Diseño y simulación de un procesador cuántico superconductor

Miguel Casanova
Departamento de Electrónica y Circuitos[1], Universidad Simón Bolívar

2018
September

[1]I am no longer a member of this department

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Apéndice A

Cálculos de Hamiltonianos

A.1. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

El Hamiltoniano de Jaynes-Cummings es un Hamiltoniano diagonal que representa un sistema de dos niveles interactuando con un modo cuantizado de una cavidad óptica.

$$\hat{H}_{JC} = \hat{H}_r + \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} = \omega_r a^\dagger a - \frac{1}{2}\omega_q \sigma_z + g(a\sigma_+ + a^\dagger \sigma_-) \tag{A.1}$$

A.2. Hamiltoniano multiquibit

El modelo de Jaynes-Cummings para varios qubits sin el término de la energía de la cavidad es el siguiente:

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_{qr} = -\frac{1}{2}\sum_i \omega_{qi}\sigma_{zi} + \sum_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) \tag{A.2}$$

A.3. Pulsos de microondas

Para operar sobre los qubits se aplican pulsos de microondas.

$$\hat{H}_d = \sum_k (a + a^\dagger)(\xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t} + \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t}) \tag{A.3}$$

RWA:

$$\hat{H}_d = \sum_k a\xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t} \tag{A.4}$$

A.4. Régimen rotacional del pulso

Partiendo del Hamiltoniano de Jaynes-Cummings para un sistema multiqubit con pulsos de microondas bajo la aproximación de onda rotacional:

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{syst} + \hat{H}_d = \omega_r a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \omega_{qi}\sigma_{zi} + \sum_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger\sigma_{-i}) + \sum_k a\xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)}t} + a^\dagger\xi_k e^{-i\omega_d^{(k)}t} \tag{A.5}$$

Aplicamos la siguiente transformación unitaria para entrar en el regimen rotacional del pulso aplicado

$$U(t) = exp[\sum_n -i\omega_d^{(n)} t(a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \sigma_{zi})] \tag{A.6}$$

De esta manera, el Hamiltoniano en el régimen rotacional del pulso tendrá la siguiente forma:

$$\hat{H}_2 = U^\dagger(\hat{H}_{syst} + \hat{H}_d)U - iU^\dagger\dot{U} \tag{A.7}$$

Donde $\dot{U}$ representa la derivada temporal del operador unitario U.

Utilizaremos la formula de Baker-Campbell-Hausdorff para calcular este Hamiltoniano, ya que esta nos permite realizar el producto con los exponenciales de operadores calculando sólo conmutadores.

$$e^{-\lambda X} H e^{\lambda X} = H + \lambda[H, X] + \frac{\lambda^2}{2!}[[H, X], X] + ... \tag{A.8}$$

En cuanto a los conmutadores, podemos utilizar las siguientes identidades:

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{A.9}$$

$$[a, a^\dagger a] = aa^\dagger a - a^\dagger aa = (aa^\dagger - a^\dagger a)a = [a, a^\dagger]a = a \tag{A.10}$$

$$[a^\dagger, a^\dagger a] = a^\dagger a^\dagger a - a^\dagger aa^\dagger = a^\dagger(a^\dagger a - aa^\dagger) = a^\dagger[a^\dagger, a] = -a^\dagger \tag{A.11}$$

$$[\sigma_+, \sigma_z] = 2\sigma_+ \tag{A.12}$$

$$[\sigma_-, \sigma_z] = -2\sigma_- \tag{A.13}$$

$$[\sigma_-, \sigma_+] = \sigma_z \tag{A.14}$$

Para que el cálculo sea visualmente más manejable, aprovechamos la propiedad distributiva de los conmutadores y separaremos el Hamiltoniano $\hat{H}_1$ en los siguientes términos:

1. $\hat{H}_r = \omega_r a^\dagger a$
2. $\hat{H}_q = -\frac{1}{2}\sum\limits_i \omega_{qi}\sigma_{zi}$
3. $\hat{H}_{qr} = \sum\limits_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger\sigma_{-i})$
4. $\hat{H}_d = \sum\limits_k (a\xi_k^* e^{i\sum\limits_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\sum\limits_k \omega_d^{(k)} t})$

Con el primer término tenemos el siguiente conmutador:

$$[\omega_r a^\dagger a, \sum_n -i\omega_d^{(n)} t(a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \sigma_{zi})] = 0 \tag{A.15}$$

El cual es igual a cero, ya que $a^\dagger a$ conmuta con sí mismo, como todo operador, y con σ_{z_i}, ya que actúan sobre particiones distintas del sistema.

Con el segundo término tenemos el siguiente conmutador:

$$[-\frac{1}{2}\sum_i \omega_{qi}\sigma_{zi}, \sum_n -i\omega_d^{(n)} t(a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \sigma_{zi})] = 0 \tag{A.16}$$

El cual es igual a cero, ya que σ_{z_i} conmuta consigo mismo y con $a^\dagger a$.

Con el tercer término tenemos el siguiente conmutador:

$$\begin{aligned} &\left[\sum_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger\sigma_{-i}), \sum_n -i\omega_d^{(n)} t(a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \sigma_{zi})\right] = \\ &\sum_n -i\omega_d^{(n)} t\left[\sum_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger\sigma_{-i}), (a^\dagger a)\right] \\ &+ \sum_n -i\omega_d^{(n)} t\left[\sum_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger\sigma_{-i}), (-\frac{1}{2}\sum_i \sigma_{zi})\right] = \\ &\sum_n -i\omega_d^{(n)} t\sum_i g_i(a\sigma_{+i} - a^\dagger\sigma_{-i}) - \sum_n -i\omega_d^{(n)} t\sum_i g_i(a\sigma_{+i} - a^\dagger\sigma_{-i}) = 0 \end{aligned} \tag{A.17}$$

En este caso, utilizamos el hecho de que a, $a^\dagger$ y $a^\dagger a$ conmutan con σ_{z_i}, σ_{+_i} y σ_{-_i}, igual que σ_{z_i}, σ_{+_i} y σ_{-_i} con σ_{z_j}, σ_{+_j} y σ_{-_j}, donde $i \neq j$, ya que actuan sobre particiones distintas. También utilizamos las identidades A.9 - A.14 y el hecho de que todo operador conmuta con sí mismo. De esta manera llegamos a una resta de dos términos iguales, así que este conmutador también es cero.

Con el cuarto término tenemos el siguiente conmutador:

$$\left[\sum_k \left(a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}\right), \sum_n -i\omega_d^{(n)} t \left(a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \sigma_{zi}\right)\right] = \left(\sum_n -i\omega_d^{(n)} t\right) \sum_k \left(a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} - a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}\right) \quad \text{(A.18)}$$

Aquí hemos utilzado el hecho de que a y $a^\dagger$ conmutan con σ_{z_i} y las identidades A.10 y A.11. Este conmutador no es igual a cero como los anteriores, así que tenemos que utilizar este resultado para calcular $[[H, X], X]$.

$$\left[\left(\sum_n -i\omega_d^{(n)} t\right) \sum_k \left(a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} - a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}\right), \sum_n -i\omega_d^{(n)} t \left(a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \sigma_{zi}\right)\right] = \left(\sum_n -i\omega_d^{(n)} t\right)^2 \sum_k \left(a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}\right) \quad \text{(A.19)}$$

De igual manera que en el conmutador anterior, hemos utilzado el hecho de que a y $a^\dagger$ conmutan con σ_{z_i} y las identidades A.10 y A.11. Este conmutador no es igual a cero como los anteriores, así que tenemos que utilizar este resultado para calcular $[[[H, X], X], X]$.

