

Diseño y simulación de un procesador cuántico superconductor

Miguel Casanova
Departamento de Electrónica y Circuitos¹, Universidad Simón Bolívar

2018
September

¹I am no longer a member of this department

Índice general

1. Introducción	1
1.1. JUSTIFICACION	6
1.2. OBJETIVOS	8
1.2.1. Objetivo General:	8
1.2.2. Objetivos Específicos:	8
1.2.3. Fases del Proyecto	8
1.2.4. REFERENCIAS	9
2. Información cuántica	12
2.1. Función de onda	12
2.2. Espacio de Hilbert	13
2.3. Delta de Kronecker	14
2.4. Operadores hermíticos	14
2.5. Operadores unitarios	15
2.6. Notación de Dirac	15
2.7. Producto tensorial	17
2.8. Postulados de la mecánica cuántica	18
2.9. Matriz densidad	19
2.10. Traza parcial	21
2.10.1. Comparación con el producto tensorial	22
2.11. Entrelazamiento	22
2.12. Computación cuántica	23
2.12.1. Qubits	23
2.12.2. Esfera de Bloch	23
2.12.3. Conmutador y anticonmutador	24
2.12.4. Matrices de Pauli	25
2.12.5. Circuitos cuánticos	25
2.12.6. Compuertas cuánticas de un qubit	28
2.12.7. Compuertas multiqubit	34

2.12.8. Conjuntos universales de compuertas cuánticas	37
2.12.9. Criterios de DiVincenzo	38
2.13. Fidelidad	38
2.14. Medidas proyectivas	39
3. Superconductividad	41
3.1. Cuantización macroscópica y superconductividad	41
3.2. La teoría BCS	43
3.3. Cuantización del flujo magnético y efecto tunel Giaever	51
3.4. Efecto Josephson	57
3.5. Componentes de la corriente en las uniones de Josephson	62
3.6. Qubits superconductores	63
3.7. Arquetipos de qubits superconductores	64
3.7.1. Qubit de carga	64
3.7.2. Qubit de flujo	64
3.7.3. Qubit de fase	64
3.8. Transmones	65
3.9. Hamiltonianos multiqubit de transmones	65
3.9.1. Acoplamiento capacitivo	66
3.9.2. Acoplamiento por el resonador	66
3.9.3. Acoplamiento de JJ	66
3.9.4. Acoplamiento afinable/calibrable	66
3.10. Compuertas cuánticas en transmones	66
3.10.1. El operador de evolución temporal	66
3.10.2. Pulsos de microondas	67
3.10.3. Régimen rotacional del pulso	67
3.10.4. Efecto del pulso sobre el qubit	68
3.10.5. Régimen dispersivo	68
3.10.6. Rotaciones X-Y	68
3.10.7. Compuerta de entrelazamiento	69
3.10.8. Compuertas compuestas	69
4. El simulador	70
4.1. Parámetros de los sistemas simulados	71
4.2. Compuertas simples	71
4.2.1. Rx y Ry	72
4.2.2. iSWAP	73
4.3. Compuertas compuestas	75
4.3.1. X	75
4.3.2. Y	75

4.3.3.	Rz	75
4.3.4.	Z	76
4.3.5.	H	76
4.3.6.	CNOT	76
4.3.7.	SWAP	76
4.3.8.	Compuertas condicionales generales	76
4.3.9.	CP	78
5.	Algoritmo de Grover	82
5.1.	El algoritmo	87
5.2.	Simulación	87
6.	Algoritmo de Shor	90
6.1.	Transformada cuántica de Fourier	90
6.2.	Estimación de fase	92
6.3.	Estimación de orden	94
6.4.	Expansión en fracciones continuas	97
6.5.	Algoritmo de factorización de Shor	98
6.6.	Simulación en Wolfram Mathematica	99
6.7.	Simulación en Python	100
7.	Google PageRank	103
7.1.	El algoritmo de remiendo (parcheo) general	106
7.2.	Interpretación como una caminata aleatoria	107
7.3.	Cuantizando las caminatas aleatorias	108
7.4.	Caminata cuántica de Szegedy	108
7.5.	PageRank cuántico	110
7.6.	Circuitos de las caminatas cuánticas de Szegedy	110
7.7.	Simulaciones	115
7.7.1.	Grafo estrella	115
7.7.2.	Grafo corona	115
7.7.3.	Grafo arbol	115
7.7.4.	Grafo aleatorio	115
A.	Cálculos de Hamiltonianos	117
A.1.	Hamiltoniano de Jaynes-Cummings	117
A.2.	Hamiltoniano multiqubit	117
A.3.	Pulsos de microondas	117
A.4.	Régimen rotacional del pulso	118
A.5.	Efecto del pulso sobre el qubit	122

