

# Diseño y simulación de procesadores cuánticos que implementen algoritmos cuánticos de búsqueda

Miguel Casanova

Coordinación de Tecnología e Ingeniería Electrónica  
Universidad Simón Bolívar

15 de enero de 2019

# Estructura de la presentación

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

# Table of Contents

- 1 **Objetivos**
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

# Objetivos

Objetivo General:

Diseñar y simular PC que implementen los AC de Grover, Shor y PageRank Cuántico.

# Objetivos

## Objetivos Específicos:

- 1 Construir la representación circuital cuántica de los AC de Grover, Shor y de Google Cuántico.
- 2 Diseñar arquitecturas superconductoras controlables por microondas basadas en transmones.
- 3 Hallar las respectivas secuencias de pulsos, que son necesarios para generar con transmones la representación circuital cuántica de los tres AC considerados.
- 4 Simular en Mathematica, en forma algebraica, cada una de las arquitecturas de CC consideradas, permitiendo así obtener expresiones lo mas simplificadas posibles de los procesos cuánticos considerados.
- 5 Simular en Python, de forma numérica, el operador evolución de cada una de las compuertas de los CC estudiados, y generalizar dicha simulación a cada una de las arquitecturas superconductoras.

# Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

# Espacios de Hilbert

Un espacio de Hilbert es un espacio lineal real o complejo con un producto interno que también define un espacio normado completo.

- 1 Producto interno
- 2 Normado
- 3 Completo: Todas las sucesiones de Cauchy convergen fuertemente.
  - 1 Sucesiones de Cauchy: Aquellas en las que el ordenamiento no afecta la convergencia.
- 4 Separable: Tiene bases contables.

# Operadores

- 1 Operadores hermíticos  $U = U^\dagger$ 
  - 1 Autovalores reales
  - 2 Diagonal real
  - 3 Diagonalizable
- 2 Operadores unitarios:  $UU^\dagger = \mathbb{1}$ 
  - 1 Determinante de módulo igual a la unidad
  - 2 Preserva normas y trazas
  - 3 Diagonalizable



# Estados cuánticos

- 1 Estados puros:  $|\psi\rangle$ 
  - 1 Vector unitario
- 2 Estados mixtos:  $\rho$ 
  - 1 Matriz hermítica
  - 2 Traza igual a la unidad
  - 3 Autovalores no negativos

# Sistemas multipartitos

Cuando se tiene más de un sistema cuántico, el sistema global se forma con el producto tensorial

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (1)$$

$$|\psi\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2 \rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B \quad (2)$$

La operación inversa es la traza parcial

$$\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB}) \quad (3)$$

Los qubits son la unidad básica de información cuántica.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (5)$$

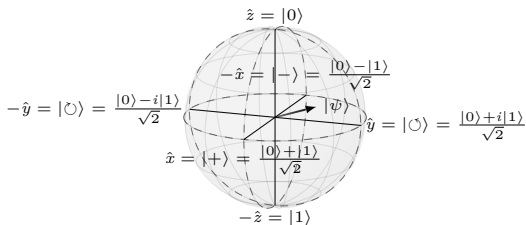


Figura: Esfera de Bloch

# Ecuación de Schrödinger

Esta ecuación describe la evolución de los estados cuánticos puros.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (6)$$

Para estados mixtos se utiliza la ecuación de Liouville-von Neumann.

$$i\hbar \dot{\rho}(t) = [\hat{H}, \rho(t)] \quad (7)$$

# Postulados de la mecánica cuántica

- 1 Los estados de un sistema físico está dado en términos de los kets  $|\psi(t)\rangle$  de un espacio de Hilbert complejo separable.
- 2 Todo observable  $\mathcal{A}$  tiene un operador hermítico  $\hat{A}$  asociado.

# Postulados de la mecánica cuántica

- 3 Si un sistema en el estado  $|\psi\rangle$ , la probabilidad de obtener un valor  $\lambda$  al medir un observable  $\mathcal{A}$  está dada por

$$p(\lambda) = \sum_i^{g_n} |\langle \lambda_i | \psi \rangle|^2 \quad (8)$$

Donde  $g_n$  es el grado de degeneración de  $\hat{A}$  en  $\lambda$ ,  $|\lambda_i\rangle$  son los autoestados asociados a  $\lambda$  y el proyector  $\Pi_\lambda$  es  $\Pi_\lambda = \sum_i^{g_n} |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$ .

# Postulados de la mecánica cuántica

- 4 Si un sistema físico está en el estado  $|\psi\rangle$  o  $\rho$ , el estado resultante luego de una medida ideal del observable  $\mathcal{A}$  está dado por

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{\Pi_\lambda |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\Pi_\lambda|\psi\rangle}} \quad (9)$$

# Postulados de la mecánica cuántica

- 5 En un intervalo de tiempo entre dos medidas consecutivas, los estados puros de un sistema continúan siendo puros, y existen kets  $|\psi(t)\rangle$  tales que la evolución del estado del sistema está dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (10)$$



# Postulados de la mecánica cuántica

- 6 Los operadores  $X_r$  y  $P_a$ , asociados a las coordenadas canónicas  $q_1, q_2, \dots, q_N$  y  $p_1, p_2, \dots, p_N$ , satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[X_r, X_a] = 0, [P_r, P_a] = 0, [X_r, P_a] = i\hbar\delta_{ra}. \quad (11)$$

Si el sistema tiene un observable cuya expresión clásica es  $A(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N; t)$ , la aplicación usual en QM del operador correspondiente se obtiene sustituyendo las variables  $q_r$  y  $p_a$  por los operadores  $X_r$  y  $P_a$ , respectivamente.

# Matrices de Pauli

Estos son los operadores asociados al espín de un fermión.

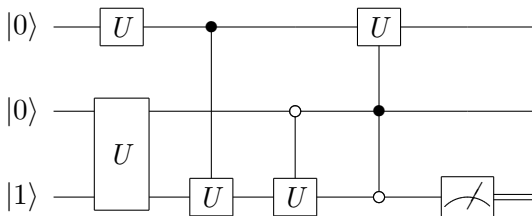
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

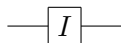
Los exponenciales  $e^{i\sigma_a}$ ,  $a \in \{x, y, z\}$ , forman una base de  $\text{SU}(2)$ .

