

Diseño y simulación de procesadores cuánticos que implementen algoritmos cuánticos de búsqueda

Miguel Casanova

Coordinación de Tecnología e Ingeniería Electrónica
Universidad Simón Bolívar

13 de enero de 2019

This is the first slide

This is the second slide

A bit more information about this

Estructura de la presentación

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

Table of Contents

- 1 **Objetivos**
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

Objetivos

Objetivo General: Diseñar y simular PC que implementen los AC de Grover, Shor y Google Cuántico.

Objetivos Específicos:

- 1 Construir la representación circuital cuántica de los AC de Grover, Shor y de Google Cuántico.
- 2 Diseñar arquitecturas superconductoras controlables por microondas basadas en transmones.
- 3 Hallar las respectivas secuencias de pulsos, que son necesarios para generar con transmones la representación circuital cuántica de los tres AC considerados.
- 4 Simular en Mathematica, en forma algebraica, cada una de las arquitecturas de CC consideradas, permitiendo así obtener expresiones lo mas simplificadas posibles de los procesos cuánticos considerados.
- 5 Simular en Python, de forma numérica, el operador evolución de cada una de las compuertas de los CC.

Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

Espacios de Hilbert

Un espacio de Hilbert es un espacio lineal real o complejo con un producto interno que también define un espacio normado completo.

- 1 Producto interno
- 2 Normado
- 3 Completo: Todas las sucesiones de Cauchy convergen fuertemente.
 - 1 Sucesiones de Cauchy: Aquellas en las que el ordenamiento no afecta la convergencia.
- 4 Separable: Tiene bases contables.

Operadores

- 1 Operadores hermíticos $U = U^\dagger$
 - 1 Autovalores reales
 - 2 Diagonal real
 - 3 Diagonalizable
- 2 Operadores unitarios: $UU^\dagger = \mathbb{1}$
 - 1 Determinante de módulo igual a la unidad
 - 2 Preserva normas y trazas
 - 3 Diagonalizable

Estados cuánticos

- 1 Estados puros: $|\psi\rangle$
 - 1 Vector unitario
- 2 Estados mixtos: ρ
 - 1 Matriz hermítica
 - 2 Traza igual a la unidad
 - 3 Autovalores no negativos

Sistemas multipartitos

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (1)$$

$$\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB}) \quad (2)$$

Los qubits son la unidad básica de información cuántica.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (4)$$

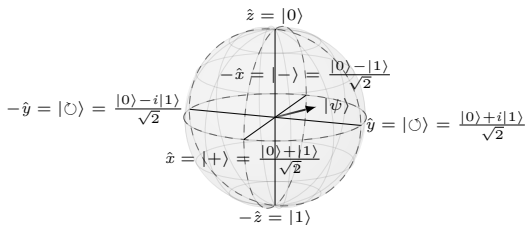


Figura: Esfera de Bloch

Ecuación de Schrödinger

Esta ecuación describe la evolución de los estados cuánticos puros.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (5)$$

Para estados mixtos se utiliza la ecuación de Liouville-von Neumann.

$$i\hbar \dot{\rho}(t) = [\hat{H}, \rho(t)] \quad (6)$$

Postulados de la mecánica cuántica

- 1 La descripción de un sistema físico en QM está dada en términos de los elementos de un espacio de Hilbert complejo separable asociado al sistema físico. En cada instante de tiempo t , un estado puro del sistema se representa por el vector unitario $|\psi(t)\rangle$ en el espacio de Hilbert correspondiente. Tal vector se llama vector de estado o ket.
- 2 Todo observable de un sistema físico está representado en el formalismo de QM por un operador lineal hermítico el cual actúa en el espacio de Hilbert asociado con el sistema físico en consideración.

