

Diseño y simulación de un procesador cuántico superconductor

Miguel Casanova
Departamento de Electrónica y Circuitos¹, Universidad Simón Bolívar

2018
September

¹I am no longer a member of this department

Índice general

1. Introducción	2
2. Información cuántica	3
2.1. Función de onda	3
2.2. Espacio de Hilbert	4
2.3. Delta de Kronecker	5
2.4. Notación de Dirac	5
2.5. Operadores unitarios	8
2.6. Operadores hermíticos	8
2.7. Producto tensorial	8
2.8. Postulados de la mecánica cuántica	10
2.9. Matriz densidad	10
2.10. Traza parcial	12
2.10.1. Comparación con el producto tensorial	13
2.11. Entrelazamiento	13
2.12. Computación cuántica	14
2.12.1. Qubits	14
2.12.2. Esfera de Bloch	15
2.12.3. Conmutador y anticonmutador	15
2.12.4. Matrices de Pauli	16
2.12.5. Circuitos cuánticos	16
2.12.6. Compuertas cuánticas	18
2.12.7. Conjuntos universales de compuertas cuánticas	22
2.12.8. El grupo de Clifford	23
2.12.9. Criterios de DiVincenzo	23
2.13. Fidelidad	23
2.14. Medidas proyectivas	23

3. Superconductividad	21
3.1. Cuantización macroscópica y superconductividad	21
3.2. La teoría BCS	23
3.3. Cuantización del flujo magnético y efecto Josephson	33
3.3.1. Efecto Josephson	37
3.4. Efecto Josephson	41
3.4.1. Efecto Josephson DC	42
3.4.2. Efecto Josephson AC	42
3.5. Componentes de la corriente en las uniones de Josephson	43
3.6. Qubits superconductores	43
3.7. Arquetipos de qubits superconductores	45
3.7.1. Qubit de carga	45
3.7.2. Qubit de flujo	45
3.7.3. Qubit de fase	45
3.8. Transmones	46
3.9. Hamiltonianos multiqubit de transmones	46
3.9.1. Acoplamiento capacitivo	47
3.9.2. Acoplamiento por el resonador	47
3.9.3. Acoplamiento de JJ	47
3.9.4. Acoplamiento afinable/calibrable	47
3.10. Puertas cuánticas en transmones	47
3.10.1. El operador de evolución temporal	47
3.10.2. Pulsos de microondas	48
3.10.3. Régimen rotacional del pulso	48
3.10.4. Efecto del pulso sobre el qubit	49
3.10.5. Régimen dispersivo	49
3.10.6. Rotaciones X-Y	50
3.10.7. Puerta de entrelazamiento	50
3.10.8. Puertas compuestas	50
4. El simulador	51
4.1. Parámetros de los sistemas simulados	52
5. Algoritmo de Grover	53
5.1. El algoritmo	58
5.2. Limitaciones y aplicaciones	59
5.3. Simulación	59

6. Algoritmo de Shor	61
6.1. Estimación de orden	61
6.2. Transformadas integrales	70
6.3. Transformada cuántica de Fourier	70
6.4. Estimación de fase	70
6.5. Estimación de orden	70
6.6. Algoritmo de Shor	70
7. Google PageRank	72
7.0.1. El algoritmo de remiendo (parcheo) general	75
7.0.2. Interpretación como una caminata aleatoria	76
7.0.3. Cuantizando las caminatas aleatorias	77
7.0.4. Caminata cuántica de Szegedy	78
7.0.5. PageRank cuántico	79
A. Cálculos de Hamiltonianos	80
A.1. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings	80
A.2. Hamiltoniano multiqubit	80
A.3. Pulsos de microondas	80
A.4. Régimen rotacional del pulso	81
A.5. Efecto del pulso sobre el qubit	83
A.6. Régimen dispersivo	83
A.7. Rotaciones X-Y	85
A.8. Compuerta de entrelazamiento	86
B. Cálculos de matrices de adyacencia	87
C. Circuitos cuánticos	88

Índice de figuras

5.1.	Circuito del algoritmo de Grover, k_{max} desconocido.	56
5.2.	Interpretación geométrica del operador difusión	58
5.3.	Circuito del algoritmo de Grover.	58
5.4.	59
5.5.	59
5.6.	59
5.7.	60
7.1.	Grafo correspondiente a la matriz de adyacencia (a) de la red	
	E (b) remendada de Google G con $\alpha = \frac{1}{2}$	76

Índice de cuadros

Resumen

Your abstract goes here... ...

Capítulo 1

Introducción

La computación cuántica es como chévere

Capítulo 2

Información cuántica

En esta sección introduciremos las bases matemáticas fundamentales para empezar a trabajar con la Teoría de Información Cuántica, trabajaremos sobre espacios vectoriales discretos, debido a que los sistemas cuánticos que manejaremos (computadora cuántica) son sistemas físicos discretos, no continuos. Se dará una breve introducción a la notación de Dirac y su aplicación en la mecánica cuántica. Una vez establecidas las bases matemáticas se describirán los Postulados de la Mecánica Cuántica: Descripción del estado de un sistema, descripción de cantidades físicas, medición de cantidades físicas, reducción del paquete de ondas, evolución temporal, postulado de simetrización y variables de espín. Finalmente se definirá el enredamiento cuántico, su importancia en el cómputo cuántico y los sistemas de dos niveles.

2.1. Función de onda

El estado de un sistema cuántico viene dado por el conocimiento de un campo escalar denominado función de onda ψ en todos los puntos del espacio para cualquier instante de tiempo, dicha función de onda es compleja ($\in \mathbb{C}$), de cuadrado integrable, cumple con el principio de superposición y es univaluada para las coordenadas espaciales de cada una de las partículas. Conocer la función de onda en mecánica cuántica es equivalente a conocer los vectores posición y momentum en mecánica clásica, en el sentido de que esta es la condición suficiente y necesaria para conocer el sistema en su totalidad. La evolución de la función de onda está dada por la ecuación de Schrödinger. La mecánica cuántica es una teoría probabilística, una partícula puede encontrarse en cualquier parte del universo en cualquier momento y la densidad de probabilidad de encontrarla en algún punto está dada por el

módulo al cuadrado de su función de onda en este punto. De hecho, debido a esto es que ψ debe ser de cuadrado integrable, pues la probabilidad de que la partícula se encuentre en cualquier lugar del universo debe ser uno, es decir:

$$\int_S |\psi(r, t)|^2 dr = 1 \quad (2.1)$$

Donde S es todo el universo. Esto es para funciones de onda que describen una partícula, en el siguiente capítulo se verán funciones de onda macroscópicas que describen sistemas de muchas partículas. En estos, el módulo cuadrado de ψ describe la densidad de partículas, la cual podría entenderse como la suma de la densidad de probabilidad de que cada una de las partículas se encuentren en ese punto, y $\int_S |\psi(r, t)|^2 dr = N_s$, donde N_s es el número total de partículas del sistema, el cual podría entenderse como la suma de que cada una de las partículas se encuentre en algún punto del sistema.

2.2. Espacio de Hilbert

Los espacios de Hilbert, creados por el matemático David Hilbert y normalizados por John von Neumann en el siglo XX, son el soporte matemático de la mecánica cuántica. Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial complejo \mathcal{H} de cuadrados integrables con un producto interno (f, g) donde la norma vectorial se define como $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Un conjunto de 2^n funciones $B = \{f_n\} \subset \mathcal{H}$ es llamado base ortonormal de \mathcal{H} si y sólo si:

$$(f_n, f_m) = \delta_n \quad \forall f_n, f_m \in B \quad (2.2)$$

Todo elemento $\psi \in \mathcal{H}$ puede ser escrito como:

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n \quad (2.3)$$

En la mecánica cuántica, todas las funciones de onda deben pertenecer un espacio de Hilbert normalizado. Es decir, pertenecen al espacio de Hilbert donde:

$$\|\psi\| = 1 \quad \forall \psi \in \mathcal{H} \quad (2.4)$$

Los espacios de Hilbert tienen las siguientes propiedades:

1. Producto escalar: $(\psi, \phi) = \int_S \psi^* \phi dr \in \mathbb{C}$
2. Simetría $(\psi, \phi) = (\phi, \psi)^*$
3. Linealidad: $(\psi, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha(\psi, \phi_1) + \beta(\psi, \phi_2)$
4. Antilinealidad: $(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2, \phi) = \alpha^*(\psi_1, \phi) + \beta^*(\psi_2, \phi)$
5. Ortogonalidad: $(f_i, f_j) = 0$
6. Autoproducto escalar: $(\psi, \psi) \neq 0$ ($(\psi, \psi) = 1$ si y sólo si ψ está normalizada)
7. Norma: $\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)}$
8. Desigualdad de Cauchy: $\|(\psi_1, \psi_2)\| \leq \sqrt{(\psi_1, \psi_1)}\sqrt{(\psi_2, \psi_2)}$
9. Operadores lineales: $\psi' = \hat{A}\psi$

2.3. Delta de Kronecker

La delta de Kronecker, $\delta_{n,m}$ es un símbolo que representa dos posibles valores, dependiendo de sus índices,

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (2.5)$$

Dado que el símbolo sólo es diferente de cero cuando sus índices son iguales, las sumas que incluyen la delta de Kronecker pueden ser simplificadas fácilmente

$$\sum_m \delta_{nm} B_m = 0B_1 + 0B_2 + \dots + 1B_n + \dots = B_n$$

2.4. Notación de Dirac

En 1930 en el libro Principios de la Mecánica Cuántica Paul Dirac introdujo una poderosa notación para poder describir estados cuánticos y funciones lineales, también conocida como notación Bra-Ket. Con la notación de Dirac podemos representar un estado base de n elementos con una

cadena binaria de longitud n , mientras que con la representación de vectores columna necesitaríamos 2^n componentes para definir el mismo vector.

La notación bra-ket es la notación estándar en la mecánica cuántica para describir estados cuánticos. En el caso de la computación cuántica, se utilizan los kets $|0\rangle$ y $|1\rangle$ para describir los qubits en la base computacional. Este par de estados sería el equivalente a los bits 0 y 1 en la computación clásica. En su representación matricial, los kets $|0\rangle$ y $|1\rangle$ se representan de la siguiente manera:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un bra es el operador adjunto de un ket. Los bras de la base computacional son $\langle 0|$ y $\langle 1|$. En la representación matricial estos son la transpuesta conjugada de los kets y se representan de la siguiente manera:

$$\langle 0| = (1 \quad 0)$$

$$\langle 1| = (0 \quad 1)$$

El producto interno de kets es el producto de un bra seguido de un ket $\langle\phi|\psi\rangle$, el resultado de este producto es un número complejo y cumple las siguientes propiedades:

$$\langle\phi|\psi\rangle = z \tag{2.6}$$

$$(\langle\phi|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|\phi\rangle = z^* \tag{2.7}$$

El producto externo es el producto de un ket seguido de un bra $|\psi\rangle\langle\phi|$. El resultado es un proyector que toma la componente en $|\psi\rangle$ de un estado cuántico y la convierte en $|\phi\rangle$. Ejemplos:

$$\begin{aligned}
|0\rangle\langle 0| &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
|0\rangle\langle 1| &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
|1\rangle\langle 0| &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
|1\rangle\langle 1| &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
|\psi\rangle\langle\psi| &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Este producto cumple con las siguientes propiedades:

$$|\phi\rangle\langle\psi| = \Pi \quad (2.8)$$

$$(|\phi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\phi| = \Pi^\dagger \quad (2.9)$$

El operador Π que consiste de un producto exterior se conoce como proyector. La aplicación de un proyector $|\psi\rangle\langle\phi|$ sobre un estado $|\varphi\rangle$ es equivalente a la multiplicación del escalar $c = \langle\phi|\varphi\rangle$ al estado ψ .

$$|\psi\rangle\langle\phi| |\varphi\rangle = \langle\phi|\varphi\rangle |\psi\rangle = c |\psi\rangle \quad (2.10)$$

Si además, el proyector es tal que $|\psi\rangle = \langle\phi|^\dagger$, es decir: $\Pi = |\psi\rangle\langle\psi|$, entonces se cumple también que:

$$\Pi^2 = |\psi\rangle\langle\psi| |\psi\rangle\langle\psi| = 1 |\psi\rangle\langle\psi| = \Pi \quad (2.11)$$

$$\Pi^\dagger = (|\psi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\psi| = \Pi \quad (2.12)$$

La notación de Dirac se relaciona con el formalismo de funciones de onda de la siguiente manera:

$$\psi = \langle x|\psi\rangle \quad (2.13)$$

Donde $\langle x|$ es el bra asociado a estar en la posición x .

2.5. Operadores unitarios

Estos son operadores tales que $UU^\dagger = \mathbb{1}$ con determinante igual a 1. En la mecánica cuántica todas las operaciones que se realicen sobre o que afecten a un estado y no involucren medidas ni decoherencia tienen un operador unitario asociado. Por ejemplo, la evolución temporal tiene un operador unitario U asociado. Los operadores unitarios son importantes porque ellos preservan las trazas, las normas y la información, de esta manera, cuando se aplica un operador unitario a un estado cuántico, se preserva la normalización de las probabilidades.

2.6. Operadores hermíticos

Estos son operadores tales que $U = U^\dagger$. Estos operadores cumplen con la propiedad de que todos sus autovalores son reales. En la mecánica cuántica, todas las variables físicas observables (o simplemente, observables), es decir, todas aquellas variables que se pueden medir en un laboratorio, son autovalores asociados a un operador hermítico.

2.7. Producto tensorial

Cuando un sistema compuesto por dos (o más) espacios de Hilbert, \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , el espacio del sistema completo se escribe en función del producto tensorial $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Aquí, \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B se conocen como las particiones de \mathcal{H} . De igual manera, para representar un estado de \mathcal{H} en un ket, en lugar de dos, se realiza el producto tensorial $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. También se pueden agregar subíndices a los kets para hacer énfasis en las particiones:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle & \in \mathcal{H} \\ |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B & \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ |\psi_1\rangle_1 \otimes |\psi_2\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle_n & \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n \end{aligned}$$

En la representación matricial el producto tensorial se realiza de la siguiente manera:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ b \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix}$$

El producto tensorial tiene las siguientes propiedades:

$$(U_1 \otimes U_2)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (U_1 |\psi_1\rangle) \otimes (U_2 |\psi_2\rangle) \quad (2.14)$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \neq |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle \quad (2.15)$$

$$\alpha(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (\alpha |\psi_1\rangle) \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes (\alpha |\psi_2\rangle) \quad (2.16)$$

$$(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle)^\dagger = \langle\psi_1| \otimes \langle\psi_2| \quad (2.17)$$

En el caso de los bras y los kets, el producto tensorial también se puede escribir de la forma $|\psi\phi\rangle$, en lugar de $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$.

$$|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi_A\phi_B\rangle = |\psi\phi\rangle$$

Ejemplos:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{1} \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.8. Postulados de la mecánica cuántica

La mecánica cuántica que fundamenta la teoría de información cuántica se describe formalmente con los siguientes postulados desarrollados por John von Neumann y Paul Dirac en el año 1932.

1. Primer postulado: En un instante fijo t_0 , el estado puro de un sistema se describe en términos de un vector normalizado $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} .
2. Segundo postulado: Para todo observable o cantidad física a , existe un operador hermítico \hat{A} asociado que actúa sobre el espacio \mathcal{H} .
3. Tercer postulado: Toda medida de un observable a tendrá como resultado un autovalor a_n del operador hermítico \hat{A} .
4. Cuarto postulado: La probabilidad (en caso de variable discreta. Si \hat{A} es de espectro continuo, entonces es la densidad de probabilidad) de obtener a_n como resultado de una medida es $P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} ||a_{n_i}\rangle\langle\psi||^2$, donde g_n es el grado de degeneración de a_n (la cantidad de autovectores asociados a este mismo autovalor) y $\langle a_{n_i}|$ representa a los bras asociados a este autovalor.
5. Quinto postulado: Inmediatamente después de una medida con resultado a_n , el sistema se transforma de la siguiente manera: $|\psi\rangle \rightarrow \frac{\sum_i |a_{n_i}\rangle\langle a_{n_i}||\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}}$. Esto se conoce como colapso de la función de onda.
6. Ecuación de Schrödinger: La evolución temporal del estado $|\psi\rangle$ viene dada por la ecuación de Schrödinger $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$, donde \hat{H} es el Hamiltoniano del sistema (el operador asociado a la energía).

2.9. Matriz densidad

Para describir un estado cuántico que no sólo involucre superposiciones cuánticas, sino también clásicas, es decir, un ensemble estadístico de estados cuánticos, podemos usar la representación de los operadores o matrices densidad ρ .

De aquí surge la clasificación de estados en puros y mixtos. Los estados puros son aquellos que no presentan superposición clásica (o mezcla) y su matriz densidad se puede escribir como:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.18)$$

Los estados mixtos son aquellos que son formados por un ensemble estadístico y su matriz densidad, escrita en función de los estados que pertenecen al ensemble o mezcla, es la siguiente:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (2.19)$$

Donde p_i es la probabilidad asociada a cada estado puro de la mezcla y $\sum_i p_i = 1$.

Las matrices densidad tienen las siguientes propiedades:

1. Traza igual a uno: $Tr(\rho) = 1$
2. Hermíticas: $\rho^\dagger = \rho$
3. Autovalores no negativos: $\rho |\lambda_i\rangle = \lambda_i |\lambda_i\rangle, \quad \lambda_i \geq 0$

Las matrices densidad asociadas a un estado puro o mixto se pueden identificar con la traza del cuadrado de la matriz densidad:

1. Estado puro: $Tr(\rho^2) = 1$
2. Estado mixto $Tr(\rho^2) < 1$

En una matriz densidad, los elementos de la diagonal son las poblaciones y los elementos fuera de ésta son las transiciones. Las poblaciones representan la probabilidades de que el sistema se encuentre en cada estado de la base tras una medida, mientras que las transiciones hacen referencia a la coherencia cuántica entre los elementos de la base que conforman el estado. Por ejemplo, el estado con superposición cuántica: $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ tiene la siguiente matriz densidad:

$$\rho_1 = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Mientras que el estado de mezcla clásica $\rho = (\rho_0 + \rho_1)/2$ tiene la siguiente matriz de probabilidad:

$$\rho_2 = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Como se puede ver, ambos estados tienen probabilidad $1/2$ de encontrarse en $|0\rangle$ o en $|1\rangle$ que son los estados de la base. Sin embargo, en el primer estado, esto se debe a que es un único estado cuántico con superposición coherente. Mientras que en el segundo estado esto se debe a que es un estado mezcla de dos estados cuánticos, decoherente. Este es un buen momento para notar la diferencia entre un estado mixto y estado coherente, pues un estado mezcla también puede ser coherente.

Tomemos los mismos estados ρ_1 y ρ_2 anteriores y construyamos el estado

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Este es un estado mezcla, pero aún así tiene elementos fuera de la diagonal, los cuales indican coherencia. Es decir, este estado tiene componente de superposición cuántica, además de la mezcla clásica.

2.10. Traza parcial

Para unir dos particiones en un sistema global se utiliza el producto tensorial tal que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. La operación inversa, para obtener \mathcal{H}_A o \mathcal{H}_B a partir de \mathcal{H} , es la traza parcial.

La traza parcial se define de la siguiente manera:

$$Tr_A(\rho_{AB}) = \sum_i (\langle i|_A \otimes \mathbb{1}_B) \rho (|i\rangle_A \otimes \mathbb{1}_B) \quad (2.23)$$

Esta traza elimina la porción de ρ_{AB} perteneciente a \mathcal{H}_A . Si pudiésemos escribir $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ (este no siempre es el caso, más información en la sección siguiente), entonces $Tr_A(\rho_{AB}) = \rho_B$.

En caso que se quiera tener ρ_A en lugar de ρ_B , entonces tenemos que tomar la traza parcial de la partición B, en lugar de la partición A, de la siguiente manera:

$$Tr_B(\rho_{AB}) = \sum_i (\mathbb{1}_A \otimes \langle i|_B) \rho (\mathbb{1}_A \otimes |i\rangle_B) \quad (2.24)$$

Para entender mejor la traza parcial, recordemos la definición de la traza normal:

$$Tr(\rho) = \sum_i \langle i| \rho |i\rangle \quad (2.25)$$

El par $\langle i|i \rangle$ lo que hace es seleccionar el i -ésimo elemento de la diagonal de la matriz ρ , entonces es la suma de todas las poblaciones en cada estado $|i\rangle$ de la base de \mathcal{H} y mapea este espacio de Hilbert a uno escalar (en el caso de las matrices densidad, las mapea al número 1, por la normalización de las probabilidades). La traza parcial hace algo similar, solo que sólo sobre las poblaciones de \mathcal{H}_A o de \mathcal{H}_B , dejando a la otra partición intacta. Es decir, el efecto de la traza y de las trazas parciales sobre una matriz densidad es, en resumen, el siguiente:

1. $Tr(\rho_{AB}) = 1$, donde $\rho \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$
2. $Tr_A(\rho_{AB}) = \rho_B$, donde $\rho \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ y $\rho_B \in \mathcal{H}_B$
3. $Tr_B(\rho_{AB}) = \rho_A$, donde $\rho \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ y $\rho_A \in \mathcal{H}_A$

2.10.1. Comparación con el producto tensorial

1. El producto tensorial se puede realizar con kets o con matrices densidad. Pero la traza parcial sólo se puede aplicar a matrices densidad.
2. El producto tensorial de dos estados puros es otro estado puro. Sin embargo, las trazas parciales de un estado puro no necesariamente son estados puros. En la próxima sección se explicará más al respecto.

2.11. Entrelazamiento

Consideremos el estado $|\psi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ e intentemos escribirlo en función de $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, tal que $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) \\ &= \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle \end{aligned}$$

De aquí se debe cumplir que:

$$\alpha\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha\delta = 0 \quad \beta\gamma = 0 \quad \beta\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pero esto implicaría, al mismo tiempo que:

1. Al menos una variable de cada uno de los siguientes pares de variables es cero: $\{\alpha, \delta\}$ y $\{\beta, \gamma\}$

2. Ninguna de las siguientes variables es cero: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Lo cual resulta contradictorio y se concluye que existen estados no separables. Veamos qué significa esto en términos de la distribución de probabilidades:

	$ \psi\rangle_A = 0\rangle$	$ \psi\rangle_A = 1\rangle$	P(A)
$ \psi\rangle_B = 0\rangle$	1/2	0	1/2
$ \psi\rangle_B = 1\rangle$	0	1/2	1/2
P(B)	1/2	1/2	

De esta tabla se puede ver que las particiones A y B no son independientes, pues las probabilidades condicionadas no son el producto de las probabilidades sin condicionar $P(A|B) \neq P(A)P(B)$. Es decir, existe una correlación.

A la correlación que causa la inseparabilidad de los sistemas se le conoce como entrelazamiento y es la correlación cuántica que va más allá de la interacción espacial.

Si se toma la traza parcial de un estado entrelazado puro, el resultado es un estado mixto, como consecuencia de la inseparabilidad de los estados entrelazados.

De aquí surge la siguiente clasificación de los estados cuánticos:

1. Estado producto: $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$
2. Estado separable: $\rho = \sum_{ij} p_{ij}(\rho_{A_i} \otimes \rho_{B_j})$
3. Estado entrelazado: $\rho \neq \sum_{ij} p_{ij}(\rho_{A_i} \otimes \rho_{B_j})$

2.12. Computación cuántica

This section's content...

2.12.1. Qubits

Un qubit es un sistema físico de dos niveles, es decir, es un objeto cuyo estado es un elemento del espacio de Hilbert de dimensión $\dim(\mathcal{H}) = 2$ y puede ser escrito de la siguiente manera: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ forma una base de \mathcal{H} y donde α y β son números complejos, tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, conocidos como amplitudes de probabilidad.

