İçindekiler

Bölüm 1

Z ve S tanım bölgesi

Zaman tanım bölgesinden S tanım gölgesine dönüşüm

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \\ &= f(0) + f(T)e^{-Ts} + f(2T)e^{-2Ts} + \cdots \end{aligned} \tag{1.1}$$

olarak verilmiştir. Zaman tanım bölgesinden Z tanım bölgesine geçiş ise

$$\begin{aligned} F(z) = \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \\ &= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \cdots \end{aligned} \tag{1.2}$$

şeklindedir. S ve Z tanım bölgesi dönüşümlerine dikkat edilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(e^{Ts})^{-k} \\ \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \end{aligned} \tag{1.3}$$

ifadelerinden

$$z = e^{sT} \tag{1.4}$$

ilişkisi elde edilir. Z dönüşümü için çizelge Çizelge 1.1 ile verilmiştir.

Çizelge 1.1: S ve Z dönüşümü tablosu

Zaman domeni	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t-kT)$	e^{-kTs}	z^{-k}
$u(t)=1$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{zsin(wT)}{(z-1)(z^2-2zcos(wT)+1)}$
$cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\frac{z(z-cos(wT))}{(z-1)(z^2-2zcos(wT)+1)}$

1. S dönüşümü

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{\infty} \\ &= \frac{e^{-s\infty}}{-s} - \frac{1}{-s} \\ &= -\frac{1}{-s} \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned} \tag{1.5}$$

olarak elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{1\} &= \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1 \\ &= \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

elde edilir.

2.

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{1.7}$$

kullanarak $u = t$ ve $dv = e^{-st}dt$ olmak üzere

$$\begin{aligned} dv &= e^{-st}dt \\ \int dv &= \int e^{-st}dt \\ v &= \frac{e^{-st}}{-s} \end{aligned} \tag{1.8}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_{t=0}^{\infty} te^{-st}dt \\ &= t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s}dt \\ &= t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s}e^{-st}\bigg|_{t=0}^{\infty} \\ &= t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned} \tag{1.9}$$

elde edilir. Z dönüşümü ise

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} tz^{t-1} &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1 \end{aligned} \tag{1.10}$$

yardımıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{t\} &= \sum_{t=0}^{\infty} tT(z^{-1})^t \\
&= Tz^{-1}\sum_{t=0}^{\infty} t(z^{-1})^{t-1} \\
&= T\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad |z|<1 \\
&= T\frac{\frac{1}{z}}{(1-\frac{1}{z})^2}, \quad |z|<1 \\
&= T\frac{\frac{1}{z}}{\frac{(z-1)^2}{z^2}}, \quad |z|<1 \\
&= T\frac{z^2}{z(z-1)^2}, \quad |z|<1 \\
&= \frac{Tz}{(z-1)^2}, \quad |z|<1
\end{aligned} \tag{1.11}$$

olarak elde edilir.

Bölüm 2

Ayrıklaştırma

Türevin geometrik yorumu

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{2.1}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &\approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{(k+1)T - kT} \\ &\approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} \end{aligned} \tag{2.2}$$

elde edilir. Ayrık bir sinyalin türevi ardışık değerler farkının örnekleme zamanına oranı ile hesaplanabilmektedir. Örneğin, $y(kT) = \sin(kT)$ ve $T = 0.1$ olmak üzere

$$\frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} = 10(\sin((k+1)0.1) - \sin(0.1k)) \tag{2.3}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \{10\sin(0.1), 10(\sin(0.2) - \sin(0.1)), 10(\sin(0.3) - \sin(0.2)), \cdots\} \\ \{0.9983, 0.9884, 0.9685, \cdots\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

elde edilir. $y(kT) = \sin(kT)$ sinyalinin türevinin $\frac{d\sin(t)}{dt} = \cos(t)$ olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned} \{cos(0.1), cos(0.2), cos(0.3), \cdots\} \\ \{0.9950, 0.9801, 0.9553, \cdots\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

elde edilir ve ayrık türev ile benzer değerler olduğu görülmektedir. Bu yaklaşıklığın türeve yakınsaması için örnekleme zamanı T daha küçük seçilmelidir.

