Trabajo Práctico 2
Tu cara me suena

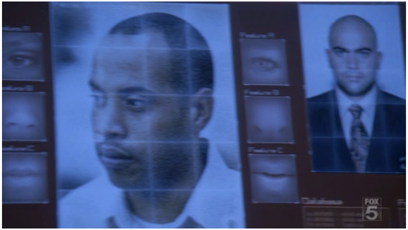
Métodos Numéricos

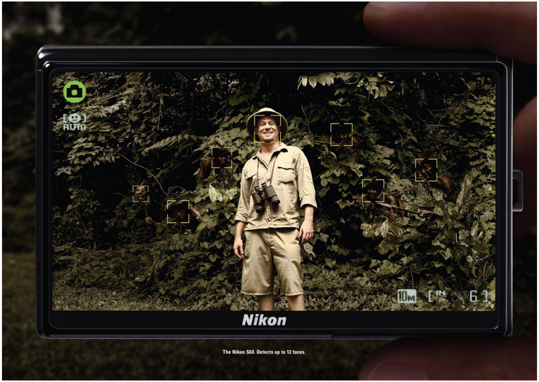
Primer cuatrimestre - 2014

Trabajo Práctico 2

Trabajo Práctico 2

Reconocimiento de caras - Aplicaciones





Trabajo Práctico 2

Reconocimiento de caras usando la descomposición en valores singulares

- Datos: base de datos etiquetada de imágenes de caras de personas tomadas de una forma particular.
- Objetivo: dada una nueva imagen de una persona, ¿A cuál corresponde?

Sujeto 1:

Sujeto 2:

Sujeto 3:

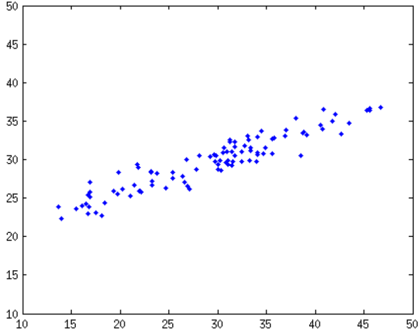
Llegan las siguientes imágenes, ¿a quiénes pertenecen?

Análisis de Componentes Principales

Ejemplo datos en $\mathbb{R}^2$

Sean $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ una secuencia de n datos, con $x^{(i)} \in \mathbb{R}^2$.

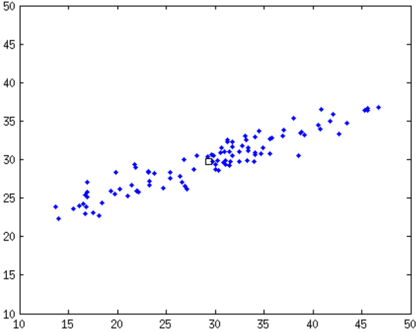
$$X = \begin{bmatrix} {x^{(1)}}^t \\ {x^{(2)}}^t \\ {x^{(3)}}^t \\ {x^{(4)}}^t \\ {x^{(5)}}^t \\ {x^{(6)}}^t \\ \vdots \\ {x^{(n)}}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.4320 & 27.7740 \\ 26.8846 & 26.5631 \\ 23.3309 & 26.6983 \\ 30.6387 & 31.5619 \\ 30.5171 & 30.8993 \\ 45.6364 & 36.6035 \\ \vdots & \vdots \\ 16.0650 & 24.0210 \end{bmatrix}$$



Análisis de Componentes Principales

Ejemplo datos en $\mathbb{R}^2$

$$X = \begin{bmatrix} 26.4320 & 27.7740 \\ 26.8846 & 26.5631 \\ 23.3309 & 26.6983 \\ 30.6387 & 31.5619 \\ 30.5171 & 30.8993 \\ 45.6364 & 36.6035 \\ \vdots & \vdots \\ 16.0650 & 24.0210 \end{bmatrix}$$



Media:
$\mu = \frac{1}{n}(x^{(1)} + \cdots + x^{(n)})$
$\mu = (29.3623, 29.7148)$

Varianza de una variable x_k: Medida para la dispersión de los datos.
$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_k^{(i)} - \mu_k)^2$
$\sigma_{x_1}^2 = 66.2134, \ \sigma_{x_2}^2 = 12.5491$

Análisis de Componentes Principales

Ejemplo datos en $\mathbb{R}^2$ - Covarianza

$$X = \begin{bmatrix} 26.4320 & 27.7740 \\ 26.8846 & 26.5631 \\ 23.3309 & 26.6983 \\ 30.6387 & 31.5619 \\ 30.5171 & 30.8993 \\ 45.6364 & 36.6035 \\ \vdots & \vdots \\ 16.0650 & 24.0210 \end{bmatrix}$$

