Projeto 1 - Parte Escrita

SME0805 - Processos Estocásticos

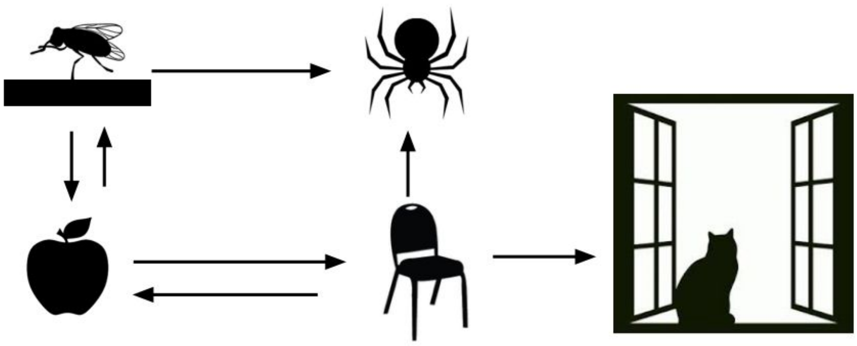
Luíza Pereira Pinto Machado, Nº USP 7564426
Marina Fontes Alcântara Machado, Nº USP 10692040
Matheus Carvalho Raimundo, Nº USP 10369014
Vitor Avian Santos, Nº USP 10295392

Docente: Prof. Francisco Aparecido Rodrigues

USP - São Carlos

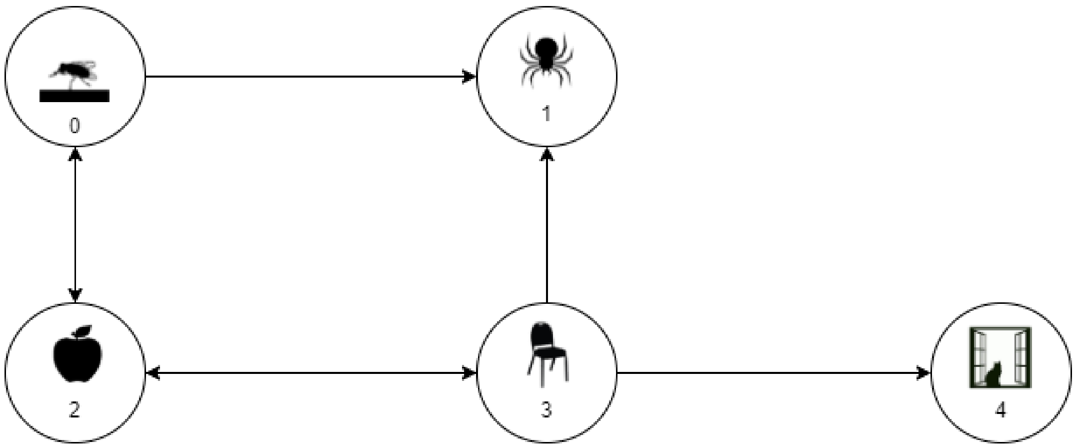
Outubro/2020

1) Imagine que uma mosca está na posição mostrada no grafo abaixo.



(a) Qual é a probabilidade da mosca escapar pela janela sem ser pega pela aranha? Assuma que a mosca se move pelo grafo escolhendo uma aresta com a mesma probabilidade e que ela nunca fica na mesma posição.

Podemos definir a figura do enunciado como um grafo:



Notamos que tanto a aranha (vértice 1) quanto a janela (vértice 4) representam uma forma de absorção. Isso significa que, quando a mosca (vértice 0) chega nestes vértices, não consegue mais sair deles: ou ela foi pega ou escapou. Queremos calcular a probabilidade de a aranha escapar pela janela, então podemos definir a seguinte variável aleatória baseando-se nesse grafo:

$$T \;=\; min\{X_n \geq 0;\; X_n = 4\}$$

Para calcular a probabilidade, usaremos a técnica de Análise do Primeiro Passo (Lei da Probabilidade Total):

$$u = P(\text{“}fugir\ pela\ janela\text{”})$$

$$u = \; P(X_T = 4 \mid X_0 = 0)$$

$$u = \sum_{k=0}^{4} P(X_T = 4 \mid X_0 = 0,\; X_1 = k) \; * P(X_1 = k \mid X_0 = 0)$$

