

# Algoritmos y Estructuras de Datos III

Departamento de Computación  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

## Trabajo Práctico 3

| Integrante                   | LU     | Correo electrónico       |
|------------------------------|--------|--------------------------|
| Ortiz de Zarate, Juan Manuel | 403/10 | jmanuoz@gmail.com        |
| Martelletti, Pablo           | 849/11 | pmartelletti@gmail.com   |
| Kujawski, Kevin              | 459/10 | kevinkuja@gmail.com      |
| Carreiro, Martin             | 45/10  | carreiromartin@gmail.com |

### Reservado para la cátedra

| Instancia       | Docente | Nota |
|-----------------|---------|------|
| Primera entrega |         |      |
| Segunda entrega |         |      |

# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Casos de la Vida Real</b>                  | <b>3</b>  |
| 1.1. Situación 1 . . . . .                       | 3         |
| 1.2. Situación 2 . . . . .                       | 3         |
| <b>2. Algoritmo Exacto</b>                       | <b>4</b>  |
| 2.1. Enunciado . . . . .                         | 4         |
| 2.2. Solución . . . . .                          | 4         |
| 2.3. Pseudocódigo . . . . .                      | 4         |
| 2.4. Análisis de Complejidad . . . . .           | 5         |
| 2.5. Peor Caso . . . . .                         | 5         |
| 2.6. Tests y análisis . . . . .                  | 5         |
| <b>3. Algoritmo Goloso</b>                       | <b>7</b>  |
| 3.1. Solución . . . . .                          | 7         |
| 3.2. Pseudocódigo . . . . .                      | 7         |
| 3.3. Análisis de Complejidad . . . . .           | 7         |
| 3.4. Mejor Caso . . . . .                        | 8         |
| 3.5. Peor Caso . . . . .                         | 8         |
| 3.5.1. Familias . . . . .                        | 9         |
| <b>4. Algoritmo Local Search</b>                 | <b>13</b> |
| 4.1. Solución . . . . .                          | 13        |
| 4.2. Pseudocódigo . . . . .                      | 13        |
| 4.3. Análisis de Complejidad . . . . .           | 14        |
| 4.4. Elección de la función a utilizar . . . . . | 15        |
| 4.5. Mejor Caso . . . . .                        | 16        |
| 4.6. Peor Caso . . . . .                         | 16        |
| 4.7. Tests y análisis . . . . .                  | 17        |
| <b>5. Algoritmo GRASP</b>                        | <b>19</b> |
| 5.1. Solución . . . . .                          | 19        |
| 5.2. Pseudocódigo . . . . .                      | 19        |
| 5.3. Análisis de Complejidad . . . . .           | 19        |
| 5.4. Tests y análisis . . . . .                  | 20        |
| <b>6. Resultados Finales</b>                     | <b>24</b> |
| 6.1. Introducción . . . . .                      | 24        |
| 6.2. Por Cantidad De Nodos . . . . .             | 24        |
| 6.3. Por Tiempo . . . . .                        | 26        |
| 6.4. Cotas . . . . .                             | 28        |
| <b>7. Conclusiones</b>                           | <b>28</b> |
| <b>8. Apéndice</b>                               | <b>28</b> |

# 1. Casos de la Vida Real

## 1.1. Situación 1

Supongamos que se organiza una fiesta a la que asiste mucha gente (es una fiesta democrática e inclusiva y cada uno puede invitar a todos los amigos que quiera). Como la fiesta es en un parque de diversiones jurásico en el que hay dinosaurios vivos y mutantes sueltos es necesario capacitar a la gente por cualquier accidente o imprevisto que pueda ocurrir. Ahora, resulta que la fiesta tuvo tanta difusión que asistieron alrededor de 70 mil personas. Esto desconcertó profundamente a los organizadores, ya que al ser tanta gente es muy difícil capacitarla. Por suerte el presidente del parque conocía a un grupo de investigadores de exactas (grupo 10) a los que les delegó la tarea, aclarándoles que con la única información que contaban era con una tabla de relaciones (obtenida de facebook) personas a personas, en la que una persona se relaciona con otra si y solo si son amigos. Los investigadores abstrayeron el problema y realizaron el siguiente planteo: -Planteemos el problema como un problema de grafos! -Cada persona es un nodo -Un nodo se relaciona con otro si y solo si esas personas son amigas -Busquemos la menor cantidad de nodos para capacitar (podría pensarse como los más populares), para que luego estos nodos (o personas) capaciten a sus amigos y se logre así capacitar a toda la gente que concurrió a esta zarpada fiesta.

Buenísimo pero ahora ¿Cómo obtenemos la menor cantidad de gente a capacitar?.... Conjunto dominante!, este conjunto dominante representaría a la mínima cantidad de gente a capacitar, tal que luego esas personas al capacitar a sus amigos lograsen capacitar a toda la gente que concurrió a la fiesta.

## 1.2. Situación 2

Supongamos que en un tablero de ajedrez queremos poner algunas reinas de manera que todas las casillas estén amenazadas por al menos una de ellas y queremos usar la menor cantidad posible de damas. ¿Cuántas reinas son necesarias? y ¿cómo hay que ubicarlas? Se puede plantear este ejemplo como un problema de conjunto dominante. Para ello consideramos el grafo donde los vértices representan las casillas de un tablero de ajedrez y dos vértices son adyacentes si una reina ubicada en la casilla  $u$  amenaza la casilla  $v$ . Un conjunto dominante mínimo  $D$  nos dice dónde hay que ubicar las reinas en el tablero para amenazar a todas las casillas.

## 2. Algoritmo Exacto

### 2.1. Enunciado

En este ejercicio se nos solicita buscar el conjunto dominante mínimo y óptimo dado un grafo cualquiera. Este es un problema del tipo NP completo para el cual aún no se encontró forma de resolverlo polinomialmente pero tampoco se demostró que no sea posible solucionarlo con dicha complejidad.

### 2.2. Solución

Como todavía no se halló algoritmo alguno para resolverlo polinomialmente y nosotros no somos investigadores/iluminados (aún) decidimos resolverlo de manera exponencial. Para esto utilizamos el popular método de backtracking (dicho en criollo) de quedarme con la mejor opción entre poner o no un nodo en el conjunto dominante. Este procedimiento lo que hace, básicamente, es analizar todas las soluciones posibles y agarrar la mejor de ellas.

No nos pareció significativo agregarle memorization ya que su complejidad no mejoraría de forma considerable debido a que la complejidad del algoritmo reside en calcular cada solución posible y no en el recalcular de las mismas, además de que ocuparía mas memoria. Tampoco nos pareció imperante preocuparnos por la complejidad de la función que chequea si el conjunto recibido es dominante, ya que, mientras sea polinomial, va a ser despreciable al lado de la complejidad de analizar todas las soluciones (que como dijimos es exponencial).

Finalmente queremos resaltar que cualquier optimización conocida para este algoritmo no haría mas que mejorar la complejidad para ciertos tipos de casos, como el ejercicio no especifica que los grafos a recibir cumplan ciertos parametros o restricciones, todo tipo de perfeccionamiento que le implementemos va a dar lo mismo para las consignas del ejercicio.

### 2.3. Pseudocódigo

global grafoOriginal

OBTENERCONJUNTODOMINANTEMINIMO (*in Grafo*)  $\longrightarrow$  *conjuntoDom* : Conj

```
1  c = crearConj()
2  grafoOriginal = Grafo
3  return buscarMinimo(Grafo,c)
```

---

BUSCARMINIMO(*in Grafo*, *in conjuntoDom*)  $\longrightarrow$  *conjuntoDom* : Conj

```
1  Si esDominante(conjuntoDom) Hacer:
2      return conjuntoDom
3  Si no
4      vertice = grafo.obtenerVertice();
5      grafo = grafo.sinUno(vertice);
6      conjunto1 = buscarMinimo(grafo, conjuntoDom);
7      if(|conjunto1| == 1) return conjunto1
8      conjunto2 = buscarMinimo(grafo, conjuntoDom + vertice);
9      if(|conjunto2| == 1) return conjunto2
10     return min(conjunto1, conjunto2)
```

---

ESDOMINANTE(*in Grafo*, *in conjuntoDom*)  $\longrightarrow$  *esDominante* : Boolean

```
1  Grafo grafoDom = crearGrafo()
2  Para cada v en conjuntoDom
3      grafoDom.agregarVertice(v)
4      grafoDom.agregarVertices(v.adyacentes())
5  Para cada v en V(grafoOriginal)
6      Si grafoDom.esta?(v) Hacer:
7          continue
8      Si no
9          return false
10 return true
```

---

## 2.4. Análisis de Complejidad

La complejidad de mi algoritmo es de  $2^n * n^2$ . Ya que hace  $2^n$  recursiones y en cada una de ellas ver si el conjunto formado es dominante cuesta a lo sumo  $n^2$ . Voy a demostrar por inducción la parte exponencial:

### Caso Base:

$n = 1$ , si  $n$  tiene un solo nodo ver si es dominante me cuesta  $O(1)$  ya que recorrer los vertices del grafo original es una sola iteracion y no es posible recorrer sus aristas. Luego divido en el caso en el que uso a ese nodo en el conjunto dominante y el caso en que no. El caso en que no al no tener mas nodos con cual probar me va a devolver el grafo original y el otro caso también ya que el grafo original era el que contenía únicamente a ese nodo. Ambos casos ver si el conjunto es dominante cuesta  $O(1)$  ya que tiene a lo sumo una iteración para hacer. Por lo tanto el algoritmo costaría  $O(1)$  que es igual a  $O(2^1 * 1^3)$ .

### Hipótesis inductiva:

Supongo que con  $n$  nodos la cantidad de recursiones es  $2^n$

### Paso inductivo:

Quiero ver que con  $n+1$  nodos la cantidad de recursiones será  $2^{n+1}$

Ver si el conjunto vacío es dominante me cuesta  $O(1)$  ya que en la primera iteración del grafoOriginal no es posible encontrar ningún vertex en el conjunto dominante o adyacente a él. Luego obtengo un nodo del grafo (grafo en el que me guarde todos los vertices, no el original) y busco el minimo conjunto dominante agregando ese nodo al conjunto o no, esto por hipótesis inductiva me cuesta  $2 * (2^n)$ , ya que tengo que calcular 2 veces el conjunto dominante mínimo para  $n$  nodos. Por lo tanto la complejidad me termina costando  $2^{n+1}$ . Con lo cual queda demostrada la complejidad.

Ahora voy a demostrar que verificar si el conjunto recibido es dominante cuesta  $O(n^2)$ :

Esta función cuenta con 2 iteraciones, una sobre el conjunto de nodos dominantes y otra sobre el grafo original. La iteracion sobre el conjunto dominante crea un grafo con todos los nodos del conjunto y sus adyacentes, para esto agrega cada elemento del conjunto y todos sus adyacentes al nuevo grafo (obviamente si se agrega 2 veces el mismo queda 1 vez sola en el grafo) esto nos puede dar un total de  $n*(n-1)$  iteraciones, lo que pertenece a  $O(n^2)$ . En la iteracion sobre el grafo original, por cada nodo de este se fija si pertenece al grafo recién creado, chequear si el nodo pertenece al grafo cuesta  $O(n)$  ya que debe compararlo contra todos los nodos del otro grafo y como el grafo original tiene  $n$  nodos nos terminan quedando también una complejidad de  $O(n^2)$ . Finalmente obtenemos que la complejidad de esta verificación es de  $O(2n^2)$  que es igual a  $O(n^2)$ . Por lo tanto la complejidad total del algoritmo nos termina quedando  $O(2^n * n^2)$

## 2.5. Peor Caso

Como el algoritmo es exacto y recorre todas las soluciones posibles siempre obtiene la mejor de ellas. Por lo tanto no existe una 'peor' instancia en la que la solución devuelta sea sub-óptima, siempre devuelve la mejor.

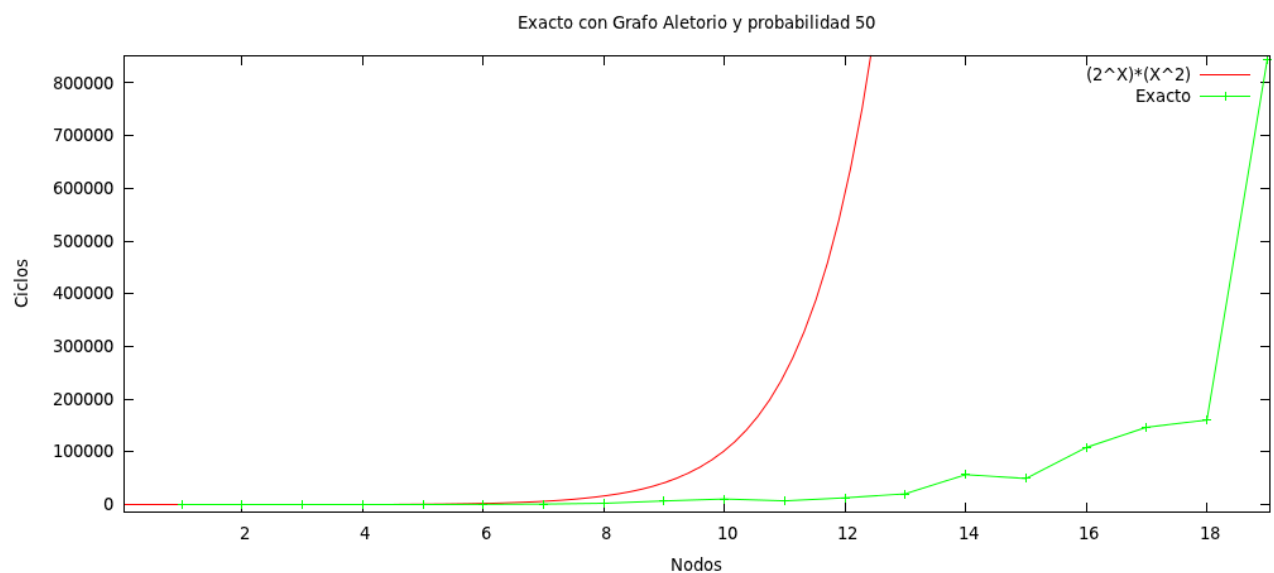
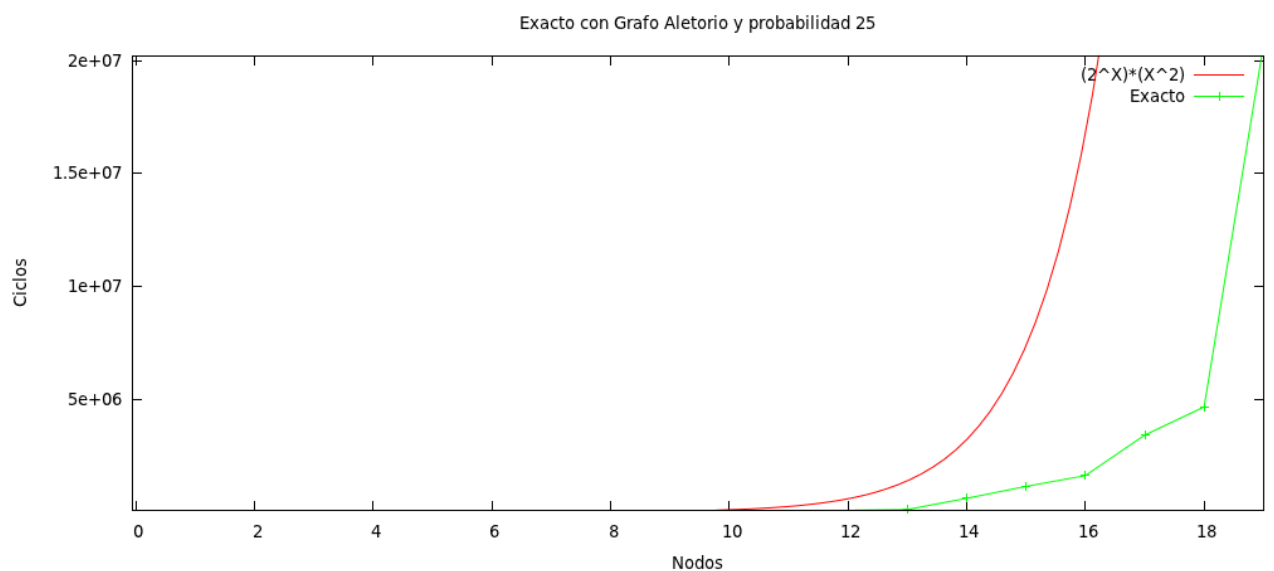
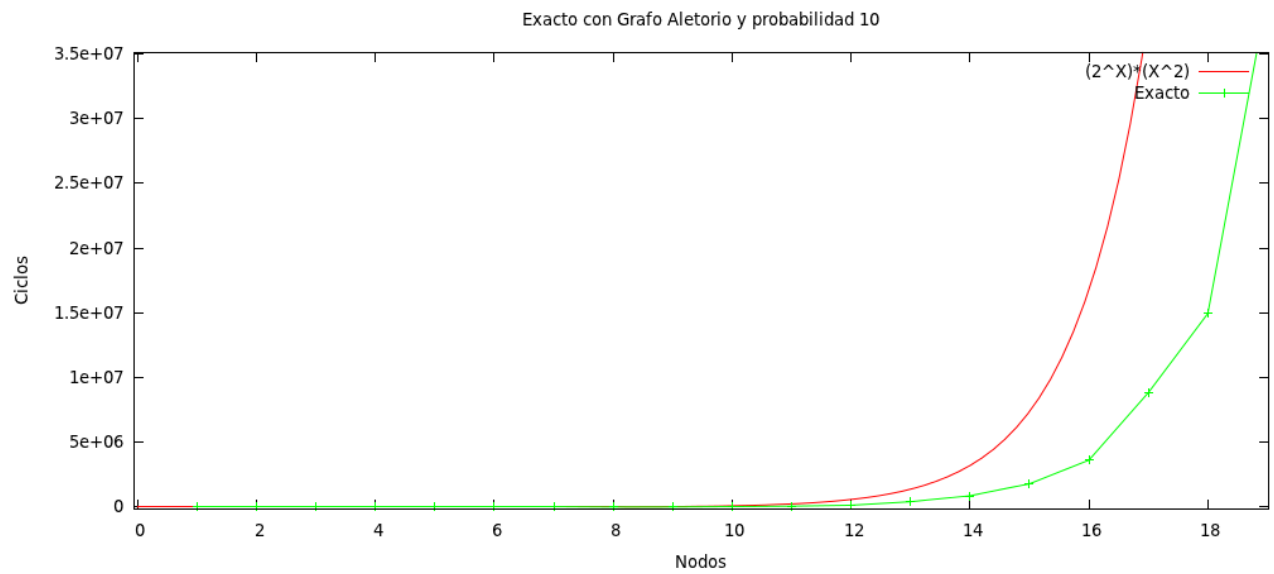
## 2.6. Tests y análisis

