Ad Soyad: Öğrenci No:

**MEKATRONİK BÖLÜMÜ**
**BİLGİSAYARLI KONTROL SİSTEMLERİ**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ders Kodu: | MKT2002 | | Tarih: | 10.05.2025 |
| Sınav Türü: | Genel Sınav | | Saat: | 10:00 |
| Dönemi: | 2024-2025 | | Süre: | 90dk |

| **Soru:** | **1** | **2** | **3** | **Toplam** |
|---|---|---|---|---|
| **Puan:** | **35** | **35** | **30** | **100** |
| **Not:** | 35 | 35 | 30 | 100 |

**Uyarı:**

- **Soruları dikkatlice okuyunuz. Hesap makinesi kullanılabilir.**
- **Defter, kitap ve notlar açık bir sınavdır.**
- **İşlemleri atlamadan ve ayrıntılı olarak veriniz. Sadece nümerik yanıtlar veya çizimler ara işlemler olmadan kabul edilmemektedir.**
- **Yuvarlamalar 2 hane yapılacaktır. $1.99456 \approx 1.99$ olarak alınacaktır.**

**S1.** (35p) Örnekleme zamanı $T = 1\,s$ olan birinci dereceden bir sistem

$$G(z) = \frac{1}{z + 1.2} \tag{1}$$

olarak verilmiştir. $t_s = 4\,s$ ve aşım %16.3 olacak şekilde bir ayrık PI kontrolör tasarlayınız. Aşım isterinden hareketle

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{log_e(0.163)}{\sqrt{\pi^2 + log_e(0.163)^2}} \\ &= 0.5 \end{aligned} \tag{2}$$

ve yerleşme zamanından hareketle ise

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{4}{t_s \zeta} \\ w_n &= \frac{4}{4 \cdot 0.5} \\ w_n &= 2 \end{aligned} \tag{3}$$

elde edilir. S tanım bölgesinde kutuplar

$$\begin{aligned} s &= -\zeta w_n + \sqrt{1 - \zeta^2} w_n \\ s &= -1 \pm \sqrt{3} i \\ s &= -1 \pm 1.73 i \end{aligned} \tag{4}$$

olarak hesaplanır. Z tanım bölgesine geçilince

$$\begin{aligned} z &= e^s \\ &= e^{-1 \pm 1.73 i} \\ &= e^{-1} \angle 1.73 \\ &= e^{-1} \angle 99.12^o \\ &= 0.39 \pm 0.46 i \end{aligned} \tag{5}$$

elde edilir. Kapalı çevrim için aday polinom

$$p(z) = z^2 - 0.79z + 0.37 \tag{6}$$

şeklindedir. PI kontrolör

$$F(z) = \frac{k_i z + k_p}{z - 1} \tag{7}$$

olmak üzere kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{\frac{k_i z+k_p}{z-1}\frac{1}{z+1.2}}{1+\frac{k_i z+k_p}{z-1}\frac{1}{z+1.2}} \\ &= \frac{k_i z + k_p}{z^2+0.2z-1.2+k_i z+k_p} \\ &= \frac{k_i z + k_p}{z^2+(0.2+k_i)z+k_p-1.2} \end{aligned} \tag{8}$$

şeklindedir. Bu durumda tasarım problemi

$$\begin{aligned} -0.79 &= 0.2 + k_i \\ 0.37 &= -1.2 + k_p \end{aligned} \tag{9}$$

ve çözüm $k_p = -0.99$ ve $k_p = 1.57$ olarak elde edilir. Sonuç olarak PI kontrolör

$$F(z) = \frac{-0.99z+1.57}{z-1} = \frac{-0.99(z-1.59)}{z-1} \tag{10}$$

olarak hesaplanır.

**S2.** (35p) Ayrık bir durum uzayı

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

olarak verilmiştir. Durum geri besleme kontrolörü için amaçlanan kapalı çevrim karakteristikleri

$$p(z) = z^2 + 0.5z + 0.25 \tag{12}$$

ile ifade edilmektedir. Durum geri beleme kontrolörünü elde ediniz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$p_d(A)$ terimi

$$\begin{aligned} p_d(A) &= A \cdot A + 0.5A + 0.25I \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.75 & -0.5 \\ 0.5 & -0.25 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

ve $\Phi$ ise

$$\begin{aligned} \Phi &= [B \; AB] \\ \Phi &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{14}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Tersi ise

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ \Phi^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

olarak soruda verilmiştir. Ackermann formülü gereğince durum geri besleme kontrolörü

$$\begin{aligned} K &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \Phi^{-1} p_d(A) \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.75 & -0.5 \\ 0.5 & -0.25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.75 & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

şeklinde elde edilir.

**S3.** (30p) S tanım bölgesinde verilen

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} \tag{17}$$

ifadeyi z tanım bölgesine dönüştürünüz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 4.5 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4.5 & -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -4 & 2 & -1. \\ 4.5 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 4.5 & -1.5 & 0.5 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4.5 & -1.5 & 0.5 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4.5 & -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Verilen ifadeden

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} \\ A(s+1)(s+3) + B(s+2)(s+3) + C(s+1)(s+2) &= 1 \\ A(s^2+4s+3) + B(s^2+5s+6) + C(s^2+3s+2) &= 1 \\ As^2 + 4As + 3A + Bs^2 + 5Bs + 6B + Cs^2 + 3Cs + 2C &= 1 \\ (A+B+C)s^2 + (4A+5B+3C)s + (3A+6B+2C) &= 1 \end{aligned} \tag{18}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ 4A+5B+3C &= 0 \\ 3A+6B+2C &= 1 \end{aligned} \tag{19}$$

elde edilir. Matrisin tersi kullanılarak

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 4.5 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

Çözüm ile

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3} \tag{21}$$

ifadesi yazılır.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right\} &= -\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3}\right\} \\ &= -\frac{z}{z-e^{-2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-e^{-1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-e^{-3}} \end{aligned} \tag{22}$$