A.6. Régimen dispersivo	123
A.7. Rotaciones X-Y	126
A.8. Compuerta de entrelazamiento	126
B. Cálculos de matrices de adyacencia	123
C. Circuitos cuánticos	124
D. Códigos del simulador	133
D.1. Wolfram Mathematica	133
D.2. Python	141
E. Códigos de la simulación del algoritmo de Grover	153
E.1. Wolfram Mathematica	153
E.2. Python	155
F. Códigos de la simulación del algoritmo de Shor	157
F.1. Wolfram Mathematica	157
F.2. Python	161
G. Códigos de la simulación del algoritmo de PageRank	165
G.1. Wolfram Mathematica	165
G.2. Python	165

Índice de figuras

2.1. Esfera de Bloch	24
2.2. Compuerta I en la esfera de Bloch	28
2.3. Compuerta X en la esfera de Bloch	29
2.4. Compuerta Z en la esfera de Bloch	29
2.5. Compuerta Y en la esfera de Bloch	30
2.6. Compuerta H en la esfera de Bloch	31
2.7. Compuerta S en la esfera de Bloch	31
2.8. Compuerta T en la esfera de Bloch	32
2.9. Compuerta P en la esfera de Bloch	32
2.10. Compuertas Rx, Ry y Rz en la esfera de Bloch	33
3.1. Diagrama de Feynman de la interacción electrón-fonón-electrón	47
3.2. Construcción geométrica de los posibles electrones candidatos para formar pares de Cooper, siendo $\hbar K$ el momentum del centro de masas.	48
3.3. Cuantización del flujo magnético	53
3.4. Imposibilidad de efecto túnel a través de la barrera	55
3.5. Posibilidad de efecto túnel a través de la barrera	56
3.6. Efecto Giaver: Efecto túnel entre un metal y un superconductor	57
3.7. Curva característica de una unión Josephson	61
4.1. Rotaciones en X e Y de 2π	72
4.2. Rotaciones en X e Y de π	73
4.3. Rotaciones en X e Y de $\frac{\pi}{2}$	73
4.4. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $ 00\rangle$	74
4.5. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $ 01\rangle$	74
4.6. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $\frac{ 00\rangle+ 11\rangle}{\sqrt{2}}$	74
4.7. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $\frac{ 0\rangle+ 1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{ 0\rangle+ 1\rangle}{\sqrt{2}}$.	74
5.1. Circuito del algoritmo de Grover, k_{max} desconocido.	84

5.2.	Interpretación geométrica del operador difusión	86
5.3.	Circuito del algoritmo de Grover.	87
6.1.	100
7.1.	Transformación de un grafo al crear la matriz de Google con $\alpha = \frac{1}{2}$	107
7.2.	Operador de permutación	112
7.3.	Circuito de Loke para las caminatas cuánticas de Szegedy . .	112

Índice de cuadros

Apéndice A

Cálculos de Hamiltonianos

A.1. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

El Hamiltoniano de Jaynes-Cummings es un Hamiltoniano diagonal que representa un sistema de dos niveles interactuando con un modo cuantizado de una cavidad óptica.

$$\hat{H}_{JC} = \hat{H}_r + \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} = \omega_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \omega_q \sigma_z + g(a\sigma_+ + a^\dagger \sigma_-) \quad (\text{A.1})$$

