Revised GI-Control Theory

Çoklu sensör ofsetleri

Ölçüm: $y_i = C_i x + b_i + n_i \quad , i = 1, \dots, p$

GI'de $b \in \mathbb{R}^p$ doğrudan state: $x_a = [x ; b] \;,\; y = [C \; I] x_a$

SORU: Literatürde windup, çapraz kuplaj ve tuning kırılganlığı gibi ifadeler var. Bunlar ne anlama geliyor?

Tek durumlu (scalar) bir sistem seçelim:

$$\dot{x} = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

p tane sensör ölçüyor olsun

$$y = \mathbb{1} x + b + n \quad , \quad y, b, n \in \mathbb{R}^p \quad , \quad \mathbb{1} = (1, \dots, 1)^T$$

bias vektörü sabit: $(\dot{b} = 0)$

ölçüm haritası $h(x,b) = \mathbb{1} x + b$ olsun

$\forall \delta \in \mathbb{R} \quad x' = x + \delta \quad , \quad b' = b - \delta \mathbb{1}$ tanımlayalım:

$$h'(x', b') = \mathbb{1}(x + \delta) + (b - \delta \mathbb{1}) = \mathbb{1} x + b = h(x, b)$$

Yani sonsuz sayıda farklı (x,b) aynı y'yi üretir. Bu yüzden (x,b) gerçek değerleri, ölçümden tekil olarak çıkartılamaz. Dolayısıyla yalnızca y ölçümleri ile (x,b) çiftini tekil (unique) biçimde belirlemek imkânsızdır.

YORUM: Ölçümde bir gauge serbestliği var: (x,b) yerine $(x+\delta, b-\delta\mathbb{1})$ aynı ölçümü verir. Mutlak bias'lar tanımlı değil, sadece göreli bias'lar tanımlı (modelin gözlenebilirliği).

GI ile mutlak (x,b)'yi değil, gauge-invariant (ölçülebilir) bileşenleri hedefleyelim...

bu modelde ölçülebilir olanlar: * biasların göreli kısmı $(b_i - b_j)$

* x ile bias'ın ortalamasının birleşimi

Bir projeksiyon operatörü tanımlayalım:

$$\Pi := I - \frac{1}{p}\mathbb{1}\mathbb{1}^T \; ; \; \left(\Pi\mathbb{1} = 0 \quad \text{ve} \quad \Pi^2 = \Pi\right)$$

ölçümü iz düşürürsek;

$$\Pi y = \Pi(\mathbb{1}x + b + n) = \Pi b + \Pi n \quad \text{olur.}$$

Πy içinde x tamamen yok olur; yani Πy, doğrudan göreli bias bilgisidir.

Örneğin basit stabil filtre:

$$\dot{\widehat{(\Pi b)}} = -\alpha\,\widehat{(\Pi b)} + \alpha\,\Pi y \; , \quad \alpha > 0$$

$$e_b := \Pi b - \widehat{(\Pi b)} \Rightarrow \dot{e}_b = -\alpha e_b - \alpha\,\Pi n$$

Gürültü yokken exponansiyel yakınsar, gürültüde bounded kalır.

Burada gözlemlenemeyen drift yönü "projeksiyonla" atıldı...

Şimdi mutlak parçayı belirlemek için "gauge seçimi" yapalım:

$$\mathbb{1}^T b = 0 \quad (\text{biasların ortalaması sıfır seçildi})$$

bu koşulla birlikte

$$\bar{y} := \frac{1}{p}\mathbb{1}^T y = x + \underbrace{\frac{1}{p}\mathbb{1}^T b}_{=0} + \bar{n} = x + \bar{n}$$ olur ve x doğrudan ölçülebilir hale gelir.

Sonuç: GI ile (i) Πb (göreli biaslar) stabil + bounded tahmin edilir,

(ii) gauge fixing $(\mathbb{1}^T b = 0)$ seçilirse x de tekil hale gelir.

GI, hedefi ölçülebilir (gauge-invariant) alt uzaya indirir, bu yüzden bounded ve tekrarlanabilir performans verir.