# Circuitos cuánticos



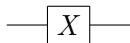
# Compuertas cuánticas

## 1 Compuerta identidad



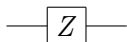
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2 Compuerta X



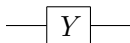
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 3 Compuerta Z



$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

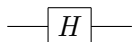
## 4 Compuerta Y



$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ ó } Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

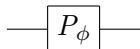
# Compuertas cuánticas

## 1 Compuerta de Hadamard



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

## 2 Compuerta de cambio de fase



$$P_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

## 3 Compuertas de rotación

$$R(\theta, \hat{r}) = e^{i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{r}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) + iz \sin(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2})(ix + y) \\ \sin(\frac{\theta}{2})(ix - y) & \cos(\frac{\theta}{2}) - iz \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

# Compuertas cuánticas

## 1 Rotación en X

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

## 2 Rotación en Y

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

## 3 Rotación en Z

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

# Compuertas cuánticas

$$R_x(\theta) = R_z\left(\frac{\pi}{2}\right)R_y(\theta)R_z\left(\frac{-\pi}{2}\right) \quad (15)$$

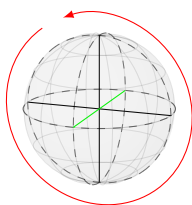
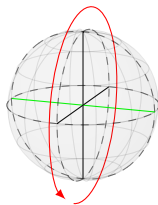
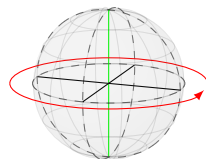
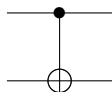
(a)  $R_x$ (b)  $R_y$ (c)  $R_z$ 

Figura: Compuertas  $R_x$ ,  $R_y$  y  $R_z$  en la esfera de Bloch

# Compuertas cuánticas

## 1 Compuerta CNOT



$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2 Compuerta SWAP

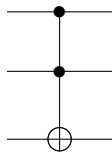


$$SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# Compuertas cuánticas

## 1 Compuerta de Toffoli



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Criterios de Di Vincenzo

Di Vincenzo propuso los siguientes criterios para la construcción de un computador cuántico:

- 1 Un sistema físico escalable con qubits caracterizados.
- 2 La habilidad de inicializar el estado de los qubits en un estado fiducial simples.
- 3 Tiempos de coherencia relevantes largos.
- 4 Un conjunto universal de compuertas cuánticas.
- 5 La capacidad de medir qubits en específico.

# Fidelidad

La fidelidad es una medida de distancia entre estados cuánticos. Dos estados idénticos tendrán una fidelidad igual a 1, mientras que dos estados ortogonales tendrán una fidelidad de 0.

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr}(\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}) \quad (16)$$

# Medidas proyectivas

$$MP_s = \{\hat{\Pi}_m : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}_{\lambda_m} \subseteq \mathcal{H} \text{ tal que } \hat{\Pi}_m \hat{\Pi}_n = \delta_{m,n} \hat{\Pi}_m, \\ \sum_m \hat{\Pi}_m = \mathbb{1}, P_{\lambda_m}(\rho) = (\hat{\Pi}_m)_\rho \text{ y } \rho_{\lambda_m} \xrightarrow{\text{colapso}} \hat{\Pi}_m\}.$$

(17)

# Sistemas cuánticos abiertos

En la mecánica cuántica de sistemas abiertos con evolución markoviana, la ecuación de Schrödinger toma la siguiente forma más general, conocida como Lindbladiano.

$$\dot{\rho}(t) = -i[\hat{H}, \rho(t)] + \sum_k \gamma_k [V_k \rho(t) V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho(t)\}] \quad (18)$$

# Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad**
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

# Teorías BCS

- 1 Los electrones cercanos al nivel de Fermi se acoplan en pares, debido a la interacción con la red cristalina. Esta interacción es una interacción atractiva electrón-fonón-electrón.
- 2 Los pares de Cooper se comportan de una manera distinta a los electrones individuales.
- 3 Existe una banda de energía, la cual inhibe las interacciones de colisión que causan la resistencia eléctrica, siempre que la energía térmica sea menor a la banda prohibida.

# Efecto Josephson

Se tienen dos placas superconductoras A y B, separadas por un aislante. Las funciones de onda de las placas superconductoras son:  $\psi_A = \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1}$ ,  $\psi_B = \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2}$

Por el efecto tunel, una supercorriente (corriente sin disipación) de pares de Cooper (pares de electrones con spines opuestos) pueden pasar de una placa a la otra sin disipación.

$$V_J = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\delta}{dt} \quad (19)$$

$$I_J = I_0 \sin(\delta) \quad (20)$$

Donde  $\delta = \phi_2 - \phi_1$  es la diferencia de fase entre las dos placas superconductoras.



# Efecto Josephson DC y AC

- 1 Efecto Josephson DC Si las placas se encuentran sin alimentación, entonces correrá una supercorriente constante a través de ellas.
- 2 Efecto Josephson AC Si las placas se alimentan con un voltaje DC externo, entonces la diferencia de fase entre ellas variará linealmente con el tiempo y habrá una corriente AC a través de ellas.

## Qubits superconductores

Los qubits superconductores se basan en circuitos osciladores no lineales, hechos a partir de uniones Josephson. En general, estos son circuitos LCJ, es decir, un inductor, un condensador y una unión Josephson en paralelo.

Dependiendo de la variable de este circuito que se utilice como qubit, los qubits superconductores se pueden clasificar en qubits de carga, de flujo y de fase.

Los transmones son un tipo de qubit de carga derivado capacitivamente para hacerlo insensible a las fluctuaciones de carga.

## Qubits de carga

En estos qubits,  $L \rightarrow \infty$  y la variable de interés es la carga en la isla superconductora que se forma entre el condensador y la unión Josephson. Dimensiones típicas de la isla: 1000nm x 50nm x 20nm. A la isla también se le conoce como caja de pares de Cooper. El Hamiltoniano de este sistema toma la forma

$$\hat{H} = E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_{J0} \cos(\hat{\phi}) \quad (21)$$

Donde  $E_{J0} = \frac{\hbar}{2e} I_0$  y  $E_C = \frac{(2e)^2}{2C}$ .

En el caso de los transmones, se tiene que  $\frac{E_{J0}}{E_C} \geq 50$ .

