

Resumen

Your abstract goes here... ...

Capítulo 1

Introducción

La computación cuántica es como chévere

1.1. Kets, bras y operadores

1.2. Postulados de la mecánica cuántica

1. Un estado puro en mecánica cuántica se representa en términos de un vector normalizado $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} .
2. Si \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 son los espacios de Hilbert asociados a dos sistemas físicos, entonces el espacio del sistema compuesto \mathcal{H} estará dado por el producto tensorial de los dos espacios de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.
3. Para todo observable a , existe un operador hermítico correspondiente A que actúa sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} , cuyos autovalores son los posibles resultados de una medida de este observable.
4. La evolución temporal del sistema sigue la ecuación de Schrödinger $i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle$. Donde \hbar es la constante de Planck reducida y H es el Hamiltoniano del sistema, el cuál es el operador hermítico correspondiente a la energía.
5. Después de realizar una medida del observable a , el estado $|\psi\rangle$ del sistema colapsa a al autoestado de A correspondiente a la medida.

1.3. Computación cuántica

This section's content...

1.3.1. Qubits

Un qubit es un sistema físico de dos niveles, es decir, es un objeto cuyo estado es un elemento del espacio de Hilbert de dimensión $\dim(\mathcal{H}) = 2$ y puede ser escrito de la siguiente manera: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ forma una base de \mathcal{H} y donde α y β son números complejos, tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, conocidos como amplitudes de probabilidad.

El qubit se puede pensar como el equivalente en IC del bit, el cual, por sus propiedad cuánticas, puede estar no sólo puede estar en el estado $|0\rangle$ y en el estado $|1\rangle$, sino también en superposiciones de estos dos.

El estado de un qubit también se puede escribir de la siguiente manera: $|\psi\rangle = e^{i\phi_0} \cos(\theta) |0\rangle + e^{i\phi_1} \sin(\theta) |1\rangle = e^{i\phi_0} (\cos(\theta) |0\rangle + e^{i(\phi_1 - \phi_0)} \sin(\theta) |1\rangle)$, donde θ , ϕ_0 y ϕ_1 son números reales. La fase global ϕ_0 es ignorable, pues no tiene ningún efecto sobre las probabilidades. Entonces, sin pérdida de generalidad, $|\psi\rangle = \cos(\theta) |0\rangle + \sin(\theta)e^{i\phi} |1\rangle$, donde $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. De esta manera, podemos representar los qubits en una esfera unitaria, conocida como esfera de Bloch.

1.3.2. Compuertas cuánticas

Las operaciones unitarias con las que se opera sobre los qubits reciben el nombre de compuertas cuánticas.

Las compuertas de un sólo qubit pueden ser vistas como rotaciones en la esfera de Bloch.

Compuerta identidad

Esta operación es equivalente a *no-operation* en una computadora clásica.

$$\text{---} \boxed{I} \text{---} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compuerta X

Este es el equivalente al NOT clásico, pues transforma los $|0\rangle$ en $|1\rangle$ y viceversa, ya que realiza una rotación de π sobre el eje X en la esfera de Bloch. Su forma matricial viene dada por la matriz de Pauli σ_x

$$\text{---} \boxed{X} \text{---} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Compuerta Z

Esta compuerta no tiene análogo clásico, pues lo que realiza es un cambio de fase. Esto equivale a una rotación de π sobre el eje Z en la esfera de Bloch. Su forma matricial viene dada por la matriz de Pauli σ_z

$$\text{---} \boxed{Z} \text{---} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Compuerta Y

Esta compuerta realiza una rotación de π sobre el eje y de la esfera de Bloch. Su forma matricial viene dada por la matriz de Pauli σ_y

$$\text{---} \boxed{Y} \text{---} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Compuerta de Hadamard

Esta compuerta transforma los estados de la base computacional $|0\rangle$ y $|1\rangle$ en estados de superposiciones uniformes ($|+\rangle$ y $|-\rangle$). También se puede interpretar como el mapa de la base Z a la base X.

$$\text{---} \boxed{H} \text{---} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Compuerta S

Esta compuerta es la raíz cuadrada de Z.

