elde edilir. FOH için transfer fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
G_{FOH}(s) &= \frac{(1-e^{-s})^2}{T^2 s^2}\frac{Ts+1}{T} \\
&= G_{ZOH}^2(s)\frac{Ts+1}{T}
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

şeklindedir. Örneğin daha önce Denklem 2.11 ile verilen sistemi FOH yöntemi ve yine aynı örnekleme zamanı ile ayrıklaştırmak gerekirse

$$
\begin{aligned}
L(s) &= \frac{1}{s+1}G_{FOH}(s) \\
&= \frac{1}{s+1}\frac{(1-e^{-s})^2}{T^2 s^2}\frac{Ts+1}{T} \\
&= \frac{1}{s+1}\frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}(s+1) \\
&= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

ifadesi Z dönüşümüne tabi tutulmalıdır. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \mathcal{Z}\left\{\frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}\right\} \\
&= \mathcal{Z}\{(1-e^{-s})^2\}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\
&= \left(1-z^{-1}\right)^2\frac{Tz}{(z-1)^2} \\
&= \left(\frac{z-1}{z}\right)^2\frac{z}{(z-1)^2} \\
&= \frac{1}{z}
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

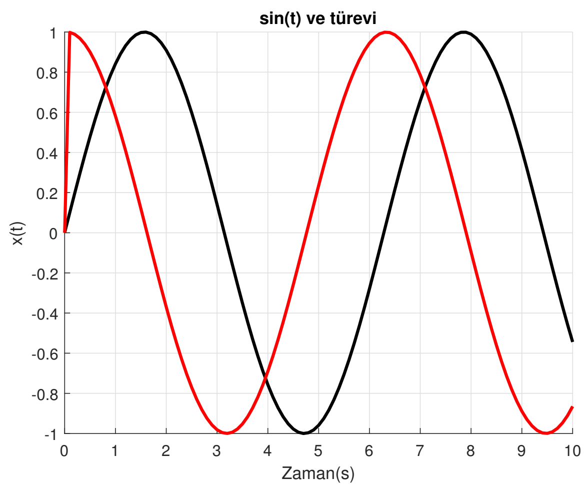
elde edilir. Görüldüğü üzere, birim gecikme elde edilmiştir.

1. $x(t) = sin(t)$ fonksiyonunun türevini hesaplayıp çiziniz.

```
T=0.1
t=np.arange(0,10+1,T)
xt=np.sin(t)
dxt=np.zeros(t.shape)
for i in range(1,len(t)):
```

```
    dxt[i]=(xt[i]-xt[i-1])/T

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("sin(t)")
plt.title("Sinus ve turevi")

plt.plot(t,xt,'k')
plt.plot(t,dxt,'r')
plt.show()
```

Şekil 2.1'de $sin(t)$ ve türevi gösterilmiştir.

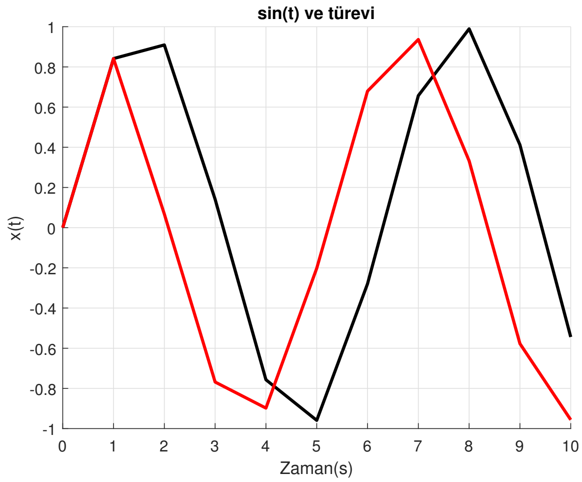



Şekil 2.1: $sin(t)$ ve türevinin karşılaştırılması($T = 0.1$)

Şekil 2.2'de daha düşük bir örnekleme zamanı seçilmiştir ve bu sebeple gerek sinyal gerekse türevi düşük kalitededir.

