

MEKATRONİK BÖLÜMÜ
BİLGİSAYARLI KONTROL SİSTEMLERİ

| | | | | |
|-------------|-------------|--|--------|------------|
| Ders Kodu: | MKT2002 | | Tarih: | 10.05.2025 |
| Sınav Türü: | Genel Sınav | | Saat: | 10:00 |
| Dönemi: | 2024-2025 | | Süre: | 90dk |

| | | | | |
|-------|----|----|----|--------|
| Soru: | 1 | 2 | 3 | Toplam |
| Puan: | 35 | 35 | 30 | 100 |
| Not: | 35 | 35 | 30 | 100 |

Uyarı:

- Soruları dikkatlice okuyunuz. Hesap makinesi kullanılabilir.
- Defter, kitap ve notlar açık bir sınavdır.
- İşlemleri atlamadan ve ayrıntılı olarak veriniz. Sadece nümerik yanıtlar veya çizimler ara işlemler olmadan kabul edilmemektedir.
- Yuvarlamalar 2 hane yapılacaktır. $1.99456 \approx 1.99$ olarak alınacaktır.

S1. (35p) Örnekleme zamanı $T = 1\text{ s}$ olan birinci dereceden bir sistem

$$G(z) = \frac{1}{z + 1.2} \quad (1)$$

olarak verilmiştir. $t_s = 4\text{ s}$ ve aşım %16.3 olacak şekilde bir ayrık PI kontrolör tasarlayınız. Aşım isterinden hareketle

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{\log_e(0.163)}{\sqrt{\pi^2 + \log_e(0.163)^2}} \\ &= 0.5 \end{aligned} \quad (2)$$

ve yerleşme zamanından hareketle ise

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{4}{t_s \zeta} \\ w_n &= \frac{4}{4 \cdot 0.5} \\ w_n &= 2 \end{aligned} \quad (3)$$

elde edilir. S tanım bölgesinde kutuplar

$$\begin{aligned} s &= -\zeta w_n + \sqrt{1 - \zeta^2} w_n \\ s &= -1 \pm \sqrt{3}i \\ s &= -1 \pm 1.73i \end{aligned} \quad (4)$$

olarak hesaplanır. Z tanım bölgesine geçilince

$$\begin{aligned} z &= e^{0.5s} \\ &= e^{-0.5 \pm 0.87i} \\ &= e^{-0.5} \angle 0.87 \\ &= e^{-0.5} \angle 49.85^\circ \\ &= 0.39 \pm 0.46i \end{aligned} \quad (5)$$

elde edilir. Kapalı çevrim için aday polinom

$$p(z) = z^2 - 0.79z + 0.37 \quad (6)$$

şeklindedir. PI kontrolör

$$F(z) = \frac{k_i z + k_p}{z - 1} \quad (7)$$

olmak üzere kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 T(z) &= \frac{\frac{k_i z + k_p}{z-1} \frac{1}{z+1.2}}{1 + \frac{k_i z + k_p}{z-1} \frac{1}{z+1.2}} \\
 &= \frac{k_i z + k_p}{z^2 + 0.2z - 1.2 + k_i z + k_p} \\
 &= \frac{k_i z + k_p}{z^2 + (0.2 + k_i)z + k_p - 1.2}
 \end{aligned} \tag{8}$$

şeklindedir. Bu durumda tasarım problemi

$$\begin{aligned}
 -0.79 &= 0.2 + k_i \\
 0.37 &= -1.2 + k_p
 \end{aligned} \tag{9}$$

ve çözüm $k_p = -0.99$ ve $k_p = 1.57$ olarak elde edilir. Sonuç olarak PI kontrolör

$$F(z) = \frac{-0.99z + 1.57}{z - 1} = \frac{-0.99(z - 1.59)}{z - 1} \tag{10}$$

olarak hesaplanır.

S2. (35p) Ayrık bir durum uzayı

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0] \tag{11}$$

olarak verilmiştir. Durum geri besleme kontrolörü için amaçlanan kapalı çevrim karakteristikleri

$$p(z) = z^2 + 0.5z + 0.25 \tag{12}$$

ile ifade edilmektedir. Durum geri beleme kontrolörünü elde ediniz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$p_d(A)$ terimi

$$\begin{aligned}
 p_d(A) &= A \cdot A + 0.5A + 0.25I \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -0.75 & -0.5 \\ 0.5 & -0.25 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{13}$$

ve Φ ise

$$\begin{aligned}
 \Phi &= [B \ AB] \\
 \Phi &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{14}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Tersisi ise

$$\begin{aligned}
 \Phi^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\
 \Phi^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{15}$$

olarak soruda verilmiştir. Ackermann formülü gereğince durum geri besleme kontrolörü

$$\begin{aligned}
 K &= -[0 \quad 1] \Phi^{-1} p_d(A) \\
 &= -[0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.75 & -0.5 \\ 0.5 & -0.25 \end{bmatrix} \\
 &= [0.75 \quad 0.5]
 \end{aligned} \tag{16}$$

şeklinde elde edilir.

S3. (30p) S tanım bölgesinde verilen

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (17)$$

ifadeyi z tanım bölgesine dönüştürünüz.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 4.5 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4.5 & -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4.5 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 4.5 & -1.5 & 0.5 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 4.5 & -1.5 & 0.5 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4.5 & -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Verilen ifadeden

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} \\ A(s+1)(s+3) + B(s+2)(s+3) + C(s+1)(s+2) &= 1 \\ A(s^2 + 4s + 3) + B(s^2 + 5s + 6) + C(s^2 + 3s + 2) &= 1 \\ As^2 + 4As + 3A + Bs^2 + 5Bs + 6B + Cs^2 + 3Cs + 2C &= 1 \\ (A+B+C)s^2 + (4A+5B+3C)s + (3A+6B+2C) &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ 4A+5B+3C &= 0 \\ 3A+6B+2C &= 1 \end{aligned} \quad (19)$$

elde edilir. Matrisin tersi kullanılarak

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 4.5 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

Çözüm ile

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3} \quad (21)$$

ifadesi yazılır.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right\} &= -\mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} \right\} + \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3} \right\} \\ &= -\frac{z}{z-e^{-2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{-3}} \\ &= -\frac{z}{z-0.1353} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-0.3679} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-0.0498} \\ &= \frac{0.0735z^2 + 0.009947z}{z^3 - 0.553z^2 + 0.07484z - 0.002479} \end{aligned} \quad (22)$$