ESTRUCTURES DE DADES I ALGORISMES
COL·LECCIÓ D'EXÀMENS

Albert Atserias

Amalia Duch

Enric Rodríguez Carbonell

(Editors)

21 de juliol de 2017

Departament de Ciències de la Computació
Universitat Politècnica de Catalunya

Índex

1 Exàmens Parcials **1**

2 Exàmens d'Ordinador **61**

3 Exàmens Finals **67**

4 Solucions d'Exàmens Parcials **139**

5 Solucions d'Exàmens d'Ordinador **181**

6 Solucions d'Exàmens Finals **223**

1

Exàmens Parcials

Examen Parcial EDA - torn 1 **Duració: 2 hores** **18/10/2010**

Problema 1 **(1 punt)**

- Doneu la definició de $O(f)$:

- El teorema mestre de resolució de recurrències divisores afirma que si tenim una recurrència de la forma $T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^k)$ amb $b > 1$ i $k \geq 0$, llavors, fent $\alpha = \log_b a$,

$$T(n) = \begin{cases} \qquad & \text{si } \alpha < k, \\ \qquad & \text{si } \alpha = k, \\ \qquad & \text{si } \alpha > k. \end{cases}$$

Problema 2 **(2 punts)**

Ompliu els blancs de la forma més precisa possible.

- Quicksort ordena n elements en temps ______ en el cas pitjor.
- Per multiplicar dues matrius grans eficientment podem fer servir l'algorisme de ______ .
- $2 + \cos(n) = \Theta(\quad)$.
- $2\sqrt{n} + 1 + n + n^2 = \Theta(\quad)$.
- $\log n + \log\log(n^2) = \Theta(\quad)$.
- $\frac{n^2-6n}{2} + 5n = \Theta(\quad)$.
- $n^2 - 3n - 18 = \quad (n)$.
- Si

$$T(n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 1, \\ 3T(n/2) + n^2 - 2n + 1 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

aleshores, $T(n) = \Theta(\quad)$.

- Si

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 2T(n-1) + n^2 - 2n + 1 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

aleshores, $T(n) = \Theta(\quad)$.

Problema 3 **(1.5 punts)**

Sigui $c \in \mathbb{R}$ i sigui h una funció de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Recordeu que

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = c \iff \forall\epsilon > 0 : \exists m > 0 : \forall n \geq m : |h(n) - c| \leq \epsilon.$$

Sigui $c \in \mathbb{R}$ i siguin f i g dues funcions de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \implies f \in O(g).$$

Problema 4 **(1 punt)**

Suposeu que $primer(n)$ és una crida a una funció amb temps $O(\sqrt{n})$.

Considereu un procediment amb cos principal:

if ($primer(n)$) A;
else B;

Doneu fites senzilles i ajustades amb notació O per al temps d'aquest procediment, en funció de n, suposant que:

1. A triga $O(n)$ i B triga $O(1)$.
2. A i B, ambdòs, triguen $O(1)$.

Problema 5 **(1 punt)**

```
int misteri (int n) {
    if (n == 1) return 1;
    return misteri (n−1) + 2*n − 1;
}
```

- Digueu què calcula la funció *misteri* .
- Doneu el seu cost en funció de n.

Problema 6 **(2 punts)**

Dissenyeu un algorisme de temps $O(n \log m)$ que trobi la unió $A \cup B$ de un conjunt A de n elements amb un conjunt B de m elements, amb $m \leq n$. Els conjunts A i B son de nombres reals i estàn representats per vectors no necessàriament ordenats i sense elements repetits. La sortida és un vector, no necessàriament ordenat, sense elements repetits que representa la unió.

Quins canvis requereix el vostre algorisme si es demana la intersecció en comptes de la unió?

Problema 7 **(1.5 punts)**

```
void misteri_2 (vector<int>& T, int e,  int  m1, int  m2, int  d)  {
     vector<int> B(d−e+1);
     int  i  = e ,  j  = m1+1, k = m2+1, l  =  0;
     while (i  ≤ m1 and j ≤ m2 and k ≤ d) {
          if  (T[i]  ≤ T[j]  and T[i]  ≤ T[k])  B[l++] = T[i++];
          else  if  (T[j]  ≤ T[k])  B[l++] = T[j++];
          else  B[l++] = T[k++];
     }
     while (i  ≤ m1 and j≤m2) {
          if  (T[i]  ≤ T[j])  B[l++] = T[i++];
          else  B[l++] = T[j++];
     }
     while (i  ≤ m1 and k ≤ d) {
           if  (T[i]  ≤ T[k])  B[l++] = T[i++];
           else  B[l++] = T[k++];
     }
     while (j  ≤ m2 and k≤d) {
           if  (T[j]  ≤ T[k])  B[l++] = T[j++];
           else  B[l++] = T[k++];
     }
     while (i≤m1) B[l++] = T[i++]; while (j≤m2) B[l++] = T[j++];
     while (k≤d) B[l++] = T[k++];
     for  (l=0;  l≤ d−e; ++l) T[e+l]  = B[l ];
}

void misteri_1 (vector<int>& T, int e,  int  d)  {
     if  (e+1 == d)  {
         if  (T[e]  > T[d])  swap(T[e],T[d ]);
     }
     if  (e+1< d) {
          int  m1 = e  +  (d−e+1)/3;
          int  m2 = e  +  2∗(d−e+1)/3;
          misteri_1 (T,e ,m1);  misteri_1 (T,m1+1,m2); misteri_1 (T,m2+1,d);
          misteri_2 (T,e ,m1,m2,d);
}      }

void misteri (vector<int>& T) {
      misteri_1 (T ,0,T. size ()−1);
}
```

De quin algorisme clàssic és variant aquest algorisme? Quin és el seu cost?

Examen Parcial EDA - torn 2 **Duració: 2 hores** **18/10/2010**

Problema 1 **(1 punt)**

- Doneu la definició de $\Omega(f)$:

$\boxed{}$

- El teoreme mestre de resolució de recurrències substractores afirma que si tenim una recurrència de la forma $T(n) = aT(n-c) + \Theta(n^k)$ amb $c > 0$ i $k \geq 0$, llavors,

$$T(n) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si } a < 1, \\ \boxed{} & \text{si } a = 1, \\ \boxed{} & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

Problema 2 **(2 punts)**

Ompliu els blancs de la forma més precisa possible.

- Per multiplicar dos naturals molts llargs eficientment podem fer servir l'algorisme de $\boxed{}$.

- Per ordenar n elements en temps $\Theta(n \log n)$ en el cas pitjor podem servir l'algorisme de $\boxed{}$.

- Multipliqueu $\log n + 6 + O(1/n)$ per $n + O(\sqrt{n})$. El resultat simplificat tan com possible és $O(\boxed{})$.

- $\sin(n) + 10 + n = \Theta(\boxed{})$.

- $\frac{1}{3}n^2 + 3n \log n + 5n^8 = \Theta(\boxed{})$.

- $n\sqrt{n} + n^2 = \Theta(\boxed{})$.

- $3n \log n = \boxed{}(n^2)$.

- Si

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 3T(n/2) + n - 2 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

aleshores, $T(n) = \Theta(\boxed{})$.

- Si

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 4T(n-1) + n & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

aleshores, $T(n) = \Theta(\boxed{})$.

Problema 3 **(1.5 punts)**

Sigui $c \in \mathbb{R}$ i sigui h una funció de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Recordeu que

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = c > 0 \iff \forall\epsilon > 0 : \exists m > 0 : \forall n \geq m : |h(n) - c| \leq \epsilon.$$

Sigui $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > 0$ i siguin f i g dues funcions de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \implies f \in \Omega(g).$$

Problema 4 **(1 punt)**

```
int misteri (int m, int n) {
    int result = 0;
    while (m > 0) {
        if (m % 2 ≠ 0) result += n;
        m /= 2; n *= 2;
    }
    return result ;
}
```

- Digueu què calcula la funció *misteri* .

- Doneu el seu cost en funció de m.

Problema 5 **(1 punt)**

Considereu un procediment amb cos principal:

```
int k = f(n);
int s = 0;
for (int i = 1; i ≤ k; ++i) s += i;
```

amb $f(n)$ una crida a la funció f.

Doneu fites senzilles i ajustades amb notació O per al temps d'aquest procediment, en funció de n, suposant que:

1. El temps de $f(n)$ és $O(n)$ i el valor de $f(n)$ és $n!$.

2. El temps de $f(n)$ és $O(n)$ i el valor de $f(n)$ és n.

3. El temps de $f(n)$ és $O(n^2)$ i el valor de $f(n)$ és $n!$.

4. El temps de $f(n)$ és $O(1)$ i el valor de $f(n)$ és 0.

Problema 6 **(2.5 punts)**

Donada una seqüència A de n enters representada per un vector no necessàriament ordenat, es vol un algorisme de temps $O(n \log n)$ per determinar si A conté més de $n/2$ elements iguals.

1. Ordenant el vector amb un algorisme d'ordenació de temps $O(n \log n)$ és immediat resoldre aquest problema. Digueu com.

2. Suposeu que els elements només es poden comparar per igualtat ($=$, $\neq$) però no es poden comparar per ordre ($<, \leq, >, \geq$). Proposeu un algorisme de Dividir i Vèncer de temps $O(n \log n)$ que resolgui el problema.

Problema 7 **(1 punt)**

```
int misteri_2 (vector<int>& T, int e, int d) {
    int x = T[d];
    int i = e−1;
    for (int j = e; j ≤ d; ++j) {
      if (T[j] ≤ x) swap(T[++i],T[j]);
    }
    if (i < d) return i;
    return i−1;
    }
}

void misteri_1 (vector<int>& T, int e, int d) {
    if (e<d) {
       int q = misteri_2 (T,e,d);
       misteri_1 (T,e,q);
       misteri_1 (T,q+1,d);
    }
}

void misteri (vector<int>& T) {
    misteri_1 (T,0,T.size()−1);
}
```

De quin algorisme clàssic es tracta? Quin és el seu cost quan tots els elements són iguals?

Examen Parcial EDA **Duració: 2 hores** **21/03/2011**

Problema 1 **(5 punts)**

Ompliu els blancs de la forma més precisa possible.

- Insertion sort ordena n elements en temps $\boxed{\qquad\qquad}$ en el cas millor.
- Trobar la mediana de n elements té una complexitat en temps $\Omega(\boxed{\quad})$.
- Com de ràpid es poden multiplicar una matriu $kn \times n$ per una $n \times kn$ fent servir l'algorisme de Strassen? $\boxed{\qquad\quad}$.
- Quantes línies, en funció de n i notació Θ, imprimeix el següent programa? Escriviu una recurrència i resoleu-la.

```
//pre: n ≥ 1
void f(int n) {
    if (n > 1) {
        cout << "segueix" << endl;
        f(n/2);
        f(n/2);
    }
}
```

- Sigui

$$T(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n < 3, \\ 9T(n/3) + n^2 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Aleshores, $T(n) = \Theta(\boxed{\qquad})$.

- Sigui

$$T(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 1, \\ 3T(n-1) + n^3 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Aleshores, $T(n) = \Theta(\boxed{\qquad})$.

- Multipliqueu 101×101 (en binari) fent servir l'algorisme de Karatsuba. Mostreu els passos que heu seguit.
- Les taules següents representen etapes de l'execució dels algorismes d'ordenació per fusió, ràpida, per inserció i per selecció (mergesort, quicksort, insertion sort i selection sort) aplicats a la taula: | 10 | 2 | 5 | 3 | 7 | 13 | 1 | 6 | Escriviu al costat de cada taula a quin algorisme dels anteriors correspon (suposeu que hi ha una taula de cada algorisme).

2	3	5	10	1	6	7	13	
2	3	5	10	7	13	1	6	
1	2	5	3	7	6	13	10	
1	2	3	5	6	13	10	7	

- Indiqueu per a cada parell de funcions (A, B) a la taula següent si A és O, Ω o Θ de B. Suposeu que $k \geq 1$, $\epsilon > 0$ i $c > 1$ són constants. La resposta ha de ser "sí" o "no" a cada casella buida.

A	B	O	Ω	Θ
$\log^k(n)$	n^ϵ			
$\log n$	$\log\log(n^2)$			
n^k	c^n			
2^{n+1}	2^n			
2^{2n}	2^n			

Problema 2 **(2.5 punts)**

```
int misteri_2 (vector<int>& T, int e, int d) {
    int x = T[d];
    int i = e−1;
    for (int j = e; j ≤ d; ++j) {
      if (T[j] ≤ x) swap(T[++i],T[j]);
    }
    if (i < d) return i;
    return i−1;
}

int misteri_1 (vector<int>& T, int e, int d, int k) {
        if (e == d) return T[e];
        int q = misteri_2 (T,e,d);
        if (q − e + 1 ≥ k) return misteri_1 (T, e, q, k);
        return misteri_1 (T, q + 1, d, k − q + e − 1);
}

// pre: 1 ≤ k ≤ n = T.size()
int misteri (vector<int>& T, int k) {
    return misteri_1 (T,0,T.size()−1,k);
}

int main() {
  int k, x;
  cin >> k;
  vector<int> v;
  while (cin >> x) v.push_back(x);
  cout << misteri(v,k) << endl;
}
```

- Digueu què calcula el programa anterior.
- Doneu una recurrència que descrigui el seu cost en temps en funció de n en el cas pitjor (justifiqueu) i resoleu-la.
- Doneu el seu cost en temps en funció de n en el cas millor (justifiqueu).
- Digueu a quin algorisme clàssic us recorda l'algorisme anterior i perquè.

Problema 3 **(2.5 punts)**

Escriviu un algorisme que, donat un natural $N \geq 0$, calculi $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ (la part entera per defecte de l'arrel quadrada de N) en temps $\Theta(\log N)$ en el cas pitjor. Justifiqueu-ne la complexitat.

Ajuda: penseu en la cerca dicotòmica.

Examen Parcial EDA **Duració: 2 hores** **20/10/2011**

Problema 1 **(4,5 punts)**

- (0,5 punts) Calculeu $101 + 102 + \cdots + 999 + 1000$.
- (0,5 punts) Expliqueu per quina raó l'afirmació "El temps d'execució de l'algorisme A amb entrada n és com a mínim $O(n^2)$" no significa res.
- (1 punt) Ordeneu les funcions següents segons el seu ordre de creixement asimptòtic: $5\log(n+100)^{10}, 2^{2n}, 0.001n^4 + 3n^3 + 1, (\ln(n))^2, \sqrt{n}, 3^n$.
- (1,5 punts) Considereu les tres alternatives següents per resoldre un mateix problema:
  - L'algorisme A resol una instància del problema dividint-la en cinc instàncies de la meitat de la talla, resolent recursivament cada instància, i combinant les solucions en temps lineal.
  - L'algorisme B resol un instància de talla n resolent recursivament dues instàncies de talla $n-1$ i combinant les solucions en temps constant.
  - L'algorisme C resol una instància de talla n dividint-la en nou instàncies de talla $n/3$, resolent recursivament cada instància, i combinant les solucions en temps $\Theta(n^2)$.

  Analitzeu el cost de cadascun dels tres algorismes. Quin és el més eficient?
- (1 punt) Sigui x un natural representat en una taula de n bits. Doneu, en funció de n, el cost de calcular $x+1$ en els casos pitjor i millor.

Problema 2 **(3.5 punts)**

- (1 punt) Analitzeu el cost temporal de *fusio2* en funció de les mides de a i b:

```
vector<int> fusio2(const vector<int>& a, const vector<int>& b) {
  // Pre: a i b estan ordenats de forma no-decreixent
  int na = a.size();
  int nb = b.size();
  vector<int> c(na + nb);
  int ia = 0;
  int ib = 0;
  int j  = 0;
  while (ia < na and ib < nb) {
    if      (a[ia] ≤ b[ib]) { c[j] = a[ia]; ++ia; }
    else                    { c[j] = b[ib]; ++ib; }
    ++j;
  }
  while (ia < na) { c[j] = a[ia]; ++ia; ++j; }
  while (ib < nb) { c[j] = b[ib]; ++ib; ++j; }
  return c;
}
```

- (1 punt) Suposem que tenim k vectors ordenats (de manera no-decreixent), cadascun amb n elements, guardats en un *vector* < *vector* <**int**>> de mida k. Volem calcular el *vector* <**int**> de mida kn resultant de fer la fusió de tots ells.

  Un possible algorisme consisteix en fusionar usant *fusio2* el primer i el segon vectors, després fusionar el resultat amb el tercer vector, després amb el quart, etc. Quin és el cost en temps d'aquest algorisme, en funció de k i n?

- (1,5 punts) Implementeu en C++ una funció

  vector<**int**> *fusiok*(**const vector**< **vector**<**int**> >& *t*)

  que resolgui més eficientment el problema. Justifiqueu el seu cost temporal.

Problema 3 **(2 punts)**

Els nombres de Fibonacci satisfan la recurrència $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ per a $n \geq 0$, amb $f_0 = 0$ i $f_1 = 1$. Demostreu que, per a $n \geq 1$, se satisfà la identitat següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

i aprofiteu-la per donar un algorisme de cost $\Theta(\log n)$ que, donat un natural n, calculi f_n. No es valorarà cap algorisme que no tingui cost $\Theta(\log n)$. No cal escriure codi però cal incloure l'anàlisi de l'algorisme que proposeu.

(1 punt) Demostració:

(1 punt) Descripció i anàlisi de l'algorisme:

Examen Parcial EDA **Duració: 2 hores** **19/3/2012**

Problema 1 **(3,5 punts)**

- (1) Per a les funcions f i g següents, digueu si és cert o fals que $f = O(g)$, $f = \Omega(g)$ i $f = \Theta(g)$.

$f(n)$	$g(n)$	$f = O(g)$	$f = \Omega(g)$	$f = \Theta(g)$
$\sqrt{n}$	$n^{2/3}$			
$\log(2n)$	$\log(3n)$			
$n^{0.1}$	$(\log n)^{10}$			
2^n	2^{n+1}			
$100n + \log n$	$n + (\log n)^2$			

- (0,5) Donat un vector de n elements possiblement repetits, digueu com trobar, en temps $O(n \log n)$, tots els elements repetits.

- (1,5) Volem convertir a binari 10^n (un u seguit de n zeros), on n és una potència estrictament positiva de 2.

  Completeu l'algorisme següent:

```
string pwr2bin(int n) {
    if (n == 1) return "1010"; // 10 en binari (8 + 2)
    string z = [          ]
    return Karatsuba(z,z);
}
```

  Doneu una recurrència que descrigui el cost temporal de l'algorisme anterior i resoleu-la.

- (0,5) El professor X us diu a classe que és asimptòticament més lent elevar al quadrat un enter de n bits que multiplicar dos enters de n bits. L'heu de creure? Justifiqueu la vostra resposta.

Problema 2 **(1,5 punts)**

Considereu el codi següent:

```
void f(vector<int>& v, int i, int j) {
        if ((j-i+1)>1) {
                int k = (i+j)/2;
                f(v, i, k);
                if (k%2 == 0) f(v, k+1, j);
                g(v, i, k, j);
        }
}
int main() {
        int n;
```

```
        cin >> n;
        vector<int> a(n);
        for (int i=0; i<n ; ++i) cin >> a[i];
        f(a, 0, n−1);
}
```

La funció g no crida a la funció f.

