



Universidad Simón Bolívar
Decanato de Estudios Profesionales
Coordinación de Ingeniería de Electrónica

Diseño y Simulación de Procesadores Cuánticos que Implementen Algoritmos Cuánticos de Búsqueda

Por:

Miguel Casanova

Realizado con la asesoría de:

Enrique Castro y Sttiwuer Diaz

PROYECTO DE GRADO

Presentado ante la Ilustre Universidad Simón Bolívar
como requisito parcial para optar al título de
Ingeniero Electrónico

Sartenejas, noviembre de 2018

Índice general

Índice de Figuras	7
Lista de Tablas	10
1. Introducción	11
1.1. Justificación	16
1.2. OBJETIVOS	18
1.2.1. Objetivo General:	18
1.2.2. Objetivos Específicos:	18
1.2.3. Fases del Proyecto	19
1.2.4. REFERENCIAS	19
2. Información cuántica	22
2.1. Función de onda	22
2.2. Espacio de Hilbert	23
2.3. Delta de Kronecker	24
2.4. Operadores hermíticos	25
2.5. Operadores unitarios	25
2.6. Notación de Dirac	25
2.7. Producto tensorial	27
2.8. Postulados de la mecánica cuántica	29
2.9. Matriz densidad	30
2.10. Traza parcial	32
2.10.1. Comparación con el producto tensorial	33
2.11. Entrelazamiento	33
2.12. Computación cuántica	34
2.12.1. Qubits	34
2.12.2. Esfera de Bloch	35
2.12.3. Conmutador y anticonmutador	35
2.12.3.1. Conmutador	36
2.12.3.2. Anticonmutador	36
2.12.4. Matrices de Pauli	36
2.12.5. Circuitos cuánticos	37
2.12.6. Compuertas cuánticas de un qubit	39
2.12.6.1. Compuerta identidad	39

2.12.6.2. Compuerta X	40
2.12.6.3. Compuerta Z	40
2.12.6.4. Compuerta Y	41
2.12.6.5. Compuerta de Hadamard	42
2.12.6.6. Compuerta S	42
2.12.6.7. Compuerta T	43
2.12.6.8. Compuerta de cambio de fase	43
2.12.6.9. Compuertas de rotación	44
2.12.7. Compuertas multiqubit	45
2.12.7.1. Compuerta CNOT	45
2.12.7.2. Compuerta SWAP	46
2.12.7.3. Compuerta $\sqrt{\text{SWAP}}$	47
2.12.7.4. Compuerta de Ising	47
2.12.7.5. Compuerta de Toffoli	48
2.12.7.6. Compuerta de Deutsch	48
2.12.8. Conjuntos universales de compuertas cuánticas	49
2.12.9. Criterios de DiVincenzo	49
2.13. Fidelidad	50
2.14. Medidas proyectivas	51
2.15. Sistemas cuánticos abiertos	52
3. Superconductividad	59
3.1. Cuantización macroscópica y superconductividad	59
3.2. La teoría BCS	61
3.3. Cuantización del flujo magnético y efecto tunel Giaver	69
3.4. Efecto Josephson	76
3.5. Componentes de la corriente en las uniones de Josephson	81
3.6. Qubits superconductores	82
3.7. Arquetipos de qubits superconductores	84
3.7.1. Qubit de carga	84
3.7.2. Qubit de flujo	84
3.7.3. Qubit de fase	84
3.8. Transmones	84
3.9. Hamiltonianos multiqubit de transmones	85
3.10. Compuertas cuánticas en transmones	86
3.10.1. Pulsos de microondas	87
3.10.2. Régimen rotacional del pulso	87
3.10.3. Efecto del pulso sobre el qubit	88
3.10.4. Régimen dispersivo	88
3.10.5. Rotaciones X-Y	89
3.10.6. Compuerta de entrelazamiento	89
3.10.7. Compuertas compuestas	89
4. El simulador	89

4.1.	Parámetros de los sistemas simulados	90
4.2.	Compuertas nativas	91
4.2.1.	Rx y Ry	91
4.2.2.	iSWAP	93
4.3.	Compuertas compuestas	94
4.3.1.	X	94
4.3.2.	Y	94
4.3.3.	Rz	94
4.3.4.	Z	95
4.3.5.	H	95
4.3.6.	CNOT	96
4.3.7.	SWAP	96
4.3.8.	Compuertas condicionales generales	96
4.3.9.	CP	100
5.	Algoritmo de Grover	108
5.1.	El algoritmo	112
5.2.	Variaciones y generalizaciones del algoritmo de Grover	113
5.2.1.	Algoritmo de amplificación de amplitud	113
5.2.2.	Algoritmo de Grover en un paso	116
5.2.3.	Optimización del algoritmo de Grover	117
5.3.	Simulaciones	118
6.	Algoritmo de Shor	123
6.1.	Transformada cuántica de Fourier	123
6.2.	Estimación de fase	125
6.3.	Estimación de orden	128
6.4.	Expansión en fracciones continuas	131
6.5.	Algoritmo de factorización de Shor	132
6.6.	Simulaciones	133
6.6.1.	Factorización del número 15	133
6.6.2.	Factorización del número 8	136
7.	Google PageRank	138
7.1.	El algoritmo de remiendo (parcheo) general	141
7.2.	Interpretación como una caminata aleatoria	142
7.3.	Cuantizando las caminatas aleatorias	143
7.4.	Caminata cuántica de Szegedy	143
7.5.	PageRank cuántico	145
7.6.	Circuitos de las caminatas cuánticas de Szegedy	145
7.7.	Simulaciones	150
7.7.1.	Grafo estrella	150
7.7.2.	Grafo corona	154
7.7.3.	Grafo árbol	158
7.7.4.	Grafo aleatorio	162

A. Cálculos de Hamiltonianos	166
A.1. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings	166
A.2. Hamiltoniano multiquibit	166
A.3. Pulsos de microondas	166
A.4. Régimen rotacional del pulso	167
A.5. Efecto del pulso sobre el qubit	171
A.6. Régimen dispersivo	172
A.7. Rotaciones X-Y	175
A.8. Compuerta de entrelazamiento	176
B. Códigos del simulador	177
B.1. Wolfram Mathematica	177
B.2. Python	184
C. Códigos de la simulación del algoritmo de Grover	197
C.1. Wolfram Mathematica	197
C.2. Python	198
D. Códigos de la simulación del algoritmo de Shor	201
D.1. Wolfram Mathematica	201
D.2. Python	204
E. Códigos de la simulación del algoritmo de PageRank	207
E.1. Wolfram Mathematica	207
E.2. Python	210
E.2.1. Grafo estrella	213
E.2.2. Grafo corona	217
E.2.3. Grafo árbol	219
E.2.4. Grafo aleatorio	222

Índice de figuras

2.1. Esfera de Bloch	35
2.2. Compuerta I en la esfera de Bloch	40
2.3. Compuerta X en la esfera de Bloch	40
2.4. Compuerta Z en la esfera de Bloch	41
2.5. Compuerta Y en la esfera de Bloch	41
2.6. Compuerta H en la esfera de Bloch	42
2.7. Compuerta S en la esfera de Bloch	43
2.8. Compuerta T en la esfera de Bloch	43
2.9. Compuerta P en la esfera de Bloch	44
2.10. Compuertas Rx, Ry y Rz en la esfera de Bloch	45
3.1. Diagrama de Feynman de la interacción electrón-fonón-electrón . . .	65
3.2. Construcción geométrica de los posibles electrones candidatos para formar pares de Cooper, siendo $\hbar K$ el momentum del centro de masas.	66
3.3. Cuantización del flujo magnético	72
3.4. Diagrama de energía de una unión metal-aislante-metal en la que no puede haber efecto túnel	74
3.5. Diagrama de energía de una unión metal-aislante-metal en la que puede haber efecto túnel	75
3.6. Diagrama de energía de una unión superconductor-aislante-metal en la que puede haber efecto Giaver	76
3.7. Curva característica I-V de una unión Josephson	80
4.1. Rotaciones en X e Y de 2π	92
4.2. Rotaciones en X e Y de π	92
4.3. Rotaciones en X e Y de $\frac{\pi}{2}$	92
4.4. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $ 00\rangle$	93
4.5. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $ 01\rangle$	93
4.6. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $\frac{ 00\rangle+ 11\rangle}{\sqrt{2}}$	93
4.7. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $\frac{ 0\rangle+ 1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{ 0\rangle+ 1\rangle}{\sqrt{2}}$	93
5.1. Circuito del algoritmo de Grover, k_{max} desconocido.	110
5.2. Interpretación geométrica del operador difusión	112
5.3. Circuito del algoritmo de Grover.	112
5.4. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de Grover sin relajación	119

5.5. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de Grover con relajación, $\mathcal{W} = \{0\}$	120
5.6. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de amplificación de amplitud sin relajación, $\mathcal{W} = \{9, 13\}$	121
5.7. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de amplificación de amplitud sin relajación, $\mathcal{W} = \{4, 5, 12, 13\}$	121
5.8. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de amplificación de amplitud con relajación	122
6.1. Distribución de probabilidad en la estimación de fase del algoritmo de Shor sin pérdidas	134
6.2. Distribución de probabilidad en la estimación de fase del algoritmo de Shor sin pérdidas	136
7.1. Transformación de un grafo al crear la matriz de Google con $\alpha = \frac{1}{2}$	142
7.2. Operador de permutación	147
7.3. Circuito de Loke para las caminatas cuánticas de Szegedy	147
7.4. Circuito de K_i	148
7.5. Grafo estrella	151
7.6. Circuito de K_1 para el grafo estrella	151
7.7. Circuito de K_2 para el grafo estrella	152
7.8. K_b del grafo estrella	152
7.9. T del grafo estrella	152
7.10. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo estrella	152
7.11. Circuito del PageRank cuántico del grafo estrella	153
7.12. PageRank cuántico instantáneo del grafo estrella sin pérdidas	153
7.13. PageRank cuántico promedio del grafo estrella sin pérdidas	153
7.14. PageRank cuántico instantaneo del grafo estrella con y sin pérdidas	154
7.15. PageRank cuántico promedio del grafo estrella con y sin pérdidas	154
7.16. Grafo corona	155
7.17. Circuito de K_1 para el grafo corona	155
7.18. Circuito de K_2 para el grafo corona	156
7.19. K_b del grafo corona	156
7.20. T del grafo corona	156
7.21. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo corona	156
7.22. Circuito del PageRank cuántico del grafo corona	157
7.23. PageRank cuántico instantáneo del grafo corona sin pérdidas	157
7.24. PageRank cuántico promedio del grafo corona sin pérdidas	157
7.25. Grafo árbol	158
7.26. Circuito de K_1 para el grafo árbol	159
7.27. Circuito de K_2 para el grafo árbol	159
7.28. Circuito de K_3 para el grafo árbol	159
7.29. K_b del grafo árbol	159
7.30. T del grafo árbol	159
7.31. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo árbol	160

