Árboles abarcadores de costo mínimo

Pablo R. Ramis

Universidad Nacional de Rosario, Instituto Politécnico, Dto. de Informática,
prramis@ips.edu.ar,
WWW home page: http://informatica.ips.edu.ar

Resumen Si bien todos los conceptos necesarios han sido estudiados dentro de Teoría de Grafos, repasaremos algunos que son imprescindibles para el tema que nos toca.
Un grafo no dirigido $G = V, A$ consta de un conjunto finito de vértices V y de un conjunto de aristas A. Se diferencia de un grafo dirigido es que cada arista en A es un par no ordenado de vertices. Si (v, w) es arista no dirigida, entonces $(v, w) = (w, v)$.
Algunas definiciones útiles:

1. Un camino es una secuencia de vértices

   $$v_1, v_2, ..., v_n$$

   tal que

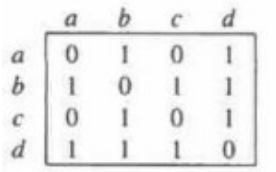
   $$(v_i, v_i + 1)$$

   es una arista para

   $$1 <= i <= n$$

   .
2. Un camino es *simple* si todos sus vértices son distintos con excepción de v_1 y v_n.
3. La longitud de un camino es $n - 1$ que es la cantidad de aristas que lo componen.
4. Se dice que un camino $v_1, v_2, ..., v_n$ conecta a v_1 con v_n.
5. Un grafo es *conexo* si todos sus pares de vértices están conectados.
6. Sea $G = V, A$ un grafo con conjunto de vértices V y conjunto de aristas A. Un *subgrafo* de G es un grafo $G' = V', A'$ donde:
   - *V'* es un subconjunto de *V*.
   - *A'* consta de las aristas (v, w) en A tales que v y w están en *V'*.
7. Un *ciclo* (simple) de un grafo es un camino (simple) de longitud mayor o igual a 3 que conecta un vértice con sigo mismo.
8. Un grafo conexo acíclico se lo conoce como *arbol libre*. Un grafo de estas características puede convertirse en un *árbol ordinario* si se elije un vértice como raíz y se orienta cada arista desde ella.
9. Todo árbol con $n >= 1$ vértices contiene $n - 1$ arista. Si se agregara cualquier arista resulta un ciclo.

Las formas en representar un grafo pueden ser muchas, las más comunes serían a través de una matriz de adyacencia y/o de listas de adyacencias.



	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	1	0	1	1
c	0	1	0	1
d	1	1	1	0

Figura 1. Representación bajo Matriz de adyacencia

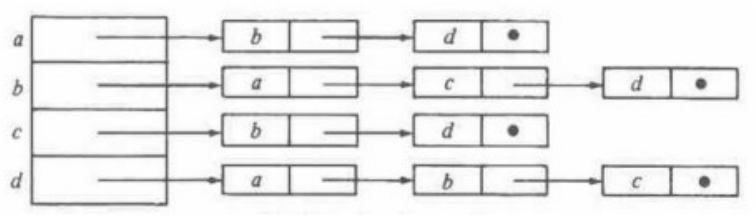


Figura 2. Representación mediante listas enlazadas

1. Árboles abarcadores de costo mínimo

Suponga que $G = V, A$ es un grafo conexo en donde cada arista (u, v) de A tiene un costo asociado $c(u, v)$. Un *árbol abarcador* para G es un árbol libre que conecta todos los vértices de V; su *costo* es la suma de los costos de las aristas del árbol.

1.1. Algoritmo de Kruskal

Volvamos a suponer un grafo conexo $G = V, A$, con

$$V = 1, 2, ..., n$$

y una función de costo c definida en las aristas A. Otra forma de construir un árbol abarcador de costo mínimo para G es empezar con un grafo

$$T = V, \emptyset$$

constituido con los vértices de G y sin aristas. Por tanto, cada vértice es un componente conexo por sí mismo Conforme el algoritmo avanza, habrá siempre una conexión de componentes conexos y para cada componente se seleccionarán las aristas que formen un árbol abarcador.