A.2. Hamiltoniano multiquibit

El modelo de Jaynes-Cummings para varios qubits sin el término de la energía de la cavidad es el siguiente:

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} = -\frac{1}{2} \sum_i \omega_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a\sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) \quad (\text{A.2})$$

A.3. Pulsos de microondas

Para operar sobre los qubits se aplican pulsos de microondas.

$$\hat{H}_d = \sum_k (a + a^\dagger) (\xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t} + \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t}) \quad (\text{A.3})$$

RWA:

$$\hat{H}_d = \sum_k a \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t} \quad (\text{A.4})$$

A.4. Régimen rotacional del pulso

Partiendo del Hamiltoniano de Jaynes-Cummings para un sistema multiqubit con pulsos de microondas bajo la aproximación de onda rotacional:

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{sys} + \hat{H}_d = \omega_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \omega_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + \sum_k a \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t} \quad (\text{A.5})$$

Aplicamos la siguiente transformación unitaria para entrar en el régimen rotacional del pulso aplicado

$$U(t) = \exp\left[\sum_n -i\omega_d^{(n)} t (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})\right] \quad (\text{A.6})$$

De esta manera, el Hamiltoniano en el régimen rotacional del pulso tendrá la siguiente forma:

$$\hat{H}_2 = U^\dagger (\hat{H}_{sys} + \hat{H}_d) U - iU^\dagger \dot{U} \quad (\text{A.7})$$

Donde \dot{U} representa la derivada temporal del operador unitario U .

Utilizaremos la formula de Baker-Campbell-Hausdorff para calcular este Hamiltoniano, ya que esta nos permite realizar el producto con los exponenciales de operadores calculando sólo conmutadores.

$$e^{-\lambda X} H e^{\lambda X} = H + \lambda [H, X] + \frac{\lambda^2}{2!} [[H, X], X] + \dots \quad (\text{A.8})$$

En cuanto a los conmutadores, podemos utilizar las siguientes identidades:

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (\text{A.9})$$

$$[a, a^\dagger a] = a a^\dagger a - a^\dagger a a = (a a^\dagger - a^\dagger a) a = [a, a^\dagger] a = a \quad (\text{A.10})$$

$$[a^\dagger, a^\dagger a] = a^\dagger a^\dagger a - a^\dagger a a^\dagger = a^\dagger (a^\dagger a - a a^\dagger) = a^\dagger [a^\dagger, a] = -a^\dagger \quad (\text{A.11})$$

$$[\sigma_+, \sigma_z] = 2\sigma_+ \quad (\text{A.12})$$

$$[\sigma_-, \sigma_z] = -2\sigma_- \quad (\text{A.13})$$

$$[\sigma_-, \sigma_+] = \sigma_z \quad (\text{A.14})$$

Para que el cálculo sea visualmente más manejable, aprovechamos la propiedad distributiva de los conmutadores y separaremos el Hamiltoniano \hat{H}_1 en los siguientes términos:

1. $\hat{H}_r = \omega_r a^\dagger a$
2. $\hat{H}_q = -\frac{1}{2} \sum_i \omega_{qi} \sigma_{zi}$
3. $\hat{H}_{qr} = \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i})$
4. $\hat{H}_d = \sum_k (a \xi_k^* e^{i \sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i \sum_k \omega_d^{(k)} t})$

Con el primer término tenemos el siguiente conmutador:

$$[\omega_r a^\dagger a, \sum_n -i \omega_d^{(n)} t (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})] = 0 \quad (\text{A.15})$$

El cual es igual a cero, ya que $a^\dagger a$ conmuta con sí mismo, como todo operador, y con σ_{zi} , ya que actúan sobre particiones distintas del sistema.

Con el segundo término tenemos el siguiente conmutador:

$$[-\frac{1}{2} \sum_i \omega_{qi} \sigma_{zi}, \sum_n -i \omega_d^{(n)} t (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})] = 0 \quad (\text{A.16})$$

El cual es igual a cero, ya que σ_{zi} conmuta consigo mismo y con $a^\dagger a$.