7.32. Circuito del PageRank cuántico del grafo árbol	160
7.33. PageRank cuántico instantáneo del grafo árbol sin pérdidas	160
7.34. PageRank cuántico promedio del grafo árbol sin pérdidas	161
7.35. PageRank cuántico instantaneo del grafo árbol con y sin pérdidas	161
7.36. PageRank cuántico promedio del grafo árbol con y sin pérdidas	161
7.37. Grafo aleatorio	162
7.38. Circuito de K_1 para el grafo aleatorio	163
7.39. Circuito de K_2 para el grafo aleatorio	163
7.40. Circuito de K_3 para el grafo aleatorio	163
7.41. K_b del grafo aleatorio	163
7.42. T del grafo aleatorio	163
7.43. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo aleatorio	164
7.44. Circuito del PageRank cuántico del grafo aleatorio	164
7.45. PageRank cuántico instantáneo del grafo aleatorio sin pérdidas	164
7.46. PageRank cuántico promedio del grafo aleatorio sin pérdidas	165
7.47. PageRank cuántico instantaneo del grafo aleatorio con y sin pérdidas	165
7.48. PageRank cuántico promedio del grafo aleatorio con y sin pérdidas	165

Índice de cuadros

Capítulo 3

Superconductividad

3.1. Cuantización macroscópica y superconductividad

Uno de los mayores principios de la mecánica cuántica es el hecho de que cantidades físicas como la energía o el momentum están, bajo ciertas condiciones, cuantizados. Es decir, que sólo tienen valores discretos. Sin embargo, por un largo tiempo se creyó que la cuantización sólo era relevante para sistemas microscópicos, como los núcleos, los átomos o las moléculas. De hecho, considerando el comportamiento de objetos macroscópicos que consistan de una gran cantidad de átomos, los efectos de la cuantización no pueden ser observados, aunque cada átomo individual obedezca las leyes de la mecánica cuántica. Esto se debe al hecho de que los movimientos térmicos enmascaran las regularidades cuánticas. Sin embargo, para ciertos fenómenos ha sido demostrado que es posible observar cuantización macroscópica. Así que podemos observar la cuantización de parámetros que caracterizan a sistemas macroscópicos muchos órdenes de magnitud más grandes que sistemas como los átomos. Esto se debe a altos niveles de correlaciones por efectos de coherencia [3].

Uno de los efectos más espectaculares de la física del estado sólido es el efecto superconductor. La superconductividad produce efectos cuánticos macroscópicos, siendo un campo perfecto para estudiar aspectos básicos en la física cuántica.

En 1911 Kamerlingh Onnes [4] descubre que el Hg conduce sin resistencia cuando se enfría a temperatura del He líquido (4.2 K). Kamerlingh Onnes fue el primer físico que licuó el He, poco tiempo después de esto, midiendo resistividades de

distintos metales a estas bajas temperaturas, se encontró, en su laboratorio, que el Hg a 4.2K conduce sin resistencia. No con una resistencia despreciablemente pequeña, sino con resistencia cero.

Una primera característica de la superconductividad es la nula resistividad por debajo de una cierta temperatura, llamada temperatura crítica.

Podría pensarse que el caso del Hg es la excepción y la cuantización macroscópica es un fenómeno particular de este elemento, sin embargo resulta que el número de elementos y materiales superconductores es muy grande. La tabla periódica está llena de elementos que, bajo cierta temperatura crítica, se convierten en superconductores. En realidad la pregunta no sería por que un elemento es superconductor, sino por qué no lo es. Ahora bien, las temperaturas a las cuales ocurre el efecto son extraordinariamente bajas. La mayoría de los superconductores tienen temperaturas críticas por debajo de los 30K y requieren ser enfriados con He líquido, lo cual quiere decir que el efecto es muy débil. Cabe mencionar que existen superconductores de “alta temperatura” con temperaturas críticas en el orden de los 100K y que pueden ser enfriados con N líquido, hechos a partir de cerámicas con estructuras cristalinas. El record de la mayor temperatura crítica reportada de un superconductor es -70°C [5]. Sin embargo, en este capítulo no haremos ninguna referencia a ellos, ya que requieren el desarrollo de teorías más avanzadas.

Ahora bien, un superconductor es mucho más que un conductor perfecto. En 1913 [ref] se comprobó que si se aplica un campo magnético exterior al material en estado superconductor, se terminaba por destruir el estado de conducción perfecta. Este campo, cuyo valor depende de la temperatura, se llama campo crítico. Tenemos así el primer indicio de que la interacción superconductividad-magnetismo juega un papel primordial en los fenómenos superconductores.

La siguiente característica fundamental de un superconductor consiste en que cuando el campo magnético aplicado no es mayor que el campo crítico un superconductor actúa como un diamagnético perfecto ($\chi = -1$). Por lo tanto, no existen líneas de campo magnético en el interior de un material superconductor, salvo en una pequeña zona próxima a la superficie. Este efecto se conoce con el nombre de efecto Meißner-Ochsenfeld. Es importante mencionar que este no es el caso en un conductor ideal, pues en ellos el campo magnético quedaría atrapado en el material sin que haya razón para que sea expulsado.

Así la segunda característica del efecto superconductor es el diamagnetismo perfecto (efecto Meißner).

Otra característica típica de la superconductividad es que el flujo del campo magnético que atraviesa un anillo superconductor está cuantizado. Es decir, el flujo que atraviesa un superconductor vale un número entero de veces una unidad de flujo elemental llamada el fluxoide Φ_0 y cuyo valor es $\Phi_0 = h/2e$, donde h es la constante de Planck y e la carga del electrón.

Por lo tanto, la tercera característica de la superconductividad es que el flujo magnético que atraviesa un superconductor está cuantizado.

Existe otro efecto cuántico macroscópico asociado a la superconductividad, conocido como el efecto Josephson, el cuál será el fundamento de los qubits superconductores. Este efecto es un caso del efecto túnel. Si se separan dos superconductores distintos, o bien el mismo superconductor por una barrera, por ejemplo un aislante o un estrechamiento en el superconductor (lo que se conoce como una unión débil), se tiene paso de corriente por la barrera sin que aparezca caída de potencial a ambos lados de la barrera.

La cuarta característica de la superconductividad es el efecto Josephson, esto es, la existencia de un efecto túnel superconductor.

3.2. La teoría BCS

En 1957 John Bardeen, Leon Cooper y J. Robert Schieffer [6] encontraron la llave para poder explicar, desde un punto de vista microscópico, la superconductividad. Realmente existen bastantes materiales que se desvían de la teoría estricta BCS, como pueden ser aleaciones, compuestos y algunos elementos (el mismo Hg, donde se descubrió la superconductividad, es un ejemplo de superconductor que no cumple los estrictos requisitos de la teoría BCS). Esto no significa que la teoría sea incorrecta, sino incompleta y para tratar ciertas situaciones y ciertos compuestos o elementos hay que evitar algunas de las aproximaciones que se realizan en el desarrollo de esta teoría.

Experimentalmente se observó que la temperatura crítica T_c de los superconductores, como el Hg, depende de la masa de los iones en el metal. Dado que existen varios isótopos del Hg se pudieron preparar varias muestras y se comprobó experimentalmente que si M es la masa del ion se tiene que $T_c \propto M^{-\alpha}$ donde el exponente α es dependiente del tipo del metal. Esto indica que los iones de la red juegan un papel fundamental en la superconductividad. Este fenómeno se llama efecto isotópico.

Adicionalmente, existen las siguientes diferencias entre los metales normales y los superconductores:

1. Metal normal:

- a) El calor específico electrónico de un metal no superconductor a muy baja temperatura varía linealmente con la temperatura. En un metal existen dos contribuciones al calor específico, una de ellas es la normal de la red. Esta contribución varía como T^3 y prácticamente desaparece a bajas temperaturas. Existe otra contribución al calor específico propia de los metales. A esta contribución, que es la predominante a bajas temperaturas, es a la que nos referimos y varía como T .
- b) Un metal en estado normal no es transparente a la radiación visible e infrarroja.

2. Superconductor:

- a) La variación del calor específico en función de la temperatura sigue una ley exponencial.
- b) En un metal en estado superconductor existe, en el rango del infrarrojo lejano, una frecuencia de corte para la cual el metal es transparente a esa radiación.

Estos dos efectos en superconductores son una señal de que en un superconductor existe una banda prohibida de energía, que, como veremos en su momento, no es del mismo tipo que la que existe en semiconductores. Otra comprobación experimental de este hecho son las anomalías en el efecto túnel, conocido como túnel Giaever.

Por lo tanto, simplificando, cualquier teoría microscópica de la superconductividad tiene que dar cuenta de:

- 1. Conductividad infinita.
- 2. Intervención de la masa de iones en los fonones (vibraciones de la red cristalina).
- 3. Existencia de una banda prohibida de energía en la banda de conducción.

A partir de ahora solamente vamos a concentrarnos en descubrir la posible interacción responsable de que un metal conduzca sin resistencia eléctrica por debajo de una cierta temperatura.

Los electrones de conducción, por su movimiento al azar en una red cristalina, donde los iones están vibrando (fonones), cambian constantemente de momentum. La interacción electrón-fonón es la que produce la resistividad. Que un metal conduzca sin resistencia eléctrica querrá decir que los electrones de conducción en su movimiento en el cristal no cambian de momentum.

Se trata por lo tanto de encontrar una interacción en los electrones de conducción que produzca este efecto. En un cristal contamos aparentemente con pocos recursos, por un lado tenemos electrones de conducción e iones que forman la red cristalina y que están vibrando, de otra forma con electrones y fonones y con una interacción fundamental entre estas cargas eléctricas, que es la interacción coulombiana. Pues bien, esto es todo lo necesario para construir la teoría BCS: electrones, fonones e interacción coulombiana.