Como no podíamos correr el algoritmo para grafos de muchos nodos, no solo por una cuestión temporal sino porque se hace casi imposible de graficarlos por los saltos cada vez mas grandes que se producen, se nos ocurrió correr el algoritmo para grafos aleatorios. Como generamos estos grafos aleatorios? mediante un algoritmo (se encuentra en la clase grafoFactory) que recibe un  $n$  (cantidad de nodos) y un entero (probabilidad) que lo que hace basicamente es crear un grafo con  $n$  nodos y para cada par de nodos genera un numero random de 0 a 100 y si ese numero es menor a la probabilidad recibida crea la arista entre esos nodos.

Como a nuestro algoritmo le agregamos que si encuentra algun conjunto dominante de un 1 nodo lo devuelva (ya que no puede haber un conjunto dominante de menos de un nodo) al aumentar el parametro probabilidad que recibe nuestro algoritmo aumentamos la probabilidad de que haya algun nodo con grado  $(n-1)$  y por lo tanto disminuimos la cantidad de ciclos de nuestro algoritmo exacto, ya que al probar el conjunto dominante con ese nodo lo devolvera automaticamente.

En los siguientes grafos podemos ver que a menor probabilidad mas se acerca la curva a la funcion  $O(2^n * n^2)$ , debido a que no encuentra un punto de corte el algoritmo y analiza todas las posibilidades, en cambio a medida que se aumenta la probabilidad la curva no solo se aleja de la funcion sino que empieza a perder su forma exponencial y aparecen casos extraños en los que un grafo de  $x$  nodos requiere menor o la misma cantidad de ciclos que un grafo

de  $x+1$  nodos. Esto se puede ver claramente en el grafo de probabilidad 50 en los puntos 14 y 15, esto pudo haberse debido a que en el grafo de 14 nodos tuvo que analizar mas casos hasta llegar al conjunto dominante de 1 nodo y en el de 15 probó antes con ese conjunto (como no agarramos los nodos con algun criterio especifico nos vienen en el orden que el grafo nos los da con la funcion obtenerVertice).



### 3. Algoritmo Goloso

#### 3.1. Solución

Proponemos una solución heurística golosa para encontrar un conjunto dominante de un grafo lo mas pequeño posible con una complejidad polinomial.

Para ello nos basamos en una estrategia de selección de nodos dominantes, la cual consiste en elegir el nodo que mas adyacentes no cubiertas tenga (es decir, que todavía no fueron dominadas) y verificando en cada iteración si el conjunto actual es dominante. En base a diferentes estrategias y tipos de grafos (estrella, bipartitos, completos, estrellas unidas, caminos, ciclos) que fuimos observando, elegimos esta ya que fue la que más nos convenció y mejores resultados nos dió debido a que siempre intenta seleccionar el nodo que mas pueda dominar a otros nodos reduciendo el conjunto de los no cubiertos y acercándose a una mejor solución del problema.

#### 3.2. Pseudocódigo

MCDGREEDY (*in Grafo*)  $\longrightarrow$  *conjuntoDomGoloso* : ConjDeVértices

```
1  vértices = lista de vértices del grafo                                ▷ O(n)
2  dominantes = conjunto vacio de vértices
3  Mientras no estén TodasCubiertas(vértices)                            ▷ O(n)
4      Ordeno los vértices por la cantidad adyacentes que tenga no cubiertas (sin dominar), de mayor a menor. ▷ O(n*log(n))
5      Elijo como dominante al primero de la lista y lo agrego al conjunto de dominantes                    ▷ O(n)
6      Saco de la lista de vértices al elegido                            ▷ O(n)
7      ActualizarGradoSinDominar(elegido)                                ▷ Actualizo los nodos del grafo,
    disminuyendo la cantidad de grado sin dominar de los adyacentes al elegido, y de los adyacentes a estos. O(n2)
8  return dominantes
```

---

TODASCUBIERTAS (*in ListaDeVertices*)  $\longrightarrow$  *result* : Boolean

```
1  Para todos los vértices en la lista
2      Si el vértice no esta dominado
3          return falso
4  return verdadero
```

---

ACTUALIZARGRADOSINDOMINAR (*in Vertice elegido*)

```
1  Marcar al vértice elegido como dominado.
2  unionDeAdyacentes = lista de vértices vacía, que luego se usará para actualizar.
3  Para todos los vértices en la lista de adyacentes al elegido
4      Si el vértice elegido no estaba dominado
5          Decremento en uno el grado de adyacentes sin dominar del nodo actual
6      Si el nodo actual elegido no estaba dominado
7          Agrego los nodos adyacentes a la lista unionDeAdyacentes
8      Marco al nodo actual como dominado.
9  Para todos los vértices en la lista unionDeAdyacentes
10     Decremento en uno el grado de adyacentes sin dominar del nodo actual
```

---

#### 3.3. Análisis de Complejidad

La complejidad del algoritmo es de  $O(n^3)$

El algoritmo comienza creando una lista de vértices en  $O(n)$ .

Luego entra en un ciclo que como máximo será lineal en la cantidad de vértices porque en cada ciclo saca un vértice y la cantidad de vértices es finita. En cada iteración deberá comprobar si el conjunto actual de vértices elegidos domina todo el grafo en  $O(n)$ , ordenar todos los vértices en  $O(n*\log(n))$  mediante QuickSort, elegir un vértice en  $O(1)$ , removerlo de la lista en  $O(n)$  y finalmente actualizar el atributo de los grados sin dominar adyacentes de cada nodo en  $O(n^2)$ , esto es porque para los adyacentes del nodo elegido y a su vez para los adyacentes de estos tengo que bajar en uno este atributo, recorrer los adyacentes me lleva  $O(n)$  y por cada adyacente recorrer sus adyacentes también me lleva  $O(n)$ ,  $O(n) * O(n) = O(n^2)$ .

Por lo tanto, la complejidad nos queda:

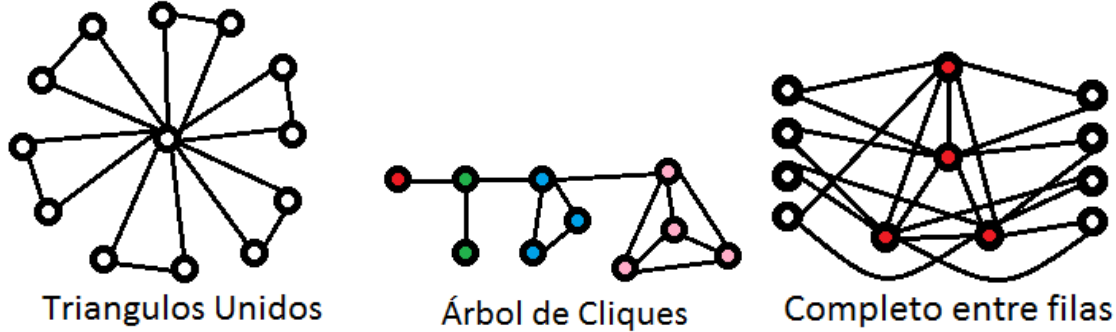
$$O(n) + O(n) * (O(n^2) + O(n*\log(n)) + O(n) + O(n^2)) = O(n^3)$$

La complejidad final del algoritmo goloso es de  $O(n^3)$ , cumpliendo el objetivo de ser polinomial.

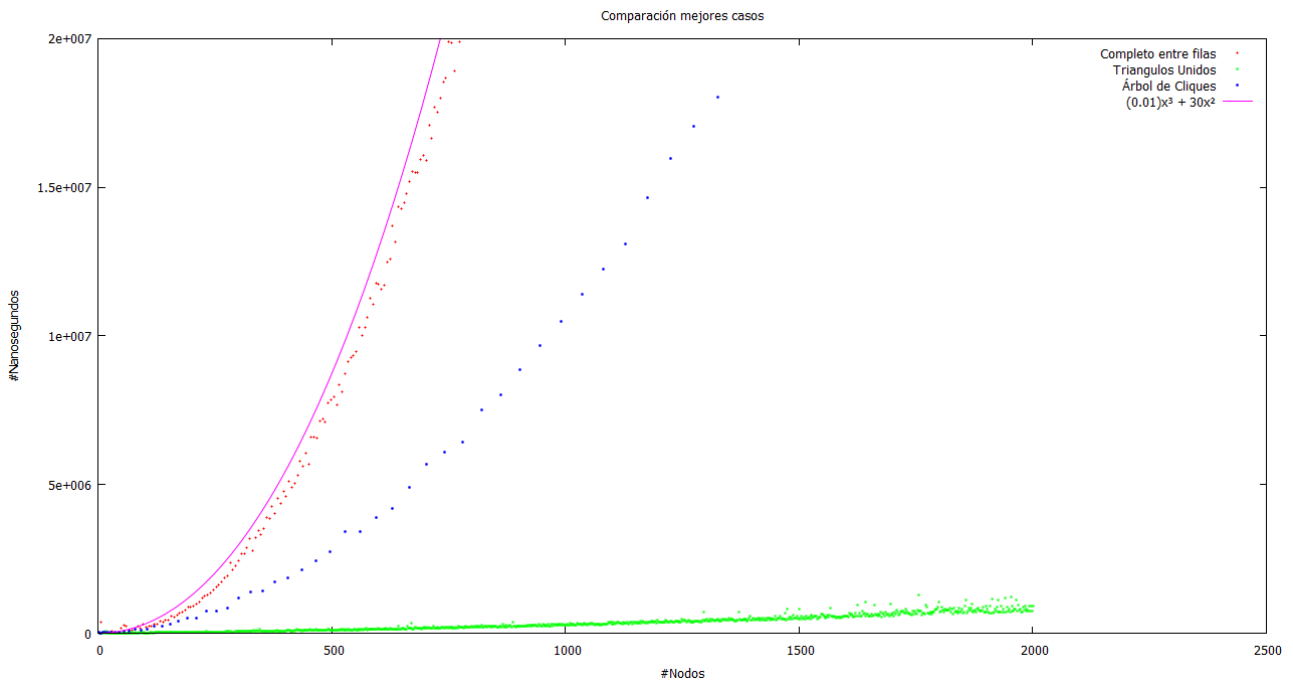
### 3.4. Mejor Caso

Las familias de grafos en donde la solución es la mejor son la de los bipartitos completos, triángulos unidos, estrellas, árboles binarios, árbol de cliques, completo entre filas, hipercubos. Esto es debido al ordenamiento y selección de nodos que realiza nuestra estrategia, obteniendo en cada iteración el nodo justo para lograr el resultado óptimo, ya sea porque contienen un nodo universal o porque selecciona nodos de subgrafos completos maximales.

Decidimos focalizarnos en tres tipos de familias para hacer el análisis (Triángulos Unidos, Árbol de Cliques y Completo entre Filas) por el solo hecho de ser familias atípicas y no muy frecuente analizadas, y que además de dar siempre los mejores casos, se comportan por debajo de la cota de complejidad para este algoritmo.



A continuación un gráfico para grafos de hasta 2000 nodos entre las tres familias:



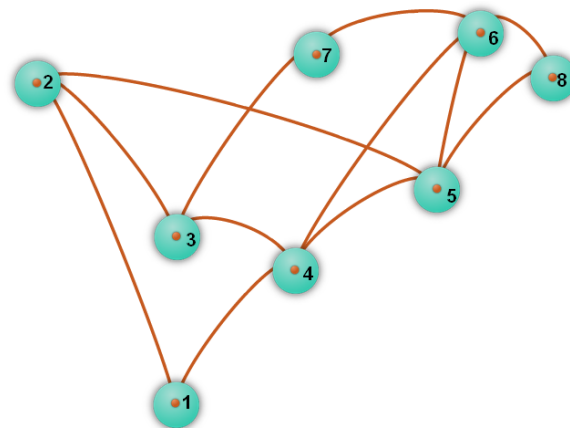
En el gráfico se puede observar que el comportamiento de cada familia es muy regular sin picos ni sobresaltos, por lo tanto, sumado principalmente a que siempre devuelve un conjunto dominante óptimo, concluimos que para este tipo de familias es muy recomendable usar este algoritmo polinomial, sin necesidad de optimizarlo o probar distintas estrategias y/o heurísticas.

### 3.5. Peor Caso

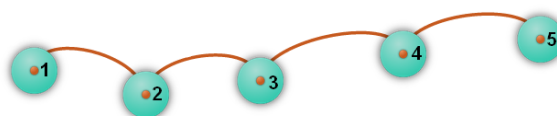
Al ser una heurística, en ciertos casos la solución no es la óptima que podría dar un algoritmo exacto, pero aún así es correcta. Los peores casos, donde se produce una diferencia en el tamaño de conjunto dominante respecto a la óptima, se suelen dar en grafos en los que varios nodos tienen el mismo grado o hay pequeña diferencia, y esto es debido que para la elección del vertice dominante en cada iteración nos quedamos con el que mayor grado de nodos adyacentes no cubiertos tenga y si hay varios con esta misma característica puede pasar que el nodo seleccionado no sea conveniente a futuro para llegar a una solución óptima.

En los siguientes ejemplos de grafos se puede apreciar mejor:





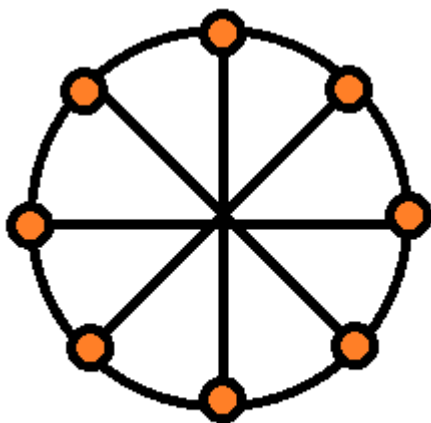
La solución óptima proporcionada por el algoritmo exacto es 6,2, mientras que el goloso devuelve 4,3,5, ya que como los nodos 6,4 y 5 tienen el mismo grado, al momento de la elección se decide por el 4 provocando esta diferencia en el tamaño del conjunto con respecto a la solución óptima.



