



Universidad Simón Bolívar  
Decanato de Estudios Profesionales  
Coordinación de Ingeniería de Electrónica

# Diseño y Simulación de Procesadores Cuánticos que Implementen Algoritmos Cuánticos de Búsqueda

Por:

Miguel Casanova

Realizado con la asesoría de:

Enrique Castro y Sttiwuer Diaz

PROYECTO DE GRADO

Presentado ante la Ilustre Universidad Simón Bolívar  
como requisito parcial para optar al título de  
Ingeniero Electrónico

Sartenejas, noviembre de 2018

# Índice general

<b>Índice de Figuras</b>	<b>7</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>10</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
1.1. Justificación . . . . .	16
1.2. OBJETIVOS . . . . .	18
1.2.1. Objetivo General: . . . . .	18
1.2.2. Objetivos Específicos: . . . . .	18
1.2.3. Fases del Proyecto . . . . .	19
1.2.4. REFERENCIAS . . . . .	19
<b>2. Información cuántica</b>	<b>23</b>
2.1. Estados cuánticos . . . . .	23
2.2. Función de onda . . . . .	23
2.3. Espacio de Hilbert . . . . .	24
2.4. Delta de Kronecker . . . . .	26
2.5. Operadores hermíticos . . . . .	27
2.6. Operadores unitarios . . . . .	27
2.7. Notación de Dirac . . . . .	27
2.8. Producto tensorial . . . . .	30
2.9. Postulados de la mecánica cuántica . . . . .	31
2.10. Matriz densidad . . . . .	32
2.11. Traza parcial . . . . .	34
2.11.1. Comparación con el producto tensorial . . . . .	35
2.12. Entrelazamiento . . . . .	35
2.13. Computación cuántica . . . . .	37
2.13.1. Qubits . . . . .	37
2.13.2. Esfera de Bloch . . . . .	37
2.13.3. Conmutador y anticonmutador . . . . .	38
2.13.3.1. Conmutador . . . . .	38
2.13.3.2. Anticonmutador . . . . .	38
2.13.4. Matrices de Pauli . . . . .	39
2.13.5. Circuitos cuánticos . . . . .	39
2.13.6. Compuertas cuánticas de un qubit . . . . .	42

2.13.6.1. Compuerta identidad . . . . .	42
2.13.6.2. Compuerta X . . . . .	42
2.13.6.3. Compuerta Z . . . . .	43
2.13.6.4. Compuerta Y . . . . .	44
2.13.6.5. Compuerta de Hadamard . . . . .	44
2.13.6.6. Compuerta S . . . . .	45
2.13.6.7. Compuerta T . . . . .	45
2.13.6.8. Compuerta de cambio de fase . . . . .	46
2.13.6.9. Compuertas de rotación . . . . .	46
2.13.7. Compuertas multiqubit . . . . .	47
2.13.7.1. Compuerta CNOT . . . . .	48
2.13.7.2. Compuerta SWAP . . . . .	48
2.13.7.3. Compuerta $\sqrt{\text{SWAP}}$ . . . . .	49
2.13.7.4. Compuerta de Ising . . . . .	49
2.13.7.5. Compuerta de Toffoli . . . . .	50
2.13.7.6. Compuerta de Deutsch . . . . .	51
2.13.8. Conjuntos universales de compuertas cuánticas . . . . .	51
2.13.9. Criterios de DiVincenzo . . . . .	52
2.14. Fidelidad . . . . .	52
2.15. Medidas proyectivas . . . . .	53
2.16. Sistemas cuánticos abiertos . . . . .	54
<b>3. Superconductividad</b>	<b>60</b>
3.1. Cuantización macroscópica y superconductividad . . . . .	60
3.2. La teoría BCS . . . . .	62
3.3. Cuantización del flujo magnético y efecto tunel Giaver . . . . .	70
3.4. Efecto Josephson . . . . .	77
3.5. Componentes de la corriente en las uniones de Josephson . . . . .	82
3.6. Qubits superconductores . . . . .	83
3.7. Arquetipos de qubits superconductores . . . . .	85
3.7.1. Qubit de carga . . . . .	85
3.7.2. Qubit de flujo . . . . .	85
3.7.3. Qubit de fase . . . . .	85
3.8. Transmones . . . . .	85
3.9. Hamiltonianos multiqubit de transmones . . . . .	88
3.10. Compuertas cuánticas en transmones . . . . .	89
3.10.1. Rotaciones X-Y . . . . .	90
3.10.2. Compuerta de entrelazamiento . . . . .	91
3.10.3. Compuertas compuestas . . . . .	92
<b>4. El simulador</b>	<b>93</b>
4.1. Parámetros de los sistemas simulados . . . . .	94
4.2. Compuertas nativas . . . . .	95
4.2.1. Rx y Ry . . . . .	95

4.2.2. iSWAP . . . . .	97
4.3. Compuertas compuestas . . . . .	98
4.3.1. X . . . . .	98
4.3.2. Y . . . . .	98
4.3.3. Rz . . . . .	98
4.3.4. Z . . . . .	99
4.3.5. H . . . . .	99
4.3.6. CNOT . . . . .	100
4.3.7. SWAP . . . . .	100
4.3.8. Compuertas condicionales generales . . . . .	100
4.3.9. CP . . . . .	104
<b>5. Algoritmo de Grover</b> . . . . .	<b>112</b>
5.1. El algoritmo . . . . .	116
5.2. Variaciones y generalizaciones del algoritmo de Grover . . . . .	117
5.2.1. Algoritmo de amplificación de amplitud . . . . .	117
5.2.2. Algoritmo de Grover en un paso . . . . .	120
5.2.3. Optimización del algoritmo de Grover . . . . .	121
5.3. Simulaciones . . . . .	122
<b>6. Algoritmo de Shor</b> . . . . .	<b>127</b>
6.1. Transformada cuántica de Fourier . . . . .	127
6.2. Estimación de fase . . . . .	129
6.3. Estimación de orden . . . . .	132
6.4. Expansión en fracciones continuas . . . . .	135
6.5. Algoritmo de factorización de Shor . . . . .	136
6.6. Simulaciones . . . . .	137
6.6.1. Factorización del número 15 . . . . .	137
6.6.2. Factorización del número 8 . . . . .	140
<b>7. Google PageRank</b> . . . . .	<b>142</b>
7.1. El algoritmo de remiendo (parcheo) general . . . . .	145
7.2. Interpretación como una caminata aleatoria . . . . .	146
7.3. Cuantizando las caminatas aleatorias . . . . .	147
7.4. Caminata cuántica de Szegedy . . . . .	147
7.5. PageRank cuántico . . . . .	149
7.6. Circuitos de las caminatas cuánticas de Szegedy . . . . .	149
7.7. Simulaciones . . . . .	154
7.7.1. Grafo estrella . . . . .	154
7.7.2. Grafo corona . . . . .	158
7.7.3. Grafo árbol . . . . .	162
7.7.4. Grafo aleatorio . . . . .	166
<b>A. Cálculos de Hamiltonianos</b> . . . . .	<b>171</b>
A.1. Régimen rotacional del pulso . . . . .	171

---

A.2. Efecto del pulso sobre el qubit . . . . .	175
A.3. Régimen dispersivo . . . . .	177
<b>B. Códigos del simulador</b>	<b>183</b>
B.1. Wolfram Mathematica . . . . .	183
B.2. Python . . . . .	190
<b>C. Códigos de la simulación del algoritmo de Grover</b>	<b>203</b>
C.1. Wolfram Mathematica . . . . .	203
C.2. Python . . . . .	204
<b>D. Códigos de la simulación del algoritmo de Shor</b>	<b>207</b>
D.1. Wolfram Mathematica . . . . .	207
D.2. Python . . . . .	210
<b>E. Códigos de la simulación del algoritmo de PageRank</b>	<b>213</b>
E.1. Wolfram Mathematica . . . . .	213
E.2. Python . . . . .	216
E.2.1. Grafo estrella . . . . .	219
E.2.2. Grafo corona . . . . .	223
E.2.3. Grafo árbol . . . . .	225
E.2.4. Grafo aleatorio . . . . .	228

# Índice de figuras

2.1. Esfera de Bloch . . . . .	38
2.2. Compuerta I en la esfera de Bloch . . . . .	42
2.3. Compuerta X en la esfera de Bloch . . . . .	43
2.4. Compuerta Z en la esfera de Bloch . . . . .	43
2.5. Compuerta Y en la esfera de Bloch . . . . .	44
2.6. Compuerta H en la esfera de Bloch . . . . .	45
2.7. Compuerta S en la esfera de Bloch . . . . .	45
2.8. Compuerta T en la esfera de Bloch . . . . .	46
2.9. Compuerta P en la esfera de Bloch . . . . .	46
2.10. Compuertas Rx, Ry y Rz en la esfera de Bloch . . . . .	47
3.1. Diagrama de Feynman de la interacción electrón-fonón-electrón . . .	66
3.2. Construcción geométrica de los posibles electrones candidatos para formar pares de Cooper, siendo $\hbar K$ el momentum del centro de masas.	67
3.3. Cuantización del flujo magnético . . . . .	73
3.4. Diagrama de energía de una unión metal-aislante-metal en la que no puede haber efecto túnel . . . . .	75
3.5. Diagrama de energía de una unión metal-aislante-metal en la que puede haber efecto túnel . . . . .	76
3.6. Diagrama de energía de una unión superconductor-aislante-metal en la que puede haber efecto Giaver . . . . .	77
3.7. Curva característica I-V de una unión Josephson . . . . .	81
4.1. Rotaciones en X e Y de $2\pi$ . . . . .	96
4.2. Rotaciones en X e Y de $\pi$ . . . . .	96
4.3. Rotaciones en X e Y de $\frac{\pi}{2}$ . . . . .	96
4.4. Compuertas iSWAP y $\sqrt{iSWAP}$ aplicadas a $ 00\rangle$ . . . . .	97
4.5. Compuertas iSWAP y $\sqrt{iSWAP}$ aplicadas a $ 01\rangle$ . . . . .	97
4.6. Compuertas iSWAP y $\sqrt{iSWAP}$ aplicadas a $\frac{ 00\rangle+ 11\rangle}{\sqrt{2}}$ . . . . .	97
4.7. Compuertas iSWAP y $\sqrt{iSWAP}$ aplicadas a $\frac{ 0\rangle+ 1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{ 0\rangle+ 1\rangle}{\sqrt{2}}$ . . . . .	97
5.1. Circuito del algoritmo de Grover, $k_{max}$ desconocido. . . . .	114
5.2. Interpretación geométrica del operador difusión . . . . .	116
5.3. Circuito del algoritmo de Grover. . . . .	116
5.4. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de Grover sin relajación . . . . .	123