$$\frac{dq(t)}{dt} = x \tag{2.6}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= x \\ dq(t) &= xdt \\ \int dq(t) &= \int xdt \\ q(t) &= \int xdt \end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta q}{\Delta t} &= x \\ \frac{q((k+1)T) - q(kT)}{(k+1)T - kT} &= x \\ \frac{q((k+1)T) - q(kT)}{T} &= x \\ q((k+1)T) - q(kT) &= xT \\ q((k+1)T) &= q(kT) + xT \end{aligned} \tag{2.8}$$

ifadesi bulunur. Ayrık zamanda integral birikimli toplama karşılık gelmektedir. Bu karşılıklar Zero Order Hold(ZOH) ile elde edilmiştir. ZOH örnekleme zamanı boyunca değerlerin sabit olduğu varsayımına dayanmaktadır. Bu durum

$$x(t) = x(kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \tag{2.9}$$

ile ifade edilebilir. ZOH için transfer fonksiyonu elde etmek amacıyla girişe $\delta(t)$ birim darbe fonksiyonu uygulanırsa çıkışında $u(t) - u(t-T)$ elde edilir. Bu durumda S tanım bölgesinde çıkış ifadesi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t) - u(t-T)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-T)\} \\ &= \mathcal{L}\{u(t)\} - e^{-sT}\mathcal{L}\{u(t)\} \\ &= \frac{1}{s} - e^{-sT}\frac{1}{s} \\ &= (1 - e^{-sT})\frac{1}{s} \end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklindedir. ZOH transfer fonksiyonu ile bir $G(s)$ sistemi birlikte Z dönüşümü yapılmalıdır. Örneğin,

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \tag{2.11}$$

sistemi ayrıklaştırılmak istensin. Bu durumda $G_{ZOH}(s)G(s)$ ayrıklaştırılmalıdır. Bu sebeple,

$$L(s) = G_{ZOH}(s)G(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s(s+1)} \tag{2.12}$$

ifadesi Z tanım bölgesine

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{L(s)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s(s+1)}\right\} \\
&= \mathcal{Z}\{1-e^{-sT}\}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\
&= (1-z^{-1})\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{z}\right)\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right) \\
&= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-1}}\right) \\
&= \left(1-\frac{z-1}{z-e^{-1}}\right) \\
&= \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

olarak dönüştürülür.

First Order Hold(FOH) yöntemi ise

$$x(t) = x(kT) + \frac{t-kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \tag{2.14}$$

olarak tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı $t = kT$ için $x(kT)$, $t = (k+0.5)T$ için

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(kT) + \frac{t-kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \\
&= x(kT) + \frac{kT+0.5T-kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)) \\
&= x(kT) + 0.5(x((k+1)T) - x(kT)) \\
&= x(kT) + 0.5x((k+1)T) - 0.5x(kT) \\
&= 0.5x((k+1)T) + 0.5x(kT)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

ve $t = (k+1)T$ için ise

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(kT) + \frac{t-kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)), \quad kT \le t \le (k+1)T \\
x(t) &= x(kT) + \frac{(k+1)T-kT}{T}(x((k+1)T) - x(kT)) \\
x(t) &= x(kT) + x((k+1)T) - x(kT) \\
x(t) &= x((k+1)T)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

olarak elde edilir. Görüldüğü üzere ZOH yönteminin aksine T süre boyunca değerler değişmektedir. FOH için birim darbe yanıtı

$$x(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{T} & 0 \le t \le \frac{1}{T} \\ -t + \frac{1}{T} & \frac{1}{T} \le t \le \frac{2}{T} \\ 0 & t > \frac{2}{T} \end{cases} \tag{2.17}$$