El qubit se puede pensar como el equivalente en IC del bit, el cual, por sus propiedad cuánticas, puede estar no sólo puede estar en el estado $|0\rangle$ y en el estado $|1\rangle$, sino también en superposiciones de estos dos.

2.12.2. Esfera de Bloch

El estado de un qubit también se puede escribir de la siguiente manera: $|\psi\rangle = e^{i\phi_0} \cos(\theta) |0\rangle + e^{i\phi_1} \sin(\theta) |1\rangle = e^{i\phi_0} (\cos(\theta) |0\rangle + e^{i(\phi_1 - \phi_0)} \sin(\theta) |1\rangle)$, donde θ , ϕ_0 y ϕ_1 son números reales. La fase global ϕ_0 es ignorable, pues no tiene ningún efecto sobre las probabilidades. Entonces, sin pérdida de generalidad, $|\psi\rangle = \cos(\theta) |0\rangle + \sin(\theta) e^{i\phi} |1\rangle$, donde $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. De esta manera, podemos representar los qubits en una esfera unitaria, conocida como esfera de Bloch. En esta esfera el ket $|0\rangle$ corresponde al vector $(0,0,1)$, mientras que el ket $|1\rangle$ corresponde al vector $(0,0,-1)$.

Todas las operaciones de un qubit se pueden ver como rotaciones en la esfera de Bloch. Por ejemplo, un bit-flip sería una rotación de π sobre el eje X, tal que $(0,0,1) \rightarrow (0,0,-1)$, es decir $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$.

2.12.3. Conmutador y anticonmutador

Estas son operaciones comunes en la mecánica cuántica y están asociadas a propiedades fundamentales del sistema, como simetrías cuando se realizan con observables.

Conmutador

$$[A, B] = AB - BA \quad (2.26)$$

Anticonmutador

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (2.27)$$

Si alguno de estos es igual a cero, se dice que A y B conmutan o anti-conmutan, según sea el caso. Si dos operadores conmutan, ellos realizarán la misma transformación compuesta sin importar el orden en que se apliquen. De esta manera, si dos observables conmutan, ellos pueden ser medidos simultáneamente, pues ambas medidas no se afectan entre sí. Además, si un Hamiltoniano conmuta con una transformación unitaria, entonces el sistema es simétrico ante esa transformación.

$$[A, B] = 0 \implies AB = BA$$

$$UHU^\dagger = UU^\dagger H = H$$

2.12.4. Matrices de Pauli

Estas matrices son de especial importancia en la mecánica cuántica y representan el spin de una partícula. Ellas son:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

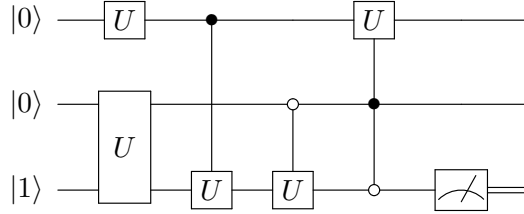
$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Las matrices de Pauli cumplen las siguientes propiedades:

1. Autovalores ± 1
2. Hermiticas
3. $[\sigma_i, \sigma_j] = i\sigma_k$, donde $(i, j) \in \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$
4. $[\sigma_j, \sigma_i] = -i\sigma_k$, donde $(i, j) \in \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$

2.12.5. Circuitos cuánticos

El equivalente a los circuitos digitales en la computación cuántica es los circuitos cuánticos. Ellos describen la secuencia de operaciones que se deben aplicar a los qubits para ejecutar cierto algoritmo. Es importante resaltar que estos circuitos no representan componentes tangibles, sino componentes de información. En este sentido, los circuitos cuánticos son más el análogo del lenguaje de máquina que de los circuitos digitales.



En esta figura se observan los siguientes elementos:

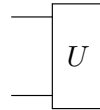
- a) Estado inicial: Este es el estado con el que se inicia el algoritmo.

$$|\psi\rangle$$

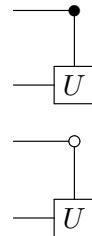
- b) Compuerta unitaria de un qubit: Representa una operación unitaria sobre el qubit en cuya línea se encuentra.



- c) Compuerta unitaria multiqubit: Representa una operación unitaria sobre los qubits en cuyas líneas se encuentra.



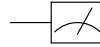
- d) Compuerta unitaria condicionada cuánticamente: El punto blanco o negro indica que el qubit de esa línea es el qubit de control. Si el punto es blanco, se aplica la compuerta U si el qubit de control es $|0\rangle$. Si el punto es negro, se aplica la compuerta U si el qubit de control es $|1\rangle$. Es caso de que el qubit de control se encuentre en estado de superposición, la compuerta se aplica y no se aplica, simultaneamente.



- e) Compuerta unitaria condicionada clásicamente: Equivalente a un if de cualquier lenguaje de programación clásica. Sólo se aplica la compuerta U si el bit de control es 1.



- f) Medida proyectiva: Representa una medida proyectiva del qubit en cuya línea se encuentra.



- g) Cable cuántico: No es un cable físico, sólo lleva ese nombre en analogía a los circuitos clásicos, donde las compuertas sí son componentes electrónicos en conexión. En el caso de los circuitos cuánticos, este elemento sólo representa que se mantiene la coherencia del qubit y que no se aplica ninguna compuerta sobre él en ese paso del algoritmo.



- h) Cable clásico: Representa el bit clásico que se obtiene tras la medida de un qubit.



2.12.6. Compuertas cuánticas

Las operaciones unitarias con las que se opera sobre los qubits reciben el nombre de compuertas cuánticas.

Las compuertas de un sólo qubit pueden ser vistas como rotaciones en la esfera de Bloch.

Compuerta identidad

Esta operación es equivalente a *no-operation* en una computadora clásica.

$$\text{---} \boxed{I} \text{---} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compuerta X

Este es el equivalente al NOT clásico, pues transforma los $|0\rangle$ en $|1\rangle$ y viceversa, ya que realiza una rotación de π sobre el eje X en la esfera de Bloch. Su forma matricial viene dada por la matriz de Pauli σ_x

$$\text{---}\boxed{X}\text{---} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Compuerta Z

Esta compuerta no tiene análogo clásico, pues lo que realiza es un cambio de fase. Esto equivale a una rotación de π sobre el eje Z en la esfera de Bloch. Su forma matricial viene dada por la matriz de Pauli σ_z

$$\text{---}\boxed{Z}\text{---} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Compuerta Y

Esta compuerta realiza una rotación de π sobre el eje y de la esfera de Bloch. Su forma matricial viene dada por la matriz de Pauli σ_y

$$\text{---}\boxed{Y}\text{---} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Compuerta de Hadamard

Esta compuerta transforma los estados de la base computacional $|0\rangle$ y $|1\rangle$ en estados de superposiciones uniformes ($|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ y $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$). También se puede interpretar como el mapa de la base Z a la base X. Ella consiste de una rotación de $\frac{\pi}{2}$ sobre el eje $(x+z)$ y se puede realizar con una rotación de $\pi/2$ sobre el eje Y seguida de la compuerta X.

$$\text{---}\boxed{H}\text{---} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Compuerta S

Esta compuerta es la raíz cuadrada de Z.

$$\text{---} \boxed{S} \text{---} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Compuerta T

Esta compuerta es la raíz cuadrada de S.

$$\text{---} \boxed{T} \text{---} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

Compuerta de cambio de fase

$$\text{---} \boxed{R_\phi} \text{---} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

Compuertas de rotación

$$R(\theta, \vec{r}) = e^{i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{r}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) + iz \sin(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2})(ix + y) \\ \sin(\frac{\theta}{2})(ix - y) & \cos(\frac{\theta}{2}) - iz \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

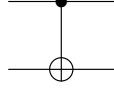
$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & i \sin(\frac{\theta}{2}) \\ i \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) = R_z(\frac{\pi}{2})R_y(\theta)R_z(\frac{-\pi}{2})$$

Compuerta CNOT



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Compuerta SWAP



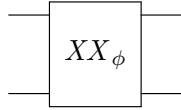
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compuerta $\sqrt{\text{SWAP}}$



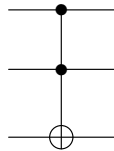
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compuerta de Ising



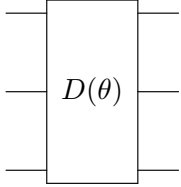
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -ie^{i\phi} \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ -ie^{-i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compuerta de Toffoli



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Compuerta de Deutsch



$$D(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & i \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$|a, b, c\rangle \rightarrow \begin{cases} i \cos(\theta) |a, b, c\rangle + \sin(\theta) |a, b, c \oplus 1\rangle & \text{si } a = b = 1 \\ |a, b, c\rangle & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2.12.7. Conjuntos universales de compuertas cuánticas

Un conjunto universal de compuertas cuánticas (CUCC) es un conjunto finito de compuertas cuánticas con el cuál se puede aproximar cualquier operación unitaria arbitrariamente bien.

Cualquier operador unitario puede ser escrito en función de compuertas de uno y dos qubits [1].

Un CUCC simple es $\{H, T, CNOT\}$.

Existe un CUCC de una sólo compuerta, la compuerta de Deutsch, $D(\theta)$.

La compuerta de Toffoli es un caso especial de la compuerta de Deutsch, $D(\frac{\pi}{2})$.

Otro CUCC consiste en la compuerta de Ising y la compuerta de cambio de fase, $\{XX_\phi, R_z(\theta)\}$. Este conjunto es nativo en algunas computadoras cuánticas de trampas de iones.

2.12.8. El grupo de Clifford

El grupo de Clifford es el grupo generado por las compuertas CZ, Hadamard y $U_z(\pi/2)$.

2.12.9. Criterios de DiVincenzo

Para construir un computador cuántico, se deben cumplir las siguientes condiciones experimentales:

- a) Un sistema físico escalable con qubits bien caracterizados.
- b) La habilidad de inicializar el estado de los qubits en un estado fiducial simple.
- c) Tiempos de coherencia relevantes largos.
- d) Un conjunto universal de compuertas cuánticas.
- e) La capacidad de medir qubits en específico.

2.13. Fidelidad

2.14. Medidas proyectivas

[2]

El esquema de medidas proyectivas, también llamadas medidas de von Neumann, se encuentra formado por proyectores ortogonales asociados a la medida espectral de un observable. Este esquema es la medida por excelencia utilizada por los físicos, ya que está directamente asociada a la medición de una propiedad del sistema o un conjunto compatible de ellas, y tales propiedades son caracterizadas a través de operadores autoadjuntos. Esta medida fue empleada por von Neumann para descomponer a los observables de un sistema cuántico en una combinación lineal de proyectores, donde cada proyector está asociado a los subespacios \mathcal{M} que son dejados invariantes por el operador en cuestión y, los coeficientes de la combinación lineal corresponden a los posibles valores que arroja el observable tras una medición. En este esquema, la probabilidad $P_\lambda(p)$ de obtener un valor $\lambda \in \Delta$ después de medir el observable en cuestión en el estado $\hat{\rho}$ viene dada por el valor medio del proyector $\hat{\Pi}_{\mathcal{M}_\lambda}$ asociado al autovalor λ , mientras que

el estado después de la medida viene dado por el autovector correspondiente a dicho autovalor. En este caso, las medidas proyectivas vienen dadas por

$$MP_s = \{\hat{\Pi}_m : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}_{\lambda_m} \subseteq \mathcal{H} \text{ tal que } \hat{\Pi}_m \hat{\Pi}_n = \delta_{m,n} \hat{\Pi}_m, \\ \sum_m \hat{\Pi}_m = \mathbb{1}, P_{\lambda_m}(\rho) = (\hat{\Pi}_m)_\rho \text{ y } \rho_{\lambda_m} \xrightarrow{\text{colapso}} \hat{\Pi}_m\} \quad (2.31)$$

Cabe destacar que al realizar nuevamente la medida el estado resultante no se modifica, siempre que la dimensión de \mathcal{M}_λ sea igual a uno, es decir, el proyector $\hat{\Pi}_{\mathcal{M}_\lambda}$ sea de rango uno. Este hecho se conoce con el nombre de repetibilidad, propiedad que no está presente en los otros esquemas de medidas.

Capítulo 3

Superconductividad

Gross y Marx, Walther-Meißner-Institut [\[3\]](#)

3.1. Cuantización macroscópica y superconductividad

Uno de los mayores principios de la mecánica cuántica es el hecho de que cantidades físicas como la energía o el momentum están, bajo ciertas condiciones, cuantizados. Es decir, que sólo tienen valores discretos. Sin embargo, por un largo tiempo se creyó que la cuantización sólo era relevante para sistemas microscópicos, como los núcleos, los átomos o las moléculas. De hecho, considerando el comportamiento de objetos macroscópicos que consistan de una gran cantidad de átomos, los efectos de la cuantización no pueden ser observados, aunque cada átomo individual obedezca las leyes de la mecánica cuántica. Esto se debe al hecho de que los movimientos térmicos enmascaran las regularidades cuánticas. Sin embargo, para ciertos fenómenos ha sido demostrado que es posible observar cuantización macroscópica. Así que podemos observar la cuantización de parámetros que caracterizan a sistemas macroscópicos muchos órdenes de magnitud más grandes que sistemas como los átomos. Esto se debe a altos niveles de correlaciones por efectos de coherencia.

Uno de los efectos más espectaculares de la física del estado sólido es el efecto superconductor. La superconductividad produce efectos cuánticos macroscópicos, siendo un campo perfecto para estudiar aspectos

básicos en la física cuántica.

En 1911 Kamerlingh Onnes descubre que el Hg conduce sin resistencia cuando se enfría a temperatura del He líquido (4.2 K). Kamerlingh Onnes fue el primer físico que licuó el He, poco tiempo después de esto, midiendo resistividades de distintos metales a estas bajas temperaturas, se encontró, en su laboratorio, que el Hg a 4.2K conduce sin resistencia. No con una resistencia despreciablemente pequeña, sino con resistencia cero.

Una primera característica de la superconductividad es la nula resistividad por debajo de una cierta temperatura, llamada temperatura crítica.

Podría pensarse que el caso del Hg es la excepción y la cuantización macroscópica es un fenómeno particular de este elemento, sin embargo resulta que el número de elementos y materiales superconductores es muy grande. La tabla periódica está llena de elementos que, bajo cierta temperatura crítica, se convierten en superconductores. En realidad la pregunta no sería por que un elemento es superconductor, sino por qué no lo es. Ahora bien, las temperaturas a las cuales ocurre el efecto son extraordinariamente bajas. La mayoría de los superconductores tienen temperaturas críticas por debajo de los 30K y requieren ser enfriados con He líquido, lo cual quiere decir que el efecto es muy débil. Cabe mencionar que existen superconductores de “alta temperatura” con temperaturas críticas en el orden de los 100K y que pueden ser enfriados con N líquido, hechos a partir de cerámicas con estructuras cristalinas. El record de la mayor temperatura crítica reportada de un superconductor es -70°C [4]. Sin embargo, en este capítulo no haremos ninguna referencia a ellos, ya que requieren el desarrollo de teorías más avanzadas.

Ahora bien, un superconductor es mucho más que un conductor perfecto. En 1913 se comprobó que si se aplica un campo magnético exterior al material en estado superconductor, se terminaba por destruir el estado de conducción perfecta. Este campo, cuyo valor depende de la temperatura, se llama campo crítico. Tenemos así el primer indicio de que la interacción superconductividad-magnetismo juega un papel primordial en los fenómenos superconductores.

La siguiente característica fundamental de un superconductor consiste en que cuando el campo magnético aplicado no es mayor que el campo crítico un superconductor actúa como un diamagnético perfecto ($\chi =$

−1). Por lo tanto, no existen líneas de campo magnético en el interior de un material superconductor, salvo en una pequeña zona próxima a la superficie. Este efecto se conoce con el nombre de efecto Meißner-Ochsenfeld. Es importante mencionar que este no es el caso en un conductor ideal, pues en ellos el campo magnético quedaría atrapado en el material sin que haya razón para que sea expulsado.

Así la segunda característica del efecto superconductor es el diamagnetismo perfecto (efecto Meißner).

Otra característica típica de la superconductividad es que el flujo del campo magnético que atraviesa un anillo superconductor está cuantizado. Es decir, el flujo que atraviesa un superconductor vale un número entero de veces una unidad de flujo elemental llamada el fluxoide Φ_0 y cuyo valor es $\Phi_0 = h/2e$, donde h es la constante de Planck y e la carga del electrón.

Por lo tanto, la tercera característica de la superconductividad es que el flujo magnético que atraviesa un superconductor está cuantizado.

Existe otro efecto cuántico macroscópico asociado a la superconductividad, conocido como el efecto Josephson, el cuál será el fundamento de los qubits superconductores. Este efecto es un caso del efecto túnel. Si se separan dos superconductores distintos, o bien el mismo superconductor por una barrera, por ejemplo un aislante o un estrechamiento en el superconductor (lo que se conoce como una unión débil), se tiene paso de corriente por la barrera sin que aparezca caída de potencial a ambos lados de la barrera.

La cuarta característica de la superconductividad es el efecto Josephson, esto es, la existencia de un efecto túnel superconductor.

3.2. La teoría BCS

En 1957 John Bardeen, Leon Cooper y J. Robert Schieffer, encontraron la llave para poder explicar, desde un punto de vista microscópico, la superconductividad. Realmente existen bastantes materiales que se desvían de la teoría estricta BCS, como pueden ser aleaciones, compuestos y algunos elementos (el mismo Hg, donde se descubrió la superconductividad, es un ejemplo de superconductor que no cumple los estrictos requisitos de la teoría BCS). Esto no significa que la teoría sea incorrecta, sino incompleta y para tratar ciertas situaciones y ciertos

compuestos o elementos hay que evitar algunas de las aproximaciones que se realizan en el desarrollo de esta teoría.

Empezaremos por repasar alguno de los hechos experimentales en que se basa la teoría y señalar algún otro que hasta el momento no ha sido mencionado.

Los superconductores se caracterizan por una función de onda macroscópica que da lugar a una corriente cuántica macroscópica y el efecto Meißner es justamente la expulsión del flujo magnético por esta corriente cuántica. No vamos a decir nada más acerca del efecto Meißner desde el punto de vista microscópico, dado lo complicado que es. Por el contrario, la conducción sin resistencia eléctrica se puede deducir de una manera mucho más sencilla con el formalismo de la teoría microscópica BCS.

Como se ha señalado unas líneas más arriba aparte de estos dos hechos fundamentales del efecto superconductor (conducción eléctrica sin resistencia y diamagnetismo perfecto) hay otros fenómenos experimentales propios de los superconductores que son cruciales y marcan la pauta a la teoría BCS, como es el efecto isotópico, efecto con el que empezaremos.

Se observa experimentalmente que la temperatura crítica T_c superconductora, por ejemplo en el Hg (primer superconductor y primer efecto isotópico encontrado), depende de la masa de los iones en el metal. Dado que existen varios isótopos del Hg se pudieron preparar varias muestras y se comprobó experimentalmente que si M es la masa del ion se tiene que $T_c \propto M^{-\alpha}$ donde el exponente α es del orden de 0.5 para metales que no son de transición y puede ser menor que este valor para metales de transición; incluso existen casos especiales como es el Os donde vale cero, no existiendo efecto isotópico para esta excepción. Este efecto experimental tiene una interpretación bien sencilla: los iones de la red juegan un papel fundamental en la superconductividad.

Existe otro grupo de fenómenos experimentales asociados al estado superconductor, que pasaremos a describir a continuación, que tienen todos ellos el mismo origen.

- a) El calor específico electrónico de un metal no superconductor a muy baja temperatura varía linealmente con la temperatura. En un metal existen dos contribuciones al calor específico, una de ellas es la normal de la red. Esta contribución varía como T^3 y

prácticamente desaparece a bajas temperaturas. Existe otra contribución al calor específico propia de los metales. A esta contribución, que es la predominante a bajas temperaturas, es a la que nos referimos y varía como T .

- b) Un metal en estado normal no es transparente a la radiación visible e infrarroja.

Por el contrario, en un metal en el estado superconductor se tiene:

- a) La variación del calor específico en función de la temperatura sigue una ley exponencial.
- b) En un metal en estado superconductor existe, en el rango del infrarrojo lejano, una frecuencia de corte para la cual el metal es transparente a esa radiación.

Estos dos efectos en superconductores son la clara señal de que en un superconductor existe una zanja prohibida de energía, que, como veremos en su momento, no es del mismo tipo que la que existe en semiconductores. Otra comprobación experimental de este hecho son las anomalías en el efecto túnel conocido como efecto túnel Giaever.

Resumiendo, existen dos hechos experimentales cruciales para entender la superconductividad, uno de ellos es que la masa de los iones juega un papel fundamental (efecto isotópico). El segundo es que en un superconductor existe una zanja prohibida de energía, esto es que mientras que en un metal en estado normal no se necesita una energía umbral para tener estados excitados por encima del estado fundamental, en un metal en estado superconductor se necesita comunicar una cierta energía por encima de un cierto valor, el valor de la zanja, para tener a los electrones en estado excitados de energía.

Por lo tanto, simplificando, cualquier teoría microscópica de la superconductividad tiene que dar cuenta de:

- a) Conductividad infinita, esto es ausencia de resistividad.
- b) Intervención de los iones de la red cristalina, más precisamente, de sus masas. Esto es de los fonones, es decir de las diferentes vibraciones de la red cristalina.
- c) La existencia de una zanja de energía en la banda de conducción.

A partir de ahora solamente vamos a cnetrarno en descubrir la posible interacción responsable de que un metal conduzca sin resistencia eléctrica por debajo de un acierta temperatura.

Lo primero de todo es recordar que los electrones de conducción, por su movimiento al azar en una red cristalina, donde los iones están vibrando (fonones) cambian su momento, k , esto es la interacción electrón-fonón es la que produce la resistividad. Que un metal conuzca sin resistencia eléctrica querrá decir que los electrones de conucción en su movimineto en el cristal no cambian su vector k .

Se trata por lo tanto de encontrar una interacción en los electrones de conducción que nos produzca este efecto. En un cristal contamos aparentemente con pocos recursos, por un lado enemos electrones de conducción e iones que forman la red cristalina y que están fibrando, de otra forma con electrones y fonones y con una interacción fundamental entre estas cargas eléctricas, que es la interacción coulombiana. Pues bien, son estos únicos ingreidnetes los necesarios para construir la teoría BCS, electrones, fonones e interacción coulombiana.

La interaccion coulombiana electrón de conducción-red cristalina (iones) se puede ver esquemáticmanete de la siguiente forma. Supongamos un electrón de conducción que se mueve por el cristal y fijémonos en un punto concreto de la red, formada por iones positivos (cationes). Al pasar el electrón por ese punto la red, por interacción coulombiana, se sentirá atraído por ese electrón y se deformará localmente. Ya uq elas frecuencias de vibración de la red (de los fonones) son del orden de $10^{-13}s^{-1}$ y las velocidades de los electrones de conducción son del orden de $10^{16}\text{\AA}/s$, ocurrirá que cuando la red vuelva a su posición de equilibrio, el electrón que la ha deformdo se encontrará muy lejos, del orden de $1-3\text{\AA}$, esto es del orden de varios cientos de parámetros de la red del ion que ha dejdo fuera de su posición de equilibiro. Esto es así porque las velocidades de los electrones de conducción en su movimeinto al azar, velocidades de Fermi, son muy grandes comparadas con los teimpos de relajación de l red, ligaods a las frecuencias de los fonones. El segundo paso en este mecanismo es muy sencillo: Mientras que la red está deformada por sus cercanías pasan uchos otros electrones de conducción, que se sienten más ¡¡cómodos¡¡, más atraídos por la red, que sin éfta no estuviera deformada. En resumen, se puede establecer una cierta conexión, una cierta interacción atraactiva entre los electrones de conducción vía los fonones (vibraciones de la red). Esto es, un electrón de conducción deforma la red y un segundo electrón de

conducción se siente atraído por esta deformación y en cierta manera ligado al primer electrón, electrón que puede estar físicamente muy alejado del primero. Esta idea de cómo una interacción de corto alcance electrón-fonón, puede dar lugar a una interacción de largo alcance electrón-electrón, se debe a Fröhlich (1950) y es la base de la teoría de la superconductividad.