Postulados de la mecánica cuántica

- 3** Si un sistema físico está en un estado descrito por un vector normalizado $|\psi\rangle$ o una matriz densidad ρ , la probabilidad de obtener un valor λ al medir un observable \mathcal{A} está dada por

$$p(\lambda) = \sum_i^{g_n} |\langle \lambda_i | \psi \rangle|^2 \quad (7)$$

$$p(\lambda) = \text{Tr}(\Pi_\lambda \rho), \quad (8)$$

Donde g_n es el grado de degeneración de \hat{A} en λ , es decir, la cantidad de autoestados asociados a este mismo autovalor, $|\lambda_i\rangle$ son los autoestados asociados a λ y el proyector Π_λ es $\Pi_\lambda = \sum_i^{g_n} |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$.

Postulados de la mecánica cuántica

- 4 Si un sistema físico está en el estado $|\psi\rangle$ o ρ , el estado resultante luego de una medida ideal del observable \mathcal{A} está dado por

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{\Pi_\lambda |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\Pi_\lambda|\psi\rangle}} \quad (9)$$

$$p(\lambda) \rightarrow \frac{\mathcal{E}_\lambda(\rho)}{\text{Tr}(\Pi_\lambda \rho)}, \quad (10)$$

Donde el mapa $\mathcal{E}_\lambda(\rho) = \sum_i^{g_n} |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| \rho |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$.

Postulados de la mecánica cuántica

- 5 En un intervalo de tiempo entre dos medidas consecutivas, los estados puros de un sistema continúan siendo puros, y existen kets $|\psi(t)\rangle$ tales que la evolución del estado del sistema está dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (11)$$

Donde $\hat{H}(t)$ es un observable llamado Hamiltoniano, el cual representa la energía del sistema. Los observables del sistema se representan por operadores que son constantes en el tiempo, a menos que los dispositivos de medida cambien en el tiempo, en tal caso, los operadores deberán contener dichos cambios.

Postulados de la mecánica cuántica

- 6 Para un sistema físico en el cual las coordenadas cartesianas son q_1, q_2, \dots, q_N , con los correspondientes momenta conjugados p_1, p_2, \dots, p_N , los operadores X y P , los cuales representan estos observables en QM, deben satisfacer las relaciones de conmutación

$$[X_r, X_a] = 0, [P_r, P_a] = 0, [X_r, P_a] = i\hbar\delta_{ra}. \quad (12)$$

Si el sistema tiene un observable cuya expresión clásica es $A(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N; t)$, la aplicación usual en QM del operador correspondiente se obtiene substituyendo las variables q_r y p_a por los operadores X_r y P_a , respectivamente.

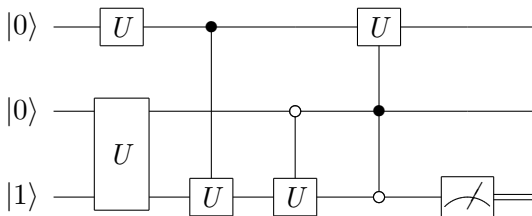
Matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

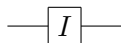
$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Circuitos cuánticos



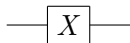
Compuertas cuánticas

1 Compuerta identidad



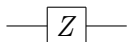
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Compuerta X



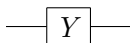
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Compuerta Z



$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

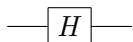
4 Compuerta Y



$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ ó } Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

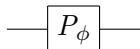
Compuertas cuánticas

1 Compuerta de Hadamard



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Compuerta de cambio de fase



$$P_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

3 Compuertas de rotación

$$R(\theta, \hat{r}) = e^{i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{r}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) + iz \sin(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2})(ix + y) \\ \sin(\frac{\theta}{2})(ix - y) & \cos(\frac{\theta}{2}) - iz \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

Compuertas cuánticas

1 Rotación en X

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

2 Rotación en Y

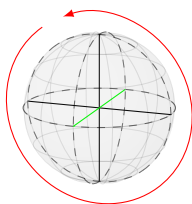
$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