$$u = P(X_T = 4 \mid X_0 = 0, X_1 = 0) * P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0)$$

$$+ P(X_T = 4 \mid X_0 = 0, X_1 = 1) * P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$$

$$+P(X_T = 4 \mid X_0 = 0, X_1 = 2) * P(X_1 = 2 \mid X_0 = 0)$$

$$+P(X_T = 4 \mid X_0 = 0, X_1 = 3) * P(X_1 = 3 \mid X_0 = 0)$$

$$+P(X_T = 4 \mid X_0 = 0, X_1 = 4) * P(X_1 = 4 \mid X_0 = 0)$$

$$u = 0 + 0 + P(X_T = 4 \mid X_0 = 0, X_1 = 2) * \tfrac{1}{2} + 0 + 0$$

$$u = \tfrac{1}{2} * P(X_T = 4 \mid X_0 = 2)$$

$$u = \tfrac{1}{2} * \sum_{k=0}^{4} P(X_T = 4 \mid X_0 = 2, X_1 = k) * P(X_1 = k \mid X_0 = 2)$$

$$\therefore\ 2u = P(X_T = 4 \mid X_0 = 2, X_1 = 0) * P(X_1 = 0 \mid X_0 = 2)$$

$$+P(X_T = 4 \mid X_0 = 2, X_1 = 1) * P(X_1 = 1 \mid X_0 = 2)$$

$$+P(X_T = 4 \mid X_0 = 2, X_1 = 2) * P(X_1 = 2 \mid X_0 = 2)$$

$$+P(X_T = 4 \mid X_0 = 2, X_1 = 3) * P(X_1 = 3 \mid X_0 = 2)$$

$$+P(X_T = 4 \mid X_0 = 2, X_1 = 4) * P(X_1 = 4 \mid X_0 = 2)$$

$$2u = P(X_T = 4 \mid X_0 = 2, X_1 = 0) * \tfrac{1}{2} + 0 + 0 + P(X_T = 4 \mid X_0 = 2, X_1 = 3) * \tfrac{1}{2} + 0$$

$$2u = \tfrac{1}{2} * P(X_T = 4 \mid X_0 = 0) + \tfrac{1}{2} * P(X_T = 4 \mid X_0 = 3)$$

$$2u = \tfrac{u}{2} + \tfrac{1}{2} P(X_T = 4 \mid X_0 = 3)$$

$$\therefore\ 3u = P(X_T = 4 \mid X_0 = 3)$$

$$3u = \sum_{k=0}^{4} P(X_T = 4 \mid X_0 = 3, X_1 = k) * P(X_1 = k \mid X_0 = 3)$$

$$3u = P(X_T = 4 \mid X_0 = 3, X_1 = 0) * P(X_1 = 0 \mid X_0 = 3)$$

$$+P(X_T = 4 \mid X_0 = 3, X_1 = 1) * P(X_1 = 1 \mid X_0 = 3)$$

$$+P(X_T = 4 \mid X_0 = 3, X_1 = 2) * P(X_1 = 2 \mid X_0 = 3)$$

$$+P(X_T = 4 \mid X_0 = 3, X_1 = 3) * P(X_1 = 3 \mid X_0 = 3)$$

$$+P(X_T = 4 \mid X_0 = 3, X_1 = 4) * P(X_1 = 4 \mid X_0 = 3)$$

$$3u = 0 + 0 + P(X_T = 4 \mid X_0 = 3, X_1 = 2) * \tfrac{1}{3} + 0 + P(X_T = 4 \mid X_0 = 3, X_1 = 4) * \tfrac{1}{3}$$

$$3u = \tfrac{1}{3} * P(X_T = 4 \mid X_0 = 2) + \tfrac{1}{3} * P(X_T = 4 \mid X_0 = 4)$$

