

Primer avance de proyecto de grado

Miguel Casanova

¹Departamento de Electrónica/Física
Universidad Simón Bolívar

12 de abril de 2018

Bracket de Poisson y coordenadas canónicas

El bracket de Poisson de dos funciones en coordenadas canónicas es

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Donde p y q cumplen que:

$$\{q_i, q_j\} = 0; \quad \{p_i, p_j\} = 0; \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}$$

Tradicionalmente, p y q representan posición y momentum, respectivamente.

En la mecánica Hamiltoniana, la evolución dinámica de un sistema clásico está descrito por un conjunto de variables canónicas conjugadas $r = (q, p)$ de la siguiente manera:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \frac{dq}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

Donde el Hamiltoniano H es la suma de la energía potencial V y la energía cinética T , $H = T + V$.

Ejemplo: Oscilador armónico masa-resorte

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

$$p = mv = m \frac{dq}{dt}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad m \frac{d^2 q}{dt^2} + kq = 0$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q} = -kq = m \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{dp}{dt}; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = \frac{dq}{dt}$$

$$\{q, q\} = \frac{\partial q}{\partial q_i} \frac{\partial q}{\partial p_i} - \frac{\partial q}{\partial p_i} \frac{\partial q}{\partial q_i} = 0$$

$$\{p, p\} = \frac{\partial p}{\partial q_i} \frac{\partial p}{\partial p_i} - \frac{\partial p}{\partial p_i} \frac{\partial p}{\partial q_i} = 0$$

$$\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial q_i} \frac{\partial p}{\partial p_i} - \frac{\partial q}{\partial p_i} \frac{\partial p}{\partial q_i} = 1$$

Cuantización canónica

Paul Dirac introdujo en su tesis doctoral en 1926 el “método de analogía clásica” para la cuantización de sistemas físicos.

Este método consiste en cuantizar las teorías clásicas intentando mantener las estructuras formales de la teoría clásica en la mayor medida posible.

Dirac propuso la siguiente relación: $\{q, p\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{q}, \hat{p}]$

Luego se demostró que esta relación no se para todo sistema físico, sino que es un caso especial de una relación más general. Sin embargo, para los casos a estudiar en esta presentación, sí se cumple.

Cuantización canónica: La receta

El procedimiento a seguir será:

- Construir el Hamiltoniano clásico del sistema en términos de coordenadas canónicas
- Sustituir los observables por operadores cuánticos
- Forzar la relación de conmutación canónica

Oscilador armónico LC: Hamiltoniano clásico

Un ejemplo de variables canónicamente conjugadas son la carga y el flujo magnético. Por esto, podemos cuantizar un oscilador armónico LC con la cuantización canónica.

La energía en un capacitor es $\frac{Q^2}{2C}$

La energía en un inductor es $\frac{\phi^2}{2L}$

Por lo tanto, el Hamiltoniano clásico del sistema es:

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\phi^2}{2L}$$

Oscilador armónico LC: Cuantización canónica

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = \frac{Q}{C} = -L \frac{dI}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}; \quad \frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{\phi}{L} = I = \frac{dQ}{dt}$$

Esto demuestra que ϕ y Q son coordenadas canónicas. Donde ϕ y Q son posición y momentum generalizados, respectivamente. Así que procedemos a sustituirlas por los operadores $\hat{\phi}$ y \hat{q} y escribimos el Hamiltoniano cuántico

$$\hat{H} = \frac{\hat{q}^2}{2C} + \frac{\hat{\phi}^2}{2L}$$

Donde $[\hat{\phi}, \hat{q}] = i\hbar$

Esto, además, significa que la carga en el capacitor y el flujo en el inductor no pueden ser medidos simultáneamente.

Finalmente, la frecuencia de resonancia de este oscilador es

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ y los niveles de energía se encuentran separados por $\hbar\omega$

Efecto Josephson

Se tienen dos placas superconductoras A y B, separadas por un aislante. Las funciones de onda de las placas superconductoras son:

$$\psi_A = \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1}, \psi_B = \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2}$$

En principio, no debería haber una supercorriente entre ambas placas. Sin embargo, ese no es el caso. Por el efecto tunel, pares de electrones (pares de Cooper) pueden pasar de una placa a la otra sin disipación.

$$V_J = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\delta}{dt}$$

$$I_J = I_0 \sin(\delta)$$

Donde $\delta = \phi_2 - \phi_1$ es la diferencia de fase entre las dos placas superconductoras.

Efecto Josephson DC y AC

- Efecto Josephson DC

Si las placas se encuentran sin alimentación, entonces correrá una supercorriente constante a través de ellas.

- Efecto Josephson AC

Si las placas se alimentan con un voltaje DC externo, entonces la diferencia de fase entre ellas variará linealmente con el tiempo y habrá una corriente AC a través de ellas.