$$\left[\left(\sum_n -i\omega_d^{(n)} t\right)^2 \sum_k \left(a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}\right), \left(\sum_n -i\omega_d^{(n)} t\right) \left(a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \sigma_{zi}\right)\right] = \left(\sum_n -i\omega_d^{(n)} t\right)^3 \sum_k \left(a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)} t} - a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)} t}\right) \quad \text{(A.20)}$$

De igual manera que en el conmutador anterior, hemos utilzado el hecho de que a y $a^\dagger$ conmutan con σ_{z_i} y las identidades A.10 y A.11. Este conmutador no es igual a cero como los anteriores, así que tenemos que utilizar este resultado para calcular $[[[[H, X], X], X], X]$.

$$\left[\left(\sum_n -i\omega_d^{(n)}t\right)^3 \sum_k \left(a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)}t} - a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)}t}\right), \left(\sum_n -i\omega_d^{(n)}t\right)\left(a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \sigma_{zi}\right)\right] =$$

$$\left(\sum_n -i\omega_d^{(n)}t\right)^4 \sum_k \left(a\xi_k^* e^{i\sum_k \omega_d^{(k)}t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\sum_k \omega_d^{(k)}t}\right) \quad \text{(A.21)}$$

En este punto podemos notar cierto patrón. Esta serie de conmutadores nos recuerda a la serie de Taylor de la función exponencial con argumento $\sum\limits_n -i\omega_d^{(n)}t$. Al sustituirlos en la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, vemos que efectivamente se trata de este exponencial. Entonces, el primer término del Hamiltoniano $\hat{H}_2$ es:

$$U^\dagger(\hat{H}_1)U = \hat{H}_{syst} + \sum_k (e^{\sum_n -i\omega_d^{(n)}t} a\xi_k^* e^{\sum_k i\omega_d^{(k)}t} + e^{-\sum_n -i\omega_d^{(n)}t} a^\dagger \xi_k e^{-\sum_k i\omega_d^{(k)}t}) = \hat{H}_{syst} + \sum_k (a\xi_k^* + a^\dagger \xi_k) \quad \text{(A.22)}$$

Por otro lado, el segundo término es:

$$-iU^\dagger \dot{U} = -iU^\dagger(-i\sum_n \omega_d^{(n)}(a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \sigma_{zi}))U = -\sum_n \omega_d^{(n)}(a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \sigma_{zi}) \quad \text{(A.23)}$$

Es decir, $-i$ por la derivada temporal del argumento del exponencial en el que consiste U. Esto es porque todo exponencial conmuta con su argumento y en este caso, la derivada interna de U es igual al argumento del exponencial entre el escalar t, por lo que también conmuta con U. Además de que como U es unitario, se cumple que $U^\dagger U = \mathbb{1}$.

Finalmente, sumando y agrupando términos, nos queda que el Hamiltoniano en el régimen rotacional del pulso es:

$$\hat{H}_2 = (\omega_r - \sum_n \omega_d^{(n)})a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i (\omega_{qi} - \sum_n \omega_d^{(n)})\sigma_{zi} + \sum_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + \sum_k (a\xi_k^* + a^\dagger \xi_k) \quad \text{(A.24)}$$

En el caso de un pulso de un sólo modo, este Hamiltoniano toma la forma:

$$\hat{H} = \Delta_r a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \Delta_{qi}\sigma_{zi} + \sum_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + (a\xi^* + a^\dagger \xi) \quad \text{(A.25)}$$

Donde $\Delta_r = \omega_r - \omega_d$ es la diferencia entre la frecuencia de resonancia del resonador y la frecuencia central del pulso, y $\Delta_{qi} = \omega_{qi} - \omega_d$ es la diferencia entre la frecuencia de resonancia de cada qubit y la frecuencia central del pulso.

A.5. Efecto del pulso sobre el qubit

Ahora desplazaremos el campo a, aplicando el operador de desplazamineto

$$D(\alpha) = exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a] \tag{A.26}$$

Al Hamiltoniano $\hat{H}_2$ monomodo, con $\dot{\alpha} = -i\Delta_r\alpha - i\xi$, para eliminar el efecto directo del pulso sobre el resonador y ver cómo afecta a los qubits.