2. $x(t) = e^{-t}$ sinyalinin integralini hesaplayınız ve çizdiriniz.

```
T=0.1
t=np.arange(0,10+1,T)
xt=np.exp(-t)
q=np.zeros(np.size(t))
for i in range(1,len(t)):
    q[i]=q[i-1]+T*xt[i-1]

plt.grid('minor')
```



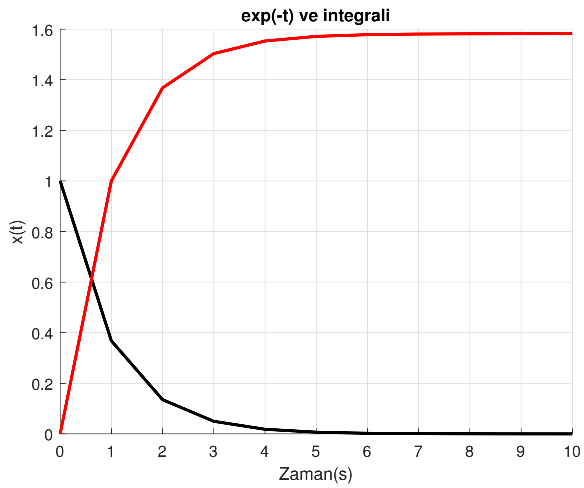

Şekil 2.2: $sin(t)$ ve türevinin karşılaştırılması($T = 1$)

```
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("e^(-t)")
plt.title("e^(-t) ve integrali")

plt.plot(t,xt,'k')
plt.plot(t,q,'r')
plt.show()
```

Şekil 2.3'de integral çizdirilmiştir.

3. ZOH yöntemini kullanarak $T = 1$ olmak üzere $x(kT) = 1$ sinyalini veri tutucunu çıkışını çizdiriniz.

```
T=1
t=np.arange(0,3+1,T)
xt=np.array([1,2,-1,3])

T=0.01
tnew=np.arange(0,3+1,T)
yt=np.zeros(tnew.shape)
for i in range(0,len(t)):
    for j in range(0,100):
        yt[100*i+j]=xt[i]

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
```



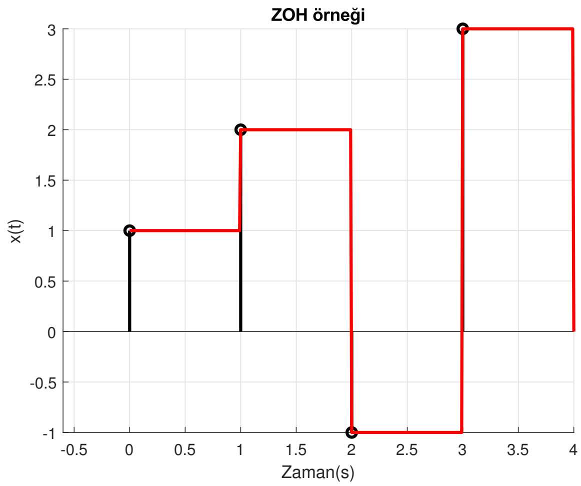

Şekil 2.3: $sin(t)$ ve integralinin karşılaştırılması($T = 1$)

```
plt.ylabel("Veri tutucu")
plt.title("ZOH ornegi")

plt.stem(t,xt,'k')
plt.plot(tnew,yt,'r')
plt.show()
```

Şekil 2.4'de ZOH işleminin sonucu gösterilmiştir.