Para construir componentes cada vez mayores, se examinan las aristas a partir de A, en orden creciente de acuerdo al costo, Si la arista conecta dos

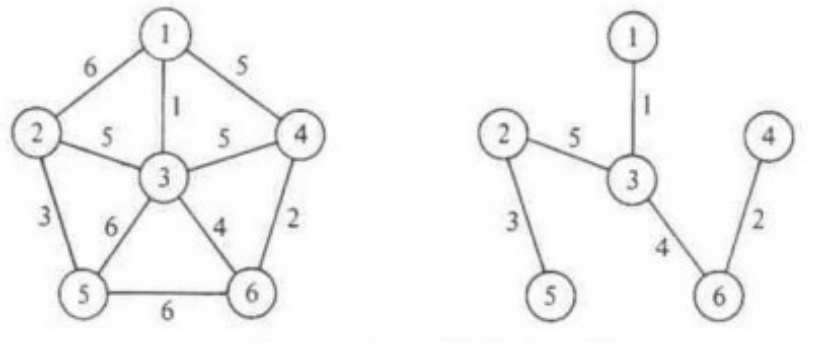


Figura 3. Árbol abarcador de costo mínimo

vértices que se encuentran en dos componentes conexos distintos, entonces se agrega la arista en T. Se descartará la arista si conecta dos vértices contenidos en el mismo componente ya que esto provocaría un ciclo. Cuando todos los vértices están en un solo componente, T es un árbol abarcador de costo mínimo para G.

Las operaciones que se aplican son:

1. COMBINA(A, B, C) para combinar los componentes A y B en C y llamar al resultado A o B arbitrariamente.
2. ENCUENTRA (v, C) para devolver el nombre del componente de C, del cual el vértice v es miembro. Esta operación se utilizará para determinar si los dós vértices de una arista se encuentran en el mismo o en distintos componentes.
3. INICIAL (A, v, C) para que A sea el nombre de un componente que pertenece a C y que inicialmente contiene el vértice v.

Todas estas operaciones forman parte de una estructrua de datos abstracta que llamaremos COMBINA_ENCUENTRA.

Conjunto con operaciones COMBINA y ENCUENTRA En ciertos problemas, se empieza se empieza con una colección de objetos, cada uno de ellos contenido en un conjunto, luego se combinan los conjuntos bajo algún orden dado, y de vez en cuando es necesario preguntar en que conjunto se encuentra algún elemento en particular.

La operación *COMBINA(A, B, C)* hace C igual a la unión de B y A bajo el supuesto que tanto A y B son disjuntos.*ENCUENTRA(v)* es una operación en la que se retorna al conjunto en que pertenece v.

Para una implementación razonable, se deben restringir los tipos del la estructura o reconocer que este conjunto, el COMBINA-ENCUENTRA, en realidad tiene otros dos tipos como "parámetros": el tipo de los nombres de los conjuntos y el tipo de los miembros de esos conjuntos. En muchas aplicaciones se pueden usar enteros como nombres de conjuntos. Si n es el número de elementos, también se pueden usar enteros en el intervalo $[1...n]$ para miembros de los componentes. Para la implantación en cuestión, es importante que el tipo de los miembros de los miembros de los conjuntos sea del tipo subintervalo, porque se desea indizar en un arreglo definido en él. El tipo de los nombres del conjunto no es importante, pues es el tipo de los elementos del arreglo, no de sus indices.

