



Universidad Simón Bolívar
Decanato de Estudios Profesionales
Coordinación de Ingeniería de Electrónica

Diseño y Simulación de Procesadores Cuánticos que Implementen Algoritmos Cuánticos de Búsqueda

Por:

Miguel Casanova

Realizado con la asesoría de:

Enrique Castro y Sttiwuer Diaz

PROYECTO DE GRADO

Presentado ante la Ilustre Universidad Simón Bolívar
como requisito parcial para optar al título de
Ingeniero Electrónico

Sartenejas, noviembre de 2018

Índice general

Índice de Figuras	5
Lista de Tablas	7
1. Introducción	9
1.1. JUSTIFICACION	14
1.2. OBJETIVOS	16
1.2.1. Objetivo General:	16
1.2.2. Objetivos Específicos:	16
1.2.3. Fases del Proyecto	16
1.2.4. REFERENCIAS	17
2. Información cuántica	20
2.1. Función de onda	20
2.2. Espacio de Hilbert	21
2.3. Delta de Kronecker	22
2.4. Operadores hermíticos	23
2.5. Operadores unitarios	23
2.6. Notación de Dirac	23
2.7. Producto tensorial	25
2.8. Postulados de la mecánica cuántica	27
2.9. Matriz densidad	28
2.10. Traza parcial	30
2.10.1. Comparación con el producto tensorial	31
2.11. Entrelazamiento	31
2.12. Computación cuántica	32
2.12.1. Qubits	32
2.12.2. Esfera de Bloch	33
2.12.3. Conmutador y anticonmutador	33
2.12.3.1. Conmutador	34
2.12.3.2. Anticonmutador	34
2.12.4. Matrices de Pauli	34
2.12.5. Circuitos cuánticos	35
2.12.6. Compuertas cuánticas de un qubit	37
2.12.6.1. Compuerta identidad	37

2.12.6.2. Compuerta X	38
2.12.6.3. Compuerta Z	38
2.12.6.4. Compuerta Y	39
2.12.6.5. Compuerta de Hadamard	40
2.12.6.6. Compuerta S	40
2.12.6.7. Compuerta T	41
2.12.6.8. Compuerta de cambio de fase	41
2.12.6.9. Compuertas de rotación	42
2.12.7. Compuertas multiqubit	43
2.12.7.1. Compuerta CNOT	43
2.12.7.2. Compuerta SWAP	44
2.12.7.3. Compuerta $\sqrt{\text{SWAP}}$	45
2.12.7.4. Compuerta de Ising	45
2.12.7.5. Compuerta de Toffoli	46
2.12.7.6. Compuerta de Deutsch	46
2.12.8. Conjuntos universales de compuertas cuánticas	47
2.12.9. Criterios de DiVincenzo	48
2.13. Fidelidad	48
2.14. Medidas proyectivas	49
3. Superconductividad	50
3.1. Cuantización macroscópica y superconductividad	50
3.2. La teoría BCS	52
3.3. Cuantización del flujo magnético y efecto tunel Giaver	60
3.4. Efecto Josephson	66
3.5. Componentes de la corriente en las uniones de Josephson	71
3.6. Qubits superconductores	72
3.7. Arquetipos de qubits superconductores	73
3.7.1. Qubit de carga	73
3.7.2. Qubit de flujo	74
3.7.3. Qubit de fase	74
3.8. Transmones	74
3.9. Hamiltonianos multiqubit de transmones	75
3.9.1. Acoplamiento capacitivo	75
3.9.2. Acoplamiento por el resonador	75
3.9.3. Acoplamiento de JJ	76
3.9.4. Acoplamiento afinable/calibrable	76
3.10. Compuertas cuánticas en transmones	76
3.10.1. El operador de evolución temporal	76
3.10.2. Pulsos de microondas	77
3.10.3. Régimen rotacional del pulso	77
3.10.4. Efecto del pulso sobre el qubit	77
3.10.5. Régimen dispersivo	78
3.10.6. Rotaciones X-Y	78

3.10.7. Compuerta de entrelazamiento	79
3.10.8. Compuertas compuestas	79
4. El simulador	80
4.1. Parámetros de los sistemas simulados	81
4.2. Compuertas simples	82
4.2.1. Rx y Ry	82
4.2.2. iSWAP	84
4.3. Compuertas compuestas	85
4.3.1. X	85
4.3.2. Y	85
4.3.3. Rz	85
4.3.4. Z	86
4.3.5. H	86
4.3.6. CNOT	86
4.3.7. SWAP	86
4.3.8. Compuertas condicionales generales	87
4.3.9. CP	88
5. Algoritmo de Grover	92
5.1. El algoritmo	97
5.2. Variaciones y generalizaciones del algoritmo de Grover	98
5.2.1. Algoritmo de amplificación de amplitud	98
5.2.2. Algoritmo de Grover en un paso	101
5.3. Simulaciones	101
5.3.1. Algoritmo de Grover	101
5.3.2. Amplificación de amplitud	103
5.3.3. Optimización del algoritmo de Grover	103
6. Algoritmo de Shor	102
6.1. Transformada cuántica de Fourier	102
6.2. Estimación de fase	104
6.3. Estimación de orden	107
6.4. Expansión en fracciones continuas	110
6.5. Algoritmo de factorización de Shor	111
6.6. Simulaciones	112
6.6.1. Factorización del número 15	112
6.6.2. Factorización del número 8	115
7. Google PageRank	117
7.1. El algoritmo de remiendo (parcheo) general	120
7.2. Interpretación como una caminata aleatoria	121
7.3. Cuantizando las caminatas aleatorias	122
7.4. Caminata cuántica de Szegedy	122
7.5. PageRank cuántico	124