Covarianza: Medida de cuánto dos variables varían de forma similar. Variables con mayor covarianza inducen la presencia de cierta dependencia o relación.

$$\sigma_{x_j x_k} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_j^{(i)} - \mu_j)(x_k^{(i)} - \mu_k)$$

Análisis de Componentes Principales

Ejemplo datos en $\mathbb{R}^2$ - Covarianza

Dadas n observaciones de dos variables x_k, x_j, y $v = (1, \ldots, 1)^t$:

$$\sigma_{x_j x_k} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_j^{(i)} - \mu_j)(x_k^{(i)} - \mu_k) = \frac{1}{n-1} (x_k - \mu_k v)^t (x_j - \mu_j v)$$

Matriz de Covarianza:

$$X = \begin{bmatrix} 26.4320 - \mu_1 & 27.7740 - \mu_2 \\ 26.8846 - \mu_1 & 26.5631 - \mu_2 \\ 23.3309 - \mu_1 & 26.6983 - \mu_2 \\ 30.6387 - \mu_1 & 31.5619 - \mu_2 \\ 30.5171 - \mu_1 & 30.8993 - \mu_2 \\ 45.6364 - \mu_1 & 36.6035 - \mu_2 \\ \vdots & \vdots \\ 16.0650 - \mu_1 & 24.0210 - \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$M_X = \frac{1}{n-1} X^t X = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1 x_1} & \sigma_{x_1 x_2} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2 x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$M_X = \begin{bmatrix} 66.2134 & 27.1263 \\ 27.1263 & 12.5491 \end{bmatrix}$$

¿Cómo expresar mejor nuestros datos?

Objetivo

Buscamos una transformación de los datos que disminuya la redundancia (es decir, disminuir la covarianza).

- Cambio de base: $\hat{X}^t = PX^t$.
- Cómo podemos hacerlo? Diagonalizar la matriz de covarianza. Esta matriz tiene la varianza de cada variable en la diagonal, y la covarianza en las restantes posiciones. Luego, al diagonalizar buscamos variables que tengan covarianza cero entre sí y la mayor varianza posible.

Autovalores y Autovectores

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Un *autovector* de A es un vector no nulo tal que $Ax = \lambda x$, para algun escalar λ. Un escalar λ es denominado *autovalor* de A si existe una solución no trivial x del sistema $Ax = \lambda x$. En este caso, x es llamado *autovector asociado a* λ.

Consideramos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Au = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}, Av = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2v$$

Gráficamente....A sólo estira (o encoge) el vector v.

Diagonalización

En muchos casos, la presencia de autovectores-autovalores puede ser utilizada para encontrar una factorización $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal.

Intuición

Podemos encontrar una base donde la transformación linea A se comporta como si fuese diagonal.

Observación

No toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable.

Teorema

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable sí y solo sí A tiene n autovectores linealmente independientes (las columnas de P).

Teorema

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, entonces existe una base ortonormal de autovectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Consecuencia: Existe P, y $P^{-1} = P^t$. Luego, $A = PDP^t$.

¿Cómo expresar mejor nuestros datos?

- Cambio de base: $\hat{X}^t = PX^t$.
  Sea P ortogonal y $M_{\hat{X}}$ la matriz de covarianza de $\hat{X}$.

$$\begin{aligned} M_{\hat{X}} &= \frac{1}{n-1}\hat{X}^t\hat{X} \\ &= \frac{1}{n-1}(PX^t)(XP^t) \\ &= P\frac{X^tX}{n-1}P^t \\ &= PM_XP^t \end{aligned}$$

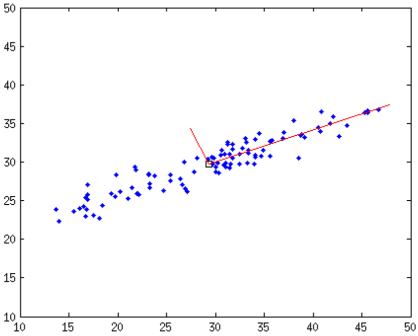
- M_X es simétrica, entonces exite V ortogonal tal que $M_X = VDV^t$.

$$\begin{aligned} M_{\hat{X}} &= PM_XP^t \\ &= P(VDV^t)P^t \qquad \text{tomamos } P = V^t \\ &= (V^tV)D(VV^t) = D \end{aligned}$$

¿Cómo expresar mejor nuestros datos?