$$3u = \tfrac{2u}{3} + \tfrac{1}{3}$$

$$\therefore\ 9u = 2u + 1$$

$$\therefore\ u = \tfrac{1}{7} \simeq 0,1429$$

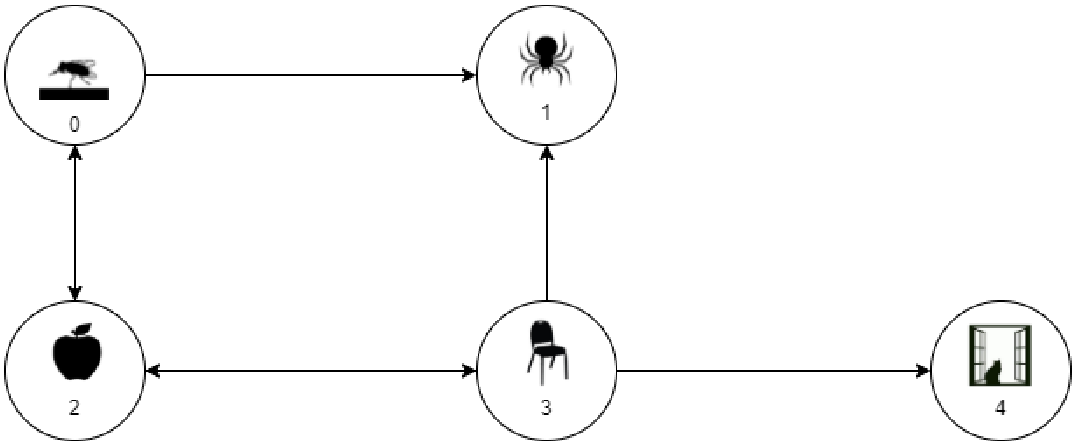
(b) Calcule o número médio de visitas à maçã e à cadeira antes da mosca ser pega pela aranha ou sair pela janela. Assuma que a mosca iniciou na posição mostrada na figura.

É possível definir o número médio de visitas a um dado estado j, a partir de um dado estado i, antes da absorção como

$$W_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=0}^{n} P_{ik} * W_{kj}$$

em que δ_{ij} representa o número de visitas já feitas ao estado j e o somatório é efetuado sobre os n estados transientes do sistema.

Queremos, então, calcular W_{02} e W_{03}.



$$W_{02} = \delta_{02} + P_{00} * W_{02} + P_{02} * W_{22} + P_{03} * W_{32}$$
$$W_{02} = 0 + 0 + \tfrac{1}{2} * W_{22} + 0 * W_{32}$$
$$(I)\ W_{02} = \tfrac{1}{2} * W_{22}$$

$$W_{22} = \delta_{22} + P_{20} * W_{02} + P_{22} * W_{22} + P_{23} * W_{32}$$
$$W_{22} = 1 + \tfrac{1}{2} * W_{02} + 0 * W_{22} + \tfrac{1}{2} * W_{32}$$
$$W_{22} = 1 + \tfrac{1}{2} * W_{02} + \tfrac{1}{2} * W_{32}$$

Substituindo W_{02} por $(I)\ W_{02} = \frac{1}{2} * W_{22}$:

$$W_{22} = 1 + \tfrac{1}{2} * \tfrac{1}{2} * W_{22} + \tfrac{1}{2} * W_{32}$$
$$W_{22} = 1 + \tfrac{1}{4} * W_{22} + \tfrac{1}{2} * W_{32}$$
$$\tfrac{3}{4} W_{22} = 1 + \tfrac{1}{2} * W_{32}$$
$$3 * W_{22} = 4 + 2 * W_{32}$$
$$(II)\ W_{22} = \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3} * W_{32}$$

$$W_{32} = \delta_{32} + P_{30} * W_{02} + P_{32} * W_{22} + P_{33} * W_{32}$$
$$W_{32} = 0 + 0 * W_{02} + \tfrac{1}{3} * W_{22} + 0 * W_{32}$$
$$(III)\ W_{32} = \tfrac{1}{3} * W_{22}$$

Substituindo W_{22} por $(II)\ W_{22} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} * W_{32}$:

$$W_{32} = \tfrac{1}{3} * [\tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3} * W_{32}]$$
$$W_{32} = \tfrac{4}{9} + \tfrac{2}{9} * W_{32}$$
$$\tfrac{7}{9} W_{32} = \tfrac{4}{9}$$
$$W_{32} = \tfrac{4}{7} \simeq 0,5714$$

Substituindo W_{32} em $(II)\ W_{22} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} * W_{32}$:

$$W_{22} = \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3} * \tfrac{4}{7}$$
$$W_{22} = \tfrac{28}{21} + \tfrac{8}{21}$$
$$W_{22} = \tfrac{36}{21} \simeq 1,7143$$

