



Universidad Simón Bolívar
Decanato de Estudios Profesionales
Coordinación de Ingeniería de Electrónica

Diseño y Simulación de Procesadores Cuánticos que Implementen Algoritmos Cuánticos de Búsqueda

Por:

Miguel Casanova

Realizado con la asesoría de:

Enrique Castro y Sttiwuer Diaz

PROYECTO DE GRADO

Presentado ante la Ilustre Universidad Simón Bolívar
como requisito parcial para optar al título de
Ingeniero Electrónico

Sartenejas, noviembre de 2018

Índice general

Índice de Figuras	7
Lista de Tablas	10
1. Introducción	11
1.1. Justificación	16
1.2. Objetivos	18
1.2.1. Objetivo General	18
1.2.2. Objetivos Específicos	18
1.3. Fases del Proyecto	19
1.4. Referencias	20
1. Información cuántica	5
1.1. Operadores lineales	5
1.2. Delta de Kronecker	6
1.3. Operadores hermíticos	6
1.4. Operadores unitarios	7
1.5. Conmutador y anticonmutador	8
1.6. Espacios de Hilbert	9
1.7. Estados cuánticos	11
1.8. Sistemas multipartitos	17
1.9. Postulados de la mecánica cuántica	20
1.10. Entrelazamiento	21
1.11. Qubits	22
1.12. Esfera de Bloch	23
1.13. Matrices de Pauli	24
1.14. Circuitos cuánticos	24
1.15. Compuertas cuánticas de un qubit	27
1.15.1. Compuerta identidad	27
1.15.2. Compuerta X	27
1.15.3. Compuerta Z	28
1.15.4. Compuerta Y	29
1.15.5. Compuerta de Hadamard	29
1.15.6. Compuerta S	30
1.15.7. Compuerta T	30

1.15.8. Compuerta de cambio de fase	31
1.15.9. Compuertas de rotación	31
1.16. Compuertas multiqubit	33
1.16.1. Compuerta CNOT	33
1.16.2. Compuerta SWAP	33
1.16.3. Compuerta $\sqrt{\text{SWAP}}$	34
1.16.4. Compuerta de Ising	35
1.16.5. Compuerta de Toffoli	35
1.16.6. Compuerta de Deutsch	36
1.17. Conjuntos universales de compuertas cuánticas	37
1.18. Criterios de DiVincenzo	37
1.19. Fidelidad	38
1.20. Medidas proyectivas	39
1.21. Sistemas cuánticos abiertos	40
3. Superconductividad	60
3.1. Cuantización macroscópica y superconductividad	60
3.2. La teoría BCS	62
3.3. Cuantización del flujo magnético y efecto tunel Giaver	70
3.4. Efecto Josephson	77
3.5. Componentes de la corriente en las uniones de Josephson	82
3.6. Qubits superconductores	83
3.7. Arquetipos de qubits superconductores	85
3.7.1. Qubit de carga	85
3.7.2. Qubit de flujo	85
3.7.3. Qubit de fase	85
3.8. Transmones	85
3.9. Hamiltonianos multiqubit de transmones	88
3.10. Compuertas cuánticas en transmones	89
3.10.1. Rotaciones X-Y	90
3.10.2. Compuerta de entrelazamiento	91
3.10.3. Compuertas compuestas	92
4. El simulador	93
4.1. Parámetros de los sistemas simulados	94
4.2. Compuertas nativas	95
4.2.1. Rx y Ry	95
4.2.2. iSWAP	97
4.3. Compuertas compuestas	98
4.3.1. X	98
4.3.2. Y	98
4.3.3. Rz	98
4.3.4. Z	99
4.3.5. H	99