3 Rotación en Z

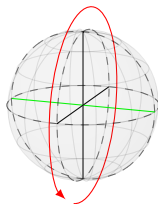
$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

Compuertas cuánticas

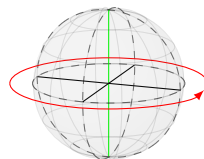
$$R_x(\theta) = R_z\left(\frac{\pi}{2}\right)R_y(\theta)R_z\left(\frac{-\pi}{2}\right) \quad (16)$$



(a) R_x



(b) R_y

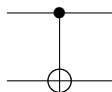


(c) R_z

Figura: Compuertas R_x , R_y y R_z en la esfera de Bloch

Compuertas cuánticas

1 Compuerta CNOT



$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

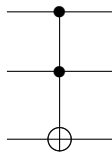
2 Compuerta SWAP



$$SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compuertas cuánticas

1 Compuerta de Toffoli



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Criterios de Di Vincenzo

Di Vincenzo propuso los siguientes criterios para la construcción de un computador cuántico:

- 1 Un sistema físico escalable con qubits caracterizados.
- 2 La habilidad de inicializar el estado de los qubits en un estado fiducial simples.
- 3 Tiempos de coherencia relevantes largos.
- 4 Un conjunto universal de compuertas cuánticas.
- 5 La capacidad de medir qubits en específico.

Fidelidad

La fidelidad es una medida de distancia entre estados cuánticos. Dos estados idénticos tendrán una fidelidad igual a 1, mientras que dos estados ortogonales tendrán una fidelidad de 0.

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr}(\sqrt{\rho^{1/2} \sigma \rho^{1/2}}) \quad (17)$$

Medidas proyectivas

$$MP_s = \{\hat{\Pi}_m : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}_{\lambda_m} \subseteq \mathcal{H} \text{ tal que } \hat{\Pi}_m \hat{\Pi}_n = \delta_{m,n} \hat{\Pi}_m, \\ \sum_m \hat{\Pi}_m = \mathbb{1}, P_{\lambda_m}(\rho) = (\hat{\Pi}_m)_\rho \text{ y } \rho_{\lambda_m} \xrightarrow{\text{colapso}} \hat{\Pi}_m\}.$$

(18)

Sistemas cuánticos abiertos

En la mecánica cuántica de sistemas abiertos con evolución markoviana, la ecuación de Schrödinger toma la siguiente forma más general, conocida como Lindbladiano.

$$\dot{\rho}(t) = -i[\hat{H}, \rho(t)] + \sum_k \gamma_k [V_k \rho(t) V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho(t)\}] \quad (19)$$

Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad**
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

Teorías BCS

- 1 Los electrones cercanos al nivel de Fermi se acoplan en pares, debido a la interacción con la red cristalina. Esta interacción es una interacción atractiva electrón-fonón-electrón.
- 2 Los pares de Cooper se comportan de una manera distinta a los electrones individuales.
- 3 Existe una banda de energía, la cual inhibe las interacciones de colisión que causan la resistencia eléctrica, siempre que la energía térmica sea menor a la banda prohibida.

Efecto Josephson

Se tienen dos placas superconductoras A y B, separadas por un aislante. Las funciones de onda de las placas superconductoras son: $\psi_A = \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1}$, $\psi_B = \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2}$

Por el efecto tunel, una supercorriente (corriente sin disipación) de pares de Cooper (pares de electrones con spines opuestos) pueden pasar de una placa a la otra sin disipación.

$$V_J = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\delta}{dt} \quad (20)$$

$$I_J = I_0 \sin(\delta) \quad (21)$$

Donde $\delta = \phi_2 - \phi_1$ es la diferencia de fase entre las dos placas superconductoras.

Efecto Josephson DC y AC

- 1 Efecto Josephson DC Si las placas se encuentran sin alimentación, entonces correrá una supercorriente constante a través de ellas.
- 2 Efecto Josephson AC Si las placas se alimentan con un voltaje DC externo, entonces la diferencia de fase entre ellas variará linealmente con el tiempo y habrá una corriente AC a través de ellas.

