

## Bölüm 4

# Zaman Domeni Kriterleri

Sürekli zamanda tanımlı birinci dereceden bir transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{p}{s + p} \quad (4.1)$$

olarak verilsin. Birim basamak giriş için yanıt

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{s + p} \cdot \frac{1}{s} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + p} \right\} \\ &= 1 - e^{-pt} \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde hesaplanır.  $e^{-t}$  fonksiyonunun aldığı değerler için Çizelge 4.1 verilmiştir.

Görüldüğü üzere 4.1 ile verilen sistemin yanıtı  $p$  değişkeninin değerinden bağımsız olarak 1 değerine yakınsamaktadır. 1 değerini aşmamaktadır. Dolayısıyla aşım değeri %0'dır. Sürekli halde oturduğu değer %2 altı veya üstü ile tanımlanan %2'lik banda çıkmamak üzere girdiği zamana yerleşme zamanı denir. Bu tanımdan ve Çizelge 4.1'den yola çıkarak 4.1 ile verilen sistemin yerleşme zamanı  $t_s = 4 s$ 'dir.  $p = 1$  olmaması durumunda zaman eksenini genişler veya daralır bu sebepten yerleşme zamanı

$$t_s = \frac{4}{p} \quad (4.3)$$

ile hesaplanır. İkinci dereceden bir sistem

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (4.4)$$

Çizelge 4.1:  $e^{-t}$  fonksiyonunun aldığı değerler

Zaman $t(s)$	Değer $e^{-t}$	$1 - e^{-t}$
1	0.3679	0.6321
2	0.1353	0.8647
3	0.0498	0.9502
4	0.0183	0.9817
5	0.0067	0.9933
6	0.0025	0.9975

ile tanımlanmaktadır. Burada  $\zeta$  sönüm oranı ve  $w_n$  doğal frekans olarak adlandırılmaktadır. İkinci dereceden polinomun kökleri bulunurken faydalanan  $\Delta = b^2 - 4ac$  hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\Delta &= (2\zeta w_n)^2 - 4w_n^2 \\
&= 4\zeta^2 w_n^2 - 4w_n^2 \\
&= 4w_n^2(\zeta^2 - 1)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir ve çözümün tipini belirlemek için

$$\begin{cases} \text{gerçel kök} & \Delta > 0 & \zeta > 1 \\ \text{çakışık kök} & \Delta = 0 & \zeta = 1 \\ \text{karmaşık kök} & \Delta < 0 & 0 < \zeta < 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

kullanılabilir.  $\zeta > 1$  durumunda gerçel köklü çözüm olmasından dolayı sistem transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{p_1 p_2}{(s + p_1)(s + p_2)} \tag{4.7}$$

olarak güncellenebilir.  $p_1 \gg p_2$  durumunda  $p_2$ ,  $p_2 \gg p_1$  durumunda  $p_1$  yanıtın hızını ve davranışını belirler.  $\zeta = 1$  olması durumunda yanıt birinci dereceden bir sisteme göre daha yavaş olmaktadır. Haricinde,  $0 < \zeta < 1$  durumunda

$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n}, \quad \text{Aşım} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{4.8}$$

ile hesaplanmaktadır. İkinci dereceden sistem yanıtı,

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta w_n t} \left[ \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t) \right] \tag{4.9}$$

ile ifade edilmektedir. Sinüzoidal terimler salınımlı olduklarından sadece  $e^{-\zeta w_n t}$  terimi yerleşme zamanının hesabı için önemlidir ve birinci dereceden sistem ile aynı ifade kullanılmaktadır. Aşım için

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= 0 \\ \sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*)\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} - \sqrt{1-\zeta^2}w_n\right) &= 0 \\ \sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) &= 0 \\ \sqrt{1-\zeta^2}w_n t^* &= \pi \\ t^* &= \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}w_n}\end{aligned}\tag{4.10}$$

yanıtta yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}M_p &= e^{-\zeta w_n t^*} \left[ \cos(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) \right] \\ &= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \left[ \cos(\pi) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi) \right] \\ &= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\end{aligned}\tag{4.11}$$

elde edilir. Verilen yerleşme zamanı ve aşım formülleri kullanılarak sistem davranışı şekillendirilebilmektedir. Örneğin  $t_s = 1$  ve aşım %10 olacak şekilde sistem transfer fonksiyonu seçilirse

$$\begin{aligned}\zeta &= -\frac{\log(0.1)}{\sqrt{\pi^2 + \log(0.1)^2}} = 0.591 \\ w_n &= \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{0.591} = 6.7682\end{aligned}\tag{4.12}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$G(s) = \frac{45.81}{s^2 + 8s + 45.81}\tag{4.13}$$

transfer fonksiyonu elde edilir.

1.

$$G(s) = \frac{p}{s+p}\tag{4.14}$$

ve  $1 \leq p \leq 5$  olmak üzere yerleşme zamanı ile sistem kutubu arasındaki ilişkiyi elde ediniz.

---

```

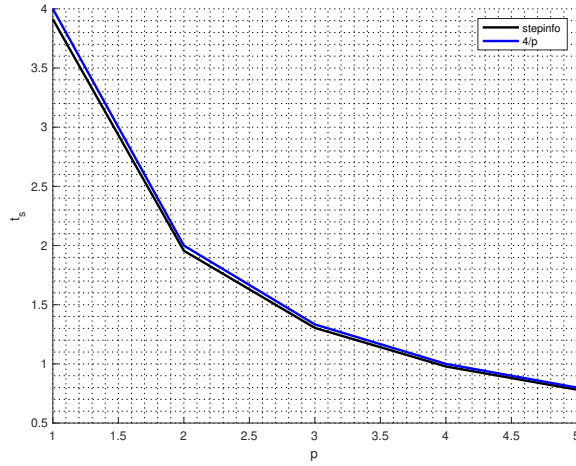
pvec=np.arange(1,5+1,1)
tsvec=np.zeros(pvec.shape)
for i in range(0,len(pvec)):
    pval=pvec[i]
    Gs=control.tf(pval,np.array([1,pval]))
    info=control.step_info(Gs)
    tsvec[i]=info['SettlingTime']

plt.grid('minor')
plt.xlabel("p")
plt.ylabel("ts")
plt.title("p ile ts arasindaki iliski")

plt.plot(pvec,tsvec,'b')
plt.show()

```

---



Şekil 4.1: Denklem 4.14 ile verilen sistem için yerleşme zamanı

2.  $0 < \zeta \leq 1$  ve  $w_n = 2$  olmak üzere

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (4.15)$$

sisteminin yerleşme zamanının formülünü elde ediniz.

---

```

wn=2
zetavec=np.arange(0.1,1,0.1)
tsvec=np.zeros(zetavec.shape)

```

```

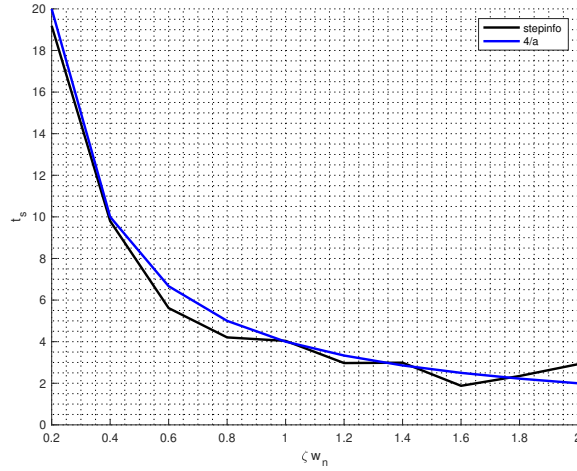
tsformula=np.zeros(zetavec.shape)
for i in range(0,len(zetavec)):
    zetaval=zetavec[i]
    Gs=control.tf(wn**2,np.array([1,2*zetaval*wn,wn**2]))
    info=control.step_info(Gs)
    tsvec[i]=info['SettlingTime']
    tsformula[i]=4/(zetaval*wn)

plt.grid('minor')
plt.xlabel("zeta wn")
plt.ylabel("ts")
plt.title("zeta wn ile ts arasindaki iliski")

plt.plot(zetavec*wn,tsformula,'k')
plt.plot(zetavec*wn,tsvec,'b')
plt.show()

```

---



Şekil 4.2: Denklem 4.15 ile verilen sistem için yerleşme zamanı

- Denklem 4.15 sistemi için  $1 \leq w_n \leq 5$  ve  $\zeta = 0.6$  değerleri için yerleşme zamanı formülünü elde ediniz.
- 

```

zeta=0.6
wnvec=np.arange(1,5+1,1)
tsvec=np.zeros(wnvec.shape)
tsformula=np.zeros(wnvec.shape)
for i in range(0,len(wnvec)):

```

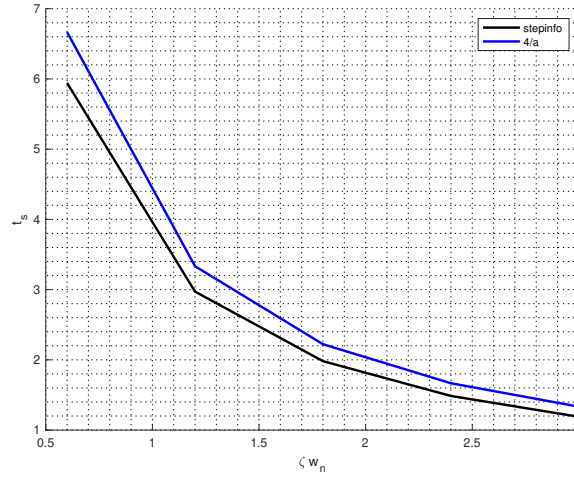
```

wnval=wnvec[i]
Gs=control.tf(wnval**2,np.array([1,2*zeta*wnval,wnval**2]))
info=control.step_info(Gs)
tsvec[i]=info['SettlingTime']
tsformula[i]=4/(zeta*wnval)

plt.grid('minor')
plt.xlabel("zeta wn")
plt.ylabel("ts")
plt.title("zeta wn ile ts arasindaki iliski")

plt.plot(zeta*wnvec,tsformula,'k')
plt.plot(zeta*wnvec,tsvec,'b')
plt.show()

```



Şekil 4.3: Denklem 4.15 ile verilen sistem için yerleşme zamanı

4. Denklem 4.15 sistemi için  $0 < \zeta < 1$  ve  $w_n = 2$  değerleri için aşımın ifadesini elde ediniz.

```

wn=2
zetavec=np.arange(0.1,1,0.1)
osvec=np.zeros(zetavec.shape)
osformula=np.zeros(zetavec.shape)
for i in range(0,len(zetavec)):
    zetaval=zetavec[i]
    Gs=control.tf(wn**2,np.array([1,2*zetaval*wn,wn**2]))

```

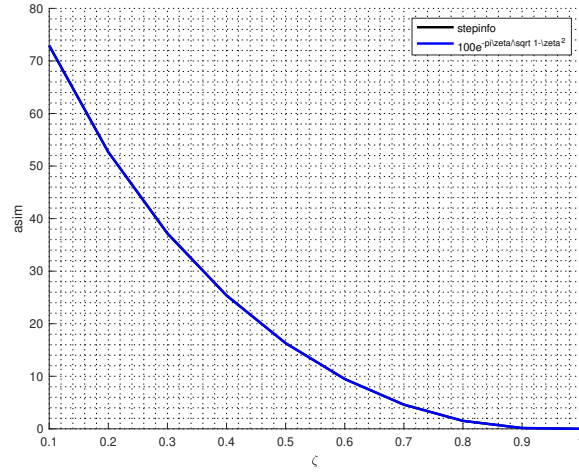
```

info=control.step_info(Gs)
osvec[i]=info['Overshoot']
osformula[i]=100*np.exp(-np.pi*zetaval/np.sqrt(1-zetaval**2))

plt.grid('minor')
plt.xlabel("zeta")
plt.ylabel("ts")
plt.title("zeta ile asim arasindaki iliski")

plt.plot(zetavec*wn,osformula,'k',linewidth=3)
plt.plot(zetavec*wn,osvec,'b')
plt.show()

```



Şekil 4.4: Denklem 4.15 ile verilen sistem için aşım