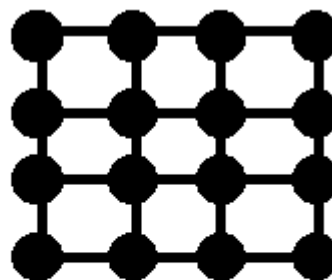
La solución óptima proporcionada por el algoritmo exacto es 2,4, mientras que el goloso podría devolver 3,2,5, ya que como los nodos 2, 3 y 4 tienen el mismo grado, si se decide por el 3, dejaría a todos los demás nodos con 1 grado sin dominar y faltando los dos extremos, provocando que si o si se necesite cubrirlos o elegirlos como dominantes, haciendo que el conjunto tenga tamaño 3 y no 2 como el exacto.

### 3.5.1. Familias

Las familias de grafos que encontramos que el algoritmo goloso da un resultado no óptimo frente al exacto fue con los Möbius-Kantor y Grid. Esto suele pasar por que son regulares (3-regular) y casi regulares (4-regular internamente, 3-regular en los bordes) respectivamente y al momento de la elección del mejor vértice, la estrategia solo distingue por grado de adyacentes sin dominar por lo tanto seleccionará por el orden de la etiqueta de los nodos, las cuales son arbitrarias.



Möbius-Kantor de 8 nodos



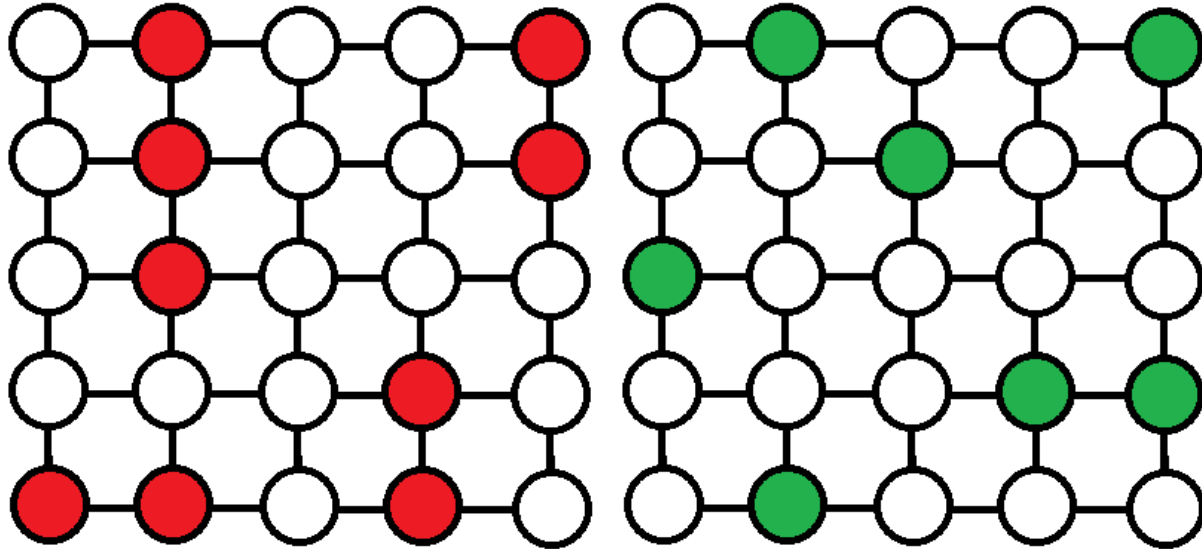
Grid de 4x4 nodos

Considerando que Möbius-Kantor se puede reducir a un circuito con arcos, nos pareció mas interesante enfocarnos en los grafos Grid, ya que es más amplia la diferencia de resultados entre los dos algoritmos, además esta familia de grafos son de más utilidad, ya que equivalen tableros representando cada celda con un nodo.

La familia de grafos Grid se caracteriza principalmente por modelar un tablero en donde cada celda equivale a un nodo, y dos nodos son adyacentes si están en celdas contiguas. En base a los resultados de pruebas exactas con grandes cantidades de nodos<sup>[2]</sup>, pudimos notar que la diferencia a las pruebas con nuestra heurística se debe principalmente a que la estrategia seleccionará primero los nodos interiores por tener mayor grado sin dominar a su alrededor y luego completará con los bordes, siendo un grosero por el simple hecho de que con una óptima selección de nodos del borde al comienzo se podría "acorrallar" los nodos interiores necesitando una menor cantidad de estos para dominar todo el grafo.

En la sección de **Cotas** se podrá observar que para este tipo de grafos, el tamaño del conjunto dominante esta por debajo de las cotas establecidas.

En el siguiente ejemplo, para un grafo Grid de 5x5 con 25 nodos, se puede notar la diferencia entre cantidad de elementos de los conjunto dominante resultantes, el goloso devuelve 9 nodos 6, 18, 21, 9, 1, 11, 20, 4, 23, mientras que el exacto 7 nodos 19, 18, 10, 7, 4, 1, 21, y esto se debe principalmente a que el goloso eligirá primero los nodos internos de grado 4 hasta que tengan el mismo grado sin dominar que los del borde y luego seleccionará los que faltan para dominar a todos, mientras que la solución exacta dependia más de los nodos en los bordes que los interiores.



Goloso en Grid 5x5

Exacto en Grid 5x5

Mediante varios casos de tests que fuimos corriendo y en comparativa con el siguiente cuadro de valores para conjunto dominantes óptimos para grafos Grid<sup>[2]</sup>, encontramos que la distancia entre los tamaño de la solución del Greedy y del CDM puede ser bastante grande, por ejemplo, en el grafo de 29x29, con el goloso da soluciones de tamaño 248 cuando el óptimo es 188, con una diferencia de 60 nodos, bastante alto considerando que equivale a más de dos filas de nodos.

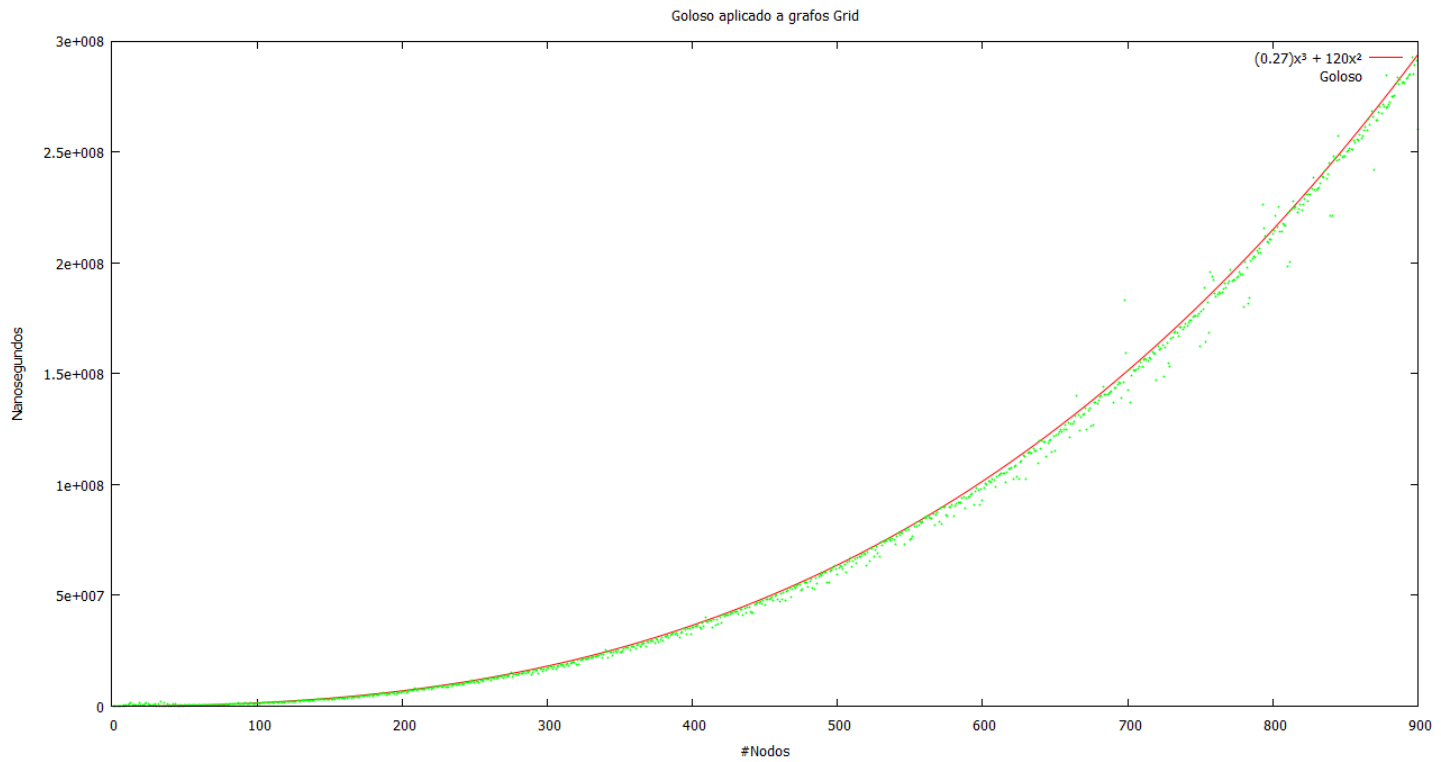
**Tamaño de conjunto dominante óptimo para grafos Grid de tamaño  $n*m$**

| $m \backslash n$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  | 25  | 26  | 27  | 28  | 29  |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1                | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 2                | 1  | 2  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 3                | 1  | 2  | 3  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 4                | 2  | 3  | 4  | 4  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 5                | 2  | 3  | 4  | 6  | 7  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 6                | 2  | 4  | 5  | 7  | 8  | 10 |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 7                | 3  | 4  | 6  | 7  | 9  | 11 | 12 |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 8                | 3  | 5  | 7  | 8  | 11 | 12 | 14 | 16 |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 9                | 3  | 5  | 7  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 10               | 4  | 6  | 8  | 10 | 13 | 16 | 17 | 20 | 22 | 24 |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 11               | 4  | 6  | 9  | 11 | 14 | 17 | 19 | 22 | 24 | 27 | 29 |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 12               | 4  | 7  | 10 | 12 | 16 | 18 | 21 | 24 | 26 | 29 | 32 | 35 |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 13               | 5  | 7  | 10 | 13 | 17 | 20 | 22 | 26 | 29 | 31 | 35 | 38 | 40 |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 14               | 5  | 8  | 11 | 14 | 18 | 21 | 24 | 28 | 31 | 34 | 37 | 40 | 44 | 47 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 15               | 5  | 8  | 12 | 15 | 19 | 22 | 26 | 29 | 33 | 36 | 40 | 43 | 47 | 50 | 53  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 16               | 6  | 9  | 13 | 16 | 20 | 24 | 27 | 31 | 35 | 38 | 42 | 46 | 49 | 53 | 57  | 60  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 17               | 6  | 9  | 13 | 17 | 22 | 26 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | 49 | 53 | 56 | 60  | 64  | 68  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 18               | 6  | 10 | 14 | 18 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 | 51 | 55 | 60 | 64  | 68  | 72  | 76  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 19               | 7  | 10 | 15 | 19 | 24 | 28 | 32 | 37 | 41 | 45 | 50 | 54 | 58 | 63 | 67  | 71  | 75  | 80  | 84  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 20               | 7  | 11 | 16 | 20 | 25 | 30 | 34 | 39 | 43 | 48 | 52 | 57 | 62 | 66 | 70  | 75  | 79  | 84  | 88  | 92  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 21               | 7  | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 45 | 50 | 55 | 60 | 64 | 69 | 74  | 78  | 83  | 88  | 92  | 97  | 101 |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 22               | 8  | 12 | 17 | 22 | 28 | 32 | 37 | 43 | 47 | 52 | 57 | 62 | 67 | 72 | 77  | 82  | 87  | 92  | 96  | 101 | 106 | 111 |     |     |     |     |     |     |     |
| 23               | 8  | 12 | 18 | 23 | 29 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80  | 86  | 91  | 96  | 101 | 106 | 111 | 116 | 121 |     |     |     |     |     |     |
| 24               | 8  | 13 | 19 | 24 | 30 | 36 | 41 | 46 | 52 | 57 | 63 | 68 | 73 | 79 | 84  | 89  | 94  | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 | 126 | 131 |     |     |     |     |     |
| 25               | 9  | 13 | 19 | 25 | 31 | 37 | 42 | 48 | 54 | 59 | 65 | 71 | 76 | 82 | 87  | 93  | 98  | 104 | 109 | 114 | 120 | 125 | 131 | 136 | 141 |     |     |     |     |
| 26               | 9  | 14 | 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 | 56 | 62 | 68 | 74 | 79 | 85 | 91  | 96  | 102 | 108 | 113 | 119 | 124 | 130 | 136 | 141 | 146 | 152 |     |     |     |
| 27               | 9  | 14 | 21 | 27 | 34 | 40 | 46 | 52 | 58 | 64 | 70 | 76 | 82 | 88 | 94  | 100 | 106 | 112 | 117 | 123 | 129 | 135 | 141 | 146 | 152 | 158 | 164 |     |     |
| 28               | 10 | 15 | 22 | 28 | 35 | 41 | 47 | 54 | 60 | 66 | 73 | 79 | 85 | 91 | 97  | 104 | 110 | 116 | 122 | 128 | 134 | 140 | 146 | 152 | 158 | 164 | 170 | 176 |     |
| 29               | 10 | 15 | 22 | 29 | 36 | 42 | 49 | 56 | 62 | 69 | 75 | 82 | 88 | 94 | 101 | 107 | 113 | 120 | 126 | 132 | 138 | 144 | 151 | 157 | 163 | 169 | 175 | 182 | 188 |

Tamaño de conjunto dominante goloso para grafos Grid de tamaño  $n \times m$

| $m / n$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  | 25  | 26  | 27  | 28  | 29  |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1       | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 2       | 1  | 2  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 3       | 1  | 2  | 3  |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 4       | 2  | 3  | 4  | 6  |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 5       | 2  | 4  | 5  | 6  | 9  |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 6       | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 10 |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 7       | 3  | 5  | 6  | 9  | 13 | 13 | 15 |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 8       | 4  | 5  | 8  | 12 | 12 | 16 | 15 | 21 |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 9       | 3  | 6  | 9  | 11 | 13 | 16 | 21 | 23 | 28 |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 10      | 4  | 7  | 10 | 14 | 15 | 19 | 20 | 27 | 28 | 30 |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 11      | 5  | 8  | 11 | 15 | 17 | 21 | 23 | 29 | 31 | 33 | 39 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 12      | 6  | 8  | 11 | 16 | 17 | 21 | 26 | 31 | 34 | 36 | 43 | 45  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 13      | 6  | 8  | 14 | 18 | 18 | 22 | 25 | 34 | 39 | 43 | 45 | 49  | 53  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 14      | 6  | 9  | 14 | 16 | 21 | 23 | 28 | 34 | 39 | 43 | 49 | 51  | 54  | 57  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 15      | 7  | 9  | 15 | 18 | 21 | 28 | 31 | 40 | 41 | 47 | 51 | 53  | 61  | 64  | 65  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 16      | 7  | 10 | 16 | 19 | 22 | 31 | 32 | 40 | 45 | 51 | 54 | 59  | 63  | 67  | 69  | 80  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 17      | 7  | 11 | 17 | 24 | 24 | 29 | 36 | 41 | 48 | 56 | 56 | 61  | 65  | 69  | 77  | 84  | 83  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 18      | 6  | 11 | 18 | 24 | 25 | 33 | 37 | 40 | 50 | 58 | 61 | 64  | 69  | 76  | 81  | 87  | 89  | 95  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 19      | 7  | 12 | 19 | 27 | 25 | 35 | 39 | 45 | 52 | 61 | 64 | 69  | 74  | 79  | 85  | 94  | 94  | 99  | 109 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 20      | 8  | 12 | 19 | 28 | 29 | 35 | 41 | 46 | 53 | 62 | 66 | 73  | 77  | 84  | 90  | 97  | 94  | 106 | 112 | 119 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 21      | 7  | 13 | 22 | 30 | 29 | 37 | 46 | 49 | 58 | 67 | 69 | 75  | 81  | 84  | 91  | 101 | 100 | 109 | 121 | 124 | 131 |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 22      | 8  | 13 | 22 | 31 | 31 | 40 | 49 | 53 | 61 | 69 | 74 | 77  | 83  | 88  | 95  | 104 | 105 | 112 | 127 | 131 | 137 | 142 |     |     |     |     |     |     |     |
| 23      | 9  | 13 | 23 | 33 | 31 | 38 | 51 | 56 | 64 | 71 | 76 | 83  | 90  | 93  | 97  | 109 | 110 | 119 | 133 | 139 | 139 | 153 | 158 |     |     |     |     |     |     |
| 24      | 9  | 13 | 24 | 31 | 33 | 42 | 51 | 58 | 64 | 77 | 79 | 87  | 92  | 92  | 105 | 114 | 115 | 133 | 136 | 144 | 151 | 162 | 165 | 176 |     |     |     |     |     |
| 25      | 9  | 14 | 25 | 33 | 36 | 42 | 53 | 57 | 66 | 76 | 80 | 87  | 96  | 100 | 108 | 118 | 119 | 133 | 142 | 149 | 158 | 163 | 169 | 180 | 182 |     |     |     |     |
| 26      | 10 | 16 | 26 | 38 | 39 | 46 | 55 | 58 | 72 | 83 | 85 | 91  | 102 | 105 | 110 | 122 | 125 | 140 | 151 | 152 | 164 | 172 | 183 | 189 | 189 | 203 |     |     |     |
| 27      | 10 | 16 | 27 | 38 | 43 | 45 | 56 | 60 | 71 | 83 | 89 | 97  | 107 | 110 | 114 | 126 | 129 | 141 | 156 | 157 | 166 | 177 | 183 | 197 | 200 | 217 | 217 |     |     |
| 28      | 10 | 17 | 28 | 37 | 44 | 47 | 61 | 65 | 75 | 87 | 88 | 102 | 109 | 116 | 117 | 129 | 135 | 151 | 162 | 165 | 170 | 182 | 190 | 200 | 204 | 216 | 222 | 232 |     |
| 29      | 11 | 18 | 29 | 40 | 40 | 51 | 59 | 68 | 78 | 78 | 94 | 106 | 114 | 120 | 121 | 139 | 139 | 156 | 170 | 183 | 179 | 189 | 192 | 213 | 211 | 219 | 232 | 245 | 248 |

