



MEKATRONİK BÖLÜMÜ
BİLGİSAYARLI KONTROL SİSTEMLERİ

Ders Kodu:	MKT2002		Tarih:	
Sınav Türü:	Finale Hazırlık			
Dönemi:	2024-2025			

Soru: Bir açık çevrim transfer fonksiyon modeli

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

olarak verilmiştir. Kapalı çevrim için yerleşme zamanı $t_s = 1\text{ s}$ ve aşım %10 isterleri verilmiştir. Aşım isteri ile

$$\begin{aligned}
 \zeta &= -\frac{\log(\sigma)}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 \sigma}} \\
 &= -\frac{\log(0.1)}{\sqrt{3.1416^2 + \log^2 0.1}} \\
 &= -\frac{-2.3026}{\sqrt{3.1416^2 + (-2.3026)^2}} \\
 &= -\frac{-2.3026}{\sqrt{9.8697 + 5.3020}} \\
 &= -\frac{-2.3026}{3.8951} \\
 &= \frac{2.3026}{3.8951} \\
 \zeta &= 0.5912
 \end{aligned} \tag{1}$$

ve yerleşme zamanı isteri ile

$$\begin{aligned}
 \omega_n &= \frac{4}{\zeta t_s} \\
 &= \frac{4}{0.5912 \cdot 1} \\
 &= \frac{4}{0.5912} \\
 \omega_n &= 6.7659
 \end{aligned} \tag{2}$$

elde edilir. İsterleri sağlayacak polinom

$$\begin{aligned}
 p(s) &= s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \\
 &= s^2 + 8s + 45.7844
 \end{aligned} \tag{3}$$

olarak önerilir.

a) P kontrolör tasarlayınız. P kontrolör

$$F(s) = k \tag{4}$$

olmak üzere kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 T(s) &= \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} \\
 &= \frac{k \frac{1}{s^2 + s + 1}}{1 + k \frac{1}{s^2 + s + 1}} \\
 &= \frac{k}{s^2 + s + 1 + k}
 \end{aligned} \tag{5}$$

olarak elde edilmektedir. Tasarım için

$$\begin{aligned}
 1 &= 8 \\
 1 + k &= 45.7844
 \end{aligned} \tag{6}$$

eşitliği çözülmelidir. Görüldüğü üzere çözüm mevcut değildir. Sadece aşım için çözülmek istenirse,

$$\begin{aligned}
 p(s) &= s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \\
 &= s^2 + 1.1824\omega_n s + \omega_n^2
 \end{aligned} \tag{7}$$

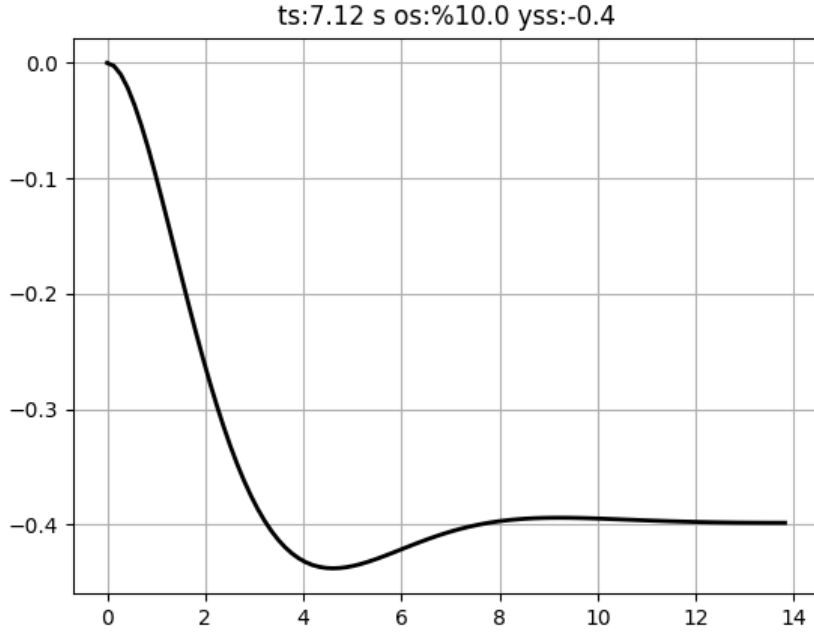
kullanılarak

$$\begin{aligned} 1.1824\omega_n &= 8 \\ 1 + k &= \omega_n^2 \end{aligned} \quad (8)$$

probleminin çözümü $\omega_n = 0.8458$ ve $k = -0.2846$ elde edilmektedir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$T(s) = \frac{-0.2846}{s^2 + s + 0.7154} \quad (9)$$

olarak hesaplanmaktadır. Basamak yanıtı Şekil 1 ile gösterilmektedir.