En principio tenemos un posible mecanismo de interacción atractiva entre electrones de conducción vía fonones, que de momento no parece que teng mucho que ver con la superconductividad. Antes de seguir avanzando se tiene que recordar el papel que juega la interacción coulombiana repulsiva directa entre los electrones de conducción. Ahora bien esta interacción coulombiana repulsiva va como $1/r^2$, siendo r la distancia entre los electrones, es decir que disminuye rápidamente con la distancia. Luego se tendrá que la interacción neta entre los electrones de conducción será la suma de estas dos interacciones una repulsiva, que es la que podríamos decir normal y otra, vía fonón, que es atractiva. La interacción neta será atractiva solamente cuando estemos haciendo el balance entre electrones cuya interacción coulombiana repulsiva sea muy pequeña, es decir entre electrones muy alejados unos de otros. Este caso se puede dar, como hemos resaltado una línea más arriba, ya que se puede todavía tener un acoplamiento vía fonones entre electrones muy alejados, varios cientos de parámetros de red con interacción repulsiva coulombiana muy pequeña.

Una vez entendido lo que sucede lo que sigue es muy sencillo. El siguiente paso lo da Cooper, que demuestra que si se tienen dos electrones que interactúan con una interacción atractiva neta, es decir negativa, aunque ésta sea todo lo pequeña que se quiera, el mar de Fermi de los electrones de conducción es inestable y se produce un estado ligado con momentos k y espines opuestos, llamado par de Cooper. Bardeen, Cooper y Schieffer, trabajando juntos, escriben un hamiltoniano y el estado fundamental formado por la condensación de parejas de electrones, pares de Cooper, de tal manera que son capaces de desarrollar expresiones para la temperatura crítica superconductora, deducen la existencia de una zanja de energía en los superconductores, tal que para romper una pareja de electrones ligados vía la interacción con los fonones de la red, hay que suministrar una energía superior o igual a la de esa zanja, y asimismo deducen el efecto isotópico. Queda por último ver de dónde se obtiene con esta teoría conducción eléctrica sin resistencia, es decir sin que los electrones de conducción cambien de

momento (esto es k). Hay que señalar que el estado fundamental propuesto por la teoría BCS no está formado por un conjunto de parejas de Cooper cualesquiera, es algo muy complicado de tal manera que la interacción atractiva entre electrones, que produce una inestabilidad en el mar de Fermi hace que se condensen pares de Cooper, estando la función de onda superconductora formada por todos los pares de Cooper. Los pares no actúan independientemente unos de otros y para romper un par, esto es para convertir a los dos electrones en electrones normales, hay que suministrar energía (la correspondiente a la zanja) de tipo térmico, subiendo la temperatura, o bien de tipo magnético, aplicando un campo magnético, etc. Mientras que no se suministre una energía superior a la de la zanja los electrones superconductores están formando pares de Cooper, es decir se mueven con momento k bien determinado y no lo cambian. Esto es, conducen sin resistencia a no ser que se rompan los pares, que no olvidemos no son independientes. Ahora bien, estos electrones se están moviendo en un sólido, en una red cristalina, que estará a una cierta temperatura (por debajo, por supuesto, de la temperatura crítica) que no es suficiente para romper los pares. Por lo tanto, verán fonones e interaccionarán con ellos. ¿Cómo es posible que un electrón de una pareja que interacciona con un fonón (de energía menor de la necesaria para romper el par) no cambie su momento? Esto es debido a que los pares están interrelacionados y el resto se acomoda para hacer posible que en su conjunto de k no varíe. Aquí se puede utilizar una imagen debida a Schieffer. Supongamos que tenemos un conjunto de esquiadores, la mitad hombres y la mitad mujeres, que bajan una pendiente cogidos de la mano, hombre con mujer (aquí tenemos los pares de Cooper), pero estas parejas no bajan cada uno por su lado, sino que lo hacen al mismo tiempo y de alguna manera enlazados, de tal manera que si algún miembro de la pareja se encuentra en el camino un obstáculo (un fonón), siempre que no sea muy importante (de energía menor que la de la zanja) el conjunto de pares aguantarán el golpe y harán posible que se siga bajando sin perder velocidad, sin cambiar k , sin resistencia.

Resulta llamativo que la interacción electrón fonón sea el origen de la resistividad y que la interacción electrón-fonón-electrón que acabamos de bosquejar resulta en el origen de la superconductividad.

No resulta nada simple el desarrollar, utilizand el formalismo adecuado, las ideas expuestas en las líneas anteriores, pero por ejemplo la

función de onda superconductora y algunos otros detalles se pueden tratar explícitamente en el marco de este capítulo.

Sin duda existen aspectos que pueden parecer caprichosos, en la descripción que acabamos de hacer. Uno de ellos es sin duda que las parejas de Cooper estén formadas por electrones con momentos opuestos y con espines también opuestos, esto es muy fácil entenderlo.

El esquema de la teoría BCS, en sus primeros pasos, es bien simple. Se parte de considerar como el núcleo de la teoría la interacción electrón-fonón-electrón. Esto se puede representar de la siguiente forma: El primer electrón llega a un punto de la red y atrae a la red y hace que ésta «vibre», esto en nuestro lenguaje se dice que emite un fonón. El segundo electrón «ve» este fonón y lo absorbe acoplándose así con el primer electrón. Es decir, los electrones se acoplan intercambiando un fonón, esto se puede representar con uno de los típicos diagramas de Feynman, como se ve en la figura (FIGURA). Este tipo de esquemas se encuentran en otras interacciones en la Naturaleza. Por ejemplo, en el núcleo atómico tenemos en este mismo caso en el intercambio de mesones π virtuales que produce atracción entre nucleones.

Ahora, ¿Cuál será el tipo de electrones y fonones que están interactuando? En principio los electrones claramente son los de la banda de conducción, con energías del orden de unos pocos electrón voltio. Los fonones disponibles tienen unas energías que son como máximo del orden de la energía de Debye. Dado que la temperatura de Debye suele ser del orden de algo más de 100K, se tiene que las energías de los fonones disponibles son de unos pocos milielectrón voltio, esto es muy pequeña comparada con la de los electrones. Se tiene que la capa de los electrones de conducción en la esfera de Fermi que intercambian fonones, según este esquema es una franja muy estrecha.

Si llamamos $\hbar k$, $\hbar k'$ y $\hbar k_1$, $\hbar k'_1$, los momentos de los electrones antes y después de la interacción la ley de conservación del momento nos dice que

$$\hbar k_1 + \hbar k'_1 = \hbar k = \hbar k' = \hbar K$$

donde hemos llamado K al momento del centro de masas de los electrones. Conviene aprovechar este punto para indicar el convenio habitual en cuanto al signo de la energía de los electrones. Se toman como energías positivas los valores de la energía superiores a la energía de

Fermi y como energías negativas los valores inferiores a la energía, E_F , de Fermi. Es decir que ϵ_k será negativa si k está dentro de la superficie de Fermi y positiva en caso contrario. Está claro que los únicos electrones que pueden intervenir en todo este proceso son los que tienen energías próximas a la de Fermi dado que solamente estos electrones pueden tener estados libres accesibles sin violar el principio de exclusión de Pauli. Por lo tanto, estamos solamente considerando como candidatos a electrones superconductores unos pocos de todos los de la esfera de electrones de conducción de Fermi, aquellos que están en una estrecha franja de espesor $\hbar\omega_D$ donde ω_D es la frecuencia de Debye, por lo tanto del orden de unos pocos milielectrón voltio de la energía de Fermi. En esta situación se conserva el momento $\hbar K$ del centro de masas de los dos electrones. En la figura (FIGURA) se representa gráficamente todo lo que acabamos de decir, además se observa en esta figura que son, dentro de la estrecha franja, muy pocos los electrones que cumplen todas las condiciones y que por lo tanto pueden ser candidatos a formar pares de Cooper. Solamente los electrones cuyos momentos caen en la intersección de las dos capas esféricas son los posibles electrones superconductores. Es fácil ver que si disminuimos el valor del momento del centro de masas del sistema la intersección aumentará y se hará máxima si hacemos $K = 0$, donde toda la franja está formada por posibles pares de Cooper. Es decir los pares de Cooper se forman con electrones de momentos opuestos, como ya habíamos anticipado unas líneas más arriba, esto es $k, -k$. Además, este argumento que acabamos de desarrollar está apoyado en que la energía del sistema disminuye al ir formándose pares, lo que se puede demostrar, pero no de una manera fácil.

Otro aspecto de los señalados anteriormente, que podemos abordar ahora, es que los pares estaban formados por electrones no sólo con momentos opuestos, sino también con espines opuestos, esta última característica es ahora muy fácil de tratar, dado que los electrones son fermiones, es decir cumplen el principio de exclusión de Pauli y tienen funciones de onda antisimétricas. Se puede demostrar que la parte orbital (es decir olvidándose de la parte de espín) de la función de onda de los pares de Cooper, depende tan sólo del módulo del momento. Por lo tanto, frente al intercambio de la posición de los dos electrones del par se tienen una función simétrica. Luego la parte de espín debe ser antisimétrica, es decir los espines de la pareja son opuestos. Se tiene que un par de Cooper está formado por dos electrones tal que

$k_{\uparrow}, -k_{\downarrow}$.

En este punto surge uno de los peligros típicos de la teoría BCS, que pone de manifiesto la gran cantidad de sutilezas que encierra. Dado que un par de Cooper es una entidad cuyo espín es cero, como los bosones, es fácil caer en la tentación de tratar a los pares de Cooper como bosones. Además hemos indicado que un número creciente de pares de Cooper es energéticamente favorable. Ahora bien, el principio de Pauli sigue vigente: Así, el estado formado, por ejemplo, por $k_{\uparrow}, -k_{\downarrow}$ no puede estar ocupado por más de un par de electrones al mismo tiempo. En el gráfico (FIGURA) se representa la situación del estado fundamental para 3 pares de Cooper. Además, entrando en detalles más técnicos, los operadores con los que se construye el hamiltoniano de la teoría BCS, no siguen las reglas de conmutación de los operadores de bosones. Resulta de todas formas llamativo y conviene resaltar que la electrodinámica bosónica reproduce muy bien el comportamiento superconductor, por ejemplo la teoría clásica de la superconductividad de London (que no hemos tratado en este capítulo) se puede deducir de un gas cargado de bosones y de allí se puede extraer de una manera natural el efecto Meißner. Resumiendo, los pares de Cooper no son bosones.

Pasaremos a continuación a describir de la manera más sencilla posible la función de onda del estado fundamental del superconductor y algunas de las expresiones de la teoría BCS.

La función de onda del estado fundamental de N electrones, según la propone la teoría BCS, es el producto de funciones de onda de pares convenientemente antisimetrizadas, que se puede representar por $\phi(1, 2, \dots, N) \propto \phi(1, 2)\phi(3, 4)\dots\phi(N-1, N)$ si no escribimos explícitamente la parte de espín y sólo lo hacemos con la parte orbital tendríamos $\phi(1, 2, \dots, N) \propto \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_{N/2}} g_{k_1} \dots g_{k_{N/2}} e^{i(k_1 r_1 - r_2 k_2 + \dots + k_{N/2} r_{N-1} - k_{N/2} r_N)}$

donde cada término de esta función de onda describe una configuración donde los N electrones se agrupan en $N/2$ pares que son $(k_1, -k_1)\dots(k_{N/2}, -k_{N/2})$ la parte de espín es inmediata cada electrón de cada par tiene espines opuestos. Como vemos la función de onda es una función complicada que abarca todos los pares relacionados entre ellos. También se puede escribir de una manera más compacta como $\phi = \prod_k \phi_k$.

Antes de continuar merece la pena señalar algún otro aspecto de los pares de Cooper, estos pares están fuertemente relacionados entre sí, de

tal manera que se puede decir que del orden de un millón de pares tienen sus centros de masa dentro del espacio en el que se extiende un par dado, esto es los pares de electrones que forman un par de Cooper están muy alejados uno del otro, estando fuertemente correlacionados unos pares con otros. Se puede demostrar, que la disminución de la energía en la fase superconductora respecto al estado normal, debida a la interacción entre pares, depende de cómo se elijan esos pares. El conjunto de pares de Cooper no son independientes unos de otros, están muy correlacionados.

Otro punto que hay que aclarar en lo anterior es que estamos considerando el caso en que no tenemos corriente eléctrica neta, ya que los electrones apareados tienen momento total cero. Los estados portadores de corriente superconductora son aquellos en que los pares tienen momentos que serán $(k + \frac{q}{2}\uparrow, -k + \frac{q}{2}\downarrow)$ y los electrones tendrán una velocidad de arrastre neta que será $v_a = \frac{\hbar q}{2m}$.

Otro aspecto importante de la teoría BCS es que predice la existencia de una zanja de energía Δ , zanja que se puede medir experimentalmente y que está relacionada con la temperatura crítica por la ecuación BCS. Este parámetro Δ es el parámetro crucial de la teoría BCS de que acompaña la aparición del estado superconductor.

Hay que resaltar que esta zanja reúne unas características muy particulares, por lo pronto se diferencia claramente de las zanjass que juegan un papel importante en sólidos, especialmente en los semiconductores. En superconductores tenemos una zanja que está situada en la banda de conducción y que tiene una marcada dependencia con la temperatura. Asimismo, mientras que en un semiconductor se necesita excitar por encima de la zanja a los electrones para tener conducción eléctrica, en un superconductor se tiene la supercorriente sin necesidad de tener estados excitados, se tiene conducción eléctrica por debajo del nivel de Fermi, esto es por debajo de la zanja que existe en la banda de conducción.

Este parámetro Δ aparece en la sencilla e importante relación que se obtiene en la teoría BCS $2\Delta(0) = 3.52k_B T_c$ donde T_c es la temperatura crítica superconductora.

Para finalizar un resumen general de la teoría BCS.

- a) Interacción atractiva entre electrones.
- b) Mar de Fermi inestable.

- c) Posible formación de estados ligados de dos electrones.
- d) Condensación de parejas de electrones, pares de Cooper ($k_{uparrow}, -k_{downarrow}$).
- e) Aparición de una zanja de energía (para romper los pares hay que suministrar esa energía).
- f) Temperatura crítica superconductora BCS ligada al valor de la zanja de energía prohibida.

3.3. Cuantización del flujo magnético y efecto Josephson

La superconductividad es un campo de la física donde las leyes cuánticas que gobiernan el comportamiento de la naturaleza, se pueden observar a escala macroscópica. El origen de este efecto veremos que es único, pero existen dos aspectos experimentales en los que se manifiesta. Uno de ellos está ligado a efectos magnéticos y el otro a fenómenos en la densidad de corriente superconductora. El primero de ellos es la cuantización del flujo magnético y el segundo el efecto Josephson. Empezando por el primero de estos efectos cuánticos macroscópicos se tiene que el flujo magnético es siempre un número entero de veces el valor de un flujo elemental, conocido como fluxoide. Es decir, que el flujo que atraviesa un material superconductor es siempre o uno o 2 o 500 fluxoides, pero nunca puede ser una cantidad cualquiera, siempre un número entero de fluxoides.

En la teoría de Ginzburg-Landau de las transiciones de fase se introduce el concepto de parámetro de orden, que es una magnitud que aparece acompañando a la transición. Un ejemplo típico de parámetro de orden es la imanación de saturación, que es la magnitud que aparece cuando se tiene la transición de fase del estado paramagnético al ferromagnético. En el caso de una transición de fase del estado paramagnético al ferromagnético. El modelo macroscópico de la superconductividad está basado en la hipótesis de que existe una función de onda macroscópica $\psi(r, t)$ que describe el comportamiento del ensemble completo de electrones superconductores y que es el parámetro de orden de la transición superconductora, tal que su módulo al cuadrado nos da la densidad de electrones superconductores que aparecen al pasar el metal del estado normal al superconductor. En el estado normal el parámetro de orden (densidad de electrones superconductores) se desvanece, desaparece.

Por supuesto, esta hipótesis puede ser justificada por la teoría microscópica de la superconductividad (Teoría BCS). Esta teoría se basa en la idea de que en metales superconductores existe una fuerza atractiva entre los electrones cercanos al nivel de Fermi. A temperaturas bajo la temperatura crítica T_c , esta fuerza atractiva crea un nuevo estado cuántico diferente del mar de Fermi de un metal normal. Se puede decir que una pequeña porción de los electrones cercanos al nivel de Fermi están ligados a pares de Cooper (pares de electrones con spines opuestos que se comportan como una única entidad). En el caso más simple, el movimiento interno de los pares no tiene momentum angular orbital (estado s simétrico) y consecuentemente el principio de Pauli requiere que los dos spines estén en un estado de spin singlete (antisimétrico). Contrario a ligar dos átomos a una molécula, el estado orbital del par tiene un radio mucho mayor, típicamente entre 10nm y 1μm, de manera que pares individuales se sobrelapan fuertemente en espacio y por lo tanto, la ligadura resulta cooperativa. En particular, la energía de ligadura de cualquier par depende de cuantos otros pares se hayan condensado y, más aún, el movimiento del centro de masas de los pares está fuertemente correlacionado tal que cada par reside en el mismo estado con el mismo movimiento de centro de masas. Es este estado el que describimos con una función de onda macroscópica y que le da al sistema sus propiedades superfluídicas. Por ejemplo, el movimiento del centro de masas puede ser descrito por la función de onda $\psi(r, t) = \psi_0 e^{i\theta(r, t)} = \psi_0 e^{ik_s \hat{r} - i\omega t}$, donde cada par tiene el mismo momentum $\hbar k_s$ o velocidad de par $v_s = \hbar k/m$. Además, se cumple que $n_s = |\psi|^2$ donde n_s es la densidad de electrones superconductores.

Por otro lado, sabemos que la cantidad de movimiento de una partícula de masa m^* y carga e^* en presencia de un campo magnético representado por su potencial vectorial A , se escribe como $\mathbf{p} = m^* \mathbf{v} + \frac{e^*}{c} \mathbf{A}$.

Si tenemos una densidad de partículas, todas ellas teniendo el mismo momentum \mathbf{p} podemos escribir $n_s \mathbf{p} = n_s (m^* \mathbf{v} + \frac{e^*}{c} \mathbf{A})$.

Recordando el operador momentum en su expresión equivalente $p \rightarrow -\hbar \nabla$ tendremos $p = \hbar \nabla \phi = m^* v + \frac{e^*}{c} A$.

Recordando la expresión general de la densidad de corriente eléctrica en función de la densidad de portadores, de la carga y de la velocidad promedio se pueden escribir $\mathbf{J} = n_s e^* \mathbf{v}$ que en nuestro caso será $\hbar \nabla \phi = \frac{m^*}{n_s e^*} \mathbf{J} + \frac{e^*}{c} \mathbf{A}$.

Con esta expresión estamos preparados para demostrar la cuantización

del flujo magnético en superconductores, para ellos basta con recordar algo trivial, como es que el parámetro de orden superconductor sólo puede tener un único valor en cada punto, es decir, la densidad de electrones superconductores debe ser única en cada punto, esta simple consideración se materializa en que podemos escribir $\phi(2\pi) - \phi(0) = n2\pi$.

Recordando la definición de circulación y de gradiente y siendo C un camino cerrado, la expresión anterior la podemos escribir como $\oint_C \nabla \phi dl = n2\pi$. Si ahora suponemos que este camino C está en el interior de un superconductor, alejado de los bordes y rodeando a un hueco, como se representa en la figura (FIGURA) y suponemos que tenemos aplicado un campo magnético a este superconductor, se tiene $\oint_C (\frac{m^*}{\hbar m_s e^*} J + \frac{e^*}{\hbar c} A) dl = n2\pi$.

Dado que estamos en un camino interior al superconductor y allí no existe corriente (las únicas corrientes que existen en una situación como la que estamos describiendo, están apantallando el campo magnético y están situadas cerca de los bordes tanto de la cavidad como de la superficie del material superconductor), tendremos $\oint_C A dl = \frac{n\hbar c}{e^*}$.

Recordando el teorema de Stokes se tiene $\oint_C A dl = \iint_S B ds = \Phi$ que en nuestro caso será $\Phi = n\Phi_0$ expresión que nos indica que el flujo magnético que encierra la cavidad es un número entero de un flujo elemental conocido con el nombre de fluxoide y cuyo valor es $\Phi_0 = \frac{\hbar c}{2e} = 2,0710^{-7} gausscm^2$ siendo e^* la carga del portador de corriente, el par de Cooper $e^* = 2e$.

Este efecto fue encontrado experimentalmente de forma simultánea en 1961 por Deaver-Fairbanks y por Döhl-Nabauer.

El efecto túnel es un efecto típico del carácter cuántico de los electrones, desde el punto de vista de la física clásica es completamente imposible que se produzca el efecto que vamos a discutir.

Los electrones se pueden representar por funciones de onda, de tal manera que existe una cierta probabilidad de que un electrón pueda ir de un metal a otro atravesando una barrera aislante estrecha, que puede ser vacío o un óxido. La función de onda del electrón decae de una manera exponencial fuera de la superficie del metal, la amplitud de la onda no es totalmetne nula fuera del metal, es como si el electrón se desparramase fuera de la superficie. Si situamos un metal junto al

otro, separados tan sólo por una barrera, como puede ser, por ejemplo, el óxido de la superficie, existe una probabilidad pequeña, pero no nula de que el electrón atraviese ese túnel y aparezca al otro lado, en el otro metal.

Antes de seguir hay que hacer notar que la energía necesaria para hacer pasar un electrón que está en el nivel de Fermi de un metal al vacío (función de trabajo del metal) es mayor que la energía necesaria para transferir ese electrón a un aislante.

Por razones de simplicidad vamos a hacer toda la discusión siguiente, salvo cuando se diga expresamente lo contrario, para temperatura de 0K. La figura (FIGURA) nos indica la situación entre dos partes del mismo metal separadas por un aislante. Todos los estados por debajo de la energía de Fermi están ocupados, mientras que todos los estados por encima de E_F están vacíos.

Para que se pueda tener efecto túnel hacen falta dos condiciones. La primera es que, como es lógico, los electrones solamente pueden ir de un estado ocupado a un estado desocupado y la segunda es que se tiene que conservar la energía, es decir que las transiciones, en la gráfica, tienen que ser horizontales. Por lo tanto en la situación de la gráfica (FIGURA) no tendremos efecto túnel. No se pueden tener transiciones horizontales al no existir estados vacíos. Todos los estados en el mismo nivel de energía, a ambos lados de la barrera, están ocupados.

Si aplicamos una diferencia de potencial constante a la barrera lo que estamos haciendo es aumentando la energía de los electrones de un lado de la barrera respecto al otro y entonces tenemos la posibilidad de que se tenga corriente por efecto túnel, gráfica (FIGURA).

La intensidad de esta corriente túnel depende de varios parámetros. Por ejemplo, a mayor diferencia de potencial aplicada mayor corriente. Está claro que cuantos más estados tengamos en el nivel de Fermi mayor será la probabilidad de tener corriente túnel, lo cual puede indicar que quizá con experimentos de efecto túnel podemos obtener información sobre este importante parámetro y en general sobre la superficie de Fermi, pero como es de esperar la corriente túnel también depende de la anchura, altura y forma de la barrera y estos parámetros son muy difíciles de determinar, lo cual hace que en metales normales del efecto túnel se obtenga una información mucho menos rica de lo que se podía esperar. Ocurre todo lo contrario con el efecto túnel cuando uno de los dos metales está en estado superconductor, como pasaremos a

ver a continuación.