7.6. Circuitos de las caminatas cuánticas de Szegedy	124
7.7. Simulaciones	129
7.7.1. Grafo estrella	129
7.7.2. Grafo corona	133
7.7.3. Grafo árbol	134
7.7.4. Grafo aleatorio	136
A. Cálculos de Hamiltonianos	139
A.1. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings	139
A.2. Hamiltoniano multiqubit	139
A.3. Pulsos de microondas	139
A.4. Régimen rotacional del pulso	140
A.5. Efecto del pulso sobre el qubit	144
A.6. Régimen dispersivo	145
A.7. Rotaciones X-Y	148
A.8. Compuerta de entrelazamiento	149
B. Cálculos de matrices de adyacencia	150
C. Circuitos cuánticos	151
D. Códigos del simulador	160
D.1. Wolfram Mathematica	160
D.2. Python	167
E. Códigos de la simulación del algoritmo de Grover	180
E.1. Wolfram Mathematica	180
E.2. Python	182
F. Códigos de la simulación del algoritmo de Shor	184
F.1. Wolfram Mathematica	184
F.2. Python	188
G. Códigos de la simulación del algoritmo de PageRank	192
G.1. Wolfram Mathematica	192
G.2. Python	192

Índice de figuras

2.1. Esfera de Bloch	33
2.2. Compuerta I en la esfera de Bloch	38
2.3. Compuerta X en la esfera de Bloch	38
2.4. Compuerta Z en la esfera de Bloch	39
2.5. Compuerta Y en la esfera de Bloch	39
2.6. Compuerta H en la esfera de Bloch	40
2.7. Compuerta S en la esfera de Bloch	41
2.8. Compuerta T en la esfera de Bloch	41
2.9. Compuerta P en la esfera de Bloch	42
2.10. Compuertas Rx, Ry y Rz en la esfera de Bloch	43
3.1. Diagrama de Feynman de la interacción electrón-fonón-electrón . . .	56
3.2. Construcción geométrica de los posibles electrones candidatos para formar pares de Cooper, siendo $\hbar K$ el momentum del centro de masas.	57
3.3. Cuantización del flujo magnético	62
3.4. Imposibilidad de efecto túnel a través de la barrera	64
3.5. Posibilidad de efecto túnel a través de la barrera	65
3.6. Efecto Giaver: Efecto túnel entre un metal y un superconductor . .	66
3.7. Curva característica de una unión Josephson	70
4.1. Rotaciones en X e Y de 2π	83
4.2. Rotaciones en X e Y de π	83
4.3. Rotaciones en X e Y de $\frac{\pi}{2}$	83
4.4. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $ 00\rangle$	84
4.5. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $ 01\rangle$	84
4.6. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $\frac{ 00\rangle+ 11\rangle}{\sqrt{2}}$	84
4.7. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $\frac{ 0\rangle+ 1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{ 0\rangle+ 1\rangle}{\sqrt{2}}$	84
5.1. Circuito del algoritmo de Grover, k_{max} desconocido.	95
5.2. Interpretación geométrica del operador difusión	97
5.3. Circuito del algoritmo de Grover.	97
5.4. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de Grover sin relación	102
5.5. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de Grover con relación	102

