

Primer avance

Miguel Casanova

Bracket de Poisson y coordenadas canónicas

El bracket de Poisson de dos funciones en coordenadas canónicas es

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Donde p y q cumplen que:

$$\{q_i, q_j\} = 0; \quad \{p_i, p_j\} = 0; \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}$$

Tradicionalmente, p y q representan posición y momentum, respectivamente.

En la mecánica Hamiltoniana, la evolución dinámica de un sistema clásico está descrito por un conjunto de variables canónicas conjugadas $r = (q, p)$ de la siguiente manera:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \frac{dq}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

Donde el Hamiltoniano H es la suma de la energía potencial V y la energía cinética T , $H = T + V$.

Ejemplo: Oscilador armónico masa-resorte

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

$$p = mv = m \frac{dq}{dt}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad m \frac{d^2q}{dt^2} + kq = 0$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q} = -kq = m \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{dp}{dt}; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = \frac{dq}{dt}$$

$$\{q, q\} = \frac{\partial q}{\partial q_i} \frac{\partial q}{\partial p_i} - \frac{\partial q}{\partial p_i} \frac{\partial q}{\partial q_i} = 0$$

$$\{p, p\} = \frac{\partial p}{\partial q_i} \frac{\partial p}{\partial p_i} - \frac{\partial p}{\partial p_i} \frac{\partial p}{\partial q_i} = 0$$

$$\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial q_i} \frac{\partial p}{\partial p_i} - \frac{\partial q}{\partial p_i} \frac{\partial p}{\partial q_i} = 1$$

Paul Dirac introdujo en su tesis doctoral en 1926 el “método de analogía clásica” para la cuantización de sistemas físicos.

Este método consiste en cuantizar las teorías clásicas intentando mantener las estructuras formales de la teoría clásica en la mayor medida posible.

Dirac propuso la siguiente relación: $\{q, p\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{q}, \hat{p}]$

Luego se demostró que esta relación no se para todo sistema físico, sino que es un caso especial de una relación más general. Sin embargo, para los casos a estudiar en esta presentación, sí se cumple.

Cuantización canónica: La receta

El procedimiento a seguir será:

- Construir el Hamiltoniano clásico del sistema en términos de coordenadas canónicas
- Sustituir los observables por operadores cuánticos
- Forzar la relación de conmutación canónica

Oscilador armónico LC: Hamiltoniano clásico

Un ejemplo de variables canónicamente conjugadas son la carga y el flujo magnético. Por esto, podemos cuantizar un oscilador armónico LC con la cuantización canónica.

La energía en un capacitor es $\frac{Q^2}{2C}$

La energía en un inductor es $\frac{\phi^2}{2L}$

Por lo tanto, el Hamiltoniano clásico del sistema es:

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\phi^2}{2L}$$

Oscilador armónico LC: Cuantización canónica

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = \frac{Q}{C} = -L \frac{dI}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}; \quad \frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{\phi}{L} = I = \frac{dQ}{dt}$$

Esto demuestra que ϕ y Q son coordenadas canónicas. Donde ϕ y Q son posición y momentum generalizados, respectivamente. Así que procedemos a sustituirlas por los operadores $\hat{\phi}$ y \hat{q} y escribimos el Hamiltoniano cuántico

$$\hat{H} = \frac{\hat{q}^2}{2C} + \frac{\hat{\phi}^2}{2L}$$

Donde $[\hat{\phi}, \hat{q}] = i\hbar$

Esto, además, significa que la carga en el capacitor y el flujo en el inductor no pueden ser medidos simultáneamente.

Finalmente, la frecuencia de resonancia de este oscilador es $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ y los niveles de energía se encuentran separados por $\hbar\omega$

Efecto Josephson

Se tienen dos placas superconductoras A y B, separadas por un aislante. Las funciones de onda de las placas superconductoras son:

$$\psi_A = \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1}, \psi_B = \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2}$$

En principio, no debería haber conducción entre ambas placas. Sin embargo, ese no es el caso. Por el efecto tunel, una supercorriente (corriente sin disipación) de pares de Cooper (pares de electrones con spines opuestos) pueden pasar de una placa a la otra sin disipación.

$$V_J = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\delta}{dt}$$

$$I_J = I_0 \sin(\delta)$$

Donde $\delta = \phi_2 - \phi_1$ es la diferencia de fase entre las dos placas superconductoras.

Efecto Josephson DC y AC

- Efecto Josephson DC

Si las placas se encuentran sin alimentación, entonces correrá una supercorriente constante a través de ellas.

