

İçindekiler

1	Z ve S tanım bölgesi	3
2	Ayrıklaştırma	7
3	Fark Denklemleri	13

Bölüm 1

Z ve S tanım bölgesi

Zaman tanım bölgesinden S tanım bölgesine dönüşüm

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \\ &= f(0) + f(T)e^{-Ts} + f(2T)e^{-2Ts} + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

olarak verilmiştir. Zaman tanım bölgesinden Z tanım bölgesine geçiş ise

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{Z}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \\ &= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

şeklindedir. S ve Z tanım bölgesi dönüşümlerine dikkat edilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(e^{Ts})^{-k} \\ \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ifadelerinden

$$z = e^{sT} \quad (1.4)$$

ilişkisi elde edilir. Z dönüşümü için tablo Tablo 1.1 ile verilmiştir.

Tablo 1.1: S ve Z dönüşümü tablosu

Zaman domenı	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t - kT)$	e^{-kTs}	z^{-k}
$u(t) = 1$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{z \sin(wT)}{(z-1)(z^2-2z \cos(wT)+1)}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\frac{z(z-\cos(wT))}{(z-1)(z^2-2z \cos(wT)+1)}$

1. S dönüşümü

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \\
&= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=0}^{\infty} \\
&= \frac{e^{-s\infty}}{-s} - \frac{1}{-s} \\
&= -\frac{1}{-s} \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

olarak elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{1\} &= \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t} \\
&= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1 \\
&= \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1
\end{aligned} \tag{1.6}$$

elde edilir.

2.

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (1.7)$$

kullanarak $u = t$ ve $dv = e^{-st} dt$ olmak üzere

$$\begin{aligned} dv &= e^{-st} dt \\ \int dv &= \int e^{-st} dt \\ v &= \frac{e^{-st}}{-s} \end{aligned} \quad (1.8)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_{t=0}^{\infty} t e^{-st} dt \\ &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{\infty} \\ &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} t z^{t-1} &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \\ &= \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1 \end{aligned} \quad (1.10)$$

yardımıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{t\} &= \sum_{t=0}^{\infty} tT(z^{-1})^t \\
&= Tz^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} t(z^{-1})^{t-1} \\
&= T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \quad |z| < 1 \\
&= T \frac{\frac{1}{z}}{(1 - \frac{1}{z})^2}, \quad |z| < 1 \\
&= T \frac{\frac{1}{z}}{\frac{(z-1)^2}{z^2}}, \quad |z| < 1 \\
&= T \frac{z^2}{z(z-1)^2}, \quad |z| < 1 \\
&= \frac{Tz}{(z-1)^2}, \quad |z| < 1
\end{aligned} \tag{1.11}$$

olarak elde edilir.

Bölüm 2

Ayrıklaştırma

Türevin geometrik yorumu

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (2.1)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &\approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{(k+1)T - kT} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} \end{aligned} \quad (2.2)$$

elde edilir. Ayrık bir sinyalin türevi ardışık değerler farkının örnekleme zamanına oranı ile hesaplanabilmektedir. Örneğin, $y(kT) = \sin(kT)$ ve $T = 0.1$ olmak üzere

$$\frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} = 10(\sin((k+1)0.1) - \sin(0.1k)) \quad (2.3)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \{10 \sin(0.1), 10(\sin(0.2) - \sin(0.1)), 10(\sin(0.3) - \sin(0.2)), \dots\} \\ \{0.9983, 0.9884, 0.9685, \dots\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

elde edilir. $y(kT) = \sin(kT)$ sinyalinin türevinin $\frac{d \sin(t)}{dt} = \cos(t)$ olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned} \{\cos(0.1), \cos(0.2), \cos(0.3), \dots\} \\ \{0.9950, 0.9801, 0.9553, \dots\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

elde edilir ve ayrık türev ile benzer değerler olduğu görülmektedir. Bu yaklaşıklığın türeve yakınsaması için örnekleme zamanı T daha küçük seçilmelidir.