Digueu:

- Com a màxim, quantes crides recursives a la funció f poden haver a la pila de recursió en un moment donat?

  a) 2 b) $\Theta(n)$ c) $\Theta(\log n)$ d) $\Theta(1)$

- En total, en el cas pitjor, quantes crides es fan a la funció f? Escolliu l'opció més precisa.

  a) $\Theta(n\sqrt{n})$ b) $O(n)$ c) $O(n^2)$ d) $\Omega(\log n)$

Problema 3 **(1,5 punts)**

Considereu el codi següent:

```
// e i d delimiten un interval tancat (potser buit) dins del vector V

void misteri (int e, int d, vector<int>& V) {
  if (e < d) {
    barreja (e, d, V); // barreja a l'atzar els elements de V[e..d],
                       // amb cost proporcional a d − e + 1
    misteri (e, d − 1, V);
    int i = e;
    while (V[i] < V[d]) ++i;
    intercanvia (V[i], V[d]); // cost constant
    misteri (i + 1, d, V);
  }
}
```

Digueu, justificadament, què fa l'acció `misteri`, i quin cost té en el cas pitjor i millor.

Problema 4 **(1 punt)**

Siguin $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 1}$ dues funcions tals que $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$, on $\mathbb{R}^{\geq 1}$ representa el conjunt dels nombres reals més grans o iguals que 1.

- És cert que $f \in O(g)$ implica $\log f \in O(\log g)$? Justifiqueu la resposta o doneu un contraexemple.
- És cert que $f \in O(g)$ implica $2^f \in O(2^g)$? Justifiqueu la resposta o doneu un contraexemple.

Problema 5 **(2,5 punts)**

Siguin $A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ i $B = \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle$ dues seqüències amb $n \geq m$. Es diu que B és una subseqüència de A , i s'escriu $B \subseteq A$, si existeixen m índexs en A, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, tals que $\forall j : 1 \leq j \leq m : b_j = a_{i_j}$. Per exemple, si $A = abcaddaa$ i $B = bcda$, llavors $B \subseteq A$, però si $B = cbda$, aleshores $B \not\subseteq A$.

Suposeu que disposeu d'un algorisme `is_subseq`, de cost $O(n + m)$, que determina si B és o no subseqüència de A.

Definim B^i, amb $i \geq 0$, com la seqüència que s'obté prenent un per un i de forma consecutiva els elements de B i repetint-los i vegades. Per exemple, si $B = abbc$, $B^0 = \lambda$ (seqüència buida), $B^1 = abbc$, $B^2 = aabbbbcc$, $B^3 = aaabbbbbbccc$, etc.

És fàcil mostrar que si $B^i \subseteq A$, aleshores $\forall j : 0 \leq j \leq i : B^j \subseteq A$.

Proposeu un algorisme de dividir i vèncer per trobar, en temps $O(n \log n)$, el màxim valor de i tal que $B^i \subseteq A$. Justifiqueu tant la correctesa com el cost de la vostra solució.

Noteu que si B no és una subseqüència de A, llavors i serà zero, i que el valor més gran possible per a i és n/m, perquè per tal que B^i sigui subseqüència de A, la longitud de B^i ha de ser menor o igual a la de A.

Examen Parcial EDA **Duració: 2 hores** **22/10/2012**

Aquestes identitats us poden ser útils per aquest examen:

- $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n(n+1)/2)^2$
- $\sum_{i=1}^{n} c^i = \Theta(c^n)$ per a $c > 1$.

Problema 1 **(2,5 punts)**

- Sabent que $T_1 = O(f)$ i que $T_2 = O(f)$, digueu si les afirmacions següents són certes o falses.
  - (0,5 punts) $T_1 + T_2 = O(f)$.
  - (0,5 punts) $T_1 - T_2 = O(f)$.
  - (0,5 punts) $T_1 / T_2 = O(f)$.
  - (0,5 punts) $T_1 = O(T_2)$.
- (0,5 punts) Resoleu la recurrència:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq 4 \\ 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n} & \text{si } n > 4 \end{cases}$$

Problema 2 **(1 punt)**

Demostreu que el nombre de bits de $n!$ és $\Theta(n \log n)$.

Problema 3 **(1,5 punts)**

```
int misteri (int n) {
  int r = 0;
  for (int i = 1; i ≤ n; ++i)
    for (int j = i+1; j ≤ n; ++j)
        for (int k = j+1; k ≤ n; ++k)
          ++r;
  return r;
}
```

1. (1 punt) Assumint $n \geq 3$, aquesta funció calcula un polinomi $p(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_d n^d$. Quin? Doneu-ne el grau d i tots els coeficients exactes $a_0, \ldots, a_d$.
2. (0,5 punts) Doneu una fita ajustada (amb notació Θ) al cost de la funció *misteri*.

Problema 4 **(2 punts)**

Considereu el codi següent:

```
double misteri_a(int n, double x) {
    if (n == 0) return 1;
    double aux = misteri_a(n/2,x);
    aux *= aux;
    if (n%2 == 0) return aux;
    return aux*x;
}

void misteri_b(int n, vector<double>& V) {
    for (int i = 0; i < int(V.size()); ++i) V[i] = misteri_a(n,V[i]);
}
```

Digueu, justificadament, què fan *misteri_a* i *misteri_b*, i quin cost tenen, en funció de n i $m = V.size()$, en els casos pitjor, mitjà i millor.

Problema 5 **(1 punt)**

Proposeu (sense implementar) un algorisme eficient per calcular m^m, on m és un natural llarg. Recordeu que es poden fer servir algorismes explicats a classe. Doneu el cost del vostre algorisme en funció de la talla de l'entrada n, és a dir, $n = \log_2 m$.

Problema 6 **(2 punts)**

Es diu que una funció $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és:

- *estrictament creixent* quan per a tot $x,y \in [a,b]$, $x < y$ implica $f(x) < f(y)$;
- *estrictament decreixent* quan per a tot $x,y \in [a,b]$, $x < y$ implica $f(x) > f(y)$;
- *estrictament monòtona* quan és estrictament creixent o decreixent.

Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua i estrictament monòtona que satisfà que $f(a) \cdot f(b) < 0$. És sabut que aleshores existeix un únic $z \in (a,b)$, anomenat el *zero* de la funció, tal que $f(z) = 0$.

Assumint que f és una funció contínua i estrictament monòtona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, escriviu en C++ una funció

```
double zero(double a, double b, double tol)
```

que, donades a, b i una tolerància *tol* tal que $0 < tol < b - a$, retorni un $\tilde{z}$ tal que el zero de f es troba en l'interval $(\tilde{z} - \frac{tol}{2}, \tilde{z} + \frac{tol}{2})$. Analitzeu el cost del vostre programa en el cas pitjor. Assumiu que podeu fer crides a f, i que el seu cost és $O(1)$. Només es consideraran com a vàlides les solucions amb cost $O(\log(\frac{b-a}{tol}))$.

Examen Parcial EDA **Duració: 2 hores** **18/3/2013**

Problema 1 **(2 punts)**

Disposem dels tres algorismes següents per resoldre un cert problema (n denota la mida de l'entrada):

A: resol el problema dividint-lo en 5 subproblemes de mida $n/2$, resol recursivament cada subproblema i combina les solucions en temps $\Theta(n)$.

B: resol el problema dividint-lo en 2 subproblemes de mida $n-1$, resol recursivament cada subproblema i combina les solucions en temps $\Theta(1)$.

C: resol el problema dividint-lo en 9 subproblemes de mida $n/3$, resol recursivament cada subproblema i combina les solucions en temps $\Theta(n^2)$.

Quin és el cost en temps de cada algorisme fent servir la notació Θ?

(0,5 punts) Algorisme A:

(0,5 punts) Algorisme B:

(0,5 punts) Algorisme C:

(0,5 punts) Quin dels tres algorismes escolliries? Per què?

Problema 2 **(2 punts)**

Sigui $\pi(n)$ el nombre de nombres primers dins l'interval $[1,\ldots,n]$. És un fet que

$$\pi(n) = \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

Per a les preguntes següents, recordeu que els nombres *compostos* són els que no són primers, i que els nombres *quadrats* són els de la forma k^2 on k és un natural.

(1 punt) Digueu si és CERT o FALS que, per a n suficientment gran, hi ha més nombres compostos que primers dins l'interval $[1,\ldots,n]$, i justifiqueu la resposta:

(1 punt) Digueu si és CERT o FALS que, per a n suficientment gran, hi ha més nombres quadrats que primers dins l'interval $[1,\ldots,n]$, i justifiqueu la resposta:

Problema 3 **(2 punts)**

Donat un vector V amb n nombres diferents $V[0],\ldots,V[n-1]$, i un nombre s, es vol saber si existeixen tres índexs i, j i k entre 0 i $n-1$ tals que $V[i]+V[j]+V[k]=s$. Els índexs poden estar repetits. Per exemple, si $n=2$, $V[0]=5$, $V[1]=6$, i $s=16$, la resposta és afirmativa. (Una solució seria $i=j=0$, $k=1$.)

Considereu aquests algorismes:

a) Provem per a tota i, tota j i tota k entre 0 i $n-1$, si $V[i]+V[j]+V[k]=s$.

b) Provem per a tota i entre 0 i $n-1$, tota j entre i i $n-1$ i tota k entre j i $n-1$, si $V[i]+V[j]+V[k]=s$.

c) Construïm un vector Q de mida n^2 amb totes les sumes $V[i]+V[j]$, amb i i j entre 0 i $n-1$. Ordenem Q. Busquem, per a tota k entre 0 i $n-1$, si $s-V[k]$ es troba a Q.

d) Construïm un vector Q de mida n^2 amb totes les sumes $V[i]+V[j]$, amb i i j entre 0 i $n-1$. Ordenem V. Busquem, per a tota ℓ entre 0 i n^2-1, si $s-Q[\ell]$ es troba a V.

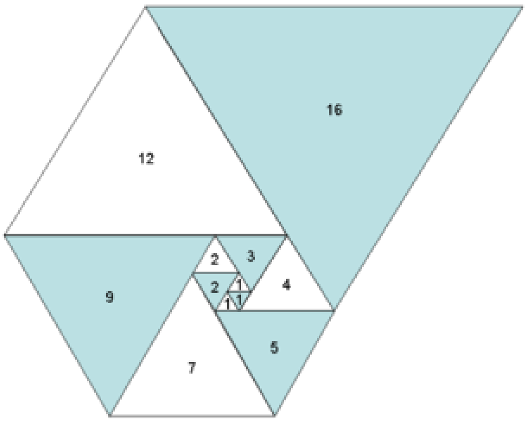
Digueu raonadament el cost en el cas pitjor de cadascun d'aquests algorismes. (0,5 punts cadascun).

Problema 4 **(2 punts)**

La *successió de Padovan* és una successió de nombres naturals definida pels valors inicials $P(0)=P(1)=P(2)=1$ i la relació de recurrència

$$P(n)=P(n-2)+P(n-3)$$

per a $n\geq 3$. Entre altres llocs, aquesta successió apareix, gràficament, aquí:



1. Implementa en `C++` una funció **int** *g1*(**int** *n*) que calculi el n-èsim nombre de Padovan. La funció ha de tenir cost en temps $O(n)$.

2. Es pot comprovar que

$$\begin{pmatrix} P(n) \\ P(n-1) \\ P(n-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per $n\geq 2$. Fent ús d'aquest fet (que no us demanem demostrar), i d'un tipus *matrix*<**int**> amb constructor *matrix*<**int**>(*files*, *columnes*, *valor*) i amb operació de multiplicació $m1 * m2$, completa la següent implementació de **int** *g2*(**int** *n*) que també calcula $P(n)$, aquest cop en temps $O(\log n)$.

void *misteri* (**const** *matrix*<**int**>& *m*, **int** *k*, *matrix*<**int**>& *p*) {
    if ($\boxed{}$)

```
        for (int i = 0; i < 3; ++i) p[i][i] = 1;
    else {
        misteri ( [                    ] );
        p = [      ] * [      ] ;
        if (k % 2 == 1) [                    ] ;
} }

int g2(int n) {
    if (n ≤ 2) return 1;
    else {
        matrix<int> m(3, 3, 0);
        m[0][1] = m[0][2] = m[1][0] = m[2][1] = 1;
        matrix<int> p(3, 3, 0);
        misteri (m, n−2, p);
        return p[0][0] + p[0][1] + p[0][2];
} }
```

L'enunciat d'aquest problema està inspirat en la pàgina: `http://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence`

Problema 5 **(2 punts)**

Suposeu donat un tipus *vector_inf* <**int**> que implementa vectors de mida ∞ en què les n primeres posicions (de la 0 a la $n-1$) contenen valors enters (i per tant finits) no necessàriament ordenats, i que les posicions restants (a partir de la n) contenen el valor ∞. Doneu, en `C++`, un algorisme

int *busca*(*vector_inf* <**int**>& *V*)

que, donat un vector V com aquest amb $n \geq 1$, determini n en temps $O(\log n)$.

Suposeu que el tipus *vector_inf* <**int**> està implementat de tal manera que podeu accedir a les seves posicions de la mateixa manera que amb els vectors ordinaris en temps constant. També podeu fer comparacions $v[i] == \infty$ en temps constant.

Pista: comenceu per trobar un ∞ ràpidament.

Examen Parcial EDA **Duració: 2 hores** **21/10/2013**

Problema 1 **(2 punts)**

- Sigui n parell. El cost de l'algorisme d'ordenació per inserció amb l'entrada

$$[2,1,4,3,6,5,\ldots,2i,2i-1,\ldots,n,n-1]$$

  és $T(n) = \Theta(\ \boxed{\qquad\qquad}\ )$.
- Indiqueu **totes** les afirmacions que siguin correctes: El cost de mergesort en el cas pitjor és: $\boxed{}$ $O(n^2)$; $\boxed{}$ $\Theta(n \log n)$; $\boxed{}$ $\Omega(n \log n)$.
- Doneu una funció $f(n)$ que sigui alhora $\Omega(n)$ i $O(n \log n)$, però que no sigui Θ de cap de les dues. Resposta: $f(n) = \boxed{\qquad\qquad}$
- Resoleu $T(n) = 3T(n/3) + \Theta(n^2)$. Resposta: $T(n) = \Theta(\ \boxed{\qquad\qquad}\ )$.
- La **recurrència** que expressa el cost de l'algorisme de Karatsuba per multiplicar dos nombres de n dígits és $T(n) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.
- Sigui x un vector de n bits qualssevol. Interpretant x com un nombre natural escrit en binari, el cost en cas pitjor de l'algorisme obvi per sumar 1 a x és $T(n) = \Theta(\ \boxed{\qquad}\ )$.
- Sigui x un vector de n bits escollits uniformement i independentment a l'atzar. Interpretant x com un nombre natural escrit en binari, el cost esperat de l'algorisme obvi per sumar 1 a x és $T(n) = \Theta(\ \boxed{\qquad}\ )$.
- Considereu l'algorisme següent de cost $\Theta(\log n)$ on n és la mida del vector:

```
int dicotomica(vector<int>& v, int e, int d, int x) {
    if (e > d) return −1;
    int m = (d + e)/2;
    if (v[m] < x) return dicotomica(v, m + 1, d, x);
    if (v[m] > x) return dicotomica(v, e, m − 1, x);
    return m;
}
```

  Quin cost tindria aquest mateix algorisme si tinguéssim la mala pata d'oblidar-nos l'`&` en el pas de paràmetres? Resposta: $T(n) = \Theta(\ \boxed{\qquad\qquad}\ )$.

Problema 2 **(2 punts)**

Donat un vector A amb $n > 0$ nombres, considerem dos algorismes per calcular els elements mínim (`min`) i màxim (`max`) simultàniament:

1. **Seqüencial.** Les variables `min` i `max` prenen inicialment el valor $A[0]$ i es van actualitzant en un recorregut seqüencial del vector.

2. **Dividir i vèncer.** Si el vector només té un o dos elements, es calculen `min` i `max` de la manera òbvia fent una sola comparació. En cas que $n > 2$, es divideix el vector en dues meitats i, per a cadascuna, es fa una crida recursiva i s'assigna a `min` el més petit dels mínims fent una comparació i a `max` el més gran dels màxims fent una altra comparació.

Justifiqueu les afirmacions següents:

(1 punt) El cost asimptòtic de tots dos algorismes és el mateix.

(1 punt) Si comptem el nombre **exacte** de comparacions entre elements del vector que fa cada algorisme, el del segon és millor que el del primer. Per simplificar, suposeu que n és una potència de 2. (Pista: per analitzar el segon algorisme, dibuixeu l'arbre de recursió per $n = 8$ i recordeu que $\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$.)

Problema 3 **(2 punts)**

(1 punt) Proposeu un algorisme lineal que, donat un vector $V[1, \ldots, n]$ que conté una permutació qualsevol dels nombres de 1 a n, retorni un vector $D[1, \ldots, n-1]$ on $D[i]$ és la distància a la que es troben els nombres i i $i+1$ en el vector V. Per exemple, si $V = [5,2,1,4,6,3]$, llavors $D = [1,4,2,3,4]$. No es valorarà cap solució que no sigui de cost $\Theta(n)$.

(1 punt) Ara suposeu que el vector $V[1, \ldots, n]$ conté nombres diferents qualssevol (no necessàriament entre 1 i n) i voleu retornar un vector $D[1, \ldots, n-1]$ on $D[i]$ és la distància a la que es troben l'i-èssim nombre de V i l'$(i+1)$-èssim nombre de V, enumerats de petit a gran. Per exemple, si $V = [1231, -2, 453456, -23434]$, llavors $D = [2,1,2]$. Descriviu un algorisme de cost $\Theta(n \log n)$ per fer això. (Pista: penseu en una modificació del mergesort.)

Problema 4 **(2 punts)**

Considereu el codi següent:

```
double misteri_a(int n, double x) {
    if (n == 0) return 1;
    double aux = misteri_a(n/2,x);
    aux *= aux;
    if (n%2 == 0) return aux;
    return aux*x;
}

void misteri_b(int n, vector<double>& V) {
    for (int i = 0; i < int(V.size()); ++i)  V[i] = misteri_a(n,V[i]);
}
```

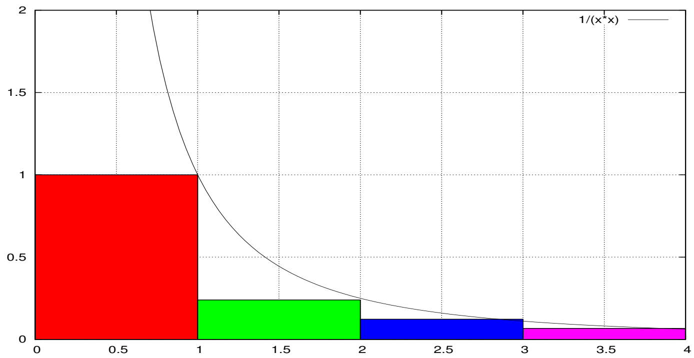
Digueu, justificadament, què fan *misteri_a* i *misteri_b*, i quin cost tenen, en funció de n i $m = V.size()$, en els casos pitjor, mitjà i millor.

Problema 5 **(1 punt)**

Sigui

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}.$$

Inspirats en el gràfic adjunt, demostreu que $S(n) = \Theta(1)$. (Pista: àrea = integral.)