- Efecto Josephson AC

Si las placas se alimentan con un voltaje DC externo, entonces la diferencia de fase entre ellas variará linealmente con el tiempo y habrá una corriente AC a través de ellas.

Energía e inductancia de Josephson

$$E_J = \int I_0 \sin(\delta) \frac{\hbar}{2e} \frac{d\delta}{dt} dt = \frac{\hbar I_0}{2e} \int \sin(\delta) dt = -\frac{\hbar I_0}{2e} \cos(\delta)$$

$$\frac{dI_J}{dt} = I_0 \cos(\delta) \frac{d\delta}{dt} = I_0 \cos(\delta) \frac{2e}{\hbar} V_J$$

$$L_J = \frac{\hbar}{2e I_0 \cos(\delta)}$$

$$E_C = \frac{(2e)^2}{2C}$$

$$E_L = \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L}$$

Primero, reescribimos el Hamiltoniano del circuito LC en términos de la cantidad de pares de Cooper y de la diferencia de fase en los extremos del inductor, en lugar de la carga y el flujo

$$\hat{H} = \frac{(2e)^2}{2C} \hat{n}^2 + \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L} \frac{\hat{\delta}^2}{2}$$

De aquí $\hat{q} = 2e\hat{n}$ y $\hat{\phi} = \frac{\hbar}{2e} \hat{\delta}$

Ahora introducimos el término de la unión Josephson

$$\hat{H} = \frac{(2e)^2}{2C} (\hat{n} - n_g)^2 + \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L} \frac{(\hat{\delta} - \delta_e)^2}{2} - \frac{\hbar I_0}{2e} \cos(\delta) = E_C (\hat{n} - n_g)^2 + E_L \frac{(\hat{\delta} - \delta_e)^2}{2} - E_{J0} \cos(\hat{\delta})$$

Ecuación de Schrödinger del circuito LCJ

Para describir el sistema en términos de la ecuación de Schrödinger en función de la diferencia de fase ϕ , se introduce $\hat{h} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$

$$E_C \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} - n_g \right)^2 \psi + U(\phi) \psi = E \psi$$

$$U(\phi) = -E_{J0} \cos(\phi) + E_L \frac{(\phi - \phi_e)^2}{2}$$

Arquetipos de qubits superconductores

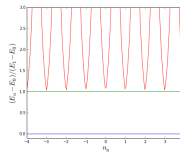
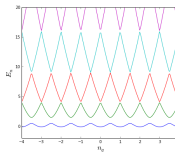
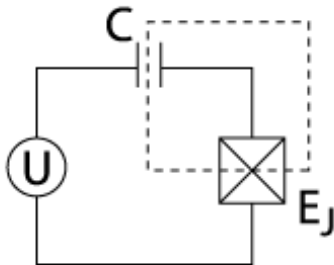
- Qubit de carga: Si E_L tiende a cero, la carga almacenada en la isla superconductora entre el capacitor y la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma de coseno.
- Qubit de flujo: Si E_L es comparable con E_{J0} , el flujo a través del lazo formado por el inductor y la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma cuártica.
- Qubit de fase: Si se polariza la unión Josephson con una fuente de corriente, la fase en ambos extremos de la unión Josephson se puede usar como qubit. El potencial de este tipo de qubit es de forma cúbica.

$$[\hat{\delta}, \hat{n}] = i \implies e^{\pm i\hat{\delta}} |n\rangle = |n \pm 1\rangle$$

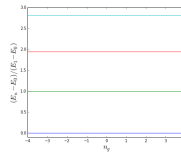
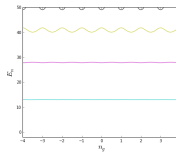
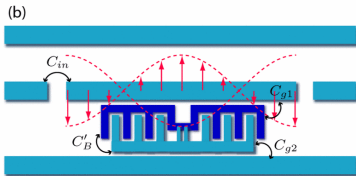
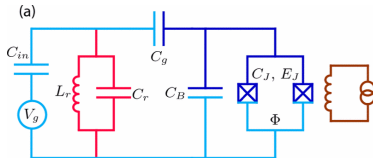
$$\begin{aligned}\hat{H} &= E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_{J0} \cos(\hat{\delta}) = E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_{J0}(e^{i\hat{\delta}} + e^{-i\hat{\delta}}) = \\ &\sum (E_C(N - N_g)^2 |n\rangle\langle n| - \frac{E_{J0}}{2} (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|))\end{aligned}$$

Caja de pares de Cooper

Dimensiones típicas de la isla: 1000nm x 50nm x 20nm



Intercambiamos anarmonicidad por independencia de n_g



$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_q + \hat{H}_{qc} = \hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\hbar\omega_q\sigma_z + \hbar g\sigma_x(a + a^\dagger)$$

De ahora en adelante $\hbar = 1$ y despreciaré los términos constantes, pues sólo contribuyen en fases globales a la evolución del sistema.

