1 Luenberger Observer

$$\dot{x} = -x + w$$

ve

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} w$$

olmak üzere, projeksiyon,

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilir. Öz değerler için denklem,

$$A - LC = -1 - \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\lambda = -1 - l_1 - 2l_2$$

ve $B - LD_w = 0$ şartı,

$$1 - \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$
$$1 - 3l_1 - 3l_2 = 0$$
$$l_1 = \frac{1}{3} - l_2$$

birleştirilirse,

$$\lambda = -1 - l_1 - 2l_2$$
$$\lambda = -1 - \frac{1}{3} + l_2 - 2l_2$$
$$\lambda = -\frac{4}{3} - l_2$$
$$l_2 = -\lambda - \frac{4}{3}$$

2 Extended Luenberger Observer

$$\dot{x} = -x^2 + w$$

ve

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} w$$

olmak üzere, projeksiyon,

$$\Pi = \begin{bmatrix} \sin(x)^2 & -\sin(x)\cos(x) \\ -\sin(x)\cos(x) & \cos(x)^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilir. Projeksiyon uygulandığında,

$$\begin{bmatrix} \sin(x)^2 & -\sin(x)\cos(x) \\ -\sin(x)\cos(x) & \cos(x)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(x)^2\cos(x) - \sin(x)^2\cos(x) \\ -\sin(x)\cos(x)^2 + \cos(x)^2\sin(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πy ifadesi,

$$\Pi = \begin{bmatrix} \sin(x)^2 & -\sin(x)\cos(x) \\ -\sin(x)\cos(x) & \cos(x)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(x)^2 - 2\sin(x)\cos(x) \\ -\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)^2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\Pi \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)^{\dagger} = \frac{1}{3\cos(x)^2 - 2\sin(2x) + 1} \begin{bmatrix} -(\sin(2x) + \cos(x)^2 - 1) & \cos(x)(2\cos(x) - \sin(x)) \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

Lineerleştirme işlemi için,

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{d(-x^2)}{dx}_{x=\hat{x}} = -2\hat{x} \\ B(x) &= 1 \\ C(x) &= \begin{bmatrix} -\sin(\hat{x}) \\ \cos(\hat{x}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

işlemleri sonucu,

$$\begin{aligned} A(x) - L(x)C(x) = -2\hat{x} - \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(\hat{x}) \\ \cos(\hat{x}) \end{bmatrix} &= \lambda \\ \lambda = -2\hat{x} + l_1\sin(\hat{x}) - l_2\cos(\hat{x}) \end{aligned}$$

$B - LD_w = 0$ şartı,

$$\begin{aligned} 1 - \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} &= 0 \\ 1 - l_1 - 2l_2 &= 0 \\ l_1 &= 1 - 2l_2 \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
\lambda &= -2\hat{x} + l_1 \sin(\hat{x}) - l_2 \cos(\hat{x}) \\
\lambda &= -2\hat{x} - 2l_2 \sin(\hat{x}) + \sin(\hat{x}) - l_2 \cos(\hat{x}) \\
\lambda + 2\hat{x} - \sin(\hat{x}) &= -2l_2 \sin(\hat{x}) - l_2 \cos(\hat{x}) \\
\lambda + 2\hat{x} - \sin(\hat{x}) &= l_2(-2 \sin(\hat{x}) - \cos(\hat{x})) \\
l_2 &= \frac{\lambda + 2\hat{x} - \sin(\hat{x})}{-2 \sin(\hat{x}) - \cos(\hat{x})}
\end{aligned}
$$