Energía e inductancia de Josephson

$$E_J = \int I_0 \sin(\delta) \frac{\hbar}{2e} \frac{d\delta}{dt} dt = \frac{\hbar I_0}{2e} \int \sin(\delta) dt = -\frac{\hbar I_0}{2e} \cos(\delta) \quad (22)$$

$$\frac{dI_J}{dt} = I_0 \cos(\delta) \frac{d\delta}{dt} = I_0 \cos(\delta) \frac{2e}{\hbar} V_J \quad (23)$$

$$L_J = \frac{\hbar}{2e I_0 \cos(\delta)} \quad (24)$$

$$E_C = \frac{(2e)^2}{2C} \quad (25)$$

$$E_L = \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L} \quad (26)$$

Circuito LCJ

Primero, reescribimos el Hamiltoniano del circuito LC en términos de la cantidad de pares de Cooper y de la diferencia de fase en los extremos del inductor, en lugar de la carga y el flujo

$$\hat{H} = \frac{(2e)^2}{2C} \hat{n}^2 + \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L} \frac{\hat{\delta}^2}{2} \quad (27)$$

De aquí $\hat{q} = 2e\hat{n}$ y $\hat{\phi} = \frac{\hbar}{2e}\hat{\delta}$

Ahora introducimos el término de la unión Josephson

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{(2e)^2}{2C} (\hat{n} - n_g)^2 + \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L} \frac{(\delta - \delta_e)^2}{2} - \frac{\hbar I_0}{2e} \cos(\delta) \\ &= E_C (\hat{n} - n_g)^2 + E_L \frac{(\hat{\delta} - \delta_e)^2}{2} - E_{J0} \cos(\hat{\delta}) \end{aligned} \quad (28)$$

Ecuación de Schrödinger del circuito LCJ

Para describir el sistema en términos de la ecuación de Schrödinger en función de la diferencia de fase ϕ , se introduce $\hat{n} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$

$$E_C(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} - n_g)^2 \psi + U(\phi)\psi = E\psi$$

$$U(\phi) = -E_{J0} \cos(\phi) + E_L \frac{(\phi - \phi_e)^2}{2}$$

Arquetipos de qubits superconductores

* Qubit de carga: Si E_L tiende a cero, la carga almacenada en la isla superconductora entre el capacitor y la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma de coseno.

* Qubit de flujo: Si E_L es comparable con E_{J0} , el flujo a través del lazo formado por el inductor y la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma cuártica.

* Qubit de fase: Si se polariza la unión Josephson con una fuente de corriente, la fase en ambos extremos de la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma cúbica.

Qubits de carga

$$\begin{aligned} [\hat{\delta}, \hat{n}] = i &\implies e^{\pm i\hat{\delta}} |n\rangle = |n \pm 1\rangle \\ \hat{H} = E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_{J0} \cos(\hat{\delta}) &= E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_{J0}(e^{i\hat{\delta}} + e^{-i\hat{\delta}}) = \\ \sum (E_C(N - N_g)^2 |n\rangle\langle n| - \frac{E_{J0}}{2}(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|)) \end{aligned}$$

Caja de pares de Cooper

Dimensiones típicas de la isla: 1000nm x 50nm x 20nm

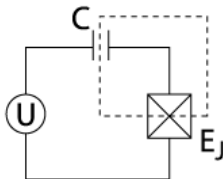


Figura: Circuito de una caja de pares de Cooper

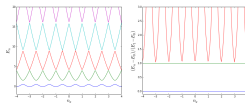


Figura: Niveles de energía de una caja de pares de Cooper

Transmon

Intercambiamos anarmonicidad por independencia de n_g

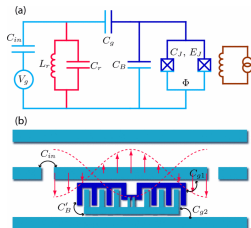


Figura: Circuito de un transmon

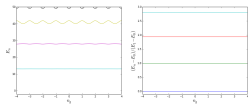


Figura: Niveles de energía de un transmon

Modelo de Jaynes-Cummings

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_q + \hat{H}_{qc} = \hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\hbar\omega_q\sigma_z + \hbar g\sigma_x(a + a^\dagger)$$