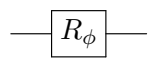
$$\text{---} \boxed{S} \text{---} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Compuerta T

Esta compuerta es la raíz cuadrada de S.

$$\text{---} \boxed{T} \text{---} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

Compuerta de cambio de fase



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

Compuertas de rotación

$$R(\theta, \vec{r}) = e^{i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{r}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) + iz\sin(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2})(ix + y) \\ \sin(\frac{\theta}{2})(ix - y) & \cos(\frac{\theta}{2}) - iz\sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & i\sin(\frac{\theta}{2}) \\ i\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) = R_z(\frac{\pi}{2})R_y(\theta)R_z(\frac{-\pi}{2})$$

Compuerta CNOT



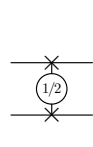
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Compuerta SWAP



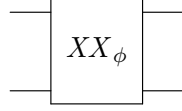
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compuerta $\sqrt{\text{SWAP}}$



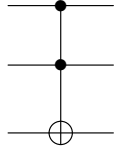
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compuerta de Ising



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -ie^{i\phi} \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ -ie^{-i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

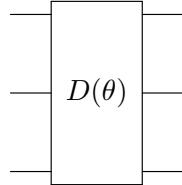
Compuerta de Toffoli



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compuerta de Fredkin

Compuerta de Deutsch



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & i \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$|a, b, c\rangle \rightarrow \begin{cases} i \cos(\theta) |a, b, c\rangle + \sin(\theta) |a, b, c \oplus 1\rangle & \text{si } a = b = 1 \\ |a, b, c\rangle & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1.3.3. Correspondencia entre compuertas clásicas y cuánticas

1.3.4. Conjuntos universales de compuertas cuánticas

Un conjunto universal de compuertas cuánticas (CUCC) es un conjunto finito de compuertas cuánticas con el cuál se puede aproximar cualquier

operación unitaria arbitrariamente bien.

Cualquier operador unitario puede ser escrito en función de compuertas de uno y dos qubits [Barenco et al. 1995].

Un CUCC simple es $\{H, T, CNOT\}$.

Existe un CUCC de una sólo compuerta, la compuerta de Deutsch, $D(\theta)$.

La compuerta de Toffoli es un caso especial de la compuerta de Deutsch, $D(\frac{\pi}{2})$.

Otro CUCC consiste en la compuerta de Ising y la compuerta de cambio de fase, $\{XX_\phi, R_z(\theta)\}$. Este conjunto es nativo en algunas computadoras cuánticas de trampas de iones.

1.3.5. Compuertas no cliffordianas

Las compuertas cliffor

1.3.6. Circuitos cuánticos

1.3.7. Paralelismo cuántico

1.3.8. Algoritmos cuánticos

1.3.9. Criterios de DiVincenzo

Para construir un computador cuántico, se deben cumplir las siguientes condiciones experimentales:

1. Un sistema físico escalable con qubits bien caracterizados.
2. La habilidad de inicializar el estado de los qubits en un estado fiducial simple.
3. Tiempos de coherencia relevantes largos.
4. Un conjunto universal de compuertas cuánticas.
5. La capacidad de medir qubits en específico.

Capítulo 2

Superconductividad

Los qubits superconductores se basan en circuitos osciladores no lineales, hechos a partir de uniones de Josephson (Josephson Junctions - JJ). [Wendin]

El Hamiltoniano de un oscilador armónico LC está dado por

$$\hat{H} = E_C \hat{n}^2 + E_L \frac{\hat{\phi}^2}{2},$$

donde \hat{n} es la cantidad de pares de Cooper inducidos en el capacitor (En otras palabras, la carga inducida en el capacitor, medida en unidades de $2e$), y $\hat{\phi}$ es la diferencia de fase sobre el inductor. La carga \hat{n} y la fase $\hat{\phi}$ no conmutan, $[\hat{\phi}, \hat{n}] = i$, lo que significa que sus valores esperados no se pueden medir simultaneamente. $E_C = \frac{(2e)^2}{2C}$, $E_L = \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L}$ y la distancia entre niveles de energía del oscilador armónico $\hbar\omega = \frac{\hbar}{\sqrt{LC}} = \sqrt{2E_L E_C}$.