# Caja de pares de Cooper

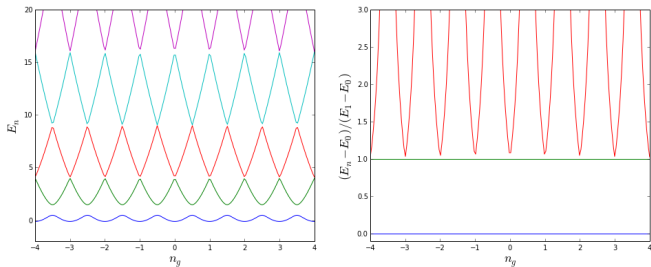


Figura: Niveles de energía de una caja de pares de Cooper

# Transmon

Intercambiamos anarmonicidad por independencia de  $n_g$  haciendo  $\frac{E_{J0}}{E_C}$  más grande.

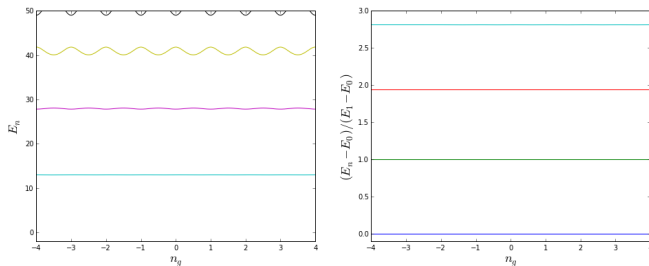


Figura: Niveles de energía de un transmon

## Modelo de Jaynes-Cummings

Para controlar los transmones y para acoplar distintos transmones, estos se conectan a un resonador. El sistema resonador-transmon tiene el mismo comportamiento que el sistema cavidad-átomo. Así que podemos utilizar el modelo de Jaynes-Cummings.

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_q + \hat{H}_{qc} = \omega_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \omega_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i g_i (a \sigma_{+i} + a^\dagger \sigma_{-i}) \quad (22)$$

De ahora en adelante  $\hbar = 1$  y despreciaré los términos constantes, pues sólo contribuyen en fases globales a la evolución del sistema.

# Pulsos de microondas

Para controlar los qubits se aplican pulsos de microondas al resonador. La frecuencia de la portadora del pulso será la frecuencia de resonancia del qubit sobre el que se quiera operar.

$$\hat{H}_d = a\xi^* e^{i\omega_d t} + a^\dagger \xi e^{-i\omega_d t} \quad (23)$$

# Hamiltoniano efectivo

$$U(t) = \exp[-i\omega_d t(a^\dagger a + \sum_i \sigma_{zi})]$$

$$\Delta_c = \omega_c - \omega_d \quad \Delta_{qi} = \omega_{qi} - \omega_d$$

$$D(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a] \quad \dot{\alpha} = -i\Delta_c \alpha - i\xi e^{-i\omega_d t}$$

$$U = \exp[\sum_i \frac{g_i}{\Delta_i} (a^\dagger \sigma_{-i} - a \sigma_{+i})] \quad \Delta_i = \omega_{qi} - \omega_c \quad \frac{g_i}{\Delta_i} \ll 1.$$

$$\begin{aligned} \hat{H} \approx & \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_i \tilde{\Delta}_{qi} \sigma_{zi} + \sum_i (\Omega_i \sigma_{+i} + \Omega_i^* \sigma_{-i}) \\ & + \sum_{i \neq j} \frac{g_i g_j}{2\Delta_i} (\sigma_{-i} \sigma_{+j} + \sigma_{+i} \sigma_{-j}) \end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta}_c = (\omega_c + \sum_i \chi_i \sigma_{zi}) - \omega_d \quad \tilde{\Delta}_{qi} = (\omega_{qi} + \chi_i) - \omega_d \quad \chi_i = \frac{g_i^2}{\Delta_i}$$



# Rotaciones X-Y

Tomando  $\Omega(t) = \Omega^x(t) \cos(\omega_d t) + \Omega^y \sin(\omega_d t)$ , donde  $\omega_d$  es igual a la frecuencia de resonancia de uno de los qubits logramos rotaciones sobre los ejes X e Y. Las amplitudes de estas rotaciones vienen dadas por  $\int_0^{t_0} \Omega^x(t) dt$  y  $\int_0^{t_0} \Omega^y(t) dt$ , respectivamente, donde  $t_0$  es la duración del pulso.

$$\hat{H} \approx \tilde{\Delta}_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_q \sigma_z + \frac{1}{2} (\Omega^x(t) \sigma_x + \Omega^y(t) \sigma_y)$$

# Compuerta de entrelazamiento

Ejemplo con sólo dos qubits

$$\hat{H} \approx \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_{q_1} \sigma_{z_1} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_{q_2} \sigma_{z_2} + \frac{g_1 g_2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{2 \Delta_1 \Delta_2} (\sigma_{-1} \sigma_{+2} + \sigma_{+1} \sigma_{-2})$$

Variando la frecuencia de resonancia de los qubit, se puede variar el acoplamiento entre estos.

# Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador**
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

# Parámetros de los sistemas simulados

## 1 Frecuencias de resonancia:

- 1 Resonador: 10GHz
- 2 Qubit 0: 5GHz
- 3 Qubit 1: 6GHz
- 4 Qubit 2: 7GHz
- 5 Qubit 3: 8GHz
- 6 \*Qubit 4: 11GHz
- 7 \*Qubit 5: 12GHz
- 8 \*Qubit 6: 13GHz
- 9 \*Qubit 7: 14GHz

## 2 Constante de acoplamiento: Todas iguales a 0.1GHz

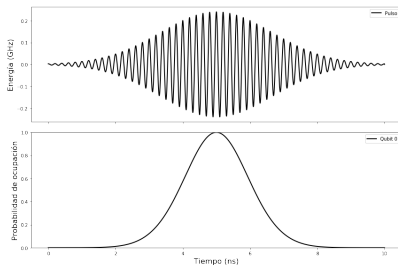
## 3 Tasas de relajación: Todas iguales a 25KHz

## 4 Tiempo de relajación: Todos iguales a $40\mu s$

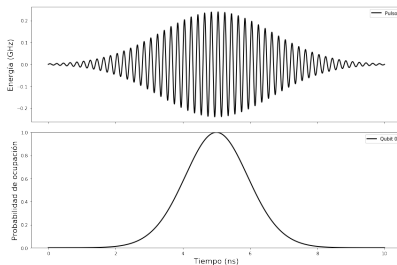
## 5 Frecuencia de resonancia para iSWAP: 9GHz