4. FOH yöntemini kullanarak $T = 1$ olmak üzere $x(kT) = 1$ sinyalini veri tutucunu çıkışını çizdiriniz.

```
T=1
t=np.arange(0,3+1,T)
xt=np.array([1,2,-1,3])

T=0.01
tnew=np.arange(0,3+1,T)
yt=np.zeros(tnew.shape)
for i in range(0,len(t)-1):
    for j in range(0,100):
        yt[100*i+j]=xt[i]+0.01*j*(xt[i+1]-xt[i])

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("Veri tutucu")
```

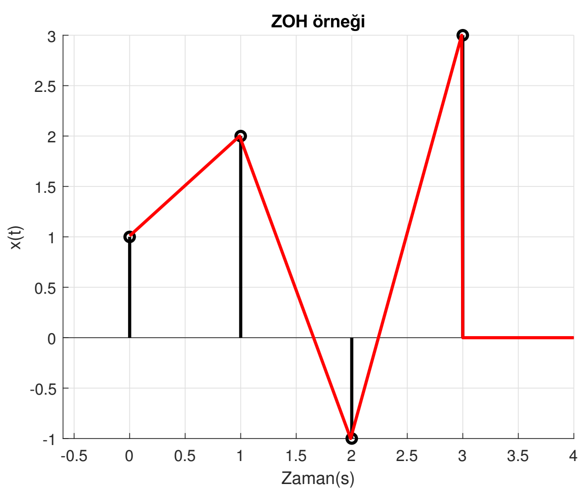



Şekil 2.4: ZOH örneği

```
plt.title("FOH ornegi")

plt.stem(t,xt,'k')
plt.plot(tnew,yt,'r')
plt.show()
```

---

Şekil 2.5'de FOH işleminin sonucu gösterilmiştir.




Şekil 2.5: FOH örneği

5. Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \tag{2.23}$$

ile verilen sistemini ZOH yöntemini kullanarak Z tanım bölgesindeki ifadesini elde ediniz. $T = 0.1$ için basamak yanıtını karşılaştırınız.

$$\begin{aligned}
L(s) &= G_{ZOH}(s)G(s) \\
&= \frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+2} \\
&= (1-e^{-sT})\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}\right) \\
L(z) &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{1-e^{-sT}\right\}\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+2)}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}(1-z^{-1})\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}\right) \\
&= \frac{1}{2}(1-z^{-1})\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2T}}\right) \\
&= \left(\frac{z-1}{2z}\right)\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2T}}\right) \\
&= 1 - \frac{(z-1)}{2z-2e^{-2T}} \\
&= \frac{z-e^{-2T}-(z-1)}{2z-2e^{-2T}} \\
&= \frac{1-e^{-2T}}{2z-2e^{-2T}}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$T = 0.1$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
L(z) &= 0.5\frac{1-e^{-0.2}}{z-e^{-0.2}} \\
&= 0.5\frac{1-e^{-0.2}}{z-e^{-0.2}} \\
&= \frac{0.09}{z-0.82}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

elde edilir.

```
T=0.1
Gs=control.tf(1,[1,2])
```

```
t, y = control.step_response(Gs)
plt.plot(t,y,'k')
Gz=control.tf(0.09,[1,-0.82],dt=T)
t, y = control.step_response(Gz)
plt.stem(t,y,'r')
plt.show()
```

---

6. Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \tag{2.26}$$

ile verilen sistemini FOH yöntemini kullanarak Z tanım bölgesindeki ifadesini elde ediniz. $T = 0.1$ için basamak yanıtını karşılaştırınız.

$$\begin{aligned} L(s) &= G_{FOH}(s)G(s) \\ L(s) &= G_{ZOH}^2(s)\frac{Ts+1}{T}G(s) \\ &= \frac{(1-e^{-sT})^2}{s^2}\frac{Ts+1}{Ts+2T} \\ &= (1-e^{-sT})^2\frac{Ts+1}{Ts^2(s+2)} \end{aligned} \tag{2.27}$$

elde edilir. Kesir ayırma işlemi için

$$\begin{aligned} \frac{Ts+1}{s^2(s+2)} &= \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \\ \frac{Ts+1}{s^2(s+2)} &= \frac{(As+B)(s+2)+Cs^2}{s^2(s+2)} \\ Ts+1 &= (As+B)(s+2)+Cs^2 \\ Ts+1 &= As(s+2)+B(s+2)+Cs^2 \\ Ts+1 &= As^2+Cs^2+2As+Bs+2B \\ Ts+1 &= (A+C)s^2+(2A+B)s+2B \end{aligned} \tag{2.28}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ 2A+B &= T \\ 2B &= 1 \end{aligned} \tag{2.29}$$