6.1. Distribución de probabilidad en la estimación de fase del algoritmo de Shor sin pérdidas	113
6.2. Distribución de probabilidad en la estimación de fase del algoritmo de Shor sin pérdidas	115
7.1. Transformación de un grafo al crear la matriz de Google con $\alpha = \frac{1}{2}$	121
7.2. Operador de permutación	126
7.3. Circuito de Loke para las caminatas cuánticas de Szegedy	126
7.4. Circuito de K_i	127
7.5. Grafo estrella	130
7.6. Circuito de K_1 para el grafo estrella	131
7.7. Circuito de K_2 para el grafo estrella	131
7.8. K_b del grafo estrella	131
7.9. T del grafo estrella	131
7.10. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo estrella	131
7.11. Circuito del PageRank cuántico del grafo estrella	132
7.12. PageRank cuántico instantáneo del grafo estrella sin pérdidas	132
7.13. PageRank cuántico promedio del grafo estrella sin pérdidas	132
7.14. Grafo corona	133
7.15. PageRank cuántico instantáneo del grafo corona sin pérdidas	134
7.16. PageRank cuántico promedio del grafo corona sin pérdidas	134
7.17. Grafo árbol	135
7.18. PageRank cuántico instantáneo del grafo árbol sin pérdidas	135
7.19. PageRank cuántico promedio del grafo árbol sin pérdidas	136
7.20. PageRank cuántico instantaneo del grafo árbol con y sin pérdidas	136
7.21. PageRank cuántico promedio del grafo árbol con y sin pérdidas	136
7.22. Grafo aleatorio	137
7.23. PageRank cuántico instantáneo del grafo aleatorio sin pérdidas	137
7.24. PageRank cuántico promedio del grafo aleatorio sin pérdidas	137
7.25. PageRank cuántico instantaneo del grafo aleatorio con y sin pérdidas	138
7.26. PageRank cuántico promedio del grafo aleatorio con y sin pérdidas	138

Índice de cuadros

Capítulo 5

Algoritmo de Grover

El algoritmo de Grover es un AC que realiza una búsqueda en una secuencia no ordenada de datos con $N = 2^n$ entradas. Clásicamente esta búsqueda tendría un orden de complejidad de $O(N)$, pues, como los datos no están ordenados, la cantidad promedio de evaluaciones que se deben realizar crece linealmente con la cantidad de entradas. En el caso del algoritmo de Grover, la complejidad de la búsqueda es de $O(\sqrt{N})$, pues se requieren aproximadamente $\frac{\pi\sqrt{N}}{4}$ iteraciones para hallar la entrada deseada. En cuanto a la cantidad de qubits requeridos, se necesitan $O(\log_2 N)$ qubits, pues se debe realizar un estado superpuesto donde cada componente de la superposición represente una entrada de la secuencia de datos.

Supongamos que la secuencia de datos no ordenada tiene la siguiente función asociada:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \omega \\ 0 & \text{si } x \neq \omega \end{cases} \quad (5.1)$$

Donde ω es el dato que se desea encontrar. Esta función devuelve 1 si se evalúa la entrada que almacena el dato deseado y 0 en cualquier otro caso.

El algoritmo de Grover se basa en la disponibilidad de un operador cuántico, llamado *oráculo*, tal que se introduzca un fase global de π si $f(x_0) = 1$ y deje el estado del sistema intacto si $f(x_0) = 0$. Es decir, el oráculo realiza una reflexión alrededor de $|\omega\rangle$.

$$U_\omega |x\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle = \begin{cases} |x\rangle & \text{si } x \neq \omega \\ -|x\rangle & \text{si } x = \omega \end{cases} \quad (5.2)$$

$$U_\omega = \mathbb{1} - 2 |\omega\rangle\langle\omega| \quad (5.3)$$

Además de éste, se necesita otro operador de reflexión, U_s , el cual realiza una reflexión alrededor del estado de superposición uniforme $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle$. Así, por el hecho de la geometría plana elemental de que el producto de dos reflexiones es una rotación, se logra aproximar el estado del sistema al estado asociado a la entrada deseada.

$$U_s = 2 |s\rangle\langle s| - \mathbb{1} \quad (5.4)$$

Veamos lo que sucede al aplicar esta secuencia de rotaciones sobre el estado $|s\rangle$:

$$\begin{aligned} U_\omega |s\rangle &= (\mathbb{1} - 2 |\omega\rangle\langle\omega|) |s\rangle \\ &= |s\rangle - 2 |\omega\rangle\langle\omega| |s\rangle \\ &= |s\rangle - \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle\langle\omega| \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle \\ &= |s\rangle - \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_s(|s\rangle - \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle) &= (2 |s\rangle\langle s| - \mathbb{1})(|s\rangle - \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle) \\ &= 2(|s\rangle - \frac{4}{N} |s\rangle) - (|s\rangle - \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle) \\ &= |s\rangle - \frac{4}{N} |s\rangle + \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle \\ &= \frac{N-4}{N} |s\rangle + \frac{2}{\sqrt{N}} |\omega\rangle \end{aligned}$$

Ahora veamos lo que sucede al aplicar esta secuencia de rotaciones sobre el estado $|\omega\rangle$:

$$\begin{aligned}
U_\omega |\omega\rangle &= (\mathbb{1} - 2 |\omega\rangle\langle\omega|) |\omega\rangle \\
&= |\omega\rangle - 2 |\omega\rangle \\
&= -|\omega\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_s(-|\omega\rangle) &= (2 |s\rangle\langle s| - \mathbb{1})(-|\omega\rangle) \\
&= -\frac{2}{\sqrt{N}} |s\rangle + |\omega\rangle
\end{aligned}$$