\*Sólo aplica para el caso del sistema de 8 qubits

# Compuertas nativas



(a) Rx



(b) Ry

Figura: Rotaciones en X e Y de  $2\pi$

# Compuertas nativas

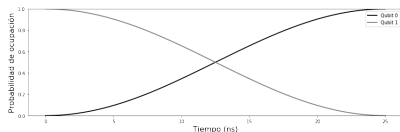
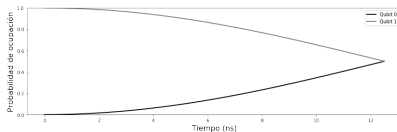
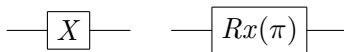
(a)  $i$ SWAP(b)  $\sqrt{i}$ SWAP

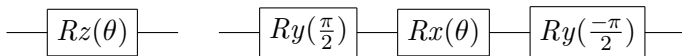
Figura: Compuertas  $i$ SWAP y  $\sqrt{i}$ SWAP aplicadas a  $|01\rangle$

# Compuertas compuestas

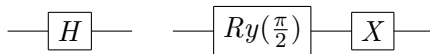
1



2

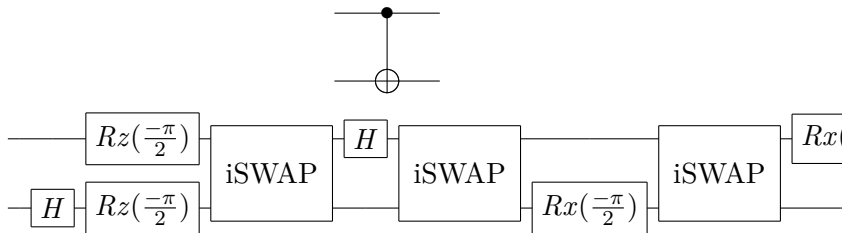


3

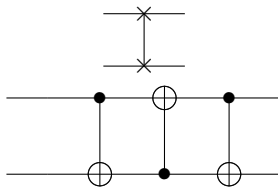


# Compuertas compuestas

1

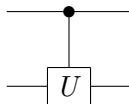


2

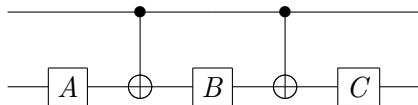




# Compuertas compuestas



De la siguiente manera

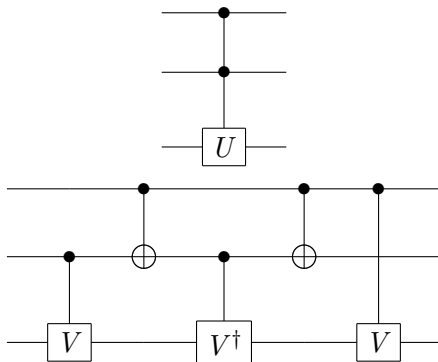


Donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  deben cumplir las siguientes dos condiciones

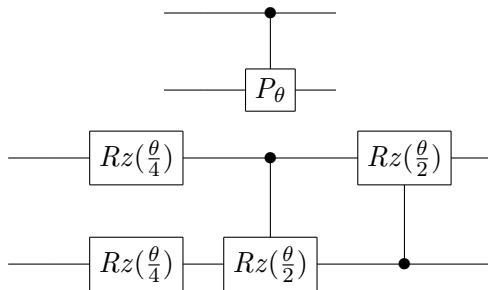
$$CXBXA = U \quad (24)$$

$$CBA = \mathbb{1}. \quad (25)$$

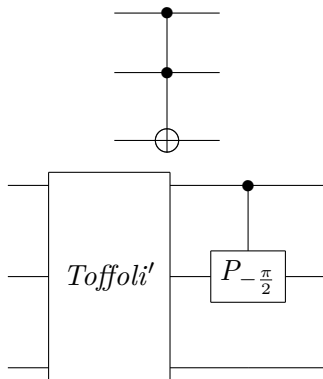
# Compuertas compuestas



# Compuertas compuestas



# Compuertas compuestas



# Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover**
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

# Operadores de reflexión

$$\Pi_{\mathcal{W}} = \sum_k |\omega_k\rangle\langle\omega_k| \quad (26)$$

$$|\psi\rangle = \sin(\theta) |\psi_1\rangle + \cos(\theta) |\psi_0\rangle \quad (27)$$

$$U_{\mathcal{W}} = 2\mathbb{1} - 2\Pi_{\mathcal{W}} \quad (28)$$

$$U_{\psi} = 2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbb{1} \quad (29)$$

# Algoritmo de Grover

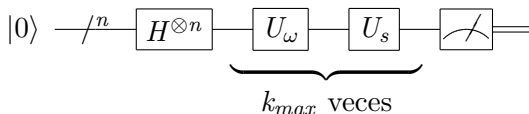


Figura: Circuito del algoritmo de Grover

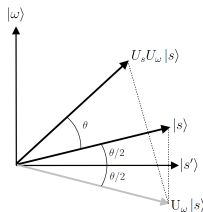


Figura: Interpretación geométrica del operador difusión

# Algoritmo de Grover

Dicho algoritmo se puede describir detalladamente en los siguientes pasos:

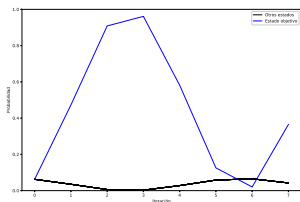
- 1 Preparar el estado fiducial.
- 2 Aplicar la transformada de Walsh-Hadamard.
- 3 Realizar la iteración de Grover  $\lfloor \frac{\pi}{4} \sqrt{N} \rfloor$  veces.
  - 1 Aplicar  $U_\omega$ .
  - 2 Aplicar  $U_s$ .
- 4 Realizar la medida  $\Omega$ .