Para poder servir como qubit, el oscilador debe ser anarmónico, de manera que se pueda operar sobre un par específico de niveles de energía. Al agregar una JJ, el Hamiltoniano del circuito LCJ se convierte en:

$$\hat{H} = E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_{J0} \cos(\hat{\phi}) + E_L \frac{(\hat{\phi} - \phi_e)^2}{2},$$

donde n_g es la carga inducida por voltaje en el capacitor C (isla qubit) y ϕ_e es la fase inducida por flujo sobre la JJ. La energía de Josephson E_{J0} está dada por $E_{J0} = \frac{\hbar}{2e} I_0$ en términos de la corriente crítica I_0 de la unión.

Usualmente, la JJ es del tipo Superconductor-Aislante-Superconductor con corriente crítica fija.

Con el fin de introducir la inductancia no lineal de Josephson, empezamos por

$$I_J = I_0 \sin(\phi)$$

Combinado con la ley de Lenz:

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}, \quad \Phi_0 = \frac{h}{2e}$$

Se encuentra que:

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{I_0 \cos(\phi)} \frac{dI_J}{dt}$$

Definiendo $L_J = V(\frac{dI_J}{dt})^{-1}$, se obtiene finalmente la inductancia de Josephson L_{J0} :

$$L_J = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{I_0 \cos(\phi)} = L_{J0} \frac{1}{\cos(\phi)}$$

Esto define la inductancia de Josephson de la JJ aislada y nos permite expresar la energía de Josephson como $E_{J0} = \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L_{J0}}$

$$[E_C(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} - n_g)^2 + U(\phi)]\psi = E\psi$$

$$U(\phi) = -E_{J0} \cos(\phi) + E_L \frac{(\phi - \phi_e)^2}{2}$$

1. $E_L = 0$ ($L \sim \infty$) :
2. $E_L \approx E_{J0}$:

2.1. Transmonios

Tratando el transmonio como un sistema de dos niveles acoplado linealmente a un oscilador monomodo, su Hamiltoniano toma la siguiente forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} + \hat{H}_r = -\frac{1}{2}\epsilon\sigma_z + g\sigma_x(a + a^\dagger) + \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

donde ϵ es la energía de excitación del qubit, g es el acoplamiento qubit-oscilador y ω es la frecuencia del oscilador.

Introduciendo los operadores escalera del qubit, $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$, el término de interacción \hat{H}_{qr} se puede dividir en dos términos, el de Jaynes-Cummings (JC) y el anti-Jaynes-Cummings (AJC):

$$\hat{H}_{qr} = \hat{H}_{qr}^{JC} + \hat{H}_{qr}^{AJC} = g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) + g(\sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a)$$

Este Hamiltoniano describe el modelo cuántico canónico de Rabi (canonical quantum Rabi model - QRM). Las ecuaciones (()) son completamente generales y aplicables a cualquier sistema qubit-oscilador. Mantener sólo el término JC corresponde a realizar la aproximación de onda rotativa (rotating wave approximation - RWA).

2.2. Hamiltonianos multiqubit de transmonios

Omitiendo el término del oscilador, el Hamiltoniano toma la siguiente forma general:

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} + \hat{H}_{qq} = -\frac{1}{2} \sum_i \epsilon_i \sigma_{zi} + \sum_i g_i \sigma_{xi} (a + a^\dagger) + \frac{1}{2} \sum_{i,j;\nu} \lambda_{\nu,ij} \sigma_{\nu i} \sigma_{\nu j}$$

Por simplicidad, se considera que el término \hat{H}_{qr} se refiere sólo a la lectura y las operaciones de bus, dejando la interacción indirecta qubit-qubit via el resonador ser incluidas en \hat{H}_{qq} via la constante de acoplamiento $\lambda_{\nu,ij}$.