En base al tiempo de corrida para grafos Grid de 0 a 900 nodos, acotamos superiormente con una cubica  $(0,27n^2 + 120n^2)$  logrando una forma muy similar como se puede observar en el siguiente gráfico:



Por lo tanto se puede concluir que el algoritmo goloso no es recomendado para esta familia de grafos ya que, a pesar de tener complejidad polinomial cubica, a medida que aumenta la cantidad de nodos la diferencia aumenta considerablemente con respecto a la óptima

## 4. Algoritmo Local Search

### 4.1. Solución

La idea de un algoritmo de búsqueda local (o local search) es, a partir de una solución (no óptima) a un problema dado, trabajar sobre ella, realizar distintas operaciones y estrategias de modo tal de mejorarla e intentar acercarse lo más posible a una solución óptima. La distinción de éstos algoritmos está en que cada modificación a la solución original, nos genera una o un conjunto de soluciones al problema, siempre cercanas a la solución original. En éste sentido, definimos una *vecindad* de soluciones, que está formada por éstas nuevas soluciones cercanas a la original. En nuestro caso en particular, la idea es que, a partir de un grafo, hallemos un conjunto dominante de alguna forma (todos los nodos del grafo son, en efecto, un conjunto dominante. O bien también podemos usar la solución obtenida con el algoritmo greedy) y, a partir de ella, intentar construir, mediante estrategias y funciones creadas por nosotros, una nueva solución, mejor o igual a la que nos proveyeron como base.

Es así que nos planteamos lo siguiente: ¿qué operaciones podemos realizar de forma tal que, a partir de un conjunto dominante, no necesariamente mínimo, podamos reducir la cardinalidad del conjunto y que continúe siendo dominante? Las posibilidades que encontramos fueron orientadas siempre a la posibilidad de reducir o, al menos mantener, la cantidad de nodos en el conjunto dominante. Es por eso que las estrategias que utilizamos en la búsqueda local son las siguientes:

**Reemplazar 2 nodos del Conjunto** dominante por uno que se encuentre dominado. Ésta es la forma más directa de reducir la cardinalidad del CD. La forma de seleccionar los nodos intercambiables la realizamos verificando si la unión de nodos vecinos de los dos nodos a quitar del conjunto está incluida en el conjunto formado por los vecinos del vértice a insertar en el CD. Ésta es la forma más sencilla de encontrar dichos nodos, ya que de otra forma, el costo de encontrar estos posibles reemplazos sería muy costoso. Además, existe la posibilidad de encontrar varios posibles candidatos, por lo que ideamos 3 funciones de comparación para ordenar éstas tuplas y, en cada caso, utilizar la más conveniente según dicha función. Luego, para el método GRASP, eligiremos una de éstas a partir de las pruebas realizadas.

**Eliminar 1 nodo del CD:** Para éste caso, analizamos si eliminando alguno de los nodos del CD, el mismo sigue dominando a todos los nodos del grafo. Para ello, nos fijamos si el conjunto de vecinos del nodo que queremos quitar, está incluido en la unión de todos los vecinos de los nodos del CD menos el nodo que queremos quitar. Si es así, quitando el nodo el conjunto seguirá siendo dominante. En éste caso, es claro que la cardinalidad disminuye.

**Reemplazar 1 nodo del CD** por otro del conjunto dominado. La estrategia aplicada para encontrar los posibles candidatos es similar a la que utilizamos en la técnica del 2x1, es decir, nos fijamos los nodos que estén en el CD, y buscamos aquellos dominados cuyos conjunto de vecinos contenga a los vecinos del nodo quitado (no tienen que ser los mismos exactamente, podría tener mas vecinos). Es claro que ésta técnica no reduce la cardinalidad del conjunto, pero la utilizamos con la esperanza de que éste cambio de nodos nos modifique la solución parcial y, a partir de ésta, si podamos utilizar algunas de las técnicas anteriores. Es decir, lo que intentamos realizar con ésta procedimiento es que al cambiar por otro nodo con un número de nodos adyacentes posiblemente mayor, al agregarse nuevas aristas, podamos luego sí, en el próximo paso, reducir la cardinalidad del CD.

El algoritmo de búsqueda local intentará, a partir de una solución dada (en la primera iteración, será la solución que se le otorgue a la hora de invocarla), mejorarla a partir de alguna de las tres técnicas mencionadas anteriormente. Primero, intentará quitar 2 nodos del conjunto e ingresar uno. Si no puede, intentará con la siguiente estrategia, que es quitar uno del conjunto dominante. Si tampoco puede reducir la cardinalidad con ésta técnica, intentará reemplazar 1 nodo del CD por un nodo dominado, para así al menos, cambiar la solución.

Si alguna de éstas técnicas tuvo éxito, el algoritmo no probará con las siguientes, y a partir de la solución hallada, intentará volver a crear una nueva ejecutando todas las técnicas nuevamente para la nueva solución. Evidentemente, llegará una solución para la que nuestro algoritmo no podrá llevar a cabo ninguna de las técnicas especificadas, y es ahí donde termina la búsqueda local, y nuestro algoritmo, dando como solución a la última encontrada, y que tendrá una cardinalidad igual o menor a la solución inicial.

A continuación, mostramos el pseudocódigo de nuestra algoritmo:

### 4.2. Pseudocódigo

MEJORARSOLUCION (**ConjuntoDominante** *cd*, **Comparator** *funcion*)  $\longrightarrow$  *cd* : Conjunto Dominante

```
1  mejoroSolucion = true
2  hasta mejoroSolucion no sea false:
3      mejoroSolucion = ElegirYEjecutarEstrategia(cd, funcion)
4  return cd
```

---

ELEGIRYEJECUTARESTRATEGIA (**ConjuntoDominante** *cd*, **Comparator** *f*)  $\longrightarrow$  *res* : Boolean

```
1 Si es posible llevar a cabo la estrategia 2x1 con la funcion f:
2     devuelvo true
3 Si es posible llevar a cabo la estrategia quitar un nodo:
4     devuelvo true
5 Si es posible llevar a cabo la estrategia 1x1:
6     devuelvo true
7 return false
```

---

TRYESTRATEGIA2X1 (**ConjuntoDominante** *cd*, **Comparator** *f*)  $\longrightarrow$  *res* : Boolean

```
1 obtengo los posibles nodos intercambiables, ordenados por la funcion f
2 Si existen posibles nodos intercambiables:
3     obtengo la primera tupla de nodos intercambiables
4     intercambio los nodos de la tupla en el cd
5     devuelvo true
6 sino devuelvo false
7 return false
```

---

TRYESTRATEGIAQUITARUNO (**ConjuntoDominante** *cd*, **Comparator** *f*)  $\longrightarrow$  *res* : Boolean

```
1 para cada vertice v del conjunto dominante:
2     quito el vertice v del cd
3     Si el conjunto sigue siendo dominante:
4         devuelvo true
5 return false
```

---

TRYESTRATEGIA1X1 (**ConjuntoDominante** *cd*, **Comparator** *f*)  $\longrightarrow$  *res* : Boolean

```
1 para cada vertice v del conjunto dominante:
2     para cada vertice d del conjunto dominado:
3         si no realice el intercambio v,d y los nodos son reemplazables:
4             intercambio los vertices en el cd
5             devuelvo true
6 return false
```

---

### 4.3. Análisis de Complejidad

Para todos los casos, se corre al menos  $k$  veces, y para cada una de esas  $k$  corridas, se utilizan 3 métodos para intentar hallar una nueva solucion:

**2x1:** Se crea una cola de nodos, ordenados por una funcion  $f$  (pasada por parametro). Para ello, se recorren todos los posibles pares de nodos dominantes, y para cada par, se analiza si es posible reemplazarlo por un nodo del conjunto dominado, verificando que el conjunto resultante también sea dominado. La complejidad de crear esta cola y hacer éstas verificaciones es de  $O(n^4)$ , siendo  $n$  la cantidad de nodos del grafo. Ésta complejidad se obtiene ya que, para cada nodo del conjunto dominante (que pueden ser hasta  $n$ ), se lo agrupa contra los otros nodos del conjunto dominante (a lo sumo  $n-1$ ), y para cada uno de éstos pares, se le pregunta si se lo pude cambiar con alguno de los (a lo sumo),  $n$  nodos dominandos, y que nuestro conjunto siga siendo dominante. Crear los pares de vertices es  $O(n^2)$ , y para cada una de esas operaciones, se lo compara a lo sumo contra  $n$  vértices dominados y se le pregunta si ese cambio hace que nuestro conjunto siga siendo dominante. La complejidad de ésto es también de  $O(n^2)$ , y se realiza para todos los pares de vértices, por lo que la complejidad final de ésta estrategia es de  $(n^4)$ .

**QuitarUno:** en éste caso, se recorren todos los nodos del conjunto dominante, y se pregunta si, quitando el nodo en cuestion, el conjunto continúa siendo dominante. Ésta método tiene una complejidad de  $O(n^2)$ , donde  $n$  es la cantidad de nodos del grafo, ya que a lo sumo se recorrerán  $n$  nodos, y se lo sacará del conjunto dominante y preguntará si el conjunto sigue siendo dominante (que nos cuesta  $O(n)$ ).

**UnOxUnO** ésta estrategia requiere de recorrer todos los vértices dominantes, y para cada uno de ellos, compararlo con todos los vértices dominados, y fijarme si puedo intercambiar éstos nodos (en cuestión, si tienen los mismos vecinos) de forma tal que el conjunto continúe siendo dominante. Esta verificación, en el peor de los casos, tiene una complejidad  $O(n^2)$ , donde  $n$  es la cantidad de nodos del grafo.

Es decir, que la complejidad en todos los casos, no es mayor a  $O(n^4)$ , ya que en todos los casos se analiza primero la opción de hacer el 2x1. Si puede, la complejidad será esa, y si no puede, seguirá con los otros métodos que, a rasgos generales, nunca superan ésta cota de  $O(n^2)$ . Por lo que la complejidad general del algoritmo es de  $O(n^4)$ .

#### 4.4. Elección de la función a utilizar

Como comentamos en la sección que hablamos acerca de la solución, cuando creamos los posibles nodos a quitar con la estrategia 2x1, es posible que tengamos una lista de varios candidatos. Y la pregunta que se nos formuló fue: ¿cuál de ellos deberíamos sacar, y por qué? Para ello, creimos conveniente ordenar de alguna forma conveniente todos estos pares de nodos con sus respectivos reemplazantes. Para ello, creamos 3 funciones que ordenan éstas tuplas de nodos, cada una con una idea diferente para intentar ver si alguna de éstas formas de ordenamiento presentaba una mejoría importante respecto a las otras.

Por tanto, una vez analizada la complejidad, nos prestamos a decidir cual de las funciones creadas para ordenar los nodos en la cola de prioridad utilizada para la estrategia 2x1. Para ello, utilizamos como solución inicial los conjuntos dominantes que nos provee el algoritmo greedy analizado en la sección anterior. Corrimos el algoritmo para 500 nodos, para el greedy y luego, a partir de esa solución, corrimos la búsqueda local.

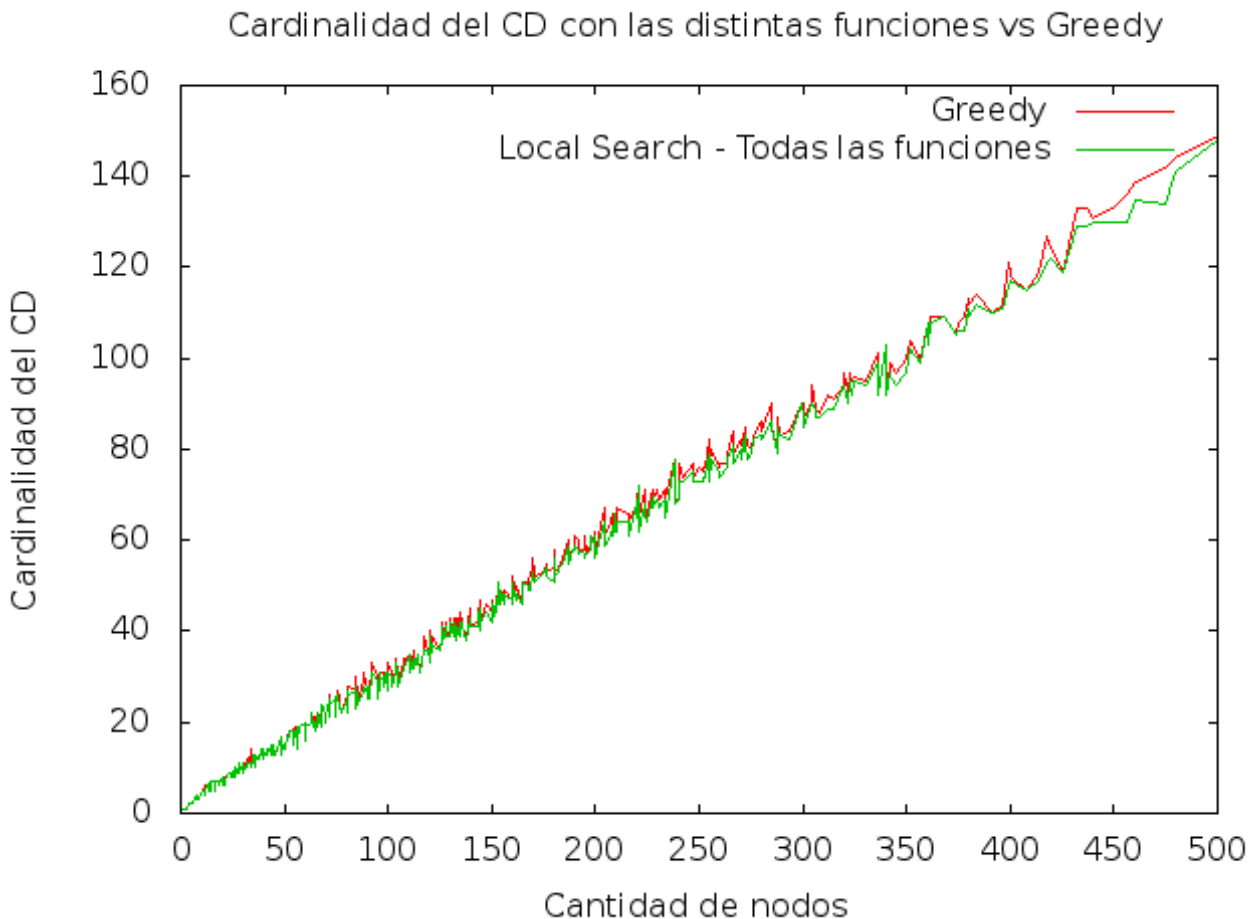
Las funciones creadas para la ocasión son 3, y funciona de la siguiente manera:

**Diferencia de Grados entre el vertice insertado y los reemplazados:** es la suma de los grados de los dos vértices a reemplazar menos el grado del vértice a insertar.