Substituindo W_{22} em $(I)\ W_{02} = \frac{1}{2} * W_{22}$:

$$W_{02} = \tfrac{1}{2} * \tfrac{12}{7}$$
$$W_{02} = \tfrac{6}{7} \simeq 0,8571$$

$$W_{03} = \delta_{03} + P_{00} * W_{03} + P_{02} * W_{23} + P_{03} * W_{33}$$
$$W_{03} = 0 + 0 * W_{03} + P_{02} * W_{23} + 0 * W_{33}$$
$$(IV)\ W_{03} = \tfrac{1}{2} * W_{23}$$

$$W_{23} = \delta_{23} + P_{20} * W_{03} + P_{22} * W_{23} + P_{23} * W_{33}$$
$$W_{23} = 0 + \tfrac{1}{2} * W_{03} + 0 * W_{23} + \tfrac{1}{2} * W_{33}$$
$$(V)\ W_{23} = \tfrac{1}{2} * W_{03} + \tfrac{1}{2} * W_{33}$$

Substituindo W_{23} em $(IV)\ W_{03} = \frac{1}{2} * W_{23}$:

$$W_{03} = \tfrac{1}{2} * \left[\tfrac{1}{2} * W_{03} + \tfrac{1}{2} * W_{33}\right]$$
$$W_{03} = \tfrac{1}{4} * W_{03} + \tfrac{1}{4} * W_{33}$$
$$\tfrac{3}{4} * W_{03} = \tfrac{1}{4} * W_{33}$$
$$(VI)\ W_{03} = \tfrac{1}{3} * W_{33}$$

$$W_{33} = \delta_{33} + P_{30} * W_{03} + P_{32} * W_{23} + P_{33} * W_{33}$$

$$W_{33} = 1 + 0 * W_{03} + \frac{1}{3} * W_{23} + 0 * W_{33}$$

$$(VI)\ W_{33} = 1 + \frac{1}{3} * W_{23}$$

Substituindo W_{23} por $(V)\ W_{23} = \frac{1}{2} * W_{03}\ + \frac{1}{2} * W_{33}$:

$$W_{33} = 1 + \frac{1}{3} * \left[\frac{1}{2} * W_{03}\ + \frac{1}{2} * W_{33}\right]$$

Substituindo W_{03} por $(VI)\ W_{03} = \frac{1}{3} * W_{33}$:

$$W_{33} = 1 + \frac{1}{6} * \frac{1}{3} * W_{33}\ + \frac{1}{6} * W_{33}$$

$$W_{33} = 1 + \frac{1}{18} * W_{33}\ + \frac{1}{6} * W_{33}$$

$$18 * W_{33} = 18 + W_{33}\ + 3 * W_{33}$$

$$14 * W_{33} = 18$$

$$W_{33} = \frac{18}{14} \simeq 1,2857$$

Substituindo W_{33} em $(VI)\ W_{03} = \frac{1}{3} * W_{33}$:

$$W_{03} = \frac{1}{3} * \frac{18}{14} \simeq 0,4286$$

Substituindo W_{03} em $(IV)\ W_{03} = \frac{1}{2} * W_{23}$:

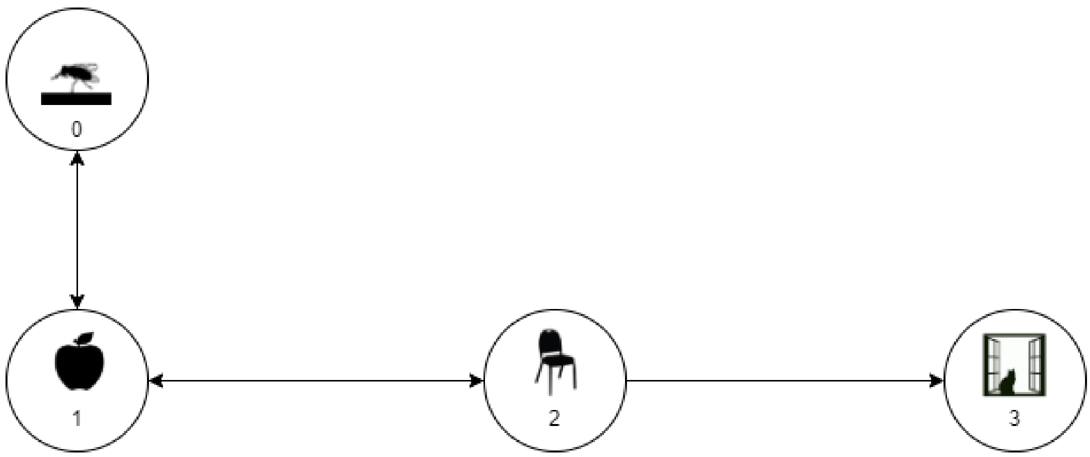
$$W_{23} = 2 * W_{03}$$

$$W_{23} = 2 * \frac{6}{14} \simeq 0,8571$$

Assim, sabe-se que o tempo médio gasto na maçã (estado 2) dado que $X_0 = 0$ é $0,8571$ e, na cadeira (estado 3), 0,4286, totalizando aproximadamente 1,2857 visitas até a absorção.

(c) Assuma agora que a aranha não está na posição indicada, ou seja, a posição está vazia. Qual é o tempo médio que a mosca leva para sair pela janela?

Agora vamos reescrever o grafo do enunciado ‘A’ sem a aranha:



Queremos descobrir o tempo médio para a mosca escapar pela janela. Isso significa que queremos o número médio de movimentos antes da absorção. Define-se então a seguinte variável aleatória:

$$T \ = \ min\{X_n \geq 0;\ X_n = 3\}$$

Para calcular o número médio de movimentos, usaremos a técnica de Análise do Primeiro Passo (Lei da Esperança Total):

$$v = \ E[T \mid X_0 = 0]$$

$$v = \sum_{k=0}^{3} E[T \mid X_0 = 0, X_1 = k] * P(X_1 = k \mid X_0 = 0)$$

$$v = E[T \mid X_0 = 0, X_1 = 0] * P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0)$$

$$+ E[T \mid X_0 = 0, X_1 = 1] * P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$$

$$+ E[T \mid X_0 = 0, X_1 = 2] * P(X_1 = 2 \mid X_0 = 0)$$

$$+ E[T \mid X_0 = 0, X_1 = 3] * P(X_1 = 3 \mid X_0 = 0)$$

$$v = 0 + (1 + E[T \mid X_0 = 1]) + 0 + 0$$

$$\therefore \ \ v \ - \ 1 = E[T \mid X_0 = 1]$$

$$v - 1 = \sum_{k=0}^{3} E[T \mid X_0 = 1, X_1 = k] * P(X_1 = k \mid X_0 = 1)$$

$$v - 1 = E[T \mid X_0 = 1, X_1 = 0] * P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)$$

$$+ E[T \mid X_0 = 1, X_1 = 1] * P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)$$

$$+ E[T \mid X_0 = 1, X_1 = 2] * P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)$$

$$+ E[T \mid X_0 = 1, X_1 = 3] * P(X_1 = 3 \mid X_0 = 1)$$

$$v - 1 = \tfrac{1}{2} * E[T \mid X_0 = 1, X_1 = 0] + 0 + \tfrac{1}{2} * E[T \mid X_0 = 1, X_1 = 2] + 0$$

$$v - 1 = \tfrac{1}{2}(1 + v) + \tfrac{1}{2}(1 + E[T \mid X_0 = 2])$$

$$\therefore v - 4 = E[T \mid X_0 = 2]$$

$$v - 4 = \sum_{k=0}^{3} E[T \mid X_0 = 2, X_1 = k] * P(X_1 = k \mid X_0 = 2)$$

$$v - 4 = E[T \mid X_0 = 2, X_1 = 0] * P(X_1 = 0 \mid X_0 = 2)$$

$$+ E[T \mid X_0 = 2, X_1 = 1] * P(X_1 = 1 \mid X_0 = 2)$$

$$+ E[T \mid X_0 = 2, X_1 = 2] * P(X_1 = 2 \mid X_0 = 2)$$

$$+ E[T \mid X_0 = 2, X_1 = 3] * P(X_1 = 3 \mid X_0 = 2)$$

$$v - 4 = 0 + \tfrac{1}{2} * E[T \mid X_0 = 2, X_1 = 1] + 0 + \tfrac{1}{2} * E[T \mid X_0 = 2, X_1 = 3]$$

$$v - 4 = \tfrac{1}{2} * (1 + E[T \mid X_0 = 1]) + \tfrac{1}{2} * (1 + E[T \mid X_0 = 3])$$