Suponiendo que declaramos componentes de tipo CONJUNTO_CE con la intención de que *componentes[x]* contenga el nombre del conjunto en el cuál se encuentra x. Esquemáticamente quedaría de esta forma (tener en cuenta que esto se plantea como si trataramos a un conjunto de elementos, nuestra implementación será algo mas compleja en la estructrua necesaria):

```
1
2
3   const n = |numero de elementos|;
4
5   type
6        tipo_nombre = 1... n;
7        tipo_elemento = 1... n;
8
9        CONJUNTO_CE = record
10          encabezamientos_conjuntos: array[1... n] of record
11             contador = 0... n;
12             priner_elemento = 0... m;
13          end;
14          nombre: array[1... n] of record
15              nombre_conjunto: tipo_nombre;
16              siguiente_elemento: 0... n;
17          end:
18        end;
19
20  procedure INICIAL (A: tipo_nombre; x: tipo_elemento; var C:
        CONJUNTO_CE)
21       begin
22           C.nombres[x].nombre_conjunto = A;
23           C.nombres[x].siguiente_elemento = 0;
24               |puntero nulo al siguiente elemento|
25           C.encabezamientos_conjuntos[A].cuenta = 1;
26           C.encabezamientos_conjuntos[A]primer_elemento = x;
27       end; |INICIAL|
28
29  procedure COMBINA (A, B: tipo_nombre; var C: CONJUNTO_CD);
30       var
31           i: 1... n;
```

```
32      begin
33          if C.encabezamientos_conjuntos[A].cuenta >
34                  encabezamientos_conjuntos[B].cuenta then
                        begin
35              |A es el conjunto mas grande, combina B dentro de
                     A |
36              |encuentra el final de B, cambiando los nombres
                    de los conjuntos
37                  por A conforme se avanza1
38              i := C.encabezamientos_conjuntos[B].
                    primer_elemento;
39
40              repeat
41                  C.nombres[i].nombre_conjunto := A;
42                  i := C.nombres[i].siguiente_elemento
43              until C.nombres[i].siguiente_elemento = 0;
44              |agrega a la lista A al final de la B y llama A
                    al resultado |
45              |ahora i es el índice del último elemento de B |
46
47              C.nombres[i].nombre_conjunto := A;
48              C.nombres[i].siguiente_elemento :=
49                  C.encabezamientos_conjunto[A].primer_elemento
                        ;
50              C.encabezamientos_conjunto[A].primer_elemento :=
51                  C.encabezamientos_conjunto[B].primer_elemento
                        ;
52              C.encabezamientos_conjunto[A].cuenta :=
53                  C.encabezamientos_conjunto[A].cuenta +
54                      C.encabezamientos_conjunto[B].cuenta;
55          end
56          else |B es al menos tan grande como A|
57               |codigo similar al anterior pero intercambiando
                     B por A|
58
59      end; |COMBINA|
60
61  function ENCUENTRA (x: 1 ... n; var C: CONJUNTO_CE);
62      |devuelve el nombre de aquel conjunto que tiene a x como
            miembro|
63
64      begin
65          return(C.nombres[x].nombre_conjunto)
66      end; |ENCUENTRA|
```

Podemos ver un ejemplo de la estructura enunciada antes donde el conjunto 1 es $1, 3, 4$, el conjunto 2 es 2, y el conjunto 5 es $5, 6$