**Menor grado del vertice a reemplazar:** es el grado del vértice a insertar.

**Suma de los grados de los vertices reemplazados :** es la suma de los grados de los dos vertices a reemplazar.

Lamentablemente, no hemos conseguido que ninguna de las 3 funciones creadas aporte una reducción real en la cardinalidad del CD respecto de las otras dos. Es decir, no importa cómo seleccionemos los vertices a sacar e insertar de entre todos los posibles candidatos (con cual de las funciones), siempre la cardinalidad final del CD será la misma, como se puede apreciar en el gráfico a continuación. Como la cardinalidad de los CD obtenidos con las 3 funciones de ordenamiento es igual para todas ellas, sólo dibujamos una, y mostramos su rendimiento contra el Greedy, respecto a la calidad de la solución encontrada.

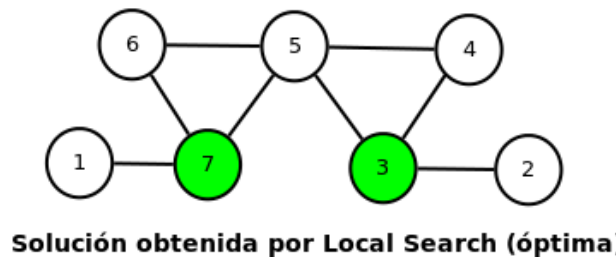
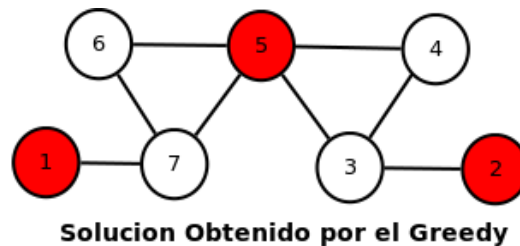


A efectos prácticos, y para el resto de las pruebas, utilizaremos como función de selección de los nodos a reemplazar e insertar a la función **DiffGrados**, que es la que selecciona como mejor candidato al que tenga menor diferencia entre los grados de los dos vértices a quitar y el grado del vértice a insertar.

#### 4.5. Mejor Caso

Al igual que al algoritmo Greedy, pudimos verificar que nuestro algoritmo se comporta de forma óptima para aquellos grafos que sean K-completos, los grafos bipartitos y para las distintas variantes de los arboles. Eso se debe a que, en todos los casos, no quedan nodos aislados a partir de las estrategias elegidas, y de ésta forma, la eliminación o el intercambio de nodos va trabajando con los mismos nodos con los que trabajaría el algoritmo exacto. Cabe destacar que, para el caso del greedy sólo se es óptimo para los arboles binarios, cuando nuestro algoritmo de búsqueda local funciona óptimamente para todas sus variantes.

Además de éstos, que se comportan de la misma manera que el greedy, hemos encontrado una familia que es óptima para la heurística de búsqueda local, mejorando la solución obtenida por el algoritmo de greedy. Ésta familia se podría describir como los grafos en que el nodo de mayor grado no tiene ninguna conexión con los nodos hoja (es decir, sólo tiene un nodo adyacente). En el caso del greedy, el algoritmo tomaría al nodo que tiene mayor grado, por lo que además, debería tener en el CD a todos los nodos hoja. En cambio, nuestro algoritmo de búsqueda local agarra esa solución no óptima, e intercambia y reemplaza nodos de forma tal de llegar a una solución óptima.



En el ejemplo anterior, podemos ver un ejemplo de la familia mencionada anteriormente. El algoritmo greedy empezará por el nodo con mayor grado, y luego le quedarán 2 vértices con grado 1 en los extremos, por lo que tendrá que tomar a ambos. En cambio, la heurística de búsqueda local empezará de, por ejemplo, ésta solución de 3 nodos, y luego intercambiará los nodos con grado 1 por sus vecinos, para luego eliminar al nodo con mayor grado, quedando de ésta forma un conjunto dominante óptimo y de menor cardinalidad que la el greedy.

#### 4.6. Peor Caso

Es claro que, al ser una heurística, en muchos casos la solución obtenida por la búsqueda local no es la óptima, pero de todas formas, se trata de soluciones cercanas a ella. En éste sentido, se dan cuando los nodos de la solución de la cual se parte la búsqueda local, tienen muchas aristas conectadas entre sí o a otros vértices ya dominados (los grados de los nodos son muy altos). Ésto hace que, por ejemplo, las estrategias elegidas no puedan intercambiar nodos, o quitar nodos de la solución de la que se parte y, sin embargo, en la práctica si exista una solución con menor cantidad de nodos.

Siguiendo la línea de análisis del algoritmo greedy, pudimos ver que nuevamente la familia de los grafos Grid, con nuestro algoritmo de búsqueda local, no logra una solución óptima. Sin embargo, si hemos notado que, si le proporcionamos a nuestro algoritmo como solución inicial un CD obtenido con la heurística greedy, existen casos en que la cardinalidad se reduce en hasta 3 nodos, pero aún así la solución no logra ser la óptima. Es decir, para algunos casos particulares de grafos pertenecientes a ésta familia, logramos encontrar una solución levemente mejor a la inicial (greedy), pero aún así, podemos ubicar la familia dentro los casos en que no se llega a la solución óptima, al menos en hasta 29 nodos, que es la cantidad máxima que pudimos calcular con el algoritmo exacto.

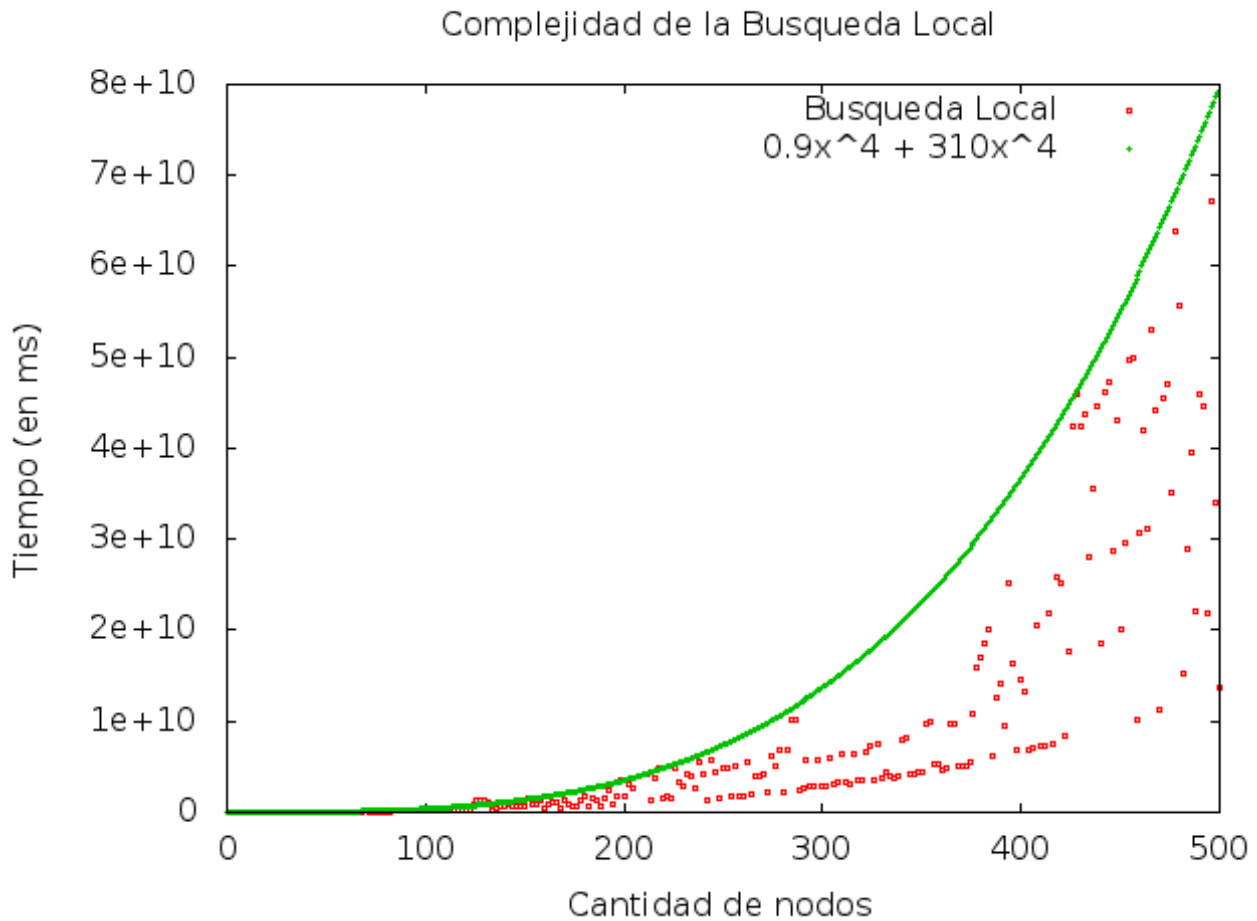
Otra de las familias analizadas en la heurística greedy, la de los grafos de Mobius, está también dentro de ésta categoría en que el algoritmo no nos proporciona la solución exacta. Pero, en ésta ocasión se diferencia con el Grid en que incluso no llega a mejorar la solución inicial en ninguno de los casos estudiados. Más precisamente, corrimos el algoritmo con dos soluciones iniciales diferentes, para ver cuál era su comportamiento.



En primer lugar, le dimos como solución inicial (es decir, como conjunto dominante) a todos los vértices del grafo. Para esos casos, nuestra heurística, incluso, obtenía un conjunto dominante con mayor cantidad de nodos que los obtenidos por el algoritmo greedy. Y por otro lado, probamos como otra solución inicial al conjunto dominante que nos devolvía el algoritmo greedy, y en todos los casos, la cardinalidad del CD no pudo ser reducida (claro está, en casos en que la solución no era la óptima). Ésto se debe a que el algoritmo greedy nos da como solución inicial nodos 3-regulares, lo que hace que el algoritmo de búsqueda local tenga pocos vecinos en los que buscar y poder intercambiarse. Es por ello que podemos afirmar que para la familia de grafos de Mobius, nuestro algoritmo nunca logrará encontrar una solución óptima, con excepción de si el CD que se le pasó como solución inicial ya es óptimo. Éstos resultados, eran de esperarse, ya que se trata de una heurística y sólo en algunos casos particulares (los mencionados en la sección Mejor Caso) se consiguen los mismos resultados que en los algoritmos exáctos. La idea, entonces, es intentar de construir las mejores estrategias para poder llegar a un resultado lo más exacto posible, para instancias en que sea imposible (al menos hoy en día) correr el algoritmo exácto, de orden exponencial. En éste caso particular, de la búsqueda local, seguramente haya muchas estrategias para mejorar o agregar, que nos aproximen a una solución un poco más exacta de la que encontramos hasta ahora, pero no pudimos dar con ellas en éste informe.

#### 4.7. Tests y análisis

En primer lugar, y para acotar siempre la complejidad para el peor caso, en todos los gráficos que presentemos en ésta sección utilizaremos grafos de la familia de Mobius, por lo expuesto en la sección anterior respecto a su complejidad para el algoritmo de búsqueda local. Además, como comentamos también anteriormente, para ordenar los posibles nodos candidatos, utilizaremos la función de comparación **DiffGrados**. Una vez establecida qué función deberíamos utilizar para el 2x1, nos abocamos a testear el método de búsqueda local de acuerdo a la cantidad de nodos del grafo y el tiempo que le consume encontrar una solución. Vale aclarar que no tomamos en consideración el tiempo que nos consume encontrar una solución para darle a la búsqueda local, ya que consideramos que ello no es parte de nuestro algoritmo. De ésta forma, podemos ver que nuestro algoritmo se comporta de forma polinómica en función del tiempo, como lo analizamos en la sección de complejidad. Es decir, mientras mayor cantidad de nodos tenga la solución que nos proveen, y más relacionados estén entre sí dichos nodos (es decir, a través de aristas hacia nodos del mismo conjunto o del conjunto de los dominados), mayor tiempo requerirá calcular nuestra solución. El siguiente gráfico tiene como función mostrar la complejidad de nuestro algoritmo, que como dijimos tiene una complejidad de  $O(n^4)$ . El mismo muestra el tiempo que le toma a nuestro algoritmo encontrar la solución, para grafos que parten desde 2 a 500 nodos. Como dijimos anteriormente, utilizamos grafos de la familia de Mobius. Además, se incluye en el gráfico la función  $(1,05x^4)$ , para mostrar que, aproximadamente, nuestro algoritmo se comporta de ésta manera.



En el gráfico anterior podemos apreciar como nuestro algoritmo, a lo sumo, se comporta de la misma forma que la función polinómica contra la que la comparamos. La dispersión de los puntos se debe a que, de acuerdo a la solución que se le pase al algoritmo y a la solución parcial que se esté construyendo, esto modifica la performance del mismo. Vale la pena destacar que mientras que la estrategia del 2x1 tiene una complejidad de  $O(n^4)$ , las otras dos tienen una complejidad de  $O(n^2)$ , de forma tal que una solución que se construya a base de éstas dos últimas estrategias tendrá una complejidad menor a una que lo haga siempre reemplazando nodos por la estrategia del 2x1. Lo interesante entonces, es, analizar cómo crece el tiempo insumido por nuestro algoritmo a medida que se van agregando nodos al grafo, y se puede ver cómo crece de forma similar a la función estudiada. También podemos ver que hay algunos puntos, aislados, que están por arriba de la cota de la función mencionada, pero son sólo algunos pocos y son valores cercanos a la misma, por lo que la función encontrada es la que mejor se acerca al crecimiento de nuestro algoritmo. Cabe recordar que ésta función es una cota superior para los peores casos, por lo que es de esperar, como comentamos antes, que haya punto que una cantidad de nodos ( $n$ ) tenga valores bastante lejanos a los de la función en ese punto, pero lo interesante es mostrar que, a rasgos generales, el tiempo que se toma nuestro algoritmo aumenta de la misma forma que lo hace ésta función.

Por otro lado, como se puede apreciar, si bien el algoritmo es mucho mejor que el exacto en función de complejidad, tiene un orden de complejidad mayor que el algoritmo greedy. Además, esto no nos asegura que la solución que encontramos sea la que efectivamente estamos buscando. En las próximas secciones estudiaremos más a fondo las relaciones entre la cantidad de soluciones encontradas y sus complejidades para las distintos algoritmos, para grafos generados al azar. La idea será determinar en qué situaciones conviene aplicar cual o tal técnica, si es que se puede determinar de antemano.

## 5. Algoritmo GRASP

### 5.1. Solución

La idea de este algoritmo es ejecutar una serie de veces nuestro algoritmo GREEDY randomizado y buscar en cada solución una mejora local, guardando la mejor solución hasta el momento. Gracias a la parte aleatoria del algoritmo Greedy, aplicar repetidas veces este algoritmo nos otorga soluciones obtenidas de distinta forma en cada caso, de distintas partes del espectro de soluciones, las cuales llevamos a mínimos locales para allí comparar sus cardinales y quedarnos con la menor. Nuestra esperanza es, entonces, poder caer en un mínimo global. Esa randomización se debe a que el método por el cuál dicho algoritmo goloso elige siempre el mejor valor bajo su criterio, es ahora aleatorizada seleccionando al azar entre los primeros  $k$  elementos de la lista de nodos a ser considerado dominante.

Hablando un poco más en lenguaje de GRASP, la RCL (Restricted Candidate List) es la lista que contiene un conjunto de posibles mejores candidatos según el criterio de nuestro Greedy y de ella eligiremos un valor al azar. Esta lista decidimos armarla desde el algoritmo Greedy. Para ello, agregamos en el algoritmo Greedy que reciba por parámetro dicho  $k$ , de forma tal que al momento de elegir el próximo nodo, en vez de elegir el primero de los nodos ordenados por la cantidad de adyacentes sin dominar, ahora elige la posición  $i$ , que será el número obtenido pseudo-aleatoriamente a través de la función random entre 0 y  $k$ . En caso de que este  $k$  sea mayor a la cantidad de nodos considerados en la lista,  $k$  se definirá como la longitud de dicha lista.

En las heurísticas GRASP es necesario elegir un criterio de parada para que el algoritmo no se ejecute infinitamente. En nuestro caso, decidimos elegir únicamente una cantidad de iteraciones, ya que esto nos permitió jugar libremente con ese parámetro y no preocuparnos por casos en los que la solución inicial fuera optima y nunca se realizara mejora.