ve işlem kolaylığı açısından $T = 1$ alınırsa

$$x(t) = (1-t)u(2-t) + 2tu(1-t) \tag{2.18}$$

şeklindedir. S dönüşümü sonucu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{(1-t)u(2-t)\} + \mathcal{L}\{2tu(1-t)\} \\
&= \mathcal{L}\{(1-t)(1-u(t-2))\} + \mathcal{L}\{2t(1-u(t-1))\} \\
&= \mathcal{L}\{(1-t)\} - \mathcal{L}\{(1-t)u(t-2)\} + \mathcal{L}\{2t\} - \mathcal{L}\{2tu(t-1)\} \\
&= \mathcal{L}\{(1+t)\} + \mathcal{L}\{(t-1)u(t-2)\} - \mathcal{L}\{2tu(t-1)\} \\
&= \mathcal{L}\{(1+t)\} + \mathcal{L}\{(t-1)u(t-2)\} - \mathcal{L}\{(2t-2+2)u(t-1)\} \\
&= \mathcal{L}\{(1+t)\} + \mathcal{L}\{(t-1-1+1)u(t-2)\} - \mathcal{L}\{(2t-2+2)u(t-1)\} \\
&= \mathcal{L}\{(1+t)\} + \mathcal{L}\{(t-2)u(t-2) + u(t-2)\} - \mathcal{L}\{(2t-2)u(t-1) + 2u(t-1)\} \\
&= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s} \\
&= \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s} + \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2} \\
&= \frac{(1-e^{-s})^2}{s} + \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \\
&= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}(s+1)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

elde edilir. FOH için transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} G_{FOH}(s) &= \frac{(1-e^{-s})^2}{T^2 s^2}\frac{Ts+1}{T} \\ &= G^2_{ZOH}(s)\frac{Ts+1}{T} \end{aligned} \tag{2.20}$$

şeklindedir. Örneğin daha önce Denklem 2.11 ile verilen sistemi FOH yöntemi ve yine aynı örnekleme zamanı ile ayrıklaştırmak gerekirse

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{1}{s+1}G_{FOH}(s) \\ &= \frac{1}{s+1}\frac{(1-e^{-s})^2}{T^2 s^2}\frac{Ts+1}{T} \\ &= \frac{1}{s+1}\frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}(s+1) \\ &= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \end{aligned} \tag{2.21}$$

ifadesi Z dönüşümüne tabi tutulmalıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left\{\frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}\right\} \\ &= \mathcal{Z}\{(1-e^{-s})^2\}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &= \left(1-z^{-1}\right)^2\frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \left(\frac{z-1}{z}\right)^2\frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z} \end{aligned} \tag{2.22}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere, birim gecikme elde edilmiştir.

Bölüm 3

Fark Denklemleri

Örnek sistemin ZOH yöntemi ile elde edilen ve Denklem 2.13 ile verilen sistem için

$$\begin{aligned}
G_{ZOH}(z) &= \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}} \\
&= \frac{(1-e^{-1})z^{-1}}{1-e^{-1}z^{-1}} \\
\frac{y(z)}{u(z)} &= \frac{(1-e^{-1})z^{-1}}{1-e^{-1}z^{-1}} \\
y(z)(1-e^{-1}z^{-1}) &= \frac{(1-e^{-1})z^{-1}u(z)}{1-e^{-1}z^{-1}} \\
y(z)-y(z-1)e^{-1} &= (1-e^{-1})u(z-1) \\
y(z) &= y(z-1)e^{-1}+(1-e^{-1})u(z-1) \\
y(z) &= 0.3679y(z-1)+0.6321u(z-1)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir. Z tanım bölgesinde tanımlı transfer fonksiyonundan fark denklemine geçişe örnektir. Fark denklemleri programlama dilleri ile kolaylıkla gerçeklenebilmektedir.

```
u=ones(1,length(t));
y=zeros(1,length(t));

for i=2:length(t)
    y(i)=exp(-T)*y(i-1)+(1-exp(-T))*u(i);
end
```

Benzer şekilde FOH yöntemi ile elde edilen ve Denklem 2.22 ile verilen ifade için

$$\begin{aligned} G_{FOH}(z) &= \frac{1}{z} \\ \frac{y(z)}{u(z)} &= z^{-1} \\ y(z) &= u(z-1) \end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. Yay-Kütle-Damper sistemi için dinamikleri ifade eden denklem