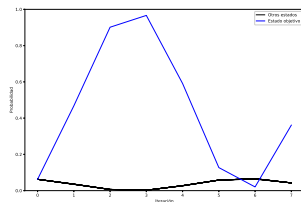
# Variaciones del algoritmo de Grover

- 1 Algoritmo de amplificación de amplitud: Esta es una generalización del algoritmo de Grover, que permite utilizar un estado inicial genérico  $|\psi\rangle$  y bases de datos con más de un estado deseado  $|\omega\rangle$ .
- 2 Algoritmo de Grover en un paso: En lugar de realizar repetidas iteraciones del algoritmo, se realiza una sólo iteración, pero se ejecuta el algoritmo en varios sistemas simultáneamente.
- 3 Optimización del algoritmo de Grover: Se ejecuta el algoritmo en varios sistemas simultáneamente, pero se realizan varias iteraciones.

# Simulaciones del algoritmo de Grover



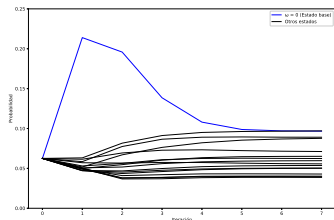
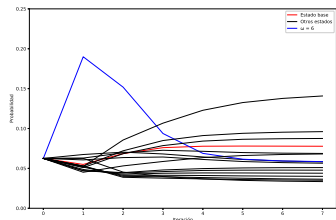
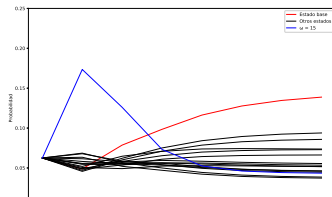
(a) Wolfram Mathematica



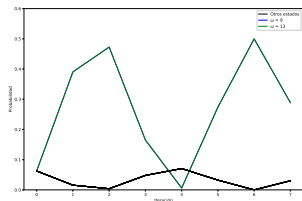
(b) Python

**Figura:** Evolución de las probabilidades en el algoritmo de Grover sin relajación

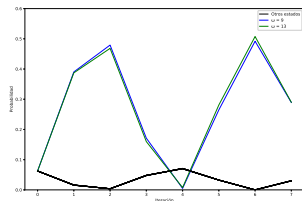
# Simulaciones del algoritmo de Grover

(a)  $\omega = 0$ (b)  $\omega = 6$ 

# Simulaciones del algoritmo de Grover



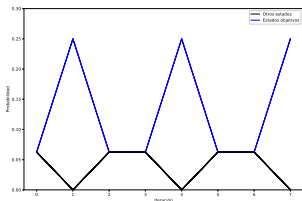
(a) Wolfram Mathematica



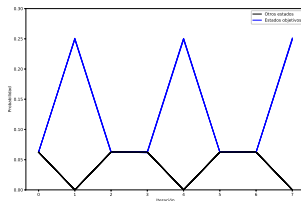
(b) Python

**Figura:** Evolución de las probabilidades en el algoritmo de amplificación de amplitud sin relajación,  
 $\mathcal{W} = \{9, 13\} = \{1001_2, 1101_2\}$

# Simulaciones del algoritmo de Grover



(a) Wolfram Mathematica

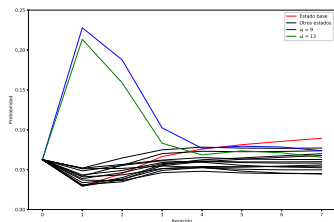
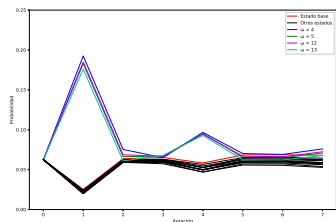


(b) Python

**Figura:** Evolución de las probabilidades en el algoritmo de amplificación de amplitud sin relajación,

$$\mathcal{W} = \{4, 5, 12, 13\} = \{0100_2, 0101_2, 1100_2, 1101_2\}$$

# Simulaciones del algoritmo de Grover

(a)  $\mathcal{W} = \{9, 13\}$ (b)  $\mathcal{W} = \{4, 5, 12, 13\}$ 

**Figura:** Evolución de las probabilidades en el algoritmo de amplificación de amplitud con relajación. En (a) se tiene  $\mathcal{W} = \{9, 13\} = \{1001_2, 1101_2\}$ , en (b) se tiene  $\mathcal{W} = \{4, 5, 12, 13\} = \{0100_2, 0101_2, 1100_2, 1101_2\}$

# Table of Contents

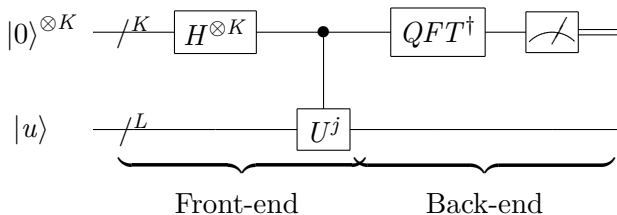
- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor**
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones

# Transformada cuántica de Fourier

$$QFT^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x \sum_k e^{-2\pi i kx/N} |x\rangle\langle k| \quad (30)$$



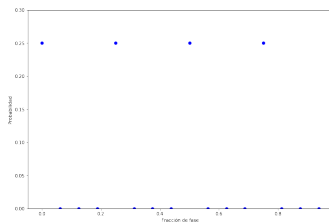
# Estimación de fase y de orden



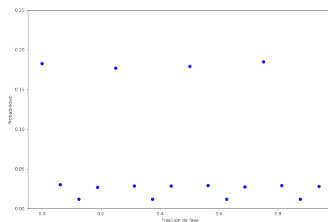
# Algoritmo de Shor

- 1 Si  $N$  es par o un cuadrado perfecto, se conoce una factorización. Fin del algoritmo.
- 2 Elegir un número aleatorio  $a < N$ .
- 3 Si  $GCD(a, N) \neq 1$ , entonces este número es un factor no trivial de  $N$  y se ha hallado una factorización. Fin del algoritmo.
- 4 Si  $a$  es par, volver al paso 3.
- 5 Si no, usar el algoritmo de estimación de orden para hallar el período  $r$  de  $f(x) = a^x \bmod N$ .
- 6 Si  $r$  es impar, volver al paso 3.
- 7 Si  $a^r \not\equiv 1 \pmod N$ , ir al paso 3.
- 8 Si  $a^{r/2} \equiv -1 \pmod N$ , ir al paso 3.
- 9 Finalmente,  $GCD(a^{r/2} + 1, N)$  y  $GCD(a^{r/2} - 1, N)$  son factores de  $N$ . Fin del algoritmo.