### 5.2. Pseudocódigo

MCDGRASP (in Grafo, in  $k$ )  $\longrightarrow$  ConjDominante : Conj

```
1 mejorSolucion = TodosLosVertices
2 Para i=0 hasta k
3     instanciaSolucionGreedyRandomized = MCDGreedy(grafo,k)
4     nuevaSolucion = MCDLocalSearch(instanciaSolucionGreedyRandomized)
5     Si cantNodosDominantes(nuevaSolucion) < cantNodosDominantes(mejorSolucion)
6         mejorSolucion = nuevaSolucion
7     Si mejorSolucion.size() == 1
8         return mejorSolucion
9 return mejorSolucion
```

---

Comenzamos con todos los vertices como mejor solución, de forma tal que la próxima solución siempre sera mejor o igual.

Se debe aclarar que tanto LocalSearch como Greedy devuelven ConjuntosDominantes verdaderos, por lo que lo único que importa es la cantidad de nodos devuelta.

A continuación se agrega el cambio hecho en el algoritmo greedy para aleatorizar la selección de nodos:

ELEGIRVERTICE (in ListaVerticesORdenada, in  $k$ )  $\longrightarrow$  proxVertice : Vertice

```
1 Si  $k > |ListaVerticesORdenada|$ 
2      $k = |ListaVerticesORdenada|$ ;
3 posiciónAElegir = random(0,k);
4 proxVertice = ListaVerticesORdenada[posiciónAElegir]
5 return proxVertice
```

### 5.3. Análisis de Complejidad

Por la demostración de la complejidad de la búsqueda local, sabemos que la complejidad es:  $O(n^4)$ ;

Por la demostración de la complejidad del goloso, sabemos que la complejidad es:  $O(n^3)$ ;

Dentro del GRASP se realizan  $k$  iteraciones de las siguientes operaciones:

- Ejecutar algoritmo goloso con random
- Ejecutar algoritmo localSearch a partir de la solución del goloso
- Comparar mejorSolución con nuevaSolución (esta operación es en  $O(1)$  ya que tanto conseguir el tamaño de un ArrayList en Java como la comparación de enteros es en  $O(1)$ )

Esto es  $O(k*(\text{goloso} + \text{localSearch}))$ , que resulta polinomial.  
Entonces la complejidad resulta  $O(k*n^4)$ ;

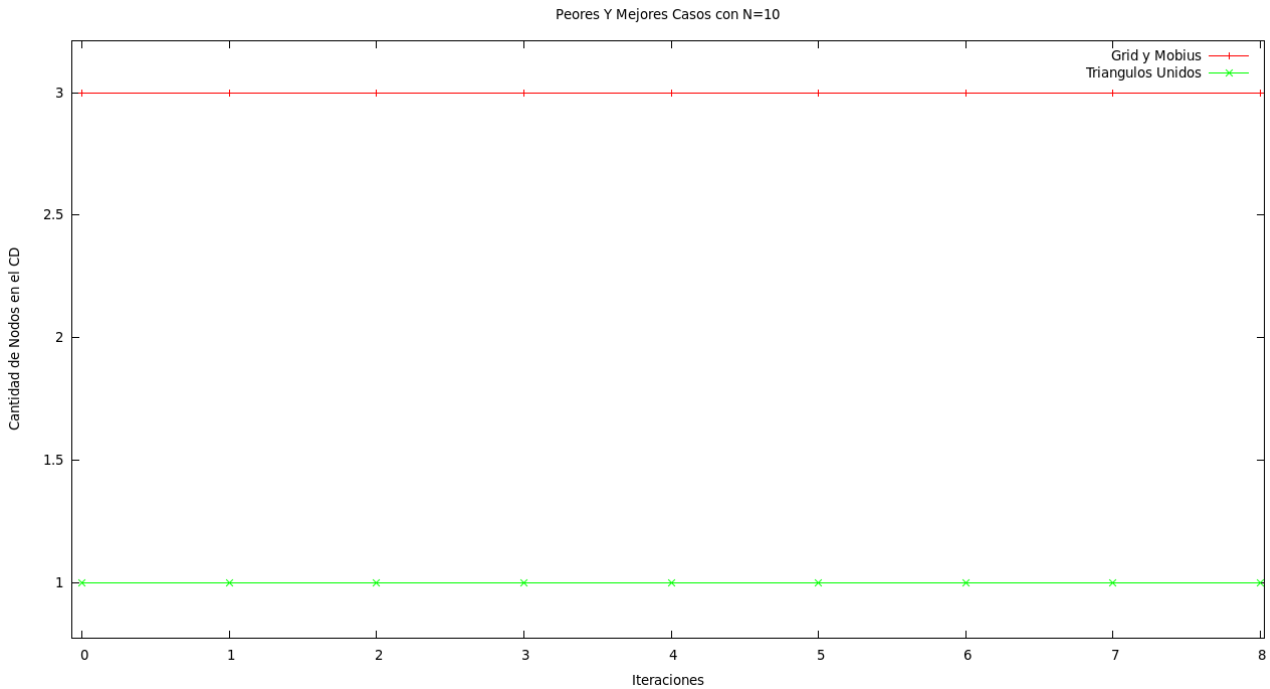
## 5.4. Tests y análisis

Tal como hicimos con los anteriores algoritmos, acá también se tomaron los peores y los mejores casos. Como la randomización evita encontrar un peor/mejor caso per-se, se decidió correr los mencionados en los puntos anteriores. Retomando un comentario anterior, GRASP te da la oportunidad de recorrer más el espacio de soluciones y buscar en cada uno una mejor versión vecinal, gracias a esto podemos socorrer los casos en donde Greedy o Greedy+LocalSearch no son óptimos gracias a esta cuota de randomización. Muchas veces esto pasa porque Greedy encuentra una solución que localmente es buena, lo que reduce el marco de posibles soluciones locales. Cuando ejecutamos GRASP, el greedy ejecutado en él notamos que devuelve un peor caso que el goloso original, pero eso provee un espacio vecinal mucho más grande para que el Local Search pueda trabajar.

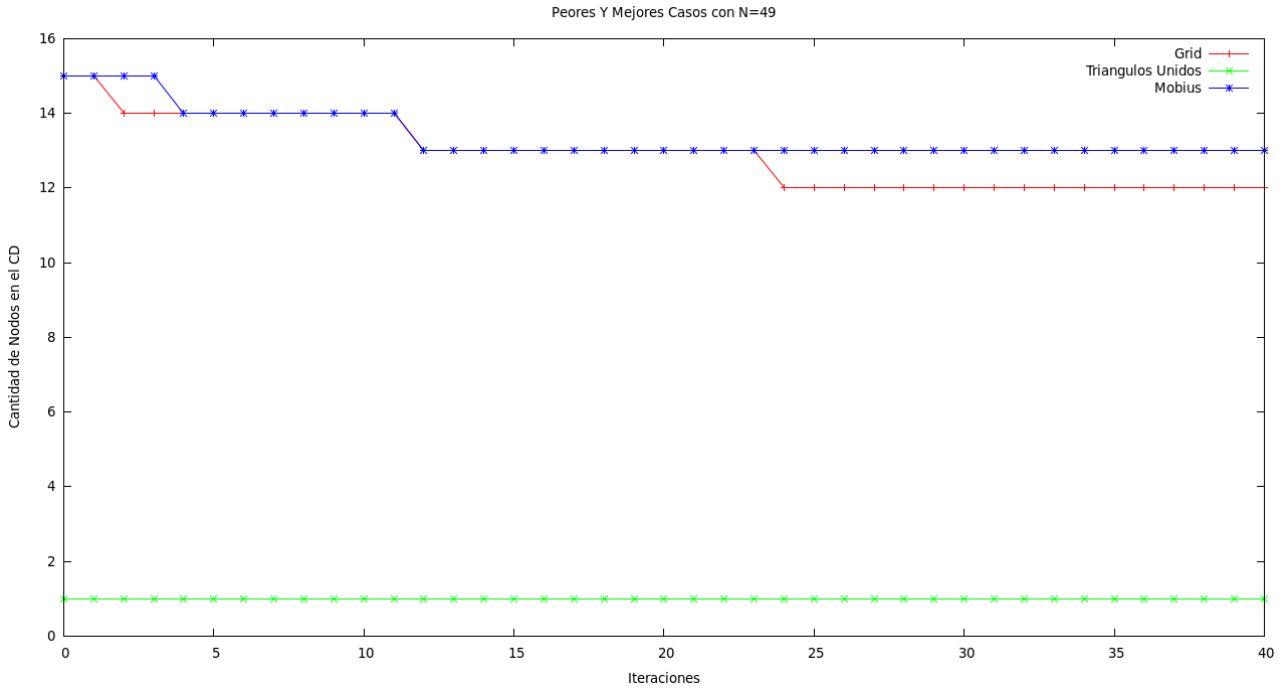
Al igual que en la búsqueda local, en este algoritmo también se incrementa la cantidad de operaciones a medida que se incrementa la cantidad de conjuntos dominantes devuelto por la solución greedy.

Cabe recordar que en cada iteración, el algoritmo greedy retorna una solución de las  $k*|\text{conjuntoDominante}|$  posibles soluciones, que después se buscará localmente una mejora en caso de existir a través del camino elegido.

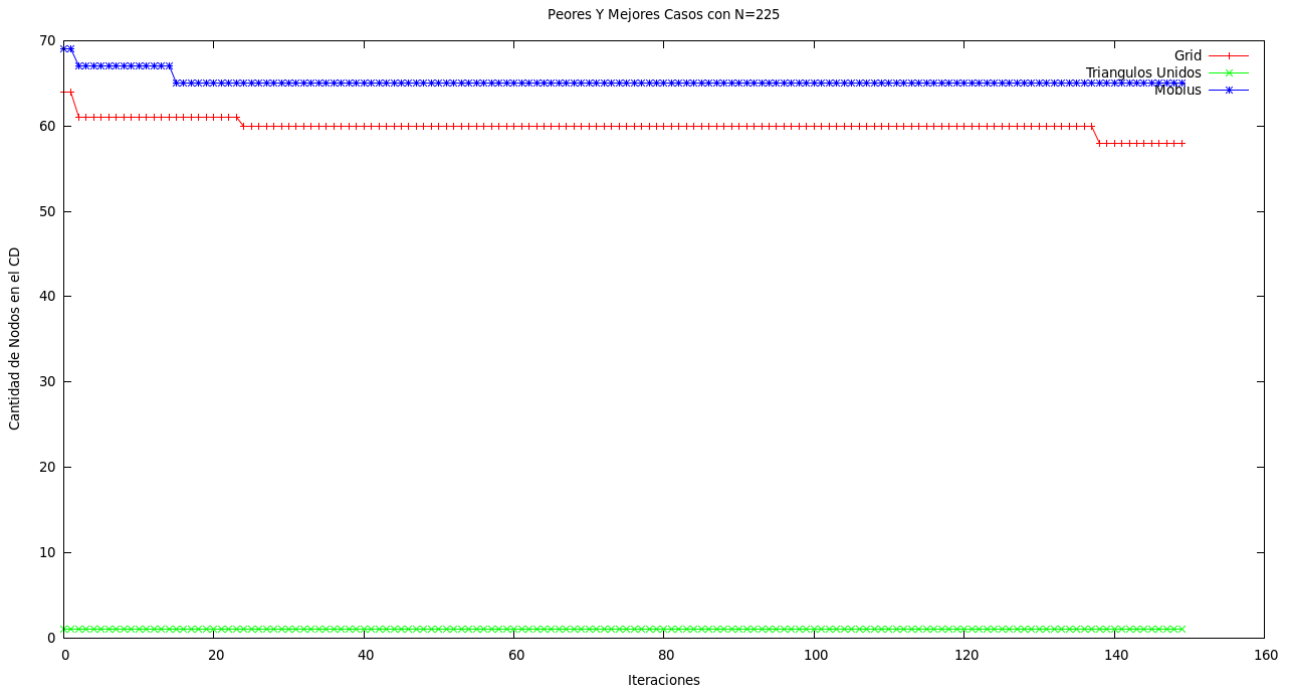
Antes de hacer los gráficos, deberíamos calcular cual es el peor caso para este algoritmo. Sin embargo, el mismo depende de la solución random generada por el algoritmo goloso cuando se usa el valor de  $k$ . Esto es importante, ya que mientras esa solución sea generada de forma pseudo-random, menor cantidad de operaciones va a haber en la búsqueda local. A continuación se muestran algunos de los ejemplos realizados para distintas cantidades de nodos, distintas iteraciones obteniendo resultados en los peores y mejores casos.



Peores y mejores casos con  $n = 10$ .



Peores y mejores casos con  $n = 49$ .

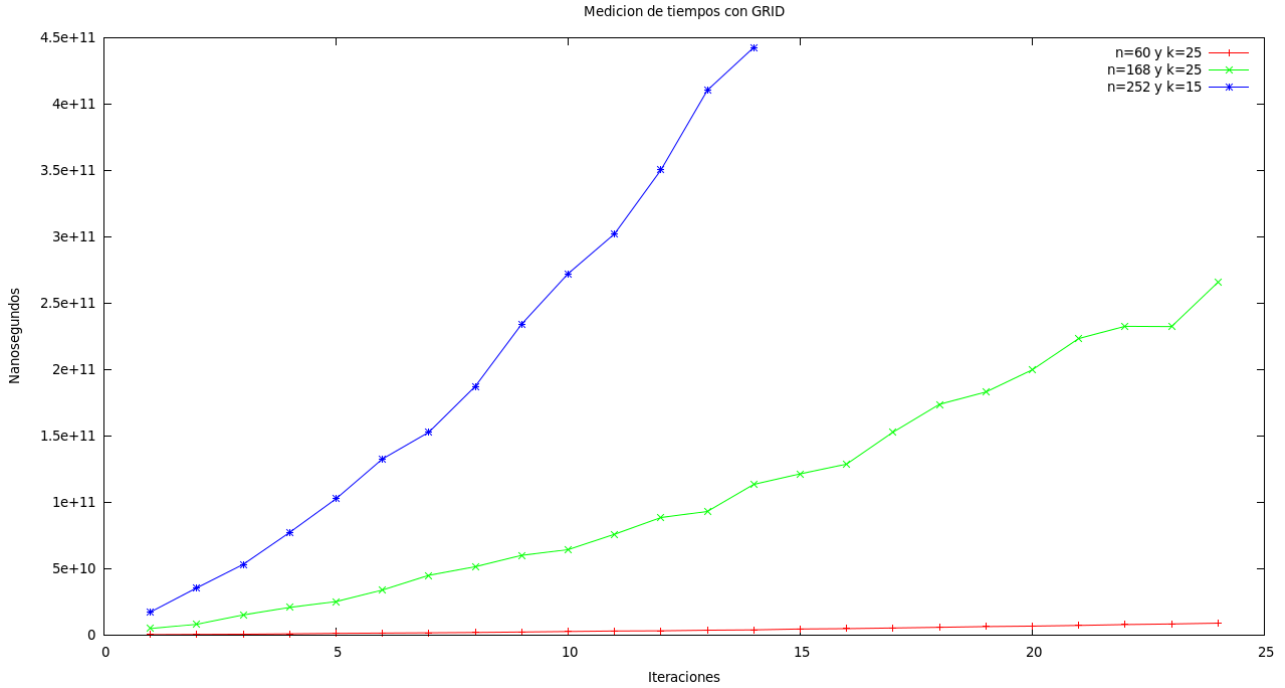


Peores y mejores casos con  $n = 225$ .

Como se puede ver en los gráficos, la cantidad de nodos no se reduce por utilizar un  $k$  más grande. Esto es importante pero veamos por qué. En la  $i$ -ésima iteración, GRASP le pide a Greedy que obtenga una nueva solución tomando siempre, en cada iteración de este último, de los primeros  $k$  posibles un nodo random como próximo elemento a ser considerado como dominante, y una vez que el conjunto sea dominante, será mejorado con local search.

Ahora entonces tenemos una nueva solución, independiente de la  $i-1$ -ésima iteración. Notemos que esta solución no es necesariamente mejor a la anterior, esto se debe a que el elemento obtenido de la RCL puede ser bastante malo según el criterio greedy y por lo tanto se obtiene un conjunto grande, que la búsqueda local no alcanza a mejorar del todo. Por otro lado, si el tamaño de la RCL es muy chico, la solución inicial greedy randomizada va a ser muy similar a la greedy clásico (no randomizado). Esto nos llevaría a explorar una cantidad más acotada de vecindarios de soluciones al momento de aplicar la búsqueda local. Entonces concluimos que al momento de elegir el  $k$ , notar que con pocos  $k$  ya se puede obtener lo que sería el ideal, pero sin embargo es conveniente utilizar una RCL más grande para abrir el panorama de soluciones. Igualmente, es lógico que mientras mayor sea el  $k$  es probable que encuentre algún mejor caso, sin embargo es más probable que el algoritmo ingrese en lo que decidimos llamar: "esperando mejor solución que puede no llegar".