La interacción coulombiana electrón de conducción-red cristalina (iones) se puede ver esquemáticamente de la siguiente forma. Supongamos un electrón de conducción que se mueve por el cristal y fijémonos en un punto concreto de la red, formada por iones positivos. Al pasar el electrón por ese punto la red, por interacción coulombiana, se sentirá atraído por ese electrón y se deformará localmente. Ya que las frecuencias de vibración de la red (de los fonones) son del orden de 10^{13} Hz y las velocidades de los electrones de conducción son del orden de 10^{16} /s , ocurrirá que cuando la red vuelva a su posición de equilibrio, el electrón que la ha deformado se encontrará muy lejos, del orden de 10^3 , esto es del orden de varios cientos de parámetros de la red del ion que ha sido sacado de su posición de equilibrio. Esto es así porque las velocidades de los electrones de conducción en su movimiento al azar, velocidades de Fermi, son muy grandes comparadas con los tiempos de relajación de la red, ligados a las frecuencias de los fonones. El segundo paso en este mecanismo es muy sencillo: Mientras que la red está deformada por sus cercanías pasan muchos otros electrones de conducción, que sienten una fuerza de atracción por la red mayor, que sin ésta no estuviera deformada. En resumen, se puede establecer una cierta conexión, una cierta interacción atractiva entre los electrones de conducción vía los fonones. Esto es, un electrón de conducción deforma la red y un segundo electrón de conducción se siente atraído por esta deformación y en cierta manera “ligado” al primer electrón, el cual puede estar físicamente muy alejado del primero. Esta idea de como una interacción de corto alcance electrón-fonón, puede

dar lugar a una interacción de largo alcance electrón-electrón, se debe a Fröhlich (1950) [7] y es la base de la teoría de la superconductividad.

Ahora veamos el papel que juega la interacción coulombiana repulsiva directa entre los electrones de conducción. Esta interacción decrece con $1/r^2$, siendo r la distancia entre los electrones, es decir que disminuye rápidamente con la distancia. Luego se tendrá que la interacción neta entre los electrones de conducción será la suma de estas dos interacciones una repulsiva, que es la que podríamos decir normal y otra, vía fonón, que es atractiva. La interacción neta será atractiva solamente cuando estemos haciendo el balance entre electrones cuya interacción coulombiana repulsiva es muy pequeña, debido a la gran separación que hay entre los electrones.

Luego, Cooper demostró que si se tienen dos electrones con una interacción atractiva neta, por muy pequeña que sea, el mar de Fermi de los electrones de conducción es inestable y se produce un estado ligado con momento k y espines opuestos, llamado par de Cooper. Bardeen, Cooper y Schieffer escribieron un hamiltoniano y el estado fundamental formado por estos pares, de tal manera fueron capaces de desarrollar expresiones para la temperatura crítica superconductora; dedujeron la existencia de una banda prohibida de energía en los superconductores, tal que para romper un par de Cooper vía la interacción con los fonones de la red, hay que suministrar una energía superior o igual a la de esa banda prohibida, y asimismo deducen el efecto isotópico.

Queda, por último, ver de dónde se obtiene la conducción eléctrica sin resistencia, es decir sin que los electrones de conducción cambien de momentum. Hay que señalar que el estado fundamental propuesto por la teoría BCS no está formado por un conjunto de pares de Cooper cualesquiera. Los pares no actúan independientemente unos de otros y para romper un par hay que suministrar energía (la correspondiente a la banda prohibida) de tipo térmico, subiendo la temperatura, o bien de tipo magnético, aplicando un campo magnético, etc. Mientras que no se suministre una energía superior a la de la banda prohibida los electrones superconductores forman pares de Cooper de momentum constante. Esto es, conducen sin resistencia a no ser que se rompan los pares. Ahora bien, estos electrones se están moviendo en un sólido, en una red cristalina, que estará a una cierta temperatura, por debajo de la temperatura crítica, que no es suficiente para romper los pares. Por lo tanto, verán fonones e interaccionarán con ellos. ¿Cómo es posible que un electrón de un par que interacciona con un fonón (de energía menor de la necesaria para romper el par) no cambie su momentum? Esto es debido a que los

pares están interrelacionados y el resto se acomoda para hacer posible que en su conjunto de k no varíe. Aquí se puede utilizar una imagen debida a Schieffer. Supongamos que tenemos un conjunto de esquiadores, la mitad hombres y la mitad mujeres, que bajan una pendiente cogidos de la mano, hombre con mujer (aquí tenemos los pares de Cooper), pero estas parejas no bajan cada uno por su lado, sino que lo hacen al mismo tiempo y de alguna manera enlazados, de tal manera que si algún miembro de la pareja se encuentra en el camino un obstáculo (un fonón), siempre que no sea muy importante (de energía menor que la de la banda prohibida) el conjunto de pares aguantarán el golpe y harán posible que se siga bajando sin perder velocidad, sin cambiar k , sin resistencia.

Esta interacción se puede representar con el diagrama de Feynman de la figura 3.1. Cuando el primer electrón llega a un punto de la red y la atrae, emite un fonón. El segundo electrón absorbe este fonón y queda acoplado al primer electrón.

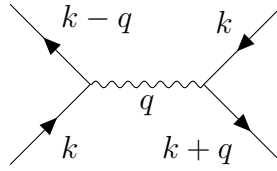


FIGURA 3.1: Diagrama de Feynman de la interacción electrón-fonón-electrón

Los electrones que participan en esta interacción son los de la banda de conducción, con energías del orden de unos pocos electrón voltio. Los fonones disponibles tienen unas energías que son como máximo del orden de **la energía de Debye**. Dado que la temperatura de Debye suele ser del orden de algo más de 100K, se tiene que las energías de los fonones disponibles son de unos pocos milielectrón voltio, esto es muy pequeña comparada con la de los electrones. se tiene que la capa de los electrones de conducción en la esfera de Fermi que intercambian fonones, según este esquema es una franja muy estrecha.

Si llamamos $\hbar k$, $\hbar k'$ y $\hbar k_1$, $\hbar k'_1$, los momenta de los electrones antes y después de la interacción la ley de conservación del momentum nos dice que

$$\hbar k_1 + \hbar k'_1 = \hbar k + \hbar k' = \hbar K$$

donde hemos llamado K al momentum del centro de masas de los electrones. Conviene aprovechar este punto para indicar el convenio habitual en cuanto al signo de la energía de los electrones. Se toman como energías positivas los valores

de la energía superiores a la energía de Fermi y como energías negativas los valores inferiores a la energía, E_F , de Fermi. Es decir que ϵ_k será negativa si k está dentro de la superficie de Fermi y positiva en caso contrario. Está claro que los únicos electrones que pueden intervenir en todo este proceso son los que tienen energías próximas a la de Fermi dado que solamente estos electrones pueden tener estados libres accesibles sin violar el principio de exclusión de Pauli. Por lo tanto, estamos solamente considerando como candidatos a electrones superconductores unos pocos de todos los de la esfera de electrones de conducción de Fermi, aquellos que están en una estrecha franja de espesor $\hbar\omega_D$ donde ω_D es la frecuencia de Debye, por lo tanto del orden de unos pocos meV de la energía de Fermi. En esta situación se conserva el momentum $\hbar K$ del centro de masas de los dos electrones. En la figura 3.2 se representa gráficamente todo lo que acabamos de decir, además se observa en esta figura que son, dentro de la estrecha franja, muy pocos los electrones que cumplen todas las condiciones y que por lo tanto pueden ser candidatos a formar pares de Cooper. Solamente los electrones cuyos momenta caen en la intersección de las dos capas esféricas son los posibles electrones superconductores. Es fácil ver que si disminuimos el valor del momentum del centro de masas del sistema la intersección aumentará y se hará máxima si hacemos $K = 0$, donde toda la franja está formada por posibles pares de Cooper. Es decir los pares de Cooper se forman con electrones de momenta opuestos, como ya habíamos anticipado unas líneas más arriba, esto es $k, -k$. Además, este argumento que acabamos de desarrollar está apoyado en que la energía del sistema disminuye al ir formándose pares, lo que se puede demostrar, pero no de una manera fácil.

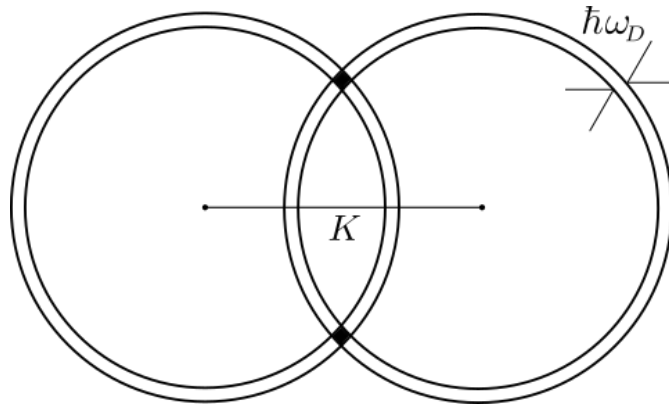


FIGURA 3.2: Construcción geométrica de los posibles electrones candidatos para formar pares de Cooper, siendo $\hbar K$ el momentum del centro de masas.

Otro aspecto de los señalados anteriormente, que podemos abordar ahora, es que los pares estaban formados por electrones no sólo con momenta opuestos, sino también con espines opuestos, esta última característica es ahora muy fácil de

tratar, dado que los electrones son fermiones, es decir cumplen el principio de exclusión de Pauli y tienen funciones de onda antisimétricas. Se puede demostrar que la parte orbital (es decir olvidándose de la parte de espín) de la función de onda de los pares de Cooper, depende tan sólo del módulo del momentum. Por lo tanto, frente al intercambio de la posición de los dos electrones del par se tienen una función simétrica. Luego la parte de espín debe ser antisimétrica, es decir los espines de la pareja son opuestos. Se tiene que un par de Cooper esta formado por dos electrones tal que $k \uparrow, -k \downarrow$.

En este punto surge uno de los peligros típicos de la teoría BCS, que pone de manifiesto la gran cantidad de sutilezas que encierra. Dado que un par de Cooper es una entidad cuyo espín es cero, como los bosones, es fácil caer en la tentación de tratar a los pares de Cooper como bosones. Además hemos indicado que un número creciente de pares de Cooper es energéticamente favorable. Ahora bien, el principio de Pauli sigue vigente: Así, el estado formado, por ejemplo, por $k \uparrow, -k \downarrow$ no puede estar ocupado por más de un par de electrones al mismo tiempo. Además, los operadores con los que se construye el hamiltoniano de la teoría BCS, no siguen las reglas de conmutación de los operadores de bosones. Resulta de todas formas llamativo y conviene resaltarlo que la electrodinámica bosónica reproduce muy bien el comportamiento superconductor, por ejemplo la teoría clásica de la superconductividad de London se puede deducir de un gas cargado de bosones y de allí se puede extraer de una manera natural el efecto Meißner.