$$\frac{dq(t)}{dt} = x \quad (2.6)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= x \\ dq(t) &= xdt \\ \int dq(t) &= \int xdt \\ q(t) &= \int xdt \end{aligned} \quad (2.7)$$

elde edilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta q}{\Delta t} &= x \\ \frac{q((k+1)T) - q(kT)}{(k+1)T - kT} &= x \\ \frac{q((k+1)T) - q(kT)}{T} &= x \\ q((k+1)T) - q(kT) &= xT \\ q((k+1)T) &= q(kT) + xT \end{aligned} \quad (2.8)$$

ifadesi bulunur. Ayrık zamanda integral birikimli toplama karşılık gelmektedir. Bu karşılıklar Zero Order Hold(ZOH) ile elde edilmiştir. ZOH örnekleme zamanı boyunca değerlerin sabit olduğu varsayımına dayanmaktadır. Bu durum

$$x(t) = x(kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (2.9)$$

ile ifade edilebilir. ZOH için transfer fonksiyonu elde etmek amacıyla girişe $\delta(t)$ birim darbe fonksiyonu uygulanırsa çıkışında $u(t) - u(t-T)$ elde edilir. Bu durumda S tanım bölgesinde çıkış ifadesi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t) - u(t-T)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-T)\} \\ &= \mathcal{L}\{u(t)\} - e^{-sT} \mathcal{L}\{u(t)\} \\ &= \frac{1}{s} - e^{-sT} \frac{1}{s} \\ &= (1 - e^{-sT}) \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (2.10)$$

şeklindedir. ZOH transfer fonksiyonu ile bir $G(s)$ sistemi birlikte Z dönüşümü yapılmalıdır. Örneğin,

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (2.11)$$

sistemi ayrıklaştırılmak istensin. Bu durumda $G_{ZOH}(s)G(s)$ ayrıklaştırılmalıdır. Bu sebeple,

$$L(s) = G_{ZOH}(s)G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s(s+1)} \quad (2.12)$$

ifadesi Z tanım bölgesine

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{L(s)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s(s+1)}\right\} \\ &= \mathcal{Z}\{1 - e^{-sT}\}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\ &= (1 - z^{-1})\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right) \\ &= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{z-1}{z-e^{-1}}\right) \\ &= \frac{1 - e^{-1}}{z - e^{-1}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

olarak dönüştürülür.

First Order Hold(FOH) yöntemi ise

$$x(t) = x(kT) + \frac{t - kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı $t = kT$ için $x(kT)$, $t = (k+0.5)T$ için

$$\begin{aligned} x(t) &= x(kT) + \frac{t - kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \\ &= x(kT) + \frac{kT + 0.5T - kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)) \\ &= x(kT) + 0.5(x((k+1)T) - x(kT)) \\ &= x(kT) + 0.5x((k+1)T) - 0.5x(kT) \\ &= 0.5x((k+1)T) + 0.5x(kT) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ve $t = (k + 1)T$ için ise

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(kT) + \frac{t - kT}{T}(x((k + 1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k + 1)T \\
 x(t) &= x(kT) + \frac{(k + 1)T - kT}{T}(x((k + 1)T) - x(kT)) \\
 x(t) &= x(kT) + x((k + 1)T) - x(kT) \\
 x(t) &= x((k + 1)T)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

olarak elde edilir. Görüldüğü üzere ZOH yönteminin aksine T süre boyunca değerler değişmektedir. FOH için birim darbe yanıtı

$$x(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{T} & 0 \leq t \leq \frac{1}{T} \\ -t + \frac{1}{T} & \frac{1}{T} \leq t \leq \frac{2}{T} \\ 0 & t > \frac{2}{T} \end{cases} \tag{2.17}$$