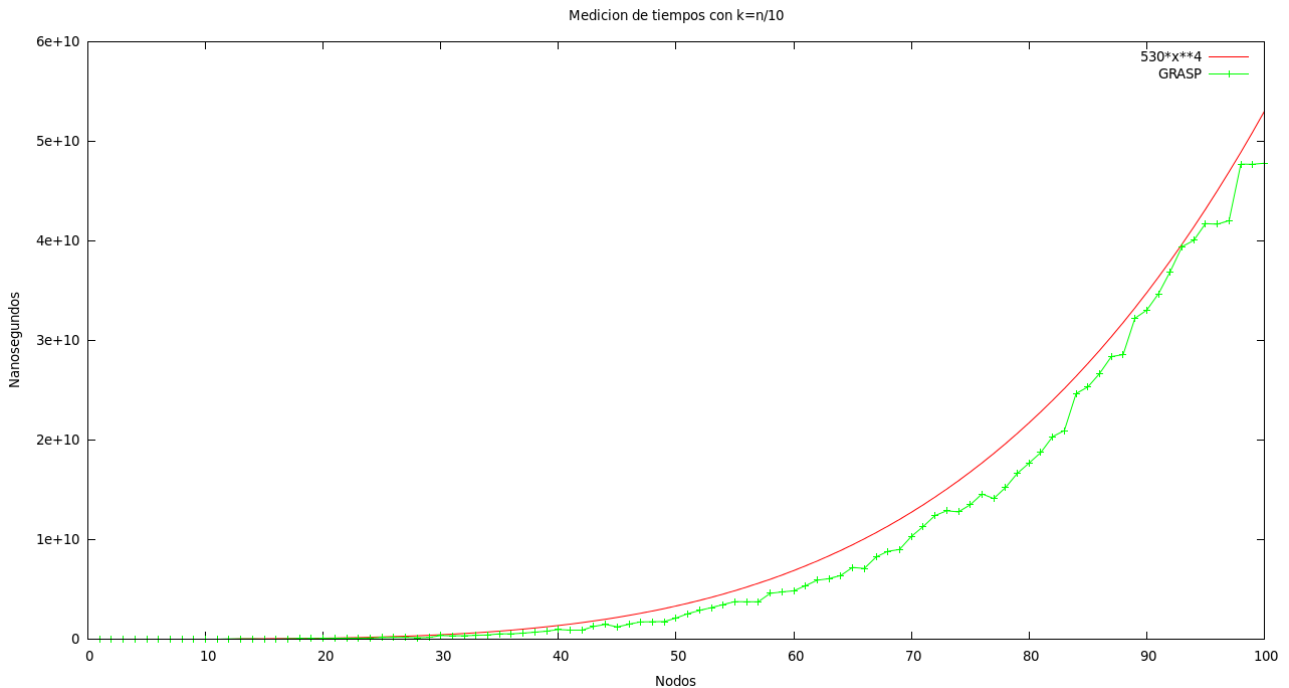
A continuación se agrega un gráfico para evaluar los tiempos para distintos  $k$  con distintos nodos del conjunto de familias detallado en los gráficos anteriores:



Flia de grafo Grid perteneciente al peor caso con  $n=60$ ,  $n=168$ ,  $n=252$  con  $k < 25$

Como era esperable, la relación es lineal. Esto es ya que el  $K$  multiplica como constante y esta es siempre menor a  $n$ , ya que correr con un  $k$  mayor a  $n$  no tendría sentido práctico. Las pequeñas diferencias se deben a que al depender de otros algoritmos como ser: Greedy y LocalSearch, que tienen una condición de corte distinta a la de este algoritmo, puede pasar que terminen antes o tarden más. Por ejemplo, en caso de que greedy con un  $k$ , elija en tres iteraciones un conjunto dominante minimal y sin embargo para otro  $k$  elija en más iteraciones. Tomamos  $k$  chicos, ya que como vimos con  $k$  muy grandes no significa mejores resultados, y de esta forma mostramos un gráfico útil al momento de elegir qué algoritmo correr.

A continuación se agrega un gráfico con los tiempos de corrida para distintos  $n$  de la familia Greed comparado con la cota superior:



Flia de grafo Triangulos Unidos perteneciente al mejor caso con  $n=12$ ,  $n=60$ ,  $n=168$ ,  $n=252$  con  $< 25$

Como se puede ver, mantenemos la cota mencionada. Las pequeñas diferencias que hacen que no sea completamente paralela, se deben a lo mencionado en el párrafo anterior, ya que estamos trabajando con un grafo random.

Sin embargo, es interesante ver que aunque pertenezca a  $O(n^4)$ , no es despreciable ni el  $k$  ni el hecho de que dentro del ciclo realice una ejecución de GREEDY  $\in O(n^3)$

## 6. Resultados Finales

### 6.1. Introducción

Realizamos diferentes gráficos generados pseudo-aleatoriamente con el fin de poder obtener una idea generalizada entre los algoritmos, ya que en las secciones anteriores pudimos detallar los peores y mejores casos de cada uno. Estos algoritmos fueron generados con una función que recibe como parámetro la cantidad de nodos, y una probabilidad. Dicha función, por cada par de nodos, genera un valor random entre 0 y 100, si este valor está por debajo de la probabilidad recibida como parámetro, unirá dichos nodos, de otra manera, no.

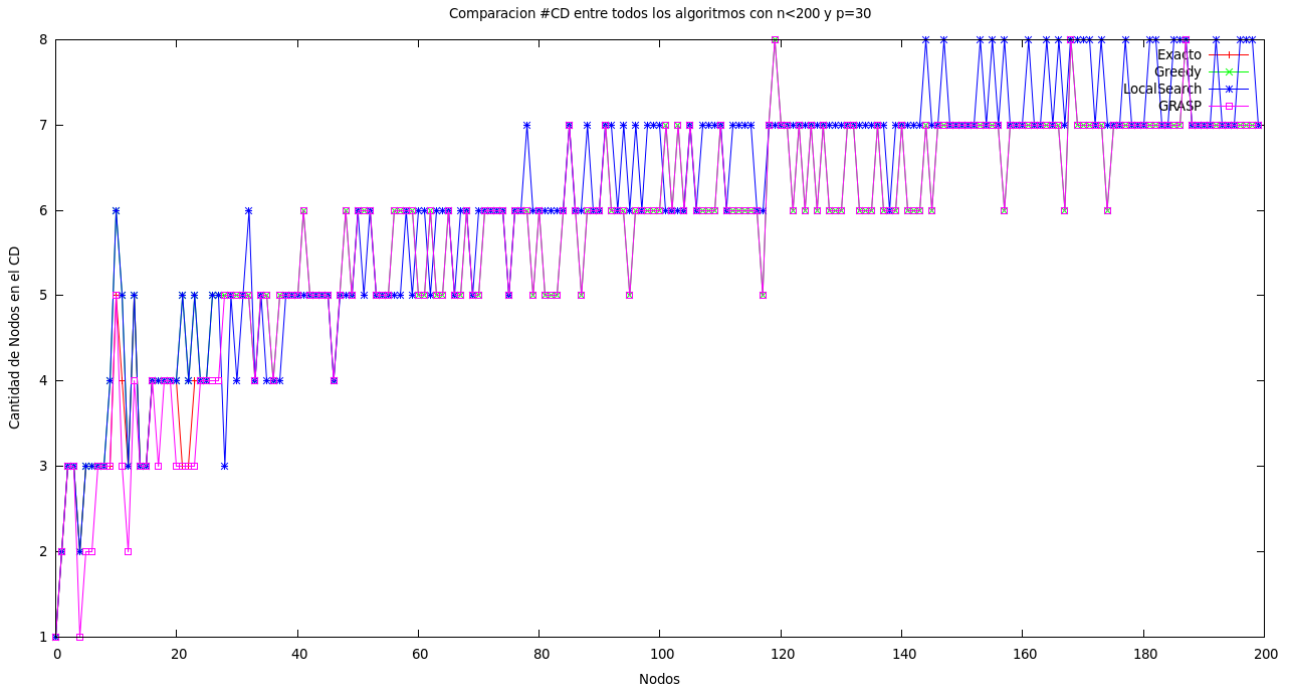
Los análisis a realizar serán del estilo cantidad de nodos del conjunto dominante otorgado por cada heurística, comparándolo con el Exacto, y tiempos.

Para el GRASP, elegimos correr con  $k=n/10$ , ya que después de varias pruebas, nos pareció que con esa cantidad de iteraciones en proporción a la cantidad de nodos encuentra un valor óptimo antes de que el algoritmo entre en lo que denominamos "esperando mejor solución que puede no llegar" (remitirse al análisis del GRASP en la sección anterior).

Cabe destacar que el algoritmo exacto, se deja de correr para los  $n < 30$  debido a su complejidad. Por esto y porque a partir de ese número pega saltos tan grandes (en cuanto a tiempos de ejecución y ciclos de procesador) que se vuelve imposible graficarlo.

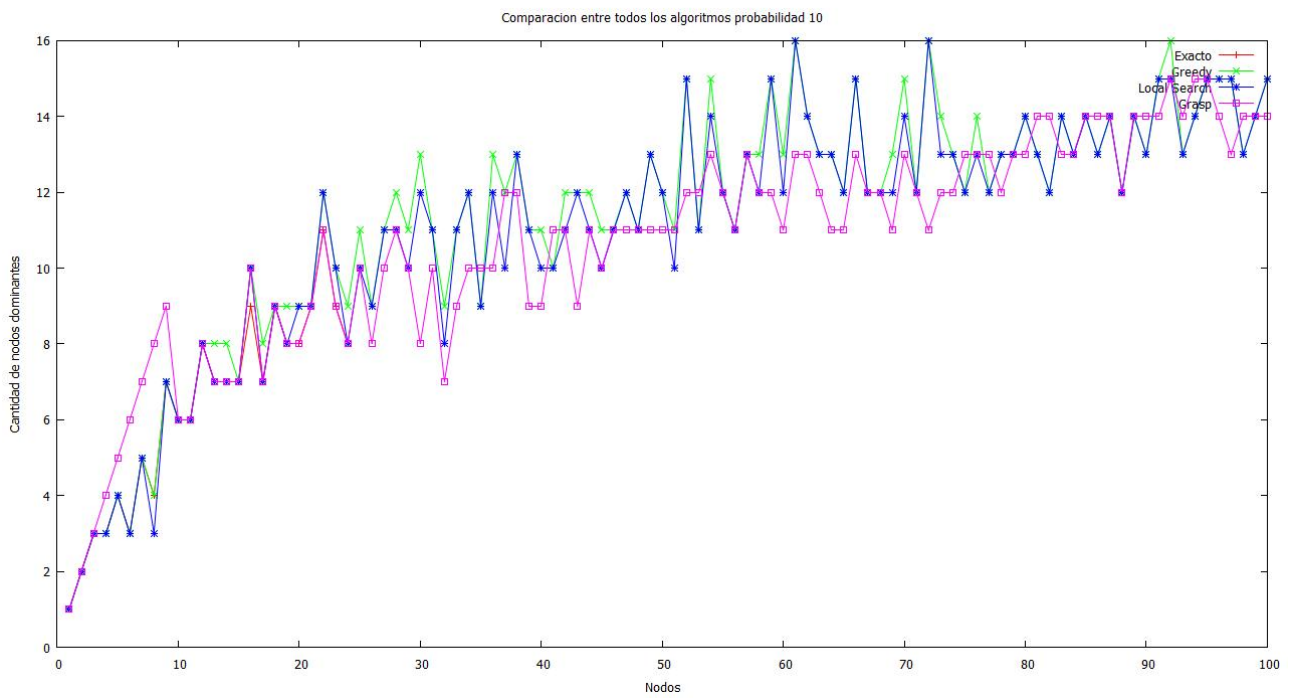
Para el LocalSearch, en la estrategia DosPorUno, usamos la función de comparación **DiffGrado**, por las razones ya mencionadas en la sección correspondiente a ese algoritmo.