5.5. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de Grover con relajación, $\mathcal{W} = \{0\}$ . . . . .	124
5.6. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de amplificación de amplitud sin relajación, $\mathcal{W} = \{9, 13\}$ . . . . .	125
5.7. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de amplificación de amplitud sin relajación, $\mathcal{W} = \{4, 5, 12, 13\}$ . . . . .	125
5.8. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de amplificación de amplitud con relajación . . . . .	126
6.1. Distribución de probabilidad en la estimación de fase del algoritmo de Shor sin pérdidas . . . . .	138
6.2. Distribución de probabilidad en la estimación de fase del algoritmo de Shor sin pérdidas . . . . .	140
7.1. Transformación de un grafo al crear la matriz de Google con $\alpha = \frac{1}{2}$ . . . . .	146
7.2. Operador de permutación . . . . .	151
7.3. Circuito de Loke para las caminatas cuánticas de Szegedy . . . . .	151
7.4. Circuito de $K_i$ . . . . .	152
7.5. Grafo estrella . . . . .	155
7.6. Circuito de $K_1$ para el grafo estrella . . . . .	155
7.7. Circuito de $K_2$ para el grafo estrella . . . . .	156
7.8. $K_b$ del grafo estrella . . . . .	156
7.9. $T$ del grafo estrella . . . . .	156
7.10. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo estrella . . . . .	156
7.11. Circuito del PageRank cuántico del grafo estrella . . . . .	157
7.12. PageRank cuántico instantáneo del grafo estrella sin pérdidas . . . . .	157
7.13. PageRank cuántico promedio del grafo estrella sin pérdidas . . . . .	157
7.14. PageRank cuántico instantaneo del grafo estrella con y sin pérdidas . . . . .	158
7.15. PageRank cuántico promedio del grafo estrella con y sin pérdidas . . . . .	158
7.16. Grafo corona . . . . .	159
7.17. Circuito de $K_1$ para el grafo corona . . . . .	159
7.18. Circuito de $K_2$ para el grafo corona . . . . .	160
7.19. $K_b$ del grafo corona . . . . .	160
7.20. $T$ del grafo corona . . . . .	160
7.21. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo corona . . . . .	160
7.22. Circuito del PageRank cuántico del grafo corona . . . . .	161
7.23. PageRank cuántico instantáneo del grafo corona sin pérdidas . . . . .	161
7.24. PageRank cuántico promedio del grafo corona sin pérdidas . . . . .	161
7.25. PageRank cuántico instantaneo del grafo aleatorio con y sin pérdidas . . . . .	162
7.26. PageRank cuántico promedio del grafo aleatorio con y sin pérdidas . . . . .	162
7.27. Grafo árbol . . . . .	162
7.28. Circuito de $K_1$ para el grafo árbol . . . . .	163
7.29. Circuito de $K_2$ para el grafo árbol . . . . .	163
7.30. Circuito de $K_3$ para el grafo árbol . . . . .	164
7.31. $K_b$ del grafo árbol . . . . .	164

7.32. $T$ del grafo árbol . . . . .	164
7.33. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo árbol . .	164
7.34. Circuito del PageRank cuántico del grafo árbol . . . . .	165
7.35. PageRank cuántico instantáneo del grafo árbol sin pérdidas . . . . .	165
7.36. PageRank cuántico promedio del grafo árbol sin pérdidas . . . . .	165
7.37. PageRank cuántico instantaneo del grafo árbol con y sin pérdidas .	166
7.38. PageRank cuántico promedio del grafo árbol con y sin pérdidas . .	166
7.39. Grafo aleatorio . . . . .	166
7.40. Circuito de $K_1$ para el grafo aleatorio . . . . .	167
7.41. Circuito de $K_2$ para el grafo aleatorio . . . . .	167
7.42. Circuito de $K_3$ para el grafo aleatorio . . . . .	168
7.43. $K_b$ del grafo aleatorio . . . . .	168
7.44. $T$ del grafo aleatorio . . . . .	168
7.45. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo aleatorio	168
7.46. Circuito del PageRank cuántico del grafo aleatorio . . . . .	169
7.47. PageRank cuántico instantáneo del grafo aleatorio sin pérdidas . . .	169
7.48. PageRank cuántico promedio del grafo aleatorio sin pérdidas . . . .	169
7.49. PageRank cuántico instantaneo del grafo aleatorio con y sin pérdidas	170
7.50. PageRank cuántico promedio del grafo aleatorio con y sin pérdidas .	170



# Índice de cuadros

# Capítulo 2

## Información cuántica

En esta sección introduciremos las bases matemáticas fundamentales para empezar a trabajar con la Teoría de Información Cuántica, trabajaremos sobre espacios vectoriales discretos, debido a que los sistemas cuánticos que manejaremos (computadora cuántica) son sistemas físicos discretos, no continuos. Se dará una breve introducción a la notación de Dirac y su aplicación en la mecánica cuántica (QM, por sus siglas en inglés). Una vez establecidas las bases matemáticas se describirán los Postulados de la Mecánica Cuántica: Descripción del estado de un sistema, descripción de cantidades físicas, medición de cantidades físicas, colapso del estado cuántico, evolución temporal, postulado de simetrización y variables de espín. Finalmente se definirá el enredamiento cuántico, su importancia en el cómputo cuántico y los sistemas de dos niveles.

### 2.1. Estados cuánticos

### 2.2. Función de onda

El estado de una sistema cuántico viene dado por el conocimiento de un campo escalar denominado función de onda  $\psi$  en todos los puntos del espacio para cualquier instante de tiempo, dicha función de onda es compleja ( $\in \mathbb{C}$ ), de cuadrado integrable, cumple con el principio de superposición y es univaluada para las coordenadas espaciales de cada una de las partículas. Conocer el estado en mecánica cuántica es equivalente a conocer los valores medios de los observables posición y momentum en mecánica clásica. La evolución de los estados está dada por la

ecuación de Schrödinger para estados puros y por la ecuación de Liouville-von Neumann para estados mixtos. La mecánica cuántica es una teoría probabilística, una partícula puede encontrarse en cualquier parte del universo en cualquier momento con una determinada probabilidad, siendo la densidad de probabilidad de encontrarla en algún punto, el módulo al cuadrado de su función de onda en este punto. De hecho, debido a esto es que el estado debe estar normalizado, pues la probabilidad de que la partícula se encuentre en cualquier lugar del universo debe ser uno, es decir:

$$\int_S |\psi(r, t)|^2 dr = 1 \quad (2.1)$$

Donde  $S$  es todo el universo. Esto es para funciones de onda que describen una partícula, en el siguiente capítulo se verán funciones de onda macroscópicas que describen sistemas de muchas partículas. En estos, el módulo cuadrado de  $\psi$  describe la densidad de partículas, la cual podría entenderse como la suma de la densidad de probabilidad de que cada una de las partículas se encuentren en ese punto, y  $\int_S |\psi(r, t)|^2 dr = N_s$ , donde  $N_s$  es el número total de partículas del sistema, el cual podría entenderse como la suma de que cada una de las partículas se encuentre en algún punto del sistema.

## 2.3. Espacio de Hilbert

Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial, real o complejo, y consideremos una función  $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  que denominaremos norma si satisface los siguientes axiomas:

1. Positividad: La norma es una función definida positiva, es decir, para cualquier vector  $\psi \in \mathcal{V}$  se cumple que

$$\|\psi\| \geq 0 \quad (2.2)$$

2. Escalamiento: Sea  $\lambda$  un escalar arbitrario de  $\mathcal{V}$ , es decir, un número real o complejo, según aplique. Consideremos un vector  $\psi \in \mathcal{V}$ , entonces se cumple que

$$\|\lambda\psi\| = |\lambda|\|\psi\| \quad (2.3)$$

3. Desigualdad triangular: La suma de la norma de dos vectores cualesquiera  $\psi, \phi \in \mathcal{V}$  siempre es mayor o igual que la suma de la norma de estos, siendo igual en el caso en el caso en que estos vectores son paralelos.

$$\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\| \quad (2.4)$$

La estructura algebraica  $\mathcal{N} = \{\mathcal{V}, \|\cdot\|\}$  compuesta por un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  y una norma  $\|\cdot\|$  recibe el nombre de espacio normado.

Sea  $V$  es un espacio vectorial complejo y la función  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  una función sesquilineal, positiva, no degenerada y simétrica respecto a la conjugación compleja, entonces diremos que esta función define un producto escalar. La propiedad de sesquilinealidad se refiere a que el funcional  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  es antilineal en el primer argumento y lineal en el segundo. En concreto, la sesquilinealidad satisface la siguiente igualdad

$$\left\langle \sum_i \alpha_i \psi_i \middle| \sum_j \beta_j \phi_j \right\rangle = \sum_i \sum_j \alpha_i^* \beta_j \langle \psi_i | \phi_j \rangle \quad (2.5)$$

La propiedad de positividad se refiere a que  $\langle \psi | \psi \rangle > 0$  para cualquier  $\psi \in V$  no nulo. La propiedad de no degenerado se refiere a que un único vector cumple la relación  $\langle \phi | \phi \rangle = 0$ , el cual es el vector nulo. La propiedad de simetría ante la conjugación compleja se refiere a que el producto escalar satisface la siguiente propiedad

$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^* \quad (2.6)$$

La estructura algebraica  $\mathcal{P} = \{V, \langle \cdot | \cdot \rangle\}$  compuesta por un espacio vectorial  $V$  y un producto escalar  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  recibe el nombre de espacio de pre-Hilbert. Estos espacios son considerados como casos particulares de espacios normados, ya que la norma es inducida por el producto escalar de la siguiente manera

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle} \quad \forall \psi \in V \quad (2.7)$$

Ahora introduciremos otros conceptos necesarios para definir un espacio de Hilbert:

1. Convergencia fuerte: Sea  $\{\psi_n\}^{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión cualquiera en un espacio normado  $\mathcal{N}$ , diremos que dicha sucesión converge fuertemente a un vector  $\psi \in \mathcal{V}$  siempre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n - \psi\| = 0 \quad (2.8)$$

2. Convergencia débil: Sea  $\{\psi_n\}^{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión cualquiera en un espacio de pre-Hilbert  $\mathcal{P}$ , diremos que dicha sucesión converge débilmente a un vector  $\psi \in V$  siempre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi_n | \phi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle \quad (2.9)$$

Resulta claro que la convergencia débil no implica la convergencia fuerte, pero la convergencia fuerte sí implica la convergencia débil.

El ordenamiento de una sucesión puede ser un factor determinante para su convergencia. Las sucesiones de Cauchy son aquellas en las que el ordenamiento no afecta la convergencia. Es decir, son aquellas sucesiones que cumplen que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\psi_n - \psi_m\| = 0 \quad (2.10)$$

Todas las sucesiones fuertemente convergentes son de Cauchy, sin embargo, en general, lo recíproco no es cierto. La razón es que en algunas sucesiones en  $\mathcal{N}$  convergen a un vector que no pertenece a  $\mathcal{N}$ . Un espacio normado es completo si toda sucesión de Cauchy converge fuertemente en él. Todo espacio normado  $\mathcal{N}$  y completo recibe el nombre de espacio de Banach  $\mathcal{B}$  y todo espacio de pre-Hilbert  $\mathcal{P}$  y completo recibe el nombre de espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Finalmente, un espacio de Hilbert separable es aquel cuya base puede ser generado por una base contable. Una base contable es una base con la cardinalidad de algún subconjunto de los números naturales. En otras palabras, es una base cuyos elementos se pueden contar o enumerar. Esto implica que una base contable debe ser finita o infinita discreta.