Volvemos al ejemplo

$$
\begin{aligned}
M_X &= \begin{bmatrix} 66.2134 & 27.1263 \\ 27.1263 & 12.5491 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9228 & -0.3852 \\ 0.3852 & 0.9228 \end{bmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{bmatrix} 77.5362 & 0 \\ 0 & 1.2263 \end{bmatrix}}_{D=M_{\hat{X}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9228 & 0.3852 \\ -0.3852 & 0.9228 \end{bmatrix}}_{V^t}
\end{aligned}
$$



Análisis de Componentes Principales

Resumen hasta acá

- Tenemos n muestras de m variables.
- Calculamos el vector μ que contiene la media de cada de una las variables.
- Construimos la matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ donde cada muestra corresponde a una fila de X y tienen media cero (i.e., $x^{(i)} := x^{(i)} - \mu$).
- Diagonalizamos la matriz de covarianzas M_X. La matriz V (ortogonal) contiene los autovectores de M_X.

Propiedades del cambio de base

- Disminuye redundancias.
- El cambio de base $\hat{X}^t = PX^t = V^t X^t$ asigna a cada muestra un nuevo *nombre* mediante un cambio de coordenadas.
- Las columnas de V (autovectores de M_X) son las componentes principales de los datos.
- En caso de m grande, es posible tomar sólo un subconjunto de las componentes principales para estudiar (i.e., aquellas que capturen mayor proporción de la varianza de los datos).

Análisis de Componentes Pricipales

Utilizando la descomposición en valores singulares

Teorema (Descomposición SVD)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ una matriz con rango r. Entonces, existe $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ortogonales tales que $A = U \Sigma V^t$, y además

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $D \in \mathbb{R}^{r \times r}$ una matriz diagonal con $d_{ii} = \sigma_i > 0$ los valores singulares, $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$.

Observación

Toda matriz tiene descomposición SVD.

Quién es quién

- $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, λ_i autovalor de $A^t A$.
- $V = [v_1 v_2 \ldots v_m]$, $A^t A v_i = \lambda_i v_i$.
- $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$, $i = 1, \ldots, r$ (el resto, extender a base ortonormal).

Análisis de Componentes Pricipales

Utilizando la descomposición en valores singulares

- Tenemos n muestras de m variables.
- Calculamos el vector μ que contiene la media de cada de una las variables.
- Construimos la matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ donde cada muestra corresponde a una fila de X y tienen media cero (i.e., $x^{(i)} := x^{(i)} - \mu$).
- Definimos $A = X/\sqrt{n-1}$.
- Sea $A = U\Sigma V^t$.
- $M_X = A^t A = V\Sigma^t U^t U\Sigma V^t = V\Sigma^t\Sigma V^t$.
- Las columnas de V contienen los autovectores de M_X.

Reconocimiento de caras

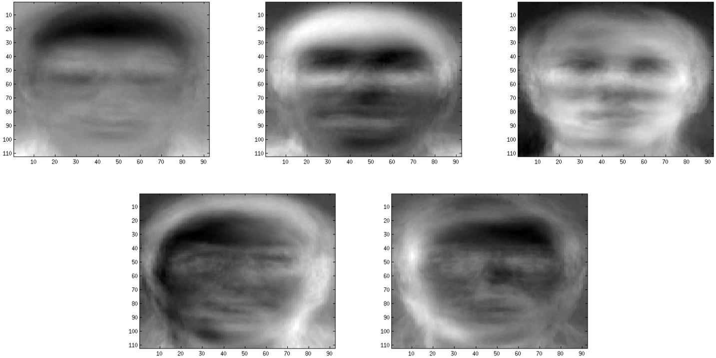
Aplicando PCA

- Tenemos una base de datos de n imágenes con caras de personas. Cada imagen es una muestra.
- Cada imagen tiene $h \times w = m$ píxeles, donde cada píxel corresponde a una variable. Disponemos cada imagen como un vector $x^{(i)} \in \mathbb{R}^m$. Obs: Una base, dos resoluciones: 112×92, 28×23.
- Calculamos el vector $\mu = (x^{(1)} + \cdots + x^{(n)})/n$ que contiene la media de cada de una las variables.
- Definimos $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y $A = X/\sqrt{n-1}$.
- El vector $\frac{(x^{(i)} - \mu)^t}{\sqrt{n-1}}$ es la i-ésima fila de A.
- Calculamos $A = U\Sigma V^t$ la descomposición SVD de A (en la práctica, solo nos interesa V ya que tiene los autovectores de M_X).

Reconocimiento de caras

Autocaras (Eigenfaces)

Gráfico de los primeros 5 autovectores en V, $A = U\Sigma V^t$.



Reconocimiento de caras

¿Cómo reconocemos una cara?