çözülürse $B = 0.5$, $A = 0.5T - 0.25$ ve $B = -0.5T + 0.25$ hesaplanır. Yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{Ts+1}{s^2(s+2)} &= \frac{(0.5T-0.25)s+0.5}{s^2} + \frac{-0.5T+0.25}{s+2} \\ &= \frac{(0.5T-0.25)}{s} + \frac{0.5}{s^2} + \frac{-0.5T+0.25}{s+2}\end{aligned} \tag{2.30}$$

ve

$$\begin{aligned}&= \mathcal{Z}\left\{\frac{(0.5T-0.25)}{s} + \frac{0.5}{s^2} + \frac{-0.5T+0.25}{s+2}\right\} \\ &= (0.5T-0.25)\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 0.5\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - (0.5T-0.25)\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= (0.5T-0.25)\frac{z}{z-1} + 0.5\frac{Tz}{(z-1)^2} - (0.5T-0.25)\frac{z}{z-e^{-2T}}\end{aligned} \tag{2.31}$$

haliyle

$$= (1-z^{-1})^2\left(\frac{(0.5T-0.25)}{T}\frac{z}{z-1} + \frac{0.5}{T}\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(0.5T-0.25)}{T}\frac{z}{z-e^{-2T}}\right) \tag{2.32}$$

elde edilir. $T = 0.1$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&= (1-z^{-1})^2\left(-2\frac{z}{z-1} + 5\frac{0.1z}{(z-1)^2} + 2\frac{z}{z-0.82}\right) \\ &= (1-z^{-1})^2\left(\frac{-2z(z-1)(z-0.82) + 0.5z(z-0.82) + 2z(z-1)^2}{(z-0.82)(z-1)^2}\right) \\ &= z(1-z^{-1})^2\left(\frac{-2(z-1)(z-0.82) + 0.5(z-0.82) + 2(z-1)^2}{(z-0.82)(z-1)^2}\right) \\ &= z(1-z^{-1})^2\left(\frac{-2z^2 + 3.64z - 1.64 + 0.5z - 0.41 + 2z^2 - 4z + 2}{(z-0.82)(z-1)^2}\right) \\ &= z(1-z^{-1})^2\left(\frac{3.64z - 1.64 + 0.5z - 0.41 - 4z + 2}{(z-0.82)(z-1)^2}\right) \\ &= z(1-z^{-1})^2\left(\frac{0.14z - 0.05}{(z-0.82)(z-1)^2}\right) \\ &= \frac{0.14z - 0.05}{(z-0.82)z} \\ &= \frac{0.14z - 0.05}{z^2 - 0.82z}\end{aligned} \tag{2.33}$$

Kod ise

```
T=0.1
Gs=control.tf(1,[1,2])
t, y = control.step_response(Gs)
plt.plot(t,y,'k')
Gz=control.tf([0.14,-0.05],[1,-0.82,0],dt=T)
print(Gz)
t, y = control.step_response(Gz)
plt.stem(t,y,'r')
plt.show()
```

şeklindedir.