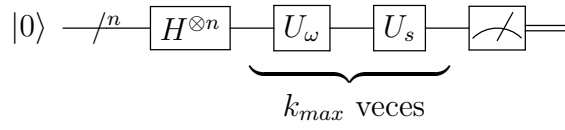
Se observa que al aplicar $U_s U_\omega$ sobre $|s\rangle$, se amplifica la componente de $|\omega\rangle$ en la superposición de $\frac{1}{\sqrt{N}}$ a $\frac{3N-4}{N\sqrt{N}}$. Es decir que la probabilidad de medir el valor deseado crece de $\frac{1}{N}$ a $9(1 - \frac{4}{3N})\frac{1}{N}$.

$$\begin{aligned}
\langle\omega| U_s U_\omega |s\rangle &= \frac{N-4}{N} \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{2}{\sqrt{N}} \\
&= \frac{3N-4}{N\sqrt{N}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\langle\omega| U_s U_\omega |s\rangle|^2 &= \frac{(3N-4)^2}{N^3} \\
&= 9(1 - \frac{4}{3N})\frac{1}{N}
\end{aligned}$$

Por otro lado, se observa que al aplicar $U_s U_\omega$ sobre $|\omega\rangle$, aparece una componente de $|s\rangle$, así que en ese caso, la probabilidad de medir el valor deseado disminuye. Por lo que debe existir una cantidad de iteraciones k_{max} tras las cuales se alcanza la probabilidad máxima de medir $|\omega\rangle$, partiendo de $|s\rangle$ y a partir de donde esta probabilidad empieza a disminuir.

De esta manera, el algoritmo de Grover consiste en aplicar k_{max} veces $U_s U_\omega$, partiendo del estado $|s\rangle$, es decir rotar este estado hasta que se aproxime lo más posible a $|\omega\rangle$.

FIGURA 5.1: Circuito del algoritmo de Grover, k_{max} desconocido.

Para hallar k_{max} , veamos el ángulo que se rota con cada aplicación de $U_s U_{\omega}$. Primero definamos el estado $|s'\rangle$ como la superposición uniforme de todos los estados de la base computacional excepto $|\omega\rangle$, es decir:

$$|s'\rangle = \frac{1}{N-1} \sum_{x \neq \omega} |x\rangle \quad (5.5)$$

$$= \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}} |s\rangle - \frac{1}{\sqrt{N-1}} |\omega\rangle \quad (5.6)$$

Los estados $|s'\rangle$ y $|\omega\rangle$ son ortonormales, $\langle s'|\omega\rangle = 0$, por lo que generan un espacio bidimensional de Hilbert. Este espacio contiene a $|s\rangle$, pues:

$$|s\rangle = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} |s'\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |\omega\rangle \quad (5.7)$$

Además, se ha visto que $U_s U_{\omega} |s\rangle$ y $U_s U_{\omega} |\omega\rangle$ se escriben en función de sólo $|s\rangle$ y $|\omega\rangle$. Así que podemos inducir que $(U_s U_{\omega})^k |s\rangle$ pertenece al espacio generado por $\{|s'\rangle, |\omega\rangle\}$, donde $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Esto indica que este espacio contiene al plano en el que se realizan las rotaciones $U_s U_{\omega}$.

Ahora que conocemos una base del plano de rotación, podemos hallar el ángulo que se rota con cada aplicación de $U_s U_{\omega}$.

$$\begin{aligned} U_{\omega} |\psi\rangle &= (\mathbb{1} - 2|\omega\rangle\langle\omega|)(\alpha |s'\rangle + \beta |\omega\rangle) \\ &= \alpha |s'\rangle - \beta |\omega\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_s(\alpha |s'\rangle - \beta |\omega\rangle) &= (2 |s\rangle\langle s| - \mathbb{1})(\alpha |s'\rangle - \beta |\omega\rangle) \\
&= \alpha \left(2 \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} |s\rangle - |s'\rangle \right) - \beta \left(\frac{2}{\sqrt{N}} |s\rangle - |\omega\rangle \right) \\
&= \alpha \left(\left(2 \frac{N-1}{N} - 1 \right) |s'\rangle + 2 \frac{\sqrt{N-1}}{N} |\omega\rangle \right) \\
&\quad - \beta \left(\frac{2\sqrt{N-1}}{N} |s'\rangle + \left(\frac{2}{N} - 1 \right) |\omega\rangle \right) \\
&= \left(\alpha \frac{N-2}{N} - \beta \frac{2\sqrt{N-1}}{N} \right) |s'\rangle \\
&\quad + \left(\alpha 2 \frac{\sqrt{N-1}}{N} + \beta \frac{N-2}{N} \right) |\omega\rangle
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que $\cos(\Delta\theta) = \frac{N-2}{N}$ y que $\sin(\Delta\theta) = 2\frac{\sqrt{N-1}}{N}$. De hecho, se comprueba que:

$$\cos^2(\Delta\theta) + \sin^2(\Delta\theta) = \frac{(N-2)^2}{N^2} + 4\frac{N-1}{N^2} = \frac{N^2 - 4N + 4}{N^2} + 4\frac{N-1}{N^2} = 1$$