## 2.4. Delta de Kronecker

La delta de Kronecker,  $\delta_{nm}$  es un símbolo que representa dos posibles valores, dependiendo de sus índices,

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \quad (2.11)$$

Dado que el símbolo sólo es diferente de cero cuando sus índices son iguales, las sumas que incluyen la delta de Kronecker pueden ser simplificadas fácilmente

$$\sum_m \delta_{nm} B_m = 0B_1 + 0B_2 + \dots + 1B_n + \dots = B_n$$

## 2.5. Operadores hermíticos

Estos son operadores tales que  $U = U^\dagger$ , donde  $U^\dagger = (U^*)^T$ . Es decir,  $U$  es un operador hermítico si es igual a su transpuesto conjugado. Estos operadores cumplen con la propiedad de que todos sus autovalores son reales. En la mecánica cuántica, todas las variables físicas observables (o simplemente, observables), es decir, todas aquellas variables que se pueden medir en un laboratorio, son autovalores asociados a un operador hermítico.

## 2.6. Operadores unitarios

Estos son operadores tales que  $UU^\dagger = \mathbb{1}$  con determinante igual a 1. En la mecánica cuántica todas las operaciones que se realicen sobre o que afecten a un estado y no involucren medidas ni decoherencia tienen un operador unitario asociado. Por ejemplo, la evolución temporal tiene un operador unitario  $U$  asociado. Los operadores unitarios son importantes porque ellos preservan las trazas, las normas y la información, de esta manera, cuando se aplica un operador unitario a un estado cuántico, se preserva la normalización de las probabilidades y el entrelazamiento.

## 2.7. Notación de Dirac

En 1930 en el libro Principios de la Mecánica Cuántica Paul Dirac introdujo una poderosa notación para poder describir estados cuánticos y funciones lineales, también conocida como notación Bra-Ket. Con la notación de Dirac podemos representar un estado base de  $n$  elementos con una cadena binaria de longitud  $n$ , mientras

que con la representación de vectores columna necesitaríamos  $2^n$  componentes para definir el mismo vector.

La notación bra-ket es la notación estándar en la mecánica cuántica para describir estados cuánticos. En el caso de la computación cuántica, se utilizan los kets  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  para describir los qubits en la base computacional. Este par de estados sería el equivalente a los bits 0 y 1 en la computación clásica. En su representación matricial, los kets  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  se representan de la siguiente manera:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un bra es el operador adjunto de un ket. Los bras de la base computacional son  $\langle 0|$  y  $\langle 1|$ . En la representación matricial estos son la transpuesta conjugada de los kets y se representan de la siguiente manera:

$$\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El producto interno de kets es el producto de un bra seguido de un ket  $\langle\phi|\psi\rangle$ , el resultado de este producto es un número complejo y cumple las siguientes propiedades:

$$\langle\phi|\psi\rangle = z \tag{2.12}$$

$$(\langle\phi|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|\phi\rangle = z^* \tag{2.13}$$

El producto externo es el producto de un ket seguido de un bra  $|\psi\rangle\langle\phi|$ . El resultado es un proyector que toma la componente en  $|\psi\rangle$  de un estado cuántico y la convierte en  $|\phi\rangle$ . Ejemplos:

$$\begin{aligned}
|0\rangle\langle 0| &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
|0\rangle\langle 1| &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
|1\rangle\langle 0| &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
|1\rangle\langle 1| &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
|\psi\rangle\langle\psi| &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Este producto cumple con las siguientes propiedades:

$$|\phi\rangle\langle\psi| = \Pi \quad (2.14)$$

$$(|\phi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\phi| = \Pi^\dagger \quad (2.15)$$

El operador  $\Pi$  que consiste de un producto exterior se conoce como proyector. La aplicación de un proyector  $|\psi\rangle\langle\phi|$  sobre un estado  $|\varphi\rangle$  es equivalente a la multiplicación del escalar  $c = \langle\phi|\varphi\rangle$  al estado  $\psi$ .

$$|\psi\rangle\langle\phi| |\varphi\rangle = \langle\phi|\varphi\rangle |\psi\rangle = c |\psi\rangle \quad (2.16)$$

Si además, el proyector es tal que  $|\psi\rangle = \langle\phi|^\dagger$ , es decir:  $\Pi = |\psi\rangle\langle\psi|$ , entonces se cumple también que:

$$\Pi^2 = |\psi\rangle\langle\psi| |\psi\rangle\langle\psi| = 1 |\psi\rangle\langle\psi| = \Pi \quad (2.17)$$

$$\Pi^\dagger = (|\psi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\psi| = \Pi \quad (2.18)$$

La notación de Dirac se relaciona con el formalismo de funciones de onda de la siguiente manera:



$$\psi = \langle x | \psi \rangle \quad (2.19)$$

Donde  $\langle x |$  es el bra asociado a estar en la posición  $x$ .

## 2.8. Producto tensorial

Cuando un sistema compuesto por dos (o más) espacios de Hilbert,  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ , el espacio del sistema completo se escribe en función del producto tensorial  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Aquí,  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  se conocen como las particiones de  $\mathcal{H}$ . De igual manera, para representar un estado de  $\mathcal{H}$  en un ket, en lugar de dos, se realiza el producto tensorial  $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ . También se pueden agregar subíndices a los kets para hacer énfasis en las particiones:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle & \in \mathcal{H} \\ |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B & \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ |\psi_1\rangle_1 \otimes |\psi_2\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle_n & \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n \end{aligned}$$

En la representación matricial el producto tensorial se realiza de la siguiente manera:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ b \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix}$$

El producto tensorial tiene las siguientes propiedades:

$$(U_1 \otimes U_2)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (U_1 |\psi_1\rangle) \otimes (U_2 |\psi_2\rangle) \quad (2.20)$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \neq |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle \quad (2.21)$$

$$\alpha(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (\alpha |\psi_1\rangle) \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes (\alpha |\psi_2\rangle) \quad (2.22)$$

$$(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle)^\dagger = \langle \psi_1 | \otimes \langle \psi_2 | \quad (2.23)$$

En el caso de los bras y los kets, el producto tensorial también se puede escribir de la forma  $|\psi\phi\rangle$ , en lugar de  $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ .

$$|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi_A\phi_B\rangle = |\psi\phi\rangle$$

Ejemplos:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{1} \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.9. Postulados de la mecánica cuántica

La mecánica cuántica que fundamenta la teoría de información cuántica se describe formalmente con los siguientes postulados desarrollados por la escuela de

Copenhague a lo largo de todo el siglo XX.

1. Primer postulado: En un instante fijo  $t_0$ , el estado puro de un sistema se describe en términos de un vector normalizado  $|\psi\rangle$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
2. Segundo postulado: Para todo observable o cantidad física  $a$ , existe un operador hermítico  $\hat{A}$  asociado que actúa sobre el espacio  $\mathcal{H}$ .
3. Tercer postulado: Toda medida de un observable  $a$  tendrá como resultado un autovalor  $a_n$  del operador hermítico  $\hat{A}$ .
4. Cuarto postulado: La probabilidad (en caso de variable discreta. Si  $\hat{A}$  es de espectro continuo, entonces es la densidad de probabilidad) de obtener  $a_n$  como resultado de una medida es  $P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} ||a_{n_i}\rangle\langle\psi||^2$ , donde  $g_n$  es el grado de degeneración de  $a_n$  (la cantidad de autovectores asociados a este mismo autovalor) y  $\langle a_{n_i}|$  representa a los bras asociados a este autovalor.
5. Quinto postulado: Inmediatamente después de una medida con resultado  $a_n$ , el sistema se transforma de la siguiente manera:  $|\psi\rangle \rightarrow \frac{\sum_i |a_{n_i}\rangle\langle a_{n_i}||\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}}$ . Esto se conoce como colapso de la función de onda.
6. Ecuación de Schrödinger: La evolución temporal del estado  $|\psi\rangle$  viene dada por la ecuación de Schrödinger  $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ , donde  $\hat{H}$  es el Hamiltoniano del sistema (el operador asociado a la energía).

## 2.10. Matriz densidad

Para describir un estado cuántico que no sólo involucre superposiciones cuánticas, sino también clásicas, es decir, un ensemble estadístico de estados cuánticos, podemos usar la representación de los operadores o matrices densidad  $\rho$ .

De aquí surge la clasificación de estados en puros y mixtos. Los estados puros son aquellos que no presentan superposición clásica (o mezcla) y su matriz densidad se puede escribir como:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.24)$$

Los estados mixtos son aquellos que son formados por un ensemble estadístico y su matriz densidad, escrita en función de los estados que pertenecen al ensemble o mezcla, es la siguiente:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (2.25)$$

Donde  $p_i$  es la probabilidad asociada a cada estado puro de la mezcla y  $\sum_i p_i = 1$ .

Las matrices densidad tienen las siguientes propiedades:

1. Traza igual a uno:  $Tr(\rho) = 1$
2. Hermíticas:  $\rho^\dagger = \rho$
3. Autovalores no negativos:  $\rho |\lambda_i\rangle = \lambda_i |\lambda_i\rangle, \quad \lambda_i \geq 0$

Las matrices densidad asociadas a un estado puro o mixto se pueden identificar con la traza del cuadrado de la matriz densidad:

1. Estado puro:  $Tr(\rho^2) = 1$
2. Estado mixto  $Tr(\rho^2) < 1$

En una matriz densidad, los elementos de la diagonal son las poblaciones y los elementos fuera de ésta son las transiciones. Las poblaciones representan la probabilidades de que el sistema se encuentre en cada estado de la base tras una medida, mientras que las transiciones hacen referencia a la coherencia cuántica entre los elementos de la base que conforman el estado. Por ejemplo, el estado con superposición cuántica:  $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  tiene la siguiente matriz densidad:

$$\rho_1 = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Mientras que el estado de mezcla clásica  $\rho = (\rho_0 + \rho_1)/2$  tiene la siguiente matriz de probabilidad:

$$\rho_2 = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Como se puede ver, ambos estados tienen probabilidad  $1/2$  de encontrarse en  $|0\rangle$  o en  $|1\rangle$  que son los estados de la base. Sin embargo, en el primer estado, esto se debe a que es un único estado cuántico con superposición coherente. Mientras que en el segundo estado esto se debe a que es un estado mezcla de dos estados cuánticos, decoherente. Este es un buen momento para notar la diferencia entre un estado mixto y estado coherente, pues un estado mezcla también puede ser coherente.

Tomemos los mismos estados  $\rho_1$  y  $\rho_2$  anteriores y construyamos el estado

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Este es un estado mezcla, pero aún así tiene elementos fuera de la diagonal, los cuales indican coherencia. Es decir, este estado tiene componente de superposición cuántica, además de la mezcla clásica.

La forma de la ecuación de Schrödinger para matrices densidad se llama ecuación de Liouville-von Neumann.

$$\dot{\rho}(t) = -i[\hat{H}, \rho(t)] \quad (2.29)$$

## 2.11. Traza parcial

Para unir dos particiones en un sistema global se utiliza el producto tensorial tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . La operación inversa, para obtener  $\mathcal{H}_A$  o  $\mathcal{H}_B$  a partir de  $\mathcal{H}$ , es la traza parcial.