Şekil 1: P kontrolör

b) PD kontrolör tasarlayınız. PD kontrolör

$$F(s) = k_d s + k_p \quad (10)$$

olmak üzere kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} \\ &= \frac{(k_d s + k_p) \frac{1}{s^2 + s + 1}}{1 + (k_d s + k_p) \frac{1}{s^2 + s + 1}} \\ &= \frac{(k_d s + k_p)}{s^2 + (k_d + 1)s + (k_p + 1)} \end{aligned} \quad (11)$$

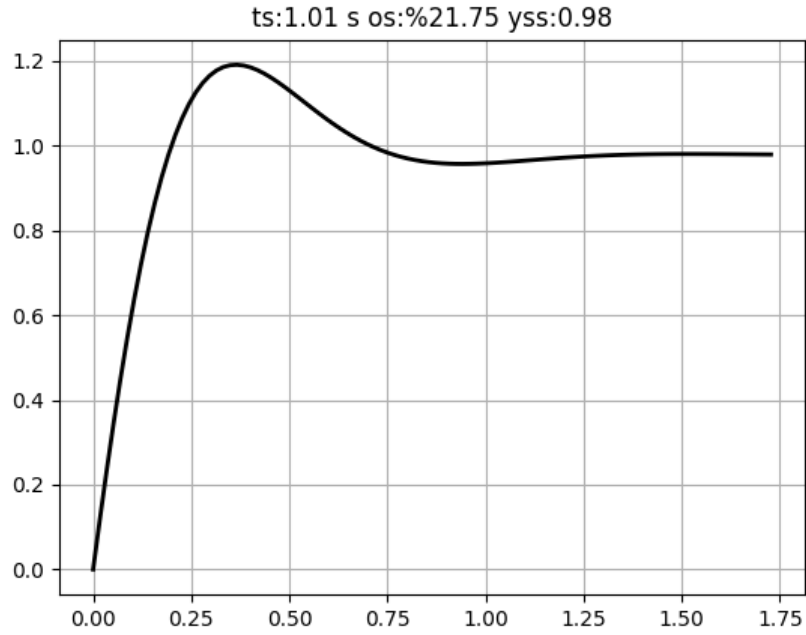
olarak elde edilmektedir. Tasarım için

$$\begin{aligned} k_d + 1 &= 8 \\ k_p + 1 &= 45.7844 \end{aligned} \quad (12)$$

eşitliğinin çözümü $k_d = 7$ ve $k_p = 44.7844$ elde edilmektedir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$T(s) = \frac{7s + 44.78}{s^2 + 8s + 45.78} \quad (13)$$

olarak hesaplanmaktadır. Basamak yanıtı Şekil 2 ile gösterilmektedir.



Şekil 2: PD kontrolör

c) PI kontrolör tasarlayınız. PI kontrolör

$$F(s) = k_p + \frac{k_i}{s} \quad (14)$$

olmak üzere kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} \\ &= \frac{\frac{k_p s + k_i}{s} \frac{1}{s^2 + s + 1}}{1 + \frac{k_p s + k_i}{s} \frac{1}{s^2 + s + 1}} \\ &= \frac{k_p s + k_i}{s^3 + s^2 + (k_p + 1)s + k_i} \end{aligned} \quad (15)$$

olarak elde edilmektedir. 3. dereceden bir kapalı çevrim karakteristik polinom elde edilmesi sebebiyle isterleri sağlayacak polinom

$$\begin{aligned} p(s) &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p) \\ &= (s^2 + 8s + 45.7844)(s + p) \\ &= s(s^2 + 8s + 45.7844) + p(s^2 + 8s + 45.7844) \\ &= s^3 + 8s^2 + 45.7844s + ps^2 + 8ps + 45.7844p \\ &= s^3 + (p + 8)s^2 + (8p + 45.7844)s + 45.7844p \end{aligned} \quad (16)$$

kullanılmalıdır. Tasarım için problem

$$\begin{aligned} 1 &= p + 8 \\ k_p + 1 &= 8p + 45.7844 \\ k_i &= 45.7844p \end{aligned} \quad (17)$$

ve çözümü $k_i = -320.49$, $k_p = -11.21$, $p = -7$ şeklinde elde edilmektedir. p 'nin negatif çıkması çözümün çalışmadığını göstermektedir.