Ahora escribimos las componentes de $|s\rangle$ en función del ángulo inicial θ_0 :

$$\cos(\theta_0) = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} \quad (5.8)$$

$$\sin(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (5.9)$$

Finalmente, lo que se quiere es que:

$$\theta_0 + k\Delta\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (5.10)$$

Es decir, que:

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}\right) + k \cos^{-1}\left(\frac{N-2}{N}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (5.11)$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) + k \sin^{-1}\left(2\frac{\sqrt{N-1}}{N}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (5.12)$$

Si tomamos $N \gg 1$ en (4.12), tenemos que:

$$2k \frac{1}{\sqrt{N}} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (5.13)$$

$$k_{max} \approx \frac{\pi\sqrt{N}}{4} \quad (5.14)$$

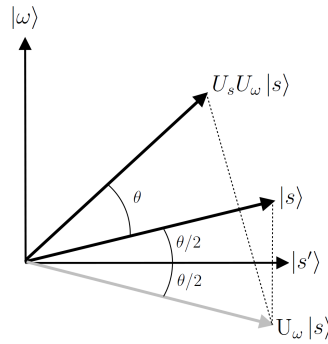


FIGURA 5.2: Interpretación geométrica del operador difusión

5.1. El algoritmo

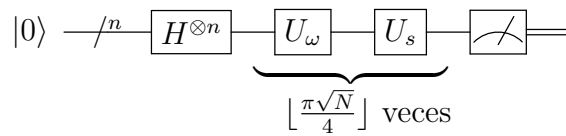


FIGURA 5.3: Circuito del algoritmo de Grover.

1. Preparar el estado fiducial.
2. Aplicar la transformada de Walsh-Hadamard.
3. Realizar la iteración de Grover $\lfloor \frac{\pi\sqrt{N}}{4} \rfloor$ veces.

- a) Aplicar U_ω .
 - b) Aplicar U_s .
4. Realizar la medida Ω .

5.2. Variaciones y generalizaciones del algoritmo de Grover

A continuación estudiaremos el algoritmo de amplificación de amplitud, el cual es una generalización del algoritmo de Grover para bases de datos con cualquier cantidad de estados objetivos, y el algoritmo de Grover en un paso, el cual es una variación del algoritmo de Grover en la que se mide en cada iteración.

5.2.1. Algoritmo de amplificación de amplitud

Esta generalización fue desarrollada independientemente por Brassar y Høyer en 1997 [ref] y por Grover en 1998 [ref]. Con este algoritmo se pueden utilizar funciones oráculo que marquen 1 para más de una entrada de la base de datos en la cual se realizará la búsqueda. Entonces, sea \mathcal{W} el conjunto de entradas a encontrar, tenemos la función oráculo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{W} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{W} \end{cases} \quad (5.15)$$

Ahora sea el proyector $\Pi_{\mathcal{W}}$ tal que proyecte los estados del espacio de Hilbert \mathcal{H} asociado a la base de datos en el espacio de Hilbert generado por los estados objetivos $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$:

$$\Pi_{\mathcal{W}} = \sum_k |\omega_k\rangle\langle\omega_k| \quad (5.16)$$

Donde los estados $|\omega_k\rangle$ son los estados asociados a las entradas de la base de datos pertenecientes a \mathcal{W} .

Sea el estado inicial:

$$|\psi\rangle = \sin(\theta) |\psi_1\rangle + \cos(\theta) |\psi_0\rangle \quad (5.17)$$

Donde $|\psi_1\rangle = \frac{\Pi_{\mathcal{W}}|\psi\rangle}{\sin(\theta)}$ y $\sin(\theta) = \langle\psi|\Pi_{\mathcal{W}}|\psi\rangle$. De aquí podemos hallar que $|\psi_0\rangle = \frac{(\mathbb{1}-\Pi_{\mathcal{W}})|\psi\rangle}{\cos(\theta)}$ y que $\cos(\theta) = \langle\psi|(\mathbb{1}-\Pi_{\mathcal{W}})|\psi\rangle$.