De ahora en adelante $\hbar = 1$ y despreciaré los términos constantes, pues sólo contribuyen en fases globales a la evolución del sistema.

Aproximación de onda rotacional

$$\hat{H}_{qc} = \hat{H}_{qc}^{JC} + \hat{H}_{qc}^{AJC} = g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) + g(a^\dagger\sigma_+ + a\sigma_-)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_q + \hat{H}_{qc} = \omega_c a^\dagger a + \frac{1}{2}\omega_q \sigma_z + g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)$$

Hamiltoniano multiqubit

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_{qc} = \frac{1}{2} \sum_i \omega_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i})$$

Pulsos de microondas

$$\hat{H}_d = \sum_k (a + a^\dagger)(\xi_k e^{-i\omega_d^{(k)}t} + \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)}t})$$

RWA:

$$\hat{H}_d = \sum_k a \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)}t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\omega_d^{(k)}t}$$

Régimen rotacional del pulso

Trabajando con un sólo modo a la vez, se aplica la siguiente transformación $U(t) = \exp[-i\omega_d t(a^\dagger a + \sum_i \sigma_{zi})]$ para entrar en el régimen rotacional del pulso de control.

$$\hat{H} = U^\dagger(\hat{H}_{syst} + \hat{H}_d)U - iU^\dagger \dot{U}$$

$$\hat{H} = \Delta_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + (a \xi^* e^{i\omega_d t} + a^\dagger \xi e^{-i\omega_d t})$$

$$\Delta_c = \omega_c - \omega_d \quad \Delta_{qi} = \omega_{qi} - \omega_d$$

Efecto del pulso sobre el qubit

Luego se aplica el operador de desplazamiento $D(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a]$ sobre el campo a con $\dot{\alpha} = -i\Delta_c \alpha - i\xi e^{-i\omega_d t}$ para eliminar el efecto directo del pulso sobre la cavidad.

$$\hat{H} = D^\dagger(\alpha) \hat{H}_{old} D(\alpha) - iD^\dagger(\alpha) \dot{D}(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \Delta_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) \\ & + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) - \Delta_c \alpha \alpha^* \end{aligned}$$

El término $-\Delta_c \alpha \alpha^*$ se desprecia, ya que sólo representa una fase global en la evolución del sistema.

Régimen dispersivo

Finalmente, aplicamos la transformación $U = \exp[\sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})]$, donde $\Delta_i = \omega_{qi} - \omega_c$ y realizamos la aproximación de segundo grado sobre los términos $\frac{g_i}{\Delta_i} \ll 1$.

$$\begin{aligned}\hat{H} &= U^\dagger \hat{H}_{old} U \\ \hat{H} &\approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \tilde{\Delta}_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i (\Omega_i \sigma_{+i} + \Omega_i^* \sigma_{-i}) \\ &\quad + \sum_{i \neq j} \frac{g_i g_j}{2 \Delta_i} (\sigma_{-i} \sigma_{+j} + \sigma_{+i} \sigma_{-j})\end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta}_c = (\omega_c + \sum_i \chi_i \sigma_{zi}) - \omega_d \quad \tilde{\Delta}_{qi} = (\omega_{qi} + \chi_i) - \omega_d \quad \chi_i = \frac{g_i^2}{\Delta_i}$$