Pasaremos a continuación a describir de la manera más sencilla posible la función de onda del estado fundamental superconductor y algunas de las expresiones de la teoría BCS.

La función de onda del estado fundamental de N electrones, según la propone la teoría BCS, es el producto de funciones de onda de pares convenientemente antisimetrizadas, que se puede representar por:

$$\phi(1, 2, \dots, N) \propto \phi(1, 2)\phi(3, 4)\dots\phi(N-1, N) \quad (3.1)$$

Si no escribimos explícitamente la parte de espín y sólo lo hacemos con la parte orbital tendríamos

$$\phi(1, 2, \dots, N) \propto \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_{N/2}} g_{k_1} \dots g_{k_{N/2}} e^{i(k_1 r_1 - r_2 k_2 + \dots + k_{N/2} r_{N-1} - k_{N/2} r_N)} \quad (3.2)$$

Donde cada término de esta función de onda describe una configuración donde los N electrones se agrupan en $N/2$ pares que son

$$(k_1, -k_1) \dots (k_{N/2}, -k_{N/2}) \quad (3.3)$$

La parte de espín es inmediata cada electrón de cada par tiene espines opuestos. Como vemos la función de onda es una función complicada que abarca todos los pares relacionados entre ellos. También se puede escribir de una manera más compacta como:

$$\phi = \prod_k \phi_k \quad (3.4)$$

Antes de continuar merece la pena señalar algún otro aspecto de los pares de Cooper, estos pares están fuertemente relacionados entre sí, de tal manera que se puede decir que del orden de un millón de pares tienen sus centros de masa dentro del espacio en el que se extiende un par dado, esto es los pares de electrones que forman un par de Cooper están muy alejados uno del otro, estando fuertemente correlacionados unos pares con otros. Se puede demostrar, que la disminución de la energía en la fase superconductora respecto al estado normal, debida a la interacción entre pares, depende de cómo se elijan esos pares. El conjunto de pares de Cooper no son independientes unos de otros, están muy correlacionados.

Otro punto que hay que aclarar en lo anterior es que estamos considerando el caso en que no tenemos corriente eléctrica neta, ya que los electrones apareados tienen momentum total cero. Los estados portadores de corriente superconductora son aquellos en que los pares tienen momenta que serán $(k + \frac{q}{2} \uparrow, -k + \frac{q}{2} \downarrow)$ y los electrones tendrán una velocidad de arrastre neta que será

$$v_a = \frac{\hbar q}{2m} \quad (3.5)$$

Otro aspecto importante de la teoría BCS es que predice la existencia de una banda prohibida de energía Δ , la cual se puede medir experimentalmente y que está relacionada con la temperatura crítica por la ecuación BCS. Este parámetro Δ es el parámetro crucial de la teoría BCS de que acompaña la aparición del estado superconductor.

Hay que resaltar que esta banda reúne unas características muy particulares, por lo pronto se diferencia claramente de las bandas prohibidas que juegan un papel importante en sólidos, especialmente en los semiconductores. En superconductores tenemos una banda prohibida que está situada en la banda de conducción y que tiene una marcada dependencia con la temperatura. Asimismo, mientras que en un semiconductor se necesita excitar por encima de la banda prohibida a los electrones para tener conducción eléctrica, en un superconductor se tiene la supercorriente sin necesidad de tener estados excitados, se tiene conducción eléctrica por debajo del nivel de Fermi, esto es por debajo de la banda prohibida que existe en la banda de conducción.

Este parámetro Δ aparece en la sencilla e importante relación que se obtiene en la teoría BCS

$$2\Delta(0) = 3,52k_B T_c \quad (3.6)$$

Donde T_c es la temperatura crítica superconductora.

3.3. Cuantización del flujo magnético y efecto tunnel Giaver

En la teoría de Ginzburg-Landau [8] de las transiciones de fase se introduce el concepto de parámetro de orden, que es una magnitud que aparece acompañando a la transición. Un ejemplo típico de parámetro de orden es la imanación de saturación, que es la magnitud que aparece cuando se tiene la transición de fase del estado paramagnético al ferromagnético. El modelo macroscópico de la superconductividad está basado en la hipótesis de que existe una función de onda macroscópica $\psi(r, t)$ que describe el comportamiento del ensemble completo de electrones superconductores y que es el parámetro de orden de la transición superconductora, tal que su módulo al cuadrado nos da la densidad de electrones superconductores que aparecen al pasar el metal del estado normal al superconductor. En el estado normal, el parámetro de orden (densidad de electrones superconductores) se desvanece. Por supuesto, esta hipótesis puede ser justificada por la teoría microscópica de la superconductividad (Teoría BCS). Esta teoría se basa en la idea de que en metales superconductores existe una fuerza atractiva entre los electrones cercanos al nivel de Fermi. A temperaturas bajo la temperatura crítica T_c , esta

fuerza atractiva crea un nuevo estado cuántico diferente del mar de Fermi de un metal normal. Una pequeña porción de los electrones cercanos al nivel de Fermi están ligados a pares de Cooper. En el caso más simple, el movimiento interno de los pares no tiene momentum angular orbital (estado s simétrico) y consecuentemente el principio de Pauli requiere que los dos espines sean opuestos. Contrario a ligar dos átomos a una molécula, el estado orbital del par de Cooper tiene un radio mucho mayor, típicamente entre 10nm y $1\mu\text{m}$, de manera que pares individuales se sobrelapan fuertemente en espacio y por lo tanto, la ligadura resulta cooperativa. En particular, la energía de ligadura de cualquier par depende de cuantos otros pares se hayan condensado y, más aún, el movimiento del centro de masas de los pares está fuertemente correlacionado tal que cada par reside en el mismo estado con el mismo movimiento de centro de masas. Es este estado el que describimos con una función de onda macroscópica y que le da al sistema sus propiedades superfluídicas. Por ejemplo, el movimiento del centro de masas puede ser descrito por la función de onda

$$\psi(r, t) = \psi_0 e^{i\theta(r, t)} = \psi_0 e^{ik_s \hat{r} - i\omega t} \quad (3.7)$$

Donde cada par tiene el mismo momentum $\hbar k_s$ o velocidad de par $v_s = \hbar k/m$. Además, se cumple que

$$n_s = |\psi|^2 \quad (3.8)$$

Donde n_s es la densidad de electrones superconductores.

Por otro lado, sabemos que la cantidad de movimiento de una partícula de masa m^* y carga e^* en presencia de un campo magnético representado por su potencial vectorial \mathbf{A} , se escribe como

$$\mathbf{p} = -i\hbar\nabla\psi(r, t) = \hbar\nabla\phi = m^*\mathbf{v} + \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \quad (3.9)$$

Si tenemos una densidad de partículas, todas ellas teniendo el mismo momentum \mathbf{p} podemos escribir $n_s\mathbf{p} = n_s(m^*\mathbf{v} + \frac{e^*}{c}\mathbf{A})$.

Recordando la expresión general de la densidad de corriente eléctrica en función de la densidad de portadores, de la carga y de la velocidad promedio se pueden escribir

$$\mathbf{J} = n_s e^* \mathbf{v} \quad (3.10)$$

Que en nuestro caso será

$$\hbar \nabla \phi = \frac{m^*}{n_s e^*} J + \frac{e^*}{c} A \quad (3.11)$$

Con esta expresión estamos preparados para demostrar la cuantización del flujo magnético en superconductores, para ellos basta con recordar algo trivial, como es que el parámetro de orden superconductor sólo puede tener un único valor en cada punto, es decir, la densidad de electrones superconductores debe ser única en cada punto, esta simple consideración se materializa en que podemos escribir

$$\phi(2\pi) - \phi(0) = n2\pi \quad (3.12)$$

Recordando la definición de circulación y de gradiente, y siendo C un camino cerrado, la expresión anterior la podemos escribir como

$$\oint_C \nabla \phi dl = n2\pi \quad (3.13)$$

Si ahora suponemos que este camino C está en el interior de un superconductor, alejado de los bordes y rodeando a un hueco, como se representa en la figura 3.3 y suponemos que tenemos aplicado un campo magnético a este superconductor, se tiene

$$\oint_C \left(\frac{m^*}{\hbar n_s e^*} J + \frac{e^*}{\hbar e} A \right) dl = n2\pi \quad (3.14)$$

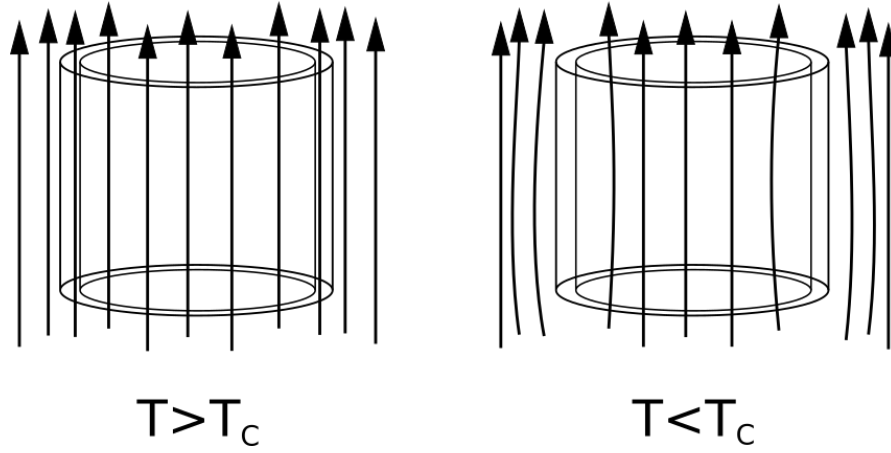


FIGURA 3.3: Cuantización del flujo magnético

Dado que estamos en un camino interior al superconductor y allí no existe corriente (las únicas corrientes que existen en una situación como la que estamos describiendo, están apantallando el campo magnético y están situadas cerca de los bordes tanto de la cavidad como de la superficie del material superconductor), tendremos

$$\oint A dl = \frac{nhc}{e^*} \quad (3.15)$$

Recordando el teorema de Stokes se tiene

$$\oint_C A dl = \iint_S B ds = \Phi \quad (3.16)$$

Que en nuestro caso será $\Phi = n\Phi_0$ expresión que nos indica que el flujo magnético que encierra la cavidad es un número entero de un flujo elemental conocido con el nombre de fluxoide y cuyo valor es

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2,0710^{-7} gauss \, cm^2 \quad (3.17)$$

Siendo e^* la carga del portador de corriente, el par de Cooper $e^* = 2e$.