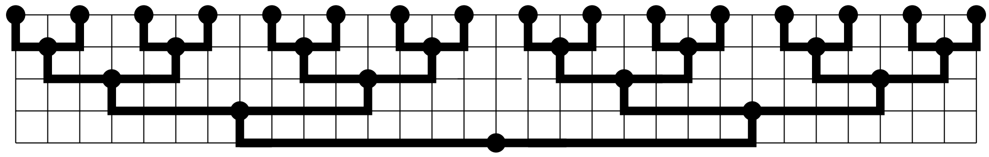
Problema 6 **(1 punt)**

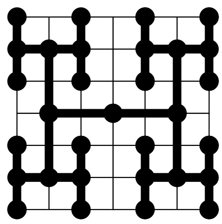
Demostreu o doneu un contraexemple a l'enunciat següent: Per qualsevol funció $f(n)$ i qualsevol constant $c > 0$ tenim que $f(cn) = \Theta(f(n))$.

Examen Parcial EDA **Duració: 2 hores** **24/3/2014**

Problema 1 **(3 punts)**

Com a grafs, tots els arbres són planars. En particular això vol dir que tots es poden representar en una graella rectangular prou gran de manera que les arestes no s'intersequin les unes amb les altres (excepte, òbviament, en els vèrtexs). Aquí teniu dues representacions planars d'un arbre binari complet de 16 fulles:





(1 punt) Seguint el patró recursiu de la **primera** representació, doneu les recurrències que expressen l'alçada $H(n)$ i l'amplada $W(n)$, respectivament, de la graella que es necessita per representar un arbre binari complet de 2^n fulles en aquesta representació.

(1 punt) Seguint el patró recursiu de la **segona** representació, doneu la recurrència que expressa la longitud $L(n)$ de la graella quadrada que es necessita per representar un arbre binari complet de 4^n fulles en aquesta construcció.

(1 punt) Si el vostre objectiu és minimitzar l'àrea de la graella per un arbre binari complet de 4^n fulles, expliqueu quina de les dues construccions escollireu (per relacionar les dues construccions noteu que $4^n = 2^{2n}$). No cal que resoleu les recurrències de forma exacta; una estimació asimptòtica és suficient.

Problema 2 **(2 punts)**

Considereu els quatre codis a continuació:

```
void f1 (int n) {
    int x = 2;
    int y = 1;
    while (y ≤ n) {
        y = y + x;
        x = x + 1;
}   }
```

```
void f2 (int n) {
    int x = 2;
    int y = 1;
    while (y ≤ n) {
        y = y + x;
        x = 2*x;
}   }
```

```
void f3 (int n) {
```

```
void f4 (int n) {
```

```
int x = 2;                          int x = 2;
int y = 1;                          int y = 1;
while (y ≤ n) {                     while (y ≤ n) {
    y = y*x;                            y = y*x;
    x = 2*x;                            x = x*x;
} }                                 } }
```

Quin cost té $f1$? Resposta: $\Theta(\boxed{})$

Quin cost té $f2$? Resposta: $\Theta(\boxed{})$

Quin cost té $f3$? Resposta: $\Theta(\boxed{})$

Quin cost té $f4$? Resposta: $\Theta(\boxed{})$

Una resposta correcta sense una justificació adequada **no rebrà cap punt**.

Problema 3 **(3 punts)**

Una *inversió* en un vector d'enters $T[0 \dots n-1]$ és un parell de posicions del vector en desordre, és a dir, un parell (i, j) amb $0 \leq i < j < n$ tal que $T[i] > T[j]$.

(1,5 punts) Sigui $T[0 \dots n-1]$ un vector d'enters. Demostreu que si en T hi ha una inversió (i, j), aleshores T té almenys $j - i$ inversions.

(1,5 punts) Fixem un valor N tal que $N \geq 0$ (és a dir, N en aquest exercici és una constant). Usant Divideix i Venceràs, implementeu en C++ una funció

```
bool cerca (int x, const vector<int>& T)
```

que, donats un enter x i un vector d'enters T de mida n *amb com a molt N inversions*, digui si x és a T. La funció ha de tenir cost en el cas pitjor $\Theta(\log n)$. Demostreu que té el cost desitjat.

Pista: per respondre l'apartat 2, useu l'apartat 1. A més, considereu com a cas base el tractament de subvectors de mida $\leq 2N$, i com a cas recursiu el complementari.

Problema 4 **(2 punts)**

Quatre preguntes curtes:

1. Sigui $f(n) = n \log(\cos(n\pi) + 4)$. Llavors $f(n) = \Theta(\boxed{})$.
2. Quin és l'últim dígit de 7^{1024} escrit en decimal? Resposta: $\boxed{}$.

3. Quina és la **recurrència** que expressa el cost de l'algorisme de Strassen per multiplicar matrius $n \times n$. Resposta $T(n) = \boxed{}$.
4. Un algorisme pot rebre els 2^n vectors de n bits com entrada. En $2^n - 1$ d'aquestes entrades el cost de l'algorisme és $\Theta(n^2)$ i en l'entrada restant el seu cost és $\Theta(n^4)$. Per tant, el cost en el cas pitjor és $\Theta(n^4)$ i el cost en el cas millor és $\Theta(n^2)$. Quin és el cost en el cas mitjà quan l'entrada s'escull uniformement a l'atzar (i per tant cada entrada té probabilitat $1/2^n$)?
   Resposta: $T(n) = \Theta(\boxed{})$.

Justificacions per les preguntes 1, 2 i 4 (per la pregunta 3 **no** cal justificació):

Examen Parcial EDA **Duració: 2.5 hores** **13/10/2014**

Problema 1 **(2 punts)**

(1 punt) Demostreu que $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \Theta(n^4)$.

Ajut: Hi ha diverses maneres de fer-ho, una d'elles demostrant l'O i l'Ω per separat.

(1 punt) Siguin $f(n) = 2^{\sqrt{\log n}}$ i $g(n) = n$. Asimptòticament, quina creix més ràpid? Demostreu-ho.

Problema 2 **(3 punts)**

Considereu el procediment *misteri* que rep com entrada un vector A i un enter positiu k de manera que tots els elements de A estan entre 0 i k, ambdós inclosos.

```
void misteri (const vector<int>& A, vector<int>& B, int k){
    int n = A.size ();
    vector<int> C(k+1, 0);
    for (int j = 0; j < n; ++j) ++C[A[j]];
    for (int i = 1; i ≤ k; ++i) C[i] += C[i−1];
    B = vector<int>(n);
    for (int j = n−1; j ≥ 0; −−j){
        B[C[A[j]] − 1] = A[j ];
        −−C[A[j]];
    }
}
```

(a) (1 punt) Què conté B al finalitzar l'execució de *misteri*?

(b) (1 punt) Si n és la longitud del vector A i us asseguren que $k = O(n)$, quin és el cost asimptòtic de *misteri* en funció de n?

(c) (1 punt) Sense escriure codi, descriviu un algorisme per al problema següent: donat un enter positiu k, un vector A de n enters entre 0 i k, ambdós inclosos, i un vector P de m parells d'enters $(a_0, b_0), \ldots, (a_{m-1}, b_{m-1})$, amb $0 \leq a_i \leq b_i \leq k$ per cada $i = 0, \ldots, m-1$, cal escriure el nombre d'elements de A que es troben en l'interval $[a_i, b_i]$ per $i = 0, \ldots, m-1$ en temps $\Theta(m + n + k)$, i en particular temps $\Theta(m + n)$ quan $k = O(n)$.

Problema 3 **(3 punts)**

Un joc de taula d'atzar té 64 posicions possibles $1, \ldots, 64$. Les regles del joc són tals que, des de cada posició $i \in \{1, \ldots, 64\}$, en una tirada podem anar a parar a qualsevol altra posició $j \in \{1, \ldots, 64\}$ amb probabilitat $P_{i,j}$. Sigui $P = (P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 64}$ la matriu de probabilitats.

(a) (1 punt) Recordeu que si $R = P^2$, llavors $R_{i,j} = \sum_{k=1}^{64} P_{i,k} P_{k,j}$ per cada i, j. Sabent que, com diu l'enunciat, $P_{i,j}$ és la probabilitat d'anar a parar a j des de i en una tirada, com interpreteu $R_{i,j}$?

(b) (2 punts) Dissenyeu un algorisme que, donada la matriu de probabilitats $P = (P_{i,j})_{1\leq i,j\leq 64}$ i donat un nombre de moviments $t \geq 0$, calculi la matriu $(Q_{i,j})_{1\leq i,j\leq 64}$ on cada $Q_{i,j}$ és la probabilitat que el joc acabi a la posició j després de jugar exactament t tirades, començant des de la posició i.

```
typedef vector<double> Fila;
typedef vector<Fila> Matriu;

void probabilitats (const Matriu & P, int t , Matriu & Q)
```

Nota 1: Per obtenir la nota màxima, el vostre algorisme ha de tenir cost $\Theta(\log t)$.
Nota 2: Si us cal alguna funció auxiliar, implementeu-la al darrera.
Nota 3: Justifiqueu el cost al darrera.

Problema 4 **(2 punts)**

(a) (1 punt) Suposem que un algorisme pot rebre qualsevol dels 2^n vectors de n bits amb igual probabilitat. Suposem que el cost de l'algorisme en el cas pitjor és $\Theta(n^2)$ i que el cost en el cas millor és $\Theta(n)$. Quantes entrades cal que provoquin cost $\Omega(n^2)$ per estar segurs que l'algorisme tindrà cost $\Theta(n^2)$ en el cas mitjà?

(b) (0.5 punts) Considereu el següent algorisme per sumar una unitat a un nombre natural representat per un vector **vector<int>** A de n dígits decimals:

```
int i = n − 1;
while (i ≥ 0 and A[i] == 9) { A[i] = 0; −−i; }
if (i ≥ 0) ++A[i]; else cout << ``Overflow'' << endl;
```

Si cada dígit $A[i]$ de l'entrada és equiprobable i independent de la resta (és a dir, cada $A[i]$ és un dels 10 dígits possibles amb probabilitat $1/10$ sense tenir en compte la resta), quina és la probabilitat que aquest algorisme faci exactament k iteracions quan $0 \leq k \leq n-1$?

(c) (0.5 punts) Apliqueu el teorema mestre de recurrències subtractores per resoldre la recurrència $T(n) = \frac{1}{10}T(n-1) + \Theta(1)$ amb el cas base $T(0) = \Theta(1)$.

——————— FI DE L'EXAMEN ———————-

(d) (extra bonus **opcional**: 1 punt addicional a la nota) A què correspon la recurrència $T(n)$ de l'apartat (c) en relació a l'algorisme de l'apartat (b)?

Examen Parcial EDA **Duració: 2h30m** **23/3/2015**

Problema 1: Anàlisi de costos **(2 punts)**

El garbell d'Eratòstenes (276–194 aC) és un mètode per generar tots els nombres primers més petits o iguals que un n donat. El mètode fa així: recorrent la seqüència dels nombres $2, 3, 4, \ldots, n$, busca el següent nombre x que no estigui marcat, marca tots els seus múltiples $2x, 3x, 4x, \ldots$ més petits o iguals que n, i torna a començar. Quan acaba, els $x \geq 2$ que no estan marcats són els nombres primers. En C++:

```
vector<bool> M(n + 1, false);
for (int x = 2; x ≤ n; ++x) {
    if (not M[x]) {
        for (int y = 2*x; y ≤ n; y += x) M[y] = true;
    }
}
```

Per a les tres primeres preguntes es demana una expressió exacta (no asimptòtica) *en funció de n*. Si us cal feu servir la notació $\lfloor z \rfloor$ que arrodoneix z al màxim enter més petit o igual que z; per exemple $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 3.14\ldots \rfloor = 3$.

(a) (0.33 punts) Quantes vegades s'executarà $M[y]$ = **true** quan x valgui 2?
Resposta: Exactament $\boxed{}$ vegades.

(b) (0.34 punts) Quantes vegades s'executarà $M[y]$ = **true** quan x valgui 15?
Resposta: Exactament $\boxed{}$ vegades.

(c) (0.33 punts) Quantes vegades s'executarà $M[y]$ = **true** quan x valgui 17?
Resposta: Exactament $\boxed{}$ vegades.

(d) (0.5 punts) Se sap que

$$\sum_{\substack{p=2 \\ p \text{ primer}}}^{n} \frac{1}{p} = \Theta(\log \log n).$$

Feu servir això i les respostes de les preguntes anteriors per calcular el cost de l'algorisme en funció de n, en notació asimptòtica. Resposta: $\Theta(\boxed{})$. Justificació:

(e) (0.5 punts) Una millora seria substituir la condició $x \leq n$ del bucle extern per $x{*}x \leq n$. Millora això el cost asimptòtic? Resposta i justificació:

Problema 2: Strassen & company **(2 punts)**

L'algorisme escolar per multiplicar matrius $n \times n$ fa $\Theta(n^3)$ operacions aritmètiques. L'any 1969 Strassen va trobar un algorisme que fa $\Theta(n^{2.81})$ operacions aritmètiques. Vint-i-un anys més tard, Coppersmith i Winograd van descrobrir un mètode que fa $\Theta(n^{2.38})$ operacions.

Suposant (per simplificar) que les constants implícites en la notació Θ són 1, 10 i 100, respectivament, i que s'apliquen a cada $n \geq 1$ (és a dir, que els costos són n^3, $10n^{2.81}$ i $100n^{2.38}$, respectivament, per a tot $n \geq 1$), calculeu el mínim n a partir del qual un d'aquests algorismes fa menys operacions que un altre.

(a) (1 punt) Per a $n \geq$ $\boxed{}$, Strassen millora l'escolar.

(b) (1 punt) Per a $n \geq$ $\boxed{}$, Coppersmith-Winograd millora Strassen.

Justificacions:

Nota: Si no porteu calculadora (estàveu avisats!), deixeu indicada la solució en forma d'expressió aritmètica.

Problema 3: Un de dissenyar algorismes **(3 punts)**

Donada una seqüència de n intervals no buits $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$, volem calcular, en temps $O(n \log n)$, la seva unió representada com una seqüència d'intervals disjunts ordenada segons l'extrem esquerre dels intervals. Per exemple, si els intervals de l'entrada són

$$[17,19]\ [-3,7]\ [4,9]\ [18,21]\ [-4,15]$$

llavors la sortida ha de ser $[-4,15]\ [17,21]$.

(a) (1 punt) Descriviu un algorisme que resolgui aquest problema. Expliqueu l'algorisme en paraules, sense escriure codi, però de manera prou clara perquè es pugui implementar. Suposeu que l'entrada ve donada pels vectors $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$, amb $a_i \leq b_i$ per a tot $i = 1, \ldots, n$.

(b) (1 punt) En aquest apartat, a més de la seqüència de n intervals, ens donen una seqüència de m reals diferents $p_1, \ldots, p_m$ i volem determinar quants cauen en algun interval de la unió (només ens cal el número; no pas quins són). Fent servir l'algorisme de l'apartat anterior, descriviu un algorisme que resolgui aquest problema en temps $O(n \log n)$ quan $m = n$. Suposeu que l'entrada ve donada pels vectors a i b de l'apartat anterior, i pel vector $(p_1, \ldots, p_m)$ amb $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$.

(c) (1 punt) Si sabéssiu que m està fitat per una constant petita i independent de n, per exemple $m \leq 5$, faríeu servir el mateix algorisme? Si no, quin faríeu servir? Si decidiu canviar d'algorisme, expliciteu-ne el cost.

Problema 4: Preguntes curtes **(3 punts)**

- (0,5 punts) Determineu si són iguals ($=$) o diferents ($\neq$) i demostreu-ho:

$$\Theta(3^{\log_2(n)})\ \boxed{}\ \Theta(3^{\log_4(n)}).$$

- (0,5 punts) Calculeu $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \cdots \cdot 2^{99} \cdot 2^{100} \mod 9$. Aquest problema no està pensat per fer amb calculadores.
- (1 punt) Ordeneu les funcions següents segons el seu ordre de creixement asimptòtic: $n^4 - 3n^3 + 1, (\ln(n))^2, \sqrt{n}, n^{1/3}$. Excepcionalment, no cal que ho justifiqueu.
- (1 punt) Considereu les tres alternatives següents per resoldre un mateix problema:
  - A: divideix una instància de talla n en cinc instàncies de talla $n/2$, resol recursivament cada instància, i combina les solucions en temps $\Theta(n)$.
  - B: donada una instància de talla n, resol recursivament dues instàncies de talla $n-1$ i combina les solucions en temps constant.
  - C: divideix una instància de talla n en nou instàncies de talla $n/3$, resol recursivament cada instància, i combina les solucions en temps $\Theta(n^2)$.

  Escriviu les recurrències corresponents i resoleu-les. Quina alternativa és la més eficient?

Examen Parcial EDA **Duració: 2.5 hores** **19/10/2015**

Problema 1 **(3.5 punts)**

Els nombres de Fibonacci estan definits per la recurrència $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ per a $k \geq 2$, amb $f_0 = 0$ i $f_1 = 1$. Responeu els següents apartats:

(a) (0.5 punts) Considereu la següent funció *fib1* que donat un enter no negatiu k retorna f_k:

```
int fib1 (int k) {
  vector<int> f(k+1);
  f[0] = 0;
  f[1] = 1;
  for (int i = 2; i ≤ k; ++i)
    f[i] = f[i−1] + f[i−2];
  return f[k];
}
```

Descriviu de la manera més precisa possible el cost asimptòtic *en temps i en espai* de *fib1* (k) en funció de k.

(b) (1 punt) Demostreu que, per a $k \geq 2$, se satisfà la identitat matricial següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} f_k & f_{k-1} \\ f_{k-1} & f_{k-2} \end{pmatrix}$$

(c) (1 punt) Completeu els blancs del codi a continuació per tal que la funció *fib2* (k) calculi f_k, donat un $k \geq 0$.

```
typedef vector<vector<int>> matrix;

matrix mult(const matrix& A, const matrix& B) {
  // Pre: A i B són matrius quadrades de les mateixes dimensions
  int n = A.size ();
  matrix C(n, vector<int>(n, 0));
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    for (int j = 0; j < n; ++j)
      for (int k = 0; k < n; ++k)
        [                                   ]
  return C;
}

matrix misteri (const matrix& M, int q) {
  int s = M.size ();
  if (q == 0) {
    matrix R(s, vector<int>(s, 0));
    for (int i = 0; i < s; ++i) [                   ]
    return R;
  }
  else {
    matrix P = misteri (M, q/2);
```

```
    if (                    ) return mult(P, P);
    else return                    ;
} }

int fib2 (int k) {
  if (k ≤ 1) return k;
  matrix M = { {1, 1}, {1, 0} };
  matrix P = misteri (M, k−1);
  return                    ;
}
```

(d) (1 punt) Descriviu de la manera més precisa possible el cost asimptòtic en temps de *fib2* (k) en funció de k.

Problema 2 **(3.25 punts)**

Donats un vector d'enters v i un enter x, la funció

```
int posicio (const vector<int>& v, int x) {
  int n = v.size ();
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    if (v[i] == x)
      return i;
  return −1;
}
```

examina les $n = v.size()$ posicions de v i retorna la primera que conté x, o -1 si no n'hi ha cap.

(a) (0.75 punts) Descriviu en funció de n el cost asimptòtic en temps de *posicio* en el cas millor de la forma més precisa possible. Quan es pot donar aquest cas millor?

(b) (0.75 punts) Descriviu en funció de n el cost asimptòtic en temps de *posicio* en el cas pitjor de la forma més precisa possible. Quan es pot donar aquest cas pitjor?

(c) (0.75 punts) Demostreu que per a tot enter $n \geq 1$, es compleix:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(d) (1 punt) Suposem que tenim una distribució de probabilitat sobre els paràmetres d'entrada. Concretament, la probabilitat que x sigui l'element $v[i]$ és $\frac{1}{2^{i+1}}$ per a $0 \leq i < n-1$, i que sigui l'element $v[n-1]$ és $\frac{1}{2^{n-1}}$. En particular, aquestes probabilitats sumen 1, de manera que x sempre és un dels n valors de v.