Ahora definamos los siguientes operadores de reflexión $U_\psi = (2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbb{1})$ y $U_{\mathcal{W}} = \mathbb{1} - 2\Pi_{\mathcal{W}}$, estos son las generalizaciones de U_s y U_ω , del algoritmo de Grover, respectivamente. El producto de ellos, $U_\psi U_{\mathcal{W}}$ es un operador de rotación en el plano generado por $|\psi_0\rangle$ y $|\psi_1\rangle$, de la misma manera que $U_s U_\omega$ es un operador de rotación en el plano generado por $|s'\rangle$ y $|\omega\rangle$. Ahora veamos el efecto de $U_\psi U_{\mathcal{W}}$ y el ángulo que rota este operador:

$$\begin{aligned} U_\psi U_{\mathcal{W}} |\psi\rangle &= (2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbb{1})(\mathbb{1} - 2\Pi_{\mathcal{W}}) |\psi\rangle = (2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbb{1})[(\mathbb{1} - \Pi_{\mathcal{W}}) - \Pi_{\mathcal{W}}] |\psi\rangle \\ &= (2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbb{1})(\cos(\theta) |\psi_0\rangle - \sin(\theta) |\psi_1\rangle) = (2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbb{1})(|\psi\rangle - 2\sin(\theta) |\psi_1\rangle) \\ &= |\psi\rangle + (-4\sin^2(\theta) |\psi\rangle + 2\sin(\theta) |\psi_1\rangle) = (3 - 4\sin^2(\theta)) \sin(\theta) |\psi_1\rangle + (1 - 4\sin^2(\theta)) \cos(\theta) |\psi_0\rangle \\ &= \sin(3\theta) |\psi_1\rangle + \cos(3\theta) |\psi_0\rangle \quad (5.18) \end{aligned}$$

Como se puede ver, el operador $U_\psi U_{\mathcal{W}}$ rota un ángulo de 2θ . Por lo que si se aplica k veces a $|\psi\rangle$, tendremos:

$$(U_\psi U_{\mathcal{W}})^k |\psi\rangle = \sin((2k+1)\theta) |\psi_1\rangle + \cos((2k+1)\theta) |\psi_0\rangle \quad (5.19)$$

De esta manera, el $k = k_{max}$ para el cual se obtiene la probabilidad máxima de medir un elemento de $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$, es decir, el k que maximiza la amplitud de probabilidad de la componente $|\psi_1\rangle$ de $|\psi\rangle$, es $\lfloor \frac{\pi}{4\theta} \rfloor$. Así:

$$\begin{aligned} (U_\psi U_{\mathcal{W}})^{k_{max}} |\psi\rangle &= \sin\left(\left(2\lfloor \frac{\pi}{4\theta} \rfloor + 1\right)\theta\right) |\psi_1\rangle + \cos\left(\left(2\lfloor \frac{\pi}{4\theta} \rfloor + 1\right)\theta\right) |\psi_0\rangle \\ &\approx \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) |\psi_1\rangle + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) |\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle \quad (5.20) \end{aligned}$$

Mientras menor sea θ , más tenderá $(U_\psi U_{\mathcal{W}})^{k_{max}} |\psi\rangle$ a $|\psi_1\rangle$, pero mayor será k_{max} .

Como se puede ver, el algoritmo de amplificación de amplitud se puede utilizar como algoritmo de búsqueda con una cantidad arbitraria de estados objetivos

y un estado inicial arbitrario, no sólo $|s\rangle$ como en el algoritmo de Grover. Sin embargo, este no es sólo un algoritmo de búsqueda, sino también un algoritmo de optimización. En este sentido, la amplificación de amplitud también se puede utilizar como subrutina para mejorar el resultado de otros algoritmos. Sea $U_{\mathcal{A}}$ el operador asociado a un algoritmo cuántico \mathcal{A} , entonces, tal que, partiendo del estado fiducial, retorne el estado $|\psi\rangle$. Es decir, $U_{\mathcal{A}}|0\rangle = |\psi\rangle$, entonces, podemos reescribir U_{ψ} de la siguiente manera:

$$U_{\psi} = (2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbb{1}) = (2U_{\mathcal{A}}|0\rangle\langle 0|U_{\mathcal{A}}^{\dagger} - \mathbb{1}) = U_{\mathcal{A}}(2|0\rangle\langle 0| - \mathbb{1})U_{\mathcal{A}}^{\dagger} = U_{\mathcal{A}}U_0U_{\mathcal{A}}^{\dagger} \quad (5.21)$$

De esta manera, a cualquier algoritmo, que actúe sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} que se pueda descomponer un espacio de estados buenos $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ y un espacio de estados malos $\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{\mathcal{W}}$, se le puede aplicar la amplificación de amplitud para mejorar su resultado.

Ahora consideremos el caso en el que $U_{\mathcal{A}} = H^{\otimes n}$, es decir, el caso en el que $|\psi\rangle = |s\rangle$. Este sería el caso particular del algoritmo de amplificación de amplitud en el que se utiliza el mismo estado inicial del algoritmo de Grover.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i |i\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i \in \mathcal{W}} |i\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j \notin \mathcal{W}} |j\rangle \quad (5.22)$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{W}} \sum_{i \in \mathcal{W}} |i\rangle \quad (5.23)$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{W}{N}} \quad (5.24)$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-W}} \sum_{j \notin \mathcal{W}} |j\rangle \quad (5.25)$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{N-W}{N}} \quad (5.26)$$

Si tomamos $N \gg W$, tendríamos que $\theta \approx \sqrt{\frac{W}{N}}$, entonces $k_{max} \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{W}}$. Es interesante notar que mientras más estados buenos haya, menos iteraciones se necesitan. Pero a cambio, para hallar todos esos estados buenos, se debe ejecutar el algoritmo más veces. En caso de que \mathcal{W} sea de dimensión 1, se recuperaría exactamente el algoritmo de Grover.