Este efecto fue encontrado experimentalmente de forma simultánea en 1961 por Deaver-Fairbanks [9] y por Doll-Näbauer [ref].

El efecto túnel es un efecto típico del carácter cuántico de los electrones, desde el punto de vista de la física clásica es completamente imposible que se produzca el efecto que vamos a discutir.

Los electrones se pueden representar por funciones de onda, de tal manera que existe una cierta probabilidad de que un electrón pueda ir de un metal a otro atravesando una barrera aislante estrecha, que puede ser vacío o un óxido. La función de onda del electrón decae de una manera exponencial fuera de la superficie del metal, la amplitud de la onda no es totalmente nula fuera del metal, es como si el electrón se desparramase fuera de la superficie. Si situamos un metal junto al otro, separados tan sólo por una barrera, como puede ser, por ejemplo, el óxido de la superficie, existe una probabilidad pequeña, pero no nula de que el electrón atraviese ese túnel y aparezca al otro lado, en el otro metal.

Antes de seguir hay que hacer notar que la energía necesaria para hacer pasar un electrón que está en el nivel de Fermi de un metal al vacío (función de trabajo del metal) es mayor que la energía necesaria para transferir ese electrón a un aislante.

Por razones de simplicidad vamos a hacer toda la discusión siguiente, salvo cuando se diga expresamente lo contrario, para temperatura de 0K. La figura 3.4 nos indica la situación entre dos partes del mismo metal separadas por un aislante. Todos los estados por debajo de la energía de Fermi están ocupados, mientras que todos los estados por encima de E_F están vacíos.

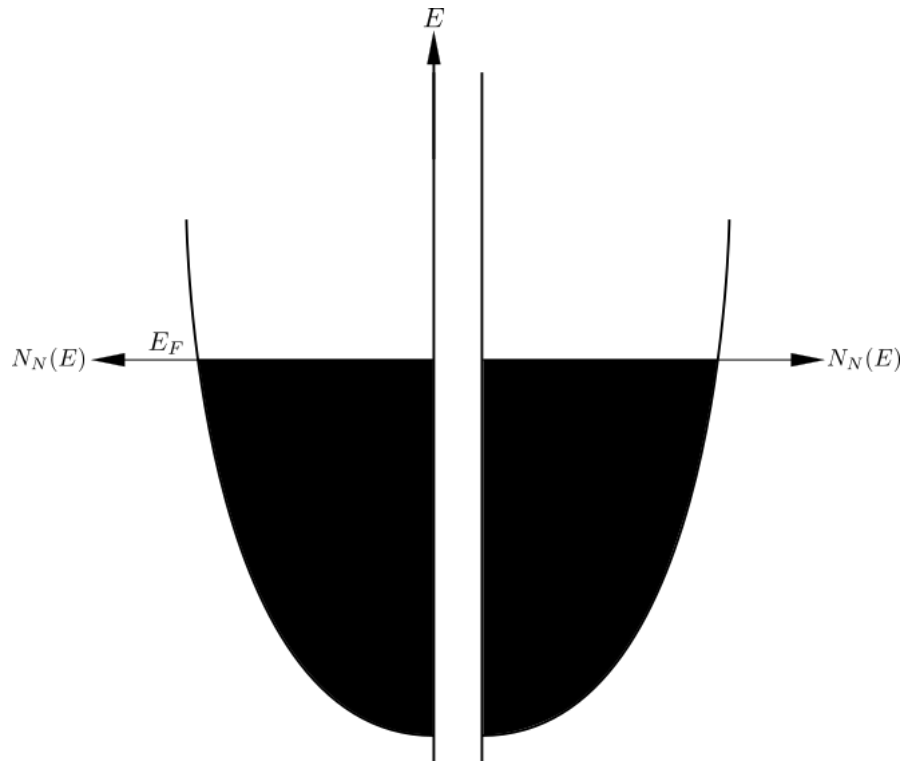


FIGURA 3.4: Diagrama de energía de una unión metal-aislante-metal en la que no puede haber efecto túnel: En este diagrama ambos lados de la barrera tienen los mismos niveles de energía ocupados. Por lo tanto, no puede haber efecto túnel, porque las transiciones deben ser horizontales y no puede haber dos electrones ocupando el mismo estado.

Para que se pueda tener efecto túnel hacen falta dos condiciones. La primera es que, como es lógico, los electrones solamente pueden ir de un estado ocupado a un estado desocupado y la segunda es que se tiene que conservar la energía, es decir que las transiciones, en la gráfica, tienen que ser horizontales. Por lo tanto en la situación de la figura 3.4 no tendremos efecto túnel. No se pueden tener transiciones horizontales al no existir estados vacíos. Todos los estados en el mismo nivel de energía, a ambos lados de la barrera, están ocupados.

Si aplicamos una diferencia de potencial constante a la barrera lo que estamos haciendo es aumentando la energía de los electrones de un lado de la barrera respecto al otro y entonces tenemos la posibilidad de que se tenga corriente por efecto túnel, figura 3.5.

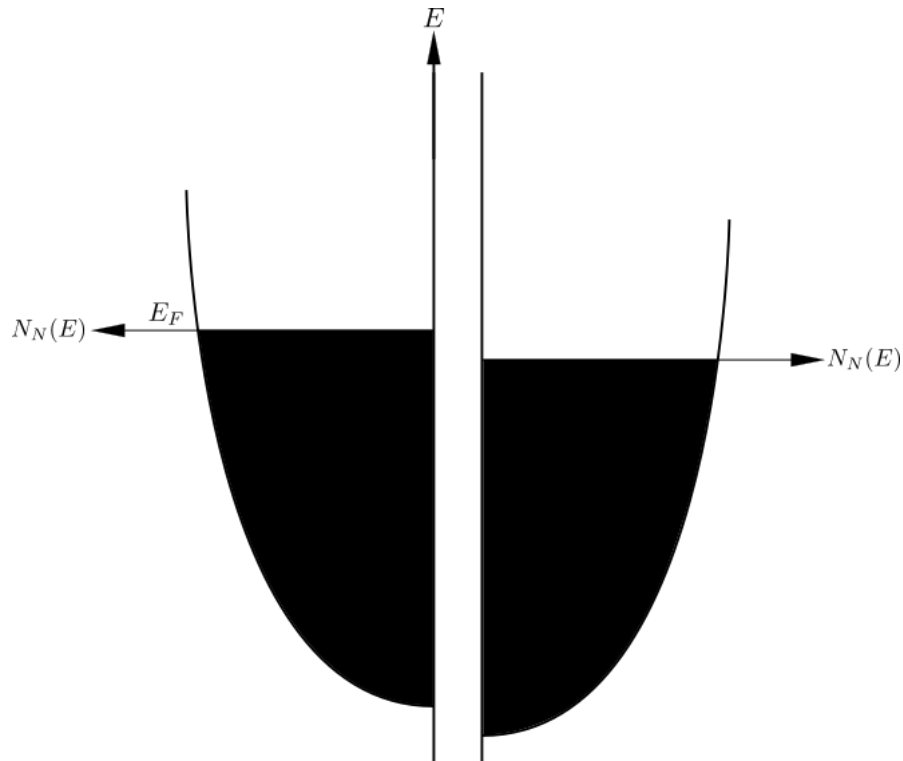


FIGURA 3.5: Diagrama de energía de una unión metal-aislante-metal en la que puede haber efecto túnel: En este diagrama los electrones de uno de los lados de la barrera ocupan niveles de energía más altos que los del otro lado. Por lo tanto, estos electrones pueden pasar al otro lado de la barrera y ocupar los estados que en ese lado se encuentran vacíos.

La intensidad de esta corriente túnel depende de varios parámetros. Por ejemplo, a mayor diferencia de potencial aplicada mayor corriente. Está claro que cuantos más estados tengamos en el nivel de Fermi mayor será la probabilidad de tener corriente túnel, lo cual puede indicar que quizás con experimentos de efecto túnel podemos obtener información sobre este importante parámetro y en general sobre la superficie de Fermi, pero como es de esperar la corriente túnel también depende de la anchura, altura y forma de la barrera y estos parámetros son muy difíciles de determinar, lo cual hace que en metales normales del efecto túnel se obtenga una información mucho menos rica de lo que se podía esperar. Ocurre todo lo contrario con el efecto túnel cuando uno de los dos metales está en estado superconductor, como pasaremos a ver a continuación.

La existencia de una banda de energía en el estado superconductor [3.6](#) hace que el efecto túnel en una estructura formada por superconductor-aislante-metal en estado normal, tenga características especiales (Giaver, 1960 [ref]). Es claro que necesitamos previamente disponer de electrones normales por encima de la banda prohibida superconductora, esto es hay que romper pares de Cooper, como primera

medida, es decir diferencias de potencial aplicadas menores que la banda prohibida no producirán efecto túnel. Esto es, diferencias de potencial aplicadas a la barrera no producen corriente túnel, salvo que venzan un valor umbral, que es precisamente el ancho de la banda prohibida. De entrada ya tenemos una muy importante propiedad del efecto túnel superconductor, que nos permite medir la banda prohibida superconductora y medir la variación de esta banda con la temperatura.