La traza parcial se define de la siguiente manera:

$$Tr_A(\rho_{AB}) = \sum_i (\langle i|_A \otimes \mathbb{1}_B) \rho(|i\rangle_A \otimes \mathbb{1}_B) \quad (2.30)$$

Esta traza elimina la porción de  $\rho_{AB}$  perteneciente a  $\mathcal{H}_A$ . Si pudiesemos escribir  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$  (este no siempre es el caso, más información en la sección siguiente), entonces  $Tr_A(\rho_{AB}) = \rho_B$

En caso que se quiera tener  $\rho_A$  en lugar de  $\rho_B$ , entonces tenemos que tomar la traza parcial de la partición B, en lugar de la partición A, de la siguiente manera:

$$Tr_B(\rho_{AB}) = \sum_i (\mathbb{1}_A \otimes \langle i|_B) \rho (\mathbb{1}_A \otimes |i\rangle_B) \quad (2.31)$$

Para entender mejor la traza parcial, recordemos la definición de la traza normal:

$$Tr(\rho) = \sum_i \langle i| \rho |i\rangle \quad (2.32)$$

El par  $\langle i|i\rangle$  lo que hace es seleccionar el  $i$ -ésimo elemento de la diagonal de la matriz  $\rho$ , entonces es la suma de todas las poblaciones en cada estado  $|i\rangle$  de la base de  $\mathcal{H}$  y mapea este espacio de Hilbert a uno escalar (en el caso de las matrices densidad, las mapea al número 1, por la normalización de las probabilidades). La traza parcial hace algo similar, solo que sólo sobre las poblaciones de  $\mathcal{H}_A$  o de  $\mathcal{H}_B$ , dejando a la otra partición intacta. Es decir, el efecto de la traza y de las trazas parciales sobre una matriz densidad es, en resumen, el siguiente:

1.  $Tr(\rho_{AB}) = 1$ , donde  $\rho \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$
2.  $Tr_A(\rho_{AB}) = \rho_B$ , donde  $\rho \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  y  $\rho_B \in \mathcal{H}_B$
3.  $Tr_B(\rho_{AB}) = \rho_A$ , donde  $\rho \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  y  $\rho_A \in \mathcal{H}_A$

### 2.11.1. Comparación con el producto tensorial

1. El producto tensorial se puede realizar con kets o con matrices densidad. Pero la traza parcial sólo se puede aplicar a matrices densidad.
2. El producto tensorial de dos estados puros es otro estado puro. Sin embargo, las trazas parciales de un estado puro no necesariamente son estados puros. En la próxima sección se explicará más al respecto.

## 2.12. Entrelazamiento

Consideremos el estado  $|\psi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$  e intentemos escribirlo en función de  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$ , tal que  $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ .

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) \\
&= \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle
\end{aligned}$$

De aquí se debe cumplir que:

$$\alpha\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha\delta = 0 \quad \beta\gamma = 0 \quad \beta\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pero esto implicaría, al mismo tiempo que:

1. Al menos una variable de cada uno de los siguientes pares de variables es cero:  $\{\alpha, \delta\}$  y  $\{\beta, \gamma\}$
2. Ninguna de las siguientes variables es cero:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Lo cual resulta contradictorio y se concluye que existen estados no separables. Veamos qué significa esto en términos de la distribución de probabilidades:

	$ \psi\rangle_A =  0\rangle$	$ \psi\rangle_A =  1\rangle$	$P(A)$
$ \psi\rangle_B =  0\rangle$	1/2	0	1/2
$ \psi\rangle_B =  1\rangle$	0	1/2	1/2
$P(B)$	1/2	1/2	

De esta tabla se puede ver que las particiones  $A$  y  $B$  no son independientes, pues las probabilidades condicionadas no son el producto de las probabilidades sin condicionar  $P(A|B) \neq P(A)P(B)$ . Es decir, existe una correlación.

A la correlación que causa la inseparabilidad de los sistemas se le conoce como entrelazamiento y es la correlación cuántica que va más allá de la interacción espacial.

Si se toma la traza parcial de un estado entrelazado puro, el resultado es un estado mixto, como consecuencia de la inseparabilidad de los estados entrelazados.

De aquí surge la siguiente clasificación de los estados cuánticos:

1. Estado producto:  $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$

2. Estado separable:  $\rho = \sum_{ij} p_{ij}(\rho_{A_i} \otimes \rho_{B_j})$
3. Estado entrelazado:  $\rho \neq \sum_{ij} p_{ij}(\rho_{A_i} \otimes \rho_{B_j})$

## 2.13. Computación cuántica

This section's content...

### 2.13.1. Qubits

Un qubit es un sistema físico de dos niveles, es decir, es un objeto cuyo estado es un elemento del espacio de Hilbert de dimensión  $\dim(\mathcal{H}) = 2$  y puede ser escrito de la siguiente manera:  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , donde  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  forma una base de  $\mathcal{H}$  y donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números complejos, tales que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , conocidos como amplitudes de probabilidad.

El qubit se puede pensar como el equivalente en IC del bit, el cual, por sus propiedades cuánticas, puede estar no sólo puede estar en el estado  $|0\rangle$  y en el estado  $|1\rangle$ , sino también en superposiciones de estos dos.

### 2.13.2. Esfera de Bloch

El estado de un qubit también se puede escribir de la siguiente manera:  $|\psi\rangle = e^{i\phi_0} \cos(\theta) |0\rangle + e^{i\phi_1} \sin(\theta) |1\rangle = e^{i\phi_0} (\cos(\theta) |0\rangle + e^{i(\phi_1 - \phi_0)} \sin(\theta) |1\rangle)$ , donde  $\theta$ ,  $\phi_0$  y  $\phi_1$  son números reales. La fase global  $\phi_0$  es ignorable, pues no tiene ningún efecto sobre las probabilidades. Entonces, sin pérdida de generalidad,  $|\psi\rangle = \cos(\theta) |0\rangle + \sin(\theta)e^{i\phi} |1\rangle$ , donde  $\theta \in [0, \pi]$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$ . De esta manera, podemos representar los qubits en una esfera unitaria, conocida como esfera de Bloch. En esta esfera el ket  $|0\rangle$  corresponde al vector  $(0,0,1)$ , mientras que el ket  $|1\rangle$  corresponde al vector  $(0,0,-1)$ .

Todas las operaciones de un qubit se pueden ver como rotaciones en la esfera de Bloch. Por ejemplo, un *bit-flip* sería una rotación de  $\pi$  sobre el eje X, tal que  $(0,0,1) \rightarrow (0,0,-1)$ , es decir  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ .



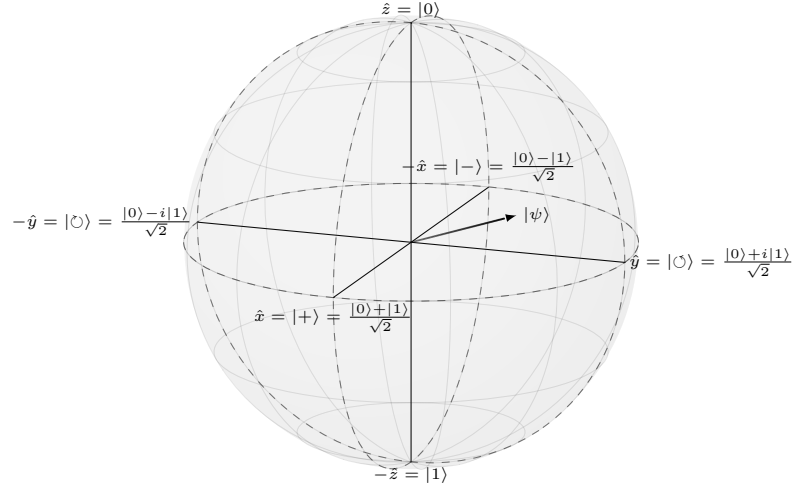


FIGURA 2.1: Esfera de Bloch

### 2.13.3. Conmutador y anticonmutador

Estas son operaciones comunes en la mecánica cuántica y están asociadas a propiedades fundamentales del sistema, como simetrías cuando se realizan con observables.

#### 2.13.3.1. Conmutador

$$[A, B] = AB - BA \quad (2.33)$$

#### 2.13.3.2. Anticonmutador

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (2.34)$$

Si  $[A, B] = 0$ , A y B conmutan entre sí, pues  $AB = BA$ . De igual manera, si  $\{A, B\} = 0$ , se dice que anticonmutan, ya que  $AB = -BA$ . Si dos operadores conmutan, ellos realizarán la misma transformación compuesta sin importar el orden en que se apliquen. De esta manera, si dos observables conmutan, ellos pueden ser medidos simultáneamente, pues ambas medidas no se afectan entre sí. Además, si un Hamiltoniano conmuta con una transformación unitaria, entonces el sistema es simétrico ante esa transformación.

$$[A, B] = 0 \implies AB = BA$$

$$UHU^\dagger = UU^\dagger H = H$$

#### 2.13.4. Matrices de Pauli

Estas matrices son de especial importancia en la mecánica cuántica y representan el spin de una partícula. Ellas son:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

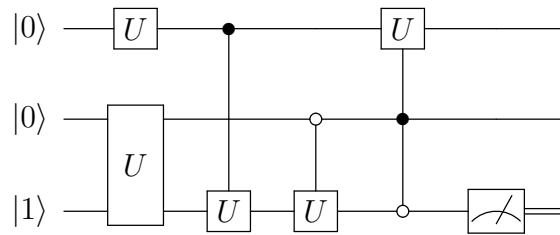
Las matrices de Pauli cumplen las siguientes propiedades:

1. Autovalores  $\pm 1$
2. Hermiticas
3.  $[\sigma_i, \sigma_j] = i\sigma_k$ , donde  $(i, j) \in \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$
4.  $[\sigma_j, \sigma_i] = -i\sigma_k$ , donde  $(i, j) \in \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$

#### 2.13.5. Circuitos cuánticos

El equivalente a los circuitos digitales en la computación cuántica es los circuitos cuánticos. Ellos describen la secuencia de operaciones que se deben aplicar a los qubits para ejecutar cierto algoritmo. Esas operaciones pueden ser transformaciones unitarias, conocidas como compuertas cuánticas, o medidas proyectivas. Es importante resaltar que estos circuitos no representan componentes tangibles, sino componentes de información. De esta manera, las compuertas cuánticas no

son componentes electrónicos de ninguna manera, sólo representan las transformaciones que se aplican a los qubits. En este sentido, los circuitos cuánticos son más el análogo del lenguaje de máquina que de los circuitos digitales. En general, las compuertas cuánticas se implementan con distintos tipo de ondas y pulsos electromagnéticos.



En esta figura se observan los siguientes elementos:

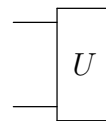
1. Estado inicial: Este es el estado con el que se inicia el algoritmo.

$$|\psi\rangle$$

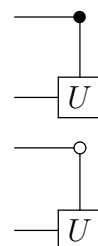
2. Compuerta de un qubit: Representa una operación unitaria sobre el qubit en cuya línea se encuentra.



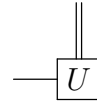
3. Compuerta multiqubit: Representa una operación unitaria sobre los qubits en cuyas líneas se encuentra.