Rotaciones X-Y

Tomando $\Omega(t) = \Omega^x(t) \cos(\omega_d t) + \Omega^y \sin(\omega_d t)$, donde ω_d es igual a la frecuencia de resonancia de uno de los qubits logramos rotaciones sobre los ejes X e Y. Las amplitudes de estas rotaciones vienen dadas por $\int_0^{t_0} \Omega^x(t) dt$ y $\int_0^{t_0} \Omega^y(t) dt$, respectivamente, donde t_0 es la duración del pulso.

$$\hat{H} \approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_q \sigma_z + \frac{1}{2} (\Omega^x(t) \sigma_x + \Omega^y(t) \sigma_y)$$

Compuerta de entrelazamiento

Ejemplo con sólo dos qubits

$$\hat{H} \approx \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_{q_1} \sigma_{z_1} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_{q_2} \sigma_{z_2} + \frac{g_1 g_2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{2 \Delta_1 \Delta_2} (\sigma_{-1} \sigma_{+2} + \sigma_{+1} \sigma_{-2})$$

Variando la frecuencia de resonancia de los qubit, se puede variar el acoplamiento entre estos.

Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador**
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

Parámetros de los sistemas simulados

1 Frecuencias de resonancia:

- 1 Resonador: 10GHz
- 2 Qubit 0: 5GHz
- 3 Qubit 1: 6GHz
- 4 Qubit 2: 7GHz
- 5 Qubit 3: 8GHz
- 6 *Qubit 4: 11GHz
- 7 *Qubit 5: 12GHz
- 8 *Qubit 6: 13GHz
- 9 *Qubit 7: 14GHz

2 Constante de acoplamiento: Todas iguales a 0.1GHz

3 Tasas de relajación: Todas iguales a 25KHz

4 Tiempo de relajación: Todos iguales a $40\mu s$

5 Frecuencia de resonancia para iSWAP: 9GHz

*Sólo aplica para el caso del sistema de 8 qubits

Compuertas compuestas

Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover**
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

Operadores de reflexión

$$\Pi_{\mathcal{W}} = \sum_k |\omega_k\rangle\langle\omega_k| \quad (29)$$

$$|\psi\rangle = \sin(\theta) |\psi_1\rangle + \cos(\theta) |\psi_0\rangle \quad (30)$$

$$U_{\mathcal{W}} = 2\mathbb{1} - 2\Pi_{\mathcal{W}} \quad (31)$$

$$U_{\psi} = 2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbb{1} \quad (32)$$

Algoritmo de Grover

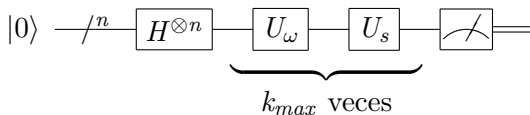
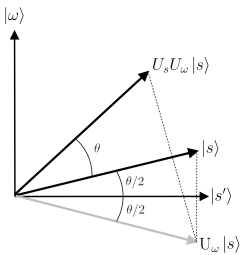


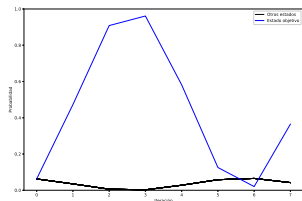
Figura: Circuito del algoritmo de Grover, k_{max} desconocido.



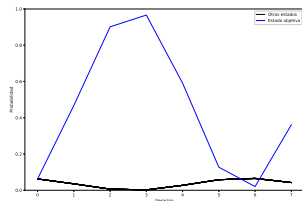
Variaciones del algoritmo de Grover

- 1 Algoritmo de amplificación de amplitud: Esta es una generalización del algoritmo de Grover, que permite utilizar un estado inicial genérico $|\psi\rangle$ y bases de datos con más de un estado deseado $|\omega\rangle$.
- 2 Algoritmo de Grover en un paso: En lugar de realizar repetidas iteraciones del algoritmo, se realiza una sólo iteración, pero se ejecuta el algoritmo en varios sistemas simultáneamente.
- 3 Optimización del algoritmo de Grover: Se ejecuta el algoritmo en varios sistemas simultáneamente, pero se realizan varias iteraciones.