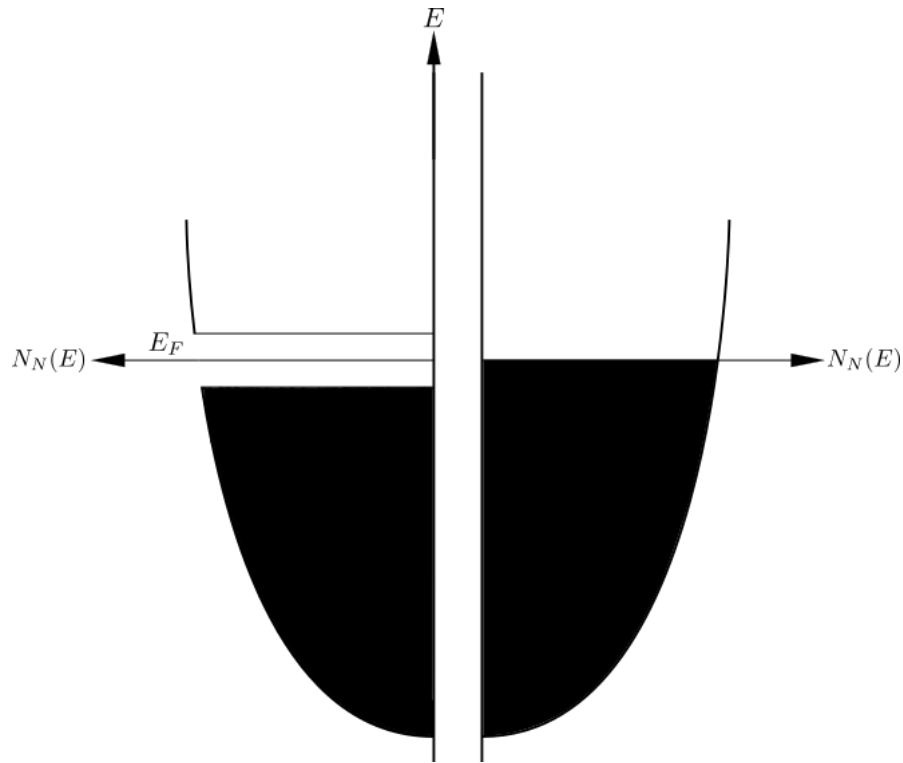


FIGURA 3.6: Diagrama de energía de una unión superconductor-aislante-metal en la que puede haber efecto Giaver: En este diagrama, al producirse excitaciones que lleven electrones por encima de la banda prohibida, rompiendo pares de Cooper, los electrones excitados podrían pasar al otro lado de la barrera por efecto túnel.

3.4. Efecto Josephson

El efecto Josephson fue postulado teóricamente por Josephson (1962) [10] y comprobado experimentalmente por P.W. Anderson y Rowell (1963) [11] y por Shapiro (1963) [12], casi simultáneamente. Este es un efecto túnel de pares de Cooper entre superconductores, mientras que el efecto túnel tratado en las líneas anteriores es túnel de electrones normales entre superconductores o entre un metal normal y un superconductor. En concreto la sugerencia de Josephson es que puede existir

efecto túnel entre dos superconductores que se encuentren separados por una barrera aislante (en principio más delgada que las tratadas en el efecto túnel Giaver), donde la corriente túnel sea exclusivamente de pares de Cooper sin que se tenga una diferencia de potencial entre ambos lados de la barrera.

Se va a seguir la deducción de Feynman por su sencillez y claridad. Supongamos que tenemos un superconductor separado en dos partes por un aislante lo suficientemente estrecho como para que la función de onda superconductora a un lado de la barrera se sobrelape con la del otro lado. Sean ψ_1 y ψ_2 las funciones de onda superconductoras a los dos lados de la barrera (1) y (2).

El tunelamiento de pares del lado (2) al lado (1) aumenta la amplitud ψ_1 de la función de onda de los pares en el lado (1), es decir, aumenta la cantidad de pares de Cooper en el lado (1). Supongamos que el ritmo de crecimiento de ψ_1 es proporcional a ψ_2 , amplitud de la función de onda de los pares en el lado (2). Podemos escribir el ritmo de cambio de ψ_1 de la forma $A\psi_2$ donde A es una característica de la barrera y nos da información de la probabilidad de transferencia de pares del lado (2) al lado (1).

Podemos escribir la ecuación de Schrödinger para el lado superconductor (1) teniendo en cuenta esto último, como

$$\frac{-\hbar}{i} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = E_1 \psi_1 + A \psi_2 \quad (3.18)$$

donde E_1 es la energía del estado más bajo de energía del superconductor del lado (1).

Análogamente, podemos escribir para el superconductor del lado (2)

$$\frac{-\hbar}{i} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = E_2 \psi_2 + A \psi_1 \quad (3.19)$$

Escribiendo explícitamente la función de onda superconductora, $\psi_i = \sqrt{n_{s_i}} e^{i\varphi_i}$, donde, como ya vimos, n_{s_i} es la densidad de electrones superconductores en el lado (i).

Por lo tanto las ecuaciones anteriores pueden ser escritas como

$$\frac{-\hbar}{i} \frac{1}{2\sqrt{n_{s_1}}} \frac{\partial n_{s_1}}{\partial t} + \hbar \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \sqrt{n_{s_1}} = E_1 \sqrt{n_{s_1}} + A \sqrt{n_{s_2}} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (3.20)$$

$$\frac{-\hbar}{i} \frac{1}{2\sqrt{n_{s_2}}} \frac{\partial n_{s_2}}{\partial t} + \hbar \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \sqrt{n_{s_2}} = E_2 \sqrt{n_{s_2}} + A \sqrt{n_{s_1}} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (3.21)$$

Si ahora igualamos las partes reales y las partes imaginarias de estas ecuaciones tenemos

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{j_0}{2n_{s_1}} \cos(\delta) + E_1/\hbar \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{j_0}{2n_{s_2}} \cos(\delta) + E_2/\hbar \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial n_{s_1}}{\partial t} = -j_0 \sin(\delta) \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial n_{s_2}}{\partial t} = j_0 \sin(\delta) \quad (3.25)$$

Donde $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ y $j_0 = \frac{2A}{\hbar} (n_{s_1} n_{s_2})^{1/2}$. En lo que sigue, asumiremos que se tiene el mismo superconductor en ambos lados, así que tomaremos $n_{s_1} = n_{s_2}$. Entonces:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = (E_2 - E_1)/\hbar \quad (3.26)$$

$$j = \frac{\partial n_{s_2}}{\partial t} = -\frac{\partial n_{s_1}}{\partial t} = j_0 \sin(\delta) \quad (3.27)$$

De aquí salen directamente las relaciones de Josephson para corriente y voltaje:

$$V_J = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \delta}{\partial t} \quad (3.28)$$

$$I_J = I_0 \sin(\delta) \quad (3.29)$$

Donde el voltaje V_J es la diferencia de potencial entre los dos extremos de la unión de Josephson e I_J es la supercorriente que fluye a través de ésta.

Existe una clara diferencia entre este efecto túnel y el considerado al principio. En este caso de efecto Josephson tenemos túnel de pares de Cooper, mientras que en

el caso anterior el túnel era de electrones individuales. En el efecto Josephson son bastante estrechas del orden o menores que la longitud coherente (tamaño de los pares de Cooper), en realidad el aislante actúa como un mal superconductor, las funciones de onda de ambos lados se pueden solapar, existiendo una diferencia de fase a ambos lados de la barrera y como resultado de todo esto se establece una corriente continua a través de la barrera. En realidad, se puede demostrar que el mínimo de energía se alcanza cuando las fases se igualan y por lo tanto no se tiene corriente a través de la barrera, pero basta con aplicar una corriente de una fuente externa, siempre menor que I_0 , para que las fases dejen de ser iguales y si esta desigualdad no varía con el tiempo, se tiene a través de la barrera una corriente constante sin que se tenga caída de potencial. No hace falta colocar un óxido, un aislante, para que actúe de barrera se puede utilizar un estrechamiento en el superconductor, producido mediante una técnica conocida como fotolitografía, o cualquier otra técnica que nos produzca que una parte del superconductor esté unida a otra mediante un estrangulamiento lo suficientemente estrecho como para ser una unión débil. También se pueden obtener este tipo de uniones débiles con contactos entre superconductores de tipo puntual, o bien separando dos superconductores por una capa delgada de un metal en estado normal. Como acabamos de mencionar el tamaño de los pares de Cooper es una indicación del orden de magnitud de esta unión débil.

Los órdenes de magnitud de los parámetros que intervienen en el efecto Josephson son, para una unión de 1mm^2 de área $R = 1\Omega$, $I_0 = 1\text{mA}$ y $\Delta = 1\text{meV}$. Normalmente las densidades de corriente a través de las uniones son del orden de un millón de veces menores que las densidades de corriente crítica superconductora en un superconductor. Es decir, en general, en un superconductor se tiene que pasar de la densidad de corriente crítica para hacer desaparecer la superconductividad, pero si el superconductor tiene en algún punto una unión débil densidades de corriente un millón de veces menores hacen que se tenga caída de potencial en el paso de corriente por la unión.

Si hacemos pasar una corriente mayor que I_0 aparece una diferencia de potencial y teniendo en cuenta que al mismo tiempo que este efecto túnel (Josephson) de pares podemos tener el efecto túnel normal (Gíaver) de electrones, el resultado se puede ver en la figura 3.7 donde se representa la curva característica I,V. Como sea la conexión en la realidad entre estos dos túneles depende de las características de la unión y del circuito exterior.