4. Compuerta condicionada cuánticamente: El punto blanco o negro indica que el qubit de esa línea es el qubit de control. Si el punto es blanco, se aplica la compuerta  $U$  si el qubit de control es  $|0\rangle$ . Si el punto es negro, se aplica la compuerta  $U$  si el qubit de control es  $|1\rangle$ . Es caso de que el qubit de control se encuentre en estado de superposición, la compuerta se aplica y no se aplica, simultáneamente.



5. Compuerta condicionada clásicamente: Equivalente a un if de cualquier lenguaje de programación clásica. Sólo se aplica la compuerta  $U$  si el bit de control es 1.



6. Medida proyectiva: Representa una medida proyectiva del qubit en cuya línea se encuentra.



7. Cable cuántico: No es un cable físico, sólo lleva ese nombre en analogía a los circuitos clásicos, donde las compuertas sí son componentes electrónicos en conexión. En el caso de los circuitos cuánticos, este elemento sólo representa que se mantiene la coherencia del qubit y que no se aplica ninguna compuerta sobre él en ese paso del algoritmo.



8. Cable clásico: Representa el bit clásico que se obtiene tras la medida de un qubit.



Las compuertas cuánticas difieren de las compuertas clásicas en que las primeras son reversibles. Esto implica que una compuerta cuántica siempre tiene la misma cantidad de entradas que de salidas y que conociendo la compuerta y la salida, se puede conocer inequívocamente la entrada. Este no es el caso con las compuertas clásicas. Por ejemplo, una compuerta AND tiene dos entradas, pero una sólo salida y no hay manera de conocer la entrada si la salida es 0. De hecho, incluso si se extiende la compuerta AND para incluir una de las entradas como una segunda salida, de manera de tener la misma cantidad de salidas que de entradas, como es el caso con las compuertas cuánticas, sigue siendo imposible conocer la otra entrada si ambas salidas son 0.

Otra diferencia está en la variedad de compuertas que pueden existir. Como ejemplo, consideremos las compuertas de una entrada y una salida. En el caso clásico, sólo existen dos compuertas: el buffer y el NOT. Mientras que en el caso cuántico, existen infinitas compuertas de un qubit, pues cualquier elemento de  $SU(2)$  puede ser una compuerta.

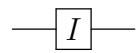
### 2.13.6. Puertas cuánticas de un qubit

Las operaciones unitarias con las que se opera sobre los qubits reciben el nombre de puertas cuánticas.

Las puertas de un sólo qubit pueden ser vistas como rotaciones en la esfera de Bloch.

#### 2.13.6.1. Puerta identidad

Esta operación es equivalente a *no-operation* en una computadora clásica.



$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entrada	Salida
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$
$\alpha  0\rangle + \beta  1\rangle$	$\alpha  0\rangle + \beta  1\rangle$

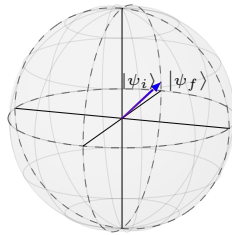
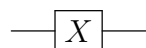


FIGURA 2.2: Puerta I en la esfera de Bloch

#### 2.13.6.2. Puerta X

Este es el equivalente al NOT clásico, pues transforma los  $|0\rangle$  en  $|1\rangle$  y viceversa, ya que realiza una rotación de  $\pi$  sobre el eje X en la esfera de Bloch. Su forma matricial viene dada por la matriz de Pauli  $\sigma_x$



$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entrada	Salida
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
$\alpha  0\rangle + \beta  1\rangle$	$\beta  0\rangle + \alpha  1\rangle$

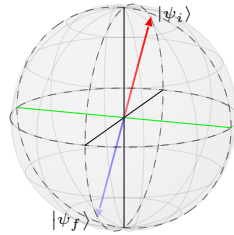
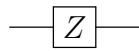


FIGURA 2.3: Compuerta X en la esfera de Bloch

### 2.13.6.3. Compuerta Z

Esta compuerta no tiene análogo clásico, pues lo que realiza es un cambio de fase de  $\pi$ . Esto equivale a una rotación de  $\pi$  sobre el eje Z en la esfera de Bloch. Su forma matricial viene dada por la matriz de Pauli  $\sigma_z$



$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entrada	Salida
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$- 1\rangle$
$\alpha  0\rangle + \beta  1\rangle$	$\alpha  0\rangle - \beta  1\rangle$

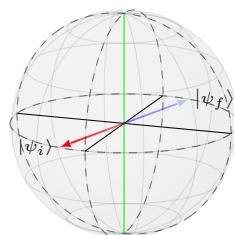


FIGURA 2.4: Compuerta Z en la esfera de Bloch

### 2.13.6.4. Compuerta Y

Esta compuerta realiza una rotación de  $\pi$  sobre el eje  $y$  de la esfera de Bloch. Distintos autores definen la forma matricial de esta compuerta de dos maneras distintas, una forma viene dada por la matriz de Pauli  $\sigma_y$  y otra es esta matriz por una fase global de  $i$ .

$$\text{---} \boxed{Y} \text{---} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ ó } Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entrada	Salida
$ 0\rangle$	$i 1\rangle$ ó $- 1\rangle$
$ 1\rangle$	$-i 0\rangle$ ó $ 0\rangle$
$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	$-i\beta 0\rangle + i\alpha 1\rangle$ ó $\beta 0\rangle - \alpha 1\rangle$

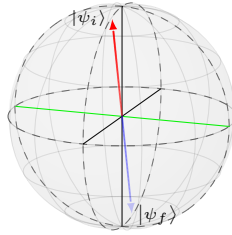


FIGURA 2.5: Compuerta Y en la esfera de Bloch

### 2.13.6.5. Compuerta de Hadamard

Esta compuerta transforma los estados de la base computacional  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  en estados de superposiciones uniformes  $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  y  $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ . También se puede interpretar como el mapa de la base Z a la base X. Ella consiste de una rotación de  $\pi$  sobre el eje  $(x+z)$  y se puede realizar con una rotación de  $\pi/2$  sobre el eje Y seguida de la compuerta X.

$$\text{---} \boxed{H} \text{---} \qquad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Entrada	Salida
$ 0\rangle$	$\frac{ 0\rangle +  1\rangle}{\sqrt{2}}$
$ 1\rangle$	$\frac{ 0\rangle -  1\rangle}{\sqrt{2}}$
$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	$\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} 0\rangle + \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} 1\rangle$

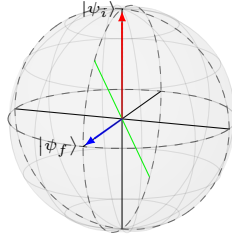


FIGURA 2.6: Compuerta H en la esfera de Bloch

### 2.13.6.6. Compuerta S

Esta compuerta es la raíz cuadrada de Z e introduce una fase de  $\pi/2$  al qubit.

$$\text{---} \boxed{S} \text{---} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Entrada	Salida
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$i  1\rangle$
$\alpha  0\rangle + \beta  1\rangle$	$\alpha  0\rangle + i\beta  1\rangle$

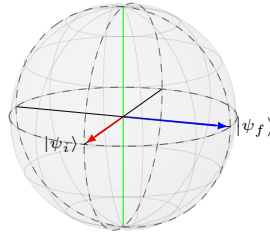


FIGURA 2.7: Compuerta S en la esfera de Bloch

### 2.13.6.7. Compuerta T

Esta compuerta es la raíz cuadrada de S e introduce una fase de  $\pi/4$  al qubit.

$$\text{---} \boxed{T} \text{---} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

Entrada	Salida
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$e^{\frac{i\pi}{4}}  1\rangle$
$\alpha  0\rangle + \beta  1\rangle$	$\alpha  0\rangle + e^{\frac{i\pi}{4}} \beta  1\rangle$



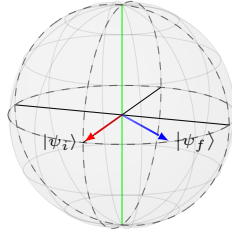


FIGURA 2.8: Compuerta T en la esfera de Bloch

### 2.13.6.8. Compuerta de cambio de fase

Esta compuerta es similar a Z, S y T, sólo que introduce una fase  $\phi$  cualquiera al qubit.

$$\text{---} \boxed{P_\phi} \text{---} \quad P_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

Entrada	Salida
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$e^{i\phi}  1\rangle$
$\alpha  0\rangle + \beta  1\rangle$	$\alpha  0\rangle + e^{i\phi} \beta  1\rangle$

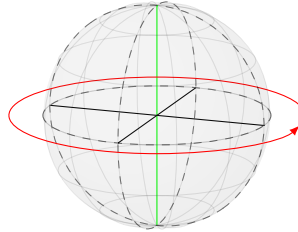


FIGURA 2.9: Compuerta P en la esfera de Bloch

### 2.13.6.9. Compuertas de rotación

Una rotación general en la esfera de Bloch se escribe de la siguiente manera:

$$R(\theta, \hat{r}) = e^{i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{r}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) + iz \sin(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2})(ix + y) \\ \sin(\frac{\theta}{2})(ix - y) & \cos(\frac{\theta}{2}) - iz \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

Donde  $\hat{r}$  es el vector unitario asociado al eje de la rotación,  $\theta$  es el ángulo que se rota y  $\vec{\sigma}$  es el vector de las matrices de Pauli ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ).

Si  $\hat{r} = (1, 0, 0)$ , se tiene la rotación general sobre X.

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & i \sin(\frac{\theta}{2}) \\ i \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

Si  $\hat{r} = (0, 1, 0)$ , se tiene la rotación general sobre Y.

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

Si  $\hat{r} = (0, 0, 1)$ , se tiene la rotación general sobre Z.

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

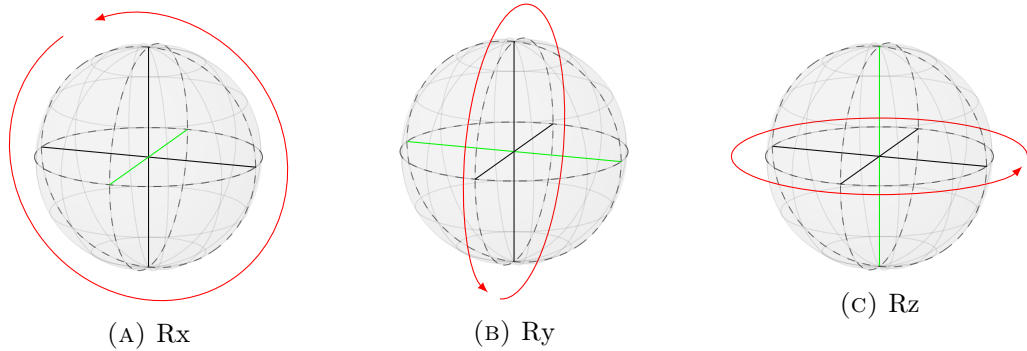


FIGURA 2.10: Compuertas Rx, Ry y Rz en la esfera de Bloch

Para realizar cualquier rotación en la esfera de Bloch, basta con poder realizar rotaciones generales sobre dos ejes ortogonales de ella. A partir de secuencias tres rotaciones alrededor de estos dos ejes se puede realizar cualquier rotación alrededor de cualquier otro eje. Por ejemplo, las rotaciones alrededor de X, en función de rotaciones alrededor de Y y Z se realizan de la siguiente manera:

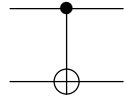
$$R_x(\theta) = R_z(\frac{\pi}{2})R_y(\theta)R_z(\frac{-\pi}{2})$$

### 2.13.7. Compuertas multiqubit

Las compuertas multiqubit involucran interacción entre los qubits.

