 + 0.5z - 0.41 + 2z^2 - 4z + 2}{(z-0.82)(z-1)^2}\right) \\ &= z(1-z^{-1})^2\left(\frac{3.64z - 1.64 + 0.5z - 0.41 - 4z + 2}{(z-0.82)(z-1)^2}\right) \\ &= z(1-z^{-1})^2\left(\frac{0.14z - 0.05}{(z-0.82)(z-1)^2}\right) \\ &= \frac{0.14z-0.05}{(z-0.82)z} \\ &= \frac{0.14z-0.05}{z^2-0.82z} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Kod ise

```
T=0.1
Gs=control.tf(1,[1,2])
t, y = control.step_response(Gs)
plt.plot(t,y,'k')
Gz=control.tf([0.14,-0.05],[1,-0.82,0],dt=T)
print(Gz)
t, y = control.step_response(Gz)
plt.stem(t,y,'r')
plt.show()
```

şeklindedir.