# Simulaciones del algoritmo de Shor



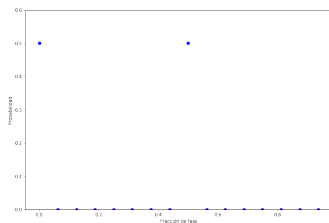
(a) Wolfram Mathematica



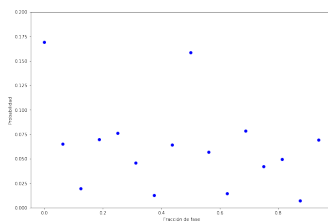
(b) Python

**Figura:** Distribución de probabilidad en la estimación de fase del algoritmo de Shor sin pérdidas

# Simulaciones del algoritmo de Shor



(a) Wolfram Mathematica



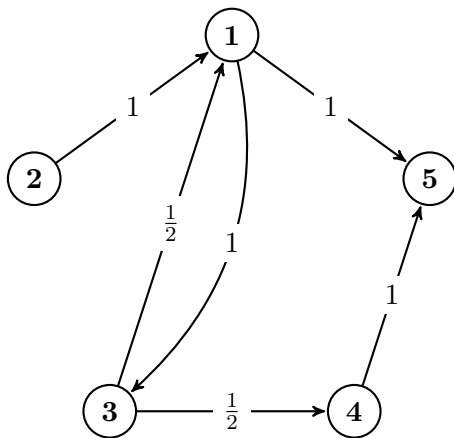
(b) Python

**Figura:** Distribución de probabilidad en la estimación de fase del algoritmo de Shor sin pérdidas

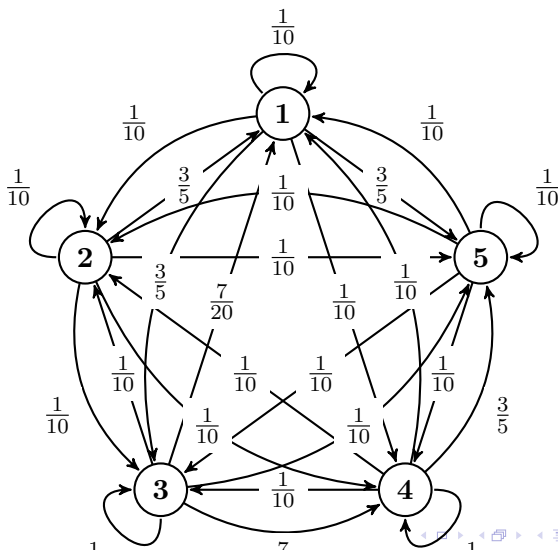
# Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank**
- 8 Conclusiones

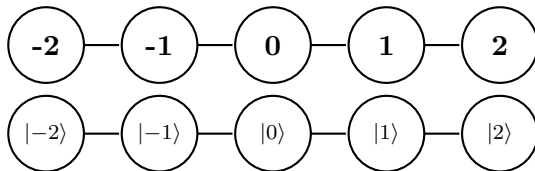
# PageRank



# PageRank

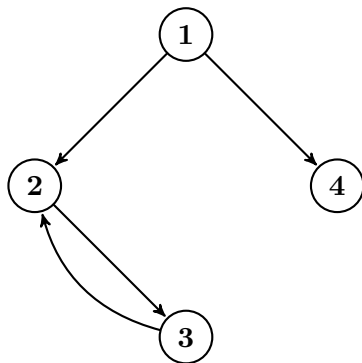


# Caminatas cuánticas

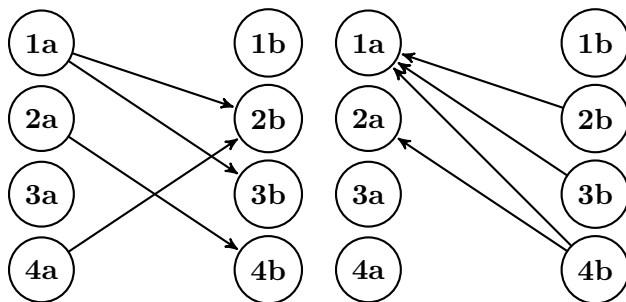




# Caminatas cuánticas de Szegedy



# Caminatas cuánticas de Szegedy



# PageRank cuántico

$$I_q(P_i, m) = \text{Tr}((\mathbb{1} \otimes |i\rangle\langle i|) U^m |\psi_0\rangle\langle\psi_0| U^{\dagger m}). \quad (31)$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i |\psi_i\rangle. \quad (32)$$

$$\langle I_q(P_i) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} I_q(P_i, m) \quad (33)$$

# Circuitos de Loke

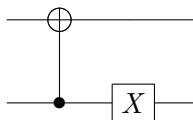
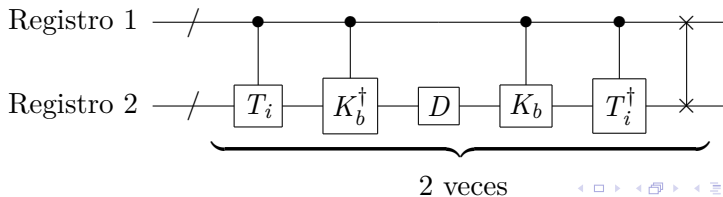


Figura: Operador de permutación  $T$



# Circuitos de Loke

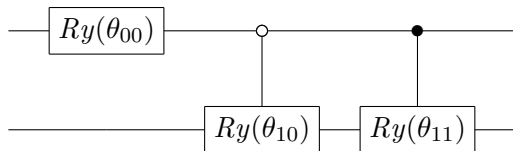


Figura: Circuito de  $K_i$

$$\theta_{00} = 2 \cos^{-1} \left( \sqrt{G_1 + G_2} \right) \quad (34)$$

$$\theta_{10} = 2 \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{G_1}{G_1 + G_2}} \right) \quad (35)$$

$$\theta_{11} = 2 \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3}} \right) \quad (36)$$