### 2.13.7.1. Compuerta CNOT

La compuerta CNOT o *controlled-NOT* es un ejemplo de una compuerta condicionada. De hecho, es la compuerta X condicionada. Ella recibe dos qubits de entrada, un *control* y un *target*. Si el qubit de control es  $|0\rangle$  se aplica 1 sobre el qubit objetivo y si el qubit de control es  $|1\rangle$ , se aplica X sobre el qubit objetivo. Esta compuerta se puede escribir en función de proyectores en la partición del qubit de control de la siguiente manera:  $CNOT = \Pi_0 \otimes 1 + \Pi_1 \otimes X$ .



$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entrada	Salida
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$ 01\rangle$
$ 10\rangle$	$ 11\rangle$
$ 11\rangle$	$ 10\rangle$
$\alpha  00\rangle + \beta  01\rangle + \gamma  10\rangle + \delta  11\rangle$	$\alpha  00\rangle + \beta  01\rangle + \delta  10\rangle + \gamma  11\rangle$

### 2.13.7.2. Compuerta SWAP

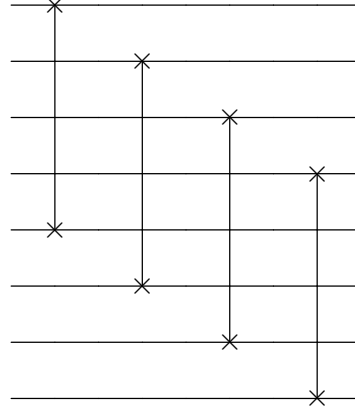
La compuerta SWAP, como su nombre lo indica, intercambia el contenido de dos particiones de qubits. Es decir, transforma  $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$  en  $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$ .



$$SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entrada	Salida
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$ 10\rangle$
$ 10\rangle$	$ 01\rangle$
$ 11\rangle$	$ 11\rangle$
$\alpha  00\rangle + \beta  01\rangle + \gamma  10\rangle + \delta  11\rangle$	$\alpha  00\rangle + \gamma  01\rangle + \beta  10\rangle + \delta  11\rangle$

Si se tiene un sistema de qubits dividido en dos partes o registros del mismo tamaño, también se llama SWAP a la compuerta que intercambia estos dos registros. Es decir, a la operación que transforma  $|\psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle \otimes |\phi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_n\rangle$  en  $|\phi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_n\rangle \otimes |\psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$ . Ella se construye de la siguiente manera:



### 2.13.7.3. Compuerta $\sqrt{\text{SWAP}}$

$$\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entrada	Salida
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$\frac{1+i}{2}  01\rangle + \frac{1-i}{2}  10\rangle$
$ 10\rangle$	$\frac{1-i}{2}  01\rangle + \frac{1+i}{2}  10\rangle$
$ 11\rangle$	$ 11\rangle$
$\alpha  00\rangle + \beta  01\rangle + \gamma  10\rangle + \delta  11\rangle$	$\alpha  00\rangle + (\frac{1+i}{2}\beta + \frac{1-i}{2}\gamma)  01\rangle + (\frac{1-i}{2}\beta + \frac{1+i}{2}\gamma)  10\rangle + \delta  11\rangle$

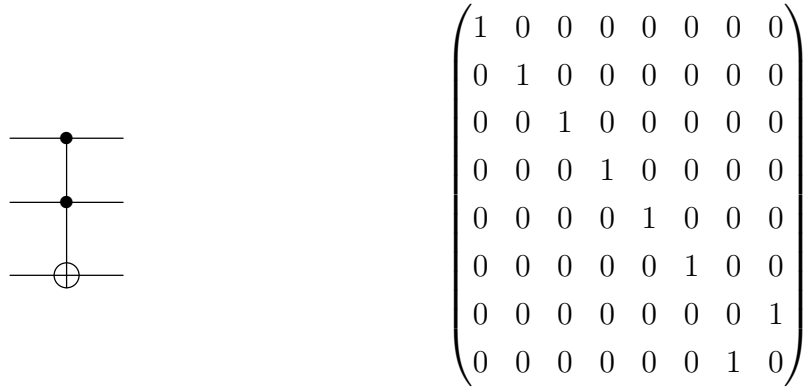
### 2.13.7.4. Compuerta de Ising

Esta compuerta es fundamental para las computadoras cuánticas a base de trampas de iones, pues se puede realizar de manera nativa en estos sistemas. [ref]

$$\begin{array}{c} \text{---} \boxed{XX_\phi} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -ie^{i\phi} \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ -ie^{-i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

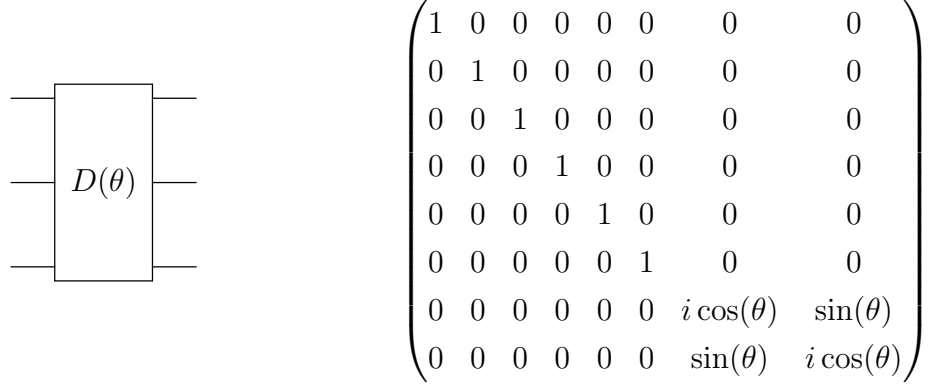
Entrada	Salida
$ 00\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle - ie^{-i\phi} 11\rangle)$
$ 01\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle - i 10\rangle)$
$ 10\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-i 01\rangle +  10\rangle)$
$ 11\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-ie^{i\phi} 00\rangle +  11\rangle)$
$\alpha 00\rangle + \beta 01\rangle + \gamma 10\rangle + \delta 11\rangle$	$\frac{\alpha - ie^{i\phi}\delta}{\sqrt{2}} 00\rangle + \frac{\beta - i\gamma}{\sqrt{2}} 01\rangle + \frac{\gamma - i\beta}{\sqrt{2}} 10\rangle + \frac{\delta - ie^{-i\phi}\alpha}{\sqrt{2}} 11\rangle$

### 2.13.7.5. Compuerta de Toffoli



Entrada	Salida
$ 000\rangle$	$ 000\rangle$
$ 001\rangle$	$ 001\rangle$
$ 010\rangle$	$ 010\rangle$
$ 011\rangle$	$ 011\rangle$
$ 100\rangle$	$ 100\rangle$
$ 101\rangle$	$ 101\rangle$
$ 110\rangle$	$ 111\rangle$
$ 111\rangle$	$ 110\rangle$
$\alpha 000\rangle + \beta 001\rangle + \gamma 010\rangle + \delta 011\rangle$	$\alpha 000\rangle + \beta 001\rangle + \gamma 010\rangle + \delta 011\rangle$
$+ \epsilon 100\rangle + \zeta 101\rangle + \eta 110\rangle + \theta 111\rangle$	$+ \epsilon 100\rangle + \zeta 101\rangle + \theta 110\rangle + \eta 111\rangle$

### 2.13.7.6. Compuerta de Deutsch



$$|a, b, c\rangle \rightarrow \begin{cases} i \cos(\theta) |a, b, c\rangle + \sin(\theta) |a, b, c \oplus 1\rangle & \text{si } a = b = 1 \\ |a, b, c\rangle & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entrada	Salida
$ 000\rangle$	$ 000\rangle$
$ 001\rangle$	$ 001\rangle$
$ 010\rangle$	$ 010\rangle$
$ 011\rangle$	$ 011\rangle$
$ 100\rangle$	$ 100\rangle$
$ 101\rangle$	$ 101\rangle$
$ 110\rangle$	$i \cos(\theta)  110\rangle + \sin(\theta)  111\rangle$
$ 111\rangle$	$\sin(\theta)  110\rangle + i \cos(\theta)  111\rangle$
$\alpha  000\rangle + \beta  001\rangle + \gamma  010\rangle + \delta  011\rangle$	$\alpha  000\rangle + \beta  001\rangle + \gamma  010\rangle + \delta  011\rangle$
$+ \epsilon  100\rangle + \zeta  101\rangle + \eta  110\rangle + \iota  111\rangle$	$+ \epsilon  100\rangle + \zeta  101\rangle + (i \cos(\theta)\eta + \sin(\theta)\iota)  110\rangle$ $+ (\sin(\theta)\eta + i \cos(\theta)\iota)  111\rangle$

### 2.13.8. Conjuntos universales de compuertas cuánticas

Un conjunto universal de compuertas cuánticas (CUCC) es un conjunto finito de compuertas cuánticas con el cuál se puede aproximar cualquier operación unitaria arbitrariamente bien.

Cualquier operador unitario puede ser escrito en función de compuertas de uno y dos qubits [1].

Un CUCC simple es  $\{H, T, CNOT\}$ .

Existe un CUCC de una sola compuerta, la compuerta de Deutsch,  $D(\theta)$ .

La compuerta de Toffoli es un caso especial de la compuerta de Deutsch,  $D(\frac{\pi}{2})$ .

Otro CUCC consiste en la compuerta de Ising y la compuerta de cambio de fase,  $\{XX_\phi, R_z(\theta)\}$ . Este conjunto es nativo en algunas computadoras cuánticas de trampas de iones.

### 2.13.9. Criterios de DiVincenzo

Para construir un computador cuántico, se deben cumplir las siguientes condiciones experimentales:

1. Un sistema físico escalable con qubits bien caracterizados.
2. La habilidad de inicializar el estado de los qubits en un estado fiducial simple.
3. Tiempos de coherencia relevantes largos.
4. Un conjunto universal de compuertas cuánticas.
5. La capacidad de medir qubits en específico.

## 2.14. Fidelidad

La fidelidad de dos distribuciones de probabilidad  $\{p_x\}$  y  $\{q_x\}$  es una medida de distancia entre ellas y se define como:

$$F(p_x, q_x) = \sum_x \sqrt{p_x q_x} \quad (2.38)$$

Cuando las distribuciones  $\{p_x\}$  y  $\{q_x\}$  son idénticas, la fidelidad entre ellas es igual a 1. La interpretación geométrica de la fidelidad es que esta es el producto interno de dos vectores de componentes  $\sqrt{p_x}$  y  $\sqrt{q_x}$ , que yacen en la esfera unitaria.