De esta manera, el nuevo Hamiltoniano será:

$$\hat{H}_3 = D^\dagger(\alpha)\hat{H}_2 D(\alpha) - iD^\dagger(\alpha)\dot{D}(\alpha) \tag{A.27}$$

Los operadores de desplazamiento cumplen con las siguientes propiedades:

$$D(-\alpha) = D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) \tag{A.28}$$

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha \tag{A.29}$$

$$D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^* \tag{A.30}$$

Utilizando estas dos propiedes, podemos calcular $D^\dagger(\alpha)\hat{H}_2 D(\alpha)$ directamente sin utilizar la expansión de Baker-Campbell-Hausdorff, pues basta con sustituir a por $a + \alpha$ y $a^\dagger$ por $a^\dagger + \alpha^*$.

$$D^\dagger(\alpha)\hat{H}_2 D(\alpha) = \Delta_r(a^\dagger + \alpha^*)(a + \alpha) - \frac{1}{2}\sum_i \Delta_{qi}\sigma_{zi} + \sum_i g_i[(a+\alpha)\sigma_{+i} + (a^\dagger + \alpha^*)\sigma_{-i}] \\ + [(a+\alpha)\xi^* + (a^\dagger + \alpha^*)\xi] \tag{A.31}$$

Estas mismas propiedades también se utilizan para calcular el otro término de $\hat{H}_3$, de la siguiente manera:

$$-iD^\dagger(\alpha)\dot{D}(\alpha) = -iD^\dagger(\alpha)(\dot{\alpha}a^\dagger - \dot{\alpha}^* a)D(\alpha) = -i[\dot{\alpha}(a^\dagger + \alpha^*) - \dot{\alpha}^*(a + \alpha)] \tag{A.32}$$

Finalemente, sumando, sustituyendo $\dot{\alpha}$ y agrupando, nos queda:

$$\hat{H}_3 = \Delta_r a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \Delta_{qi}\sigma_{zi} + \sum_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + \sum_i g_i(\alpha\sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) - \Delta_c \alpha\alpha^* \tag{A.33}$$

El término $-\Delta_r \alpha\alpha^*$ se desprecia, ya que sólo representa una fase global en la evolución del sistema.

A.6. Régimen dispersivo

Finalmente, aplicamos la transformación

$$U = exp[\sum_i \frac{g_i}{\Delta_i}(a^\dagger \sigma_{-i} - a\sigma_{+i})] \tag{A.34}$$

Donde $\Delta_i = \omega_{qi} - \omega_r$ y realizamos la expansión de Baker-Campbell-Hausdorff de segundo grado sobre los términos $\frac{g_i}{\Delta_i} \ll 1$. El Hamiltoniano efectivo $\hat{H}_{eff}$ será la aproximación del Hamiltoniano $\hat{H}_4$ resultante de esta expansión.

$$\hat{H}_{eff} \approx \hat{H}_4 = U^\dagger \hat{H}_3 U \tag{A.35}$$

Para resolver los conmutadores seguiremos el esquema utilizado anteriormente y separaremos el Hamiltoniano $\hat{H}_3$ en los siguientes términos:

1. $\hat{H}_r = \Delta_r a^\dagger a$
2. $\hat{H}_q = -\frac{1}{2}\sum_i \Delta_{qi}\sigma_{zi}$
3. $\hat{H}_{qr} = \sum_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i})$
4. $\hat{H}_d = \sum_i g_i(\alpha\sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i})$

Con el primer término tenemos el siguiente conmutador:

$$[\Delta_r a^\dagger a, \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i}(a^\dagger \sigma_{-i} - a\sigma_{+i})] = \Delta_r \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i}(a^\dagger \sigma_{-i} + a\sigma_{+i}) \tag{A.36}$$