2.2.1. Acoplamiento capacitivo

$$\begin{aligned} \hat{H}_{qq} &= \lambda_{12} \sigma_{x1} \sigma_{x2} \\ \lambda_{12} &= \frac{1}{2} \sqrt{E_{10,1} E_{10,2}} \frac{\sqrt{E_{EC1} E_{EC2}}}{E_{Cc}} = \frac{1}{2} \sqrt{E_{10,1} E_{10,2}} \frac{Cc}{\sqrt{C_1 C_2}} \approx \frac{1}{2} E_{10} \frac{C_c}{C} \\ \hat{H}_{qq} &= \lambda_{12} (\sigma_{+1} \sigma_{-2} + \sigma_{-1} \sigma_{+2}) \end{aligned}$$

2.2.2. Acoplamiento por el resonador

$$\begin{aligned}\hat{H}_{qq} &= \lambda_{12} \sigma_{x1} \sigma_{x2} \\ \lambda_{12} &= \frac{1}{2} g_1 g_2 \left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} \equiv g_1 g_2 \frac{1}{\Delta} \right) \\ \Delta_i &= \epsilon_i - \hbar \omega\end{aligned}$$

2.2.3. Acoplamiento de JJ

$$\begin{aligned}\hat{H}_{qq} &= \lambda_{12} \sigma_{y1} \sigma_{y2} \\ \lambda_{12} &\approx \frac{1}{2} E_{10} \frac{L_c}{L_J} \frac{\cos(\delta_c)}{2L_c \cos(\delta_c) + L_{Jc}}\end{aligned}$$

2.2.4. Acoplamiento afinable/calibrable

2.3. Compuertas cuánticas en transmonios

2.3.1. El operador de evolución temporal

La evolución temporal de un sistema complejo (many-body) puede ser descrita por la ecuación de Schrödinger para el vector de estado $|\psi(t)\rangle$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle$$

en términos del operador evolución $\hat{U}(t, t_0)$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

determinado a partir del Hamiltoniano complejo (many-body) dependiente del tiempo del sistema:

$$\hat{H} = \hat{H}_{sys} + \hat{H}_{ctrl}(t)$$

describiendo el sistema intrínseco y las operaciones de control aplicadas. Las compuertas son el resultado de aplicar pulsos de control específicos a partes selectas de un circuito físico. Esto afecta varios términos del Hamiltoniano, haciéndolos dependientes del tiempo.

Para el transmonio, el Hamiltoniano del sistema bajo la RWA toma la forma:

$$\hat{H}_{syst} = -\frac{1}{2} \sum_{\nu i} \epsilon_i \sigma_{zi} + \sum_i g_i (\sigma_{+i} a + \sigma_{-i} a^\dagger) + \hbar \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_{i,j;\nu} \lambda_{\nu,ij} (\sigma_{+i} \sigma_{-j} + \sigma_{-i} \sigma_{+j})$$

y el término de control se puede escribir como:

$$\hat{H}_{ctrl} = \sum_{i;\nu} f_{\nu i}(t) \sigma_{\nu i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j;\nu} h_{\nu,ij}(t) \sigma_{\nu i} \sigma_{\nu j} + k(t) a^\dagger a$$

Capítulo 3

Algoritmo de Grover

El algoritmo de Grover es un AC que encuentra con alta probabilidad la entrada única de una función de caja negra que produce un valor particular de salida, usando tan sólo $O(\sqrt{N})$ evaluaciones de la función, donde N es el tamaño del dominio de la función. El análogo clásico de este algoritmo requiere $O(N)$ evaluaciones de la función, pues, el elemento correcto podría ser el N -ésimo en ser evaluado y se deben evaluar uno por uno. La aplicación directa de este algoritmo es como algoritmo de búsqueda en una base de datos. Sin embargo, su aplicación más eficiente es como subrutina en diversos procesos de optimización.

3.1. El operador de difusión de Grover

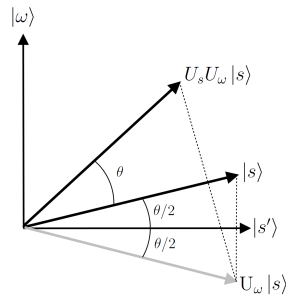
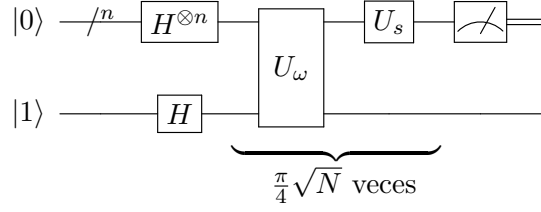