Energía e inductancia de Josephson

$$E_J = \int I_0 \sin(\delta) \frac{\hbar}{2e} \frac{d\delta}{dt} dt = \frac{\hbar I_0}{2e} \int \sin(\delta) dt = -\frac{\hbar I_0}{2e} \cos(\delta)$$

$$\frac{dI_J}{dt} = I_0 \cos(\delta) \frac{d\delta}{dt} = I_0 \cos(\delta) \frac{2e}{\hbar} V_J$$

$$L_J = \frac{\hbar}{2e I_0 \cos(\delta)}$$

$$E_C = \frac{(2e)^2}{2C}$$

$$E_L = \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L}$$

Primero, reescribimos el Hamiltoniano del circuito LC en términos de la cantidad de pares de Cooper y de la diferencia de fase en los extremos del inductor, en lugar de la carga y el flujo

$$\hat{H} = \frac{(2e)^2}{2C} \hat{n}^2 + \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L} \frac{\hat{\delta}^2}{2}$$

De aquí $\hat{q} = 2e\hat{n}$ y $\hat{\phi} = \frac{\hbar}{2e}\hat{\delta}$

Ahora introducimos el término de la unión Josephson

$$\hat{H} = \frac{(2e)^2}{2C} (\hat{n} - n_g)^2 + \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L} \frac{(\hat{\delta} - \hat{\delta}_e)^2}{2} - \frac{\hbar I_0}{2e} \cos(\hat{\delta}) =$$
$$E_C (\hat{n} - n_g)^2 + E_L \frac{(\hat{\delta} - \hat{\delta}_e)^2}{2} - E_{J0} \cos(\hat{\delta})$$

Ecuación de Schrödinger del circuito LCJ

Para describir el sistema en términos de la ecuación de Schrödinger en función de la diferencia de fase δ , se introduce $\hat{n} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$

$$E_C(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} - n_g)^2 \psi + U(\phi)\psi = E\psi$$

$$U(\phi) = -E_{J0} \cos(\phi) + E_L \frac{(\phi - \phi_e)^2}{2}$$

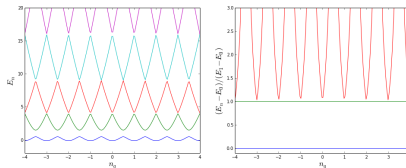
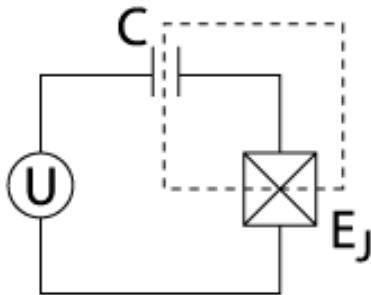
Arquetipos de qubits superconductores

- Qubit de carga: Si E_L tiende a cero, la carga almacenada en la isla superconductora entre el capacitor y la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma de coseno.
- Qubit de flujo: Si E_L es comparable con E_{J0} , el flujo a través del lazo formado por el inductor y la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma cuártica.
- Qubit de fase: Si se polariza la unión Josephson con una fuente de corriente, la fase en ambos extremos de la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma cúbica.

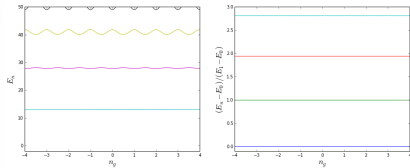
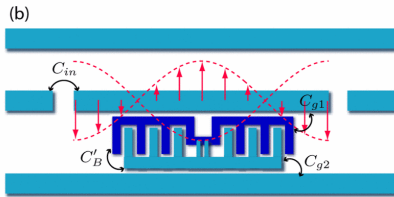
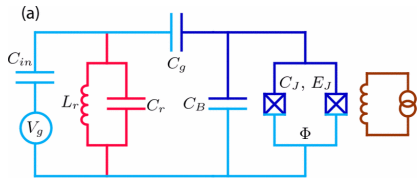
$$[\hat{\delta}, \hat{n}] = i \implies e^{\pm i\hat{\delta}} |n\rangle = |n \pm 1\rangle$$
$$\hat{H} = E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_{J0} \cos(\hat{\delta}) = E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_{J0}(e^{i\hat{\delta}} + e^{-i\hat{\delta}}) =$$
$$\sum (E_C(N - N_g)^2 |n\rangle\langle n| - \frac{E_{J0}}{2}(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|))$$

Caja de pares de Cooper

Dimensiones típicas de la isla: 1000nm x 50nm x 20nm



Transmon



$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} + \hat{H}_r = -\frac{1}{2}\epsilon\sigma_z + g\sigma_x(a + a^\dagger) + \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

The end

Has ended sooner