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \tag{3.3}$$

olarak verilmiştir. Bu diferansiyel denklem S tanım bölgesine dönüştürülürse

$$\begin{aligned} ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) &= U(s) \\ (ms^2 + bs + k)X(s) &= U(s) \\ \frac{X(s)}{U(s)} &= \frac{1}{ms^2 + bs + k} \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Denklem 3.3 ile verilen sistem için

$$\begin{aligned} m\frac{\Delta^2 x}{(\Delta t)^2} + b\frac{\Delta x}{\Delta t} + kx(kT) &= u(kT) \\ m\frac{\Delta(x(kT) - x((k-1)T))}{kT - (k-1)T} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{kT - (k-1)T} + kx(kT) &= u(kT) \\ m\frac{\Delta x(kT) - \Delta x((k-1)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\ m\frac{x(kT) - 2x((k-1)T) + x((k-2)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\ m\frac{x(kT) - 2x((k-1)T) + x((k-2)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\ (m + bT + kT^2)x(kT) = (2m + bT)x((k-1)T) - mx((k-2)T) + T^2u(kT) \\ x(kT) = \frac{2m + bT}{m + bT + kT^2}x((k-1)T) - \frac{m}{m + bT + kT^2}x((k-2)T) + \frac{T^2}{m + bT + kT^2}u(kT) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Örnek olması için $m = 1\,kg$, $b = 1\,Ns/m$, $k = 1\,Nm$ ve $T = 0.1$ olmak üzere fark denklemi

$$x(kT) = 1.8919x((k-1)T) - 0.9009x((k-2)T) + 0.009009u(kT) \tag{3.6}$$

olarak elde edilir. Transfer fonksiyonundan yola çıkarak $\zeta = b\sqrt{m}/(2m\sqrt{k})$, $w_n = \sqrt{k}/\sqrt{m}$ ve $\phi = \cos^{-1}(\zeta)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-0.1s}}{s(s^2+s+1)}\right\} \\
&= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s^2+s+1)}\right\} \\
&= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}z^2 + ze^{-\zeta w_n T}\sin(w_n\sqrt{1-\zeta^2}T-\phi)}{z^2 - 2ze^{-\zeta w_n T}\cos(w_n\sqrt{1-\zeta^2}T) + e^{-2\zeta w_n T}}\right) \qquad (3.7) \\
&= \frac{0.004833z^3 - 0.0001585z^2 - 0.004675z}{z^4 - 2.895z^3 + 2.8z^2 - 0.9048z} \\
&= \frac{0.004833z + 0.004675}{z^2 - 1.895z + 0.9048}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Bölüm 4

Zaman Domeni Kriterleri

Sürekli zamanda tanımlı birinci dereceden bir transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{p}{s+p} \tag{4.1}$$

olarak verilsin. Birim basamak giriş için yanıt

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{s+p}\cdot\frac{1}{s}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+p}\right\} \\ &= 1 - e^{-pt} \end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklinde hesaplanır. e^{-t} fonksiyonunun aldığı değerler için Çizelge 4.1 verilmiştir. Görüldüğü üzere 4.1 ile verilen sistemin yanıtı p değişkeninin değerinden bağımsız olarak 1 değerine yakınsamaktadır. 1 değerini aşmamaktadır. Dolayısıyla aşım değeri %0'dır. Sürekli halde oturduğu değerin %2 altı veya üstü ile tanımlanan %2'lik banda çıkmamak üzere girdiği zamana yerleşme zamanı denir. Bu tanımdan ve Çizelge 4.1'den yola çıkarak 4.1 ile verilen sistemin yerleşme zamanı $t_s = 4\,s$'dir. $p = 1$ olmaması durumunda zaman ekseni genişler veya daralır bu sebepten yerleşme zamanı

$$t_s = \frac{4}{p} \tag{4.3}$$

ile hesaplanır. İkinci dereceden bir sistem

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \tag{4.4}$$

Çizelge 4.1: e^{-t} fonksiyonunun aldığı değerler

Zaman $t(s)$	Değer e^{-t}	$1-e^{-t}$
1	0.3679	0.6321
2	0.1353	0.8647
3	0.0498	0.9502
4	0.0183	0.9817
5	0.0067	0.9933
6	0.0025	0.9975

ile tanımlanmaktadır. Burada ζ sönüm oranı ve w_n doğal frekans olarak adlandırılmaktadır. İkinci dereceden polinomun kökleri bulunurken faydalanılan $\Delta = b^2 - 4ac$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\Delta &= (2\zeta w_n)^2 - 4w_n^2 \\ &= 4\zeta^2 w_n^2 - 4w_n^2 \\ &= 4w_n^2(\zeta^2 - 1)\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir ve çözümün tipini belirlemek için

$$\begin{cases} \text{gerçel kök} & \Delta > 0 \quad \zeta > 1 \\ \text{çakışık kök} & \Delta = 0 \quad \zeta = 1 \\ \text{karmaşık kök} & \Delta < 0 \quad 0 < \zeta < 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