4.3.6.	CNOT	100
4.3.7.	SWAP	100
4.3.8.	Compuertas condicionales generales	100
4.3.9.	CP	104
5.	Algoritmo de Grover	112
5.1.	El algoritmo	116
5.2.	Variaciones y generalizaciones del algoritmo de Grover	117
5.2.1.	Algoritmo de amplificación de amplitud	117
5.2.2.	Algoritmo de Grover en un paso	120
5.2.3.	Optimización del algoritmo de Grover	121
5.3.	Simulaciones	122
6.	Algoritmo de Shor	127
6.1.	Transformada cuántica de Fourier	127
6.2.	Estimación de fase	129
6.3.	Estimación de orden	132
6.4.	Expansión en fracciones continuas	135
6.5.	Algoritmo de factorización de Shor	136
6.6.	Simulaciones	137
6.6.1.	Factorización del número 15	137
6.6.2.	Factorización del número 8	140
7.	Google PageRank	142
7.1.	El algoritmo de remiendo (parcheo) general	145
7.2.	Interpretación como una caminata aleatoria	146
7.3.	Cuantizando las caminatas aleatorias	147
7.4.	Caminata cuántica de Szegedy	147
7.5.	PageRank cuántico	149
7.6.	Circuitos de las caminatas cuánticas de Szegedy	149
7.7.	Simulaciones	154
7.7.1.	Grafo estrella	154
7.7.2.	Grafo corona	158
7.7.3.	Grafo árbol	162
7.7.4.	Grafo aleatorio	166
8.	Conclusiones	171
A.	Cálculos de Hamiltonianos	171
A.1.	Régimen rotacional del pulso	171
A.2.	Efecto del pulso sobre el qubit	175
A.3.	Régimen dispersivo	177
B.	Códigos del simulador	183
B.1.	Wolfram Mathematica	183

B.2. Python	190
C. Códigos de la simulación del algoritmo de Grover	203
C.1. Wolfram Mathematica	203
C.2. Python	204
D. Códigos de la simulación del algoritmo de Shor	207
D.1. Wolfram Mathematica	207
D.2. Python	210
E. Códigos de la simulación del algoritmo de PageRank	213
E.1. Wolfram Mathematica	213
E.2. Python	216
E.2.1. Grafo estrella	219
E.2.2. Grafo corona	223
E.2.3. Grafo árbol	225
E.2.4. Grafo aleatorio	228

Índice de figuras

1.1. Esfera de Bloch	23
1.2. Compuerta I en la esfera de Bloch	27
1.3. Compuerta X en la esfera de Bloch	28
1.4. Compuerta Z en la esfera de Bloch	28
1.5. Compuerta Y en la esfera de Bloch	29
1.6. Compuerta H en la esfera de Bloch	30
1.7. Compuerta S en la esfera de Bloch	30
1.8. Compuerta T en la esfera de Bloch	31
1.9. Compuerta P en la esfera de Bloch	31
1.10. Compuertas Rx, Ry y Rz en la esfera de Bloch	32
3.1. Diagrama de Feynman de la interacción electrón-fonón-electrón . . .	66
3.2. Construcción geométrica de los posibles electrones candidatos para formar pares de Cooper, siendo $\hbar K$ el momentum del centro de masas. .	67
3.3. Cuantización del flujo magnético	73
3.4. Diagrama de energía de una unión metal-aislante-metal en la que no puede haber efecto túnel	75
3.5. Diagrama de energía de una unión metal-aislante-metal en la que puede haber efecto túnel	76
3.6. Diagrama de energía de una unión superconductor-aislante-metal en la que puede haber efecto Giaver	77
3.7. Curva característica I-V de una unión Josephson	81
4.1. Rotaciones en X e Y de 2π	96
4.2. Rotaciones en X e Y de π	96
4.3. Rotaciones en X e Y de $\frac{\pi}{2}$	96
4.4. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $ 00\rangle$	97
4.5. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $ 01\rangle$	97
4.6. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $\frac{ 00\rangle+ 11\rangle}{\sqrt{2}}$	97
4.7. Compuertas iSWAP y \sqrt{iSWAP} aplicadas a $\frac{ 0\rangle+ 1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{ 0\rangle+ 1\rangle}{\sqrt{2}}$	97
5.1. Circuito del algoritmo de Grover, k_{max} desconocido.	114
5.2. Interpretación geométrica del operador difusión	116
5.3. Circuito del algoritmo de Grover.	116
5.4. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de Grover sin relajación	123