La existencia de una zanja de energía en el estado superconductor (FIGURA) hace que el efecto túnel en una estructura formada por superconductor-aislante-metal en estado normal, tenga características especiales (Giaver, 1960). Es claro que necesitamos previamente disponer de electrones normales por encima de la zanja superconductora, esto es hay que romper pares de Cooper, como primera medida, es decir diferencias de potencial aplicadas menores que la zanja no producirán efecto túnel. Esto es, se tiene que diferencias de potencial aplicadas a la barrera no producen corriente túnel, salvo que vengán un valor umbral, que es precisamente el ancho de la zanja. De entrada ya tenemos una muy importante propiedad del efecto túnel superconductor, que nos permite medir la zanja superconductora y medir la variación de esta zanja con la temperatura.

3.3.1. Efecto Josephson

Otra importante propiedad del efecto túnel es lo que pasa si estudiamos el efecto túnel de dos metales en estado superconductor. Es fácil ver que entonces, a 0K en un material cualquiera, tenemos que aplicar una diferencia de potencial para obtener corriente túnel que será la suma de las dos zanjass de energía. Sin embargo, este no es el caso cuando separamos dos superconductores por una barrera aislante. Como veremos a continuación aparece un nuevo efecto túnel exclusivo de los superconductores. Este es el conocido como efecto Josephson, postulado teóricamente por Josephson (1962) y comprobado experimentalmente por P.W. Anderson y Rowell (1963) y por Shapiro (1963), casi simultáneamente. Este es un efecto túnel de pares de Cooper entre superconductores, mientras que el efecto túnel tratado en las líneas anteriores es túnel de electrones normales entre superconductores o entre un metal normal y un superconductor. En concreto la sugerencia de Josephson es que puede existir efecto túnel entre dos superconductores que se encuentren separados por una barrera aislante (en principio más delgada que las tratadas en el efecto túnel normal, también conocido como túnel Giaver), donde la corriente túnel sea exclusivamente de pares de Cooper sin que se tenga una diferencia de potencial a través de la barrera.

Se va a seguir la deducción de Feynman por su sencillez y claridad. Supongamos que tenemos un superconductor separado en dos partes

por un aislante lo suficientemente estrecho como para que la función de onda superconductora a un lado de la barrera se sobrelape con la del otro lado. Sean ψ_1 y ψ_2 las funciones de onda superconductoras a los dos lados de la barrera (1) y (2).

El tunelamiento de pares del lado (2) al lado (1) aumenta la amplitud ψ_1 de la función de onda de los pares en el lado (1), es decir, aumenta la cantidad de pares de Cooper en el lado (1). Supongamos que el ritmo de crecimiento de ψ_1 es proporcional a ψ_2 , amplitud de la función de onda de los pares en el lado (2). Podemos escribir el ritmo de cambio de ψ_1 de la forma $A\psi_2$ donde A es una característica de la barrera y nos da información de la probabilidad de transferencia de pares del lado (2) al lado (1).

Podemos escribir la ecuación de Schrödinger para el lado superconductor (1) teniendo en cuenta esto último, como

$$\frac{-\hbar}{i} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = E_1 \psi_1 + A \psi_2 \quad (3.1)$$

donde E_1 es la energía del estado más bajo de energía del superconductor del lado (1).

Análogamente, podemos escribir para el superconductor del lado (2)

$$\frac{-\hbar}{i} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = E_2 \psi_2 + A \psi_1 \quad (3.2)$$

Escribiendo explícitamente la función de onda superconductora, $\psi_i = \sqrt{n_{s_i}} e^{i\varphi_i}$, donde, como ya vimos, n_{s_i} es la densidad de electrones superconductores en el lado (i).

Por lo tanto las ecuaciones anteriores pueden ser escritas como

$$\frac{-\hbar}{i} \frac{1}{2\sqrt{n_{s_1}}} \frac{\partial n_{s_1}}{\partial t} + \hbar \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \sqrt{n_{s_1}} = E_1 \sqrt{n_{s_1}} + A \sqrt{n_{s_2}} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (3.3)$$

$$\frac{-\hbar}{i} \frac{1}{2\sqrt{n_{s_2}}} \frac{\partial n_{s_2}}{\partial t} + \hbar \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \sqrt{n_{s_2}} = E_2 \sqrt{n_{s_2}} + A \sqrt{n_{s_1}} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (3.4)$$

Si ahora igualamos las partes reales y las partes imaginarias de estas ecuaciones tenemos

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{j_0}{2n_{s_1}} \cos(\delta) + E_1/\hbar \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{j_0}{2n_{s_2}} \cos(\delta) + E_2/\hbar \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial n_{s_1}}{\partial t} = -j_0 \sin(\delta) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial n_{s_2}}{\partial t} = j_0 \sin(\delta) \quad (3.8)$$

Donde $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ y $j_0 = \frac{2A}{\hbar}(n_{s_1}n_{s_2})^{1/2}$. Como hemos hecho todo el cálculo para un mismo superconductor podemos asumir $n_{s_1} = n_{s_2}$. Entonces nos quedaría:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = (E_2 - E_1)/\hbar \quad (3.9)$$

$$j = \frac{\partial n_{s_2}}{\partial t} = -\frac{\partial n_{s_1}}{\partial t} = j_0 \sin(\delta) \quad (3.10)$$

De aquí salen directamente las relaciones de Josephson para corriente y voltaje:

$$V_J = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \delta}{\partial t} \quad (3.11)$$

$$I_J = I_0 \sin(\delta) \quad (3.12)$$

Donde el voltaje V_J es la diferencia de potencial entre los dos extremos de la unión de Josephson e I_J es la supercorriente que fluye a través de ésta.

Existe una clara diferencia entre este efecto túnel y el considerado al principio. En este caso de efecto Josephson tenemos túnel de pares de Cooper, mientras que en el caso anterior el túnel era de electrones individuales. En el efecto Josephson son bastante estrechas del orden o menores que la longitud coherente (tamaño de los pares de Cooper), en realidad el aislante actúa como un mal superconductor, las funciones de onda de ambos lados se pueden solapar, existiendo una diferencia de fase a ambos lados de la barrera y como resultado de todo esto se

establece una corriente continua a través de la barrera. En realidad, se puede demostrar que el mínimo de energía se alcanza cuando las fases se igualan y por lo tanto no se tiene corriente a través de la barrera, pero basta con aplicar una corriente de una fuente externa, siempre menor que I_0 , para que las fases dejen de ser iguales y si esta desigualdad no varía con el tiempo, se tiene a través de la barrera una corriente constante sin que se tenga caída de potencial. No hace falta colocar un óxido, un aislante, para que actúe de barrera se puede utilizar un estrechamiento en el superconductor, producido mediante una técnica conocida como fotolitografía, o cualquier otra técnica que nos produzca que una parte del superconductor esté unida a otra mediante un estrangulamiento lo suficientemente estrecho como para ser una unión débil. También se pueden obtener este tipo de uniones débiles con contactos entre superconductores de tipo puntual, o bien separando dos superconductores por una capa delgada de un metal en estado normal. Como acabamos de mencionar el tamaño de los pares de Cooper es una indicación del orden de magnitud de esta unión débil.

Los órdenes de magnitud de los parámetros que intervienen en el efecto Josephson son, para una unión de 1mm^2 de área $R = 1\Omega$, $I_0 = 1\text{mA}$ y $\Delta = 1\text{meV}$. Normalmente las densidades de corriente a través de las uniones son del orden de un millón de veces menores que las densidades de corriente crítica superconductora en un superconductor. Es decir, en general, en un superconductor se tiene que pasar de la densidad de corriente crítica para hacer desaparecer la superconductividad, pero si el superconductor tiene en algún punto una unión débil densidades de corriente un millón de veces menores hacen que se tenga caída de potencial en el paso de corriente por la unión.

Si hacemos pasar una corriente mayor que I_0 aparece una diferencia de potencial y teniendo en cuenta que al mismo tiempo que este efecto túnel (Josephson) de pares podemos tener el efecto túnel normal (Giovanni) de electrones, el resultado se puede ver en la gráfica (FIGURA) donde se representa la curva característica I, V . Como sea la conexión en la realidad entre estos dos túneles depende de las características de la unión y del circuito exterior.

Finalmente hay que considerar lo que ocurre si aplicamos a la unión Josephson una diferencia de potencial externa constante, V , o lo que es lo mismo, tenemos una intensidad pasando por la barrera superior a I_0 . El cálculo es análogo al anterior, muy sencillo y nos conduce a que la intensidad a través de la barrera tiene la expresión

$$I = I_0 \sin((\varphi_2 - \varphi_1) + \omega t) = I_0 \sin(\delta + \omega t) \text{ donde } \omega = \frac{2ev}{\hbar}.$$

En realidad el punto de partida de esta deducción es la dependencia con el tiempo de la fase, una diferencia de potencial aplicada a la unión lo que hace es variar en el tiempo la fase y el ritmo de variación de la fase viene dado por la ecuación $\frac{d\delta}{dt} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{qV}{\hbar} = \frac{2eV}{\hbar}$.

Es decir, una diferencia de potencial constante aplicada a una barrera Josephson produce una corriente alterna de pares (una supercorriente), por ejemplo una diferencia de potencial del orden de $1\mu V$ da lugar a una corriente que oscila con una frecuencia de 484MHz. Además de esta corriente de pares tenemos la corriente debida al efecto túnel normal de los electrones individuales. Ahora podemos volver a la gráfica (FIGURA) donde tendremos que hasta que se alcanza el valor I_0 tenemos paso de corriente por la unión sin caída de potencial. una vez que $I > I_0$, entonces aparece un voltaje y nos situamos en un punto de la gráfica del efecto túnel de electrones normales (Giamber), tenemos una diferencia de potencial aplicada, luego existe túnel normal y además, esto no está representado en la gráfica, tenemos una supercorriente (corriente de pares de Cooper) que está oscilando.

Antes de terminar esta sección, unas palabras acerca de este sorprendente descubrimiento. Como dijimos al principio el hecho de que una diferencia de fase de una entidad puramente cuántica pueda determinar un efecto macroscópico tan claro como es la aparición de corriente eléctrica, no fue descubierto experimentalmente. Fue calculado de una manera completa, incluso indicando la forma de hacer la comprobación experimental, por Brian D. Josephson a la edad de 22 años, cuando estaba empezando a trabajar bajo la dirección de Brian Pippard en su tesis doctoral en el Cavendish Laboratory de la Universidad de Cambridge. Pocos años después Josephson pasó a engrosar la larga lista de premios Nobel en física por descubrimientos relacionados con la superconductividad. Su descubrimiento ha tenido numerosas aplicaciones en campos tan distintos como pueden ser desde astronomía a medicina.

3.4. Efecto Josephson

EL efecto Josephson, predicho por Brian David Josephson en 1962, consiste en que una corriente fluya indefinidamente a través de una unión de Josephson aun cuando no hay una diferencia de potencial

aplicada. Una unión de Josephson consta de dos superconductores acoplados por una conexión débil, la cual puede ser formada por un aislante (superconductor-isolator-superconductor, SIS), un metal normal (superconductor-normal-superconductor, SNS) o cualquier otro material u obstáculo que acople débilmente a los dos superconductores. En principio, no debería haber conducción entre ambas placas. Sin embargo, ese no es el caso. Por el efecto túnel, una supercorriente (corriente sin disipación) de pares de Cooper (pares de electrones con espines opuestos) pueden pasar de una placa a la otra sin disipación.

Las uniones Josephson son capaces de generar voltajes oscilatorios de alta frecuencia, por lo regular de 10^{10} a 10^{11} Hz y detectan potenciales eléctricos de un cuatrillón de voltios.

Para comenzar el análisis de una unión de Josephson, se considera un sistema simple y simétrico, tal que el material sea el mismo en ambos extremos de la unión y no exista campo magnético. Se tienen dos placas superconductoras A y B, separadas por un aislante, cuyas funciones de onda son: $\psi_A = \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1}$, $\psi_B = \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2}$

$$V_J = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\delta}{dt} \quad (3.13)$$

$$I_J = I_0 \sin(\delta) \quad (3.14)$$

Donde $\delta = \phi_2 - \phi_1$ es la diferencia de fase entre las dos placas superconductoras.

3.4.1. Efecto Josephson DC

Si las placas se encuentran sin alimentación, entonces correrá una supercorriente constante a través de ellas.

3.4.2. Efecto Josephson AC

Si las placas se alimentan con un voltaje DC externo, entonces la diferencia de fase entre ellas variará linealmente con el tiempo y habrá una corriente AC a través de ellas.

3.5. Componentes de la corriente en las uniones de Josephson

Esta corriente tiene tres componentes:

- a) I_d , la corriente de desplazamiento: Como la corriente en un capacitor. La unión de Josephson forma un capacitor de placas paralelas superconductoras con un material aislante o un metal normal entre ellas, entonces podemos hablar de una corriente de desplazamiento I_d . La capacitancia C de este dispositivo está definida de la misma manera que en el estado normal: $C = \epsilon_r \frac{A}{4\pi d}$, donde ϵ_r es la constante dieléctrica relativa de la capa que separa a los dos superconductores, d la separación de los superconductores y A el área de los mismos.
- b) I_n , la corriente ordinaria: Por los electrones individuales. Cuando la temperatura $T \neq 0$, siempre habrá movimiento térmico de cargas cuya energía es del orden de $k_B T$, donde k_B es la constante de Boltzmann. Cuando T es menor, pero cercano a la temperatura crítica T_c , la energía de acoplamiento de los pares de Cooper $E_g = 2\Delta$ es mucho menor a $k_B T$, lo cual resulta en la disminución de los pares de Cooper y el aumento de la concentración de electrones normales. Si el voltaje a través de la unión es mayor al asociado a la energía de la brecha $V_g = |\Delta_1 + \Delta_2|/e$, los pares de Cooper de una de las uniones se rompen y uno de los electrones de cada uno de los pares disueltos pasa al otro lado, es decir, se produce un tunelamiento de electrones normales. Si la concentración de electrones individuales aumenta, el comportamiento de la unión tenderá a uno de tipo óhmico, es decir, la unión tenderá a comportarse como una resistencia.
- c) I_s , la supercorriente: Por los pares de Cooper. Se puede

3.6. Qubits superconductores

Los qubits superconductores se basan en circuitos osciladores no lineales, hechos a partir de JJs [5].

El Hamiltoniano de un oscilador armónico LC está dado por

$$\hat{H} = E_C \hat{n}^2 + E_L \frac{\hat{\phi}^2}{2}, \quad (3.15)$$

donde \hat{n} es la cantidad de pares de Cooper inducidos en el capacitor (En otras parabras, la carga inducida en el capacitor, medida en unidades de $2e$), y $\hat{\phi}$ es la diferencia de fase sobre el inductor. La carga \hat{n} y la fase $\hat{\phi}$ no conmutan, $[\hat{\phi}, \hat{n}] = i$, lo que significa que sus valores esperados no se pueden medir simultaneamente. $E_C = \frac{(2e)^2}{2C}$, $E_L = \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L}$ y la distancia entre niveles de energía del oscilador armónico $\hbar\omega = \frac{\hbar}{\sqrt{LC}} = \sqrt{2E_L E_C}$.

Para poder servir como qubit, el oscilador debe ser anarmónico, de manera que se pueda operar sobre un par específico de niveles de energía. Al agregar una JJ, el Hamiltoniano del circuito LCJ se convierte en:

$$\hat{H} = E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_{J0} \cos(\hat{\phi}) + E_L \frac{(\hat{\phi} - \phi_e)^2}{2},$$

donde n_g es la carga inducida por voltaje en el capacitor C (isla qubit) y ϕ_e es la fase inducida por flujo sobre la JJ. La energía de Josephson E_{J0} está dada por $E_{J0} = \frac{\hbar}{2e} I_0$ en términos de la corriente crítica I_0 de la unión. Usualmente, la JJ es del tipo Superconductor-Aislante-Superconductor con corriente crítica fija.

Con el fin de introducir la inductancia no lineal de Josephson, empezamos por

$$I_J = I_0 \sin(\phi)$$

Combinado con la ley de Lenz:

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}, \quad \Phi_0 = \frac{h}{2e}$$

Se encuentra que:

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{I_0 \cos(\phi)} \frac{dI_J}{dt}$$

Definiendo $L_J = V(\frac{dI_J}{dt})^{-1}$, se obtiene finalmente la inductancia de Josephson L_{J0} :

$$L_J = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{I_0 \cos(\phi)} = L_{J0} \frac{1}{\cos(\phi)}$$

Esto define la inductancia de Josephson de la JJ aislada y nos permite expresar la energía de Josephson como $E_{J0} = \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L_{J0}}$

$$[E_C(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} - n_g)^2 + U(\phi)]\psi = E\psi$$

$$U(\phi) = -E_{J0} \cos(\phi) + E_L \frac{(\phi - \phi_e)^2}{2}$$

- a) $E_L = 0$ ($L \sim \infty$) :
- b) $E_L \approx E_{J0}$:

3.7. Arquetipos de qubits superconductores

3.7.1. Qubit de carga

Si E_L tiende a cero, la carga almacenada en la isla superconductora entre el capacitor y la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma de coseno.

3.7.2. Qubit de flujo

Si E_L es comparable con E_{J0} , el flujo a través del lazo formado por el inductor y la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma cuártica.

3.7.3. Qubit de fase

Si se polariza la unión Josephson con una fuente de corriente, la fase en ambos extremos de la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma cúbica.

3.8. Transmiones

Los transmiones son un tipo de qubit de carga. Tratando el transmión como un sistema de dos niveles acoplado linealmente a un oscilador monomodo, su Hamiltoniano toma la siguiente forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} + \hat{H}_r = -\frac{1}{2}\epsilon\sigma_z + g\sigma_x(a + a^\dagger) + \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

donde ϵ es la energía de excitación del qubit, g es el acoplamiento qubit-oscilador y ω es la frecuencia del oscilador.

Introduciendo los operadores escalera del qubit, $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$, el término de interacción \hat{H}_{qr} se puede dividir en dos términos, el de Jaynes-Cummings (JC) y el anti-Jaynes-Cummings (AJC):

$$\hat{H}_{qr} = \hat{H}_{qr}^{JC} + \hat{H}_{qr}^{AJC} = g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) + g(\sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a)$$

Este Hamiltoniano describe el modelo cuántico canónico de Rabi (canonical quantum Rabi model - QRM). Las ecuaciones ()() son completamente generales y aplicables a cualquier sistema qubit-oscilador. Mantener sólo el término JC corresponde a realizar la aproximación de onda rotativa (rotating wave approximation - RWA).

3.9. Hamiltonianos multiqubit de transmiones

Omitiendo el término del oscilador, el Hamiltoniano toma la siguiente forma general:

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} + \hat{H}_{qq} = -\frac{1}{2} \sum_i \epsilon_i \sigma_{zi} + \sum_i g_i \sigma_{xi} (a + a^\dagger) + \frac{1}{2} \sum_{i,j;\nu} \lambda_{\nu,ij} \sigma_{\nu i} \sigma_{\nu j}$$

Por simplicidad, se considera que el término \hat{H}_{qr} se refiere sólo a la lectura y las operaciones de bus, dejando la interacción indirecta qubit-qubit via el resonador ser incluidas en \hat{H}_{qq} via la constante de acoplamiento $\lambda_{\nu,ij}$.

3.9.1. Acoplamiento capacitivo

$$\begin{aligned}\hat{H}_{qq} &= \lambda_{12} \sigma_{x1} \sigma_{x2} \\ \lambda_{12} &= \frac{1}{2} \sqrt{E_{10,1} E_{10,2}} \frac{\sqrt{E_{EC1} E_{EC2}}}{E_{Cc}} = \frac{1}{2} \sqrt{E_{10,1} E_{10,2}} \frac{Cc}{\sqrt{C_1 C_2}} \approx \frac{1}{2} E_{10} \frac{C_c}{C} \\ \hat{H}_{qq} &= \lambda_{12} (\sigma_{+1} \sigma_{-2} + \sigma_{-1} \sigma_{+2})\end{aligned}$$

3.9.2. Acoplamiento por el resonador

$$\begin{aligned}\hat{H}_{qq} &= \lambda_{12} \sigma_{x1} \sigma_{x2} \\ \lambda_{12} &= \frac{1}{2} g_1 g_2 \left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} \right) \equiv g_1 g_2 \frac{1}{\Delta} \\ \Delta_i &= \epsilon_i - \hbar \omega\end{aligned}$$

3.9.3. Acoplamiento de JJ

$$\begin{aligned}\hat{H}_{qq} &= \lambda_{12} \sigma_{y1} \sigma_{y2} \\ \lambda_{12} &\approx \frac{1}{2} E_{10} \frac{L_c}{L_J} \frac{\cos(\delta_c)}{2L_c \cos(\delta_c) + L_{Jc}}\end{aligned}$$

3.9.4. Acoplamiento afinable/calibrable

3.10. Compuertas cuánticas en transmones

3.10.1. El operador de evolución temporal

La evolución temporal de un sistema complejo (many-body) puede ser descrita por la ecuación de Schrödinger para el vector de estado $|\psi(t)\rangle$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle$$

en términos del operador evolución $\hat{U}(t, t_0)$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

determinado a partir del Hamiltoniano complejo (many-body) dependiente del tiempo del sistema:

$$\hat{H} = \hat{H}_{syst} + \hat{H}_{ctrl}(t)$$

describiendo el sistema intrínseco y las operaciones de control aplicadas. Las compuertas son el resultado de aplicar pulsos de control específicos a partes selectas de un circuito físico. Esto afecta varios términos del Hamiltoniano, haciéndolos dependientes del tiempo.

Para el transmón, el Hamiltoniano del sistema bajo la RWA toma la forma:

$$\hat{H}_{syst} = -\frac{1}{2} \sum_{\nu i} \epsilon_i \sigma_{zi} + \sum_i g_i (\sigma_{+i} a + \sigma_{-i} a^\dagger) + \hbar \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_{i,j;\nu} \lambda_{\nu,ij} (\sigma_{+i} \sigma_{-j} + \sigma_{-i} \sigma_{+j})$$

y el término de control se puede escribir como:

$$\hat{H}_{ctrl} = \sum_{i;\nu} f_{\nu i}(t) \sigma_{\nu i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j;\nu} h_{\nu,ij}(t) \sigma_{\nu i} \sigma_{\nu j} + k(t) a^\dagger a$$

3.10.2. Pulsos de microondas

$$\hat{H}_d = \sum_k (a + a^\dagger) (\xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t} + \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t})$$

RWA:

$$\hat{H}_d = \sum_k a \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t}$$

3.10.3. Régimen rotacional del pulso

Trabajando con un sólo modo a la vez, se aplica la siguiente transformación $U(t) = \exp[-i\omega_d t (a^\dagger a + \sum_i \sigma_{zi})]$ para entrar en el régimen rotacional del pulso de control.

$$\begin{aligned}\hat{H} &= U^\dagger(\hat{H}_{syst} + \hat{H}_d)U - iU^\dagger\dot{U} \\ \hat{H} &= \Delta_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + (a \xi^* e^{i\omega_d t} + a^\dagger \xi e^{-i\omega_d t}) \\ \Delta_c &= \omega_c - \omega_d \quad \Delta_{qi} = \omega_{qi} - \omega_d\end{aligned}$$

3.10.4. Efecto del pulso sobre el qubit

Luego se aplica el operador de desplazamiento $D(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a]$ sobre el campo a con $\dot{\alpha} = -i\Delta_c \alpha - i\xi e^{-i\omega_d t}$ para eliminar el efecto directo del pulso sobre la cavidad.

$$\begin{aligned}\hat{H} &= D^\dagger(\alpha) \hat{H}_{old} D(\alpha) - iD^\dagger(\alpha) \dot{D}(\alpha) \\ \hat{H} &= \Delta_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) \\ &\quad + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) - \Delta_c \alpha \alpha^*\end{aligned}$$

El término $-\Delta_c \alpha \alpha^*$ se desprecia, ya que sólo representa una fase global en la evolución del sistema.