Figura 3.1: Interpretación geométrica del operador difusión

$$U_s = 2|s\rangle\langle s| - I$$
$$U_\omega = I - 2|\omega\rangle\langle\omega|$$

3.2. El algoritmo



1. Inicializar el estado del sistema.
2. Aplicar la transformada de Walsh-Hadamard.
3. Realizar la iteración de Grover $\lfloor \frac{\pi}{4}\sqrt{N} \rfloor$ veces.
 - a) Aplicar U_{ω} .
 - b) Aplicar U_s .
4. Realizar la medida Ω .

Capítulo 4

Algoritmo de Shor

El algoritmo de Shor es un AC de factorización de enteros. Dado un entero $N = p \times q$, donde p y q son primos, el algoritmo de Shor encuentra p y q en $O((\log(N))^3)$ pasos. El algoritmo clásico más eficiente para factorizar enteros es la cibra general del cuerpo de números y funciona con una complejidad heurística de $O(e^{(\sqrt[3]{64}+o(1))(\ln(N))^{\frac{1}{3}}(\ln(\ln(N)))^{\frac{2}{3}}})$. Por su capacidad de factorizar números semiprimos, el algoritmo de Shor es capaz de violar el cifrado RSA y el protocolo Diffie-Hellman de intercambio de llaves, sobre los cuáles se basa virtualmente toda la criptografía actual.

4.1. Transformadas integrales

4.2. Transformada cuántica de Fourier

4.3. Estimación de fase

4.4. Estimación de orden

4.5. Algoritmo de Shor

Capítulo 5

Google PageRank

El algoritmo de PageRank fue desarrollado en 1996 en la Universidad de Stanford por Larry Page y Sergey Brin, los cuales fueron los fundadores de Google.

Este algoritmo se basa en la idea de que sitios web importantes tienen muchos vínculos que apuntan hacia ellos, lo que conduce a pensar en la web como una red ponderada orientada.

Existen muchos otros algoritmos, algunos más eficientes, pero la importancia de PageRank se sustenta en el poder económico de Google.

Ilustraremos el algoritmo de PageRank con un ejemplo sencillo:

Ejemplo:

Consideremos 5 páginas web distintas a las que denotaremos por 1, 2, 3, 4, y 5, y cuyo grafo es:

Pasos:

1. Determinar la matriz de adyacencia. Algunos autores denotan la matriz de adyacencia por M en el protocolo de PageRank

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sumamos los elementos de cada una de las columnas.

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{matrix}$$

Estas sumas representan el número de links que salen del nodo o vértice de la página p_j , es decir:

$I(p_j) \equiv$ Importancia de la página j

$\text{outdeg}(p_j) \equiv$ número de links que salen de la página p_j

$$I(p_i) \equiv \sum_{j \in B_i} \frac{I(p_j)}{\text{outdeg}(p_j)}$$

$B_i \equiv$ conjunto de páginas que son linkeadas

3. Dividimos cada elemento de M por la suma de los elementos de la columna a la cual corresponde y llamaremos a la nueva matriz obtenida M'

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. El siguiente paso es encontrar un vector \vec{v} (algunos autores lo llaman \vec{I}) que represente el PageRank de cada una de las páginas. Como tenemos 5 páginas web le asignamos a \vec{v} como valores $\vec{v} = (a, b, c, d, e)^T$, obteniendo así un vector de dimensión $d = 5$.
5. Obtenemos los valores de $\{v_i\}$ a partir de los autovalores de M' , tal que:

$$M'\vec{v} = \lambda\vec{v} \text{ con } \lambda \in R$$

6. Determinamos los autovalores de M'

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = \frac{-2}{3}; \quad \lambda_3 = \frac{-1}{2}; \quad \lambda_4 = \frac{-1}{3}; \quad \lambda_5 = \frac{1}{3}$$

Tomaremos sólo $\lambda = 1 \rightarrow M'\vec{v} = \vec{v}$ (Ecuación autoconsistente)

7. Hallamos el autovector asociado a $\lambda = 1$. Obteniendo:

$$a = 6; \quad b = 1; \quad c = \frac{16}{3}; \quad d = \frac{14}{3}; \quad e = 3$$

8. Finalmente, Google ordena de mayor a menor las componentes de \vec{v} , quedándonos:

$$\begin{array}{rcl} & & - \quad a \\ & & - \quad c \\ \text{Pantalla} & \rightarrow & - \quad d \\ & & - \quad e \\ & & - \quad b \end{array}$$

La idea de PageRank de Google es que la importancia de una página viene dada por la cantidad de páginas que se enlazan con ella.