En el caso de los estados cuánticos, la fidelidad toma la siguiente forma:

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr}(\sqrt{\rho^{1/2} \sigma \rho^{1/2}}) \quad (2.39)$$

En ciertos casos especiales, la fidelidad se puede simplificar de las siguientes maneras:

1. Si  $\rho$  y  $\sigma$  conmutan, es decir, que existe una base en la que ambos son diagonales, entonces la fidelidad cuántica toma la forma de la fidelidad clásica

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr}(\sum_i \sqrt{r_i s_i} |i\rangle\langle i|) = \sum_i \sqrt{r_i s_i} = F(r_i, s_i) \quad (2.40)$$

Donde  $r_i$  y  $s_i$  son los autovalores de  $\rho$  y  $\sigma$ , respectivamente.

2. Si  $\sigma$  es un estado puro  $|\psi\rangle$ , entonces la fidelidad toma la forma

$$F(|\psi\rangle, \rho) = \text{Tr}(\sqrt{\langle\psi|\rho|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle}) = \sqrt{\langle\psi|\rho|\psi\rangle} \quad (2.41)$$

3. Si ambos estados son puros, entonces la fidelidad es:

$$F(|\psi\rangle, |\varphi\rangle) = \sqrt{\langle\psi|\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle} = |\langle\psi|\varphi\rangle| \quad (2.42)$$

## 2.15. Medidas proyectivas

[2]

El esquema de medidas proyectivas, también llamadas medidas de von Neumann, se encuentra formado por proyectores ortogonales asociados a la medida espectral de un observable. Este esquema es la medida por excelencia utilizada por los físicos, ya que está directamente asociada a la medición de una propiedad del sistema o un conjunto compatible de ellas, y tales propiedades son caracterizadas a través de operadores autoadjuntos. Esta medida fue empleada por von Neumann para descomponer a los observables de un sistema cuántico en una combinación lineal de proyectores, donde cada proyector está asociado a los subespacios  $\mathcal{M}_\lambda$  que son dejados invariantes por el operador en cuestión y, los coeficientes de la combinación lineal corresponden a los posibles valores que arroja el observable tras una medición. En este esquema, la probabilidad  $P_\lambda(p)$  de obtener un valor  $\lambda \in \Delta$  después de medir el observable en cuestión en el estado  $\hat{\rho}$  viene dada por el valor medio del proyector  $\hat{\Pi}_{\mathcal{M}_\lambda}$  asociado al autovalor  $\lambda$ , mientras que el estado después de la medida viene dado por el autovector correspondiente a dicho autovalor. En este caso, las medidas proyectivas vienen dadas por



$$MP_s = \{\hat{\Pi}_m : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}_{\lambda_m} \subseteq \mathcal{H} \text{ tal que } \hat{\Pi}_m \hat{\Pi}_n = \delta_{m,n} \hat{\Pi}_m, \\ \sum_m \hat{\Pi}_m = \mathbb{1}, P_{\lambda_m}(\rho) = (\hat{\Pi}_m)_\rho \text{ y } \rho_{\lambda_m} \xrightarrow{\text{colapso}} \hat{\Pi}_m\} \quad (2.43)$$

Cabe destacar que al realizar nuevamente la medida el estado resultante no se modifica, siempre que la dimensión de  $\mathcal{M}_\lambda$  sea igual a uno, es decir, el proyector  $\hat{\Pi}_{\mathcal{M}_\lambda}$  sea de rango uno. Este hecho se conoce con el nombre de repetibilidad, propiedad que no está presente en los otros esquemas de medidas.

## 2.16. Sistemas cuánticos abiertos

Consideremos el espacio de Hilbert bipartito  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Como ya vimos antes, si tenemos una matriz de densidad  $\rho \in \mathcal{H}$ , la manera de escribir la matriz de densidad del subsistema  $A$  está dada por la traza parcial  $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho)$ .

En  $\mathcal{H}_A$  las medidas están dadas por un conjunto de operadores hermíticos  $\{M_k\}$ , cada uno de ellos asociado a un posible resultado  $k$ . Supongamos que no podemos ver el subsistema  $B$  y que sólo vemos  $A$  con  $\rho_A$ . Entonces, la probabilidad de obtener un resultado  $k$  cuando realicemos la medida  $\{M_k\}$  será

$$p_A(k) = \text{Tr}(M_k \rho_A) \quad (2.44)$$

En el sistema total esta medida corresponde a un operador  $\tilde{M}_k = M_k \otimes \mathbb{1}$  y la probabilidad de obtener el resultado  $k$  sería

$$p_A(k) = \text{Tr}(\tilde{M}_k \rho) \quad (2.45)$$

Si  $\{|\psi_i^A\rangle, |\varphi_j^B\rangle\}$  es una base de  $\mathcal{H}$ , entonces

$$\begin{aligned} p_A(k) &= \text{Tr}[(M_k \otimes \mathbb{1})\rho] \\ &= \sum_{ij} \langle \psi_i^A | \langle \varphi_j^B | (M_k \otimes \mathbb{1}) \rho | \psi_i^A \rangle | \varphi_j^B \rangle \\ &= \sum_i (\langle \psi_i^A | M_k \otimes \mathbb{1} \left[ \sum_j (\mathbb{1} \otimes \langle \varphi_j^B |) \rho (\mathbb{1} \otimes | \varphi_j^B \rangle) \right] (| \psi_i^A \rangle \otimes \mathbb{1}) \\ &= \sum_i \langle \psi_i^A | M_k \text{Tr}_B(\rho) | \psi_i^A \rangle \\ &= \sum_i \langle \psi_i^A | M_k \rho_A | \psi_i^A \rangle = \text{Tr}(M_k \rho_A) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Así que  $\rho_A$  está inequívocamente dado por la traza parcial  $Tr_B(\rho)$ .

Una propiedad importante de la traza parcial es que incluso si  $\rho$  es un estado puro,  $\rho_A$  y  $\rho_B$  pueden ser mixtos, esto ocurre si  $|\phi\rangle$  es un estado entrelazado.

Dada la matriz de densidad  $\rho(t_0)$ , tomando la traza parcial en  $B$  en el tiempo  $t_1$ , tendríamos el estado  $\rho_A(t_1)$ , dado por:

$$\rho_A(t_1) = Tr_B[U(t_1, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t_1, t_0)] \quad (2.47)$$

Si el operador de evolución no puede ser factorizado de la manera  $U(t_1, t_0) = U_A(t_1, t_0) \otimes U_B(t_1, t_0)$ , entonces los sistemas  $A$  y  $B$  están interactuando e intercambian energía e información entre ellos, es decir, son sistemas cuánticos abiertos.

Ahora, ¿qué pasa si queremos estudiar sólo la dinámica de  $\rho_A$ ?, a pesar de saber que no podemos factorizar  $U(t_1, t_0)$  en dos particiones. Este problema se soluciona desarrollando un mapa dinámico que actúe en  $\mathcal{H}_A$  que transforme los estados del subsistema  $A$  del tiempo  $t_0$  al tiempo  $t_1$ .

$$\mathcal{E}_{(t_1, t_0)} : \rho_A(t_0) \rightarrow \rho_A(t_1) \quad (2.48)$$

El problema es que en general este mapa no depende sólo de  $U(t_1, t_0)$  y de las propiedades de  $B$ , sino también de  $A$  en sí mismo. Para aclarar este punto, escribamos el estado total  $\rho$  como la suma de dos contribuciones:

$$\rho(t) = \rho_A(t_0) \otimes \rho_B(t_1) + \rho_{corr}(t_0) \quad (2.49)$$

Donde el término  $\rho_{corr}(t_0)$  no es un estado cuántico y satisface

$$Tr_A[\rho_{corr}(t_0)] = Tr_B[\rho_{corr}(t_0)] = 0 \quad (2.50)$$

Este término contiene las correlaciones, tanto clásicas como cuánticas, entre los dos subsistemas. Sustituyendo 2.49 en 2.47 tenemos

$$\begin{aligned}
\rho_A(t_1) &= Tr_B[U(t_1, t_0)(\rho_A(t_0) \otimes \rho_B(t_0) + \rho_{corr}(t_0))U^\dagger(t_1, t_0)] \\
&= \sum_i \lambda_i Tr_B[U(t_1, t_0)(\rho_A(t_0) \otimes |\psi_i\rangle\langle\psi_i|)U^\dagger(t_1, t_0)] \\
&\quad + Tr_B[U(t_1, t_0)\rho_{corr}(t_0)U^\dagger(t_1, t_0)] \\
&= \sum_{ij} K_{ij}(t_1, t_0)\rho_A(t_0)K_{ij}^\dagger(t_1, t_0) + \zeta(t_1, t_0) \\
&= \mathcal{E}_{(t_1, t_0)}[\rho_A(t_0)]
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Donde  $K_{ij}(t_1, t_0) = \sqrt{\lambda_i} \langle \psi_j | U(t_1, t_0) | \psi_i \rangle$  y hemos usado la descomposición espectral de  $\rho_B(t_0) = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ . Los operadores  $K_{ij}(t_1, t_0)$  dependen sólo del operador de evolución global y del estado inicial del subsistema  $B$ , pero la parte no homogénea  $\zeta(t_1, t_0) = Tr_B[U(t_1, t_0)\rho_{corr}(t_0)U^\dagger(t_1, t_0)]$  puede no ser independiente de  $\rho_A$  debido al término de correlación  $\rho_{corr}$ .

Vista esta dependencia, reescribamos  $\mathcal{E}_{(t_1, t_0)}$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{E}_{(t_1, t_0)}[\rho_A] = \rho_A(t_1) = \sum_{ij} K_{ij}(t_1, t_0, \rho_A)\rho_A(t_0)K_{ij}^\dagger(t_1, t_0, \rho_A) \tag{2.52}$$

Hemos escrito el mapa dinámico de manera homogénea y ahora  $K_{ij}$  depende de  $\rho_A$  en el tiempo  $t_0$ . Un mapa con esta forma siempre existe. Para demostrar esto, basta con considerar el siguiente caso particular:

$$\mathcal{E}_{(t_1, t_0)}[\rho_A] = Tr_2[U_{SWAP}\rho_A(t_0) \otimes \rho_A(t_1)U_{SWAP}^\dagger] = \rho_A(t_1) \tag{2.53}$$

Aquí  $U_{SWAP}$  representa el operador SWAP entre las particiones 1 y 2, tal que  $U_{SWAP}(\rho \otimes \sigma)U_{SWAP}^\dagger$ . Así,  $\rho_A(t_1)$  pasa a la partición 1 y es el resultado de la traza parcial. Entonces, si utilizamos la descomposición espectral de  $\rho_A t_1$  tendremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{(t_1, t_0)}[\rho_A] &= Tr_2[U_{SWAP}\rho_A(t_0) \otimes \rho_A(t_1)U_{SWAP}^\dagger] \\
&= \sum_i \lambda_i Tr_2[U_{SWAP}\rho_A(t_0) \otimes |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|U_{SWAP}^\dagger] \\
&= \sum_{ij} K_{ij}(t_1, t_0, \rho_A)\rho_A(t_0)K_{ij}^\dagger(t_1, t_0, \rho_A)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Donde  $K_{ij}(t_1, t_0, \rho_A) = \sqrt{\lambda_i} \langle \lambda_j | U_{SWAP} | \lambda_i \rangle$ . Cabe mencionar que esta descomposición no es única.