# Bölüm 3

# Fark Denklemleri

Örnek sistemin ZOH yöntemi ile elde edilen ve Denklem 2.13 ile verilen sistem için

$$\begin{aligned}
G_{ZOH}(z) &= \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}} \\
&= \frac{(1-e^{-1})z^{-1}}{1-e^{-1}z^{-1}} \\
\frac{y(z)}{u(z)} &= \frac{(1-e^{-1})z^{-1}}{1-e^{-1}z^{-1}} \\
y(z)(1-e^{-1}z^{-1}) &= \frac{(1-e^{-1})z^{-1}u(z)}{1-e^{-1}z^{-1}} \\
y(z)-y(z-1)e^{-1} &= (1-e^{-1})u(z-1) \\
y(z) &= y(z-1)e^{-1}+(1-e^{-1})u(z-1) \\
y(z) &= 0.3679y(z-1)+0.6321u(z-1)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir. Z tanım bölgesinde tanımlı transfer fonksiyonundan fark denklemine geçişe örnektir. Fark denklemleri programlama dilleri ile kolaylıkla gerçeklenebilmektedir. Benzer şekilde FOH yöntemi ile elde edilen ve Denklem 2.22 ile verilen ifade için

$$\begin{aligned}
G_{FOH}(z) &= \frac{1}{z} \\
\frac{y(z)}{u(z)} &= z^{-1} \\
y(z) &= u(z-1)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. Yay-Kütle-Damper sistemi için dinamikleri ifade eden denklem

$$m\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+kx(t)=u(t) \tag{3.3}$$

olarak verilmiştir. Bu diferansiyel denklem S tanım bölgesine dönüştürülürse

$$\begin{aligned} ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) &= U(s) \\ (ms^2 + bs + k)X(s) &= U(s) \\ \frac{X(s)}{U(s)} &= \frac{1}{ms^2 + bs + k} \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Denklem 3.3 ile verilen sistem için

$$\begin{aligned} m\frac{\Delta^2 x}{(\Delta t)^2} + b\frac{\Delta x}{\Delta t} + kx(kT) &= u(kT) \\ m\frac{\Delta(x(kT) - x((k-1)T))}{kT-(k-1)T} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{kT-(k-1)T} + kx(kT) &= u(kT) \\ m\frac{\Delta x(kT) - \Delta x((k-1)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\ m\frac{x(kT) - 2x((k-1)T) + x((k-2)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\ m\frac{x(kT) - 2x((k-1)T) + x((k-2)T)}{T^2} + b\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} + kx(kT) &= u(kT) \\ (m + bT + kT^2)x(kT) &= (2m + bT)x((k-1)T) - mx((k-2)T) + T^2u(kT) \\ x(kT) = \frac{2m+bT}{m+bT+kT^2}x((k-1)T) - \frac{m}{m+bT+kT^2}&x((k-2)T) + \frac{T^2}{m+bT+kT^2}u(kT) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Örnek olması için $m = 1\,kg$, $b = 1\,Ns/m$, $k = 1\,Nm$ ve $T = 0.1$ olmak üzere fark denklemi

$$x(kT) = 1.8919x((k-1)T) - 0.9009x((k-2)T) + 0.009009u(kT) \tag{3.6}$$

olarak elde edilir. Transfer fonksiyonundan yola çıkarak $\zeta = b\sqrt{m}/(2m\sqrt{k})$, $w_n = \sqrt{k}/\sqrt{m}$ ve $\phi = \cos^{-1}(\zeta)$ olmak üzere

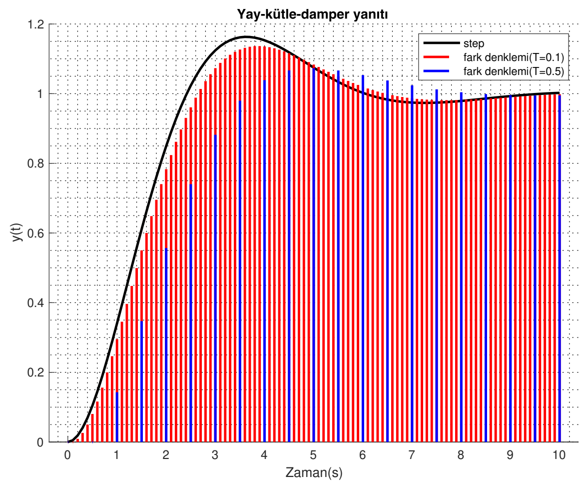
$$\begin{aligned}
G(z) &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-0.1s}}{s(s^2+s+1)}\right\} \\
&= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s^2+s+1)}\right\} \\
&= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}z^2 + ze^{-\zeta w_n T}\sin(w_n\sqrt{1-\zeta^2}T-\phi)}{z^2-2ze^{-\zeta w_n T}\cos(w_n\sqrt{1-\zeta^2}T)+e^{-2\zeta w_n T}}\right) \\
&= \frac{0.004833z^3 - 0.0001585z^2 - 0.004675z}{z^4 - 2.895z^3 + 2.8z^2 - 0.9048z} \\
&= \frac{0.004833z + 0.004675}{z^2 - 1.895z + 0.9048}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir.