$$v - 4 = \tfrac{1}{2} * (1 + v - 1) + \tfrac{1}{2} * (1 + 0)$$

$$v - 4 = \tfrac{v}{2} + \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore v - 4 = \tfrac{v}{2} + \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \ \ 2v - 8 = v + 1$$

$$\therefore \ \ v = 9$$

2) **Para o problema da ruína do apostador, temos**

$$U_{i0} = P(X_T = 0|X_0 = i) = \begin{cases} \frac{(q/p)^i - (q/p)^N}{1-(q/p)^N}, & \text{if } p \neq q \\ \frac{N-i}{N}, & \text{if } p = q = 1/2 \end{cases}$$

onde N é a fortuna total (apostador mais oponente), p é a probabilidade ganho em uma jogada e q = 1− p.

a) A probabilidade do jogador A vencer em um jogo é p = 0,49. Ele começa o jogo com R$ 6,00. Seu oponente, o jogador B, começa com R$ 10,00. Qual a probabilidade de A vencer? Assuma que em cada jogo é apostado R$2,00 pelo jogador contra o seu oponente.

A probabilidade de que o jogador vença é igual à probabilidade de que o oponente perca. Em vez de andar os índices de um-em-um, nossos jogadores apostam, na verdade, R$ 2,00 por jogo. Portanto, como a Cadeia de Markov é caracterizada pela falta de memória, podemos dividir o valor apostado inicialmente por R$ 2,00, de forma a obter o mesmo resultado se os índices estivessem variando de 2-em-2. Assim:

$$U_{i0} = P(X_T = 0 \mid X_0 = i) = \frac{(\frac{q}{p})^i - (\frac{q}{p})^N}{1-(\frac{q}{p})^N}$$

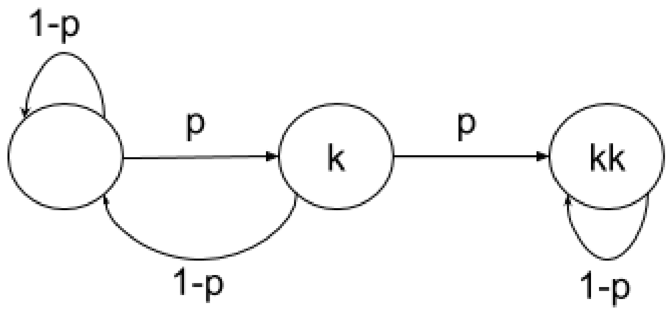
$$U_{5,0} = P(X_T = 0 \mid X_0 = 5) = \frac{(\frac{0,49}{0,51})^5 - (\frac{0,49}{0,51})^8}{1-(\frac{0,49}{0,51})^8} = 0,3380$$

Portanto, a probabilidade de que o jogador vença é 0,3380.

3) **Uma moeda é lançada sucessivamente até que duas caras apareçam em sequência. Seja p a probabilidade de sair cara.**

a) Escreva a matriz de probabilidades de transição e determine o número médio de lançamentos necessários.

Considerando três estados de transição, o estado 0 representa o momento em que nenhuma cara apareceu ainda, o estado 1 representa o momento em que uma cara apareceu e o estado 2, o momento em que duas caras aparecem em sequência.



$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = min\{X_n \geq 0;\ X_n = 2\}$$

$$V_i = E\left[T \mid X_0 = i\right] = 1 + \sum_{j=0}^{1} P_{ij} * V_j$$

$$V_0 = E\left[T \mid X_0 = 0\right]$$

$$V_0 = 1 + P_{00} * V_0 + P_{01} * V_1$$

$$(I)\ V_0 = 1 + (1-p) * V_0 + p * V_1$$

$$V_1 = E\left[T \mid X_0 = 1\right]$$

$$V_1 = 1 + P_{10} * V_0 + P_{11} * V_1$$

$$V_1 = 1 + (1-p) * V_0 + 0 * V_1$$

$$(II)\ V_1 = 1 + (1-p) * V_0$$

Substituindo (II) em (I):

$$V_0 = 1 + (1-p) * V_0 + p * [1 + (1-p) * V_0]$$

$$V_0 = 1 + V_0 - p * V_0 + p * [1 + V_0 - p * V_0]$$

$$V_0 = 1 + V_0 - p * V_0 + p + p * V_0 - p^2 * V_0$$

$$0 = 1 + p - p^2 * V_0$$

$$V_0 = \frac{p+1}{p^2}$$