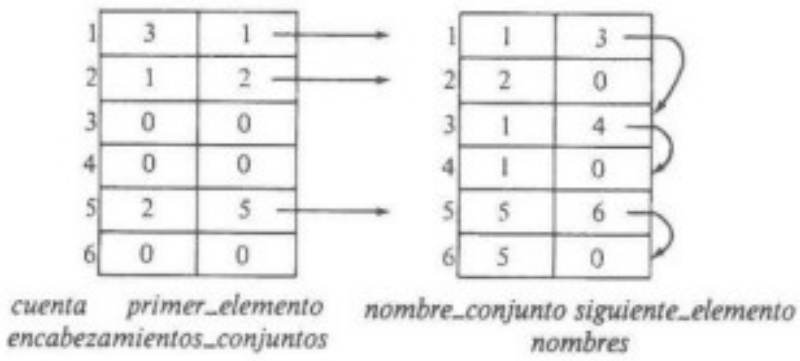


Figura 4. CONJUNTO_CE

Para finalizar veremos el código del algoritmo propiamente dicho. Por una cuestión de trivialidad, no veremos en detalle la implementación de la cola de prioridad ya que no conlleva mayor complejidad.

```
1
2  procedure kruskal (V: CONJUNTO  de évrtices;
3          A: CONJUNTO de aristas;
4          var T: CONJUNTO de aristas)
5
6      var
7          comp_n: integer; |cantidad actual de componentes|
8          aristas: COLA_DE_PRIORIDAD; |conjunto de aristas|
9          componentes: CONJUNTO_CE; |el conjunto V agrupado en
               un
10              conjunto de componentes COMBINA_ENCUENTRA|
11         U, V: évrtices;
12         a: arista;
13         comp_siguiente: integer; |nombre para el nuevo
               componente|
14         comp_u, comp_v; |nombre de los componentes|
15     begin
16         ANULA(T);
17         ANULA(aristas);
18         comp_siguiente := 0;
19         comp_n := únmero de miembros de V;
20
```

```
21          for v en V do begin |asigna valor inicial a un
                componente
22              para que contenga un évrtice de V|
23              comp_siguiente := comp_siguiente + 1;
24              INICIAL (comp_siguiente, v, componentes)
25          end;
26
27          for a en A do |asigna valor inicial a la cola de
                prioridad de aristas |
28              INSERTA (a, aristas);
29
30          while comp_n > 1 do begin |considera la siguiente
                arista|
31              a := SUPRIME_MIN(aristas)
32              sea a = (u, v);
33              comp_u := ENCUENTRA(u, componentes);
34              comp_v := ENCUENTRA(v, componentes);
35
36              if comp_u <> comp_v then begin
37                  |a conecta dos componentes diferentes |
38                  COMBINA(comp_u, comp_v, componentes);
39                  comp_n := comp_n - 1;
40                  INSERTA(a, T)
41              end
42          end
43      end; |kruskal|
```

1.2. Trabajo Práctico

Planteado la complejidad y estructuras necesarias y teniendo en cuenta los siguientes prototipos. Desarrollar el algoritmo de Kruskal en C. Tener en cuenta que los prototipos son sugeridos.

```
1
2   /*kruskal.h*/
3
4   #include <stdio.h>
5   #include <stdlib.h>
6   #include <string.h>
7
8   typedef int tipo_nombre;
9   typedef int tipo_elemento;
10  typedef int vertice;
11
12  #define VERTICES 5
13
14
15
```

```
16  typedef struct _ARISTA{
17      vertice u;
18      vertice v;
19      int costo;
20  }arista;
21
22  typedef struct _RAMA{
23      struct _ARISTA a;
24      struct _RAMA * sig;
25  }rama;
26
27  typedef struct _ENCABEZADO{
28      int cuenta;
29      int primer_elemento;
30  }encabezado;
31
32  typedef struct _NOMBRE{
33      tipo_nombre nombre_conjunto;
34      int siguiente_elemento;
35  }nombre;
36
37  typedef struct _CONJUNTO_CE{
38      nombre nombres[VERTICES];
39      encabezado encabezamientos_conjunto[VERTICES];
40  }conjunto_CE;
41
42  void inicial(tipo_nombre, tipo_elemento, conjunto_CE*);
43  void combina(tipo_nombre, tipo_nombre, conjunto_CE*);
44  tipo_nombre encuentra(int, conjunto_CE*);
45  void kruskal(rama*);
46
47  void inserta(int, int, int, rama**);
48  arista* sacar_min(rama**);
49  void lista (rama*);
```

```
1
2   /*kruskal.c*/
3
4   #include <kruskal.h>
5
6   int main()
7   {
8
9       int M_Costos[VERTICES][VERTICES];
10      rama *arbol;
11
12      for (int i = 0; i <= VERTICES-1; i++)
13          for (int j = i+1; j <= VERTICES-1; j++)
```

```
14          {
15              printf("Ingrese costo de lado entre vertices %d y
                    %d:  ",i ,j);
16              scanf("%d",&M_Costos[i][j]);
17          }
18
19      for (int  i = 0; i <= VERTICES-1; i++)        //la mitad
            inf. de diagonal de matriz
20          for (int j = i+1; j <= VERTICES-1;  j++)
21              if (M_Costos [i] [j] != 0)
22                  inserta(i,j,M_Costos[i][j], &arbol);  //
                        inserto en cola prior.
23
24      kruskal (arbol);
25      return 0;
26
27  }
```