kullanılabilir. $\zeta > 1$ durumunda gerçel köklü çözüm olmasından dolayı sistem transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{p_1 p_2}{(s+p_1)(s+p_2)} \tag{4.7}$$

olarak güncellenebilir. $p_1 >> p_2$ durumunda p_2, $p_2 >> p_1$ durumunda p_1 yanıtın hızını ve davranışını belirler. $\zeta = 1$ olması durumunda yanıt birinci dereceden bir sisteme göre daha yavaş olmaktadır. Haricinde, $0 < \zeta < 1$ durumunda

$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n}, \quad \text{Aşım} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{4.8}$$

ile hesaplanmaktadır. İkinci dereceden sistem yanıtı,

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta w_n t}\left[\cos(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t)\right] \tag{4.9}$$

ile ifade edilmektedir. Sinüzoidal terimler salınımlı olduklarından sadece $e^{-\zeta w_n t}$ terimi yerleşme zamanının hesabı için önemlidir ve birinci dereceden sistem ile aynı ifade kullanılmaktadır. Aşım için

$$\begin{aligned}
\frac{dy(t)}{dt} &= 0 \\
\sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*)(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} - \sqrt{1-\zeta^2}w_n) &= 0 \\
\sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) &= 0 \\
\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^* &= \pi \\
t^* &= \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}w_n}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

yanıtta yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
M_p &= e^{-\zeta w_n t^*}\left[\cos(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}w_n t^*)\right] \\
&= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\left[\cos(\pi) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\pi)\right] \\
&= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Verilen yerleşme zamanı ve aşım formülleri kullanılarak sistem davranışı şekillendirilebilmektedir. Örneğin $t_s = 1$ ve aşım %10 olacak şekilde sistem transfer fonksiyonu seçilirse

$$\begin{aligned}
\zeta &= -\frac{\log(0.1)}{\sqrt{\pi^2 + \log(0.1)^2}} = 0.591 \\
w_n &= \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{0.591} = 6.7682
\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$G(s) = \frac{45.81}{s^2 + 8s + 45.81} \tag{4.13}$$

transfer fonksiyonu elde edilir.

Bölüm 5

Z Tanım Bölgesinde Kök Eğrisi

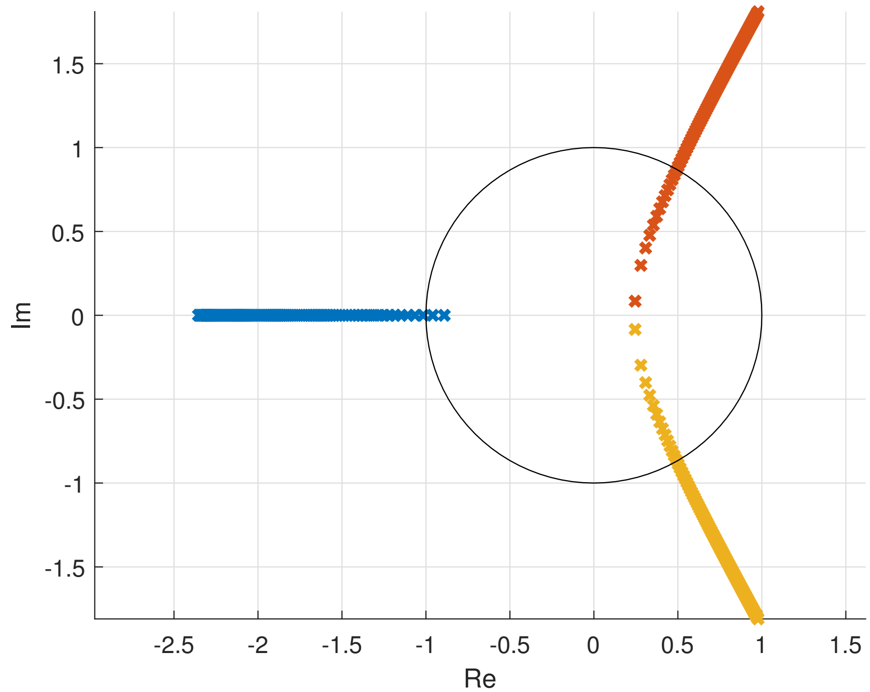
Z tanım bölgesinde bir transfer fonksiyonu $T = 0.2$ olmak üzere