Con el tercer término tenemos el siguiente conmutador:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}), \sum_n -i \omega_d^{(n)} t (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi}) \right] = \\ & \sum_n -i \omega_d^{(n)} t \left[\sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}), (a^\dagger a) \right] \\ & + \sum_n -i \omega_d^{(n)} t \left[\sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}), (-\frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi}) \right] = \\ & \sum_n -i \omega_d^{(n)} t \sum_i g_i (a \sigma_{+i} - a^\dagger \sigma_{-i}) - \sum_n -i \omega_d^{(n)} t \sum_i g_i (a \sigma_{+i} - a^\dagger \sigma_{-i}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

En este caso, utilizamos el hecho de que a , a^\dagger y $a^\dagger a$ conmutan con σ_{zi} , σ_{+i} y σ_{-i} , igual que σ_{zi} , σ_{+i} y σ_{-i} con σ_{zj} , σ_{+j} y σ_{-j} , donde $i \neq j$, ya que actúan sobre particiones distintas. También utilizamos las identidades [A.9](#) - [A.14](#) y el hecho de que todo operador conmuta con sí mismo. De esta

manera llegamos a una resta de dos términos iguales, así que este conmutador también es cero.

Con el cuarto término tenemos el siguiente conmutador:

$$\left[\sum_k \left(a \xi_k^* e^{i \sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i \sum_k \omega_d^{(k)} t} \right), \sum_n -i \omega_d^{(n)} t \left(a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi} \right) \right] = \left(\sum_n -i \omega_d^{(n)} t \right) \sum_k \left(a \xi_k^* e^{i \sum_k \omega_d^{(k)} t} - a^\dagger \xi_k e^{-i \sum_k \omega_d^{(k)} t} \right) \quad (\text{A.18})$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que a y a^\dagger conmutan con σ_{zi} y las identidades A.10 y A.11. Este conmutador no es igual a cero como los anteriores, así que tenemos que utilizar este resultado para calcular $[[H, X], X]$.

$$\left[\left(\sum_n -i \omega_d^{(n)} t \right) \sum_k \left(a \xi_k^* e^{i \sum_k \omega_d^{(k)} t} - a^\dagger \xi_k e^{-i \sum_k \omega_d^{(k)} t} \right), \sum_n -i \omega_d^{(n)} t \left(a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi} \right) \right] = \left(\sum_n -i \omega_d^{(n)} t \right)^2 \sum_k \left(a \xi_k^* e^{i \sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i \sum_k \omega_d^{(k)} t} \right) \quad (\text{A.19})$$

De igual manera que en el conmutador anterior, hemos utilizado el hecho de que a y a^\dagger conmutan con σ_{zi} y las identidades A.10 y A.11. Este conmutador no es igual a cero como los anteriores, así que tenemos que utilizar este resultado para calcular $[[[H, X], X], X]$.

$$\left[\left(\sum_n -i \omega_d^{(n)} t \right)^2 \sum_k \left(a \xi_k^* e^{i \sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i \sum_k \omega_d^{(k)} t} \right), \left(\sum_n -i \omega_d^{(n)} t \right) \left(a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi} \right) \right] = \left(\sum_n -i \omega_d^{(n)} t \right)^3 \sum_k \left(a \xi_k^* e^{i \sum_k \omega_d^{(k)} t} - a^\dagger \xi_k e^{-i \sum_k \omega_d^{(k)} t} \right) \quad (\text{A.20})$$

De igual manera que en el conmutador anterior, hemos utilizado el hecho de que a y a^\dagger conmutan con σ_{zi} y las identidades A.10 y A.11. Este conmutador no es igual a cero como los anteriores, así que tenemos que utilizar este resultado para calcular $[[[[H, X], X], X], X]$.

$$\left[\left(\sum_n -i\omega_d^{(n)} t \right)^3 \sum_k \left(a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} - a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t} \right), \left(\sum_n -i\omega_d^{(n)} t \right) \left(a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi} \right) \right] =$$

$$\left(\sum_n -i\omega_d^{(n)} t \right)^4 \sum_k \left(a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t} \right) \quad (\text{A.21})$$

