

**Processos Estocásticos:  
Primeiro Projeto**

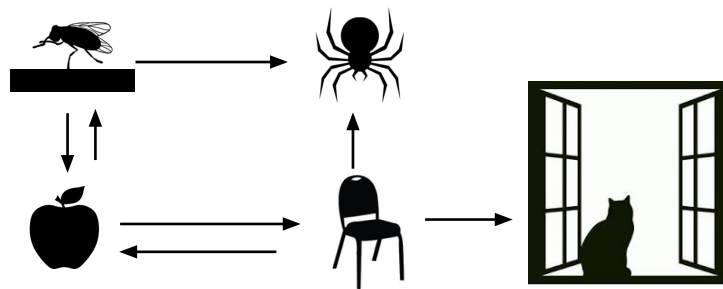
Resolva os problemas a seguir teoricamente, como fizemos na aula, e depois simule usando a linguagem de programação que preferir. Faça um gráfico do valor obtido (probabilidade ou esperança) em função do número de simulações. Ou seja, no eixo das abscissas do gráfico ficará o número de simulações e nas ordenadas, o valor calculado. Mostre ainda, com uma reta em vermelho, o valor teórico e verifique que quando aumentamos o número de simulações, os resultados simulados se aproximam do valor teórico.

Veja alguns exemplos em: <https://github.com/franciscoicmc/simulacao>

Envie um documento em pdf que inclua todas as resoluções teóricas, códigos usados nas simulações e os gráficos obtidos. Os documentos devem ser inseridos no Moodle.

**Exercício 1** Imagine que uma mosca está na posição mostrada no grafo abaixo.

- (a) Qual é a probabilidade da mosca escapar pela janela sem ser pega pela aranha? Assuma que a mosca se move pelo grafo escolhendo uma aresta com a mesma probabilidade e que ela nunca fica na mesma posição.
- (b) Calcule o número médio de visitas à maçã e à cadeira antes da mosca ser pega pela aranha ou sair pela janela. Assuma que a mosca iniciou na posição mostrada na figura.
- (c) Assuma agora que a aranha **não** está na posição indicada, ou seja, a posição está vazia. Qual é o tempo médio que a mosca leva para sair pela janela?
- (d) Simule esse problema e compare os resultados teóricos obtidos em (a), (b) e (c). Verifique como os resultados mudam em função do número de experimentos.



**Exercício 2**

Para o problema da ruína do apostador, temos

$$U_{i0} = P(X_T = 0 | X_0 = i) = \begin{cases} \frac{(q/p)^i - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}, & \text{if } p \neq q \\ \frac{N-i}{N}, & \text{if } p = q = 1/2 \end{cases}$$

onde  $N$  é a fortuna total (apostador mais oponente),  $p$  é a probabilidade de ganhar em uma jogada e  $q = 1 - p$ .

- a) A probabilidade do jogador A vencer em um jogo é  $p = 0,49$ . Ele começa o jogo com R\$ 6,00. Seu oponente, o jogador B, começa com R\$ 10,00. Qual a probabilidade de A vencer? Assuma que em cada jogo é apostado R\$ 2,00 pelo jogador contra o seu oponente.
- b) Simule o problema acima e compare o resultado com o resultado teórico.
- c) Simule agora o problema em que três apostadores jogam entre si, apostando um com o outro. Sejam as probabilidades de ganhar de cada um,  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ . Analise as chances de ganhar do jogador 1 considerando diferentes valores das probabilidades e fortuna inicial.

---

**Exercício 3**

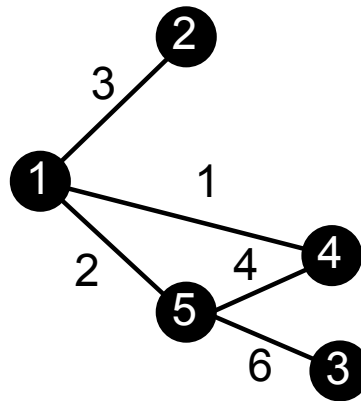
Uma moeda é lançada sucessivamente até que duas caras apareçam em sequência. Seja  $p$  a probabilidade de sair cara.

- Escreva a matriz de probabilidades de transição e determine o número médio de lançamentos necessários.
- Simule esse problema e compare o resultado com o valor teórico. Faça um gráfico da probabilidade obtida em função do número de experimentos. Considere ao menos três valores para  $p$ .

---

**Exercício 4** Considere o grafo abaixo. Seja a probabilidade de transição do vértice  $i$  para  $j$  dada por  $P_{ij} = w_{ij} / \sum_j w_{ij}$ , onde  $w_{ij}$  é o peso da aresta que conecta  $i$  e  $j$ .

- Determine a distribuição de probabilidade estacionária. (Dica: Considere que a cadeia de Markov é reversível. Ver pag. 241 do livro do Sheldon Ross).
- Implemente uma rotina que simule uma caminhada aleatória no grafo. Verifique que após um grande número de passos, o número médio de visitas a cada estado se aproxima da distribuição estacionária.



---

**Exercício 5** Considere a rede dos personagens do livro "Os Miseráveis", de Victor Hugo (disponível no Moodle). Implemente e calcule o PageRank para cada vértice. Simule uma caminhada aleatória e verifique se o número de visitas a cada vértice é relacionado com o PageRank.

OBS: Após o download, mude a extensão do arquivo para .txt e remova as duas primeiras linhas.

Se preferir usar o arquivo .gml, use esse método para ler a rede:

[https://networkx.org/documentation/stable/reference/readwrite/generated/networkx.readwrite.gml.read\\_gml.html](https://networkx.org/documentation/stable/reference/readwrite/generated/networkx.readwrite.gml.read_gml.html)

O arquivo com a rede está disponível em:

<http://www-personal.umich.edu/~mejn/netdata/lesmis.zip>