$$G(z) = \frac{1}{z^3 + 0.4z^2 - 0.37z - 0.04} \tag{5.1}$$

olarak verilmiştir. P kontrolör ile kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{kG(z)}{1 + kG(z)} \\ T(z) &= \frac{\frac{k}{z^3+0.4z^2-0.37z-0.04}}{1 + \frac{k}{z^3+0.4z^2-0.37z-0.04}} \\ T(z) &= \frac{k}{z^3 + 0.4z^2 - 0.37z - 0.04 + k} \end{aligned} \tag{5.2}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 5.1: Sisteme ait kök eğrisi

Bölüm 6

Z Tanım Bölgesinde Kontrolör Tasarımı

1. Geçici hal yanıtını şekillendirecek isterler dikkate alınarak s tanım bölgesinde baskın kutuplar seçilir.

2. Baskın kutuplar $z = e^{sT}$ ilişkisi ile z tanım bölgesine aktarılır.

3. Kontrol edilecek sistem Z tanım bölgesine geçirilir.

4. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu elde edilir ve kutup atama yapılır.

Örnek sistem

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \tag{6.1}$$

z tanım bölgesinde $T = 0.2$ olmak üzere

$$G(z) = \frac{0.1648}{z - 0.6703} \tag{6.2}$$

olarak elde edilmektedir. Yerleşme zamanı $t_s = 2$ ve aşım %10 isterleri verilmiştir. Bu durumda $\zeta = 0.591$ ve $w_n = 6.7664$ seçilir. Seçilen sönüm oranı ve doğal frekans ile baskın kutuplar

$$s_{1,2} = -4 \pm 5.4575i \tag{6.3}$$

şeklinde hesaplanır. $z = e^{sT}$ ifadesi ile z tanım bölgesinde kutuplar

$$z_{1,2} = 0.2072 \pm 0.3987i \tag{6.4}$$

ve kutuplardan oluşturulacak polinom

$$p(z) = z^2 - 0.4144z + 0.2019 \tag{6.5}$$

olarak hesaplanır. P tipi kontrolör ile kapalı çevrim transfer fonksiyonunun ifadesi

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{kG(z)}{1 + kG(z)} \\ &= \frac{k\frac{0.1648}{z-0.6703}}{1 + k\frac{0.1648}{z-0.6703}} \\ &= \frac{k(0.1648)}{z - 0.6703 + k(0.1648)} \\ &= \frac{0.1648k}{z + 0.1648k - 0.6703} \end{aligned} \tag{6.6}$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere karakteristik polinom birinci dereceden elde edilmiştir ve her iki isterlerin sağlanması mümkün değildir. Yerleşme zamanı sağlanmak istenirse,

$$s = -\frac{4}{t_s} = -4 \tag{6.7}$$

ve z tanım bölgesinde

$$z = e^{sT} = e^{-0.8} = 0.4493 \tag{6.8}$$

elde edilir. Bu durumda P kontrolör

$$\begin{aligned} -0.1648k + 0.6703 &= 0.4493 \\ k &= 1.341 \end{aligned} \tag{6.9}$$