En este punto podemos notar cierto patrón. Esta serie de conmutadores nos recuerda a la serie de Taylor de la función exponencial con argumento $\sum_n -i\omega_d^{(n)} t$. Al sustituirlos en la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, vemos que efectivamente se trata de este exponencial. Entonces, el primer término del Hamiltoniano \hat{H}_2 es:

$$U^\dagger(\hat{H}_1)U = \hat{H}_{syst} + \sum_k \left(e^{\sum_n -i\omega_d^{(n)} t} a\xi_k^* e^{\sum_k i\omega_d^{(k)} t} + e^{-\sum_n -i\omega_d^{(n)} t} a^\dagger \xi_k e^{-\sum_k i\omega_d^{(k)} t} \right) = \hat{H}_{syst} + \sum_k (a\xi_k^* + a^\dagger \xi_k) \quad (\text{A.22})$$

Por otro lado, el segundo término es:

$$-iU^\dagger \dot{U} = -iU^\dagger \left(-i \sum_n \omega_d^{(n)} (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi}) \right) U = - \sum_n \omega_d^{(n)} (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi}) \quad (\text{A.23})$$

Es decir, $-i$ por la derivada temporal del argumento del exponencial en el que consiste U . Esto es porque todo exponencial conmuta con su argumento y en este caso, la derivada interna de U es igual al argumento del exponencial entre el escalar t , por lo que también conmuta con U . Además de que como U es unitario, se cumple que $U^\dagger U = \mathbb{1}$.

Finalmente, sumando y agrupando términos, nos queda que el Hamiltoniano en el régimen rotacional del pulso es:

$$\hat{H}_2 = (\omega_r - \sum_n \omega_d^{(n)}) a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i (\omega_{qi} - \sum_n \omega_d^{(n)}) \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a\sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + \sum_k (a\xi_k^* + a^\dagger \xi_k) \quad (\text{A.24})$$

En el caso de un pulso de un sólo modo, este Hamiltoniano toma la forma:

$$\hat{H} = \Delta_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a\sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + (a\xi^* + a^\dagger \xi) \quad (\text{A.25})$$

Donde $\Delta_r = \omega_r - \omega_d$ es la diferencia entre la frecuencia de resonancia del resonador y la frecuencia central del pulso, y $\Delta_{qi} = \omega_{qi} - \omega_d$ es la diferencia entre la frecuencia de resonancia de cada qubit y la frecuencia central del pulso.

A.5. Efecto del pulso sobre el qubit

Ahora desplazaremos el campo a , aplicando el operador de desplazamiento neto

$$D(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a] \quad (\text{A.26})$$

Al Hamiltoniano \hat{H}_2 monomodo, con $\dot{\alpha} = -i\Delta_r\alpha - i\xi$, para eliminar el efecto directo del pulso sobre el resonador y ver cómo afecta a los qubits.

De esta manera, el nuevo Hamiltoniano será:

$$\hat{H}_3 = D^\dagger(\alpha)\hat{H}_2D(\alpha) - iD^\dagger(\alpha)\dot{D}(\alpha) \quad (\text{A.27})$$

Los operadores de desplazamiento cumplen con las siguientes propiedades:

$$D(-\alpha) = D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) \quad (\text{A.28})$$

$$D^\dagger(\alpha)aD(\alpha) = a + \alpha \quad (\text{A.29})$$

$$D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^* \quad (\text{A.30})$$

Utilizando estas dos propiedades, podemos calcular $D^\dagger(\alpha)\hat{H}_2D(\alpha)$ directamente sin utilizar la expansión de Baker-Campbell-Hausdorff, pues basta con sustituir a por $a + \alpha$ y a^\dagger por $a^\dagger + \alpha^*$.