Surgen varios problemas:

1. Las matrices hyperlink (hiperenlace) pueden tener billones de entradas en filas y columnas.
2. Calcular los autovectores es un absurdo computacional.
3. Los estudios muestran que un nodo (página web) tiene un promedio de 10 enlaces, y las demás entradas de la matriz son cero.
4. No se encuentra $\lambda = 1$ en la mayoría de los casos.

Por esta razón, un remedio (Patching) del algoritmo de PageRank fue el método de las potencias, en el cual la matriz hiperenlace

$$H_{ij} \equiv \begin{cases} \frac{1}{\text{outdeg}(P_j)} & \text{si } P_j \in B_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

debería converger a una solución autoconsistente

$$I^{k+1} = HI^k$$

donde se toma un vector I^0 y se hace interactuar unas 100 veces y el orden mostrado de las páginas es el de I^{100} , ordenadas de mayor a menor. Si se normalizan las columnas de la matriz hipervínculo (hiperenlace) H , obtenemos otra matriz hiperenlace normalizada E .

La matriz E : se sabe de la teoría de matrices estocásticas que 1 es uno de sus autovalores. Además, también se sabe que la convergencia de $I^k = EI^{k-1}$ a $I = EI$ depende del segundo autovalor de E y es un hecho que $I^k = EI^{k-1}$ converge rápidamente si $|\lambda_2|$ es cercano a cero.

5.0.1. El algoritmo de remiendo (parcheo) general

Asumamos que el caminante recorre el grafo siguiendo la web con una matriz estocástica E con probabilidad α , y con probabilidad $1 - \alpha$ podrá ir a cualquier página al azar que sea de su interés. La matriz web de este proceso será:

$$G \equiv \alpha E + \frac{1 - \alpha}{N} \mathbb{I} \text{Matriz de Google}$$

\mathbb{I} es una matriz en la cual todas las entradas están establecidas en 1, y N el número de nodos.

Propiedades de G :

1. Es estocástica
2. Irreducible
3. Primitiva
4. El resultado de determinar el estado auto-consistente no depende del vector Google inicial I^0