Con el segundo término tenemos el siguiente conmutador:

$$[-\frac{1}{2}\sum_i \Delta_{qi}\sigma_{zi}, \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i}(a^\dagger\sigma_{-i} - a\sigma_{+i})] = -\sum_i \frac{g_i}{\Delta_i}\Delta_{qi}(a^\dagger\sigma_{-i} + a\sigma_{+i}) \quad \text{(A.37)}$$

Con el tercer término tenemos el siguiente conmutador:

$$[\sum_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger\sigma_{-i}), \sum_j \frac{g_j}{\Delta_j}(a^\dagger\sigma_{-j} - a\sigma_{+j})] =$$
$$\sum_{ij} g_i\frac{g_j}{\Delta_j}\Big([a\sigma_{+i}, a^\dagger\sigma_{-j}] + [a\sigma_{+i}, -a\sigma_{+j}] + [a^\dagger\sigma_{-i}, a^\dagger\sigma_{-j}] + [a^\dagger\sigma_{-i}, -a\sigma_{+j}]\Big) =$$
$$\sum_{ij} g_i\frac{g_j}{\Delta_j}\Big([a\sigma_{+i}, a^\dagger\sigma_{-j}] + [a^\dagger\sigma_{-i}, -a\sigma_{+j}]\Big) =$$
$$\sum_{ij} g_i\frac{g_j}{\Delta_j}\Big(a\sigma_{+i}a^\dagger\sigma_{-j} - a^\dagger\sigma_{-j}a\sigma_{+i} - a^\dagger\sigma_{-i}a\sigma_{+j} + a\sigma_{+j}a^\dagger\sigma_{-i}\Big) =$$
$$\sum_{ij} g_i\frac{g_j}{\Delta_j}\Big(aa^\dagger\sigma_{+i}\sigma_{-j} - a^\dagger a\sigma_{-j}\sigma_{+i} - a^\dagger a\sigma_{-i}\sigma_{+j} + aa^\dagger\sigma_{+j}\sigma_{-i}\Big) =$$
$$\sum_{ij} g_i\frac{g_j}{\Delta_j}\Big((1 + a^\dagger a)\sigma_{+i}\sigma_{-j} - a^\dagger a\sigma_{-j}\sigma_{+i} - a^\dagger a\sigma_{-i}\sigma_{+j} + (1 + a^\dagger a)\sigma_{+j}\sigma_{-i}\Big) =$$
$$\sum_{ij} g_i\frac{g_j}{\Delta_j}\Big(\sigma_{+i}\sigma_{-j} + a^\dagger a\sigma_{+i}\sigma_{-j} - a^\dagger a\sigma_{-j}\sigma_{+i} - a^\dagger a\sigma_{-i}\sigma_{+j} + \sigma_{+j}\sigma_{-i} + a^\dagger a\sigma_{+j}\sigma_{-i}\Big) =$$
$$\sum_{ij} g_i\frac{g_j}{\Delta_j}(\sigma_{+i}\sigma_{-j} + \sigma_{+j}\sigma_{-i}) + \sum_{ij} g_i\frac{g_j}{\Delta_j}a^\dagger a(\sigma_{+i}\sigma_{-j} - \sigma_{-j}\sigma_{+i} - \sigma_{-i}\sigma_{+j} + \sigma_{+j}\sigma_{-i}) =$$
$$\sum_{ij} g_i\frac{g_j}{\Delta_j}(\sigma_{+i}\sigma_{-j} + \sigma_{+j}\sigma_{-i}) - 2\sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i}a^\dagger a\sigma_{zi} \quad \text{(A.38)}$$

Con el cuarto término tenemos el siguiente conmutador:

$$[\sum_i g_i(\alpha\sigma_{+i} + \alpha^*\sigma_{-i}), \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i}(a^\dagger\sigma_{-i} - a\sigma_{+i})] =$$
$$\sum_{ij} g_i\frac{g_j}{\Delta_j}\Big([\alpha\sigma_{+i}, a^\dagger\sigma_{-j}] - [\alpha^*\sigma_{-i}, a\sigma_{+j}]\Big) = -\sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i}(\alpha a^\dagger + \alpha^* a)\sigma_{zi} \quad \text{(A.39)}$$