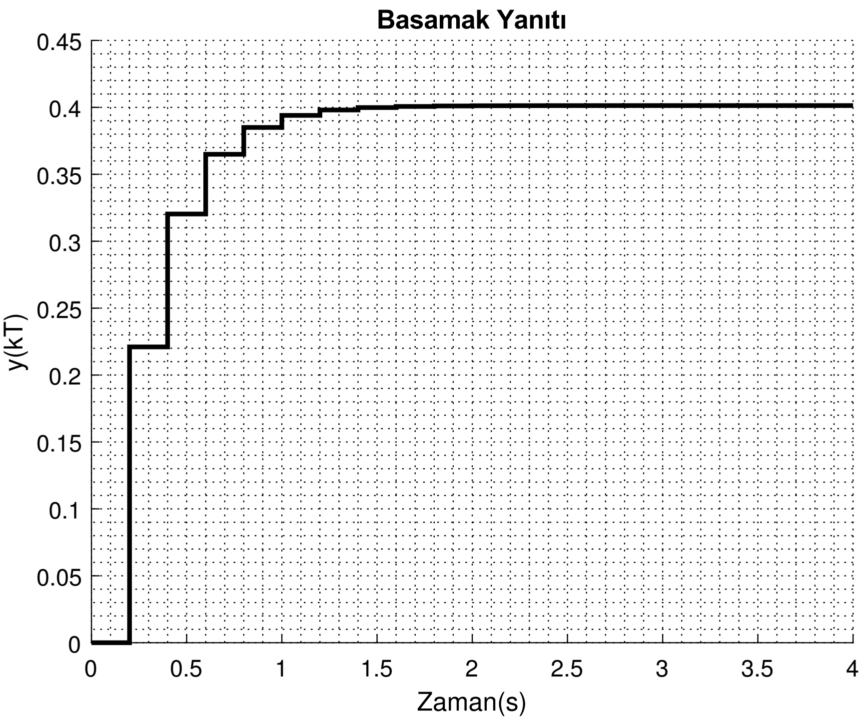
şeklindedir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$T(z) = \frac{0.221}{z - 0.4493} \tag{6.10}$$

şeklindedir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonuna ait basamak yanıtı Şekil 6.1 ile verilmiştir.

PD kontrolör transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(z) &= K_p + K_d(1 - z^{-1}) \\ &= K_p + K_d(\frac{z-1}{z}) \\ &= \frac{K_p z + K_d z - K_d}{z} \\ &= \frac{(K_p + K_d)z - K_d}{z} \end{aligned} \tag{6.11}$$



Şekil 6.1: P kontrol için kapalı çevrim basamak yanıtı

olmak üzere kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{F(z)G(z)}{1+F(z)G(z)} \\ &= \frac{\frac{(K_p+K_d)z-K_d}{z}\frac{0.1648}{z-0.6703}}{1+\frac{(K_p+K_d)z-K_d}{z}\frac{0.1648}{z-0.6703}} \\ &= \frac{0.1648(K_d+K_p)z-0.1648-K_d}{z^2+(0.1648(K_p+K_d)-0.6703)z-0.1648K_d} \end{aligned} \tag{6.12}$$

şeklindedir. Bu durumda tasarım problemi

$$\begin{aligned} 0.1648(K_p+K_d)-0.6703 &= -0.4144 \\ -0.1648K_d &= 0.2019 \end{aligned} \tag{6.13}$$

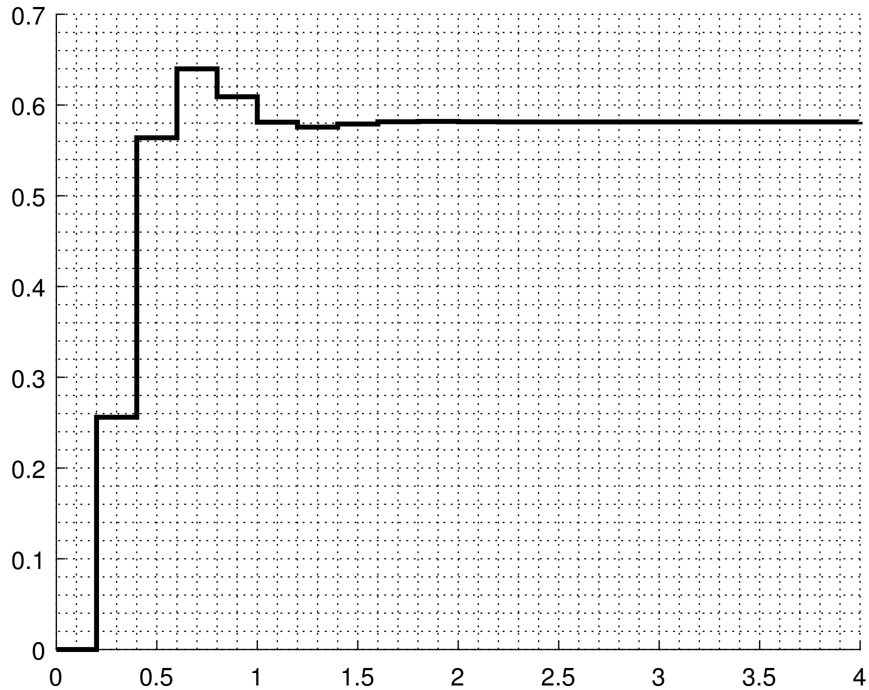
ve çözüm ise $K_d = -1.2251$ ve $K_p = 2.7778$ olarak elde edilir. PD kontrolör

$$F(z) = \frac{1.553z+1.225}{z} \tag{6.14}$$

ve kapalı çevrim transfer fonksiyonu ifadesi

$$T(z) = \frac{0.2559z + 0.2019}{z^2 - 0.4144z + 0.2019} \tag{6.15}$$

olarak elde edilir.