$$\begin{aligned} D^\dagger(\alpha)\hat{H}_2D(\alpha) &= \Delta_r(a^\dagger + \alpha^*)(a + \alpha) - \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi}\sigma_{zi} + \sum_i g_i[(a + \alpha)\sigma_{+i} + (a^\dagger + \alpha^*)\sigma_{-i}] \\ &\quad + [(a + \alpha)\xi^* + (a^\dagger + \alpha^*)\xi] \quad (\text{A.31}) \end{aligned}$$

Estas mismas propiedades también se utilizan para calcular el otro término de \hat{H}_3 , de la siguiente manera:

$$-iD^\dagger(\alpha)\dot{D}(\alpha) = -iD^\dagger(\alpha)(\dot{\alpha}a^\dagger - \dot{\alpha}^*a)D(\alpha) = -i[\dot{\alpha}(a^\dagger + \alpha^*) - \dot{\alpha}^*(a + \alpha)] \quad (\text{A.32})$$

Finalmente, sumando, sustituyendo $\dot{\alpha}$ y agrupando, nos queda:

$$\hat{H}_3 = \Delta_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) - \Delta_c \alpha \alpha^* \quad (\text{A.33})$$

El término $-\Delta_r \alpha \alpha^*$ se desprecia, ya que sólo representa una fase global en la evolución del sistema.

A.6. Régimen dispersivo

Finalmente, aplicamos la transformación

$$U = \exp\left[\sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})\right] \quad (\text{A.34})$$

Donde $\Delta_i = \omega_{qi} - \omega_r$ y realizamos la expansión de Baker-Campbell-Hausdorff de segundo grado sobre los términos $\frac{g_i}{\Delta_i} \ll 1$. El Hamiltoniano efectivo \hat{H}_{eff} será la aproximación del Hamiltoniano \hat{H}_4 resultante de esta expansión.

$$\hat{H}_{eff} \approx \hat{H}_4 = U^\dagger \hat{H}_3 U \quad (\text{A.35})$$

Para resolver los conmutadores seguiremos el esquema utilizado anteriormente y separaremos el Hamiltoniano \hat{H}_3 en los siguientes términos:

1. $\hat{H}_r = \Delta_r a^\dagger a$
2. $\hat{H}_q = -\frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi}$
3. $\hat{H}_{qr} = \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i})$
4. $\hat{H}_d = \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i})$

Con el primer término tenemos el siguiente conmutador:

$$[\Delta_r a^\dagger a, \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})] = \Delta_r \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} + a \sigma_{+i}) \quad (\text{A.36})$$

Con el segundo término tenemos el siguiente conmutador:

$$[-\frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi}, \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})] = - \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} \Delta_{qi} (a^\dagger \sigma_{-i} + a \sigma_{+i}) \quad (\text{A.37})$$

Con el tercer término tenemos el siguiente conmutador:

$$\begin{aligned} & [\sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}), \sum_j \frac{g_j}{\Delta_j} (a^\dagger \sigma_{-j} - a \sigma_{+j})] = \\ & \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} \left([a \sigma_{+i}, a^\dagger \sigma_{-j}] + [a \sigma_{+i}, -a \sigma_{+j}] + [a^\dagger \sigma_{-i}, a^\dagger \sigma_{-j}] + [a^\dagger \sigma_{-i}, -a \sigma_{+j}] \right) = \\ & \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} \left([a \sigma_{+i}, a^\dagger \sigma_{-j}] + [a^\dagger \sigma_{-i}, -a \sigma_{+j}] \right) = \\ & \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} \left(a \sigma_{+i} a^\dagger \sigma_{-j} - a^\dagger \sigma_{-j} a \sigma_{+i} - a^\dagger \sigma_{-i} a \sigma_{+j} + a \sigma_{+j} a^\dagger \sigma_{-i} \right) = \\ & \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} \left(a a^\dagger \sigma_{+i} \sigma_{-j} - a^\dagger a \sigma_{-j} \sigma_{+i} - a^\dagger a \sigma_{-i} \sigma_{+j} + a a^\dagger \sigma_{+j} \sigma_{-i} \right) = \\ & \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} \left((1 + a^\dagger a) \sigma_{+i} \sigma_{-j} - a^\dagger a \sigma_{-j} \sigma_{+i} - a^\dagger a \sigma_{-i} \sigma_{+j} + (1 + a^\dagger a) \sigma_{+j} \sigma_{-i} \right) = \\ & \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} \left(\sigma_{+i} \sigma_{-j} + a^\dagger a \sigma_{+i} \sigma_{-j} - a^\dagger a \sigma_{-j} \sigma_{+i} - a^\dagger a \sigma_{-i} \sigma_{+j} + \sigma_{+j} \sigma_{-i} + a^\dagger a \sigma_{+j} \sigma_{-i} \right) = \\ & \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} (\sigma_{+i} \sigma_{-j} + \sigma_{+j} \sigma_{-i}) + \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} a^\dagger a (\sigma_{+i} \sigma_{-j} - \sigma_{-j} \sigma_{+i} - \sigma_{-i} \sigma_{+j} + \sigma_{+j} \sigma_{-i}) = \\ & \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} (\sigma_{+i} \sigma_{-j} + \sigma_{+j} \sigma_{-i}) - 2 \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i} a^\dagger a \sigma_{zi} \quad (\text{A.38}) \end{aligned}$$