1. Yay-kütle-damper sisteminin çıkış işaretini fark denklemlerini kullanarak elde ediniz.

```python
m=1
b=1
k=1
T=0.1
fac1=(2*m+b*T)/(m+b*T+k*T**2)
fac2=-m/(m+b*T+k*T**2)
fac3=T**2/(m+b*T+k*T**2)
tvec=np.arange(0,10+1,T)
xt=np.zeros(tvec.shape)
ut=np.ones(tvec.shape)
for i in range(0,len(tvec)):
    if i==0:
        xt[i]=fac1*0+fac2*0+fac3*0
    elif i==1:
        xt[i]=fac1*xt[i-1]+fac2*0+fac3*ut[i-1]
    else:
        xt[i]=fac1*xt[i-1]+fac2*xt[i-2]+fac3*ut[i-1]

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("x(t)")
plt.title("Yay-kutle-damper sistem yaniti")
```

```
Gz=control.tf(1,np.array([m,b,k]))
tc, yc=control.step_response(Gz)
plt.plot(tc,yc,'k')
plt.stem(tvec,xt,'b')
plt.show()
```

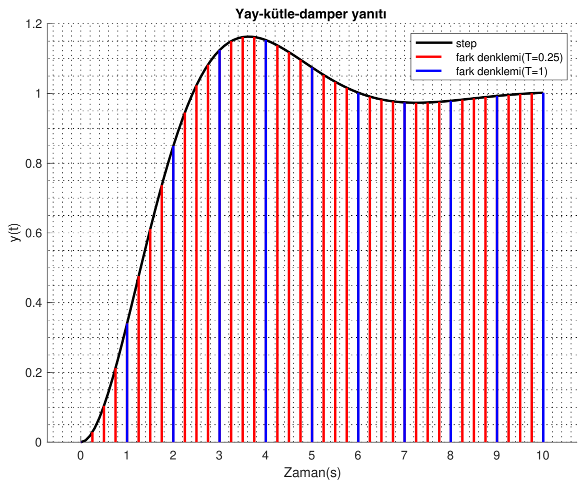



Şekil 3.1: Yay-kütle-damper sisteminin çıkış işareti

2. Yay-kütle-damper sisteminin çıkış işaretini ayrık transfer fonksiyonu kullanarak elde ediniz.

```
m=1
b=1
k=1

plt.grid('minor')
plt.xlabel("Zaman(s)")
plt.ylabel("x(t)")
plt.title("Yay-kutle-damper sistem yaniti")

Gz=control.tf(1,np.array([m,b,k]))
tc, yc=control.step_response(Gz)

Gz1=control.c2d(control.tf(1,np.array([m,b,k])),0.1)
tc1, yc1=control.step_response(Gz1)

Gz2=control.c2d(control.tf(1,np.array([m,b,k])),0.5)
tc2, yc2=control.step_response(Gz2)
```

```
plt.plot(tc,yc,'k')
plt.stem(tc1,yc1,'r')
plt.stem(tc2,yc2,'b')
plt.show()
```




Şekil 3.2: Yay-kütle-damper sisteminin çıkış işareti