5.5. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de Grover con relajación, $\mathcal{W} = \{0\}$	124
5.6. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de amplificación de amplitud sin relajación, $\mathcal{W} = \{9, 13\}$	125
5.7. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de amplificación de amplitud sin relajación, $\mathcal{W} = \{4, 5, 12, 13\}$	125
5.8. Evolución de las probabilidades en el algoritmo de amplificación de amplitud con relajación	126
6.1. Distribución de probabilidad en la estimación de fase del algoritmo de Shor sin pérdidas	138
6.2. Distribución de probabilidad en la estimación de fase del algoritmo de Shor sin pérdidas	140
7.1. Transformación de un grafo al crear la matriz de Google con $\alpha = \frac{1}{2}$	146
7.2. Operador de permutación	151
7.3. Circuito de Loke para las caminatas cuánticas de Szegedy	151
7.4. Circuito de K_i	152
7.5. Grafo estrella	155
7.6. Circuito de K_1 para el grafo estrella	155
7.7. Circuito de K_2 para el grafo estrella	156
7.8. K_b del grafo estrella	156
7.9. T del grafo estrella	156
7.10. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo estrella	156
7.11. Circuito del PageRank cuántico del grafo estrella	157
7.12. PageRank cuántico instantáneo del grafo estrella sin pérdidas	157
7.13. PageRank cuántico promedio del grafo estrella sin pérdidas	157
7.14. PageRank cuántico instantaneo del grafo estrella con y sin pérdidas	158
7.15. PageRank cuántico promedio del grafo estrella con y sin pérdidas	158
7.16. Grafo corona	159
7.17. Circuito de K_1 para el grafo corona	159
7.18. Circuito de K_2 para el grafo corona	160
7.19. K_b del grafo corona	160
7.20. T del grafo corona	160
7.21. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo corona	160
7.22. Circuito del PageRank cuántico del grafo corona	161
7.23. PageRank cuántico instantáneo del grafo corona sin pérdidas	161
7.24. PageRank cuántico promedio del grafo corona sin pérdidas	161
7.25. PageRank cuántico instantaneo del grafo aleatorio con y sin pérdidas	162
7.26. PageRank cuántico promedio del grafo aleatorio con y sin pérdidas	162
7.27. Grafo árbol	162
7.28. Circuito de K_1 para el grafo árbol	163
7.29. Circuito de K_2 para el grafo árbol	163
7.30. Circuito de K_3 para el grafo árbol	164
7.31. K_b del grafo árbol	164

7.32. T del grafo árbol	164
7.33. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo árbol . .	164
7.34. Circuito del PageRank cuántico del grafo árbol	165
7.35. PageRank cuántico instantáneo del grafo árbol sin pérdidas	165
7.36. PageRank cuántico promedio del grafo árbol sin pérdidas	165
7.37. PageRank cuántico instantaneo del grafo árbol con y sin pérdidas .	166
7.38. PageRank cuántico promedio del grafo árbol con y sin pérdidas . .	166
7.39. Grafo aleatorio	166
7.40. Circuito de K_1 para el grafo aleatorio	167
7.41. Circuito de K_2 para el grafo aleatorio	167
7.42. Circuito de K_3 para el grafo aleatorio	168
7.43. K_b del grafo aleatorio	168
7.44. T del grafo aleatorio	168
7.45. Preparación del estado inicial para la caminata en el grafo aleatorio	168
7.46. Circuito del PageRank cuántico del grafo aleatorio	169
7.47. PageRank cuántico instantáneo del grafo aleatorio sin pérdidas . . .	169
7.48. PageRank cuántico promedio del grafo aleatorio sin pérdidas	169
7.49. PageRank cuántico instantaneo del grafo aleatorio con y sin pérdidas	170
7.50. PageRank cuántico promedio del grafo aleatorio con y sin pérdidas .	170

Índice de cuadros

Capítulo 8

Conclusiones

En el presente trabajo se estudiaron las bases de información cuántica, superconductividad, computación cuántica con transmones y tres algoritmos cuánticos. Se construyó un simulador de transmones acoplados a un mismo resonador y el set de instrucciones del procesador cuántico formado por estos transmones. Con este simulador se ejecutaron los tres algoritmos estudiados, los cuales son: El algoritmo de búsqueda de Grover, el algoritmo de factorización de Shor y el algoritmo de centralidad PageRank. Además, las simulaciones se realizaron para un sistema cerrado y para un sistema abierto markoviano.