Sumando y agrupando se tiene

$$\Delta_r a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \Delta_{qi}\sigma_{zi} + \sum_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger\sigma_{-i}) + \sum_i g_i(\alpha\sigma_{+i} + \alpha^*\sigma_{-i})$$
$$+ \Delta_r \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i}(a^\dagger\sigma_{-i} + a\sigma_{+i}) - \sum_i \frac{g_i}{\Delta_i}\Delta_{qi}(a^\dagger\sigma_{-i} + a\sigma_{+i})$$
$$+ \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j}\left(\sigma_{+i}\sigma_{-j} + \sigma_{+j}\sigma_{-i}\right) - 2\sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i}a^\dagger a\sigma_{zi} - \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i}(\alpha a^\dagger + \alpha^* a)\sigma_{zi} \tag{A.40}$$

$$(\Delta_r - \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i}\sigma_{zi})a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i(\Delta_{qi} + 2\frac{g_i^2}{\Delta_i}a^\dagger a)\sigma_{zi} + \sum_i g_i(a\sigma_{+i} + a^\dagger\sigma_{-i}) + \sum_i g_i(\alpha\sigma_{+i} + \alpha^*\sigma_{-i})$$
$$- \sum_i \frac{g_i\Delta_i}{\Delta_i}(a^\dagger\sigma_{-i} + a\sigma_{+i}) + \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j}\left(\sigma_{+i}\sigma_{-j} + \sigma_{+j}\sigma_{-i}\right) - \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i}(\alpha a^\dagger + \alpha^* a)\sigma_{zi} \tag{A.41}$$

$$(\Delta_r - \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i}\sigma_{zi})a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i(\Delta_{qi} + 2\frac{g_i^2}{\Delta_i}a^\dagger a)\sigma_{zi} + \sum_i g_i(\alpha\sigma_{+i} + \alpha^*\sigma_{-i})$$
$$+ \sum_{ij} g_i \frac{g_j}{\Delta_j}\left(\sigma_{+i}\sigma_{-j} + \sigma_{+j}\sigma_{-i}\right) - \sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i}(\alpha a^\dagger + \alpha^* a)\sigma_{zi} \tag{A.42}$$

$$\hat{H} = \Delta_r a^\dagger a - \sum_i \Delta_{qi}(\frac{1}{2} + 2\frac{g_i^2}{\Delta_i}(a^\dagger a + \frac{1}{2}))\sigma_{zi} + \sum_{i\neq j}\frac{g_i g_j}{\Delta_j}(\sigma_{+i}\sigma_{-j} +$$
$$\sigma_{-i}\sigma_{+j}) + \sum_i g_i(\alpha\sigma_{+i} + \alpha^*\sigma_{-i}) -$$
$$\sum_i \frac{g_i^2}{\Delta_i}(\alpha a^\dagger + \alpha^* a)\sigma_{zi} \tag{A.43}$$

$$\hat{H} \approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a - \frac{1}{2}\sum_i \tilde{\Delta}_{qi}\sigma_{zi} + \sum_i(\Omega_i\sigma_{+i} + \Omega_i^*\sigma_{-i})$$
$$+ \sum_{i\neq j}\frac{g_i g_j}{2\Delta_i}(\sigma_{-i}\sigma_{+j} + \sigma_{+i}\sigma_{-j})$$

$\tilde{\Delta}_c = (\omega_c + \sum_i \chi_i\sigma_{zi}) - \omega_d \qquad \tilde{\Delta}_{qi} = (\omega_{qi} + \chi_i) - \omega_d \qquad \chi_i = \frac{g_i^2}{\Delta_i}$