Descriviu en funció de n el cost asimptòtic en temps de *posicio* en el cas mig de la forma més precisa possible.

Problema 3 **(3.25 punts)**

En aquest exercici abordarem el problema de, donats dos enters positius a i b, calcular el seu màxim comú divisor $\gcd(a,b)$. Recordeu que $\gcd(a,b)$ és, per definició, l'únic enter positiu g tal que:

1. $g \mid a$ (g divideix a),
2. $g \mid b$,
3. si $d \mid a$ i $d \mid b$, llavors $d \mid g$.

(a) (1.25 punts) Demostreu que les identitats següents són certes:

$$\gcd(a,b) = \begin{cases} 2\gcd(a/2, b/2) & \text{si } a, b \text{ són parells} \\ \gcd(a, b/2) & \text{si } a \text{ és senar i } b \text{ és parell} \\ \gcd((a-b)/2, b) & \text{si } a, b \text{ són senars i } a > b \end{cases}$$

Pista: podeu fer servir que donats dos enters positius a i b tals que $a > b$, es té $\mathrm{gcd}(a,b) = \mathrm{gcd}(a-b,b)$.

(b) (1 punt) Escriviu una funció **int** *gcd*(**int** a, **int** b) en C++ que, usant divideix i venceràs i l'apartat (a), calculi el màxim comú divisor $\mathrm{gcd}(a,b)$ de dos enters positius a, b donats.

Pista: podeu fer servir també que per tot enter positiu a, $\mathrm{gcd}(a,a) = a$.

(c) (1 punt) Suposant que a i b són enters positius representats cadascun amb un vector de n bits, descriviu de la manera més precisa possible el cost en temps en el cas pitjor de $gcd(a, b)$ en funció de n. Quan es pot donar aquest cas pitjor?

Assumiu que el cost de les següents operacions amb enters de n bits: sumar, restar, comparar, multiplicar/dividir per 2 és $\Theta(n)$, i que calcular el residu mòdul 2 triga temps $\Theta(1)$.

Examen Parcial EDA **Duració: 2.5 hores** **31/03/2016**

Problema 1 **(1 punt)**

Responeu les següents qüestions. En aquest exercici, **no** cal justificar les respostes.

1. (0.2 punts) El cost de l'algorisme d'Strassen per multiplicar dues matrius de mida $n \times n$ és $\Theta(\boxed{})$

2. (0.6 punts) El teorema mestre de recurrències substractores diu que donada una recurrència $T(n) = aT(n-c) + \Theta(n^k)$ amb $a, c > 0$ i $k \geq 0$ llavors:

$$T(n) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si } a < 1, \\ \boxed{} & \text{si } a = 1, \\ \boxed{} & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

3. (0.2 punts) L'algorisme d'ordenació mergesort usa $\Theta(\boxed{})$ espai auxiliar per ordenar un vector de mida n.

Problema 2 **(3 punts)**

En aquest problema només es consideren els costos *en temps*. Considereu el següent programa:

```
void f(int m);
void g(int m);

void h(int n) {
  int p = 1;
  for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
    f(i);
    if (i == p) {
      g(n);
      p *= 2;
} } }
```

(a) (1.5 punts) Responeu: si tant el cost de $f(m)$ com el de $g(m)$ és $\Theta(m)$, llavors el cost de $h(n)$ en funció de n és $\Theta(\boxed{})$

Justificació:

(b) (1.5 punts) Responeu: si el cost de $f(m)$ és $\Theta(1)$ i el cost de $g(m)$ és $\Theta(m^2)$, llavors el cost de $h(n)$ en funció de n és $\Theta($ $\boxed{}$ $)$

Justificació:

Problema 3 **(3 punts)**

Es diu que una matriu quadrada M de nombres enters de mida $n \times n$ és *simètrica* si $M_{i,j} = M_{j,i}$ per qualssevol i, j tals que $0 \leq i, j < n$.

Considerem la següent implementació de matrius simètriques amb vectors unidimensionals, que només guarda el "triangle inferior" per minimitzar l'espai consumit:

$$\begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & \dots & M_{0,n-1} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,n-1} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \\ M_{n-1,0} & M_{n-1,1} & M_{n-1,2} & \dots & M_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$M_{0,0}$	$M_{1,0}$	$M_{1,1}$	$M_{2,0}$	$M_{2,1}$	$M_{2,2}$	$\dots$	$M_{n-1,0}$	$M_{n-1,1}$	$M_{n-1,2}$	$\dots$	$M_{n-1,n-1}$

Per exemple, la matriu simètrica 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

s'implementaria amb el vector unidimensional

1	2	-2	0	3	-1

(a) (0.5 punts) Responeu: el cost en espai d'aquesta representació per a una matriu simètrica $n \times n$ en funció de n és $\Theta($ $\boxed{}$ $)$.

Justificació:

(b) (1 punt) Donats $n > 0$ i un valor k, la funció

pair<**int**,**int**> *fila_columna* (**int** n, **int** k);

retorna el parell (i, j) on i és la fila i j és la columna del coeficient apuntat per k en un vector unidimensional que implementa una matriu simètrica $n \times n$. Si k no és un índex vàlid, retorna $(-1, -1)$. Per exemple, *fila_columna* (3,2) retorna $(1,1)$, *fila_columna* (3,3) retorna $(2,0)$, i *fila_columna* (3,6) retorna $(-1, -1)$.

Completeu la següent implementació de *fila_columna*:

```
int p(int x) { return [          ] ;}

int misteri (int k, int l, int r) {
  if (l+1 == r) return l;
  int m = (l+r)/2;
  if (p(m) ≤ k) return misteri (k, [          ] , r);
  else          return misteri (k, l, [          ] );
}

pair<int,int> fila_columna (int n, int k) {
  if (k < 0 or k ≥ p(n)) return [          ] ;
  int i = misteri (k, 0, n);
  return {i, [          ] };
}
```

(c) (1 punt) Analitzeu el cost en temps en el cas pitjor de la implementació de *fila_columna* (**int** n, **int** k) de l'apartat anterior en funció de n.

(d) (0.5 punts) Usant les funcions **double** *sqrt*(**double** *x*) i **int** *floor* (**double** *x*) que respectivament calculen $\sqrt{x}$ i $\lfloor x \rfloor$ en temps $\Theta(1)$, doneu una implementació alternativa de *fila_columna* amb cost $\Theta(1)$.

Problema 4 **(3 punts)**

Assumiu que n és una potència de 2, és a dir, de la forma 2^k per a un cert $k \geq 0$.

Una matriu quadrada A de nombres reals de mida $n \times n$ és una *matriu de Monge* si per qualssevol i, j, k i l tals que $0 \leq i < k < n$ i $0 \leq j < l < n$, es compleix que

$$A_{i,j} + A_{k,l} \leq A_{i,l} + A_{k,j}$$

En altres paraules, sempre que agafem dues files i dues columnes d'una matriu de Monge i considerem els quatre elements a les interseccions de les files i les columnes, la suma dels elements de les cantonades superior esquerra i inferior dreta és més petita o igual que la suma dels elements de les cantonades superior dreta i inferior esquerra. Per exemple, la següent matriu és de Monge:

$$\begin{pmatrix} 10 & 17 & 13 & 28 \\ 16 & 22 & 16 & 29 \\ 24 & 28 & 22 & 34 \\ 11 & 13 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) (1 punt) Sigui $f_A(i)$ l'índex de la columna on apareix l'element mínim de la fila i-èsima (desempatant si cal agafant el de la columna de més a l'esquerra). Per exemple, a la matriu de dalt $f_A(0) = 0$, $f_A(1) = 0$, $f_A(2) = 2$ i $f_A(3) = 2$.

Demostreu que $f_A(0) \leq f_A(1) \leq \ldots \leq f_A(n-1)$ per qualsevol matriu de Monge A de mida $n \times n$.

(b) (1 punt) A continuació es descriu un algorisme de dividir i vèncer que calcula la funció f_A per a totes les files d'una matriu de Monge A:

(1) Construïm dues submatrius quadrades B_1 i B_2 de la matriu A de mida $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ de la forma següent: B_1 està formada per les files d'A amb índex parell i les columnes entre 0 i $\frac{n}{2} - 1$, i B_2 està formada per les files d'A amb índex parell i les columnes entre $\frac{n}{2}$ i $n - 1$.

(2) Recursivament determinem la columna on apareix el mínim més a l'esquerra per a tota fila de B_1 i de B_2.

(3) Calculem la columna on apareix el mínim més a l'esquerra de tota fila d'A.

Expliqueu com, a partir del resultat de (2), es pot fer (3) en temps $\Theta(n)$.

(c) (1 punt) Calculeu el cost en funció de n de l'algorisme proposat a l'apartat anterior per calcular la funció f_A per a totes les files d'una matriu de Monge A de mida $n \times n$. Assumiu que el pas (1) es pot dur a terme en temps $\Theta(n)$.

Examen Parcial EDA **Duració: 2.5 hores** **07/11/2016**

Problema 1 **(2 punts)**

En aquest problema no cal justificar les respostes.

(a) (0.8 pts.) Ompliu els buits de la taula següent (excepte la casella marcada amb **No ompliu**) amb els costos en temps per ordenar un vector d'enters de mida n usant els algorismes que s'indiquen. Assumiu probabilitat uniforme en el cas mig.

	Cas millor	*Cas mig*	*Cas pitjor*
Quicksort (amb partició de Hoare)			
Mergesort			
Inserció		**No ompliu**	

(b) (0.2 pts.) La solució de la recurrència $T(n) = 2T(n/4) + \Theta(1)$ és

(c) (0.2 pts.) La solució de la recurrència $T(n) = 2T(n/4) + \Theta(\sqrt{n})$ és

(d) (0.2 pts.) La solució de la recurrència $T(n) = 2T(n/4) + \Theta(n)$ és

(e) (0.3 pts.) Què calcula l'algorisme de Karatsuba? Quin cost té?

(f) (0.3 pts.) Què calcula l'algorisme de Strassen? Quin cost té?

Problema 2 **(3 punts)**

Donat un $n \geq 2$, diem que una seqüència de n enters $a_0, \ldots, a_{n-1}$ és *bicreixent* si $a_{n-1} < a_0$ i existeix un índex t (amb $0 \leq t < n$) que satisfà les següents condicions:

- $a_0 \leq \ldots \leq a_{t-1} \leq a_t$
- $a_{t+1} \leq a_{t+2} \leq \ldots \leq a_{n-1}$

Per exemple, la seqüència $12, 12, 15, 20, 1, 3, 3, 5, 9$ és bicreixent (preneu $t = 3$).

(a) (2 pts.) Implementeu en C++ una funció

bool *search* (**const vector**<**int**>& *a*, **int** *x*);

que, donats un vector a que conté una seqüència bicreixent i un enter x, retorni si x apareix a la seqüència o no. Si useu funcions auxiliars que no siguin de la llibreria estàndard de C++, implementeu-les també. Cal que la solució tingui cost $\Theta(\log(n))$ en temps en el cas pitjor.

(b) (1 pt.) Justifiqueu que el cost en temps en el cas pitjor de la vostra funció *search* és $\Theta(\log(n))$. Quan es dóna aquest cas pitjor?

Problema 3 **(2 punts)**

Considereu la següent funció:

```
int mystery(int m, int n) {
  int p = 1;
  int x = m;
  int y = n;
  while (y ≠ 0) {
    if (y % 2 == 0) {
      x *= x;
      y /= 2;
    }
    else {
      y −= 1;
      p *= x;
  } }
  return p;
}
```

(a) (1 pt.) Donats dos enters $m, n \geq 0$, què calcula *mystery*(m,n)? No cal justificar la resposta.

(b) (1 pt.) Analitzeu el cost en temps en el cas pitjor en funció de n de *mystery*(m, n).

Problema 4 **(3 punts)**

La *successió de Fibonacci* ve definida per la recurrència $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ i

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad \text{si } n \geq 2.$$

(a) (0.5 pts.) Sigui $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ l'anomenat *nombre d'or*. Demostreu que $\phi^{-1} = \phi - 1$.

(b) (1.5 pts.) Demostreu que per a tot $n \geq 0$ es té que

$$F(n) = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

(c) (1 pt.) Demostreu que $F(n) = \Theta(\phi^n)$.

Examen Parcial EDA **Duració: 2.5 hores** **20/04/2017**

Problema 1 **(2 punts)**

(a) (0.5 pts.) Calculeu el cost mig de l'algorisme d'ordenació per inserció per ordenar un vector de n enters diferents quan amb probabilitat $\frac{\log n}{n}$ s'escull un vector ordenat del revés i amb probabilitat $1 - \frac{\log n}{n}$ s'escull un vector ordenat.

(b) (0.5 pts.) Considereu la següent funció:

```
bool mystery(int n) {
  if (n ≤ 1) return false;
  if (n == 2) return true;
  if (n%2 == 0) return false;
  for (int i = 3; i*i ≤ n; i += 2)
    if (n%i == 0)
      return false;
  return true;
}
```

Completeu: la funció *mystery* calcula   i el seu cost és $O($ $)$. No cal justificar la resposta.

(c) (0.5 pts.) Demostreu que $n! = O(n^n)$ aplicant la definició (sense usar límits).

(d) (0.5 pts.) Demostreu que $n! = \Omega(2^n)$ aplicant la definició (sense usar límits).

Problema 2 **(3 punts)**

Donat un $n \geq 1$, es diu que una seqüència de n enters $a_0, \ldots, a_{n-1}$ és *unimodal* si existeix t amb $0 \leq t < n$ tal que $a_0 < \ldots < a_{t-1} < a_t$ i $a_t > a_{t+1} > \ldots > a_{n-1}$. A l'element a_t se l'anomena el *cim* de la seqüència.

Per exemple, la seqüència 1,3,5,9,4,1 és unimodal, i el seu cim és 9 (preneu $t = 3$).

(a) (1.5 pts.) Implementeu una funció **int** *top*(**const vector**<**int**>& *a*) en C++ que, donat un vector no buit a que conté una seqüència unimodal, retorni l'índex del cim de la seqüència. Si useu funcions auxiliars que no siguin de la llibreria estàndard de C++, implementeu-les també. Cal que la solució tingui cost $\Theta(\log n)$ en temps en el cas pitjor. Justifiqueu que el cost és en efecte $\Theta(\log n)$, i doneu una situació en què es pot donar aquest cas pitjor.

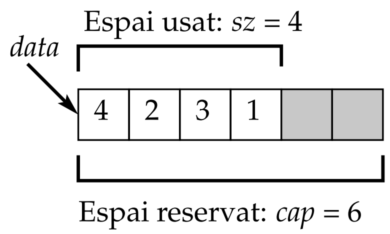
(b) (1.5 pts.) Implementeu una funció **bool** *search* (**const vector**<**int**>& a, **int** x) en C++ que, donat un vector no buit a que conté una seqüència unimodal i un enter x, retorni si x apareix a la seqüència o no. Si useu funcions auxiliars que no siguin de la llibreria estàndard de C++, implementeu-les també. Cal que la solució tingui cost $\Theta(\log n)$ en temps en el cas pitjor. Justifiqueu que el cost és en efecte $\Theta(\log n)$, i doneu una situació en què es pot donar aquest cas pitjor.

Problema 3 **(2 punts)**

La següent classe *vect* és una simplificació de la classe **vector** de la STL:

```
class vect {
    int sz, *data, cap;
    int new_capacity();
    void reserve(int new_cap);
```

```
public:
    vect ()                          { sz = cap = 0; data = nullptr; }
    int& operator[](int index)       { return data[index];           }
    int size ()                      { return sz;                    }
    void push_back(int value)        {
      if (sz ≥ cap) reserve (new_capacity ());
      data[sz] = value;
      ++sz;
    } };
```



En un objecte de la classe *vect*, el camp *sz* guarda el nombre d'elements que actualment el vector conté. La memòria reservada per al vector, apuntada pel camp *data*, sempre té espai per guardar els *sz* elements actuals, i possiblement algun més. Al nombre màxim d'elements que es podrien guardar en la memòria reservada se l'anomena capacitat, i és el valor del camp *cap*. El diagrama de la dreta il·lustra una possible implementació d'un vector amb contingut $(4,2,3,1)$. Noteu que les caselles grises estan reservades però no s'usen.

La raó d'aquesta estructura de dades és que cridar al sistema per demanar memòria és una operació costosa que no es vol fer sovint. La funció **void** *reserve* (**int** *new_cap*), la implementació de la qual no es detalla, s'encarrega d'això: demana un nou fragment de memòria prou gran com per poder-hi encabir *new_cap* elements, hi copia el contingut del vector antic i actualitza convenientment els camps *sz*, *data* i *cap*.

Observeu que, cada vegada que es crida la funció *push_back*, si no hi ha prou espai en reserva, es crida la funció **int** *new_capacity* () que, a partir de la capacitat actual, determina la nova capacitat per a la funció *reserve*.

(a) (0.5 pts.) Considereu la següent implementació de la funció *new_capacity*:

```
int new_capacity () {
    const int A; // A és un paràmetre prefixat tal que A ≥ 1
    return cap + A; }
```

Quant val exactament *cap* en un vector que inicialment té *cap* = 0 i al qual s'ha aplicat l'operació *reserve* m cops? Anomenem $C(m)$ a aquesta quantitat.

Si fem n crides a *push_back* sobre un vector inicialment buit ($sz = cap = 0$), quants cops **exactament** s'ha hagut de fer la crida a *reserve* (és a dir, quin és el valor de m tal que $n \leq C(m)$ i $C(m-1) < n$) ? Doneu-ne també una expressió asimptòtica el més precisa i simple possible.

(b) (0.75 pts.) Demostreu que la solució de la recurrència definida per $C(0) = 0$, $C(m+1) = AC(m) + B$, on $A > 1$ i $B \geq 1$, és $C(m) = \frac{BA^m - B}{A-1}$ per a $m \geq 0$.

(c) (0.75 pts.) El mateix que a l'apartat (a), però amb la següent funció *new_capacity*:

```
int new_capacity() {
   const int A, B; // A,B són paràmetres prefixats tals que A > 1, B ≥ 1
   return A*cap + B; }
```

Problema 4 **(3 punts)**

Volem tenir una funció

int *stable_partition* (**int** x, **vector**<**int**>& a)

que, donats un enter x i un vector de n enters diferents $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, reordena el contingut del vector de forma que tots els elements del subvector $a[0..k]$ són menors o iguals a x, i tots els elements del subvector $a[k+1..n-1]$ són majors que x, i també torna l'índex k ($k = -1$ si tots els elements de a són majors que x).

A més, l'ordre relatiu original dels elements de a es respecta:

- si $a[i]$ i $a[j]$ amb $i < j$ són tots dos menors o iguals que x, llavors en el vector final $a[i]$ estarà abans que $a[j]$, i tots dos s'hauran col·locat a la "part"$a[0..k]$ que conté els elements $\leq x$;
- si $a[i]$ i $a[j]$ amb $i < j$ són tots dos majors que x, llavors en el vector final $a[i]$ estarà abans que $a[j]$, i tots dos s'hauran col·locat a la "part"$a[k+1..n-1]$ que conté els elements $> x$.

Per exemple, donats $x = 2$ i la seqüència $a = (1,5,3,0,4)$, voldríem que la funció actualitzés a a $(1,0,5,3,4)$, i que retornés $k = 1$.