5.2.2. Algoritmo de Grover en un paso

5.3. Simulaciones

5.3.1. Algoritmo de Grover

Se han realizado simulaciones del algoritmo de Grover en Wolfram Mathematica implementando U_ω , U_s y la transformada de Hadamard, directamente, de manera matricial, de acuerdo a las definiciones dadas anteriormente. Por otro lado, se ha realizado una simulación del algoritmo de Grover en Python definiendo todas las operaciones y transformaciones en base a sus construcciones circuitales, a partir de las compuertas nativas de los transmones, resolviendo la ecuación maestra del sistema al aplicar cada compuerta nativa. A la primera la llamaremos la simulación matemática, y a la segunda, simulación circuital. El código de ambas simulaciones se encuentra en el apéndice [E](#).

En el caso de la simulación matemática, sólo se ha simulado el caso sin relajación. Por otro lado, en el caso de la simulación circuital, se ha simulado el sistema tanto sin relajación, como con relajación. En el caso del sistema con relajación, se ha utilizado la ecuación maestra de Lindblad con los operadores de colapso σ_{-i} y tasa de relajación $\gamma = 25KHz$. Primero compararemos las dos simulaciones sin relajación para analizar la precisión del solucionador de ecuaciones maestras.

Como el espacio de Hilbert del sistema en el que sea ejecutado el algoritmo es de 16 dimensiones, ya que es de cuatro qubits, se necesitan $\lfloor \frac{\pi\sqrt{16}}{4} \rfloor = 3$ iteraciones para tener la máxima probabilidad de medir el estado deseado. Sin embargo, la simulación se ha realizado con 7 iteraciones, para apreciar la naturaleza oscilatoria de este algoritmo. Recordemos que este algoritmo consiste en rotaciones en el espacio 2D generado por $|\omega\rangle$ y $|s'\rangle$, es decir, que si se aplican más de 3 rotaciones, la probabilidad de éxito debería disminuir, hasta que el estado del sistema se alinee con $-|s'\rangle$, volver a aumentar hasta llegar a $-|\omega\rangle$, disminuir hasta pasar por $|s'\rangle$, pasar de nuevo por el estado inicial $|s\rangle$ y repetirse el ciclo. La hipótesis es que veremos aproximadamente un período de senoide muestreada, con alrededor de seis muestras por período, en la gráfica de la evolución de la probabilidad de medir $|\omega\rangle$, ya que si luego de tres iteraciones se llega al punto de probabilidad máxima, alrededor de la sexta iteración se debe llegar al punto de probabilidad mínima y en la séptima volvería a aumentar.

En la figura 5.4 se puede observar la gráfica de la evolución de la probabilidad de medir cada estado en cada iteración del algoritmo de Grover con $|\omega\rangle = |1111\rangle$. Como se puede observar, ambas figuras son bastante similares. La fidelidad entre los estados finales de ambas simulaciones es 0.999875. Además, se ha confirmado la hipótesis de que la evolución de la probabilidad de medir $|1111\rangle$ tiene forma sinusoidal.

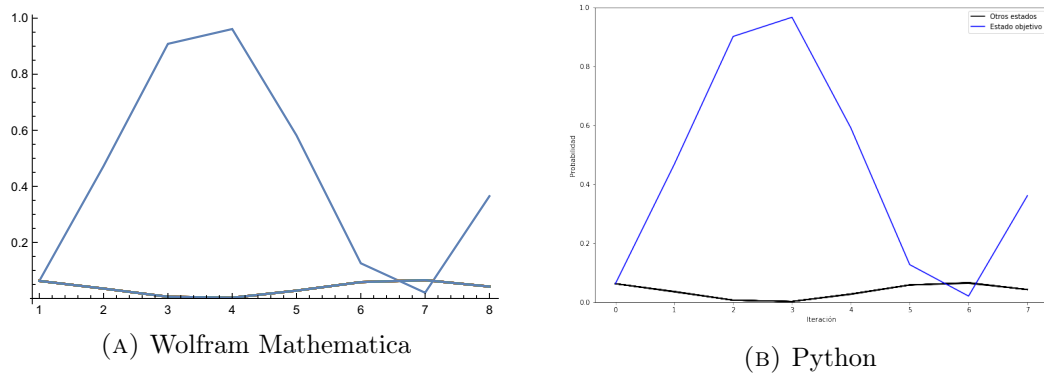


FIGURA 5.4: Evolución de las probabilidades en el algoritmo de Grover sin relajación

Ahora, compararemos los resultados de la simulación circuital con y sin relajación. Como se puede ver en la figura 5.5, en el caso con relajación, los estados que no contienen el valor deseado dejan de tener todos la misma probabilidad. Los estados que involucran el estado base ganan probabilidad debido a la relajación de los qubits. La fidelidad entre los estados resultantes de los casos con y sin relajación es de 0.250818.