### 6.2. Por Cantidad De Nodos

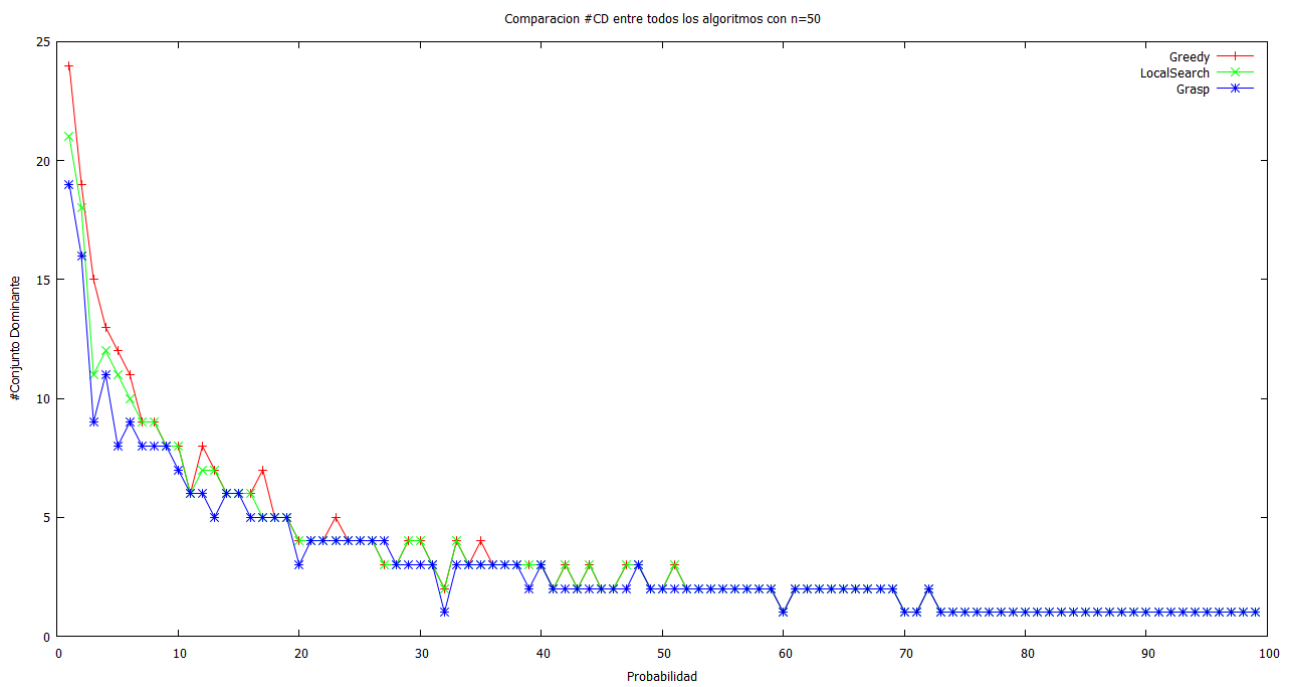


Comparacion por cantidad de nodos con  $n$  hasta 200 y  $p=30$

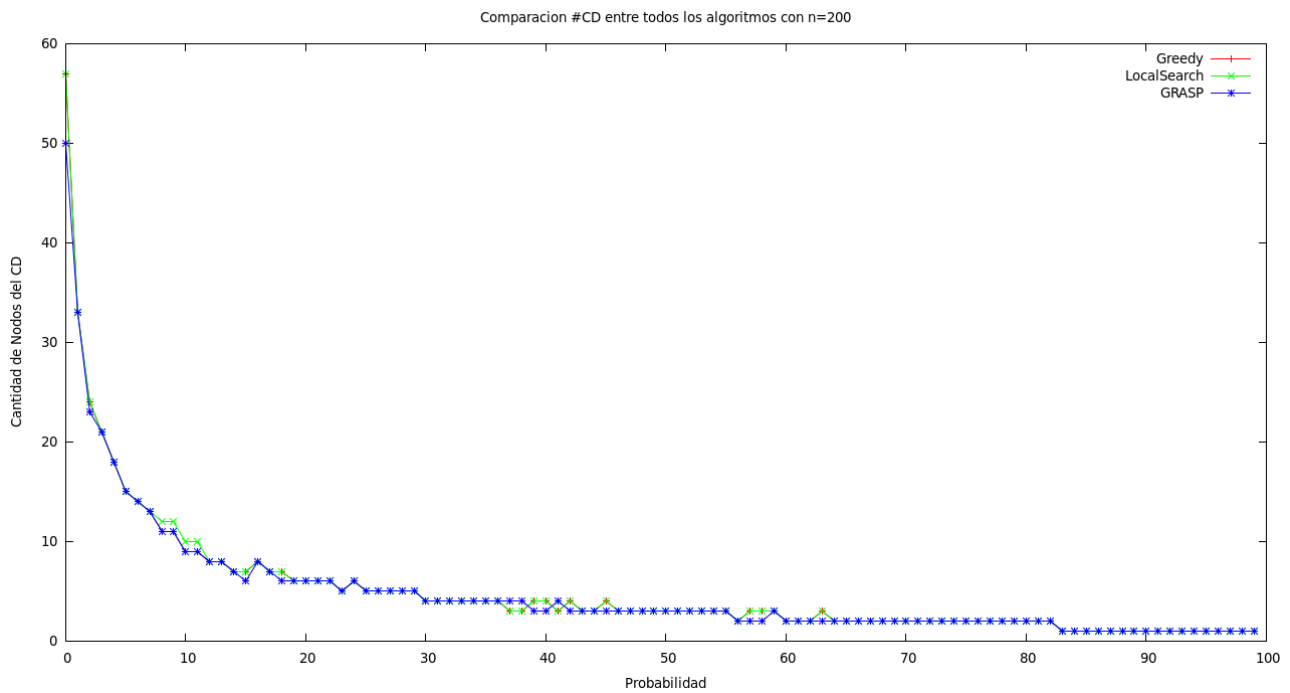




Comparacion por cantidad de nodos con n hasta 200 y p=10



Comparacion por cantidad de nodos con p hasta 100 y n=50

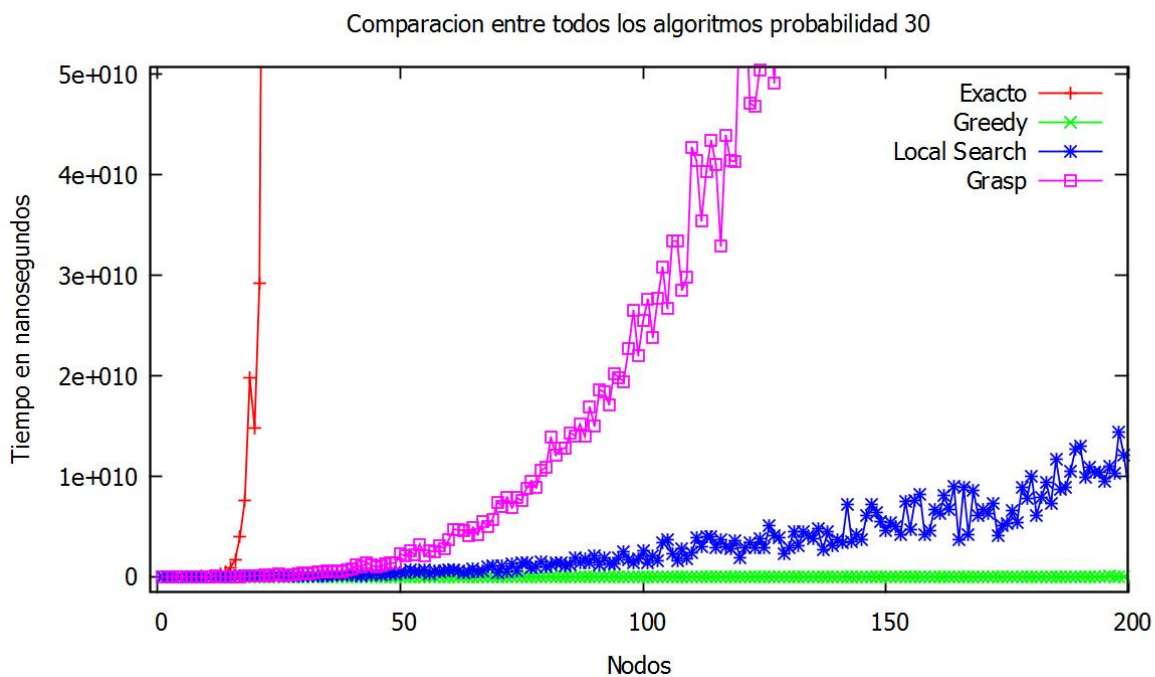


Comparacion por cantidad de nodos con  $p$  hasta 100 y  $n=200$

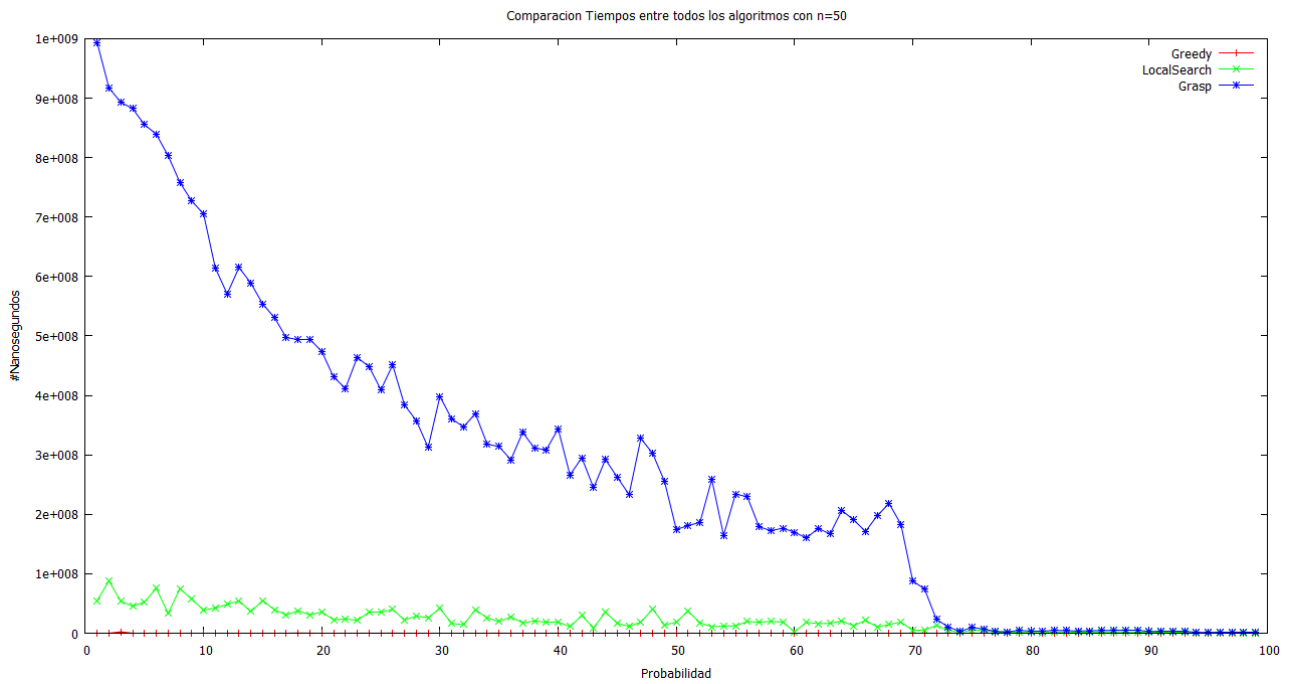
Como se puede observar en los gráficos, el GRASP se mantiene dominante con la menor cantidad de nodos en su conjunto resultado. Igualmente, el GREEDY no se aleja demasiado, acompañado por la mejora de Local Search. Otro aspecto a destacar fue que mientras más aristas posee el grafo, el conjunto dominante va a ser más pequeño, eso es bastante claro ya que habrá más nodos cerca del grado  $= n-1$ , por lo que con pocos nodos se encuentra el conjunto dominante.

Llevándolo a nuestra primera heurística, es muy probable que el goloso elija bajo su criterio uno de los mejores nodos para el menor conjunto dominante. Por otra parte, al tener más aristas, la búsqueda local tiene más vecindad para elegir ya que cada nodo se relaciona con muchos para poder aplicar sus estrategias. Por último, pero no por eso peor, tenemos al GRASP que aplica aleatoriamente los algoritmos previamente mencionados otorgando una forma distinta (aunque en los gráficos puede verse mejor) de encarar un problema de Conjunto Dominante.

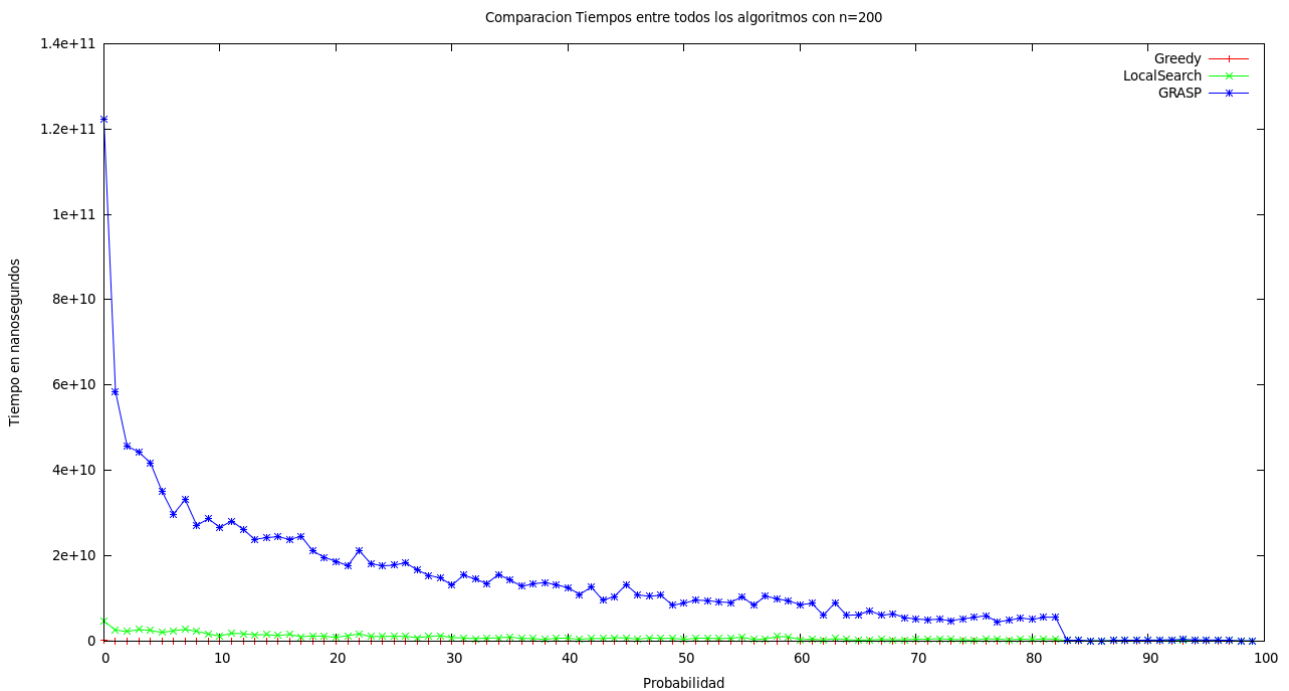
### 6.3. Por Tiempo



Comparacion por tiempo con  $n$  hasta 200 y  $p=30$



Comparacion por tiempo con p hasta 100 y n=50



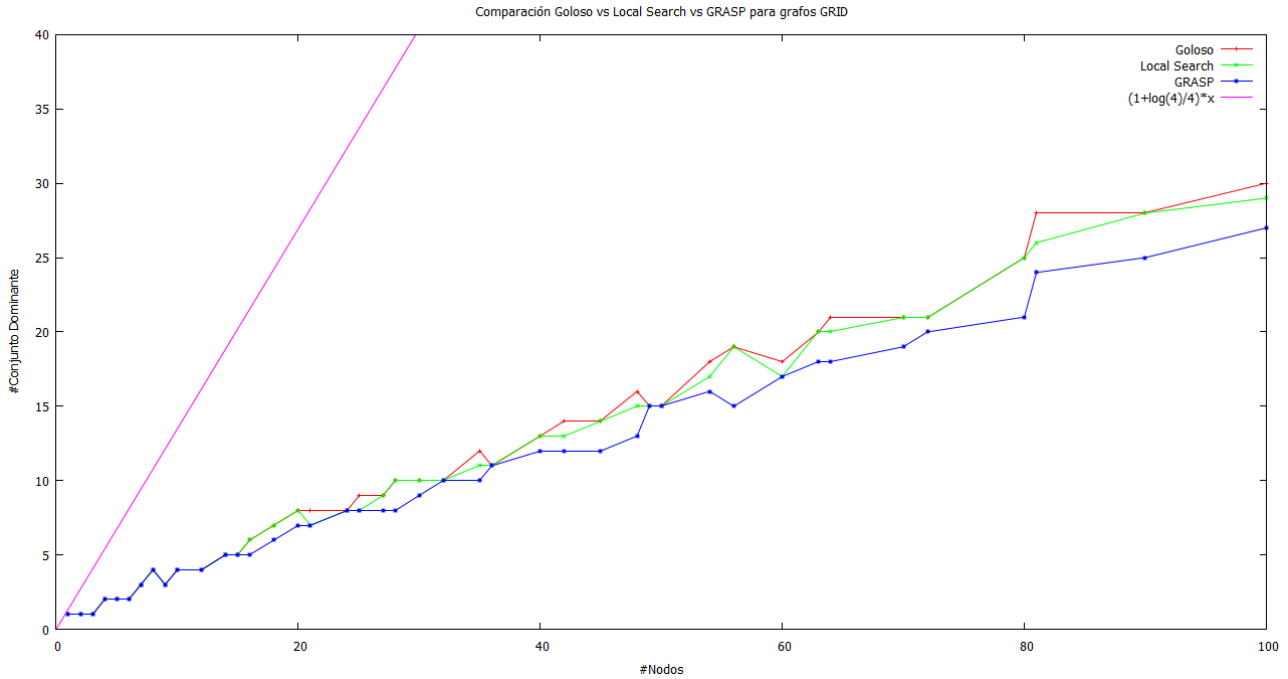
Comparacion por tiempo con p hasta 100 y n=200

En cuanto a la relación cantidad de nodos, vemos como GRASP tarda mucho más que el resto de los algoritmos y esto es debido a la complejidad, la que queda bien evidenciada en el primer gráfico. A mayor costo, mejores resultados.

De los gráficos recién mencionados, podemos extraer que a mayor densidad, el algoritmo tarda menos. Esto tiene sentido porque es más probable que la cardinalidad del conjunto dominante sea uno, o que sea muy chico. De esta forma, el Greedy seleccionará el de mayor grado, que será muy cercano a  $n-1$  y además habrá varios con este grado, y en pocas iteraciones encontrará un conjunto dominante, lo que queda poco trabajo para el LocalSearch por tener una vecindad chica. Por parte del GRASP, pasará lo mismo.

Finalmente cabe mencionar que el algoritmo GRASP tarda siempre más que el de búsqueda local y este ultimo más que el greedy. Esto se debe a que el de búsqueda local busca en toda la vecindad de soluciones a la inicial (y para ello, debe generarlas otra vez para toda nueva subsolucion vecina hallada) y, partir de ellas elige una, y el GRASP realiza una determinada cantidad de iteraciones en las que ejecuta, en cada una, el greedy y lo mejora con búsqueda local.

## 6.4. Cotas



Comparacion por cantidad de nodos con cota de grafos conexos<sup>[3]</sup>

La cota del tamaño del conjunto dominante para los grafos conexos<sup>[3]</sup> es:

$$\text{Tamaño del conjunto dominante} \leq \left( \frac{1+\ln(1+\delta)}{1+\delta} \right)n$$

Como se puede ver en el gráfico, no solo el GRASP encuentra un mejor resultado con respecto a los otros algoritmos, sino que también podemos asegurar que el resto de las heurísticas se alejan de igual manera de la cota mencionada.

## 7. Conclusiones

Para finalizar, queremos concluir que si bien las heurísticas no poseen siempre el resultado óptimo suelen acercarse bastante, y si sabemos información sobre nuestro grafo podemos anticipar resultados o tiempos. Esto es necesario ya que el exacto probó no ser factible para  $n$  no muy grandes.

Finalmente, para uso práctico podemos recomendar utilizar el algoritmo de búsqueda local por sobre el greedy para obtener una solución razonablemente buena en poco tiempo, ya que la puede mejorar con un costo adicional bastante bajo. Para problemas en los que se necesite mayor precisión, se puede aplicar GRASP variando el parámetro  $k$  y teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente.

## 8. Apéndice

<sup>1</sup><http://docs.oracle.com/javase/6/docs/api/java/util/ArrayList.html>

<sup>2</sup>[http://www1.combinatorics.org/Volume\\_18/PDF/v18i1p141.pdf](http://www1.combinatorics.org/Volume_18/PDF/v18i1p141.pdf)

<sup>3</sup>[http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2012/Moyano\\_Veronica.pdf](http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2012/Moyano_Veronica.pdf)