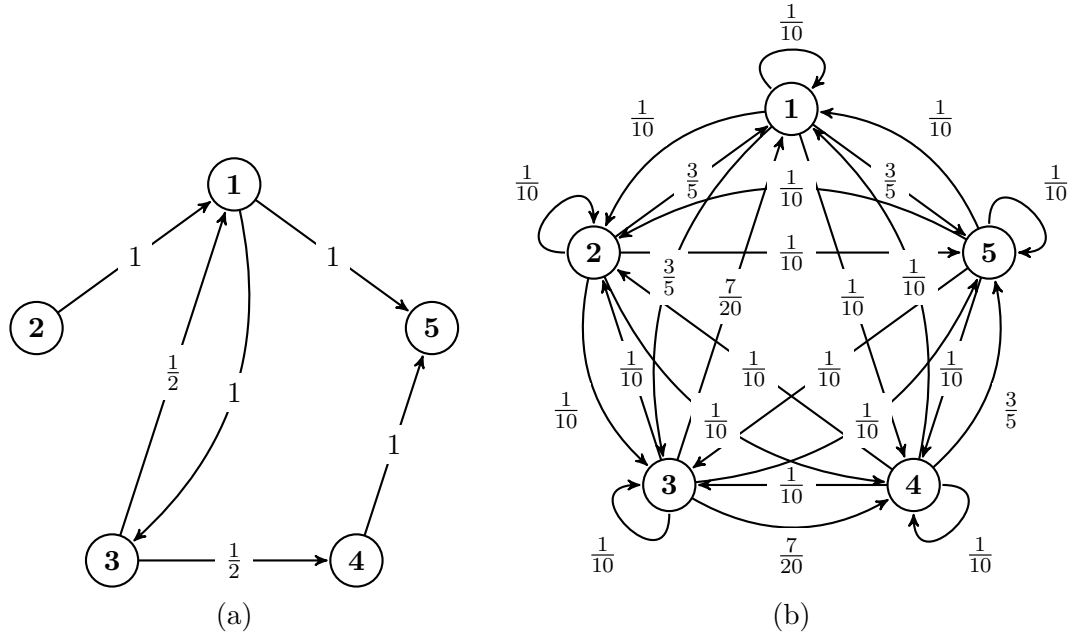


Figura 5.1: Grafo correspondiente a la matriz de adyacencia (a) de la red E (b) remendada de Google G con $\alpha = \frac{1}{2}$

5.0.2. Interpretación como una caminata aleatoria

La asignación de valores de importancia se puede replantear como la probabilidad de encontrar un caminante aleatorio en cierto nodo del grafo.

Del proceso:

De la ley de probabilidad total:

$$\begin{aligned}
 &Pr(x^{(n+1)} = p_i) && Pr(x^{(n+1)} = p_i) \\
 &= \sum_j G_{ij} Pr(x^{(n)} = p_j) && = \sum_j Pr(x^{(n+1)} = p_i | x^{(n)} = p_j) Pr(x^{(n)} = p_j) \\
 &\implies G_{ij} = Pr(x^{(n+1)} = p_i | x^{(n)} = p_j)
 \end{aligned}$$

En el contexto del Internet, G_{ij} es la probabilidad de que un cierto internauta, que se encuentra en la página p_i , entre en la página p_j . El factor αE_{ij} es la probabilidad de que lo haga presionando un enlace presente en p_i , mientras que $\frac{1-\alpha}{N} \mathbb{I}$ es la probabilidad de que lo haga introduciendo la URL directamente.

El factor de amortiguamiento es libre y debe ser calibrado. Se suele usar $\alpha = 0,85$

5.0.3. Cuantizando las caminatas aleatorias

La forma obvia y directa de cuantizar una caminata aleatoria sería sustituir el conjunto de nodos $\{p_i\}$ por el conjunto de kets $\{|i\rangle\}$. Sin embargo, esto lleva a sistemas con operadores no unitarios y no es realizable.



Esto nos obliga a buscar maneras alternativas de cuantizar las caminatas aleatorias. La cadena anterior se podría cuantizar agregando un espacio "moneda".^{al} espacio de Hilbert generado por $\{|i\rangle\}$. En este caso, el operador de difusión se interpreta como "lanzar la moneda" para decidir en qué dirección ir.

$$\begin{aligned}
 U &= \sqrt{p} |i+1\rangle\langle i| \otimes |c\rangle\langle c| + \sqrt{1-p} |i-p\rangle\langle i| \otimes |s\rangle\langle s| \\
 U^\dagger &= \sqrt{p} |i\rangle\langle i+1| \otimes |c\rangle\langle c| + \sqrt{1-p} |i\rangle\langle i-p| \otimes |s\rangle\langle s| \\
 UU^\dagger &= p |i+1\rangle\langle i+1| \otimes |c\rangle\langle c| + (1-p) |i-1\rangle\langle i-1| \otimes |s\rangle\langle s|
 \end{aligned}$$

Al realizar la suma sobre i se tiene $\mathbb{1}$, como se deseaba. Sin embargo, esta solución todavía no es satisfactoria, pues exige que $p_{ij} = \frac{1}{\text{outdeg}(j)}$ para que $UU^\dagger = \mathbb{1}$.

Casi todas las cuantizaciones cometen estos dos pecados, aumentar la dimensión del espacio de Hilbert e imponer condiciones sobre el grafo; y en general, se debe cometer al menos uno de los dos.

Nota: También existen caminatas cuánticas continuas, no sólo discretas.

5.0.4. Caminata cuántica de Szegedy

Existe un tipo particular de caminatas aleatorias conocido como caminatas bipartitas. En éstas se tiene dos conjuntos de nodos y sólo ocurren transiciones entre los dos conjuntos, no dentro del mismo.