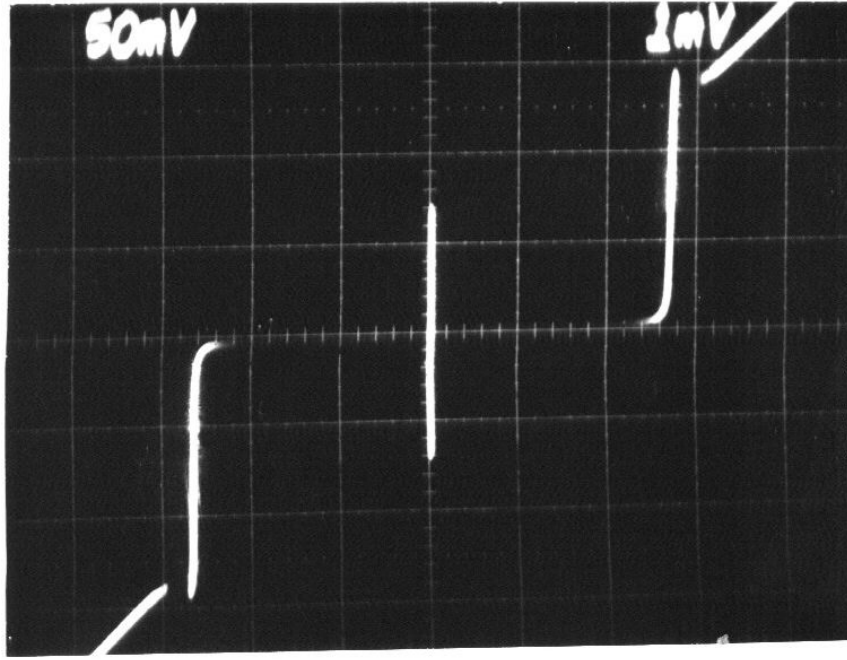


FIGURA 3.7: Curva característica I-V de una unión Josephson: El eje vertical tiene una escala de $50\mu A$ y el eje horizontal $1mV$. La barra en $V = 0$ corresponde a la supercorriente producida por efecto Josephson. Para $V > 3mV$ se entra en el régimen ohmico de la unión de Josephson, el cuál se produce por el tamaño finito de la banda prohibida

Finalmente hay que considerar lo que ocurre si aplicamos a la unión Josephson una diferencia de potencial externa constante, V , o lo que es lo mismo, tenemos una intensidad pasando por la barrera superior a I_0 . El cálculo es análogo al anterior, muy sencillo y nos conduce a que la intensidad a través de la barrera tiene la expresión

$$I = I_0 \sin((\varphi_2 - \varphi_1) + \omega t) = I_0 \sin(\delta + \omega t) \quad (3.30)$$

Donde $\omega = \frac{2eV}{\hbar}$. En realidad el punto de partida de esta deducción es la dependencia con el tiempo de la fase, una diferencia de potencial aplicada a la unión lo que hace es variar en el tiempo la fase y el ritmo de variación de la fase viene dado por la ecuación $\frac{d\delta}{dt} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{qV}{\hbar} = \frac{2eV}{\hbar}$.

Es decir, una diferencia de potencial constante aplicada a una barrera Josephson produce una corriente alterna de pares (una supercorriente), por ejemplo una diferencia de potencial del orden de $1\mu V$ da lugar a una corriente que oscila con una frecuencia de 484MHz. Además de esta corriente de pares tenemos la corriente debida al efecto túnel normal de los electrones individuales. Ahora podemos volver

a la figura 3.7 donde tendremos que hasta que se alcanza el valor I_0 tenemos paso de corriente por la unión sin caída de potencial. una vez que $I > I_0$, entonces aparece un voltaje y nos situamos en un punto de la gráfica del efecto túnel de electrones normales (Gíaver), tenemos una diferencia de potencial aplicada, luego existe túnel normal y además, esto no está representado en la física, tenemos una supercorriente (corriente de pares de Cooper) que está oscilando.

3.5. Componentes de la corriente en las uniones de Josephson

La corriente en las uniones Josephson tiene tres componentes:

1. I_d , la corriente de desplazamiento: Como la corriente en un capacitor. La unión de Josephson forma un capacitor de placas paralelas superconductoras con un material aislante o un metal normal entre ellas, entonces podemos hablar de una corriente de desplazamiento I_d . La capacitancia C de este dispositivo está definida de la misma manera que en el estado normal: $C = \epsilon_r \frac{A}{4\pi d}$, donde ϵ_r es la constante dieléctrica relativa de la capa que separa a los dos superconductores, d la separación de los superconductores y A el área de los mismos.
2. I_n , la corriente ordinaria: Por los electrones individuales. Cuando la temperatura $T \neq 0$, siempre habrá movimiento térmico de cargas cuya energía es del orden de $k_B T$, donde k_B es la constante de Boltzmann. Cuando T es menor, pero cercano a la temperatura crítica T_c , la energía de acoplamiento de los pares de Cooper $E_g = 2\Delta$ es mucho menor a $k_B T$, lo cual resulta en la disminución de los pares de Cooper y el aumento de la concentración de electrones normales. Si el voltaje a través de la unión es mayor al asociado a la energía de la brecha $V_g = |\Delta_1 + \Delta_2|/e$, los pares de Cooper de un lado de la unión se rompen y uno de los electrones de cada uno de los pares disueltos pasa al otro lado, es decir, se produce un tunelamiento de electrones normales. Si la concentración de electrones individuales aumenta, el comportamiento de la unión tenderá a uno de tipo óhmico, es decir, la unión tenderá a comportarse como una resistencia.
3. I_s , la supercorriente: Por los pares de Cooper. Se puede expresar en términos de una corriente crítica I_0 y la diferencia de fase entre las funciones

de onda macroscópicas de las dos placas superconductoras, de manera que $I_s = I_0 \sin(\delta)$. La corriente crítica es un parámetro experimental importante del dispositivo que puede alterarse tanto por la temperatura como por un campo magnético aplicado.

3.6. Qubits superconductores

Los qubits superconductores se basan en circuitos osciladores no lineales, hechos a partir de uniones Josephson [13].

El Hamiltoniano de un oscilador armónico LC está dado por

$$\hat{H} = E_C \hat{n}^2 + E_L \frac{\hat{\phi}^2}{2}, \quad (3.31)$$

donde \hat{n} es la cantidad de pares de Cooper inducidos en el capacitor (En otras palabras, la carga inducida en el capacitor, medida en unidades de $2e$), y $\hat{\phi}$ es la diferencia de fase sobre el inductor. La carga \hat{n} y la fase $\hat{\phi}$ no conmutan, $[\hat{\phi}, \hat{n}] = i$, lo que significa que sus valores esperados no se pueden medir simultáneamente. $E_C = \frac{(2e)^2}{2C}$, $E_L = \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L}$ y la distancia entre niveles de energía del oscilador armónico $\hbar\omega = \frac{\hbar}{\sqrt{LC}} = \sqrt{2E_L E_C}$.

Para poder servir como qubit, el oscilador debe ser anarmónico, de manera que se pueda operar sobre un par específico de niveles de energía. Al agregar una unión Josephson, el Hamiltoniano del circuito LCJ se convierte en:

$$\hat{H} = E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_{J0} \cos(\hat{\phi}) + E_L \frac{(\hat{\phi} - \phi_e)^2}{2},$$

donde n_g es la carga inducida por voltaje en el capacitor C (isla qubit) y ϕ_e es la fase inducida por flujo sobre la unión Josephson. La energía de Josephson E_{J0} está dada por $E_{J0} = \frac{\hbar}{2e} I_0$ en términos de la corriente crítica I_0 de la unión. Usualmente, la unión Josephson es del tipo Superconductor-Aislante-Superconductor con corriente crítica fija.

Con el fin de introducir la inductancia no lineal de Josephson, empezamos por

$$I_J = I_0 \sin(\phi)$$

Combinado con la ley de Lenz:

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}, \quad \Phi_0 = \frac{h}{2e}$$

Se encuentra que:

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{I_0 \cos(\phi)} \frac{dI_J}{dt}$$

Definiendo $L_J = V(\frac{dI_J}{dt})^{-1}$, se obtiene finalmente la inductancia de Josephson L_{J0} :

$$L_J = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{I_0 \cos(\phi)} = L_{J0} \frac{1}{\cos(\phi)}$$

Esto define la inductancia de Josephson de la unión Josephson aislada y nos permite expresar la energía de Josephson como $E_{J0} = \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L_{J0}}$

$$[E_C(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} - n_g)^2 + U(\phi)]\psi = E\psi \quad (3.32)$$

$$U(\phi) = -E_{J0} \cos(\phi) + E_L \frac{(\phi - \phi_e)^2}{2} \quad (3.33)$$

De aquí podemos distinguir los siguientes dos casos principales:

1. $E_L = 0$ ($L \sim \infty$): En este caso $U(\phi)$ se convierte en una potencial de tipo coseno puro. La función de onda tiene la forma $\psi = \psi(\phi, n_g)e^{in_g\phi}$, donde $\psi(\phi, n_g)$ es una función de Mathieu. Los niveles de energía forman bandas $E(n_g)$ en la dirección “momentum”. La dispersión de estas bandas depende del cociente E_{J0}/E_C . Es de especial interés el caso en el que la capacitancia C es grande, pues esto resulta en bandas planas, lo cual protege al circuito de ruidos causados por fluctuaciones en la carga.
2. $E_L \approx E_{J0}$: En este caso $U(\phi)$ deja de ser periodico y describe una parábola modulada por una función sinusoidal. La forma de este potencial cerca del fondo de la parábola y la estructura de los niveles de energía del qubit dependen altamente del cociente E_L/E_{J0} y del flujo externo ϕ_e . Esto permite crear distintos tipos de qubits con una gran variedad de parámetros distintos.

3.7. Arquetipos de qubits superconductores

Existen tres arquetipos principales de qubit superconductores. Ellos son los siguientes:

3.7.1. Qubit de carga

Si E_L tiende a cero, la carga almacenada en la isla superconductora entre el capacitor y la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma de coseno. Los transmones son un tipo particular de qubit de carga.

3.7.2. Qubit de flujo

Si E_L es comparable con E_{J0} , el flujo a través del lazo formado por el inductor y la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma cuártica.

3.7.3. Qubit de fase

Si se polariza la unión Josephson con una fuente de corriente, la fase en ambos extremos de la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma cúbica.

3.8. Transmones

Los transmones son un tipo de qubit de carga. Tratando el transmón como un sistema de dos niveles acoplado linealmente a un oscilador monomodo, su Hamiltoniano toma la siguiente forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} + \hat{H}_r = -\frac{1}{2}\epsilon\sigma_z + g\sigma_x(a + a^\dagger) + \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

donde ϵ es la energía de excitación del qubit, g es el acoplamiento qubit-oscilador y ω es la frecuencia del oscilador.

Introduciendo los operadores escalera del qubit, $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$, el término de interacción \hat{H}_{qr} se puede dividir en dos términos, el de Jaynes-Cummings (JC) y el anti-Jaynes-Cummings (AJC):

$$\hat{H}_{qr} = \hat{H}_{qr}^{JC} + \hat{H}_{qr}^{AJC} = g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) + g(\sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a)$$

Este Hamiltoniano describe el modelo cuántico canónico de Rabi (canonical quantum Rabi model - QRM). Las ecuaciones (()) son completamente generales y aplicables a cualquier sistema qubit-oscilador. Mantener sólo el término JC corresponde a realizar la aproximación de onda rotativa (rotating wave approximation - RWA).