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico

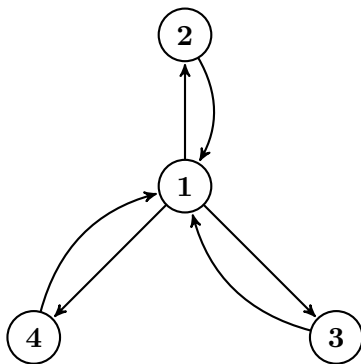


Figura: Grafo estrella

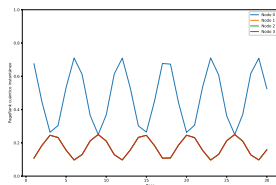
# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

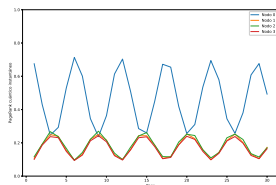
$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{3}{80} & \frac{71}{80} & \frac{71}{80} & \frac{71}{80} \\ \frac{240}{77} & \frac{80}{3} & \frac{80}{3} & \frac{80}{3} \\ \frac{240}{77} & \frac{80}{3} & \frac{80}{3} & \frac{80}{3} \\ \frac{240}{77} & \frac{80}{3} & \frac{80}{3} & \frac{80}{3} \end{pmatrix} \quad (39)$$

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



(a) Wolfram Mathematica

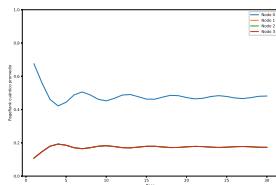


(b) Python

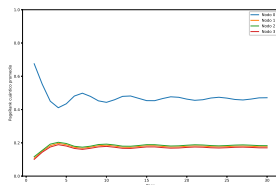
**Figura:** PageRank cuántico instantáneo del grafo estrella sin pérdidas



# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



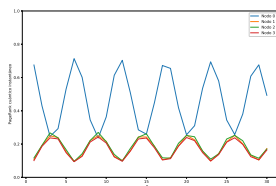
(a) Wolfram Mathematica



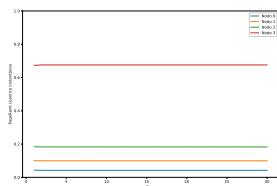
(b) Python

**Figura:** PageRank cuántico promedio del grafo estrella sin pérdidas

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



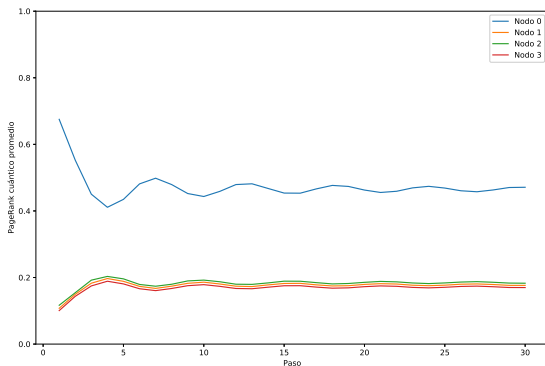
(a) Sin relajación



(b) Con relajación

**Figura:** PageRank cuántico instantáneo del grafo estrella con y sin pérdidas

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



(a) Sin relajación



# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico

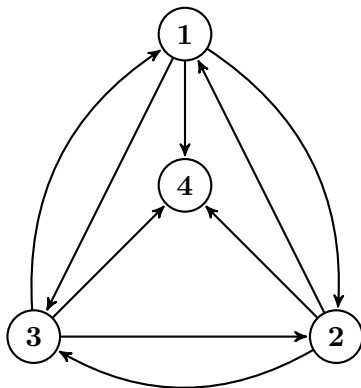


Figura: Grafo corona

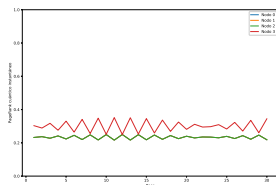
# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

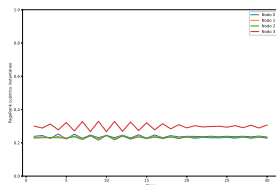
$$E = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{3}{80} & \frac{77}{240} & \frac{77}{240} & \frac{1}{4} \\ \frac{77}{240} & \frac{3}{80} & \frac{77}{240} & \frac{1}{4} \\ \frac{77}{240} & \frac{77}{240} & \frac{3}{80} & \frac{1}{4} \\ \frac{77}{240} & \frac{77}{240} & \frac{77}{240} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (42)$$

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



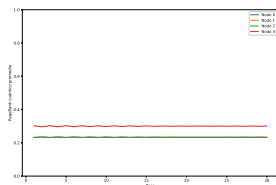
(a) Wolfram Mathematica



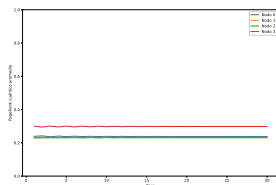
(b) Python

**Figura:** PageRank cuántico instantáneo del grafo corona sin pérdidas

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



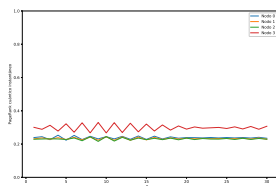
(a) Wolfram Mathematica



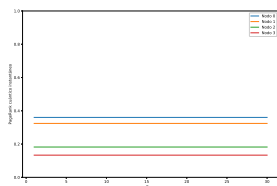
(b) Python

**Figura:** PageRank cuántico promedio del grafo corona sin pérdidas

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



(a) Sin relajación

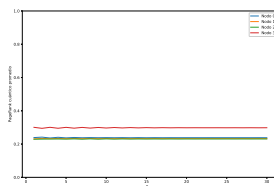


(b) Con relajación

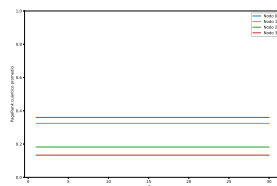
**Figura:** PageRank cuántico instantáneo del grafo aleatorio con y sin pérdidas



# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



(a) Sin relajación



(b) Con relajación

**Figura:** PageRank cuántico promedio del grafo aleatorio con y sin pérdidas

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico

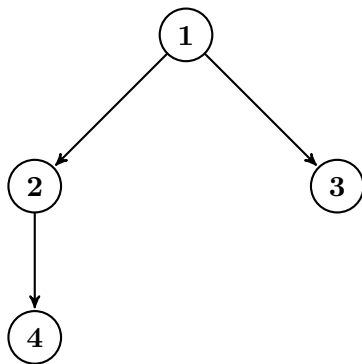


Figura: Grafo árbol

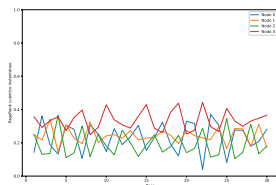
# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