(a) (1 pt.) Implementeu la funció *stable_partition* en `C++`. Cal que el cost en temps sigui $\Theta(n)$. Justifiqueu el cost. Quin és el cost en espai de la memòria auxiliar que fa servir la vostra implementació?

(b) (0.5 pts.) Què fa la següent funció *mystery*? No cal justificar la resposta.

```
void mystery_aux(vector<int>& a, int l, int r) {
  // Pre: 0 ≤ l ≤ r < a.size()
  for (int i = l, j = r; i < j; ++i, --j) swap(a[i], a[j]);
}

void mystery(vector<int>& a, int l, int p, int r) {
  // Pre: 0 ≤ l ≤ p ≤ r < a.size()
  mystery_aux(a, l, p);
  mystery_aux(a, p+1, r);
  mystery_aux(a, l, r);
}
```

(c) (1.5 pts.) Ompliu els buits de la següent implementació alternativa de *stable_partition* i analitzeu-ne el cost en temps en el cas pitjor. Assumiu que, en el cas pitjor, a cada crida recursiva de *stable_partition_rec* es té que $q - p = \Theta(r - l + 1)$.

```
int stable_partition (int x, vector<int>& a) {
  return stable_partition_rec (x, a, 0, a.size()−1);
}

int stable_partition_rec (int x, vector<int>& a, int l, int r) {
  if (l == r) {
    if (a[l] ≤ x) return l;
    else        return [          ] ;
  }
  int m = (l+r)/2;
  int p = stable_partition_rec (x, a, l, m);
  int q = stable_partition_rec (x, a, [          ] , r);
  mystery(a, [          ] , m, [          ] );
  return [          ] ; }
```

Anàlisi del cost:

2

Exàmens d’Ordinador

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2 hores 13/12/2010

Torn 1

Problema 1

Jutge.org, Problema P39846: Tresors en un mapa (4)
(`https://www.jutge.org/problems/P39846_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P71701: Reis pacífics
(`https://www.jutge.org/problems/P71701_ca`).

Torn 2

Problema 1

Jutge.org, Problema P84415: La bossa de les paraules
(`https://www.jutge.org/problems/P84415_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P22295: La tortuga viatgera
(`https://www.jutge.org/problems/P22295_ca`).

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2 hores 19/5/2011

Problema 1

Jutge.org, Problema P69865: Recollint monedes
(`https://www.jutge.org/problems/P69865_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P98123: Omplint la bossa
(`https://www.jutge.org/problems/P98123_ca`).

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2 hores 13/12/2011

Problema 1

Jutge.org, Problema P90766: Tresors en un mapa (3)
(`https://www.jutge.org/problems/P90766_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P67329: ADN
(`https://www.jutge.org/problems/P67329_ca`).

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2 hores 14/05/2012

Problema 1

Jutge.org, Problema P47386: Xafardeig
(`https://www.jutge.org/problems/P47386_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P87462: Pacman
(`https://www.jutge.org/problems/P87462_ca`).

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2 hores 29/11/2012

Problema 1

Jutge.org, Problema P90861: Cues d'un supermercat (1)
(`https://www.jutge.org/problems/P90861_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P14952: Ordenació topològica
(`https://www.jutge.org/problems/P14952_ca`).

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2 hores 22/5/2013

Problema 1

Jutge.org, Problem X07174: Nombres sense prefixos prohibits
(`https://www.jutge.org/problems/X07174_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema X34032: El cavall afamat
(`https://www.jutge.org/problems/X34032_ca`).

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2 hores 4/12/2013

Problema 1

Jutge.org, Problem P60796: Tresors en un mapa (2)
(`https://www.jutge.org/problems/P60796_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema X21319: Valors d'un circuit
(`https://www.jutge.org/problems/X21319_ca`).

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2 hores 19/5/2014

Problema 1

Jutge.org, Problema P81453: Camí més curt
(`https://www.jutge.org/problems/P81453_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P89318: Paraules prohibides
(`https://www.jutge.org/problems/P89318_ca`).

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2 hores 22/12/2014

Problema 1

Jutge.org, Problema X41530: Bosc
(`https://www.jutge.org/problems/X41530_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema X92609: Dues monedes de cada (3)
(`https://www.jutge.org/problems/X92609_ca`).

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2.5 hores 25/05/2015

Problema 1

Jutge.org, Problema P86108: LOL
(`https://www.jutge.org/problems/P86108_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P27258: Monstres en un mapa
(`https://www.jutge.org/problems/P27258_ca`).

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2.5 hores 22/12/2015

Problema 1

Jutge.org, Problema P43164: Tresors en un mapa (5)
(`https://www.jutge.org/problems/P43164_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P31389: Torres dins d'un rectangle
(`https://www.jutge.org/problems/P31389_ca`).

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2.5 hores 19/05/2016

Problema 1

Jutge.org, Problema P12887: Minimum spanning trees
(`https://www.jutge.org/problems/P12887_en`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P54070: Posició d'inserció més a la dreta
(`https://www.jutge.org/problems/P54070_ca`).

Examen d'Ordinador EDA Duració: 2.5 hores 15/12/2016

Torn 1

Problema 1

Jutge.org, Problema P76807: Sudoku
(`https://www.jutge.org/problems/P76807_en`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P99753: Vector bicreixent
(`https://www.jutge.org/problems/P99753_ca`).

Torn 2

Problema 1

Jutge.org, Problema P18679: Barra d'equilibris (1)
(`https://www.jutge.org/problems/P18679_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P74219: Fibonacci numbers (2)
(`https://www.jutge.org/problems/P74219_en`).

Examen d'Ordinador EDA   Duració: 2.5 hores   25/05/2017

Problema 1

Jutge.org, Problema P49889: Consonants i vocals (1)
(`https://www.jutge.org/problems/P49889_ca`).

Problema 2

Jutge.org, Problema P96413: Nombre d'Erdos (2)
(`https://www.jutge.org/problems/P96413_ca`).

3

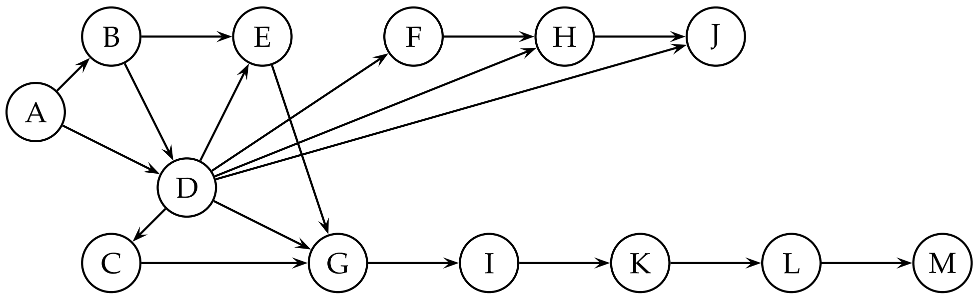
Exàmens Finals

Examen Final EDA **Duració: 3 hores** **18/01/2011**

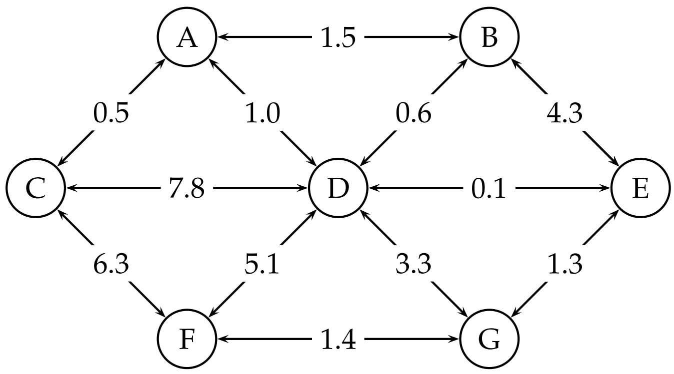
Problema 1 **(1,5 punts)**

Mostreu els passos que heu seguit per trobar les vostres respostes.

a) Doneu l'ordenació topològica més petita en ordre alfabètic del graf següent.

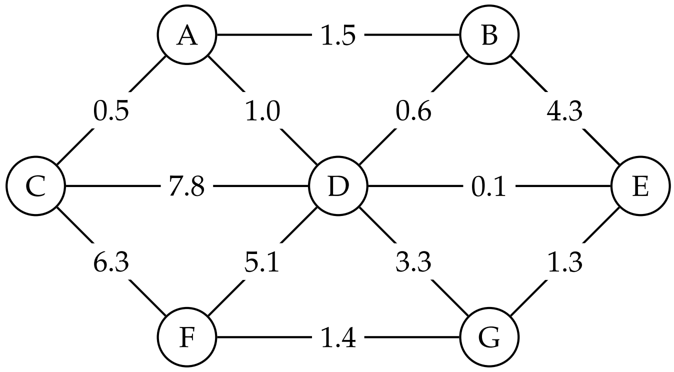


b) Feu servir l'algorisme de Dijkstra per trobar les distàncies mínimes de A cap a tots els altres vèrtexs del graf següent. Escriviu la seqüència de vectors v, amb $v[X]$ = "distància de A a X".



$v[A]$	$v[B]$	$v[C]$	$v[D]$	$v[E]$	$v[F]$	$v[G]$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞

c) Feu servir l'algorisme de Prim per trobar un arbre d'expansió mínim del graf següent.



Problema 2 **(2 punts)**

Considereu que n és un enter positiu i que G és un graf de N nodes (vèrtexs) i E arestes (arcs) amb pesos. Per cadascuna de les afirmacions següents, digueu amb una petita justificació, si són certes o falses.

- Si f és una funció de la forma $f(n) = An^k$ (amb A i k constants), llavors $f \in O(2^n)$.
- Donats dos vèrtexs u i v de G i un camí mínim C de u a v aleshores, per tot vèrtex w de C, el prefix de C acabat en w és un camí mínim de u a w.
- Si G és connex aleshores l'arbre d'expansió mínim de G conté les $N - 1$ arestes de menys pes.
- Sigui G un graf dirigit i u,v dos dels seus vèrtexs. Si s'afegeix un 1 al pes de cada arc, aleshores el camí mínim de u a v segueix sent mínim.

Problema 3 — Arbres binaris de cerca **(1 punt)**

Considereu la definició de tipus següent per als arbres binaris de cerca:

```
struct Node {
    int x;          // Informació en el node
    Node* fe;       // Punter al fill esquerre
    Node* fd;       // Punter al fill dret
};

typedef Node* Abc;  // Un ABC es denota per un punter a la seva arrel
                    // (null si és buit)
```

Implementeu en C++ un procediment **void** *escriu* (*Abc a*); que escrigui, en ordre creixent, tots els elements de l'arbre binari de cerca a. Digueu quin és el seu cost.

Problema 4 — Complexitat **(1 punt)**

Considereu els dos problemes següents:

- Donats n objectes amb pesos $p_1, \ldots, p_n$ i una alforja amb capacitat suficient, decidir si es poden repartir equitativament aquests objectes en les dues bosses de l'alforja.

  Recordeu que una alforja és un sac obert pel mig i tancat pels caps, els quals formen dues bosses grosses, ordinàriament quadrangulars. Aleshores, es demana si es poden repartir tots els objectes entre les dues bosses de manera que cada objecte s'ha de ficar en una bossa i les dues bosses porten exactament la mateixa càrrega.

- Donats n objectes amb pesos $p_1, \ldots, p_n$ i una motxilla amb capacitat C, decidir si amb exactament tres objectes es pot carregar la motxilla completament (és a dir, la suma dels pesos dels 3 objectes és C).

Sota la hipòtesi $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ digueu per cadascun d'aquests problemes si pertany o no a la classe $\mathbf{P}$.

Problema 5 — Diccionaris **(2.5 punts)**

Durant la guerra de Vietnam, i abans de ser enviat a Cambodja per assessinar el coronel Kurtz, el capità Willard tenia sota les seves ordres n soldats.

Durant el viatge per la jungla, el capità Willard va constatar que els seus homes podien tenir o no confiança els uns en els altres. Per això, va confeccionar un conjunt $E = \{(u_1, v_1), \ldots, (u_m, v_m)\}$ on cada parell (u_i, u_j) indica que el soldat u_i té confiança en el soldat u_j.

El capità Willard va comprende que la seva missió només podria tenir èxit si la confiança entre els seus soldats era mútua. És a dir, que si u_i confia en u_j, llavors u_j també confia en u_i.

Acostumat a pensar fredament en situacions d'emergència, el capità va entendre que havia de comprovar si el digraf definit per E era o no simètric. I, evidentment, podria doncs resoldre el seu problema en temps $\Theta(n^2)$. Pero les bales ja començaven a caure i necessitava un algorisme més eficient!

Ajudeu en Willard tot proposant un algorisme que, en temps $O(m)$ en el cas mitjà, determini si el digraf donat per E és o no simètric.

Problema 6 — Programació dinàmica **(2 punts)**

La profunditat $p(T)$ d'un arbre binari T es defineix recursivament així:

$$\begin{cases} p(\emptyset) = 0, \\ p(T) = 1 + max(p(T_E), p(T_D)) \text{ si } T \neq \emptyset, \end{cases}$$

on $\emptyset$ és l'arbre buit, T_E és l'arbre esquerre i T_D és l'arbre dret de T.

Donat un nombre natural d, es vol calcular quina és la mida (el nombre de nodes) de l'arbre AVL més petit de profunditat exactament d. Representarem aquest valor com $f(d)$.

a) Demostreu que $f(d) = f(d-1) + f(d-2) + 1$ si $d \geq 2$.

b) Dissenyeu un algorisme de programació dinàmica eficient que calculi $f(d)$. Quin cost temporal té? I quin cost en espai? Justifiqueu les vostres respostes.

Examen Final EDA **Duració: 3 hores** **6/6/2011**

Problema 1 **(4 punts)**

a) Considereu l'algorisme següent:

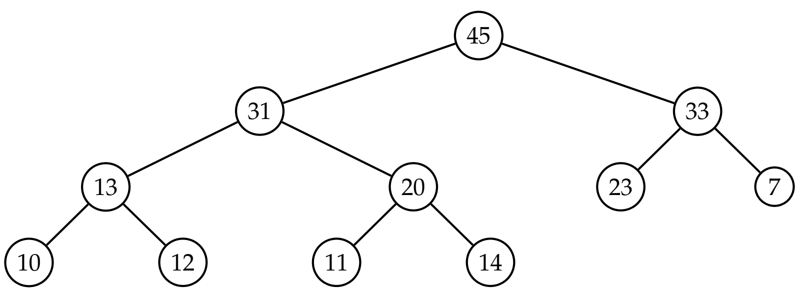
```
const int K = ...

void desperdici (int n)  {
    if (n > 0) {
        for(int i = 0; i < n; ++i) {
            for(int j = 0; j < i; ++j) {
                cout << i << j << n << endl;
            }
        }
        for(int i = 0; i < K; ++i)  desperdici (n/2);
    }
}
```

Doneu el seu cost en funció de n (segons quin sigui el valor de K). Mostreu els passos que heu seguit.

b) Esteu desenvolupant un algorisme de dividir i vèncer que, per ser útil a la pràctica, ha de tenir un cost assimptòtic $O(n \log n)$. Heu decidit dividir el problema, recursivament, en 3 subproblemes de mida $n/4$, on n és la mida del problema original.

Utilitzant aquesta estratègia és possible aconseguir la complexitat desitjada? Si és el cas, quin és el cost màxim (en funció de n) que es pot utilitzar per dividir el problema original i combinar les solucions dels subproblemes? Expliqueu-ho.

c) El max-heap de la figura següent és el resultat d'una seqüència d'operacions d'inserció i esborrat-del-màxim. La darrera operació va ser una inserció.

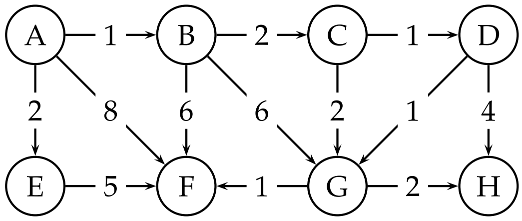


Llisteu les claus que poden ser l'última clau inserida $\boxed{}$.

Dibuixeu el max-heap resultant d'esborrar el màxim del heap de la figura.

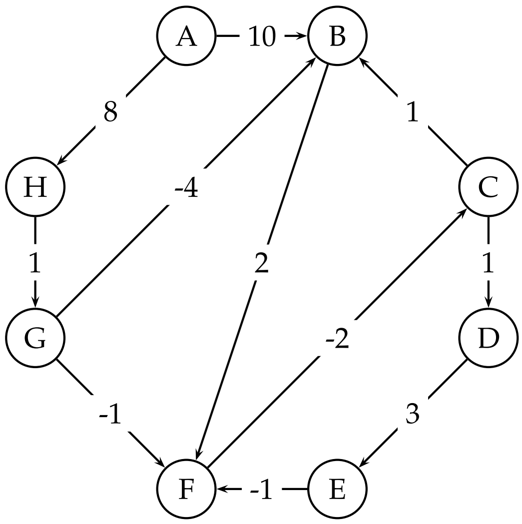
d) Feu servir l'algorisme de Dijkstra per trobar les distàncies mínimes de A cap a tots els altres vèrtexs del graf següent. Escriviu la seqüència de vectors v, amb $v[X]$ =

"distància de A a X".



$v[A]$	$v[B]$	$v[C]$	$v[D]$	$v[E]$	$v[F]$	$v[G]$	$v[H]$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

e) Feu servir l'algorisme de Bellman-Ford per trobar les distàncies mínimes de A cap a tots els altres vèrtexs del graf següent. Escriviu la seqüència de vectors v, amb $v[X]$ = "distància de A a X".



$v[A]$	$v[B]$	$v[C]$	$v[D]$	$v[E]$	$v[F]$	$v[G]$	$v[H]$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Problema 2 **(2 punts)**

Considereu la definició de tipus següent per als arbres binaris de cerca:

```
struct Node {
    Elem info;          // Informació en el node
    Node* fe;           // Punter al fill esquerre
    Node* fd;           // Punter al fill dret
};

typedef Node* Abc;  // Un ABC es denota per un punter a la seva arrel
                    // (null si és buit)
```

Donat un arbre binari de cerca t i un element x, considereu la funció `misteri` següent:

```
int comptar(Abc t){
  if (t == null) return 0;
  return 1 + comptar(t->fe) + comptar(t->fd);
}

int misteri (Abc t, Elem x){
  if (t == null) return 0;
  if (t->info < x) return 1 + comptar(t->fe) + misteri (t->fd, x);
  return misteri (t->fe, x);
}
```

a) Digueu què fa la funció `misteri`.

b) Digueu justificadament quin és el seu cost, en el cas pitjor, en funció de la mida de l'arbre.

c) Considereu, ara, la definició de tipus següent:

```
struct NouNode {
    Elem info;          // Informació en el node
    int m;              // Talla de l'arbre arrelat al node, és a dir,
                        // el nombre de nodes (arrel inclosa)
                        // del subarbre del qual és arrel.
    NouNode* fe;           // Punter al fill esquerre
    NouNode* fd;           // Punter al fill dret
};

typedef NouNode* Abc;
```

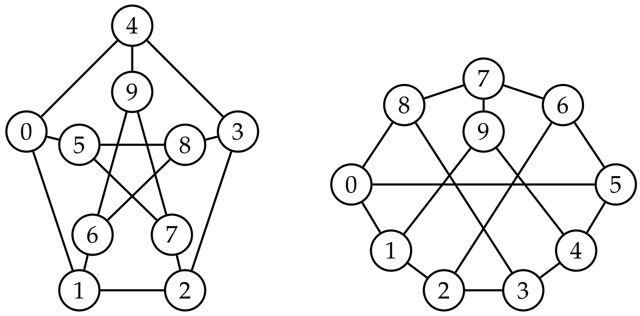
Mostreu una nova implementació (més eficient en general) de la funció `misteri` amb aquesta definició de tipus.

d) Millora el cost en el cas pitjor de `misteri` amb la nova implementació? Expliqueu-ho.

e) Quin és el cost en el cas pitjor de `misteri` amb la nova implementació si l'arbre d'entrada és un AVL? Expliqueu-ho.