Con el cuarto término tenemos el siguiente conmutador:

$$\begin{aligned} & [\sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}), \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})] = \\ & \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} \left([\alpha \sigma_{+i}, a^\dagger \sigma_{-j}] - [\alpha^* \sigma_{-i}, a \sigma_{+j}] \right) = - \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a) \sigma_{zi} \\ & \quad (\text{A.39}) \end{aligned}$$

Sumando y agrupando se tiene

$$\begin{aligned}
& \Delta_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) \\
& + \Delta_r \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} + a \sigma_{+i}) - \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} \Delta_{qi} (a^\dagger \sigma_{-i} + a \sigma_{+i}) \\
& + \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} (\sigma_{+i} \sigma_{-j} + \sigma_{+j} \sigma_{-i}) - 2 \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i} a^\dagger a \sigma_{zi} - \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a) \sigma_{zi}
\end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
& (\Delta_r - \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i} \sigma_{zi}) a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i (\Delta_{qi} + 2 \frac{g_i^2}{\Delta_i} a^\dagger a) \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) \\
& - \sum_i \frac{g_i \Delta_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} + a \sigma_{+i}) + \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} (\sigma_{+i} \sigma_{-j} + \sigma_{+j} \sigma_{-i}) - \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a) \sigma_{zi}
\end{aligned} \tag{A.41}$$

$$\begin{aligned}
& (\Delta_r - \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i} \sigma_{zi}) a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i (\Delta_{qi} + 2 \frac{g_i^2}{\Delta_i} a^\dagger a) \sigma_{zi} + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) \\
& + \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} (\sigma_{+i} \sigma_{-j} + \sigma_{+j} \sigma_{-i}) - \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a) \sigma_{zi}
\end{aligned} \tag{A.42}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & \Delta_r a^\dagger a - \sum_i \Delta_{qi} \left(\frac{1}{2} + 2 \frac{g_i^2}{\Delta_i} (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \right) \sigma_{zi} + \sum_{i \neq j} \frac{g_i g_j}{\Delta_j} (\sigma_{+i} \sigma_{-j} + \\
& \sigma_{-i} \sigma_{+j}) + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) - \\
& \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a) \sigma_{zi}
\end{aligned} \tag{A.43}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H} \approx & \tilde{\Delta}_c a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \tilde{\Delta}_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i (\Omega_i \sigma_{+i} + \Omega_i^* \sigma_{-i}) \\
& + \sum_{i \neq j} \frac{g_i g_j}{2 \Delta_i} (\sigma_{-i} \sigma_{+j} + \sigma_{+i} \sigma_{-j})
\end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta}_c = (\omega_c + \sum_i \chi_i \sigma_{zi}) - \omega_d \quad \tilde{\Delta}_{qi} = (\omega_{qi} + \chi_i) - \omega_d \quad \chi_i = \frac{g_i^2}{\Delta_i}$$