Del algoritmo de Grover, se realizaron simulaciones del algoritmo con tres bases de datos distintas de dieciséis elementos y un estado marcado, una de dos estados marcados y una de cuatro estados marcados. Con el algoritmo de Shor se factorizaron los números quince y ocho. Luego, el algoritmo PageRank se aplicó a cuatro grafos, uno estrella, uno corona, uno árbol y uno aleatorio.

Debido a que el presente trabajo persiguió objetivos que en nuestra universidad no se dictan dentro del contenido programático de la carrera de Ingeniería Electrónica, se decidió hacer una presentación detallada de los conceptos y herramienta necesarias para la comprensión de la teoría de información cuántica, la computación cuántica superconductora y los algoritmos simulados. Hasta donde conocemos, no existe ningún otro trabajo que haya simulado estos algoritmos en un sistema abierto markoviano y es el primer trabajo de computación cuántica en un departamento de ingeniería venezolano.

En el presente trabajo, se desarrollaron las siguientes herramientas y se obtuvieron los siguientes resultados novedosos:

1. Una compuerta controlada de fase CP que permita eliminar las fases en las compuertas de negación con dos o más qubits de control, como la de Toffoli.
2. Un conjunto de instrucciones cuánticas basadas en las compuertas nativas de los transmones y un simulador del sistema físico.
3. Un operador de multiplicación por 3 módulo 8 sin qubits de ancilla.
4. La forma explícita del operador de difusión de las caminatas cuánticas de Szegedy para grafos de cuatro nodos, en función de rotaciones en Y controladas.
5. El efecto de la relajación en los algoritmos de Grover, Shor y PageRank.

Appendices

Bibliografía

- [1] Adriano Barenco, Charles H. Bennet, Richard Cleve, David P. DiVincenzo, Norman Margolus, Peter Shor, Tycho Sleator, Jhon A. Smolin, and Harald Weinfurter. Elementary gates for quantum computation. *Physical Review A*, 1995.
- [2] Sttiwuer Díaz-Solórzano. Esquemas de medidas. *QIC*, 2014.
- [3] Rudolf Gross and Achim Marx. Applied superconductivity: Josephson effect and superconducting electronics. *Walther-Meißner-Institut*, 2005.
- [4] Onnes H.K. Further experiments with liquid helium. g. on the electrical resistance of pure metals, etc. vi. on the sudden change in the rate at which the resistance of mercury disappears. *Springer, Dordrecht*, 1911.
- [5] A. P. Drozdov, M. I. Erements, I. A. Troyan, V. Ksenofontov, and S. I. Shylin. Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system. *Nature*, 525:73–76, 2015.
- [6] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Physical Review Journals Archive*, 1957.
- [7] Herbert Fröhlich. Theory of the superconducting state. *Unknown*, 1950.
- [8] M Cyrot. Ginzburg-landau theory for superconductors. *Reports on Progress in Physics*, 36(2):103, 1973.
- [9] Jr. Bascom S. Deaver and William M. Fairbank. Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders. *Physical Review Letters*, 1961.
- [10] B.D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics Letters*, 1(7):251 – 253, 1962.
- [11] P. W. Anderson and J. M. Rowell. Probable observation of the josephson superconducting tunneling effect. *Phys. Rev. Lett.*, 10:230–232, Mar 1963.

-
- [12] Sidney Shapiro. Josephson currents in superconducting tunneling: The effect of microwaves and other observations. *Phys. Rev. Lett.*, 11:80–82, Jul 1963.
 - [13] G. Wendin. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *IOP Science*, 2017.
 - [14] Alexandre Blais, Jay Gambetta, A. Wallraff, D. I. Schuster, S. M. Girvin, M. H. Devoret, , and R. J. Schoelkopf. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics. *Physical Review A*, 2007.
 - [15] Norbert Schuch and Jens Siewert. Natural two-qubit gate for quantum computation using the xy interaction. *Physical Review A*, 2003.
 - [16] T. Loke and J.B. Wang. Efficient quantum circuits for szegedy quantum walks. *Annals of Physics*, 382:64 – 84, 2017.