3.10.5. Régimen dispersivo

Finalmente, aplicamos la transformación $U = \exp[\sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})]$, donde $\Delta_i = \omega_{qi} - \omega_c$ y realizamos la aproximación de segundo grado sobre los términos $\frac{g_i}{\Delta_i} \ll 1$.

$$\begin{aligned}\hat{H} &= U^\dagger \hat{H}_{old} U \\ \hat{H} &\approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \tilde{\Delta}_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i (\Omega_i \sigma_{+i} + \Omega_i^* \sigma_{-i}) \\ &\quad + \sum_{i \neq j} \frac{g_i g_j}{2\Delta_i} (\sigma_{-i} \sigma_{+j} + \sigma_{+i} \sigma_{-j}) \\ \tilde{\Delta}_c &= (\omega_c + \sum_i \chi_i \sigma_{zi}) - \omega_d \quad \tilde{\Delta}_{qi} = (\omega_{qi} + \chi_i) - \omega_d \quad \chi_i = \frac{g_i^2}{\Delta_i}\end{aligned}$$

3.10.6. Rotaciones X-Y

Tomando $\Omega(t) = \Omega^x(t) \cos(\omega_d t) + \Omega^y \sin(\omega_d t)$, donde ω_d es igual a la frecuencia de resonancia de uno de los qubits logramos rotaciones sobre los ejes X e Y. Las amplitudes de estas rotaciones vienen dadas por $\int_0^{t_0} \Omega^x(t) dt$ y $\int_0^{t_0} \Omega^y(t) dt$, respectivamente, donde t_0 es la duración del pulso.

$$\hat{H} \approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_q \sigma_z + \frac{1}{2} (\Omega^x(t) \sigma_x + \Omega^y(t) \sigma_y)$$

3.10.7. Compuerta de entrelazamiento

Ejemplo con sólo dos qubits

$$\hat{H} \approx \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_{q_1} \sigma_{z_1} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_{q_2} \sigma_{z_2} + \frac{g_1 g_2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{2 \Delta_1 \Delta_2} (\sigma_{-1} \sigma_{+2} + \sigma_{+1} \sigma_{-2})$$

Variando la frecuencia de resonancia de los qubit, se puede variar el acoplamiento entre estos.

3.10.8. Compuertas compuestas

Con los transmones se pueden realizar rotaciones X-Y y la compuerta iSWAP. Sin embargo, los algoritmos no se escriben en función de sólo estas compuertas, también se necesitan H, CNOT, entre otras. Entonces, debemos construir estas otras compuertas en función de Rx, Ry e iSWAP. Esto es posible, ya que con secuencias de rotaciones en X e Y se puede realizar cualquier compuerta de un sólo qubit, ya que estas consisten de rotaciones en la esfera de Bloch y con rotaciones sobre dos ejes ortogonales se pueden lograr rotaciones sobre cualquier eje en la esfera. Luego, con un set universal de compuertas de un sólo qubit y una compuerta de entrelazamiento, se tiene un conjunto universal de compuertas cuánticas.

Las otras compuertas que necesitaremos, se construyen de la siguiente manera:

Capítulo 4

El simulador

El simulador se construyó utilizando la librería Qutip 4.2 de Python 3.6. Esta es una librería que incluye varias herramientas para realizar simulaciones de sistemas mecánico cuánticos, entre ellas, un solucionador de ecuaciones maestras. El funcionamiento básico del simulador desarrollado es el siguiente:

- a) Leer estado inicial
- b) Construir Hamiltoniano del sistema
- c) Introducir Hamiltoniano y estado inicial en el solucionador de ecuaciones maestras.
- d) Retornar solución

De esta manera se simulan las compuertas naturales de los transmones. Luego, a partir de estas se construyen todas las demás compuertas que se necesitaran para construir un set de instrucciones cuántico con el cual poder ejecutar los algoritmos de Grover, Shor y PageRank.

Se simularon dos sistemas distintos, uno de cuatro qubits y otro de ocho qubits. El diseño original era el de cuatro qubits, con él se realizaron las simulaciones del algoritmo de Grover y del PageRank. Sin embargo, el algoritmo de Shor requiere de al menos ocho qubits para factorizar el número compuesto impar más pequeño: el número 15. Posteriormente también se realizó una generalización del simulador para poder trabajar con sistemas de n qubits.

El tipo de acoplamiento entre los qubits elegido es el acoplamiento de tipo bus. De esta manera trabajamos con un único resonador, el

cual se puede tracear. Esto reduce significativamente la dimensión del sistema a simular y nos permite tener más qubits. Además, de esta forma, la interacción es más directa y basta con la compuerta iSWAP para construir cualquier otra compuerta multiqubits, el cual no sería el caso con qubits acoplados a distintos resonadores, pues se necesitarían compuertas de interacción entre resonadores.

4.1. Parámetros de los sistemas simulados

Se han elegido parámetros típicos de los sistemas de qubits[6].

- a) Frecuencias de resonancia:
 - 1) Resonador: 10GHz
 - 2) Qubit 0: 5GHz
 - 3) Qubit 1: 6GHz
 - 4) Qubit 2: 7GHz
 - 5) Qubit 3: 8GHz
 - 6) *Qubit 4: 11GHz
 - 7) *Qubit 5: 12GHz
 - 8) *Qubit 6: 13GHz
 - 9) *Qubit 7: 14GHz
- b) Constante de acoplamiento: Todas iguales a $0,12\pi$ (Unidades?)
- c) Tasas de decaimiento: Todas iguales a $5e-6$ (Unidades?)
- d) Frecuencia de resonancia para iSWAP: 9GHz

*Sólo aplica para el caso del sistema de 8 qubits

Capítulo 5

Algoritmo de Grover

El algoritmo de Grover es un AC que realiza una búsqueda en una secuencia no ordenada de datos con $N = 2^n$ entradas. Clásicamente esta búsqueda tendría un orden de complejidad de $O(N)$, pues, como los datos no están ordenados, la cantidad promedio de evaluaciones que se deben realizar crece linealmente con la cantidad de entradas. En el caso del algoritmo de Grover, la complejidad de la búsqueda es de $O(\sqrt{N})$, pues se requieren aproximadamente $\frac{\pi\sqrt{N}}{4}$ iteraciones para hallar la entrada deseada. En cuanto a la cantidad de qubits requeridos, se necesitan $O(\log_2 N)$ qubits, pues se debe realizar un estado superpuesto donde cada componente de la superposición represente una entrada de la secuencia de datos.

Supongamos que la secuencia de datos ordenada tiene la siguiente función asociada:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \omega \\ 0 & \text{si } x \neq \omega \end{cases} \quad (5.1)$$

Donde ω es el dato que se desea encontrar. Esta función devuelve 1 si se evalúa la entrada que almacena el dato deseado y 0 en cualquier otro caso.

El algoritmo de Grover se basa en la disponibilidad de un operador cuántico, llamado *oráculo*, tal que se introduzca un fase global de π si $f(x_0) = 1$ y deje el estado del sistema intacto si $f(x_0) = 0$. Es decir, el oráculo realiza una reflexión alrededor de $|\omega\rangle$.

$$U_\omega |x\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle = \begin{cases} |x\rangle & \text{si } x \neq \omega \\ -|x\rangle & \text{si } x = \omega \end{cases} \quad (5.2)$$

$$U_\omega = \mathbb{1} - 2 |\omega\rangle\langle\omega| \quad (5.3)$$

Además de éste, se necesita otro operador de reflexión, U_s , el cual realiza una reflexión alrededor del estado de superposición uniforme $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle$. Así, por el hecho de la geometría plana elemental de que el producto de dos reflexiones es una rotación, se logra aproximar el estado del sistema al estado asociado a la entrada deseada.

$$U_s = 2 |s\rangle\langle s| - \mathbb{1} \quad (5.4)$$

Veamos lo que sucede al aplicar esta secuencia de rotaciones sobre el estado $|s\rangle$:

$$\begin{aligned} U_\omega |s\rangle &= (\mathbb{1} - 2 |\omega\rangle\langle\omega|) |s\rangle \\ &= |s\rangle - 2 |\omega\rangle\langle\omega| |s\rangle \\ &= |s\rangle - \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle\langle\omega| \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle \\ &= |s\rangle - \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_s(|s\rangle - \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle) &= (2 |s\rangle\langle s| - \mathbb{1})(|s\rangle - \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle) \\ &= 2(|s\rangle - \frac{4}{N} |s\rangle) - (|s\rangle - \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle) \\ &= |s\rangle - \frac{4}{N} |s\rangle + \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle \\ &= \frac{N-4}{N} |s\rangle + \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle \end{aligned}$$

Ahora veamos lo que sucede al aplicar esta secuencia de rotaciones sobre el estado $|\omega\rangle$:

$$\begin{aligned}
U_\omega |\omega\rangle &= (\mathbb{1} - 2|\omega\rangle\langle\omega|) |\omega\rangle \\
&= |\omega\rangle - 2|\omega\rangle \\
&= -|\omega\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_s(-|\omega\rangle) &= (2|s\rangle\langle s| - \mathbb{1})(-|\omega\rangle) \\
&= -\frac{2}{\sqrt{N}}|s\rangle + |\omega\rangle
\end{aligned}$$

Se observa que al aplicar $U_s U_\omega$ sobre $|s\rangle$, se amplifica la componente de $|\omega\rangle$ en la superposición de $\frac{1}{\sqrt{N}}$ a $\frac{3N-4}{N\sqrt{N}}$. Es decir que la probabilidad de medir el valor deseado crece de $\frac{1}{N}$ a $9(1 - \frac{4}{3N})\frac{1}{N}$.

$$\begin{aligned}
\langle\omega| U_s U_\omega |s\rangle &= \frac{N-4}{N} \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{2}{\sqrt{N}} \\
&= \frac{3N-4}{N\sqrt{N}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\langle\omega| U_s U_\omega |s\rangle|^2 &= \frac{(3N-4)^2}{N^3} \\
&= 9(1 - \frac{4}{3N}) \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

Por otro lado, se observa que al aplicar $U_s U_\omega$ sobre $|\omega\rangle$, aparece una componente de $|s\rangle$, así que en ese caso, la probabilidad de medir el valor deseado disminuye. Por lo que debe existir una cantidad de iteraciones k_{max} tras las cuales se alcanza la probabilidad máxima de medir $|\omega\rangle$, partiendo de $|s\rangle$ y a partir de donde esta probabilidad empieza a disminuir.

De esta manera, el algoritmo de Grover consiste en aplicar k_{max} veces $U_s U_\omega$, partiendo del estado $|s\rangle$, es decir rotar este estado hasta que se aproxime lo más posible a $|\omega\rangle$.

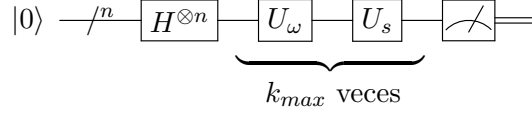


Figura 5.1: Circuito del algoritmo de Grover, k_{max} desconocido.

Para hallar k_{max} , veamos el ángulo que se rota con cada aplicación de $U_s U_{\omega}$. Primero definamos el estado $|s'\rangle$ como la superposición uniforme de todos los estados de la base computacional excepto $|\omega\rangle$, es decir:

$$|s'\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{x \neq \omega} |x\rangle \quad (5.5)$$

$$= \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}} |s\rangle - \frac{1}{\sqrt{N-1}} |\omega\rangle \quad (5.6)$$

Los estados $|s'\rangle$ y $|\omega\rangle$ son ortonormales, $\langle s' | \omega \rangle = 0$, por lo que generan un espacio bidimensional de Hilbert. Este espacio contiene a $|s\rangle$, pues:

$$|s\rangle = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} |s'\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |\omega\rangle \quad (5.7)$$

Además, se ha visto que $U_s U_{\omega} |s\rangle$ y $U_s U_{\omega} |\omega\rangle$ se escriben en función de sólo $|s\rangle$ y $|\omega\rangle$. Así que podemos inducir que $(U_s U_{\omega})^k |s\rangle$ pertenece al espacio generado por $\{|s'\rangle, |\omega\rangle\}$, donde $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Esto indica que este espacio contiene al plano en el que se realizan las rotaciones $U_s U_{\omega}$.

Ahora que conocemos una base del plano de rotación, podemos hallar el ángulo que se rota con cada aplicación de $U_s U_{\omega}$.

$$\begin{aligned} U_{\omega} |\psi\rangle &= (\mathbb{1} - 2|\omega\rangle\langle\omega|)(\alpha |s'\rangle + \beta |\omega\rangle) \\ &= \alpha |s'\rangle - \beta |\omega\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_s(\alpha |s'\rangle - \beta |\omega\rangle) &= (2|s\rangle\langle s| - \mathbf{1})(\alpha |s'\rangle - \beta |\omega\rangle) \\
&= \alpha \left(2 \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} |s\rangle - |s'\rangle \right) - \beta \left(\frac{2}{\sqrt{N}} |s\rangle - |\omega\rangle \right) \\
&= \alpha \left(\left(2 \frac{N-1}{N} - 1 \right) |s'\rangle + 2 \frac{\sqrt{N-1}}{N} |\omega\rangle \right) \\
&\quad - \beta \left(\frac{2\sqrt{N-1}}{N} |s'\rangle + \left(\frac{2}{N} - 1 \right) |\omega\rangle \right) \\
&= \left(\alpha \frac{N-2}{N} - \beta \frac{2\sqrt{N-1}}{N} \right) |s'\rangle \\
&\quad + \left(\alpha 2 \frac{\sqrt{N-1}}{N} + \beta \frac{N-2}{N} \right) |\omega\rangle
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que $\cos(\Delta\theta) = \frac{N-2}{N}$ y que $\sin(\Delta\theta) = 2 \frac{\sqrt{N-1}}{N}$. De hecho, se comprueba que:

$$\cos^2(\Delta\theta) + \sin^2(\Delta\theta) = \frac{(N-2)^2}{N^2} + 4 \frac{N-1}{N^2} = \frac{N^2 - 4N + 4}{N^2} + 4 \frac{N-1}{N^2} = 1$$

Ahora escribimos las componentes de $|s\rangle$ en función del ángulo inicial θ_0 :

$$\cos(\theta_0) = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} \quad (5.8)$$

$$\sin(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (5.9)$$

Finalmente, lo que se quiere es que:

$$\theta_0 + k\Delta\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (5.10)$$

Es decir, que:

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}\right) + k \cos^{-1}\left(\frac{N-2}{N}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (5.11)$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) + k \sin^{-1}\left(2\frac{\sqrt{N-1}}{N}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (5.12)$$

Si tomamos $N \gg 1$ en (4.12), tenemos que:

$$2k \frac{1}{\sqrt{N}} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (5.13)$$

$$k_{max} \approx \frac{\pi \sqrt{N}}{4} \quad (5.14)$$

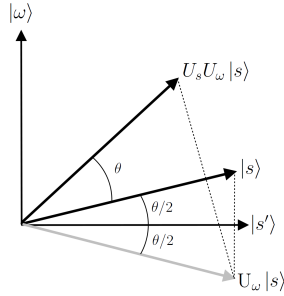


Figura 5.2: Interpretación geométrica del operador difusión

5.1. El algoritmo

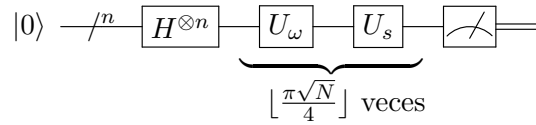


Figura 5.3: Circuito del algoritmo de Grover.

- Preparar el estado fiducial.
- Aplicar la transformada de Walsh-Hadamard.
- Realizar la iteración de Grover $\lfloor \frac{\pi \sqrt{N}}{4} \rfloor$ veces.

- 1) Aplicar U_ω .
- 2) Aplicar U_s .
- d) Realizar la medida Ω .

5.2. Limitaciones y aplicaciones

5.3. Simulación

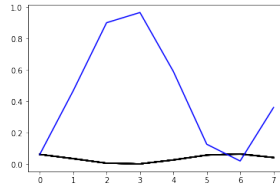


Figura 5.4:

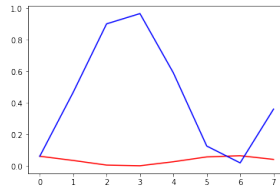


Figura 5.5:

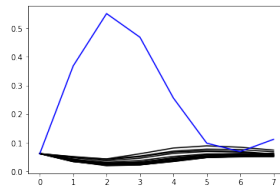


Figura 5.6:

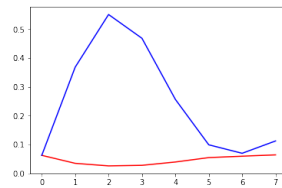


Figura 5.7:

Capítulo 6

Algoritmo de Shor

El algoritmo de Shor es un AC de factorización de enteros. Dado un entero $N = p \times q$, donde p y q son primos, el algoritmo de Shor encuentra p y q en $O((\log(N))^3)$ pasos. El algoritmo clásico más eficiente para factorizar enteros es la cibra general del cuerpo de números y funciona con una complejidad heurística de $O(e^{(\sqrt[3]{\frac{64}{9}} + o(1))(\ln(N))^{\frac{1}{3}}(\ln(\ln(N)))^{\frac{2}{3}}})$. Por su capacidad de factorizar números semiprimos, el algoritmo de Shor es capaz de violar el cifrado RSA y el protocolo Diffie-Hellman de intercambio de llaves, sobre los cuáles se basa virtualmente toda la criptografía actual.

6.1. Estimación de orden

Dado $m \in \mathbb{N}$, se dice que $a, b \in \mathbb{Z}$ son congruentes módulo m si y sólo si $(a - b)/m \in \mathbb{Z}$.

- a) Se denota por $a \equiv b \pmod{m}$, siendo m el módulo de la congruencia.
- b) Si m divide a $(a - b)$, ambos a y b tienen el mismo resto al ser divididos por el módulo m .

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 23 &\equiv 2 \pmod{7} \rightarrow 23 = 3 \times 7 + 2 \\ -6 &\equiv 1 \pmod{7} \rightarrow -6 = -1 \times 7 + 1 \end{aligned}$$

Además si $m \in \mathbb{N}$ y $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\begin{aligned} a + c &\equiv b + d \pmod{m} \\ ac &\equiv bd \pmod{m} \end{aligned}$$

Por definición el orden $x \pmod{N}$ es el menor entero r distinto de cero que satisface $x^r = 1 \pmod{N}$

Ejemplo:

Sea $x = 4, N = 13 \rightarrow 4^p = 13q + R \quad 4^p \pmod{13} = R$

p	4^p	$4^p = 13q + R$	R
0	1	$4^0 = 13 \times 0 + 1$	1
1	4	$4^1 = 13 \times 0 + 4$	4
2	16	$4^2 = 13 \times 1 + 3$	3
3	64	$4^3 = 13 \times 4 + 12$	12
4	256	$4^4 = 13 \times 19 + 9$	9
5	1024	$4^5 = 13 \times 78 + 10$	10
6	4096	$4^6 = 13 \times 315 + 1$	1
7	16384	$4^7 = 13 \times 1260 + 4$	4
8	65536	$4^8 = 13 \times 5041 + 3$	3
9	262144	$4^9 = 13 \times 20164 + 12$	12
10	1048576	$4^{10} = 13 \times 80659 + 9$	9
11	4194304	$4^{11} = 13 \times 322638 + 10$	10
12	16777216	$4^{12} = 13 \times 1290555 + 1$	1
13	67108864	$4^{13} = 13 \times 5162220 + 4$	4
14	268435456	$4^{14} = 13 \times 20648881 + 3$	3
15	1073741824	$4^{15} = 13 \times 82595524 + 12$	12
16	4294967296	$4^{16} = 13 \times 330382099 + 9$	9

Como podemos ver el período es $r=6$, el cual corresponde al menor r entero distinto de cero para el cual se cumple $4^r = 1 \pmod{13}$ con $r=6$

$\therefore 4^6 = 1 \pmod{13}$

* Expansión en fracciones continuas: (Emmanuel Desurvire -¿ Apéndice R)

Definamos un número real $\chi_n = a_0 \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots a_n}}}$ con $n \leq N$. Cada número real en el conjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N\}$ se denomina un con-

vergente de x_n , mientras que x_n se denomina el n-ésimo convergente de x_n .

Propiedad 1:

El conjunto finito $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de números reales positivos corresponde a la razón: $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, donde los p_n y q_n son definidos como:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

con $n \geq 2, p_0 = a_0, q_0 = 1, p_1 = 1 + a_0 a_1, q_1 = a_1$, para $n = 0, 1$.

Propiedad 2:

Los números reales p_n, q_n son coprimos y satisfacen la relación:

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$$

Propiedad 3:

Dado un número racional x , si dos enteros p, q son tales que:

$$\left| \frac{p}{q} - x \right| \leq \frac{1}{2q^2}$$

Entonces p/q es un convergente de x .

Asumamos como ejemplo:

$$\phi = 711/413 = 1,72154963680387$$

Entonces:

$$\phi = 711/413 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}}}}$$

Supongamos que solo queremos 6 decimales de precisión, es decir sea $\tilde{\phi} = 1,721549$, tal que:

$$|\epsilon| = |\phi - \tilde{\phi}| = 3,69910^{-7}$$

Si expandimos $\tilde{\phi}$ al igual que ϕ , encontramos que con sólo 7 a_n encontramos $\tilde{\phi}$ (ver tabla R1).

Por otro lado, $\frac{p_7}{q_7} \implies \frac{711}{413}$ da la definición de ϕ .

* Algoritmo de factorización de Shor

El algoritmo de factorización de Shor permite factorizar números los cuales se pueden descomponer en un producto único de números primos.

Dicho número N es un entero no-primero de L bits.

En un ordenador cuántico el algoritmo de Shor tendrá un tiempo de corrida del orden $O((L^3))$ (polinómico) y en un ordenador clásico es

del $O(e^{L^{1/3}(\log L)^{2/3}})$ (exponencial), mostrando así que el algoritmo de Shor es capaz de factorizar números muy grandes en tiempos polinómicos.

En dicho algoritmo se conjugan:

1. Aritmética modular ¡- Clásico
2. Paralelismo cuántico ¡- Cuántico
3. Transformada cuántica de Fourier ¡- Cuántico

El algoritmo consiste en dos etapas:

- 1) Una reducción del problema de descomponer en factores al problema de encontrar el orden
- 2) Un algoritmo cuántico para solucionar el problema de encontrar el período.

El algoritmo de Shor fue publicado en: P.W. Shor SIAM I. Comput. 26, 1484-1509 (1997)

Siguiendo el esquema de Emmanuel Desuvire "Classical and Quantum Information Theory: An Introduction for the Telecom Scientist".

La parte cuántica del algoritmo de Shor la podemos dividir en 2 partes:

- 1) El algoritmo de estimación de fase
- 2) El algoritmo de determinación de orden

Entonces:

* Estimación de fase:

Asumamos que tenemos un operador U , con autoestados $|u\rangle$ de dimensión L , y con autovalores complejos desconocidos $\lambda_\phi = e^{2i\pi\phi}$, donde ϕ es un número real tal que $0 \leq \phi \leq 1$, a ser determinado.