3.9. Hamiltonianos multiqubit de transmones

Omitiendo el término del oscilador, el Hamiltoniano toma la siguiente forma general:

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} + \hat{H}_{qq} = -\frac{1}{2} \sum_i \epsilon_i \sigma_{zi} + \sum_i g_i \sigma_{xi} (a + a^\dagger) + \frac{1}{2} \sum_{i,j;\nu} \lambda_{\nu,ij} \sigma_{\nu i} \sigma_{\nu j}$$

Por simplicidad, se considera que el término \hat{H}_{qr} se refiere sólo a la lectura y las operaciones de bus, dejando la interacción indirecta qubit-qubit via el resonador ser incluidas en \hat{H}_{qq} via la constante de acoplamiento $\lambda_{\nu,ij}$. Existen distintos tipos de acoplamiento qubit-qubit, entre ellos se encuentran los siguientes:

1. Acoplamiento capacitivo

Este acoplamiento se logra conectando transmones con un capacitor y tiene el siguiente término de interacción:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{qq} &= \lambda_{12} \sigma_{x1} \sigma_{x2} \\
\lambda_{12} &= \frac{1}{2} \sqrt{E_{10,1} E_{10,2}} \frac{\sqrt{E_{EC1} E_{EC2}}}{E_{Cc}} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{E_{10,1} E_{10,2}} \frac{C_c}{\sqrt{C_1 C_2}} \approx \frac{1}{2} E_{10} \frac{C_c}{C} \\
\hat{H}_{qq} &= \lambda_{12} (\sigma_{+1} \sigma_{-2} + \sigma_{-1} \sigma_{+2})
\end{aligned}$$

2. Acoplamiento por el resonador

Este acoplamiento se logra conectando transmones a un mismo resonador a modo de bus y tiene el siguiente término de interacción:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{qq} &= \lambda_{12} \sigma_{x1} \sigma_{x2} \\
\lambda_{12} &= \frac{1}{2} g_1 g_2 \left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} \right) \equiv g_1 g_2 \frac{1}{\Delta} \\
\Delta_i &= \epsilon_i - \hbar \omega
\end{aligned}$$

3. Acoplamiento de junción Josephson

Este acoplamiento se logra conectando transmones con una junción Josephson y tiene el siguiente término de interacción:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{qq} &= \lambda_{12} \sigma_{y1} \sigma_{y2} \\
\lambda_{12} &\approx \frac{1}{2} E_{10} \frac{L_c}{L_J} \frac{\cos(\delta_c)}{2L_c \cos(\delta_c) + L_{Jc}}
\end{aligned}$$

3.10. Compuertas cuánticas en transmones

Las compuertas cuánticas se construyen agregando términos al Hamiltoniano del sistema de manera que el operador de evolución de un tiempo t_0 a un tiempo t_1 sea igual al operador de la compuerta deseada. La evolución temporal de un sistema cuántico puede ser descrita por la ecuación de Schrödinger para el vector de estado $|\psi(t)\rangle$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle$$

en términos del operador evolución $\hat{U}(t, t_0)$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

El Hamiltoniano del sistema lo podemos descomponer en los siguientes términos:

$$\hat{H} = \hat{H}_{sys} + \hat{H}_{ctrl}(t)$$

Los cuales describen al sistema intrínseco, \hat{H}_{sys} y las operaciones de control aplicadas, \hat{H}_{ctrl} . Las compuertas son el resultado de aplicar pulsos de control específicos a partes selectas de un circuito físico. Esto afecta varios términos del Hamiltoniano, haciéndolos dependientes del tiempo. En general, los términos de control se pueden escribir como:

$$\hat{H}_{ctrl} = \sum_{i;\nu} f_{\nu i}(t) \sigma_{\nu i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j;\nu} h_{\nu,ij}(t) \sigma_{\nu i} \sigma_{\nu j} + k(t) a^\dagger a$$

3.10.1. Pulsos de microondas

$$\hat{H}_d = \sum_k (a + a^\dagger) (\xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t} + \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t})$$

RWA:

$$\hat{H}_d = \sum_k a \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t}$$

3.10.2. Régimen rotacional del pulso

Trabajando con un sólo modo a la vez, se aplica la siguiente transformación $U(t) = \exp[-i\omega_d t (a^\dagger a + \sum_i \sigma_{zi})]$ para entrar en el régimen rotacional del pulso de control.

$$\hat{H} = U^\dagger (\hat{H}_{sys} + \hat{H}_d) U - iU^\dagger \dot{U}$$

$$\hat{H} = \Delta_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + (a \xi^* e^{i\omega_d t} + a^\dagger \xi e^{-i\omega_d t})$$

$$\Delta_c = \omega_c - \omega_d \quad \Delta_{qi} = \omega_{qi} - \omega_d$$

3.10.3. Efecto del pulso sobre el qubit

Luego se aplica el operador de desplazamiento $D(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a]$ sobre el campo a con $\dot{\alpha} = -i\Delta_c \alpha - i\xi e^{-i\omega_d t}$ para eliminar el efecto directo del pulso sobre la cavidad.

$$\hat{H} = D^\dagger(\alpha) \hat{H}_{old} D(\alpha) - iD^\dagger(\alpha) \dot{D}(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \Delta_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) \\ & + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) - \Delta_c \alpha \alpha^* \end{aligned}$$

El término $-\Delta_c \alpha \alpha^*$ se desprecia, ya que sólo representa una fase global en la evolución del sistema.

3.10.4. Régimen dispersivo

Finalmente, aplicamos la transformación $U = \exp[\sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})]$, donde $\Delta_i = \omega_{qi} - \omega_c$ y realizamos la aproximación de segundo grado sobre los términos $\frac{g_i}{\Delta_i} \ll 1$.

$$\begin{aligned} \hat{H} = & U^\dagger \hat{H}_{old} U \\ \hat{H} \approx & \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \tilde{\Delta}_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i (\Omega_i \sigma_{+i} + \Omega_i^* \sigma_{-i}) \\ & + \sum_{i \neq j} \frac{g_i g_j}{2\Delta_i} (\sigma_{-i} \sigma_{+j} + \sigma_{+i} \sigma_{-j}) \end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta}_c = (\omega_c + \sum_i \chi_i \sigma_{zi}) - \omega_d \quad \tilde{\Delta}_{qi} = (\omega_{qi} + \chi_i) - \omega_d \quad \chi_i = \frac{g_i^2}{\Delta_i}$$

3.10.5. Rotaciones X-Y

Tomando $\Omega(t) = \Omega^x(t) \cos(\omega_d t) + \Omega^y \sin(\omega_d t)$, donde ω_d es igual a la frecuencia de resonancia de uno de los qubits logramos rotaciones sobre los ejes X e Y. Las amplitudes de estas rotaciones vienen dadas por $\int_0^{t_0} \Omega^x(t) dt$ y $\int_0^{t_0} \Omega^y(t) dt$, respectivamente, donde t_0 es la duración del pulso.

$$\hat{H} \approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_q \sigma_z + \frac{1}{2} (\Omega^x(t) \sigma_x + \Omega^y(t) \sigma_y)$$

3.10.6. Compuerta de entrelazamiento

Ejemplo con sólo dos qubits

$$\hat{H} \approx \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_{q_1} \sigma_{z_1} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_{q_2} \sigma_{z_2} + \frac{g_1 g_2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{2 \Delta_1 \Delta_2} (\sigma_{-1} \sigma_{+2} + \sigma_{+1} \sigma_{-2})$$

Variando la frecuencia de resonancia de los qubit, se puede variar el acoplamiento entre estos.

3.10.7. Compuertas compuestas

Con los transmones se pueden realizar rotaciones X-Y y la compuerta iSWAP. Sin embargo, los algoritmos no se escriben en función de sólo estas compuertas, también se necesitan H, CNOT, entre otras. Entonces, debemos construir estas otras compuertas en función de Rx, Ry e iSWAP. Esto es posible, ya que con secuencias de rotaciones en X e Y se puede realizar cualquier compuerta de un sólo qubit, ya que estas consisten de rotaciones en la esfera de Bloch y con rotaciones sobre dos ejes ortogonales se pueden lograr rotaciones sobre cualquier eje en la esfera. Luego, con un conjunto universal de compuertas de un sólo qubit y una compuerta de entrelazamiento, se tiene un conjunto universal de compuertas cuánticas.

Bibliografía

- [1] Adriano Barenco, Charles H. Bennet, Richard Cleve, David P. DiVincenzo, Norman Margolus, Peter Shor, Tycho Sleator, Jhon A. Smolin, and Harald Weinfurter. Elementary gates for quantum computation. *Physical Review A*, 1995.
- [2] Sttiwuer Díaz-Solórzano. Esquemas de medidas. *QIC*, 2014.
- [3] Rudolf Gross and Achim Marx. Applied superconductivity: Josephson effect and superconducting electronics. *Walther-Meißner-Institut*, 2005.
- [4] Onnes H.K. Further experiments with liquid helium. g. on the electrical resistance of pure metals, etc. vi. on the sudden change in the rate at which the resistance of mercury disappears. *Springer, Dordrecht*, 1911.
- [5] A. P. Drozdov, M. I. Erements, I. A. Troyan, V. Ksenofontov, and S. I. Shylin. Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system. *Nature*, 525:73–76, 2015.
- [6] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Physical Review Journals Archive*, 1957.
- [7] Herbert Fröhlich. Theory of the superconducting state. *Unknown*, 1950.
- [8] M Cyrot. Ginzburg-landau theory for superconductors. *Reports on Progress in Physics*, 36(2):103, 1973.
- [9] Jr. Bascom S. Deaver and William M. Fairbank. Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders. *Physical Review Letters*, 1961.
- [10] B.D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics Letters*, 1(7):251 – 253, 1962.
- [11] P. W. Anderson and J. M. Rowell. Probable observation of the josephson superconducting tunneling effect. *Phys. Rev. Lett.*, 10:230–232, Mar 1963.

-
- [12] Sidney Shapiro. Josephson currents in superconducting tunneling: The effect of microwaves and other observations. *Phys. Rev. Lett.*, 11:80–82, Jul 1963.
 - [13] G. Wendin. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *IOP Science*, 2017.
 - [14] Alexandre Blais, Jay Gambetta, A. Wallraff, D. I. Schuster, S. M. Girvin, M. H. Devoret, , and R. J. Schoelkopf. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics. *Physical Review A*, 2007.
 - [15] Norbert Schuch and Jens Siewert. Natural two-qubit gate for quantum computation using the xy interaction. *Physical Review A*, 2003.
 - [16] T. Loke and J.B. Wang. Efficient quantum circuits for szegedy quantum walks. *Annals of Physics*, 382:64 – 84, 2017.