Szegedy desarrolló una cuantización de estas caminatas. Para esto utilizó operadores de reflexión ($W = \mathbb{1} - 2|w\rangle\langle w|$, similares a los utilizados en el algoritmo de Grover). Aprovechándose del hecho de que un par de reflexiones equivale a una rotación (como en el algoritmo de Grover), creó el siguiente operador de evolución de la caminata: $U = (\mathbb{1} - 2B)(\mathbb{1} - 2A)$, donde A es el proyector sobre las transiciones de la primera partición a la segunda y B de la segunda a la primera.

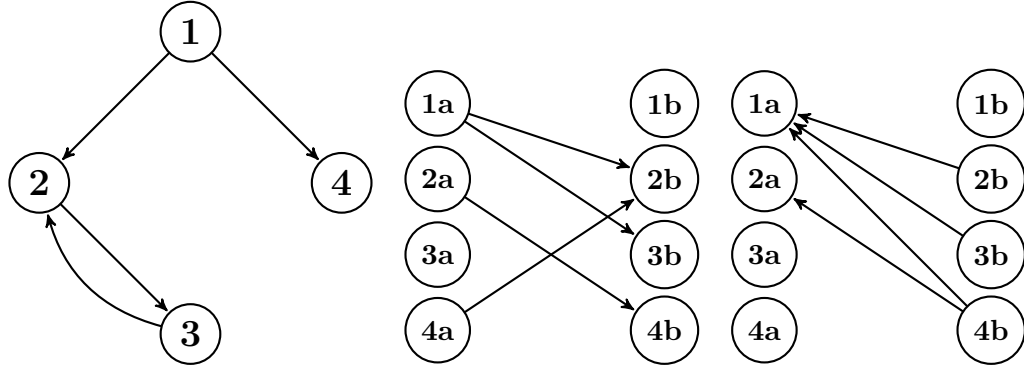
$$|\psi_i\rangle = |i\rangle_1 \otimes \sum_j \sqrt{p_{ji}} |j\rangle_2$$

$$A = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

$$|\psi_i\rangle = \sum_i \sqrt{p_{ij}} |i\rangle_1 \otimes |i\rangle_2$$

$$B = \sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

Si tomamos un grafo cualquiera y lo duplicamos en la forma de un grafo bipartito con ambas particiones iguales y transiciones iguales en ambos sentidos, podemos cuantizar cualquier tipo de caminata. Sólo hay que pagar el precio de duplicar el espacio de Hilbert generado por $\{|i\rangle\}$: $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.



En estos casos, podemos escribir el operador de difusión en términos de sólo A, pues como la segunda partición es un reflejo de la primera, $B = A^T$. Entonces: $U = (2A^T - \mathbb{1})(2A - \mathbb{1})$

$$\Rightarrow = (2SAS - \mathbb{1})(2A - \mathbb{1}) = S(2A - \mathbb{1})S(2A - \mathbb{1}) = [S(2A - \mathbb{1})]^2$$

Donde S es el operador SWAP, $S = \sum_{ij} |ji\rangle\langle ij|$

5.0.5. PageRank cuántico

Finalmente, procedemos a cuantizar el algoritmo de PageRank. Partimos del hecho de que el algoritmo de PageRank se puede formular como una caminata aleatoria, cuya matriz de probabilidades es la matriz de Google, G . Entonces seguimos el procedimiento de Szegedy, sustituyendo p_{ij} por G_{ij} .

Ahora, definimos el valor de PageRank cuántico en el paso m como:

$$I_q(P_i, m) = \left| U^{\dagger m} (\mathbb{1} \otimes |i\rangle\langle i|) \right\rangle$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i |\psi_i\rangle$$

Esto equivale a realizar m pasos de la caminata con $|\psi_0\rangle$ como estado inicial y realizar una medida proyeciva sobre $|i\rangle_2$.

Nota: I_q no converge, sino que oscila, así que se toma el centro de las oscilaciones como la medida de importancia de las páginas. Esto se hace promediando I_q sobre m : $\langle I_q(P_i) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} I_q(P_i, m)$