A.7. Rotaciones X-Y

Tomando $\Omega(t) = \Omega^x(t) \cos(\omega_d t) + \Omega^y \sin(\omega_d t)$, donde ω_d es igual a la frecuencia de resonancia de uno de los qubits logramos rotaciones sobre los ejes X e Y. Las amplitudes de estas rotaciones vienen dadas por $\int_0^{t_0} \Omega^x(t) dt$ y $\int_0^{t_0} \Omega^y(t) dt$, respectivamente, donde t_0 es la duración del pulso.

$$\Omega \sigma_+ + \Omega^* \sigma_-$$

$$e^{i(x+\pi/2)} e^{-i(x+\pi/2)} = e^{i\pi/2} e^{ix} e^{-i\pi/2} e^{-ix} = e^{i\pi/2} e^{ix} + e^{i\pi} e^{-i\pi/2} e^{-ix} = e^{i\pi/2} e^{ix} + e^{i\pi/2} e^{-ix} = e^{i\pi/2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\hat{H} \approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_q \sigma_z + \frac{1}{2} (\Omega^x(t) \sigma_x + \Omega^y(t) \sigma_y)$$

A.8. Compuerta de entrelazamiento

Ejemplo con sólo dos qubits

$$\hat{H} \approx \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_{q1} \sigma_{z1} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_{q2} \sigma_{z2} + \frac{g_1 g_2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{2 \Delta_1 \Delta_2} (\sigma_{-1} \sigma_{+2} + \sigma_{+1} \sigma_{-2})$$

Variando la frecuencia de resonancia de los qubit, se puede variar el acoplamiento entre estos.

Bibliografía

- [1] Adriano Barenco, Charles H. Bennet, Richard Cleve, David P. DiVincenzo, Norman Margolus, Peter Shor, Tycho Sleator, Jhon A. Smolin, and Harald Weinfurter. Elementary gates for quantum computation. *Physical Review A*, 1995.
- [2] Sttiwuer Díaz-Solórzano. Esquemas de medidas. *QIC*, 2014.
- [3] Rudolf Gross and Achim Marx. Applied superconductivity: Josephson effect and superconducting electronics. *Walther-Meißner-Institut*, 2005.
- [4] Onnes H.K. Further experiments with liquid helium. g. on the electrical resistance of pure metals, etc. vi. on the sudden change in the rate at which the resistance of mercury disappears. *Springer, Dordrecht*, 1911.
- [5] A. P. Drozdov, M. I. Erements, I. A. Troyan, V. Ksenofontov, and S. I. Shylin. Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system. *Nature*, 525:73–76, 2015.
- [6] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Physical Review Journals Archive*, 1957.
- [7] Herbert Fröhlich. Theory of the superconducting state. *Unknown*, 1950.
- [8] M Cyrot. Ginzburg-landau theory for superconductors. *Reports on Progress in Physics*, 36(2):103, 1973.
- [9] Jr. Bascom S. Deaver and William M. Fairbank. Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders. *Physical Review Letters*, 1961.
- [10] B.D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics Letters*, 1(7):251 – 253, 1962.

- [11] P. W. Anderson and J. M. Rowell. Probable observation of the josephson superconducting tunneling effect. *Phys. Rev. Lett.*, 10:230–232, Mar 1963.
- [12] Sidney Shapiro. Josephson currents in superconducting tunneling: The effect of microwaves and other observations. *Phys. Rev. Lett.*, 11:80–82, Jul 1963.
- [13] G. Wendin. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *IOP Science*, 2017.
- [14] Alexandre Blais, Jay Gambetta, A. Wallraff, D. I. Schuster, S. M. Girvin, M. H. Devoret, , and R. J. Schoelkopf. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics. *Physical Review A*, 2007.
- [15] Norbert Schuch and Jens Siewert. Natural two-qubit gate for quantum computation using the xy interaction. *Physical Review A*, 2003.
- [16] T. Loke and J.B. Wang. Efficient quantum circuits for szegedy quantum walks. *Annals of Physics*, 382:64 – 84, 2017.