Un mapa dinámico universal es aquel que es independiente del estado al que se aplica. Los operadores  $K_{ij}(t_1, t_0)$  que lo conforman se conocen como operadores de Krauss. Los mapas dinámicos universales son completamente positivos y los operadores de Krauss cumplen la siguiente propiedad

$$\sum_{ij} K_{ij}^\dagger(t_1, t_0) K_{ij}(t_1, t_0) = (1) \quad (2.55)$$

Decimos que un sistema tiene evolución markoviana cuando su evolución puede ser descrita por mapas dinámicos universales tales componibles de la siguiente manera:

$$\mathcal{E}_{(t_2, t_0)} = \mathcal{E}_{(t_2, t_1)} \mathcal{E}_{(t_1, t_0)} \quad (2.56)$$

Esta propiedad de composición se conoce como condición de divisibilidad. Típicamente, la evolución de los sistemas abiertos no es markoviana, porque se desarrollan correlaciones que hacen que el mapa dinámico que la describe no sea universal. Sin embargo, si el término  $\rho_{corr}$  no afecta mucho la dinámica del sistema, un modelo markoviano puede dar una buena aproximación de la evolución temporal.

Consideremos entonces una evolución markoviana. Esto nos permite construir la siguiente ecuación de diferencias:

$$\rho(t + \epsilon) - \rho(t) = [\mathcal{E}_{(t+\epsilon, 0)} - \mathcal{E}_{(t, 0)}] \rho(0) = [\mathcal{E}_{(t+\epsilon, t)} - \mathbb{1}] \mathcal{E}_{(t, 0)} [\rho(0)] = [\mathcal{E}_{(t+\epsilon, t)} - \mathbb{1}] \rho(t) \quad (2.57)$$

Si el límite cuando  $\epsilon$  tiende a cero está bien definido, entonces podemos construir la ecuación diferencial de  $\rho(t)$ , llamada ecuación maestra:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\rho(t + \epsilon) - \rho(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[\mathcal{E} - \mathbb{1}]}{\epsilon} \rho(t) = \mathcal{L}_t \rho(t) \quad (2.58)$$

Donde hemos definido el generador de la evolución como:

$$\mathcal{L}_t = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[\mathcal{E} - \mathbb{1}]}{\epsilon} \quad (2.59)$$

Sea  $\{F_j, j = 1, \dots, N^2\}$  una base ortonormal completa con respecto al producto interno de Hilbert-Schmidt  $(F_n, F_m) = \text{Tr}(F_n^\dagger F_m) = \delta_{nm}$ , tal que  $F_{N^2} = \mathbb{1}/\sqrt{N}$ , para que el resto de los operadores tengan traza cero. Ahora la expansión de Krauss en esta base nos da

$$\mathcal{E}_{(t_2, t_1)}[\rho] = \sum_{nm} c_{nm}(t_2, t_1) F_n \rho F_m^\dagger \quad (2.60)$$

Donde los elementos  $c_{nm}$  son la multiplicación de los productos internos de  $K_{ij}$  con los elementos de la base elegida.

$$c_{nm}(t_2, t_1) = \sum_{ij} (F_n, K_{ij}(t_2, t_1)) (F_m, K_{ij}(t_2, t_1))^* \quad (2.61)$$

En esta base el generador  $\mathcal{L}_t$  toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t(\rho) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{nm} \frac{c_{nm}(t+\epsilon, t) F_n \rho F_m^\dagger - \rho}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{c_{N^2 N^2}(t+\epsilon, t) - N}{N\epsilon} \rho \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N^2-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \frac{c_{n N^2}(t+\epsilon, t)}{\epsilon} F_n \rho + \frac{c_{N^2 n}(t+\epsilon, t)}{\epsilon} \rho F_n^\dagger \right) \\ &\quad \left. + \sum_{n,m=1}^{N^2-1} \frac{c_{nm}(t+\epsilon, t)}{\epsilon} F_n \rho F_m^\dagger \right] \end{aligned} \quad (2.62)$$

Ahora, definamos los coeficientes  $\alpha_{nm}(t)$  como:

$$\alpha_{N^2 N^2}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_{N^2 N^2}(t+\epsilon, t) - N}{\epsilon} \quad (2.63)$$

$$\alpha_{n N^2}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_{n N^2} \epsilon}{\epsilon}, \quad n = 1, \dots, N^2 - 1 \quad (2.64)$$

$$\alpha_{nm}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_{nm} \epsilon}{\epsilon}, \quad n = 1, \dots, N^2 - 1 \quad (2.65)$$

También definimos los siguientes operadores:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N^2-1} \alpha_{n N^2}(t) F_n \quad (2.66)$$

$$G(t) = \frac{\alpha_{N^2 N^2}}{2N} \mathbb{1} + \frac{1}{2} [F^\dagger(t) + F(t)] \quad (2.67)$$

$$H(t) = \frac{1}{2i} [F^\dagger(t) - F(t)] \quad (2.68)$$

Este último operador,  $H(t)$ , es hermítico. En términos de estos operadores, sustituyendo, el generador de la ecuación maestra toma la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t), \rho] + \{G(t), \rho\} + \sum_{n,m=1}^{N^2-1} \alpha_{nm}(t) F_n \rho F_m^\dagger \quad (2.69)$$

Ya que los mapas dinámicos universales preservan la traza de cualquier matriz de densidad  $\rho$ ,

$$0 = \text{Tr}[\mathcal{L}(\rho)] = \text{Tr} \left[ \left( 2G(t) + \sum_{n,m=1}^{N^2-1} \alpha_{nm}(t) F_m^\dagger F_n \right) \rho \right] \quad (2.70)$$

Las siguientes propiedades de la traza de los conmutadores y los anticonmutadores

$$\text{Tr}([A, B]) = \text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0 \quad (2.71)$$

$$\text{Tr}(\{A, B\}) = \text{Tr}(AB + BA) = \text{Tr}(AB) + \text{Tr}(BA) = 2\text{Tr}(AB) \quad (2.72)$$

Dado este hecho, podemos concluir que

$$G(t) = -\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{N^2-1} \alpha_{nm}(t) F_m^\dagger F_n \quad (2.73)$$

Sustituyendo, el generador nos queda de con la siguiente forma

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t), \rho] + \sum_{n,m=1}^{N^2-1} \alpha_{nm}(t) [F_n \rho F_m^\dagger - \frac{1}{2} \{F_m^\dagger F_n, \rho\}] \quad (2.74)$$

La matriz de coeficientes  $\{\alpha_{nm}(t)\}$  es una matriz semidefinida positiva, así que podemos diagonalizarla con una matriz unitaria  $u(t)$ , tal que

$$\sum_{nm} u_{jn}(t) \alpha_{nm}(t) u_{km}^*(t) = \gamma_j(t) \delta_{jk} \quad (2.75)$$

Cada autovalor  $\gamma_j(t)$  es mayor o igual a cero. Ahora tenemos los nuevos operadores  $V_m(t)$

$$V_m(t) = \sum_{n=1}^{N^2-1} u_{mn}^*(t) F_n F_j = \sum_{m=1}^{N^2-1} u_{mn}(t) V_m(t) \quad (2.76)$$

Con estos últimos operadores, el generador de la ecuación maestra se convierte en

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t), \rho] + \sum_m \gamma_m(t) \left[ V_m(t) \rho V_m^\dagger(t) - \frac{1}{2} \{V_m^\dagger(t) V_m(t), \rho\} \right] \quad (2.77)$$

Con  $\gamma_m(t) \geq 0$  para todo  $m$  y  $t$ . Finalmente, Kossakowski [ref] y Lindblad [ref] analizaon este problema para el caso de ecuaciones temporalmente homogneas, es decir, el caso en el que el mapa dinámico universal depende sólo de la diferencia entre los tiempos  $t_2$  y  $t_1$ ,  $\tau = t_2 - t_1$ , en lugar de los tiempos en sí mismos,  $\mathcal{E}_{(t_2, t_1)} = \mathcal{E}_{(\tau)}$ . La ecuación diferencial generada en este caso se conoce como Lindbladiano.

$$\dot{\rho}(t) = -i[\hat{H}, \rho(t)] + \sum_k \gamma_k [V_k \rho(t) V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho(t)\}] \quad (2.78)$$

En esta ecuación  $\hat{H}$  es el Hamiltoniano del sistema,  $V_k$  son operadores de salto o colapso, y  $\gamma_k$  son tasas de decaimiento. El término  $-i[\hat{H}, \rho(t)]$  representa la evolución unitaria y es el mismo de la ecuación de Liouville-von Neumann. Los términos  $\gamma_k V_k \rho(t) V_k^\dagger$  representan el efecto del entorno en el sistema y los términos  $-\frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho(t)\}$  son términos de normalización para el caso en el que el entorno no afecta al sistema.

# Bibliografía

- [1] Adriano Barenco, Charles H. Bennet, Richard Cleve, David P. DiVincenzo, Norman Margolus, Peter Shor, Tycho Sleator, Jhon A. Smolin, and Harald Weinfurter. Elementary gates for quantum computation. *Physical Review A*, 1995.
- [2] Sttiwuer Díaz-Solórzano. Esquemas de medidas. *QIC*, 2014.
- [3] Rudolf Gross and Achim Marx. Applied superconductivity: Josephson effect and superconducting electronics. *Walther-Meißner-Institut*, 2005.
- [4] Onnes H.K. Further experiments with liquid helium. g. on the electrical resistance of pure metals, etc. vi. on the sudden change in the rate at which the resistance of mercury disappears. *Springer, Dordrecht*, 1911.
- [5] A. P. Drozdov, M. I. Eremets, I. A. Troyan, V. Ksenofontov, and S. I. Shylin. Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system. *Nature*, 525:73–76, 2015.
- [6] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Physical Review Journals Archive*, 1957.
- [7] Herbert Fröhlich. Theory of the superconducting state. *Unknown*, 1950.
- [8] M Cyrot. Ginzburg-landau theory for superconductors. *Reports on Progress in Physics*, 36(2):103, 1973.
- [9] Jr. Bascom S. Deaver and William M. Fairbank. Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders. *Physical Review Letters*, 1961.
- [10] B.D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics Letters*, 1(7):251 – 253, 1962.
- [11] P. W. Anderson and J. M. Rowell. Probable observation of the josephson superconducting tunneling effect. *Phys. Rev. Lett.*, 10:230–232, Mar 1963.



- 
- [12] Sidney Shapiro. Josephson currents in superconducting tunneling: The effect of microwaves and other observations. *Phys. Rev. Lett.*, 11:80–82, Jul 1963.
  - [13] G. Wendin. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *IOP Science*, 2017.
  - [14] Alexandre Blais, Jay Gambetta, A. Wallraff, D. I. Schuster, S. M. Girvin, M. H. Devoret, , and R. J. Schoelkopf. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics. *Physical Review A*, 2007.
  - [15] Norbert Schuch and Jens Siewert. Natural two-qubit gate for quantum computation using the xy interaction. *Physical Review A*, 2003.
  - [16] T. Loke and J.B. Wang. Efficient quantum circuits for szegedy quantum walks. *Annals of Physics*, 382:64 – 84, 2017.