ve işlem kolaylığı açısından $T = 1$ alınırsa

$$x(t) = (1 - t)u(2 - t) + 2tu(1 - t) \tag{2.18}$$

şeklindedir. S dönüşümü sonucu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{(1 - t)u(2 - t)\} + \mathcal{L}\{2tu(1 - t)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 - t)(1 - u(t - 2))\} + \mathcal{L}\{2t(1 - u(t - 1))\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 - t)\} - \mathcal{L}\{(1 - t)u(t - 2)\} + \mathcal{L}\{2t\} - \mathcal{L}\{2tu(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 1)u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{2tu(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 1)u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{(2t - 2 + 2)u(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 1 - 1 + 1)u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{(2t - 2 + 2)u(t - 1)\} \\
 &= \mathcal{L}\{(1 + t)\} + \mathcal{L}\{(t - 2)u(t - 2) + u(t - 2)\} - \mathcal{L}\{(2t - 2)u(t - 1) + 2u(t - 1)\} \\
 &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s} \\
 &= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} + \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} \\
 &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s} + \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \\
 &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2}(s + 1)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

elde edilir. FOH için transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} G_{FOH}(s) &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{T^2 s^2} \frac{Ts + 1}{T} \\ &= G_{ZOH}^2(s) \frac{Ts + 1}{T} \end{aligned} \quad (2.20)$$

şeklindedir. Örneğin daha önce Denklem 2.11 ile verilen sistemi FOH yöntemi ve yine aynı örnekleme zamanı ile ayrıklaştırmak gerekirse

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{1}{s+1} G_{FOH}(s) \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{(1 - e^{-s})^2}{T^2 s^2} \frac{Ts + 1}{T} \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} (s+1) \\ &= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

ifadesi Z dönüşümüne tabi tutulmalıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \right\} \\ &= \mathcal{Z} \{ (1 - e^{-s})^2 \} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} \\ &= (1 - z^{-1})^2 \frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 \frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (2.22)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere, birim gecikme elde edilmiştir.

Bölüm 3

Fark Denklemleri

Örnek sistemin ZOH yöntemi ile elde edilen ve Denklem 2.13 ile verilen sistem için

$$\begin{aligned} G_{ZOH}(z) &= \frac{1 - e^{-1}}{z - e^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}}{1 - e^{-1}z^{-1}} \\ \frac{y(z)}{u(z)} &= \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}}{1 - e^{-1}z^{-1}} \\ y(z)(1 - e^{-1}z^{-1}) &= \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}u(z)}{1 - e^{-1}z^{-1}} \\ y(z) - y(z - 1)e^{-1} &= (1 - e^{-1})u(z - 1) \\ y(z) &= y(z - 1)e^{-1} + (1 - e^{-1})u(z - 1) \\ y(z) &= 0.3679y(z - 1) + 0.6321u(z - 1) \end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir. Z tanım bölgesinde tanımlı transfer fonksiyonundan fark denklemine geçiş örnektir. Fark denklemleri programlama dilleri ile kolaylıkla gerçekleştirilebilmektedir.

```
u=ones(1,length(t));
y=zeros(1,length(t));

for i=2:length(t)
    y(i)=exp(-T)*y(i-1)+(1-exp(-T))*u(i);
end
```

Benzer şekilde FOH yöntemi ile elde edilen ve Denklem 2.22 ile verilen ifade için

$$\begin{aligned} G_{FOH}(z) &= \frac{1}{z} \\ \frac{y(z)}{u(z)} &= z^{-1} \\ y(z) &= u(z - 1) \end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. Yay-Kütle-Damper sistemi için dinamikleri ifade eden denklem

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \tag{3.3}$$

olarak verilmiştir. Bu diferansiyel denklem S tanım bölgesine dönüştürülürse

$$\begin{aligned} ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) &= U(s) \\ (ms^2 + bs + k)X(s) &= U(s) \\ \frac{X(s)}{U(s)} &= \frac{1}{ms^2 + bs + k} \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir.