



MEKATRONİK BÖLÜMÜ
BİLGİSAYARLI KONTROL SİSTEMLERİ

Ders Kodu:	MKT2002		Tarih:	07.03.2025
Sınav Türü:	Ödev 0		Bitiş:	14.03.2025
Dönemi:	2024-2025		Süre:	1 Hafta

	Toplam
Puan:	100
Not:	110

Uyarı:

- Soruları dikkatlice okuyunuz. Hesap makinesi kullanılabilir.
- İşlemleri atlamadan ve ayrıntılı olarak veriniz. Sadece nümerik yanıtlar veya çizimler ara işlemler olmadan kabul edilmemektedir.

Soru: Bir su kaynatıcısına ait transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{5}{s + 0.05} \left(\frac{^{\circ}C}{A} \right) \quad (1)$$

olarak verilmiştir. Bu sistemin girişi Amper(A) birimi ile akım ve çıkışı santigrad derece($^{\circ}C$) birimi ile sıcaklıktır. Örneklem süresi $T = 0.1$ olmak üzere sistem modelini ZOH yöntemini kullanarak z tanım bölgesinde elde ediniz($G(z) = ?$).

$$G(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{5}{s + 0.05} \frac{1 - e^{-0.1s}}{s} \right\} \quad (2)$$

$$= \left(\frac{z-1}{z} \right) \mathcal{Z} \left\{ \frac{5}{s^2 + 0.05s} \right\}$$

elde edilir. Gerekli parçalama

$$\frac{5}{s^2 + 0.05s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 0.05} \quad (3)$$

$$As + 0.05A + Bs = 5$$

$$(A + B)s + 0.05A = 5$$

ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 0.05A &= 5 \end{aligned} \quad (4)$$

ile $A = 100$ ve $B = -100$ olarak hesaplanır. Bu durumda,

$$\frac{5}{s^2 + 0.05s} = \frac{100}{s} - \frac{100}{s + 0.05} \quad (5)$$

ile

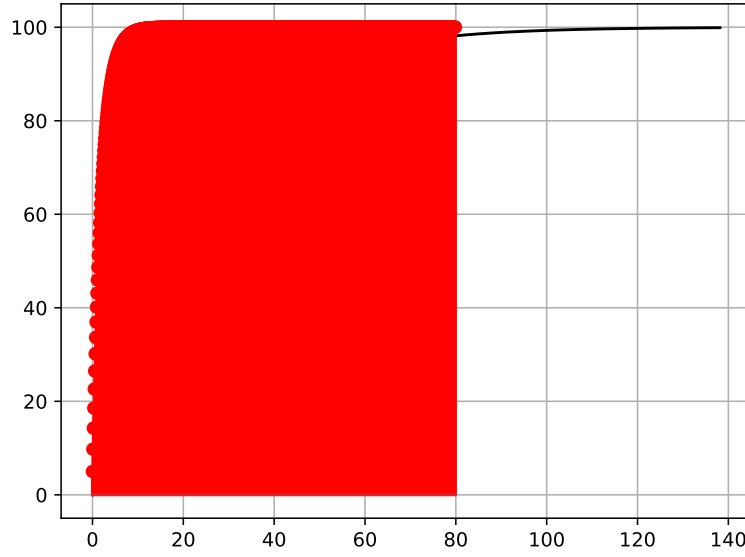
$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{100}{s} - \frac{100}{s + 0.05} \right\} = 100 \frac{z}{z-1} - 100 \frac{z}{z - e^{-0.05}} \quad (6)$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} G(z) &= \left(\frac{z-1}{z} \right) \mathcal{Z} \left\{ \frac{5}{s^2 + 0.05s} \right\} \\ &= \frac{z-1}{z} \left(100 \frac{z}{z-1} - 100 \frac{z}{z - e^{-0.05}} \right) \\ &= 100 \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-0.05}} \right) \\ &= 100 \left(1 - \frac{z-1}{z - e^{-0.05}} \right) \\ &= 100 \frac{1 - e^{-0.05}}{z - e^{-0.05}} \\ &= \frac{5}{z - 0.95} \end{aligned} \quad (7)$$

Son olarak,

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{5}{z - 0.95} \\
 G(z^{-1}) &= \frac{5z^{-1}}{1 - 0.95z^{-1}} \\
 \frac{x}{u} &= \frac{5z^{-1}}{1 - 0.95z^{-1}} \\
 (1 - 0.95z^{-1})x &= 5z^{-1}u \\
 x[i] - 0.95x[i-1] &= 5u[i-1] \\
 x[i] &= 0.95x[i-1] + 5u[i-1]
 \end{aligned} \tag{8}$$



Şekil 1: ZOH ile ayırıklaştırma sonucu elde edilen yanıt

Extra: $G(s)$ ve $G(z)$ modellerinin basamak yanıtı ($u(t) = 1$) karşılaştırınız. ($G(s)$ için plot, $G(z)$ için stem kullanınız)

FOH yöntemini kullanırsak

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{5}{s + 0.05} \frac{(1 - e^{-0.1s})^2 (Ts + 1)}{Ts^2} \right\} \\
 &= \left(\frac{(z - 1)^2}{z^2} \right) \mathcal{Z} \left\{ \frac{5(s + 10)}{s^3 + 0.05s^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{9}$$

elde edilir. Kesirler çarpımı kesirler toplamına dönüştürülürse

$$\begin{aligned}
 \frac{5(s + 10)}{s^3 + 0.05s^2} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + 0.05} \\
 5s + 50 &= As(s + 0.05) + B(s + 0.05) + Cs^2 \\
 5s + 50 &= A(s^2 + 0.05s) + B(s + 0.05) + Cs^2 \\
 5s + 50 &= As^2 + 0.05As + Bs + 0.05B + Cs^2 \\
 5s + 50 &= As^2 + Cs^2 + 0.05As + Bs + 0.05B \\
 5s + 50 &= (A + C)s^2 + (0.05A + B)s + 0.05B
 \end{aligned} \tag{10}$$

sonucu

$$\begin{aligned}
 A + C &= 0 \\
 0.05A + B &= 5 \\
 0.05B &= 50
 \end{aligned} \tag{11}$$

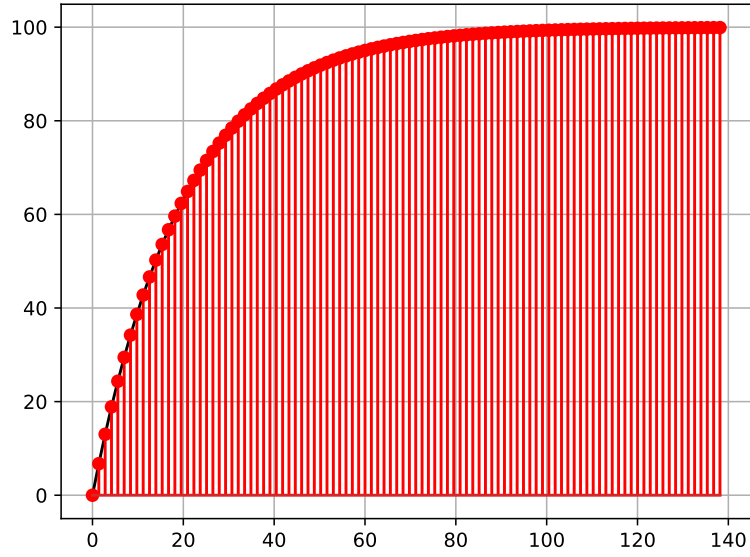
çözümü olarak $A = -19900$, $B = 1000$ ve $C = 19900$ elde edilir ve dolayısıyla,

$$\frac{5(s + 10)}{s^3 + 0.05s^2} = -\frac{19900}{s} + \frac{1000}{s^2} + \frac{19900}{s + 0.05} \tag{12}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \left(\frac{(z-1)^2}{z^2} \right) \mathcal{Z} \left\{ -\frac{19900}{s} + \frac{1000}{s^2} + \frac{19900}{s+0.05} \right\} \\
 &= \left(\frac{(z-1)^2}{z^2} \right) \left(\mathcal{Z} \left\{ -\frac{19900}{s} \right\} + \mathcal{Z} \left\{ \frac{1000}{s^2} \right\} + \mathcal{Z} \left\{ \frac{19900}{s+0.05} \right\} \right) \\
 &= \left(\frac{(z-1)^2}{z^2} \right) \left(-\frac{19900z}{z-1} + \frac{100z}{(z-1)^2} + \frac{19900z}{z-e^{-0.005}} \right) \\
 &= \frac{0.7483z - 0.2496}{z^2 - 0.9950z}
 \end{aligned} \tag{13}$$

elde edilir.



Şekil 2: FOH ile ayırıştırma sonucu elde edilen yanıt

Görüldüğü üzere ZOH ile elde edilen ayrık sistem sürekli zaman sistem yanıtını tam anlamıyla temsil edememektedir. Bu durum FOH için geçerli değildir, ayrık sistem yanıtı sürekli zaman yanıtını gayet iyi temsil etmektedir.