A.7. Rotaciones X-Y

Tomando $\Omega(t) = \Omega^x(t)\cos(\omega_d t) + \Omega^y \sin(\omega_d t)$, donde ω_d es igual a la frecuencia de resonancia de uno de los qubits logramos rotaciones sobre los ejes X e Y. Las amplitudes de estas rotaciones vienen dadas por $\int_0^{t_0} \Omega^x(t)dt$ y $\int_0^{t_0} \Omega^y(t)dt$, respectivamente, donde t_0 es la duración del pulso.

$$\Omega\sigma_+ + \Omega^*\sigma_-$$

$$e^{i(x+\pi/2)} - e^{-i(x+\pi/2)} = e^{i\pi/2}e^{ix} - e^{-i\pi/2}e^{-ix} = e^{i\pi/2}e^{ix} + e^{i\pi}e^{-i\pi/2}e^{-ix} = e^{i\pi/2}e^{ix} + e^{i\pi/2}e^{-ix} = e^{i\pi/2}(e^{ix} +$$

$$\hat{H} \approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2}\tilde{\Delta}_q \sigma_z + \frac{1}{2}(\Omega^x(t)\sigma_x + \Omega^y(t)\sigma_y)$$

A.8. Compuerta de entrelazamiento

Ejemplo con sólo dos qubits

$$\hat{H} \approx \frac{1}{2}\tilde{\Delta}_{q_1}\sigma_{z_1} + \frac{1}{2}\tilde{\Delta}_{q_2}\sigma_{z_2} + \frac{g_1 g_2(\Delta_1 + \Delta_2)}{2\Delta_1\Delta_2}(\sigma_{-_1}\sigma_{+_2} + \sigma_{+_1}\sigma_{-_2})$$

Variando la frecuencia de resonacia de los qubit, se puede variar el acoplamiento entre estos.

Bibliografía

[1] Adriano Barenco, Charles H. Bennet, Richard Cleve, David P. DiVincenzo, Norman Margolus, Peter Shor, Tycho Sleator, Jhon A. Smolin, and Harald Weinfurter. Elementary gates for quantum computation. *Physical Review A*, 1995.

[2] Sttiwuer Díaz-Solórzano. Esquemas de medidas. *QIC*, 2014.

[3] Rudolf Gross and Achim Marx. Applied superconductivity: Josephson effect and superconducting electronics. *Walther-Meißner-Institut*, 2005.

[4] Onnes H.K. Further experiments with liquid helium. g. on the electrical resistance of pure metals, etc. vi. on the sudden change in the rate at which the resistance of mercury disappears. *Springer, Dordrecht*, 1911.

[5] A. P. Drozdov, M. I. Eremets, I. A. Troyan, V. Ksenofontov, and S. I. Shylin. Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system. *Nature*, 525:73–76, 2015.

[6] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Physical Review Journals Archive*, 1957.

[7] Herbert Fröhlich. Theory of the superconducting state. *Unknown*, 1950.

[8] M Cyrot. Ginzburg-landau theory for superconductors. *Reports on Progress in Physics*, 36(2):103, 1973.

[9] Jr. Bascom S. Deaver and William M. Fairbank. Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders. *Physical Review Letters*, 1961.

[10] B.D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics Letters*, 1(7):251 – 253, 1962.

[11] P. W. Anderson and J. M. Rowell. Probable observation of the josephson superconducting tunneling effect. *Phys. Rev. Lett.*, 10:230–232, Mar 1963.

[12] Sidney Shapiro. Josephson currents in superconducting tunneling: The effect of microwaves and other observations. *Phys. Rev. Lett.*, 11:80–82, Jul 1963.

[13] G. Wendin. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *IOP Science*, 2017.

[14] Alexandre Blais, Jay Gambetta, A. Wallraff, D. I. Schuster, S. M. Girvin, M. H. Devoret, , and R. J. Schoelkopf. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics. *Physical Review A*, 2007.

[15] Norbert Schuch and Jens Siewert. Natural two-qubit gate for quantum computation using the xy interaction. *Physical Review A*, 2003.

[16] T. Loke and J.B. Wang. Efficient quantum circuits for szegedy quantum walks. *Annals of Physics*, 382:64 – 84, 2017.