Asumamos también que somos capaces de construir una familia de operadores *controlled* - U^p , donde $p = 2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{k-1}$

El circuito cuántico del algoritmo de estimación de fase viene expresado en dos etapas, a las que llamaremos "front-end" y "back-end".

Analicemos la etapa front-end:

Recordemos que:

Analicemos la compuerta $CU^p \equiv \text{controlled} - U^p \text{ gate}$:

$U|u\rangle = e^{2i\pi\phi} U^p|u\rangle = e^{2i\pi p\phi} H|0\rangle = |0\rangle + |1\rangle$ (Sin $1/\sqrt{2}$ por los momentos)

$CU^p(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |u\rangle = |0\rangle \otimes |u\rangle + |1\rangle \otimes U^p|u\rangle = |0\rangle \otimes |u\rangle + |1\rangle e^{2i\pi p\phi} |u\rangle = (|0\rangle + e^{2i\pi p\phi}) \otimes |u\rangle$

$$\therefore CU^p((|0\rangle + |1\rangle) \otimes |u\rangle) = (|0\rangle + e^{2i\pi p\phi} |1\rangle) \otimes |u\rangle$$

Analicemos ahora el producto tensorial a la salida de dos compuertas CU^p recordemos que $p = \{2^0, 2^1, \dots, 2^{k-1}\}$, entonces:

$$(|0\rangle + e^{2i\pi 2^1\phi} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi 2^0\phi} |1\rangle) = |0\rangle |0\rangle + e^{2i\pi 2^0\phi} |0\rangle |1\rangle + e^{2i\pi 2^1\phi} |1\rangle |0\rangle + e^{2i\pi(2^1+2^0)\phi} |1\rangle |1\rangle = e^{2i\pi 0\phi} |0\rangle + e^{2i\pi 1\phi} |1\rangle + e^{2i\pi 2\phi} |2\rangle + e^{2i\pi 3\phi} |3\rangle$$

donde $|00\rangle \equiv |0\rangle; |01\rangle \equiv |1\rangle; |10\rangle \equiv |2\rangle; |11\rangle \equiv |3\rangle;$

es decir: $|ij\rangle \equiv |i2^0 + j2^1\rangle$ con $i, j = 0, 1$ si generalizamos: $|ijk\dots n\rangle = |i2^0 + j2^1 + k2^2 + \dots + n2^{n-1}\rangle$

$$\therefore (|0\rangle + e^{2i\pi 2^1\phi}) \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi 2^0\phi} |1\rangle) = \sum_{k=0}^3 e^{2i\pi k\phi} |k\rangle$$

Todo número puede ser representado en forma binaria:

$$0 \leq \phi \leq 1 \implies \phi \equiv 0\phi_1\phi_2\phi_3\dots \implies \phi = \frac{\phi_1}{2} + \frac{\phi_2}{4} + \frac{\phi_3}{8} + \dots + \frac{\phi_k}{2^k} + \dots$$

para bits $\phi_i = 0, 1 \rightarrow \phi_1 = 0, \phi_2 = 1$

$$\text{luego: } 2^{k-1}\phi = 2^{k-1}(\frac{\phi_1}{2} + \frac{\phi_2}{4} + \frac{\phi_3}{8} + \dots + \frac{\phi_k}{2^k} + \dots) = \{\phi_1 2^{k-2} + \phi_2 2^{k-3} + \dots + \phi_{k-1} 2^0\} + \frac{\phi_k}{2} + \frac{\phi_{k-1}}{4} + \dots$$

$$\cdot) 2^{k-2}\phi = 2^{k-2}(\frac{\phi_1}{2} + \frac{\phi_2}{4} + \frac{\phi_3}{8} + \dots + \frac{\phi_k}{2^k} + \dots) = \{\phi_1 2^{k-3} + \phi_2 2^{k-4} + \dots + \phi_{k-2} 2^0\} + \frac{\phi_{k-1}}{2} + \frac{\phi_k}{2} + \frac{\phi_{k+1}}{8} + \dots$$

Los términos dentro de los $\{ \}$ son enteros. Definamos entonces:

$$\Omega_m = \sum_{l=1}^m \frac{\phi_{k-m+l}}{2^l}$$

tal que:

$$e^{2i\pi 2^{k-1}\phi} = e^{2i\phi\Omega_1} e^{2i\pi(\frac{\phi_{k+1}}{4} + \dots)} \quad e^{2i\pi 2^{k-2}\phi} = e^{2i\phi\Omega_2} e^{2i\pi(\frac{\phi_{k+1}}{8} + \dots)} \quad \dots$$

$$e^{2i\pi 2^0\phi} = e^{2i\phi\Omega_k} e^{2i\pi(\frac{\phi_{k+1}}{2^{k+1}} + \dots)}$$

Consideremos el caso en el cual ϕ es definido exactamente por k bits tal que $\phi_{k+1} = \phi_{k+2} = \dots = 0$

Dejando de lado el qubit $|u\rangle$ la salida del primer registro es:

$$\frac{1}{2^{k/2}}(|0\rangle + e^{2i\pi\Omega_1} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi\Omega_2} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi\Omega_k} |1\rangle)$$

Como podemos recordar

$$QFT|n\rangle = \frac{1}{2^{k/2}}(|0\rangle_1 + e^{2i\pi\Omega_1} |1\rangle_1) \otimes (|0\rangle_2 + e^{2i\pi\Omega_2} |1\rangle_2) \otimes \dots \otimes (|0\rangle_k + e^{2i\pi\Omega_k} |1\rangle_k)$$

$$\text{Siendo: } 1 \leq m \leq k \rightarrow |m\rangle = \frac{1}{2^{m/2}}(|0\rangle_m + e^{2i\pi\Omega_m} |1\rangle_m)$$

$$\text{con } \Omega_m = \sum_{l=1}^m \frac{n_{k-m+l}}{2}$$

Encontrando así que $\frac{1}{2^{k/2}}(|0\rangle + e^{2i\pi\Omega_1}|1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi\Omega_2}|1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi\Omega_k}|1\rangle)$

Es la transformada cuántica de Fourier de nuestro estado $|\phi\rangle$ obtenida con las compuertas *Controlled* – U^p .

Al ket $|\phi\rangle$ lo podemos recuperar haciendo la transformada inversa de Fourier.

Consideremos ahora el módulo del circuito cuántico "back-end"

El módulo back-end del circuito cuántico de Shor consiste en realizar la transformada cuántica inversa de Fourier y hacer medidas sobre los k qubits encontrando así los $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$.

Seguidamente consideremos ahora el caso más general en el cual $2^k\phi$ no es un entero.

$$\text{Fron-end } |0\rangle^{\otimes k} \otimes |u\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi k\phi} |k\rangle \otimes |u\rangle$$

$$\text{Back-end } QFT_1^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi k\phi} |k\rangle \otimes |u\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2ik\phi} QFT^\dagger |k\rangle \otimes$$

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi k\phi} \left(\frac{1}{2^{k/2}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} |n\rangle \right) |u\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{k n}{N}} e^{2i\pi k\phi} |n\rangle \otimes$$

$$|u\rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (e^{2i\pi(\phi - \frac{n}{N})})^k \right) |n\rangle \otimes |u\rangle$$

$$\therefore (QFT^\dagger \otimes \mathbb{1}) \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi k\phi} |k\rangle \otimes |u\rangle \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1 - e^{2i\pi(\phi - \frac{n}{N})N}}{1 - e^{2i\pi(\phi - \frac{n}{N})}} \right) |n\rangle \otimes |u\rangle$$

La probabilidad de medir n a la salida del registro será:

$$p(n) = |\langle u | \otimes \langle n | \psi_{\text{output}} \rangle|^2$$

$$p(n) = \frac{1}{N^2} \left| \frac{1 - e^{2i\pi(\phi - \frac{n}{N})N}}{1 - e^{2i\pi(\phi - \frac{n}{N})}} \right|^2$$

$$\therefore p(n) = \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2(\pi(\phi - \frac{n}{N})N)}{\sin^2(\pi(\phi - \frac{n}{N}))}$$

La medida de n con probabilidad asociada $p(n)$, corresponde a la estimación de fase $\tilde{\phi} = n/N$. La probabilidad es máxima cuando $\delta = \phi - \tilde{\phi}$ es mínima.

$$p(n) = \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2(\pi(\phi - \frac{n}{N})N)}{\sin^2(\pi(\phi - \frac{n}{N}))} \text{ si } N \text{ es grande} \rightarrow$$

La probabilidad $p(n)$ decae rápidamente a cero cuando el error δ se aleja del mínimo.

Entonces:

.) La medida tiene la mayor probabilidad de dar la aproximación más cercana al estado ϕ . .) El circuito de salida es de la forma $|\tilde{\phi}\rangle|u\rangle$, donde $|\tilde{\phi}\rangle$ es una superposición de estados, los cuales al medirlos dan una buena aproximación de ϕ .

* Estimación de orden:

Analicemos como la estimación de fase hace posible determinar r , el orden de x mód N , con alta probabilidad y precisión.

Primero necesitamos introducir el operador U y sus correspondientes autovectores y autovalores.

Asumamos que dados dos enteros x y N que satisfacen que $x \nmid N$, siendo x coprimo de N , es decir $\text{mcd}(x, N) = 1$, existe un operador $U_{x, N}$ que actúa sobre el qubit $|y\rangle \equiv \{|0\rangle, |1\rangle\}$, tal que:

$$U_{x, N} |y\rangle = |xy \bmod N\rangle$$

Asumamos $\{|u_s\rangle\}_{s=0,1,\dots,r-1}$ el conjunto de r autoestados de U , asociados con los autovalores $e^{i2\pi s/r}$ tal que $U|u_s\rangle = e^{i2\pi s/r}|u_s\rangle$ en el cual la fase es $\phi_s = s/r$ con $0 \leq \phi_s \leq 1$

Tales autoestados $|u_s\rangle$ se definen acorde a: $|u_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\frac{2i\pi ks}{r}} |x^k \bmod N\rangle$, siendo r a determinar.

Con las siguientes propiedades:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{s=0}^{r-1} |u_s\rangle = |1\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{s=0}^{r-1} e^{\frac{2i\pi ks}{r}} |u_s\rangle = |x^k \bmod N\rangle$$

$$p(s) = |c_s|^2 = \frac{1}{r}$$

El circuito para la estimación de orden es el siguiente:

Entonces:

$$U_{x, y} |y\rangle = |xy \bmod N\rangle$$

$$j = 2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{k-1}$$

$$CU^j(|0\rangle \otimes |1\rangle) = |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\begin{aligned}
CU^j |j\rangle \otimes |1\rangle &= |j\rangle \otimes \left| x^{j1^{2^{k-1}}} \text{ mód } N \right\rangle \left| x^{j2^{2^{k-2}}} \text{ mód } N \right\rangle \dots \left| x^{j2^0} \text{ mód } N \right\rangle \\
CU^j |j\rangle \otimes |1\rangle &= |j\rangle \otimes \left| x^{j1^{2^k-1}} x^{j2^{2^k-2}} \dots x^{j2^0} \text{ mód } N \right\rangle \\
\therefore CU^j |j\rangle \otimes |1\rangle &= |j\rangle \otimes \left| x^j \text{ mód } N \right\rangle
\end{aligned}$$

Con este paso entendido vamos ahora a analizar el circuito para determinar el orden:

$$\begin{aligned}
1) |\psi_1\rangle &= |0\rangle^{\otimes k} \otimes |1\rangle \\
2) |psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{M}}(|0\rangle + |1\rangle)^{\otimes k} \otimes |1\rangle; M = 2^k \\
|psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=0}^{M-1} CU^j(|j\rangle \otimes |1\rangle) \\
3) |\psi_3\rangle &= CU^j |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=0}^{M-1} CU^j(|j\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=0}^{M-1} (|j\rangle \otimes |x^j \text{ mód } N\rangle)
\end{aligned}$$

Pero ya vimos que: $|x^j \text{ mód } N\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{s=0}^{r-1} e^{\frac{2i\pi ks}{r}} |u_s\rangle$

$$\therefore |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} |k\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{r}} e^{2i\pi ks/r} |u_s\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \sum_{s=0}^{r-1} \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} e^{2i\pi ks/r} |k\rangle \right) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}} |u_s\rangle$$

4) Aplicamos la transformada inversa de Fourier al primer registro

$$|\psi_4\rangle = (QFT^\dagger \otimes \mathbb{1}) |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{s=0}^{r-1} \left| \tilde{\psi}_s \right\rangle \otimes |u_s\rangle$$

Finalmente: Al medir el primer registro proyectamos la superposición que conforma $|\psi_4\rangle$ en uno de los r estados de $|u_s\rangle$

$$p(s) = |\langle \tilde{\psi}_s | \otimes \langle u_s | \psi_4 \rangle|^2 = \frac{1}{r}$$

lo que nos da $\frac{s}{r}$ correspondiendo a la estimación de fase $\tilde{\psi} = \frac{s}{r}$

Posteriormente aplicamos el algoritmo clásico de fracciones continuas y determinamos los co-primos.

Ejemplo:

Determinemos la factorización para $N=15$.

Asumamos, el número compuesto $N=15$ (no primo). Tomemos $L = \log_2 N = 9$ para el segundo registro (tamaño del target) y pongamos un error de probabilidad grande $\epsilon = 0,25$.

$k = 2L + 1 + \log_2(2 + \frac{1}{2\epsilon}) = 11$ (ver libro: tamaño del primer registro de control)

$$M = 2^k = 2^{11} = 2048$$

tomemos un número x aleatorio entre $[2, N-1] \rightarrow x = 8$ lo cual cumple que $\text{m.c.d}(8,15) = 1$

Pasos cuánticos:

$$.) \ |\psi_1\rangle = |0\rangle^{\otimes k} \otimes |1\rangle$$

$$.) \ |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=0}^{M-1} (|j\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2M}} (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + \dots + |M-1\rangle)$$

$$.) \ \text{Aplicamos la compuerta } \textit{Controlled-U}^j \ |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} |j\rangle \otimes |x^j \bmod N\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=0}^{M-1} |1\rangle \otimes |8^j \bmod 15\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} (|0\rangle |1\rangle + |1\rangle |8\rangle + |2\rangle |4\rangle + |3\rangle |2\rangle + |4\rangle |1\rangle + |5\rangle |8\rangle + |6\rangle |4\rangle + |7\rangle |2\rangle + |8\rangle |1\rangle + |9\rangle |8\rangle + |0\rangle |4\rangle + |1\rangle |2\rangle + \dots)$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} ((|0\rangle + |4\rangle + |8\rangle + \dots) |1\rangle + (|1\rangle + |5\rangle + |9\rangle + \dots) |8\rangle + (|2\rangle + |6\rangle + |10\rangle + \dots) |4\rangle + (|3\rangle + |7\rangle + |11\rangle + \dots) |2\rangle)$$

$$\text{Definamos: } |u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} (|0\rangle + |4\rangle + |8\rangle + \dots)$$

$$|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} (|1\rangle + |5\rangle + |9\rangle + \dots)$$

$$|u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} (|2\rangle + |6\rangle + |10\rangle + \dots)$$

$$|u_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} (|3\rangle + |7\rangle + |11\rangle + \dots)$$

$$\text{y obtenemos: } |\psi_3\rangle = |u_1\rangle \otimes |1\rangle + |u_2\rangle \otimes |8\rangle + |u_3\rangle \otimes |4\rangle + |u_4\rangle \otimes |2\rangle$$

Consideremos el primer registro $|u_2\rangle \otimes |8\rangle$, es decir $|u_2\rangle$, y apliquemos la QFT^\dagger sobre él.

$$QFT^\dagger |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} QFT^\dagger (|1\rangle + |5\rangle + |9\rangle + |13\rangle + \dots)$$

$$\text{Recordemos que } QFT^\dagger |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{4M}} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-2i\pi kn/M} |k\rangle$$

$$\text{Luego: } QFT^\dagger |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} QFT^\dagger (|1\rangle + |5\rangle + |9\rangle + |13\rangle + \dots)$$

$$QFT^\dagger |u_2\rangle = \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} (e^{-\frac{k2i\pi}{M}1} |k\rangle + e^{-\frac{k2i\pi}{M}5} |k\rangle + e^{-\frac{k2i\pi}{M}9} |k\rangle + e^{-\frac{k2i\pi}{M}13} |k\rangle + \dots)$$

$$QFT^\dagger |u_2\rangle = \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} (e^{-\frac{k2i\pi}{M}1} + e^{-\frac{k2i\pi}{M}5} + e^{-\frac{k2i\pi}{M}9} + e^{-\frac{k2i\pi}{M}13} + \dots) |k\rangle$$

$$QFT^\dagger |u_2\rangle = \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-\frac{k2i\pi}{M}1} ((e^{-\frac{k8i\pi}{M}})^0 + (e^{-\frac{k8i\pi}{M}})^1 + (e^{-\frac{k8i\pi}{M}})^2 + \dots) |k\rangle$$

$$\begin{aligned}
QFT^\dagger |u_2\rangle &= \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-k \frac{2i\pi}{M}} \sum_{m=0}^{M-1} (e^{-k \frac{8i\pi}{M}})^m |m\rangle \\
QFT^\dagger \sum_{k=0}^{M-1} e^{-k \frac{2i\pi}{M}} \frac{(1-e^{-8i\pi k})}{(1-e^{-k \frac{8i\pi}{M}})} |k\rangle \\
QFT^\dagger |u_2\rangle &= \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-k \frac{2\pi i}{M}} \frac{(1-e^{-8i\pi k})}{e^{-k \frac{4i\pi}{M}} (e^{k \frac{4i\pi}{M}} - e^{-k \frac{4i\pi}{M}})} |k\rangle \\
QFT^\dagger |u_2\rangle &= \frac{1}{4iM} \sum_{k=0}^{M-1} e^{k \frac{2\pi i}{M}} \frac{(1-e^{-8i\pi k})}{\sin(\frac{4\pi k}{M})} |k\rangle \\
QFT^\dagger |u_2\rangle &= \frac{1}{4iM} \sum_{k=0}^{M-1} e^{k \frac{2\pi i}{M}} \frac{e^{-4i\pi k} (e^{4i\pi k} - e^{-4i\pi k})}{\sin(\frac{4\pi k}{M})} |k\rangle \\
QFT^\dagger |u_2\rangle &= \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-k \frac{2\pi i}{M}} \frac{\sin(4\pi k)}{\sin(\frac{4\pi k}{M})} |k\rangle
\end{aligned}$$

Este resultado se puede reescribir de la forma:

$$QFT^\dagger |u_2\rangle = \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_k |k\rangle$$

$$\text{siendo } \alpha_k = \frac{1}{2M} e^{-k \frac{2i\pi}{M}} \frac{\sin(4\pi k)}{\sin(\frac{4\pi k}{M})}$$

$$\text{correspondiendo } p(k) = |\langle k | QFT^\dagger |u_2\rangle|^2 = |\alpha_k|^2 = \frac{1}{4M^2} \frac{\sin^2(\frac{4\pi k}{M})}{\sin^2(\frac{4\pi k}{M})}$$

Como podemos observar para todo entero $k=0,1,\dots,M-1$ el número de α_k es cero, pero para $\frac{4\pi k}{M} = n\pi \rightarrow k = n \frac{M}{4} = n2^7 = n512$, n entero

el denominador es cero y α_k es indeterminado, luego:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\frac{4\pi k}{M})}{\sin^2(\frac{4\pi k}{M})} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin^2(4\pi(\frac{nM}{4} + \epsilon))}{\sin^2(\frac{4\pi}{M}(\frac{nM}{4} + \epsilon))} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin^2(nM\pi + 4\pi\epsilon)}{\sin^2(n\pi + \frac{4\pi}{M}\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\frac{4\pi\epsilon}{M})}{\sin^2(\frac{4\pi}{M}\epsilon)} = \\
&= \frac{(\frac{4\pi\epsilon}{M})^2}{(\frac{4\pi}{M}\epsilon)^2} = M^2
\end{aligned}$$

$$\text{luego: } p(k)_{\text{Máximo}} = \frac{1}{4M^2} M^2 \rightarrow p_{\text{Maximo}}(k) = \frac{1}{4}$$

En el rango $k=0,1,\dots,M-1$ los máximos de $p(k)$ están localizados en:

$$k = 0 \rightarrow n = 0 \quad k = 512 \rightarrow n = 1 \quad k = 1024 \rightarrow n = 2 \quad k = 1536 \rightarrow n = 3$$

$$\text{Al medir obtenemos: } \frac{k_i}{M} = \frac{k_i}{2^k} = \frac{k_i}{2^{13}} = \frac{k_i}{2048}$$

las cuatro posibles determinaciones de $\tilde{\phi}$ son:

$$\frac{0}{2048} \Big|_{k_i=0} ; \frac{512}{2048} \Big|_{k_i=512} ; \frac{1024}{2048} \Big|_{k_i=1024} ; \frac{1536}{2048} \Big|_{k_i=1536} ;$$

$$\begin{aligned}
k_i = 0 \text{ no aporta nada } k_1 = \frac{512}{2048} = \frac{1}{4} \} \text{ no satisfacen } \left| \frac{s}{r} - x \right| \leq \frac{1}{r^2} \\
k_2 = \frac{1024}{2048} = \frac{1}{2} \} \text{ no satisfacen } \left| \frac{s}{r} - x \right| \leq \frac{1}{r^2} \quad k_3 = \frac{1536}{2048} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

$$\text{ya que } \frac{p_0}{1_0} = \frac{0}{1} ; \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1} ; \frac{p_2}{q_2} = \frac{3}{4}$$

3 y 4 son co-primos.

La fracción $3/4$ es un convergente de ϕ y $r = q_2 = 4$ es el orden de x . Normalmente se suele asociar con que existen 2 N' y N'' de $N=15$ tales que

$$N' = MCD(x^{r/2} - 1, N) = MCD(63, 15) = 3 \quad N'' = MCD(x^{r/2} + 1, N) = MCD(65, 15) = 5$$

6.2. Transformadas integrales

6.3. Transformada cuántica de Fourier

6.4. Estimación de fase

6.5. Estimación de orden

6.6. Algoritmo de Shor

Capítulo 7

Google PageRank

El algoritmo de PageRank fue desarrollado en 1996 en la Universidad de Stanford por Larry Page y Sergey Brin, los cuales fueron los fundadores de Google.

Este algoritmo se basa en la idea de que sitios web importantes tienen muchos vínculos que apuntan hacia ellos, lo que conduce a pensar en la web como una red ponderada orientada.

Existen muchos otros algoritmos, algunos más eficientes, pero la importancia de PageRank se sustenta en el poder económico de Google.