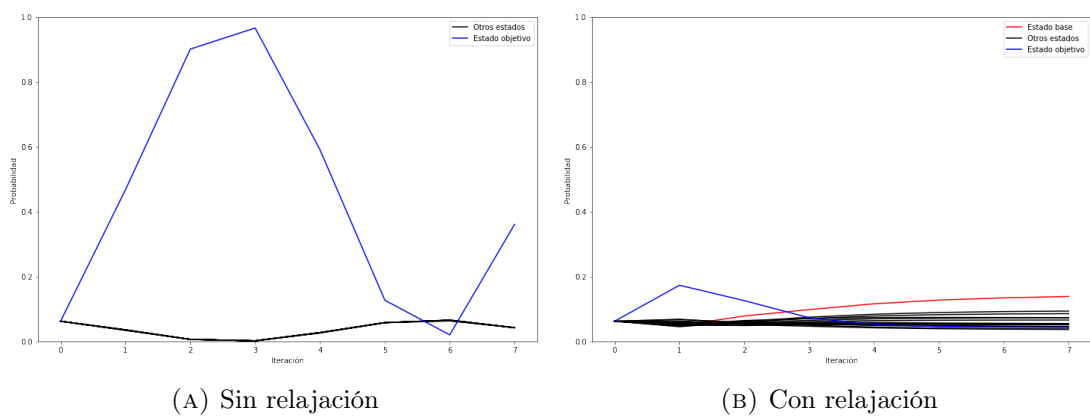


FIGURA 5.5: Evolución de las probabilidades en el algoritmo de Grover con relajación

Incluir resultados del algoritmo de Grover con $|\omega\rangle = |0\rangle$ y $|\omega\rangle = |0101\rangle$ para comparar los efectos de la relajación en distintos casos.

5.3.2. Amplificación de amplitud

5.3.3. Optimización del algoritmo de Grover

Bibliografía

- [1] Adriano Barenco, Charles H. Bennet, Richard Cleve, David P. DiVincenzo, Norman Margolus, Peter Shor, Tycho Sleator, Jhon A. Smolin, and Harald Weinfurter. Elementary gates for quantum computation. *Physical Review A*, 1995.
- [2] Sttiwuer Díaz-Solórzano. Esquemas de medidas. *QIC*, 2014.
- [3] Rudolf Gross and Achim Marx. Applied superconductivity: Josephson effect and superconducting electronics. *Walther-Meißner-Institut*, 2005.
- [4] Onnes H.K. Further experiments with liquid helium. g. on the electrical resistance of pure metals, etc. vi. on the sudden change in the rate at which the resistance of mercury disappears. *Springer, Dordrecht*, 1911.
- [5] A. P. Drozdov, M. I. Erements, I. A. Troyan, V. Ksenofontov, and S. I. Shylin. Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system. *Nature*, 525:73–76, 2015.
- [6] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Physical Review Journals Archive*, 1957.
- [7] Herbert Fröhlich. Theory of the superconducting state. *Unknown*, 1950.
- [8] M Cyrot. Ginzburg-landau theory for superconductors. *Reports on Progress in Physics*, 36(2):103, 1973.
- [9] Jr. Bascom S. Deaver and William M. Fairbank. Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders. *Physical Review Letters*, 1961.
- [10] B.D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics Letters*, 1(7):251 – 253, 1962.
- [11] P. W. Anderson and J. M. Rowell. Probable observation of the josephson superconducting tunneling effect. *Phys. Rev. Lett.*, 10:230–232, Mar 1963.

-
- [12] Sidney Shapiro. Josephson currents in superconducting tunneling: The effect of microwaves and other observations. *Phys. Rev. Lett.*, 11:80–82, Jul 1963.
 - [13] G. Wendin. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *IOP Science*, 2017.
 - [14] Alexandre Blais, Jay Gambetta, A. Wallraff, D. I. Schuster, S. M. Girvin, M. H. Devoret, , and R. J. Schoelkopf. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics. *Physical Review A*, 2007.
 - [15] Norbert Schuch and Jens Siewert. Natural two-qubit gate for quantum computation using the xy interaction. *Physical Review A*, 2003.
 - [16] T. Loke and J.B. Wang. Efficient quantum circuits for szegedy quantum walks. *Annals of Physics*, 382:64 – 84, 2017.