Simulaciones del algoritmo de Grover



(a) Wolfram Mathematica



(b) Python

Figura: Evolución de las probabilidades en el algoritmo de Grover sin relajación

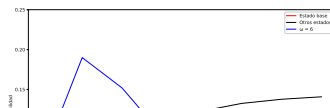
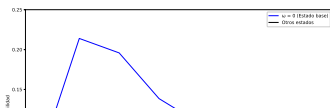


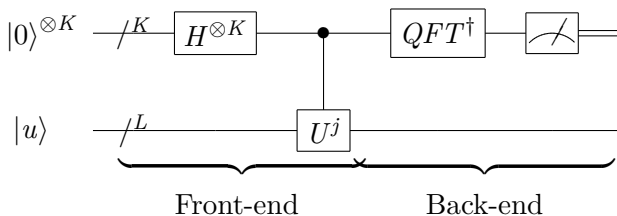
Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor**
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

Transformada cuántica de Fourier

$$QFT^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x \sum_k e^{-2\pi i k x / N} |x\rangle\langle k| \quad (33)$$

Estimación de fase y de orden

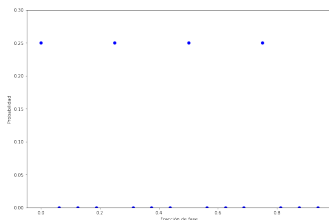


Algoritmo de Shor

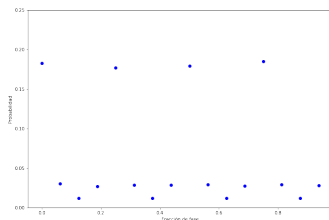
Se asume que el número de entrada N es un número compuesto. El algoritmo de Shor halla dos factores de este número. El algoritmo es el siguiente:

- 1 Si N es par, el número 2 es un factor no trivial de N y se ha hallado una factorización. Fin del algoritmo.
- 2 Evaluar \sqrt{N} . Si N es un cuadrado perfecto, ya se ha hallado la factorización. Fin del algoritmo.
- 3 Elegir un número aleatorio $a < N$.
- 4 Si $\text{GCD}(a, N) \neq 1$, entonces este número es un factor no trivial de N y se ha hallado una factorización. Fin del algoritmo.
- 5 Si a es par, volver al paso 3.
- 6 Si no, usar el algoritmo de estimación de orden para hallar el período r de $f(x) = a^x \bmod N$.
- 7 Si r es impar, volver al paso 3.

Simulaciones del algoritmo de Shor



(a) Wolfram Mathematica



(b) Python

Figura: Distribución de probabilidad en la estimación de fase del algoritmo de Shor sin pérdidas

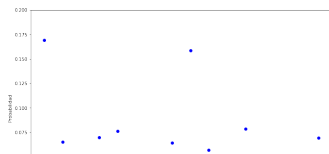
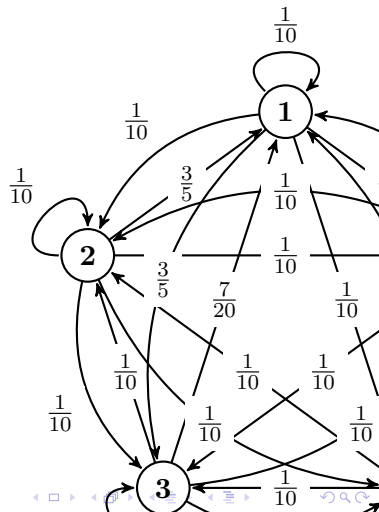
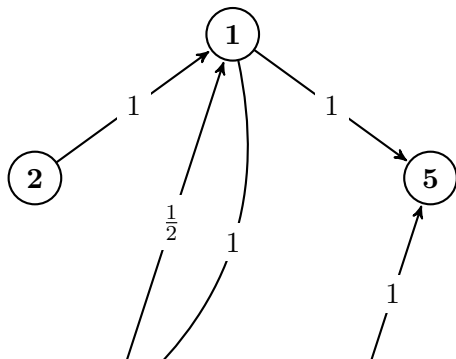