d) PID kontrolör tasarlayınız. PID kontrolör

$$F(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (18)$$

olmak üzere kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} \\ &= \frac{\frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \frac{1}{s^2 + s + 1}}{1 + \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \frac{1}{s^2 + s + 1}} \\ &= \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s^3 + (k_d + 1)s^2 + (k_p + 1)s + k_i} \end{aligned} \quad (19)$$

olarak elde edilmektedir. 3. dereceden bir kapalı çevrim karakteristik polinom elde edilmesi sebebiyle isterleri sağlayacak polinom

$$\begin{aligned} p(s) &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p) \\ &= (s^2 + 8s + 45.7844)(s + p) \\ &= s(s^2 + 8s + 45.7844) + p(s^2 + 8s + 45.7844) \\ &= s^3 + 8s^2 + 45.7844s + ps^2 + 8ps + 45.7844p \\ &= s^3 + (p + 8)s^2 + (8p + 45.7844)s + 45.7844p \end{aligned} \quad (20)$$

kullanılmalıdır. Tasarım için problem

$$\begin{aligned} k_d + 1 &= p + 8 \\ k_p + 1 &= 8p + 45.7844 \\ k_i &= 45.7844p \end{aligned} \quad (21)$$

olarak tanımlanmaktadır. 4 bilinmeyen 3 denklem için sonsuz farklı çözüm mevcuttur. Parametrik çözüm

$$\begin{aligned} k_d &= p + 7 \\ k_p &= 8p + 44.7844 \\ k_i &= 45.7844p \end{aligned} \quad (22)$$

olarak elde edilir ve p parametresi pozitif seçilebilir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$T(s) = \frac{(p + 7)s^2 + (8p + 44.7844)s + 45.7844p}{s^3 + (p + 8)s^2 + (8p + 45.7844)s + 45.7844p} \quad (23)$$

olarak elde edilmektedir. İsterlerin sağlanması için seçilen kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$T(s) = \frac{45.7844p}{s^3 + (p + 8)s^2 + (8p + 45.7844)s + 45.7844p} \quad (24)$$

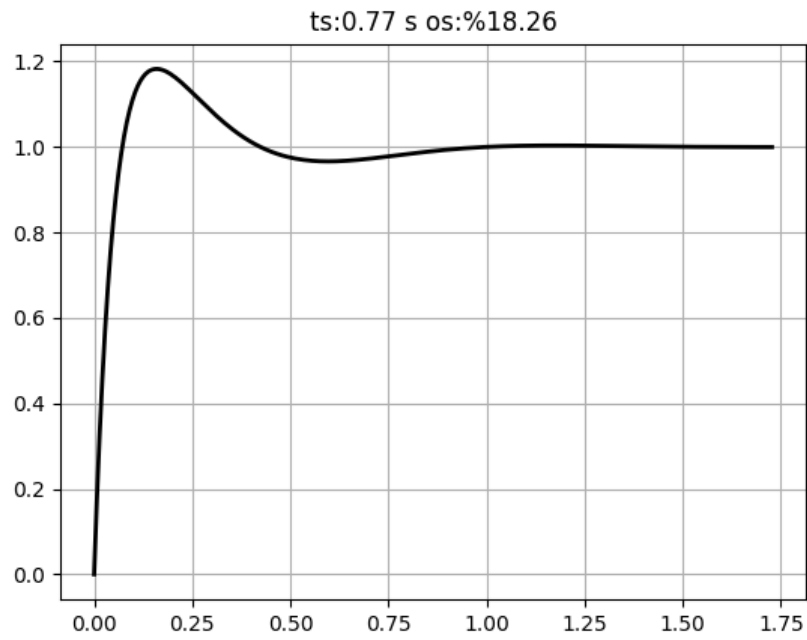
ve $p \geq 5\zeta\omega_n$ olmalıdır. Fakat, pay ifadesi iki adet sıfır içermektedir ve bu sıfırların da 5 kat uzakta olması gerekmektedir. Hem 3. kutbu hem de sıfırları en uzağa yerleştirecek p değeri tarama yöntemi ile

$$\begin{aligned} p &= 19.9 \\ k_p &= 203.984 \\ k_d &= 26.9 \\ k_i &= 911.11 \end{aligned} \quad (25)$$

ve kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$T(s) = \frac{26.9s^2 + 204s + 911.1}{s^3 + 27.9s^2 + 205s + 911.1} \quad (26)$$

olarak hesaplanmıştır. Basamak yanıtı Şekil 3 ile gösterilmektedir.



Şekil 3: PID kontrolör