Problema 3: Cerca exhaustiva **(2 punts)**

Dos grafs no dirigits $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ es diuen *isomorfs* si existeix una bijecció $f : V_1 \to V_2$ tal que $\{u, v\} \in E_1$ si i només si $\{f(u), f(v)\} \in E_2$. Per exemple, els dos grafs següents són isomorfs, com ho certifica la bijecció $f(0) = 8$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$, $f(3) = 6$, $f(4) = 7$, $f(5) = 0$, $f(6) = 4$, $f(7) = 1$, $f(8) = 5$ i $f(9) = 9$.



Donats dos subconjunts $S_1 \subseteq V_1$, $S_2 \subseteq V_2$, i una bijecció $f : S_1 \to S_2$, diem que f és un *isomorfisme parcial* per a S_1 i S_2 quan per a tot parell $u, v \in S_1$ es compleix $\{u, v\} \in E_1$ si i només si $\{f(u), f(v)\} \in E_2$. Observeu que si f és un isomorfisme parcial per a $S_1 = V_1$ i $S_2 = V_2$, llavors G_1 i G_2 són isomorfs.

L'equip de professors d'EDA us ha dissenyat un algorisme de tornada enrera (*backtracking*) per trobar si dos grafs donats són isomorfs o no (i en el cas que ho siguin, retornar una bijecció que ho certifiqui). Malauradament, en enviar-vos el seu programa, part del codi s'ha perdut. Així doncs, completeu la classe següent en `C++`, tot indicant quina instrucció o condició (només una per espai) posaríeu cada espai requadrat.

Observeu que els grafs (no dirigits) es troben implementats amb matrius d'adjacència. Per tant, $G[u][v]$ és un booleà indicant si u i v es troben connectats en G, i val el mateix que $G[v][u]$.

Observeu també que se suposa que els grafs ja tenen el mateix nombre de vèrtexs i d'arestes (altrament seria immediat concloure que no són isomorfs).

```
typedef matrix<bool> graf;

  class Isomorfisme {
      graf G1, G2;            // els grafs d'entrada
      int n;                  // el nombre de vèrtexs
      vector<int> f;          // la bijecció parcial
      vector<bool> usat;      // usat[w] = (algun v ≤ u compleix f[v] = w)
      bool iso;               // indica si G1 i G2 són isomorfs

      bool backtracking (int u) {
          if (                              ) return true;
          for (int w=0; w<n; ++w) {
              if (not usat[w]) {
                  f[u] = w;
                  usat[w] = true;
```

```
                if ( isomorfisme_parcial (u)) if ( backtracking (u+1)) return true;


            }
        }
        return false;
    }

    bool isomorfisme_parcial (int u) {
        for (int v=0; v<u; ++v) {
            if (                                        ) return false;
        }
        return true;
    }

public:
    // Precondició: G1 i G2 tenen el mateix nombre de vèrtexs i d'arestes.
    Isomorfisme (graf G1, graf G2) {
        this->G1 = G1; this->G2 = G2; n = G1.size();
        f = vector<int>(n);
        usat = vector<boolean>(n,false);

    }

    bool isomorfs ()          { return iso ; }

    // Precondició: isomorfs().
    vector<int> bijeccio () { return f;    }
}
```

Problema 4 — Complexitat **(2 punts)**

Considereu els dos problemes següents:

CLIQUE: Donat un graf $G = (V, E)$ i un natural k, determinar si G conté un subgraf complet de k vèrtexs. Recordeu que un graf complet és aquell que conté totes les arestes possibles entre tots els seus vèrtexs.

CLIQUE-3: És el problema del CLIQUE restringit a grafs en què cada vèrtex té com a molt grau 3.

Sabem que CLIQUE és un problema NP-complet.

a) Proveu que CLIQUE-3 pertany a la classe NP.

b) Digueu què falla a la prova següent de la NP-completesa de CLIQUE-3.

"Sabem que el problema del CLIQUE per a grafs qualssevol és NP-complet, per tant és suficient donar una reducció polinòmica de CLIQUE-3 a CLIQUE. Donat un graf amb vèrtexs de grau ≤ 3, i un paràmetre k, la reducció deixa idèntics tant el graf com el paràmetre: clarament el resultat de la reducció és una entrada possible del problema del CLIQUE. A més, la solució a tots dos problemes és idèntica, cosa que prova la correctesa de la reducció i, per tant, juntament amb la prova de l'apartat a), la NP-completesa de CLIQUE-3."

Examen Final EDA 13/1/2012

Problema 1 (2 punts)

a) Doneu el cost en el casos pitjor, millor i mitjà de l'algorisme més eficient (en el cas pitjor) que conegueu per construir un max-heap a partir d'una taula donada.

Convertiu en max-heap la taula següent usant l'algorisme de la resposta anterior.

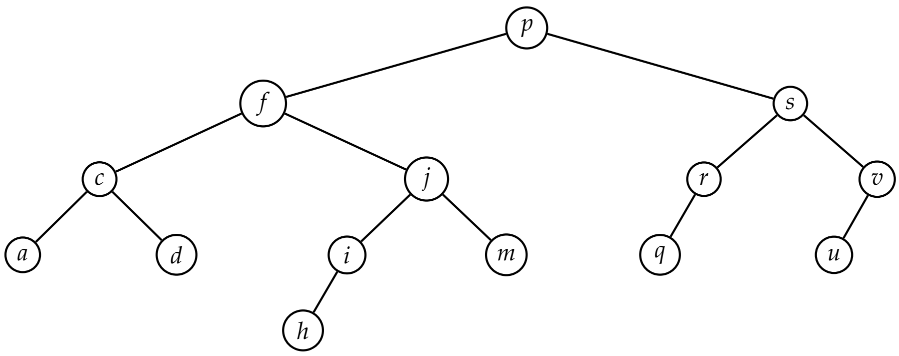
2	9	7	6	5	8	1	8	6	5	3	7	4

Max-heap:

b) Per a l'alfabet $\{A, B, C, D\}$ i la taula de freqüències següent per a 100 caràcters, doneu un codi de Huffman i dibuixeu l'arbre corresponent.

A	70
B	10
C	15
D	5

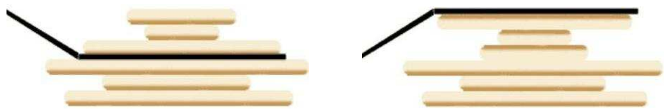
c) Dibuixeu l'arbre resultant d'inserir les tres claus x, y, z en aquest ordre a l'arbre AVL de la figura. Noteu que les claus s'ordenen per ordre alfabètic.



d) Proposeu, sense donar codi, un algorisme, el més eficient possible, per calcular M^n on M és una matriu de $n \times n$ naturals de n bits cadascun i n és gran.

Problema 2 (2 punts)

L'ordenació per pancakes (una mena de *crêpes* gruixuts) és una variació dels problemes d'ordenació en la qual l'única operació permesa és girar els elements d'un prefix de la taula a ordenar. Aquesta operació es pot visualitzar pensant en una pila de pancakes en la qual es



permet agafar els k pancakes superiors amb una espàtula i donar-los la volta d'un sol cop. Vegeu la figura.

(A diferència dels algorismes d'ordenació tradicionals, que intenten ordenar amb el mínim nombre possible de comparacions, l'objectiu de l'ordenació per pancakes és ordenar la seqüència amb el mínim nombre possible de girs.)

Doneu un algorisme per ordenar una taula amb n pancakes utilitzant $2n$ girs o menys.

Pista: inspireu-vos en l'algorisme d'ordenació per selecció.

L'enunciat d'aquest problema es basa en la pàgina:

`http://en.wikipedia.org/wiki/Pancake_sorting`

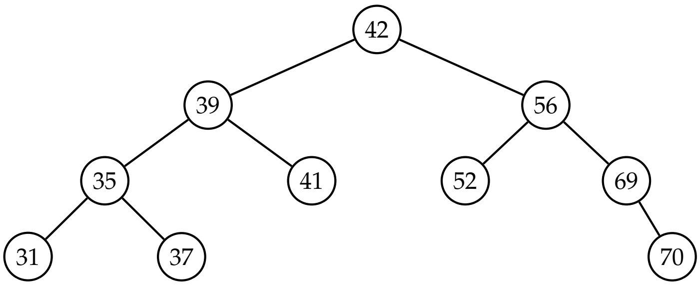
Problema 3 **(2 punts)**

Considereu la definició de tipus següent per als arbres binaris de cerca:

```
struct Node {
    Elem info;      // Informació en el node
    Node* fe;       // Punter al fill esquerre
    Node* fd;       // Punter al fill dret
};

typedef Node* Abc;  // Un ABC es denota per un punter a la seva arrel
                    // (null si és buit)
```

Implementeu en `C++` i analitzeu en cas pitjor una funció `Node* seguent(Abc a, Elem x)` que, donat un arbre binari de cerca `a` i un element `x`, retorni un punter al node que conté el mínim element d'entre els que són més grans que `x` en `a`. Si `x` és més gran o igual que l'element màxim de l'arbre, retorneu un punter nul.

Per exemple, per a l'arbre de la figura, el següent de 31 hauria de ser un punter a 35, el següent de 32 també hauria de ser un punter a 35, el següent de 69 hauria de ser un punter a 70, i el següent de 70 hauria de ser un punter nul.



Fixeu-vos que `x` pot no ser a l'arbre i que l'arbre pot ser buit.

Problema 4 **(2 punts)**

L'equip de professors d'EDA us ha dissenyat un algorisme que, donat un graf dirigit amb costos positius als arcs, i dos vèrtexs x i y, calcula el cost mínim per anar de x a y, i el nombre de maneres d'anar de x a y amb tal cost mínim. Malauradament, en enviar-vos el seu programa, part del codi s'ha perdut. Així doncs, completeu el programa següent en `C++`, tot indicant quina instrucció o condició (només una per espai) posaríeu en cada espai requadrat.

Observeu que el graf es troba implementat amb llistes d'adjacència. Per tant, $G[u]$ és un vector que conté els successors del vèrtex u, junt amb el cost del corresponent arc.

```
typedef pair<int, int>              ArcP; // arc amb pes
typedef vector< vector<ArcP> > GrafP; // graf amb pesos

const int INFINIT = numeric_limits<int>::max();

void calcula (const GrafP& G, int s, vector<int>& d, vector<int>& p) {
  int n = G.size ();
  d = vector<int>(n, INFINIT);

  p = vector<int>(n, 0);

  vector<bool> S(n, false);
  priority_queue <ArcP, vector<ArcP>, greater<ArcP> > Q;

  while (not Q.empty()) {
    int u = Q.top (). second; Q.pop ();
    if (not S[u]) {
      S[u] = true;
      for (int i = 0; i < int(G[u]. size ()); ++i) {
        int v = G[u][i]. first ;
        int c = G[u][i].second;
```

```
        if (d[v] > d[u] + c) {
          d[v] = [          ]
          p[v] = [          ]
          [                 ]
        }
        else if ( [          ] ) [          ]
} } } }

int main(void) {
  int n, m;
  while (cin >> n >> m) {
    GrafP G(n);
    for (int k = 0; k < m; ++k) {
      int u, v, c;
      cin >> u >> v >> c;
      G[u].push_back(ArcP(v,c));
    }
    int x, y;
    cin >> x >> y;
    vector<int> d,p;
    calcula(G, x, d, p);
    if (d[y] == INFINIT)
       cout << "No hi ha cami de " << x << " a " << y << endl;
    else
       cout << "Cost " << d[y] << ", " << p[y] << " manera(es)" << endl;
} }
```

Problema 5 **(2 punts)**

Considereu els dos problemes següents:

RECOBRIMENT: Donat un graf $G = (V, E)$ i un nombre natural k, determinar si G té un recobriment de les arestes amb k vèrtexs. És a dir, determinar si existeix un subconjunt $A \subseteq V$ de k vèrtexs tal que per cada $\{u, v\} \in E$ tenim que almenys un dels extrems u o v pertany a A.

CLAUS: Donats un nombre natural k, un conjunt de panys $\mathcal{P}$ i un conjunt de claus $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ on cada $C_i \subseteq \mathcal{P}$ representa el subconjunt de panys que la i-èsima clau pot obrir, determinar si existeixen k claus que obrin tots els panys.

Sabem que RECOBRIMENT és un problema NP-complet. Demostreu que CLAUS (altrament conegut com *SET COVER*) també ho és.

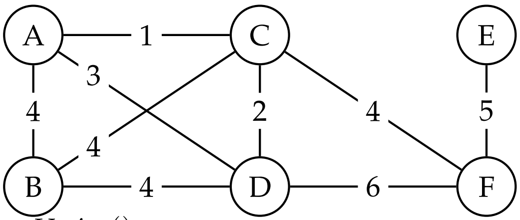
Pista: Considereu que els vèrtexs són claus i que les arestes són panys.

Examen Final EDA 15/6/2012

Problema 1 (3 punts)

a) (0,5 punts) Proposeu un graf de quatre o més vèrtexs, no dirigit i connex, si existeix, tal que l'ordre en què es visiten els vèrtexs en el recorregut en profunditat sigui idèntic al del recorregut en amplada. Podeu suposar que tots dos recorreguts comencen en el mateix vèrtex, que cal indicar a l'exemple. Si no existeix cap graf indiqueu per què.

b) (0,5 punts) Dibuixeu un arbre d'expansió mínim del graf de la figura i digueu si és únic.



c) // pre: $0 <= e <= d < V.size()$

```
void f(int e, int d, vector<int>& V) {
  if (e < d) {
    int m = (e + d)/2;
    intercanvia (V[e], V[m]);
    f(e, m, V);
    intercanvia (V[e], V[m]);
    f(e, m, V);
    intercanvia (V[m+1], V[d]);
    f(m + 1, d, V);
    intercanvia (V[m+1], V[d]);
  }
}
```

(0,5 punts) Què fa aquest codi?

(0,5 punts) Quin cost té? Mostreu com heu obtingut la resposta.

d) Digueu si les afirmacions següents són certes o falses.

- (0,25 punts) En un min-heap de n elements diferents, representat en una taula, l'element màxim ocupa una de les $\lfloor n/2 \rfloor$ posicions finals. ☐
- (0,25 punts) L'algorisme d'ordenació ràpida (quicksort) és l'algorisme (entre els explicats a l'assignatura) d'ordenació més eficient en tots els casos. ☐
- (0,25 punts) En un graf no dirigit el nombre de vèrtexs amb grau senar ha de ser parell. ☐
- (0,25 punts) Un problema decisional és un problema que només té dues possibles respostes: "sí" o "no". ☐

Problema 2 (Taules de dispersió) **(2 punts)**

Considereu la següent implementació d'una taula de dispersió amb encadenament separat semblant a la vista a classe:

```
typedef pair<Key, Info> KeyInfo;
class HashTable {
public:
    int n = 0;                          // nombre d'elements
    int M = 1;                          // mida inicial de la taula
    vector< vector<KeyInfo> > v(M);     // taula amb encadenament separat

    void insert (const Key& k, const Info& i) {
        int p = hash_function (k)%M;
        v[p].push_back(KeyInfo(k, i ));
        double alpha = double(++n)/M;
        if (alpha > 2) resize ();
    }
    ...
```

a) (1.0 punts) Implementeu l'operació *resize* () de l'última línia: assumint que la taula de dispersió té factor de càrrega $\alpha > 2$, una crida a *resize* () la redimensiona per a què tingui factor de càrrega $\alpha = 1$. Recordeu que $\alpha := n/M$.

b) (0.5 punts) Assumint que tant *hash_function* () com *push_back*() tenen cost $\Theta(1)$ i que el factor de càrrega α satisfà la pre-condició $\alpha > 2$, quin cost té, en el cas pitjor, la vostra implementació de *resize* () en funció del nombre d'elements n? Justifiqueu la resposta.

c) (0.5 punts) Assumint que tant *hash_function* com *push_back*() tenen cost $\Theta(1)$, quin cost té, en el cas pitjor, inserir consecutivament n elements en una taula inicialment buida fent servir l'operació *insert* i la vostra implementació de *resize* ? Justifiqueu la resposta.

Problema 3 **(2 punts)**

Un arbre binari de cerca per a enters vé definit pel tipus següent:

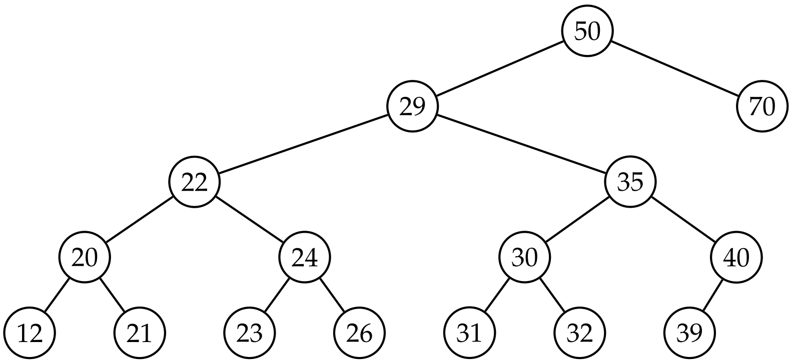
```
struct Node {
    Node* fe;
    Node* fd;
    int x;
};
```

a) (1.0 punts) Implementeu la funció

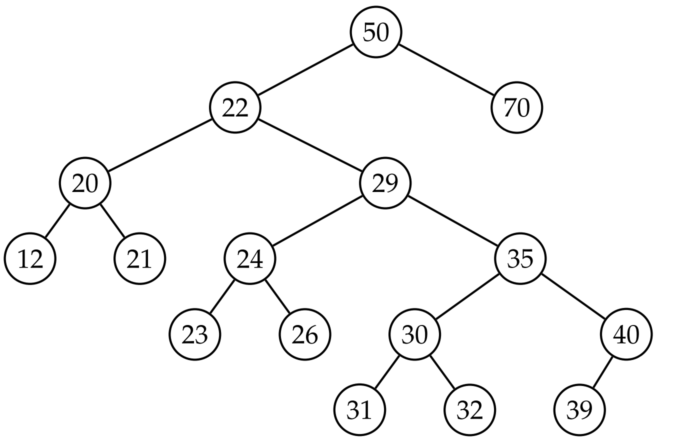
```
void rotacio (Node*& a, int x);
```

que, donats l'arrel d'un arbre binari de cerca a i un element x, apliqui una rotació com la de l'exemple (d'abaix) al node de a que conté x. Podeu suposar que a sempre conté un node amb x, i que aquest node té prou descendents com per poder-hi aplicar la rotació.

Per exemple, el resultat d'aplicar la rotació a l'element 29 d'aquest arbre



dóna aquest arbre



b) (0.5 punts) Digueu quin és el cost de la funció `rotacio` en el cas pitjor (expliciteu quin és el cas pitjor) en funció del nombre de nodes n de l'arbre.

c) (0.5 punts) Contesteu de nou la pregunta b) suposant que a és un arbre AVL.