Ilustraremos el algoritmo de PageRank con un ejemplo sencillo:

Ejemplo:

Consideremos 5 páginas web distintas a las que denotaremos por 1, 2, 3, 4, y 5, y cuyo grafo es:

Pasos:

- a) Determinar la matriz de adyacencia. Algunos autores denotan la matriz de de adyacencia por M en el protocolo de PageRank

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Sumamos los elementos de cada una de las columnas.

$$3 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3$$

Estas sumas representan el número de links que salen del nodo o vértice de la página p_j , es decir:

$I(p_j) \equiv$ Importancia de la página j

$\text{outdeg}(p_j) \equiv$ número de links que salen de la página p_j

$$I(p_i) \equiv \sum_{j \in B_i} \frac{I(p_j)}{\text{outdeg}(p_j)}$$

$B_i \equiv$ conjunto de páginas que son linkeadas

- c) Dividimos cada elemento de M por la suma de los elementos de la columna a la cual corresponde y llamaremos a la nueva matriz obtenida M'

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- d) El siguiente paso es encontrar un vector \vec{v} (algunos autores lo llaman \vec{I}) que represente el PageRank de cada una de las páginas. Como tenemos 5 páginas web le asignamos a \vec{v} como valores $\vec{v} = (a, b, c, d, e)^T$, obteniendo así un vector de dimensión $d = 5$.
- e) Obtenemos los valores de $\{v_i\}$ a partir de los autovalores de M' , tal que:

$$M'\vec{v} = \lambda\vec{v} \text{ con } \lambda \in R$$

- f) Determinamos los autovalores de M'

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = \frac{-2}{3}; \quad \lambda_3 = \frac{-1}{2}; \quad \lambda_4 = \frac{-1}{3}; \quad \lambda_5 = \frac{1}{3}$$

Tomaremos sólo $\lambda = 1 \rightarrow M'\vec{v} = \vec{v}$ (Ecuación autoconsistente)

g) Hallamos el autovector asociado a $\lambda = 1$. Obteniendo:

$$a = 6; \quad b = 1; \quad c = \frac{16}{3}; \quad d = \frac{14}{3}; \quad e = 3$$

h) Finalmente, Google ordena de mayor a menor las componentes de \vec{v} , quedándonos:

$$\begin{array}{rcl} & & - \quad a \\ & & - \quad c \\ \text{Pantalla} & \rightarrow & - \quad d \\ & & - \quad e \\ & & - \quad b \end{array}$$

La idea de PageRank de Google es que la importancia de una página viene dada por la cantidad de páginas que se enlazan con ella.

Surgen varios problemas:

- a) Las matrices hyperlink (hiperenlace) pueden tener billones de entradas en filas y columnas.
- b) Calcular los autovectores es un absurdo computacional.
- c) Los estudios muestran que un nodo (página web) tiene un promedio de 10 enlaces, y las demás entradas de la matriz son cero.
- d) No se encuentra $\lambda = 1$ en la mayoría de los casos.

Por esta razón, un remedio (Patching) del algoritmo de PageRank fue el método de las potencias, en el cual la matriz hiperenlace

$$H_{ij} \equiv \begin{cases} \frac{1}{\text{outdeg}(P_j)} & \text{si } P_j \in B_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

debería converger a una solución autoconsistente

$$I^{k+1} = HI^k$$

donde se toma un vector I^0 y se hace interactuar unas 100 veces y el orden mostrado de las páginas es el de I^{100} , ordenadas de mayor a menor. Si se normalizan las columnas de la matriz hipervínculo (hiperenlace) H , obtenemos otra matriz hiperenlace normalizada E .

La matriz E: se sabe de la teoría de matrices estocásticas que 1 es uno de sus autovalores. Además, también se sabe que la convergencia de $I^k = EI^{k-1}$ a $I = EI$ depende del segundo autovalor de λ_2 de E y es un hecho que $I^k = EI^{k-1}$ converge rápidamente si $|\lambda_2|$ es cercano a cero.

7.0.1. El algoritmo de remiendo (parcheo) general

Asumamos que el caminante recorre el grafo siguiendo la web con una matriz estocástica E con probabilidad α , y con probabilidad $1 - \alpha$ podrá ir a cualquier página al azar que sea de su interés. La matriz web de este proceso será:

$$G \equiv \alpha E + \frac{1 - \alpha}{N} \mathbf{I} \text{Matriz de Google}$$

\mathbf{I} es una matriz en la cual todas las entradas están establecidas en 1, y N el número de nodos.

Propiedades de G:

- a) Es estocástica
- b) Irreducible
- c) Primitiva
- d) El resultado de determinar el estado auto-consistente no depende del vector Google inicial I^0

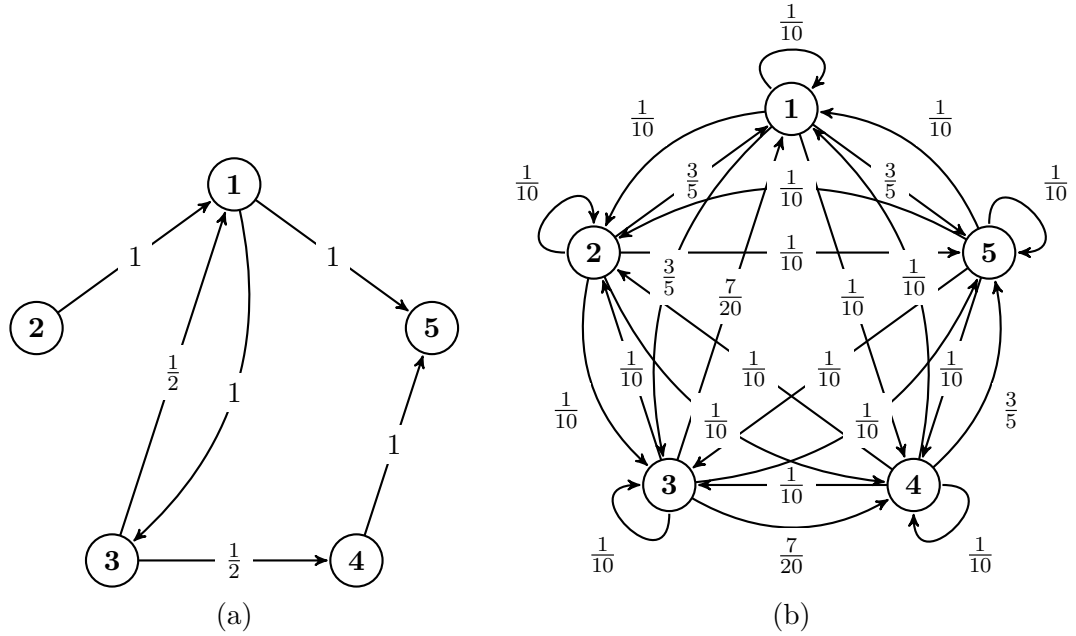


Figura 7.1: Grafo correspondiente a la matriz de adyacencia (a) de la red E (b) remendada de Google G con $\alpha = \frac{1}{2}$

7.0.2. Interpretación como una caminata aleatoria

La asignación de valores de importancia se puede replantear como la probabilidad de encontrar un caminante aleatorio en cierto nodo del grafo.

Del proceso:

De la ley de probabilidad total:

$$\begin{aligned}
 Pr(x^{(n+1)} = p_i) &= \sum_j G_{ij} Pr(x^{(n)} = p_j) \\
 Pr(x^{(n+1)} = p_i) &= \sum_j Pr(x^{(n+1)} = p_i | x^{(n)} = p_j) Pr(x^{(n)} = p_j) \\
 \implies G_{ij} &= Pr(x^{(n+1)} = p_i | x^{(n)} = p_j)
 \end{aligned}$$

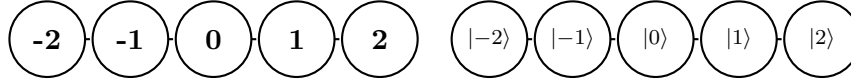
En el contexto del Internet, G_{ij} es la probabilidad de que cierto internauta, que se encuentra en la página p_i , entre en la página p_j . El factor αE_{ij} es la probabilidad de que lo haga presionando un enlace

presente en p_i , mientras que $\frac{1-\alpha}{N}\mathbb{I}$ es la probabilidad de que lo haga introduciendo la URL directamente.

El factor de amortiguamiento es libre y debe ser calibrado. Se suele usar $\alpha = 0,85$

7.0.3. Cuantizando las caminatas aleatorias

La forma obvia y directa de cuantizar una caminata aleatoria sería sustituir el conjunto de nodos $\{p_i\}$ por el conjunto de kets $\{|i\rangle\}$. Sin embargo, esto lleva a sistemas con operadores no unitarios y no es realizable.



Esto nos obliga a buscar maneras alternativas de cuantizar las caminatas aleatorias. La cadena anterior se podría cuantizar agregando un espacio "moneda" al espacio de Hilbert generado por $\{|i\rangle\}$. En este caso, el operador de difusión se interpreta como "lanzar la moneda" para decidir en qué dirección ir.

$$\begin{aligned}
 U &= \sqrt{p} |i+1\rangle\langle i| \otimes |c\rangle\langle c| + \sqrt{1-p} |i-1\rangle\langle i| \otimes |s\rangle\langle s| \\
 U^\dagger &= \sqrt{p} |i\rangle\langle i+1| \otimes |c\rangle\langle c| + \sqrt{1-p} |i\rangle\langle i-1| \otimes |s\rangle\langle s| \\
 UU^\dagger &= p |i+1\rangle\langle i+1| \otimes |c\rangle\langle c| + (1-p) |i-1\rangle\langle i-1| \otimes |s\rangle\langle s|
 \end{aligned}$$

Al realizar la suma sobre i se tiene $\mathbb{1}$, como se deseaba. Sin embargo, esta solución todavía no es satisfactoria, pues exige que $p_{ij} = \frac{1}{\text{outdeg}(j)}$ para que $UU^\dagger = \mathbb{1}$.

Casi todas las cuantizaciones cometen estos dos pecados, aumentar la dimensión del espacio de Hilbert e imponer condiciones sobre el grafo; y en general, se debe cometer al menos uno de los dos.

Nota: También existen caminatas cuánticas continuas, no sólo discretas.

7.0.4. Caminata cuántica de Szegedy

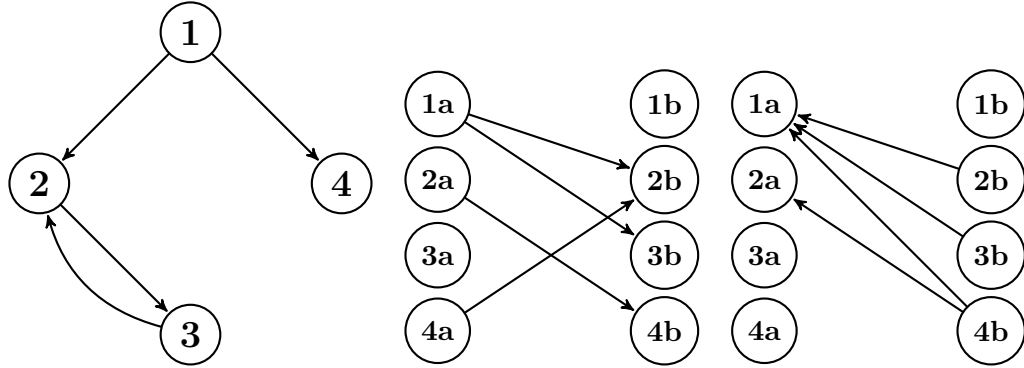
Existe un tipo particular de caminatas aleatorias conocido como caminatas bipartitas. En éstas se tiene dos conjuntos de nodos y sólo ocurren transiciones entre los dos conjuntos, no dentro del mismo.

Szegedy desarrolló una cuantización de estas caminatas. Para esto utilizó operadores de reflexión ($W = \mathbb{1} - 2|w\rangle\langle w|$, similares a los utilizados en el algoritmo de Grover). Aprovechándose del hecho de que un par de reflexiones equivale a una rotación (como en el algoritmo de Grover), creó el siguiente operador de evolución de la caminata: $U = (\mathbb{1} - 2B)(\mathbb{1} - 2A)$, donde A es el proyector sobre las transiciones de la primera partición a la segunda y B de la segunda a la primera.

$$|\psi_i\rangle = |i\rangle_1 \otimes \sum_j \sqrt{p_{ji}} |j\rangle_2 \quad |\psi_i\rangle = \sum_i \sqrt{p_{ij}} |i\rangle_1 \otimes |i\rangle_2$$

$$A = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad B = \sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

Si tomamos un grafo cualquiera y lo duplicamos en la forma de un grafo bipartito con ambas particiones iguales y transiciones iguales en ambos sentidos, podemos cuantizar cualquier tipo de caminata. Sólo hay que pagar el precio de duplicar el espacio de Hilbert generado por $\{|i\rangle\}$: $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.



En estos casos, podemos escribir el operador de difusión en términos de sólo A, pues como la segunda partición es un reflejo de la primera, $B = A^T$. Entonces: $U = (2A^T - \mathbb{1})(2A - \mathbb{1})$

$$\implies = (2SAS - \mathbb{1})(2A - \mathbb{1}) = S(2A - \mathbb{1})S(2A - \mathbb{1}) = [S(2A - \mathbb{1})]^2$$

Donde S es el operador SWAP, $S = \sum_{ij} |ji\rangle\langle ij|$

7.0.5. PageRank cuántico

Finalmente, procedemos a cuantizar el algoritmo de PageRank. Partimos del hecho de que el algoritmo de PageRank se puede formular como una caminata aleatoria, cuya matriz de probabilidades es la matriz de Google, G . Entonces seguimos el procedimiento de Szegedy, sustituyendo p_{ij} por G_{ij} .

Ahora, definimos el valor de PageRank cuántico en el paso m como:

$$I_q(P_i, m) = \left| U^{\dagger m} (\mathbb{1} \otimes |i\rangle\langle i|) \right\rangle$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i |\psi_i\rangle$$

Esto equivale a realizar m pasos de la caminata con $|\psi_0\rangle$ como estado inicial y realizar una medida proyectiva sobre $|i\rangle_2$.

Nota: I_q no converge, sino que oscila, así que se toma el centro de las oscilaciones como la medida de importancia de las páginas. Esto se hace promediando I_q sobre m : $\langle I_q(P_i) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} I_q(P_i, m)$

Apéndice A

Cálculos de Hamiltonianos

A.1. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

El Hamiltoniano de Jaynes-Cummings es un Hamiltoniano diagonal que representa un sistema de dos niveles interactuando con un modo cuantizado de una cavidad óptica.

$$\hat{H}_{JC} = \hat{H}_r + \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} = \omega_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \omega_q \sigma_z + g(a\sigma_+ + a^\dagger \sigma_-)$$

A.2. Hamiltoniano multiquibit

El modelo de Jaynes-Cummings para varios qubits sin el término de la energía de la cavidad es el siguiente:

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} = -\frac{1}{2} \sum_i \omega_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a\sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i})$$

A.3. Pulsos de microondas

Para operar sobre los qubits se aplican pulsos de microondas.

$$\hat{H}_d = \sum_k (a + a^\dagger) (\xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t} + \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t})$$

RWA:

$$\hat{H}_d = \sum_k a \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t}$$

A.4. Régimen rotacional del pulso

Trabajando con un sólo modo a la vez, se aplica la siguiente transformación $U(t) = \exp[\sum_n -i\omega_d^{(n)} t (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})]$ para entrar en el régimen rotacional del pulso de control.

$$\hat{H} = U^\dagger (\hat{H}_{syst} + \hat{H}_d) U - iU^\dagger \dot{U}$$

$$e^{-\lambda X} H e^{\lambda X} = H + \lambda [H, X] + \frac{\lambda^2}{2!} [[H, X], X] + \dots$$

$$\hat{H} = U^\dagger (\omega_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \omega_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + \sum_k (a \xi_k^* e^{i \sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i \sum_k \omega_d^{(k)} t})) U - iU^\dagger \dot{U}$$

$$[\omega_r a^\dagger a, -i\omega_d t (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})] = 0$$

$$[-\frac{1}{2} \sum_i \omega_{qi} \sigma_{zi}, -i\omega_d t (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})] = 0$$

$$[\sigma_+, \sigma_z] = 2\sigma_+$$

$$[\sigma_-, \sigma_z] = -2\sigma_-$$

$$[\sigma_-, \sigma_+] = \sigma_z$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$[a, a^\dagger a] = aa^\dagger a - a^\dagger aa = (aa^\dagger - a^\dagger a)a = [a, a^\dagger]a = a$$

$$[a^\dagger, a^\dagger a] = a^\dagger a^\dagger a - a^\dagger aa^\dagger = a^\dagger (a^\dagger a - aa^\dagger) = a^\dagger [a^\dagger, a] = -a^\dagger$$

$$\begin{aligned} & [\sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}), \sum_n -i\omega_d^{(n)} t (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})] = \sum_n -i\omega_d^{(n)} t [\sum_i g_i (a \sigma_{+i} + \\ & a^\dagger \sigma_{-i}), (a^\dagger a)] + \sum_n -i\omega_d^{(n)} t [\sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}), (-\frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})] = \sum_n -i\omega_d^{(n)} t \sum_i g_i (a \sigma_{+i} - \\ & a^\dagger \sigma_{-i}) - \sum_n -i\omega_d^{(n)} t \sum_i g_i (a \sigma_{+i} - a^\dagger \sigma_{-i}) = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{H} = U^\dagger (\hat{H}_{syst}) U = \hat{H}_{syst}$$

$$\begin{aligned}
& [\sum_k (a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}), \sum_n -i\omega_d^{(n)} t (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})] = (\sum_n -i\omega_d^{(n)} t) \sum_k (a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} - \\
& a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}) \\
& [(\sum_n -i\omega_d^{(n)} t) \sum_k (a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} - a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}), \sum_n -i\omega_d^{(n)} t (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})] = \\
& (\sum_n -i\omega_d^{(n)} t)^2 \sum_k (a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}) \\
& [(\sum_n -i\omega_d^{(n)} t)^2 \sum_k (a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}), (\sum_n -i\omega_d^{(n)} t) (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})] = \\
& (\sum_n -i\omega_d^{(n)} t)^3 \sum_k (a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} - a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}) \\
& [(\sum_n -i\omega_d^{(n)} t)^3 \sum_k (a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} - a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}), (\sum_n -i\omega_d^{(n)} t) (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})] = \\
& (\sum_n -i\omega_d^{(n)} t)^4 \sum_k (a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}) \\
& e^{-X} H e^X = H + [H, X] + \frac{1}{2!} [[H, X], X] + \dots
\end{aligned}$$

$$\hat{H} = U^\dagger (\hat{H}_d) U = \sum_k (e^{\sum_n -i\omega_d^{(n)} t} a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} + e^{-\sum_n -i\omega_d^{(n)} t} a^\dagger \xi_k e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t}) = \sum_k (a\xi_k^* + a^\dagger \xi_k)$$

$$-iU^\dagger \dot{U} = -\sum_n \omega_d^{(n)} (a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_{zi})$$

En caso de un sólo drive:

$$\hat{H} = \Delta_c a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a\sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + (a\xi^* + a^\dagger \xi)$$

$$\Delta_c = \omega_c - \omega_d \quad \Delta_{qi} = \omega_{qi} - \omega_d$$

A.5. Efecto del pulso sobre el qubit

Luego se aplica el operador de desplazamiento $D(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a]$ sobre el campo a con $\dot{\alpha} = -i\Delta_c \alpha - i\xi$ para eliminar el efecto directo del pulso sobre la cavidad.

$$\hat{H} = D^\dagger(\alpha) \hat{H}_{old} D(\alpha) - iD^\dagger(\alpha) \dot{D}(\alpha)$$

$$\hat{H} = \Delta_c a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + (a \xi^* + a^\dagger \xi)$$

$$\begin{aligned} \hat{H} = \Delta_c (a^\dagger + \alpha^*)(a + \alpha) - \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i ((a + \alpha) \sigma_{+i} + (a^\dagger + \alpha^*) \sigma_{-i}) \\ + ((a + \alpha) \xi^* + (a^\dagger + \alpha^*) \xi) - i(\dot{\alpha}(a^\dagger + \alpha^*) - \dot{\alpha}^*(a + \alpha)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H} = \Delta_c a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) \\ + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) - \Delta_c \alpha \alpha^* \end{aligned}$$

El término $-\Delta_c \alpha \alpha^*$ se desprecia, ya que sólo representa una fase global en la evolución del sistema.

A.6. Régimen dispersivo

Finalmente, aplicamos la transformación $U = \exp[\sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})]$, donde $\Delta_i = \omega_{qi} - \omega_c$ y realizamos la expansión de Baker-Campbell-Hausdorff de segundo grado sobre los términos $\frac{g_i}{\Delta_i} \ll 1$.

$$\hat{H} = U^\dagger \hat{H}_{old} U$$

$$\begin{aligned}
[\sigma_+, \sigma_z] &= 2\sigma_+ \\
[\sigma_-, \sigma_z] &= -2\sigma_- \\
[\sigma_-, \sigma_+] &= \sigma_z \\
[a, a^\dagger] &= 1 \\
[a, a^\dagger a] &= a \\
[a^\dagger, a^\dagger a] &= -a^\dagger
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \Delta_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) \\
&\quad + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Delta_r a^\dagger a, \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})] &= \Delta_r \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} + a \sigma_{+i}) \\
[-\frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi}, \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})] &= - \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} \Delta_{qi} (a^\dagger \sigma_{-i} + a \sigma_{+i}) \\
[\sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}), \sum_j \frac{g_j}{\Delta_j} (a^\dagger \sigma_{-j} - a \sigma_{+j})] &= [\sum_i g_i (a \sigma_{+i}), \sum_j \frac{g_j}{\Delta_j} (a^\dagger \sigma_{-j})] + \\
[\sum_i g_i (a \sigma_{+i}), \sum_j \frac{g_j}{\Delta_j} (-a \sigma_{+j})] &+ [\sum_i g_i (a^\dagger \sigma_{-i}), \sum_j \frac{g_j}{\Delta_j} (a^\dagger \sigma_{-j})] + [\sum_i g_i (a^\dagger \sigma_{-i}), \sum_j \frac{g_j}{\Delta_j} (-a \sigma_{+j})] = \\
\sum_{ij} g_i (a \sigma_{+i}) \frac{g_j}{\Delta_j} (a^\dagger \sigma_{-j}) - \sum_{ij} \frac{g_j}{\Delta_j} (a^\dagger \sigma_{-j}) g_i (a \sigma_{+i}) &+ \sum_{ij} g_i (a^\dagger \sigma_{-i}) \frac{g_j}{\Delta_j} (-a \sigma_{+j}) - \\
\sum_{ij} \frac{g_j}{\Delta_j} (-a \sigma_{+j}) g_i (a^\dagger \sigma_{-i}) &= \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} a a^\dagger \sigma_{+i} \sigma_{-j} - \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} a^\dagger a \sigma_{-j} \sigma_{+i} - \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} a^\dagger a \sigma_{-i} \sigma_{+j} + \\
\sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} a a^\dagger \sigma_{+j} \sigma_{-i} &= 2 \sum_{i \neq j} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} \sigma_{+i} \sigma_{-j} + \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} \sigma_{+i} \sigma_{-i} + \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} \sigma_{+i} \sigma_{-i} - \\
2 \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} a^\dagger a \sigma_{zi} &= \\
- [\sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}), \sum_j \frac{g_j}{\Delta_j} (a^\dagger \sigma_{-j} - a \sigma_{+j})] &= [\sum_i g_i (a \sigma_{+i}), \sum_j \frac{g_j}{\Delta_j} (a^\dagger \sigma_{-j})] + \\
[\sum_i g_i (a \sigma_{+i}), \sum_j \frac{g_j}{\Delta_j} (-a \sigma_{+j})] &+ [\sum_i g_i (a^\dagger \sigma_{-i}), \sum_j \frac{g_j}{\Delta_j} (a^\dagger \sigma_{-j})] + [\sum_i g_i (a^\dagger \sigma_{-i}), \sum_j \frac{g_j}{\Delta_j} (-a \sigma_{+j})] \\
i \neq j & \\
\sum_{i \neq j} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} \sigma_{+i} \sigma_{-j} + \sigma_{-i} \sigma_{+j} & \\
i = j & \\
2 \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a a^\dagger \sigma_{+i} \sigma_{-i} - a^\dagger a \sigma_{-i} \sigma_{+i}) &= 2 \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a a^\dagger \sigma_{+i} \sigma_{-i} - a^\dagger a (\sigma_{zi} + \\
\sigma_{+i} \sigma_{-i})) &= 2 \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} (\sigma_{+i} \sigma_{-i} - a^\dagger a \sigma_{zi}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} (aa^\dagger \sigma_{+i} \sigma_{-i} - a^\dagger a \sigma_{-i} \sigma_{+i}) &= 2 \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} ((aa^\dagger + 1/2 - 1/2) \sigma_{+i} \sigma_{-i} - \\
&(a^\dagger a + 1/2 - 1/2) \sigma_{-i} \sigma_{+i}) = \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} (\sigma_{+i} \sigma_{-i} + \sigma_{-i} \sigma_{+i}) - 2 \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger a + \\
&1/2) \sigma_{zi} = \sum_i (g_i \frac{g_i}{\Delta_i} - 2g_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger a + 1/2) \sigma_{zi}) \text{ ---} \\
[\sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}), \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})] &= [\sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i}), \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i})] + \\
[\sum_i g_i (\alpha^* \sigma_{-i}), \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (-a \sigma_{+i})] &= - \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a) \sigma_{zi} \\
\hat{H} = \Delta_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) + \\
\Delta_r \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} + a \sigma_{+i}) - \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} \Delta_{qi} (a^\dagger \sigma_{-i} + a \sigma_{+i}) + \sum_{i \neq j} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} \sigma_{+i} \sigma_{-j} + \\
\sigma_{-i} \sigma_{+j} + \sum_i (g_i \frac{g_i}{\Delta_i} - 2g_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger a + 1/2) \sigma_{zi}) - \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a) \sigma_{zi} \\
\hat{H} = \Delta_r a^\dagger a - \sum_i \Delta_{qi} (1/2 + 2g_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger a + 1/2)) \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + \\
\Delta_r \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} + a \sigma_{+i}) - \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} \Delta_{qi} (a^\dagger \sigma_{-i} + a \sigma_{+i}) + \sum_{i \neq j} g_i \frac{g_j}{\Delta_j} \sigma_{+i} \sigma_{-j} + \\
\sigma_{-i} \sigma_{+j} + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) - \sum_i g_i \frac{g_i}{\Delta_i} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a) \sigma_{zi} \\
\hat{H} = \Delta_r a^\dagger a - \sum_i \Delta_{qi} (\frac{1}{2} + 2 \frac{g_i^2}{\Delta_i} (a^\dagger a + \frac{1}{2})) \sigma_{zi} + \sum_{i \neq j} \frac{g_i g_j}{\Delta_j} (\sigma_{+i} \sigma_{-j} + \sigma_{-i} \sigma_{+j}) + \\
\sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) - \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a) \sigma_{zi} \text{ ---} \\
\hat{H} \approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a - \frac{1}{2} \sum_i \tilde{\Delta}_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i (\Omega_i \sigma_{+i} + \Omega_i^* \sigma_{-i}) \\
+ \sum_{i \neq j} \frac{g_i g_j}{2 \Delta_i} (\sigma_{-i} \sigma_{+j} + \sigma_{+i} \sigma_{-j}) \\
\tilde{\Delta}_c = (\omega_c + \sum_i \chi_i \sigma_{zi}) - \omega_d \quad \tilde{\Delta}_{qi} = (\omega_{qi} + \chi_i) - \omega_d \quad \chi_i = \frac{g_i^2}{\Delta_i}
\end{aligned}$$