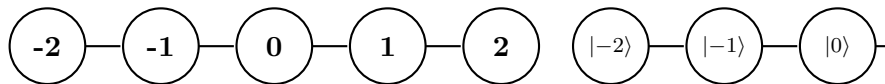
Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank**
- 8 Conclusiones

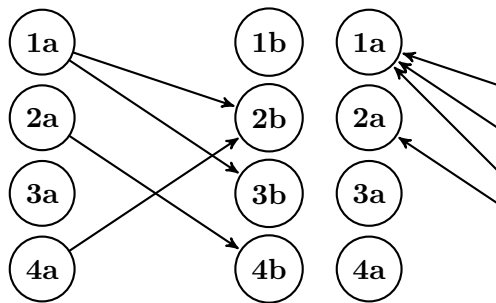
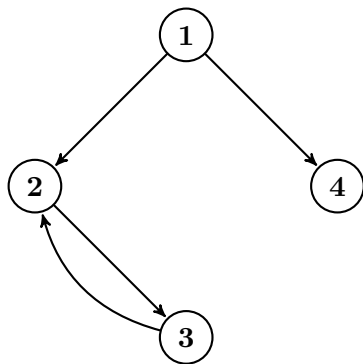
PageRank



Caminatas cuánticas



Caminatas cuánticas de Szegedy



PageRank cuántico

$$I_q(P_i, m) = \text{Tr}((\mathbb{1} \otimes |i\rangle\langle i|) U^m |\psi_0\rangle\langle\psi_0| U^{\dagger m}). \quad (34)$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i |\psi_i\rangle. \quad (35)$$

$$\langle I_q(P_i) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} I_q(P_i, m) \quad (36)$$

Circuitos de Loke

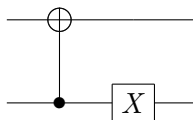
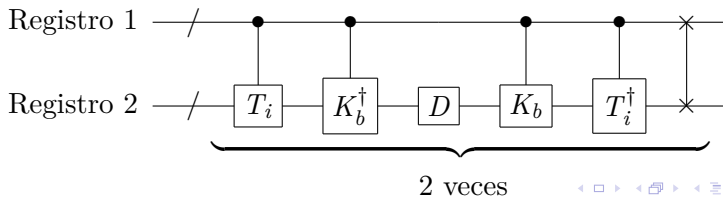


Figura: Operador de permutación T



Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico

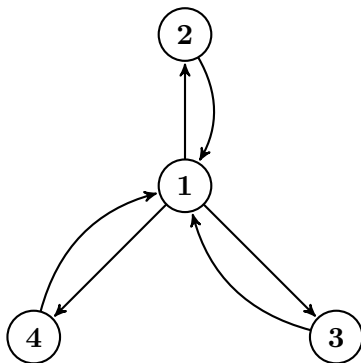


Figura: Grafo estrella

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones**

Conclusiones

En el presente trabajo, se desarrollaron las siguientes herramientas y se obtuvieron los siguientes resultados novedosos:

- 1 Una compuerta controlada de fase CP que permita eliminar las fases en las compuertas de negación con dos o más qubits de control, como la de Toffoli.
- 2 Un conjunto de instrucciones cuánticas basadas en las compuertas nativas de los transmones y un simulador del sistema físico.
- 3 Un operador de multiplicación por 3 módulo 8 sin qubits de ancilla.
- 4 La forma explícita del operador de difusión de las caminatas cuánticas de Szegedy para grafos de cuatro nodos, en función de rotaciones en Y controladas.
- 5 El efecto de la relajación en los algoritmos de Grover, Shor