Basit Model

* Durum sabit : $\dot{x} = 0$ (yani x değişmiyor)
* 3 sensör olsun
* Ölçüm: $y_i = x + b_i + n_i \; , \; i = 1,2,3$

  b_i: her sensörün ofseti

* Aynı ölçüm, sonsuz farklı (x, b)

$$x = 10 \quad , \quad b = (0.3\,, -0.1\,, 0.0)$$

gürültüsüz ölçüm : $y = x\mathbb{1} + b = (10.3\,, 9.9\,, 10.0)$

şimdi başka bir (x', b') seçelim:

$$x' = 10.5 \quad , \quad b' = b - 0{,}5\,\mathbb{1} = (-0.2\,, -0.6\,, -0.5)$$

$$y' = x'\mathbb{1} + b' = (10.5 - 0.2\,, 10.5 - 0.6\,, 10.5 - 0.5) = (10.3\,, 9.9\,, 10.0) = y$$

$\boxed{\text{Ölçüm aynı, ama "gerçek" x ve b değişti.}}$

(x, b) çifti tekil (unique) değil; yani mutlak x ve b'ler bu ölçümle tanımlı değil.

* GI ise "mutlak" yerine "göreli bias"ı (ölçülebilir olan) hedefler.

Sensör farkları (gauge invariant), x'ten tamamen bağımsızdır.

$$y_1 - y_2 = (x + b_1) - (x + b_2) = b_1 - b_2 = 10.3 - 9.9 = 0.4$$

$$y_1 - y_3 = b_1 - b_3 = 10.3 - 10.0 = 0.3$$

Yani GI, x'i bastırmadan, doğrudan ölçülebilir şeyi çıkarıyor.

* GI drift'i nasıl keser?

ortalama ölçüm : $\bar{y} = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = x + \bar{b}$ bias ortalaması tanımlı değil, bir gauge.

$\Pi y = y - \bar{y}\mathbb{1} = (b - \bar{b}\mathbb{1}) + (n - \bar{n}\mathbb{1})$: bu ifade x'i tamamen siler!..

$$\bar{y} = \frac{(10.3 + 9.9 + 10.0)}{3} = 10.0666\ldots$$

$y - \bar{y}\mathbb{1} \approx (0.2333, -0.1666, -0.0666)$: bu vektör, tam olarak $b - \bar{b}\mathbb{1}$ 'dir.
yani bias'ların ortalamadan sapması

Bu tam da telül ve drift yapmayan hedeftir. Yani integralin drift ettiği serbest yön, GI'da tasarım gereği dışarı atılıyor.

SONUÇ: integral action sabit hatayı bastırmak için gerekli olabilir, ama çoklu sensörde mutlak bias'lar tanımlı değil, bu yüzden integratörler gürültüyle drift eder. GI, hedefi gauge-invariant alt uzaya indiriyor; o yüzden tutarlı ve bounded.

ÖRNEK: Aynı ölçüm modelinde integral-bias tahmini kayıyor, GI ise sabit kalıyor (çünkü ölçülebilir olanı takip ediyor).

Gerçek sistem: $x = 10$, $b = (0.30, -0.10, 0.00)$

ölçüm $y_i = x + b_i + n_i$

her adımda küçük ölçüm gürültüsü ekleyelim:
zaman adımları $(k = 1, \ldots, 4)$
gerçek ölçüm (gürültüsüz): $x + b = (10.30, 9.90, 10.00)$

Gürültüler:

$n(1) = (+0.02, -0.01, +0.01)$
$n(2) = (-0.01, +0.02, -0.01)$
$n(3) = (+0.01, -0.02, +0.01)$
$n(4) = (-0.02, +0.01, +0.01)$

Ölçümler:

$y(1) = (10.32, 9.89, 10.01)$
$y(2) = (10.29, 9.92, 9.99)$
$y(3) = (10.31, 9.88, 10.01)$
$y(4) = (10.28, 9.91, 10.00)$

i) Integral - bias tahmini → Drift

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \mu \bar{r}_k \quad , \quad \hat{b}_{i,k+1} = \hat{b}_{i,k} + \mu r_{i,k} \quad \left(r_{i,k} = y_{i,k} - \hat{x}_k - \hat{b}_{i,k} \ , \ \bar{r}_k = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} r_{i,k} \right)$$

başlangıç: $\hat{x}_0 = 10$, $\hat{b}_0 = (0,0,0)$, $\mu = 0.5$

$\boxed{k=1}$

residual:

$$r_1 = y(1) - \hat{x}_0 - \hat{b}_0 = (0.32, -0.11, 0.01)$$

$$\bar{r}_1 = (0.32 - 0.11 + 0.01)/3 = 0.0733$$

güncel

$$\hat{x}_1 = 10 + 0.5(0.0733) = 10.0367$$

$$\hat{b}_1 = (0,0,0) + 0.5(0.32, -0.11, 0.01) = (0.160, -0.055, 0.005)$$

$\boxed{k=2}$

residual:

$$r_2 = y(2) - \hat{x}_1 - \hat{b}_1$$

$$r_{1,2} = 10.29 - 10.0367 - 0.160 = 0.0933$$

$$r_{2,2} = 9.92 - 10.0367 - (-0.055) = -0.0617$$

$$r_{3,2} = 9.99 - 10.0367 - 0.005 = -0.0517$$

$$\bar{r}_2 = (0.0933 - 0.0167 - 0.0517)/3 \approx -0.0067$$

güncel:

$$\hat{x}_2 = 10.0367 + 0.5(-0.0067) = 10.0333$$

$$\hat{b}_2 = \hat{b}_1 + 0.5 r_2 \approx (0.2067, -0.0859, -0.0209)$$

Gerçek bias $(0.30, -0.10, 0.00)$ iken $\hat{b}$ daha yaklaştı gibi görünüyor.

"drift yönü"

Bu sistemde şu dönüşüm residual'i değiştirmeden mümkün:

$$\hat{x} \to \hat{x} + \delta, \quad \hat{b} \to \hat{b} - \delta 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} \text{ ile } \hat{b} \text{ arasında bir} \\ \text{serbest kayma yönü var} \end{array} \right\}$$

Gürültü residual'i her adımda azıcık oynattıkça integratör bu serbest yönde yürüyüşe çıkıyor.

* $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \ldots$ küçük küçük "toplanarak" kayar,
* bir sensörün $\hat{b}_i$'si büyürken diğeri de büyüyebilir (hepsi birlikte kayabilir)
* performans metrikleri (özellikle $\|\hat{b}\|$) gürültüyle sürüklenir.

Bu, "tuning" problemi değil; integratörün gürültüyü biriktirmesi ve hedefin serbest bir doğrultuya sahip olmasıdır.

ii) GI (gauge-invariant) ölçü $\longrightarrow$ Drift yok

sensör farkları (tam invariant ve tekil)

$$d_{12,k} = y_{1,k} - y_{2,k} = (b_1 - b_2) + (n_1 - n_2)$$

$$d_{13,k} = y_{1,k} - y_{2,k} = (b_1 - b_3) + (n_1 - n_3)$$

ölçüm:

$k=1: d_{12} = 10.32 - 9.89 = 0.43, \; d_{13} = 10.32 - 10.01 = 0.31$

$k=2: d_{12} = 10.29 - 9.92 = 0.37, \; d_{13} = 10.29 - 9.99 = 0.30$

$k=3: d_{12} = 10.31 - 9.88 = 0.43, \; d_{13} = 10.31 - 10.01 = 0.30$

$k=4: d_{12} = 10.28 - 9.91 = 0.37, \; d_{13} = 10.28 - 10.00 = 0.28$

gerçek değer:

$$b_1 - b_2 = 0.30 - (-0.10) = 0.40$$

$$b_1 - b_3 = 0.30 - 0.00 = 0.30$$

Göründüğü gibi GI ölçüler gürültüyle küçük oynuyor ama kaymıyor. Integratör biriktirip sürükleme yok, çünkü bunlar zaten ölçülebilir büyüklükler.

GI için basit bir filtre koyarsak

$$\hat{d}_{k+1} = (1-\alpha)\hat{d}_k + \alpha d_k$$

$\hat{d}_k$ bounded kalır...

SON SÖZ :

Integral action, mutlak x ve mutlak b_i'leri entegre ederek tahmin etmeye çalışıyor; ama sistemde $(\hat{x}, \hat{b})$ için bir serbest kayma yönü var, gürültü bu yönde integratörü yürütüyor ve drift üretiyor. GI ise sensör farkları gibi gauge-invariant büyüklükleri takip ediyor; onlar tanımlı olduğu için drift yok.