A.7. Rotaciones X-Y

Tomando $\Omega(t) = \Omega^x(t) \cos(\omega_d t) + \Omega^y \sin(\omega_d t)$, donde ω_d es igual a la frecuencia de resonancia de uno de los qubits logramos rotaciones sobre los ejes X e Y. Las amplitudes de estas rotaciones vienen dadas por $\int_0^{t_0} \Omega^x(t) dt$ y $\int_0^{t_0} \Omega^y(t) dt$, respectivamente, donde t_0 es la duración del pulso.

$$\hat{H} \approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_q \sigma_z + \frac{1}{2} (\Omega^x(t) \sigma_x + \Omega^y(t) \sigma_y)$$

A.8. Compuerta de entrelazamiento

Ejemplo con sólo dos qubits

$$\hat{H} \approx \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_{q_1} \sigma_{z_1} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_{q_2} \sigma_{z_2} + \frac{g_1 g_2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{2 \Delta_1 \Delta_2} (\sigma_{-1} \sigma_{+2} + \sigma_{+1} \sigma_{-2})$$

Variando la frecuencia de resonancia de los qubit, se puede variar el acoplamiento entre estos.

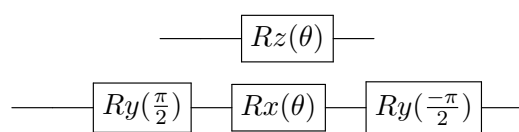
Apéndice B

Cálculos de matrices de adyacencia

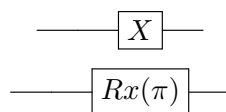
Apéndice C

Circuitos cuánticos

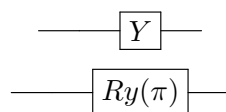
Rotaciones en Z:



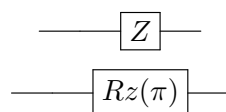
Compuerta X:



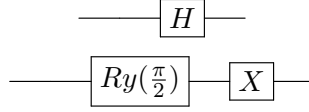
Compuerta Y:



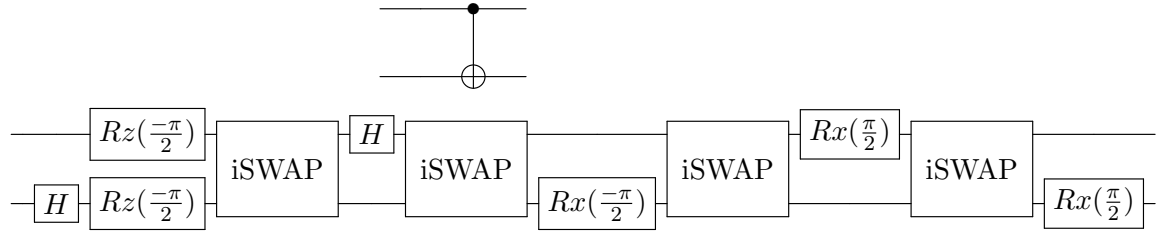
Compuerta Z:



Compuerta H:

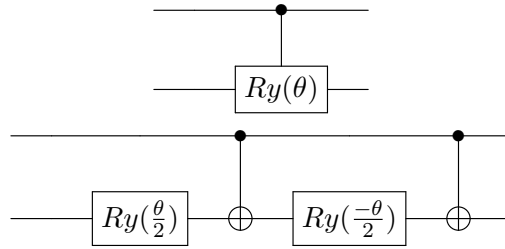


Compuerta CNOT:

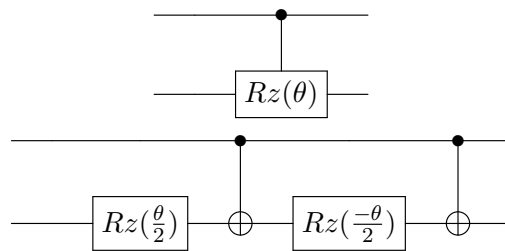


Compuerta CRy:

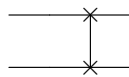
Tomado del paper de Barenco [\[1\]](#)

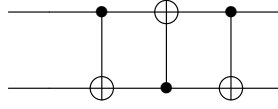


Compuerta CRz:

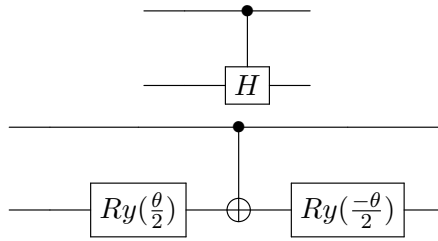


Compuerta SWAP:

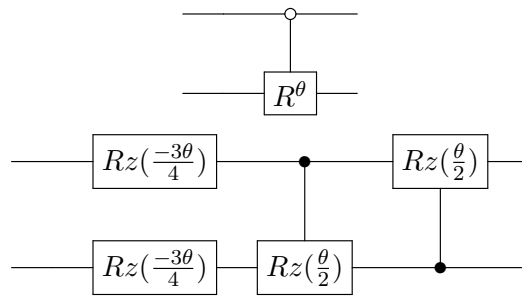




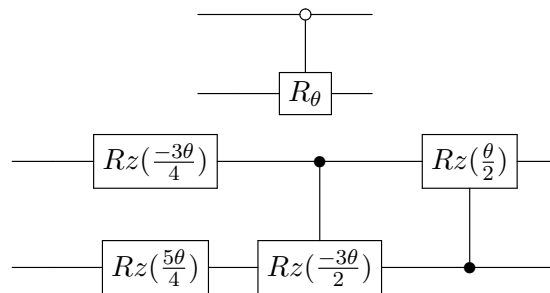
Compuerta CH:



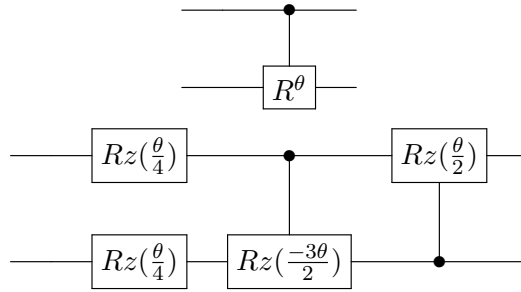
Compuerta CR^θ blanca:



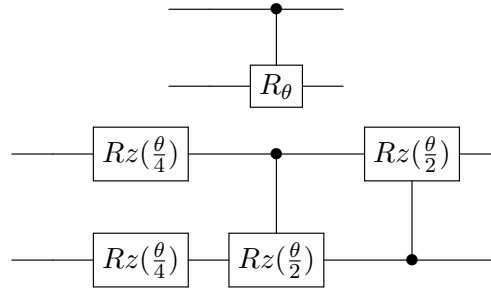
Compuerta CR_θ blanca:



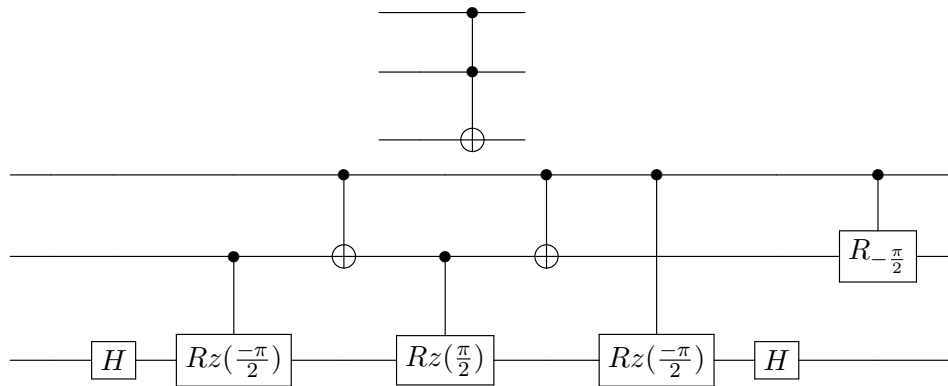
Compuerta CR^θ negra:



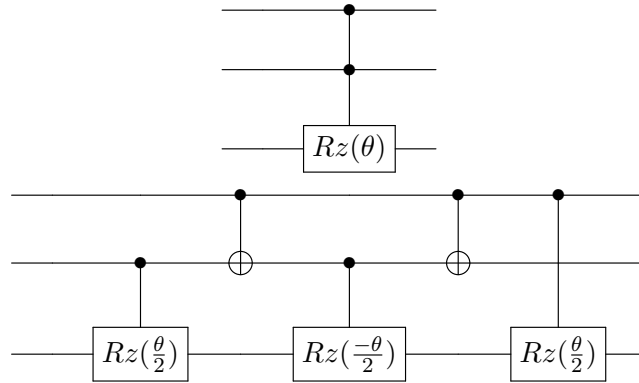
Compuerta CR_θ negra:



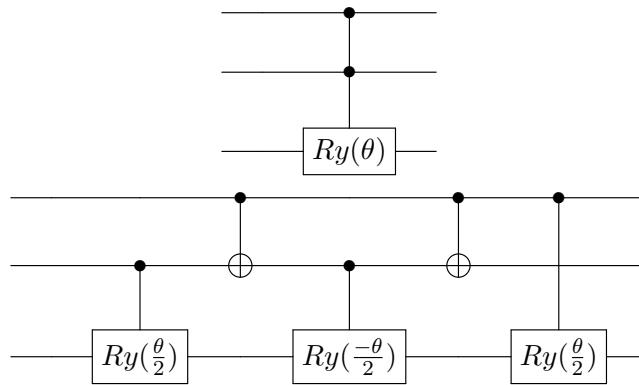
Compuerta de Toffoli (CCNOT):



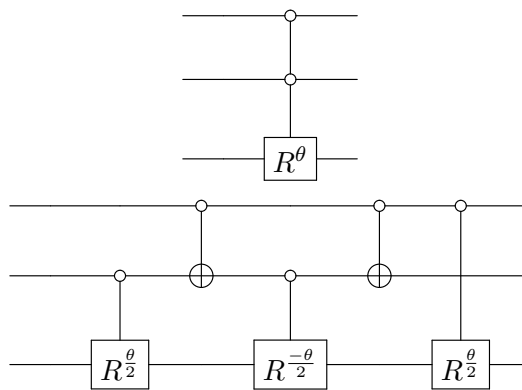
Compuerta CCRz:



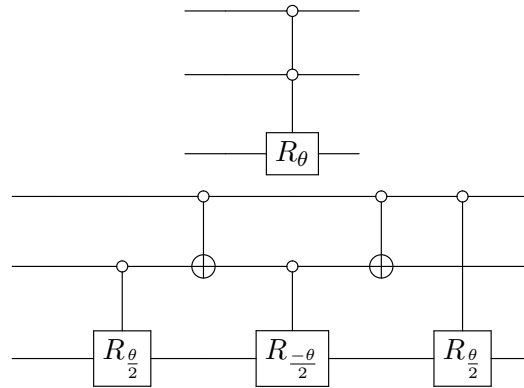
Compuerta CCRy:



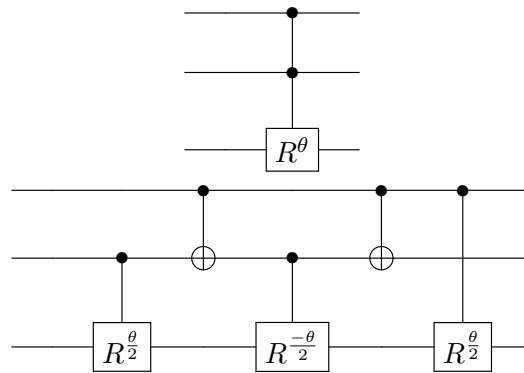
Compuerta CCR^θ blanca:



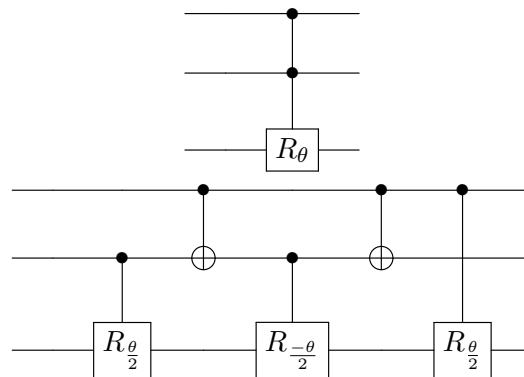
Compuerta CCR_θ blanca:



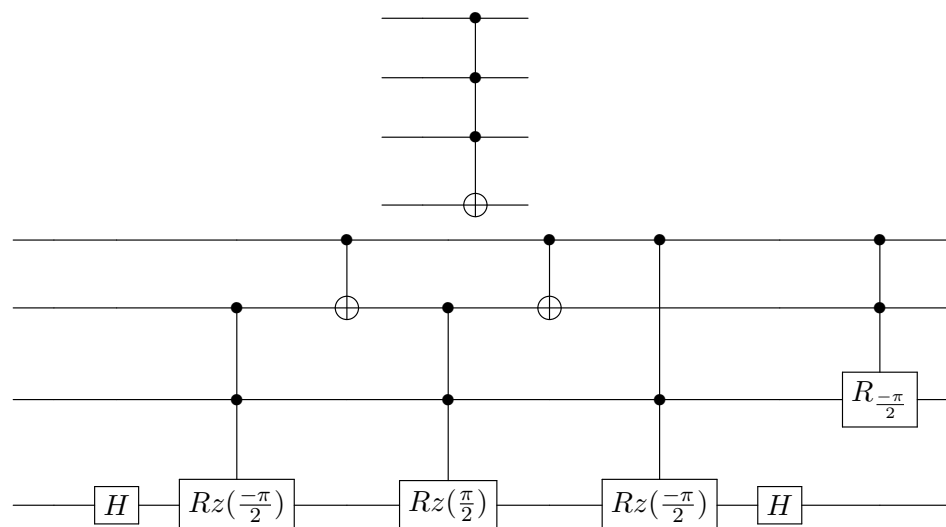
Compuerta CCR^θ negra:



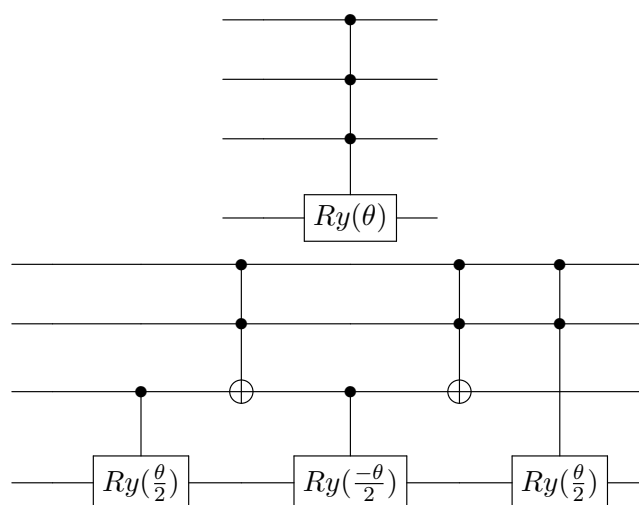
Compuerta CCR_θ negra:



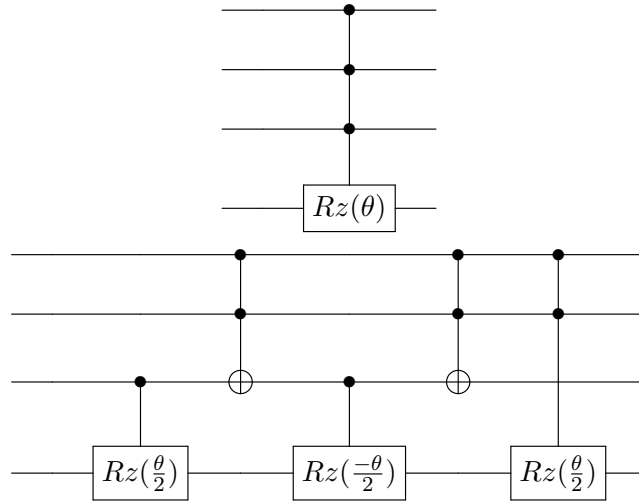
Compuerta CCCNOT:



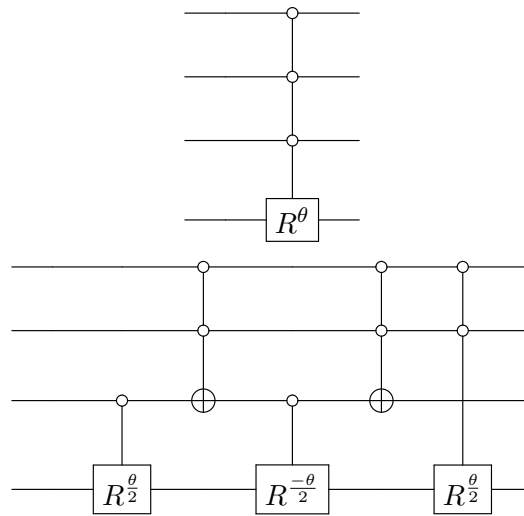
Compuerta CCCRy:



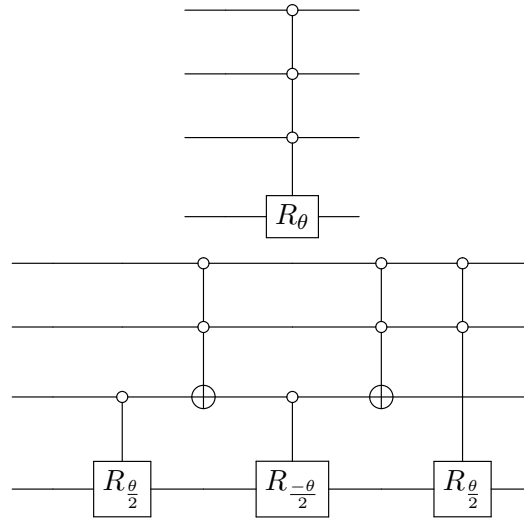
Compuerta CCCRz:



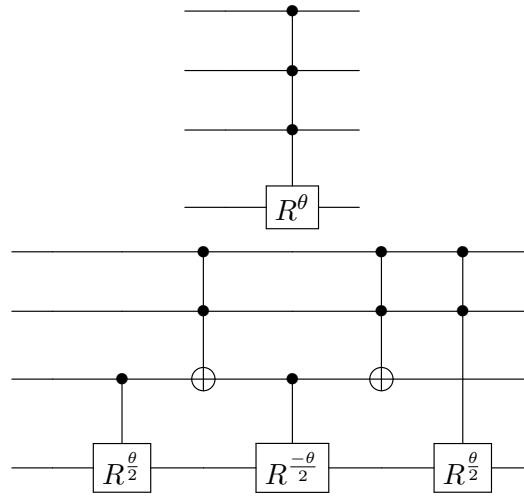
Compuerta $CCCR^\theta$ blanca:



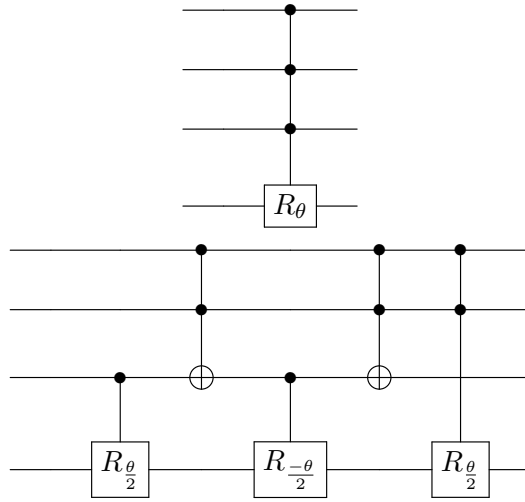
Compuerta $CCCR_\theta$ blanca:



Compuerta $CCCR^\theta$ negra:



Compuerta $CCCR_\theta$ negra:



Bibliografía

- [1] Adriano Barenco, Charles H. Bennet, Richard Cleve, David P. DiVincenzo, Norman Margolus, Peter Shor, Tycho Sleator, Jhon A. Smolin, and Harald Weinfurter. Elementary gates for quantum computation. *Physical Review A*, 1995.
- [2] Sttiwuer Díaz-Solórzano. Esquemas de medidas. *QIC*, 2014.
- [3] Rudolf Gross and Achim Marx. Applied superconductivity: Josephson effect and superconducting electronics. *Walther-Meißner-Institut*, 2005.
- [4] A. P. Drozdov, M. I. Erements, I. A. Troyan, V. Ksenofontov, and S. I. Shylin. Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system. *Nature*, 525:73–76, 2015.
- [5] G. Wendin. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *IOP Science*, 2017.
- [6] Alexandre Blais, Jay Gambetta, A. Wallraff, D. I. Schuster, S. M. Girvin, M. H. Devoret, , and R. J. Schoelkopf. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics. *Physical Review A*, 2007.