Aproximación de onda rotacional

$$\hat{H}_{qc} = \hat{H}_{qc}^{JC} + \hat{H}_{qc}^{AJC} = g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) + g(a^\dagger\sigma_+ + a\sigma_-)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_q + \hat{H}_{qc} = \omega_c a^\dagger a + \frac{1}{2}\omega_q\sigma_z + g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_{qc} = \frac{1}{2} \sum_i \omega_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i})$$

$$\hat{H}_d = \sum_k (a + a^\dagger)(\xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t} + \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t})$$

RWA:

$$\hat{H}_d = \sum_k a \xi_k^* e^{i\omega_d^{(k)} t} + a^\dagger \xi_k e^{-i\omega_d^{(k)} t}$$

Régimen rotacional del pulso

Trabajando con un sólo modo a la vez, se aplica la siguiente transformación $U(t) = \exp[-i\omega_d t(a^\dagger a + \sum_i \sigma_{zi})]$ para entrar en el régimen rotacional del pulso de control.

$$\hat{H} = U^\dagger(\hat{H}_{\text{syst}} + \hat{H}_d)U - iU^\dagger \dot{U}$$

$$\hat{H} = \Delta_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) + (a \xi^* e^{i\omega_d t} + a^\dagger \xi e^{-i\omega_d t})$$

$$\Delta_c = \omega_c - \omega_d \qquad \Delta_{qi} = \omega_{qi} - \omega_d$$

Efecto del pulso sobre el qubit

Luego se aplica el operador de desplazamiento $D(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a]$ sobre el campo a con $\dot{\alpha} = -i\Delta_c \alpha - i\xi e^{-i\omega_d t}$ para eliminar el efecto directo del pulso sobre la cavidad.

$$\hat{H} = D^\dagger(\alpha) \hat{H}_{old} D(\alpha) - iD^\dagger(\alpha) \dot{D}(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \Delta_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \Delta_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) \\ & + \sum_i g_i (\alpha \sigma_{+i} + \alpha^* \sigma_{-i}) - \Delta_c \alpha \alpha^* \end{aligned}$$

El término $-\Delta_c \alpha \alpha^*$ se desprecia, ya que sólo representa una fase global en la evolución del sistema.

Régimen dispersivo

Finalmente, aplicamos la transformación $U = \exp[\sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})]$, donde $\Delta_i = \omega_{qi} - \omega_c$ y realizamos la aproximación de segundo grado sobre los términos $\frac{g_i}{\Delta_i} \ll 1$.

$$\begin{aligned}\hat{H} &= U^\dagger \hat{H}_{old} U \\ \hat{H} &\approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \tilde{\Delta}_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i (\Omega_i \sigma_{+i} + \Omega_i^* \sigma_{-i}) \\ &\quad + \sum_{i \neq j} \frac{g_i g_j}{2 \Delta_i} (\sigma_{-i} \sigma_{+j} + \sigma_{+i} \sigma_{-j})\end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta}_c = (\omega_c + \sum_i \chi_i \sigma_{zi}) - \omega_d \quad \tilde{\Delta}_{qi} = (\omega_{qi} + \chi_i) - \omega_d \quad \chi_i = \frac{g_i^2}{\Delta_i}$$

Tomando $\Omega(t) = \Omega^x(t) \cos(\omega_d t) + \Omega^y \sin(\omega_d t)$, donde ω_d es igual a la frecuencia de resonancia de uno de los qubits logramos rotaciones sobre los ejes X e Y. Las amplitudes de estas rotaciones vienen dadas por $\int_0^{t_0} \Omega^x(t) dt$ y $\int_0^{t_0} \Omega^y(t) dt$, respectivamente, donde t_0 es la duración del pulso.

$$\hat{H} \approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_q \sigma_z + \frac{1}{2} (\Omega^x(t) \sigma_x + \Omega^y(t) \sigma_y)$$

Ejemplo con sólo dos qubits

$$\hat{H} \approx \frac{1}{2}\tilde{\Delta}_{q_1}\sigma_{z_1} + \frac{1}{2}\tilde{\Delta}_{q_2}\sigma_{z_2} + \frac{g_1g_2(\Delta_1 + \Delta_2)}{2\Delta_1\Delta_2}(\sigma_{-1}\sigma_{+2} + \sigma_{+1}\sigma_{-2})$$

Variando la frecuencia de resonancia de los qubit, se puede variar el acoplamiento entre estos.