Şekil 6.2: PD kontrol için kapalı çevrim basamak yanıtı

PI kontrolörü

$$\begin{aligned} F(z) &= K_p + \frac{K_i z}{z-1} \\ &= \frac{(K_p + K_i)z - K_p}{z-1} \end{aligned} \tag{6.16}$$

olarak tanımlanmıştır. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{F(z)G(z)}{1 + F(z)G(z)} \\ &= \frac{\frac{(K_p+K_i)z-K_p}{z-1}\frac{0.1648}{z-0.6703}}{1 + \frac{(K_p+K_i)z-K_p}{z-1}\frac{0.1648}{z-0.6703}} \\ &= \frac{0.1648(K_p + K_i)z - 0.1648K_p}{z^2 + (0.1648(K_p + K_i) - 1.6703)z + 0.6703 - 0.1648K_p} \end{aligned} \tag{6.17}$$

şeklindedir. Tasarım problemi

$$\begin{aligned} 0.1648(K_p + K_i) - 1.6703 &= -0.4144 \\ 0.6703 - 0.1648K_p &= 0.2019 \end{aligned} \tag{6.18}$$

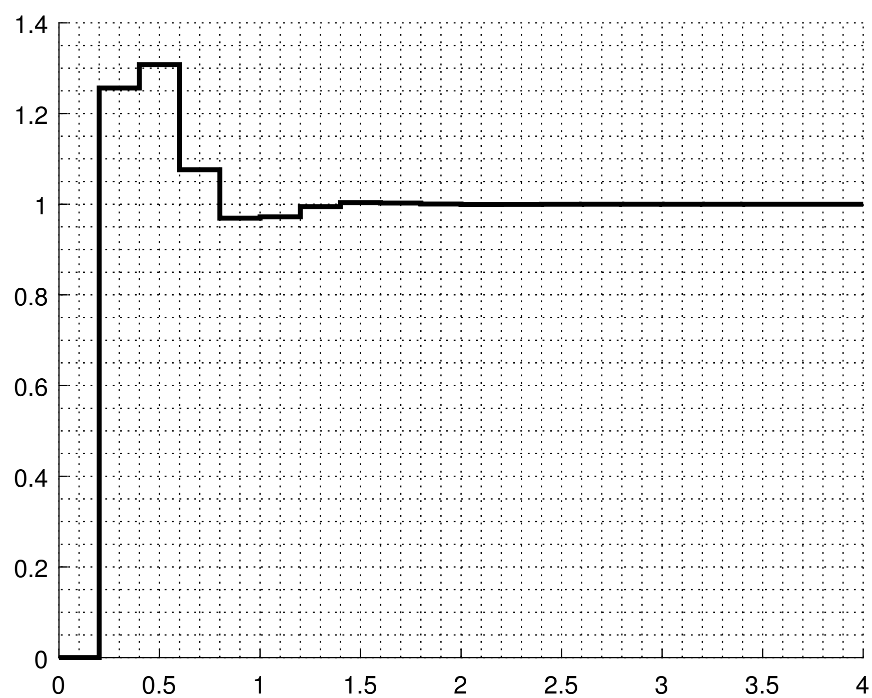
ve çözüm ise $K_p = 2.8423$ ve $K_i = 4.7784$ şeklindedir. Bu durumda PI kontrolör

$$F(z) = \frac{7.621z - 2.842}{z - 1} \tag{6.19}$$

ve kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1.256z - 0.4685}{z^2 - 0.4141z + 0.2018} \\ &= \frac{1.2562(z - 0.373)}{z^2 - 0.4141z + 0.2018} \end{aligned} \tag{6.20}$$

olarak elde edilir.



Şekil 6.3: PI kontrol için kapalı çevrim basamak yanıtı