Problema 4 **(2 punts)**

L'equip de professors d'EDA ha dissenyat un programa de backtracking que resol el problema següent: donat un conjunt de n enters positius, calcula la diferència mínima que es pot obtenir "partint" el conjunt original en dos subconjunts i comparant les sumes dels seus elements. Per exemple, donat el conjunt d'entrada $\{3,4,2\}$, la diferència mínima és 1 i es pot obtenir amb la partició: $\{3,2\}$ i $\{4\}$. En canvi, amb el conjunt d'entrada $\{3,4,1,1,1\}$ la diferència mínima és 0 i es pot obtenir amb la partició: $\{3,1,1\}$ i $\{4,1\}$. Malauradament, en enviar-vos el programa, part del codi s'ha perdut. Així doncs, completeu el programa següent en `C++`, tot indicant quina instrucció o condició (només una) posaríeu en cada espai requadrat.

```
class Particio {
  int n, min_dif, dif, total;
  vector<int> v;

  void recursiu(int i) {
    int va = valor_absolut(dif);
    if (                    ) return;
    if (i == n)                    ;
    else {
      dif += v[i]; total -= v[i];
      recursiu(i+1);
                          ;
      recursiu(i+1);
      dif += v[i]; total += v[i];
    }
  }

  public:
    Particio(int n, int total, vector<int>& v) {
      this -> n = n;
      this -> total = total;
      this -> v = v;
      min_dif = total;
      dif = 0;
      recursiu(0);
      cout << min_dif << endl;
    }
};

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  int total = 0;
  vector<int> v(n);
  for (int i = 0; i<n; ++i) {cin >> v[i];                    ;}
  Particio p(n, total, v);
}
```

Problema 5 **(1 punt)**

Sigui A un problema del qual se sap que és NP-complet, i B un problema del qual només se sap que pertany a NP. Sigui X un problema qualsevol. Responeu raonadament si les afirmacions següents són certes o no:

a) (0.25 punts) Suposeu que X es pot reduir polinòmicament a A. Pertany X a NP? És X NP-complet?

b) (0.25 punts) Suposeu que A es pot reduir polinòmicament a X. Pertany X a NP? És X NP-complet?

c) (0.25 punts) Suposeu que X es pot reduir polinòmicament a B. Pertany X a NP? És X NP-complet?

d) (0.25 punts) Suposeu que B es pot reduir polinòmicament a X. Pertany X a NP? És X NP-complet?

Examen Final EDA 10/01/2013

Problema 1 (2 punts)

Donada una seqüència de $n > 0$ enters, on cada element apareix dos cops, excepte un element que apareix un sol cop, proposeu un algorisme[1] tan eficient com sigui possible per trobar l'element no repetit. Analitzeu el cost del vostre algorisme en temps i en espai.

Per exemple, per a $\{4, 99999, 1, 1, 4, 2, -5, -1000, -1000, 99999, -5\}$, caldria retornar 2.

Problema 2 (2 punts)

Donat un vector $V[1..n]$ d'enters, volem trobar els m elements més petits de V.

- Considereu les següents opcions. Digueu en quins casos és millor una, i en quins casos és millor l'altra, segons el seu cost en temps en el cas pitjor.
  a) Ordenar V i triar els m primers elements del vector ordenat.
  b) Seleccionar el primer element de V, després el segon, i així successivament (recordeu que seleccionar l'element k-èsim té cost lineal en el nombre d'elements de la selecció).
- Proposeu un mètode[2] millor que a) i b).

Problema 3 (2 punts)

Considereu les següents implementacions del tipus "digraf" (graf dirigit):

```
class Digraf1 {
  vector< vector<bool> > t;

public:

  // Crea un digraf amb vèrtexos 0 ... n − 1 i sense arcs
  Digraf1(int n) { t = vector< vector<bool> >(n, vector<bool>(n, false)); }

  // Afegeix l'arc u → v
  void afegeix_arc (int u, int v) { t[u][v] = true; } };

class Digraf2 {
  vector< vector<int> > t;

public:

  // Crea un digraf amb vèrtexos 0 ... n − 1 i sense arcs
  Digraf2(int n) { t = vector< vector<int> >(n); }
```

[1] Descripció d'alt nivell sense implementació.
[2] Descripció d'alt nivell sense implementació.

```
    // Afegeix l'arc u → v
    void afegeix_arc (int u, int v) {  t[u].push_back(v); } };
```

En aquest exercici, donat un digraf $G = (V, E)$ denotarem $n = |V|$ i $m = |E|$. Quan es demani un cost, cal donar la resposta més precisa possible, usant la notació $\Theta(\cdot)$. Quan es demani implementar, cal fer-ho en C++.

1. Quin és el cost en espai en termes de n i m en el cas pitjor d'un digraf implementat:

   (a) amb la classe *Digraf1*.

   (b) amb la classe *Digraf2*.

   Quan es dóna aquest cas pitjor, respectivament?

2. Volem afegir un nou mètode **bool** *hi_ha_arc*(**int** u, **int** v) que retorni, donats un digraf i dos vèrtexos u i v, si hi ha l'arc $u \to v$. Implementeu aquest mètode i doneu-ne el seu cost temporal en el cas pitjor en termes de n i m si el digraf està implementat:

   (a) amb la classe *Digraf1*.

   (b) amb la classe *Digraf2*.

   Quan es dóna aquest cas pitjor, respectivament?

3. Implementeu una classe *Digraf3* amb les mateixes funcionalitats que les anteriors, i amb un mètode **bool** *hi_ha_arc*(**int** u, **int** v) que tingui cost temporal $O(\log n)$ en el cas pitjor. El cost en espai de representar un graf ha de ser $O(n + m)$.

Problema 4 **(2 punts)**

Completeu el programa següent de tal manera que decideixi si un graf G donat és 3-colorable.

```
#include <vector>
#include <iostream>

using namespace std;

typedef vector<vector<int>> Graph;

class ThreeColoring {

    Graph G;
    int n;
    vector<int> col;
    bool done;

    bool legal (int u, int c) {
```

```
    }

    void rec (int u) {
        if (u == n) {
            [                    ] ;
        } else {
            for (int c = 0; c < 3 and not done; ++c) {
                if ( legal (u, c)) {
                    col [u] = c;
                    [                    ] ;
    }    }    }    }

public:

    ThreeColoring (Graph G)
    :    G(G),
        n(G.size ()),
        col (n),
        done(false)
    {
        [                    ] ;
    }

    bool colorable () const {
        return done;
    }

    int color (int u) {
        return col [u];
    }

};


int main() {
    Graph G = {
        {1,2},
        {0,3},
        {0,3},
        {1,2}
    };

    ThreeColoring col (G);
    cout << col. colorable () << endl;
}
```

Problema 5 **(2 punts)**

Considereu els problemes següents:

CLICA: Donat un graf $G = (V,E)$ i un nombre natural k, determinar si G té una k-clica, és a dir, si existeix un subconjunt $U \subseteq V$ de cardinalitat k i per a tot parell de vèrtexs $i, j \in U$ diferents, $\{i, j\} \in E$.

CLICA-CENTRADA: Donat un graf G, un natural k i un vèrtex u de G, determinar si G té una k-clica que conté u.

Es vol demostrar **CLICA** $\leq^p$ **CLICA-CENTRADA** i, per fer-ho, es consideren consecutivament tres reduccions. Digueu, per a cadascuna d'elles, si és correcta o no, proporcionant un argument si ho és o un contraexemple en cas contrari. Per a tot graf G i tot natural k, es defineix:

(a) $f(G,k) = (G,k,v)$, on v és un vèrtex de grau màxim de G.

(b) $g(G,k) = (G',k,w_1)$, on $G' = (V',E')$ consisteix en una còpia de G més una k-clica, és a dir, que per a k vèrtexs nous $w_1,\ldots,w_k \notin V$, es defineix

$$V' = V \cup \{w_1,\ldots,w_k\}$$
$$E' = E \cup \{\{w_i,w_j\} \mid 1 \leq i < j \leq k\}.$$

(c) $h(G,k) = (G'',k+1,u)$, on u és un vèrtex nou ($u \notin V$) i $G'' = (V'',E'')$ consisteix en una còpia de G més aquest vèrtex nou connectat a tots els de la còpia de G, és a dir

$$V'' = V \cup \{u\}$$
$$E'' = E \cup \{\{u,v\} \mid v \in V\}.$$

Examen Final EDA Duració: 3 hores 5/6/2013

Problema 1: Algorisme de Gauss (2 punts)

L'algorisme clàssic de Gauss per solucionar sistemes de n equacions lineals amb n incògnites requereix, essencialment, unes $(2n^3 + 3n^2 - 5n)/6$ multiplicacions, unes $n(n-1)/2$ divisions, i unes $(2n^3 + 3n^2 - 5n)/6$ restes. Cap operació elemental s'executa més vegades que les tres operacions aritmètiques considerades.

a) Quin és el cost asimptòtic en funció de n? (0,5 punts)

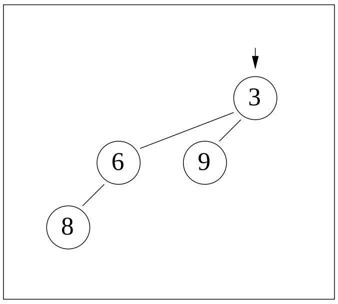
b) Si N denota la talla de l'entrada, quin és el cost en funció de N? (0,5 punts)

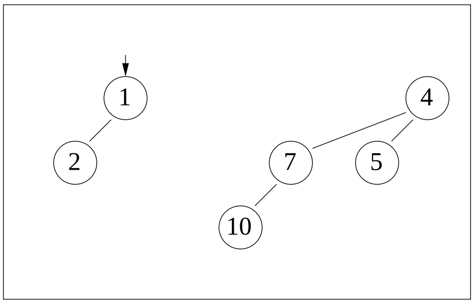
c) Si l'algorisme de Gauss triga 15 segons per solucionar un sistema amb 500 equacions i 500 incògnites en un cert ordinador, quant esperaries que trigaria, aproximadament, per solucionar un sistema de 1000 equacions i 1000 incògnites? (0,5 punts)

d) Acaben de regalar-te un ordinador 1000 cops més ràpid que el del punt c). Per quin factor s'incrementarà el nombre d'equacions i d'incògnites n que l'ordinador nou serà capaç de resoldre en el mateix temps que l'ordinador vell? (0,5 punts)

Problema 2: Heaps binomials (1 punt)

Dibuixeu el heap binomial que resulta d'aplicar l'operació de fusió (també anomenada unió) entre els dos heaps binomials següents:





Resposta (mínimament raonada): (1 punt)

Problema 3: Potències de grafs (2 punts)

Donat un graf dirigit $G = (V, E)$, es defineix la potència k-èsima de G com el graf $G^k = (V, E^k)$, on $(u, v) \in E^k$ si i només si hi ha algun camí de u a v de longitud menor o igual que k (és a dir, amb com a molt k arcs) en el graf G.

a) Sigui A la matriu d'adjacències de G considerant que $A[i, i] = 1$ per a tot vèrtex i (i naturalment $A[i, j] = 1$ si i només si $(i, j) \in E$, per $i \neq j$). Es pot veure fàcilment que si en el producte de matrius canviem el producte d'enters per un AND de booleans i la suma per un OR de booleans, aleshores A^2 és la matriu d'adjacències de G^2.

   Demostreu que A^k és la matriu d'adjacències de G^k per a tot $k \geq 1$. (0,5 punts)

b) Dissenyeu un algorisme que, donat un graf dirigit $G = (V,E)$ representat per una matriu d'adjacències, calculi $G^4 = (V,E^4)$ en temps $\Theta(n^3)$, on n és el nombre de vèrtexs. (1 punt)

c) Es pot calcular en temps inferior a $\Theta(n^3)$? Expliqueu com. (0,5 punts)

Problema 4: Reduccions **(2 punts)**

Considereu els següents problemes (on el primer és el problema de la clica de la col·lecció de problemes):

(a) CLICA: Donats un graf no dirigit $G = (V,E)$ i un natural k, decidir si G conté un subgraf complet de mida k. Formalment, decidir si existeix $U \subseteq V$ tal que $|U| = k$ i per a tot parell $u,v \in U$ amb $u \neq v$ tenim que $(u,v) \in E$.

(b) CLICA^{+1} : Donats un graf no dirigit $G = (V,E)$ i un natural k, decidir si G conté un subgraf complet de mida $k+1$. Formalment, decidir si existeix $U \subseteq V$ tal que $|U| = k+1$ i per a tot parell $u,v \in U$ amb $u \neq v$ tenim que $(u,v) \in E$.

Considereu ara els algorismes A i B següents:

(i) A: Amb entrada el parell $\langle G,k \rangle$, on $G = (V,E)$ és un graf i k és un natural, retorna el parell $\langle G,k+1 \rangle$.

(ii) B: Amb entrada el parell $\langle G,k \rangle$, on $G = (V,E)$ és un graf i k és un natural, retorna el parell $\langle G',k \rangle$ on $G' = (V',E')$ és un graf que obtenim a partir de G afegint un nou vèrtex v_{nou}, $V' = V \cup \{v_{nou}\}$ i afegint una aresta (v_{nou},v) per a cada $v \in V$, $E' = E \cup \{(v_{nou},v) | v \in V\}$.

Un d'aquests algorismes redueix CLICA a CLICA^{+1} i l'altre redueix CLICA^{+1} a CLICA. Sabeu dir quin és quin?

L'algorisme $\boxed{}$ redueix CLICA a CLICA^{+}1. Justifiqueu-ho. (1 punt)

Problema 5: Nano–Google **(3 punts)**

Es vol dissenyar un sistema que permeti recuperar eficientment documents de text a través de consultes sobre les paraules que contenen.

Com a exemple, suposeu que els documents (identificats per enters arbitraris i escrits sense accents) són

11: *cada dia al mati canta el gall quiriquiqui*
23: *el nen canta a la gallina*
33: *la gallina canta i el gall dorm*
41: *la merda de la muntanya no fa pudor*

Llavors, el resultat de la consulta $[el, gall, canta]$ hauria de ser la llista [11,33] perquè aquests documents són els que contenen *totes* les paraules de la cerca. Igualment, el resultat de la consulta $[canta]$ hauria de ser la llista [11,23,33] i el resultat de la consulta $[guinardo]$ hauria de ser la llista buida [ ]. Els resultats de les cerques s'han de donar en ordre creixent de número de document. Els documents estan escrits en LAPAO.

El sistema funciona en dues fases. En la primera fase (offline), es pre-processen d'alguna forma els documents. A la segona (online), es reben les consultes i es lliuren les respostes. S'espera que hi hagi molts documents, tots amb bastantes paraules. Es vol contestar molt ràpid cada consulta. Cadascuna de les consultes sol tenir molt poques paraules.

Fixem la nomenclatura següent:

M	=	nombre de documents
N	=	nombre total de paraules en tots els documents
n	=	nombre de paraules diferents en tots els documents
D	=	el nombre màxim de documents on apareix cada paraula
k	=	el nombre màxim de paraules en una consulta

Nota: Llegiu totes les preguntes abans de començar. Les solucions d'aquest problema amb cost $\Omega(N)$ per a d) són insuficients i no es valoraran.

Part 1: Considereu el cas on cada consulta conté una sola paraula ($k = 1$).

a) Expliqueu quines estructures de dades i quin pre-procés utilitzaríeu per a la primera fase. Expliqueu com utilitzaríeu aquesta estructura de dades per processar cada consulta. (1 punt)

b) Quantifiqueu l'espai necessari per l'estructura de dades de la vostra solució. (0,25 punts)

c) Quantifiqueu el temps necessari per la primera fase (pre-procés) amb la vostra solució. (0,5 punts)

d) Quantifiqueu el temps necessari per processar una consulta amb la vostra solució.(0,25 punts)

Part 2: Considereu ara el cas general ($k \geq 1$).

e) Expliqueu com utilitzaríeu la mateixa estructura de dades de la Part 1 per processar cada consulta. (0,5 punts)

f) Quantifiqueu el temps necessari per processar una consulta amb aquesta solució. (0,5 punts)

Examen Final EDA Duració: 3 hores 15/1/2014

Problema 1: Preguntes curtes (2 punts)

- Sigui n parell. El cost de l'algorisme d'ordenació per inserció amb l'entrada

$$[2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots, 2i, 2i-1, \ldots, n, n-1]$$

  és $T(n) = \Theta(\boxed{\qquad\qquad})$.

- Indiqueu **totes** les afirmacions que siguin correctes: El cost de mergesort en el cas pitjor és: $\boxed{\quad}$ $O(n^2)$; $\boxed{\quad}$ $\Theta(n \log n)$; $\boxed{\quad}$ $\Omega(n \log n)$.

- Doneu una funció $f(n)$ que sigui alhora $\Omega(n)$ i $O(n \log n)$, però que no sigui Θ de cap de les dues. Resposta: $f(n) = \boxed{\qquad\qquad}$

- Resoleu $T(n) = 3T(n/3) + \Theta(n^2)$. Resposta: $T(n) = \Theta(\boxed{\qquad\qquad})$.

- La **recurrència** que expressa el cost de l'algorisme de Karatsuba per multiplicar dos nombres de n dígits és $T(n) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

- Sigui x un vector de n bits qualssevol. Interpretant x com un nombre natural escrit en binari, el cost en cas pitjor de l'algorisme obvi per sumar 1 a x és $T(n) = \Theta(\boxed{\qquad\quad})$.

- Sigui x un vector de n bits escollits uniformement i independentment a l'atzar. Interpretant x com un nombre natural escrit en binari, el cost esperat de l'algorisme obvi per sumar 1 a x és $T(n) = \Theta(\boxed{\qquad\quad})$.

- Considereu l'algorisme següent de cost $\Theta(\log n)$ on n és la mida del vector:

```
int dicotomica (vector<int>& v, int e, int d, int x) {
    if (e > d) return −1;
    int m = (d + e)/2;
    if (v[m] < x) return dicotomica (v, m + 1, d, x);
    if (v[m] > x) return dicotomica (v, e, m − 1, x);
    return m;
}
```

  Quin cost tindria aquest mateix algorisme si tinguéssim la mala pata d'oblidar-nos l'`&` en el pas de paràmetres? Resposta: $T(n) = \Theta(\boxed{\qquad\qquad})$.

Problema 2: Backtracking (2 punts)

Considera el següent problema: donats n nombres enters positius a_0, a_1, ..., a_{n-1} i dos altres enters l i u tals que $0 \le l \le u \le \sum_{i=0}^{n-1} a_i$, es tracta de trobar totes les possibles solucions $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ de la doble inequació:

$$l \le a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} \le u$$

(a) (1 punt) Completa el programa següent perquè resolgui el problema anterior:

```
int n, l, u;
vector<int> a;

void sols(int k, int st, int sr, vector<bool>& x) {
  if (k == n) {
    for (int i = 0; i < n; ++i) cout << x[i];
    cout << endl;
  } else {
    if ( [                    ] ) {
      x[k] = 0; sols(k+1, st, sr − a[k], x);
    }
    if ( [                    ] ) {
      x[k] = 1; sols(k+1, st + a[k], sr − a[k], x);
    } } }

int main() {
  cin >> n >> l >> u;
  a = vector<int>(n);
  for (int i = 0; i < n; ++i) cin >> a[i];

  int s = 0;
  for (int i = 0; i < n; ++i) s += a[i];

  vector<bool> x(n);
  sols( [      ] , [      ] , [      ] , x);
}
```

(b) (1 punt) El programa de l'apartat anterior escriu les solucions en ordre lexicogràfic creixent. És a dir, per a l'entrada $n = 3$, $l = 3$, $u = 5$ i $a_i = i$ $(1 \leq i \leq 3)$, es produeix la sortida:

```
001
011
101
110
```

Explica com modificar la funció *sols* perquè s'escriguin les solucions en ordre lexicogràfic decreixent, és a dir en l'ordre invers de l'anterior.