Idea

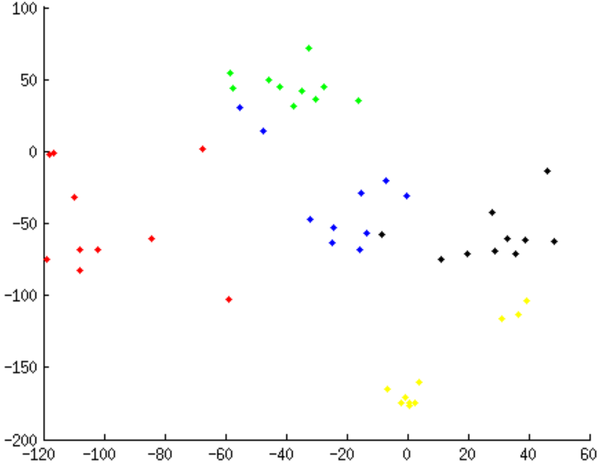
- Utilizar el cambio de base, transformando cada imagen convenientemente.
- Reducir la dimensión de los datos utilizando sólo algunas de las nuevas variables (eligiendo aquellas que capturan una fracción mayor de la varianza).

Procedimiento

- Reducción de la dimensión: parámetro de entrada que indica cuántas componentes principales considerar, k. Es decir, tomaremos $\bar{V} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k]$.
- Tranformación característica: Aplicamos el cambio de base a cada muestra $x^{(i)}$, definimos $tc(x^{(i)}) = \bar{V}^t x^{(i)} = (v_1^t x^{(i)}, \dots, v_k^t x^{(i)})$.

Reconocimiento de caras

Reducción + Transformación ($k = 2$)



Finalmente, dada una imagen de una cara que no se encuentra en la base:

- Vectorizamos la imagen en $x^* \in \mathbb{R}^m$.
- Definimos $\bar{x}^* = (x^* - \mu)/\sqrt{n-1}$.
- Aplicamos la transformación característica, $tc(\bar{x}^*)$ y buscamos (de alguna forma) a que sujeto pertenece.

¿Qué hay que hacer en el TP?

- Implementar el método de Análisis de Componentes Principales.
- Proponer al menos un método que, dada una nueva imagen de una cara, determine a que persona de la base de datos corresponde utilizando la transformación característica.
- Experimentar variando: k, cantidad de imagenes por cada persona en la base, *resolución de las imágenes en la base de datos.* Analizar los resultados en términos de la tasa de efectividad sobre un conjunto de casos de prueba.

Cálculo de autovalores/autovectores

- Necesitamos calcular $\bar{V} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k]$ para poder aplicar la transformación característica $tc(x)$.
- Consideremos A^tA, y supongamos $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$. A^tA es simétrica y semidefinida positiva.
- Podemos considerar el Método de la Potencia para calcular λ_1 y v_1.
  1. MetodoPotencia(B,x_0,niter)
  2. $v \leftarrow x_0$.
  3. Para $i = 1, \dots, niter$
  4. $v \leftarrow \frac{Bv}{||Bv||}$
  5. Fin Para
  6. $\lambda \leftarrow \frac{v^t Bv}{v^t v}$
  7. Devolver λ, v.

Cálculo de autovalores/autovectores

Una vez que tenemos λ_1 y v_1, como seguimos?

Deflación

Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz con autovalores distintos $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$ y una base ortonormal de autovectores. Entonces, la matriz $B - \lambda_1 v_1 v_1^t$ tiene autovalores $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ con autovectores asociados $v_1, \ldots, v_n$.

- $(B - \lambda_1 v_1 v_1^t) v_1 = B v_1 - \lambda_1 v_1 (v_1^t v_1) = \lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1 = 0 v_1$.
- $(B - \lambda_1 v_1 v_1^t) v_i = B v_i - \lambda_1 v_1 (v_1^t v_i) = \lambda_i v_i$.

Observación

En nuestro caso, alcanza con que los primeros k tengan magnitudes ditintas.

Cálculo de autovalores/autovectores

Ojo con $A^t A$.

Si la resolución de las imágenes es de 112×92 y hay ≈ 500 imágenes en la base:

- ¿Cuánto vale m?
- ¿Cuál es el tamaño de $A^t A$?

Alternativas

- Trabajar con imágenes más chicas (por ejemplo, 28×23, un 25 % del tamaño original).
- Dada la descomposición en valores singulares de A, expresar en función de U, Σ y V las matrices A^t, $A^t A$ y AA^t. Analizar el tamaño de cada una de ellas y deducir como relacionar las respectivas componentes principales.

Cronograma sugerido

- Viernes 2 de Mayo: Lectura imágenes, armado matriz A, método de la potencia, ideas utilización transformación característica.
- Viernes 9 de Mayo: Deflación, método alternativo, primeros experimentos.

Fecha de entrega

- Formato electrónico: Jueves 15 de Mayo de 2014, <u>hasta las 23:59 hs.</u>, enviando el trabajo (informe+código) a `metnum.lab@gmail.com`.
- Formato físico: Viernes 16 de Mayo de 2014, de 17:30 a 18:00 hs.