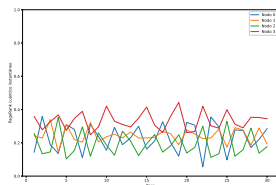
$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{3}{80} & \frac{3}{80} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{37}{80} & \frac{3}{80} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{37}{80} & \frac{3}{80} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{80}{3} & \frac{80}{71} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (45)$$

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



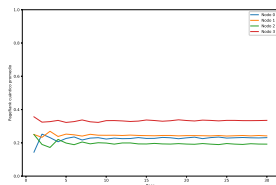
(a) Wolfram Mathematica



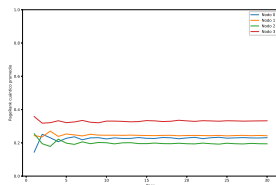
(b) Python

**Figura:** PageRank cuántico instantáneo del grafo árbol sin pérdidas

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



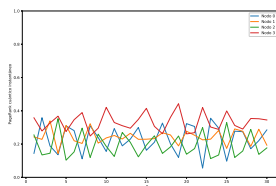
(a) Wolfram Mathematica



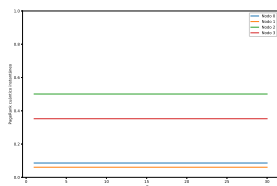
(b) Python

Figura: PageRank cuántico promedio del grafo árbol sin pérdidas

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



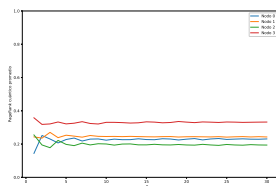
(a) Sin relajación



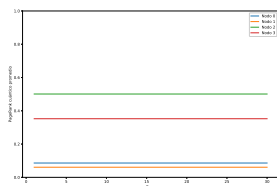
(b) Con relajación

**Figura:** PageRank cuántico instantaneo del grafo árbol con y sin pérdidas

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



(a) Sin relajación



(b) Con relajación

**Figura:** PageRank cuántico promedio del grafo árbol con y sin pérdidas

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico

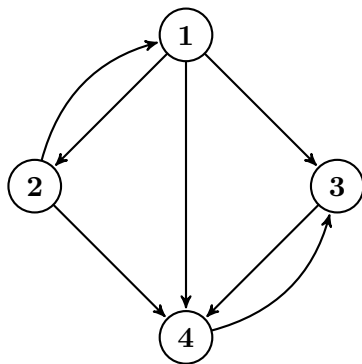


Figura: Grafo aleatorio



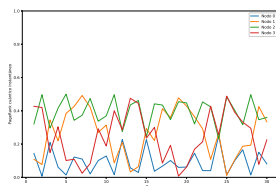
# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

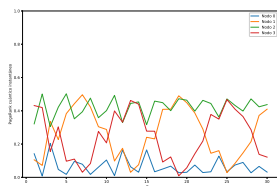
$$E = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{3}{80} & \frac{37}{80} & \frac{3}{80} & \frac{3}{80} \\ \frac{240}{77} & \frac{80}{3} & \frac{80}{3} & \frac{80}{71} \\ \frac{240}{77} & \frac{80}{3} & \frac{80}{3} & \frac{80}{71} \\ \frac{240}{77} & \frac{37}{80} & \frac{80}{71} & \frac{80}{3} \end{pmatrix} \quad (48)$$

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



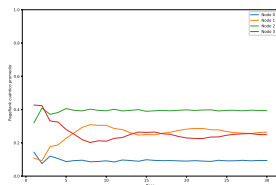
(a) Wolfram Mathematica



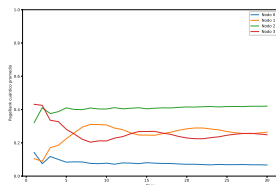
(b) Python

**Figura:** PageRank cuántico instantáneo del grafo aleatorio sin pérdidas

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



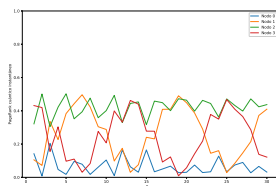
(a) Wolfram Mathematica



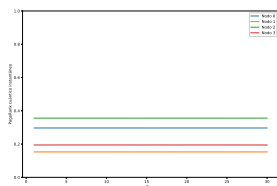
(b) Python

**Figura:** PageRank cuántico promedio del grafo aleatorio sin pérdidas

# Simulaciones del algoritmo de PageRank cuántico



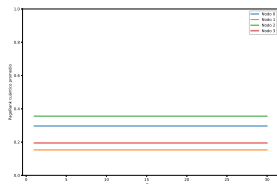
(a) Sin relajación



(b) Con relajación

**Figura:** PageRank cuántico instantaneo del grafo aleatorio con y sin pérdidas

## PageRank



(b) Con relajación

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

# Table of Contents

- 1 Objetivos
- 2 Información cuántica
- 3 Superconductividad
- 4 Simulador
- 5 Algoritmo de Grover
- 6 Algoritmo de Shor
- 7 PageRank
- 8 Conclusiones**

# Conclusiones

En el presente trabajo, se desarrollaron las siguientes herramientas y se obtuvieron los siguientes resultados novedosos:

- 1 Una compuerta controlada de fase CP que permita eliminar las fases en las compuertas de negación con dos o más qubits de control, como la de Toffoli.
- 2 Un conjunto de instrucciones cuánticas basadas en las compuertas nativas de los transmones y un simulador del sistema físico.
- 3 Un operador de multiplicación por 3 módulo 8 sin qubits de ancilla.

# Conclusiones

- 1 La forma explícita del operador de difusión de las caminatas cuánticas de Szegedy para grafos de cuatro nodos, en función de rotaciones en  $Y$  controladas.
- 2 El efecto de la relajación en los algoritmos de Grover, Shor y PageRank.

Los resultados de las simulaciones del algoritmo de Grover y PageRank nos indican que para sistemas con tiempos de relajación del orden de  $O(10^4 ns)$ , los protocolos de corrección de errores son una necesidad. Este es un resultado significativo, pues el record actual de tiempo de vida de un qubit superconductor es inferior a 0.1ms, está en el mismo orden de magnitud que el del sistema simulado.