Problema 3: Segur que tinc sort (3 punts)

Donat que ningú va entendre mai de què servia el botó "Segur que tinc sort", Guugle vol tornar a implementar-lo per veure si ara ... té més sort. Es vol que quan un usuari piqui el botó "Segur que tinc sort", el sistema retorni una pàgina escollida a l'atzar d'entre totes les pàgines indexades.

Per a fer-ho, cal disposar d'una estructura de dades que emmagatzemi un conjunt d'URLs (adreces de pàgines) tot donant suport a les operacions següents:

- Crear una estructura buida sense URLs.
- Inserir una URL al conjunt (sense repetits).
- Esborrar una URL del conjunt (no passa res si no hi era).
- Retornar una URL del conjunt triada a l'atzar amb probabilitat uniforme. És a dir, la probabilitat de retornar qualsevol URL del conjunt és exactament la mateixa que la de retornar qualsevol altra, i cada crida a aquesta funció retorna una nova URL a l'atzar. Com a precondició podem assumir que el conjunt no és buit.

Concretament, aquesta estructura de dades tindrà la interfície següent:

```
class UrlSet {
public:
    UrlSet ();
    void insert_url (string url);
    void remove_url (string url);
    string random_url ();
};
```

Un sistema d'escaneig automàtic de pàgines (el *crawler*, del qual no us n'heu d'encarregar) serà el responsable de mantenir l'estructura al dia: quan trobi una nova pàgina l'afegirà al conjunt, i quan trobi que una pàgina ja no existeix l'esborrarà del conjunt.

Tenint en compte que l'operació *random_url* s'aplicarà molt més freqüentment que les altres, descriviu com implementar aquesta estructura de dades de forma que cada operació sigui el més eficient possible. Analitzeu el cost en espai de l'estructura de dades i el cost en temps de cada operació.

Nota: Suposeu que la funció **int** *randint*(**int** *a*, **int** *b*); retorna nombres aleatoris entre *a* i *b* en cost constant. A més, us recomanem utilitzar tipus estàndards de la STL per descriure la vostra solució (però no és imprescindible). Fixeu-vos que no es demana una implementació completa. Penseu que aquest és un problema de disseny i per tant la millor solució no és única i depèn del criteris que hagueu decidit optimizar (cas pitjor, cas mitjà, etc.).

Nota: Responeu dins l'espai indicat a la pàgina del darrera. Feu un esquema de la vostra solució.

Problema 4: El creuer dels records (2 punts)

Cinquanta anys més tard, la colla d'en Roy i en Johnny s'ha retrobat a les xarxes socials i han decidit d'anar a fer un creuer pel Mediterrani. Com que, entre tots, conserven una bona pila de records de quan eren joves, han fet una llista única de tot el que tenen i discuteixen via xat què en poden fer de tot això:

ROY: Si ens ho hem d'endur tot, això semblarà un *mercadillo*, no creus? A més, aquella foto on feia el pi no la vull veure ni en pintura.

JOHNNY: Ja ho entenc, ja. Mira, tinc una proposta: cadascú farà una comanda on digui quins objectes vol que es portin i quins no.

ROY: Bona idea, i de cada comanda intentarem que es compleixi almenys un desig: o que es porti un objecte que aquella persona vol, o que no se'n porti un dels que no vol. Si passa això, ja es podrà donar per satisfet, no? Però necessitem algú que, a partir de les comandes, trobi un a solució.

STEFFY: Ep, nois, que no teniu encara aquella llàntia màgica?

ROY: És clar, me n'oblidava, li treuré la pols i us diré què m'ha dit... —Al cap d'una estona—. Caram, el geni diu que només pot dir-nos si hi ha almenys **dues** solucions, és a dir, dos conjunts d'objectes que satisfacin a tothom. Però el que volíem era saber si n'hi havia almenys una!

STEFFY: Està clar que el geni ens vol posar a prova: el seu problema és NP-complet i només hem de trobar una transformació... Ja ho tinc! Crec que la solució és afegir un objecte i una comanda "fantasmes"!

JOHNNY: Mireu, amb els fantasmes i els genis jo em perdo: ho deixo a les vostres mans i ja m'avisareu, eh?

(a) (1 punt) Detalleu la reducció que ha trobat l'Steffy al problema del geni. Podeu suposar que hi ha k persones i, per tant, k comandes $C_1, \ldots, C_k$. A més, tenim n objectes $x_1, \ldots, x_n$, de manera que cada comanda C_i és un tuple amb objectes que la persona i vol i d'altres que no. Si, per exemple, la persona i vol els objectes x_1, x_5 però no vol x_2, escrivim $C_i = (x_1, \neg x_2, x_5)$.

(b) (1 punt) Demostreu que el problema que volen resoldre, que anomenarem CNF-SAT, és a la classe NP.

Problema 5: Algorisme de Prim (competència transversal) (1 punt)

Recordeu (de la pràctica de la competència transversal) que l'algorisme de Prim serveix per trobar un arbre d'expansió mínim en un graf connex amb pesos a les arestes.

(a) (0.5 punts) Doneu la definició d'arbre d'expansió mínim:

(b) (0.5 punts) Completeu el següent codi que implementa l'algorisme de Prim. La funció retorna un vector que, per cada vèrtex $u \in [0, \ldots, n-1]$, apunta al pare de u dins l'arbre trobat (amb l'arrel 0 apuntant-se a si mateixa). Podeu suposar que el graf donat és connex.

```
typedef vector< pair<double, int> > WGraph;
typedef pair< double, pair<int, int> > WEdge;

vector<int> Prim(const WGraph& G) {
    vector<bool> usat(G.size(), false );
    vector<int> pare(G.size ());
    priority_queue <WEdge> Q;
    Q.push(WEdge(0.0, pair<int, int>(0, 0)));
    while (not Q.empty()) {
```

```
        int u = Q.top().second.first;
        int v = Q.top().second.second;
        Q.pop();
        if ( [                                    ] ) {
            usat[v] = true;
            pare[v] = u;
            for (int i = 0; i < G[v].size(); ++i) {
                double p = G[v][i].first;
                int w = G[v][i].second;
                [                                        ]
    }   }   }
    return pare;
}
```

Examen Final EDA   Duració: 3 hores   20/6/2014

Problema 1: Preguntes curtes (que ja van sortir al parcial) (2 punts)

1. Sigui $f(n) = n \log(\cos(n\pi) + 4))$. Llavors $f(n) = \Theta(\boxed{\qquad\qquad})$.
2. Quin és l'últim dígit de 7^{1024} escrit en decimal? Resposta: $\boxed{\qquad}$.
3. Quina és la **recurrència** que expressa el cost de l'algorisme de Strassen per multiplicar matrius $n \times n$. Resposta $T(n) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.
4. Un algorisme pot rebre els 2^n vectors de n bits com entrada. En $2^n - 1$ d'aquestes entrades el cost de l'algorisme és $\Theta(n^2)$ i en l'entrada restant el seu cost és $\Theta(n^4)$. Per tant, el cost en el cas pitjor és $\Theta(n^4)$ i el cost en el cas millor és $\Theta(n^2)$. Quin és el cost en el cas mitjà quan l'entrada s'escull uniformement a l'atzar (i per tant cada entrada té probabilitat $1/2^n$)?
   Resposta: $T(n) = \Theta(\boxed{\qquad\qquad\qquad})$.

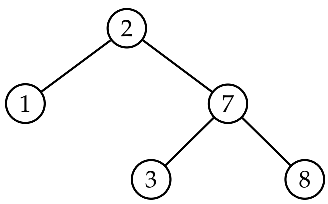
Justificacions per les preguntes 1, 2 i 4 (per la pregunta 3 **no** cal justificació):

Problema 2: Arbres binaris de cerca i AVLs (3 punts)

Per aquest problema feu servir la representació següent d'ABCs:

```
struct node {
    Elem x;      // Informació en el node
    node* fe ;   // Punter al fill esquerre
    node* fd ;   // Punter al fill dret
    node(Elem x, node* fe , node* fd ) : x( x ), fe ( fe ), fd ( fd ) {}
    ~node() { delete fe ; delete fd ; }
};
typedef node* abc ; // Un ABC és un punter a l'arrel (nul si és buit)
```

(a) (1.0 punts) Implementeu en C++ una funció *abc refer* (**const vector**<*Elem*> &*v*) que reconstrueix un arbre binari de cerca a partir del seu recorregut en preordre *v*. Per exemple, amb l'entrada v = [2 1 7 3 8] s'ha de produir l'arbre següent:



Podeu assumir que *v* és el preodre correcte d'algun ABC. Si us cal, implementeu una funció auxiliar.

(b) (1.0 punts) Implementeu una funció *abc munta_AVL*(**const vector**<*Elem*> &*v*) en C++ que reconstrueix un ABC que satisfà la propietat d'AVL a partir d'un vector ordenat d'elements *v*. Si us cal, implementeu una funció auxiliar.

(c) (1.0 punts) Si afegim un camp $n.alc$ que denota l'alçada del node n en l'ABC on es troba (amb les fulles a alçada 0 i per tant els *NULL* estarien a alçada -1), completeu el següent codi perquè el resultat indiqui si l'ABC T és un AVL:

```
bool es_AVL(abc T) {
    if (T == NULL) return true;
    else if (T->fe == NULL or T->fd == NULL) return (T->alc ≤ 1);
    else {
        ...
}   }
```

Problema 3: Camins Hamiltonians en grafs torneig **(3 punts)**

Representem grafs dirigits amb matrius d'adjacència:

```
typedef vector<vector<bool>> Graf;
```

Un *graf torneig* és un graf dirigit on per a cada parell de vèrtexs diferents hi ha exactament un arc, i sense arcs des de cap vèrtex cap a ell mateix.

a) (0.5 punts) Escriviu una funció en C++ que indiqui si un graf donat de n vèrtexs és o no un graf torneig en temps $\Theta(n^2)$ en el cas pitjor:

```
bool es_torneig (const Graf& G) {
    ...
}
```

b) (1.0 punts) Demostreu per inducció en el nombre de vèrtexs que tot graf torneig té un camí Hamiltonià, és a dir, un camí que visita tots els vèrtexs exactament una vegada (pista: mostreu que un nou vèrtex es pot inserir en un camí de $n-1$ vèrtexs per obtenir un camí de n vèrtexs).

c) (1.0 punts) Valent-vos de la demostració anterior, doneu un algorisme que retorni un camí Hamiltonià d'un graf torneig (es valorarà més la claredat que l'eficiència):

```
// Pre: G és un graf torneig
// Post: el resultat és una llista de vèrtexs que forma un camí Hamiltonià a G
list <int> cami(const Graf &G) {
    ...
}
```

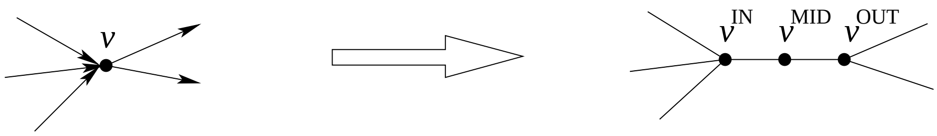
d) (0.5 punts) Analitzeu el cost de la vostra solució.

Problema 4: Reduccions **(1 punt)**

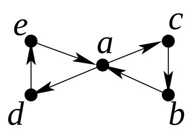
El problema dels cicles Hamiltonians en grafs dirigits és:

> DHAM: Donat un graf dirigit, determinar si hi ha un cicle que passi per tots els vèrtexs exactament una vegada.

El problema dels cicles Hamiltonians en grafs no dirigits UHAM és el mateix però amb el graf d'entrada no dirigit. La Steffy sap que es pot reduir DHAM a UHAM simplement aplicant la següent transformació a cada vèrtex v del graf dirigit:



En Roy i en Johnny diuen que el vèrtex v^{MID} no cal: connectant v^{IN} — v^{OUT} i ignorant v^{MID} és suficient. Però la Steffy replica: "Nois, mireu-vos aquesta entrada a DHAM i m'ho torneu a explicar":



Què ha volgut dir la Steffy? Té raó? (sigueu concisos però precisos, si us plau).

Problema 5: Bellman-Ford (competència transversal) **(1 punt)**

Recordeu (de la pràctica de la competència transversal) que l'algorisme de Bellman-Ford permet trobar camins de pes mínim en un graf dirigit amb pesos, fins i tot quan els pesos són negatius.

(a) (0.5 punts) Quin és el cost, en el cas pitjor, de l'algorisme de Bellman-Ford executat en un graf de $|V|$ vèrtexs i $|E|$ arestes? Resposta: $\Theta(\boxed{\qquad\qquad})$

(b) (0.5 punts) La Steffy diu que l'afirmació del principi d'aquest problema no pot ser del tot correcta perquè altrament podríem trobar, de manera eficient, un cicle Hamiltonià en un graf dirigit $G = (V, E)$ simplement assignant pes -1 a cada aresta de G, escollint un vèrtex s qualsevol, i aplicant Bellman-Ford per mirar si el camí de pes mínim de s a algun dels vèrtexs que tenen una aresta cap a s té pes $-(|V| - 1)$. Com expliqueu la paradoxa? (o és que hem demostrat que P = NP?)

Examen Final EDA Duració: 3 hores 16/1/2015

Problema d'anàlisi asimptòtica (que ja va sortir al parcial) (2 punts)

(1 punt) Demostreu que $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \Theta(n^4)$.

Ajut: Hi ha diverses maneres de fer-ho, una d'elles demostrant l'O i l'Ω per separat.

(1 punt) Siguin $f(n) = 2^{\sqrt{\log n}}$ i $g(n) = n$. Asimptòticament, quina creix més ràpid? Demostreu-ho.

Problema 2: Arbres binaris de cerca i AVLs (3 punts)

Amb la representació habitual d'arbres binaris de cerca (això també s'aplica als AVL) alguns algorismes resulten ineficients. Un exemple d'aquest fet és la funció *menors*$(T,\ x)$ que donat un arbre T i una clau x, retorna el nombre d'elements de T que tenen clau $\leq x$.

Aquesta senzilla modificació de la representació

```
struct node {
  node* esq;
  node* dre;
  Clau k;      // tipus genèric Clau
  Valor v;     // tipus genèric Valor
  int mida;    // mida del subarbre arrelat en aquest node ***** NOU *****
};
typedef node* abc;
```

permet, entre altres coses, una implementació de la funció *menors*$(T,\ x)$ amb cost $\Theta(h)$, on h és l'alçada de T (que seria $\Theta(\log n)$ en cas mitjà en un ABC aleatori i $\Theta(\log n)$ en cas pitjor en un AVL, si n és la mida de T).

(1,5 punts) Escriviu el codi C++ de la implementació eficient de la funció

```
int menors(abc T, const Clau& x)
```

(1,5 punts) Escriviu en C++ com s'ha de modificar el procediment *inserta* (T,k,v) que inserta un nou parell $\langle k,v \rangle$ en l'arbre T. La precondició d'aquest procediment assegura que la clau k no és a T. La implementació de *inserta* ha de tenir la mateixa eficiència que tindria si s'utilitzés la representació ordinària d'ABCs, però evidentment ha de mantenir actualitzat el camp *mida* de l'arbre T (noteu que **no** es demana mantenir la propietat d'AVL; ni es diu que l'arbre d'entrada T la tingui).

```
// Precondició: T no conté k
void inserta (abc& T, const Clau& k, const Valor& v)
```

Problema 3: Grafs i NP-complets **(3 punts)**

Un estudiant d'EDA s'està preparant per a l'examen de laboratori i s'encalla en un problema de la llista "Graph Algorithms" del Jutge. Després de rumiar-hi una mica, veu que el que cal és, essencialment, donat un graf (no dirigit, representat amb llistes d'adjacència), determinar si és 2-colorable; és a dir, si és possible assignar un color *red* o *blue* a cada vèrtex del graf, de manera que vèrtexs adjacents no estiguin pintats amb el mateix color.

Malauradament, el Jutge respon Time Limit Exceeded a tots els enviaments que fa. Arribat a aquest punt, l'estudiant decideix buscar per Internet algun codi més eficient, i troba el següent penjat en un fòrum:

```
bool two_col_aux(const vector<vector<int>>& g, int u, vector<bool>& col,
                 vector<bool>& marked, bool is_red) {
  col[u] = is_red;
  marked[u] = true;
  for (int i = 0; i < g[u].size(); ++i) {
    int v = g[u][i];
    if (not marked[v]) {
      if (not two_col_aux(g, v, col, marked, not is_red)) return false;
    }
  }
  return true;
}

bool two_colourable(const vector<vector<int>>& g) {
  int n = g.size();
  vector<bool> marked(n, false);
  vector<bool> col(n);
  for (int u = 0; u < n; ++u) {
    if (not marked[u]) {
      if (not two_col_aux(g, u, col, marked, false)) return false;
    }
  }
  return true;
}
```

Ara s'espera que aquest codi serà prou eficient, perquè després d'una mica d'anàlisi veu que triga $O(|V| + |E|)$. L'envia al Jutge, i resulta que ... Wrong Answer!

(2 punts) Escriviu una versió correcta de *two_col_aux* de manera que *two_colorable*, ara sí, determini si un graf és 2-colorable en temps $O(|V| + |E|)$.

```
bool two_col_aux(const vector<vector<int>>& g, int u, vector<bool>& col,
                 vector<bool>& marked, bool is_red)
```

(1 punt) Finalment l'estudiant troba com arreglar el codi i que el Jutge l'hi accepti. Mosquejat, continua llegint el fòrum. L'autor del codi erroni afirma que el seu programa es pot estendre fàcilment al problema de 3-colorabilitat amb la mateixa complexitat asimptòtica. Us ho creieu? Per què?

Problema 4: Cultura algorísmica **(2 punts)**

Donat un graf dirigit on els arcs tenen costos que poden ser negatius, cal detectar si el graf té un o més cicles de cost total negatiu (no cal trobar cap d'aquests cicles, només dir si n'hi ha).

(0,5 punts) Doneu el nom, segons la literatura informàtica, d'un algorisme famós que permeti resoldre aquest problema fent-ne una petita adaptació.

(0,5 punts) Expliqueu breument, però amb prou detall per poder implementar-lo, com funciona aquest algorisme famós.

(0,5 punts) Quin cost té aquest algorisme? Expresseu-lo en funció del nombre de vèrtexs $|V|$ i del nombre d'arcs $|E|$.

(0,5 punts) Expliqueu com s'hauria d'adaptar l'algorisme general a aquest problema en particular (on només es demana detectar si hi ha cicles negatius).

Examen Final EDA **Duració: 3 hores** **12/6/2015**

Una del parcial, una de la competència transversal, i una de NP **(2 punts)**

(1 punt) Determineu si són iguals (=) o diferents (≠) i demostreu-ho:

$$\Theta(3^{\log_2(n)}) \; \square \; \Theta(3^{\log_4(n)}).$$

(0,5 punts) Per a què serveix l'algorisme que heu treballat a l'exercici de la competència transversal? Escolliu només una resposta (no cal justificació):

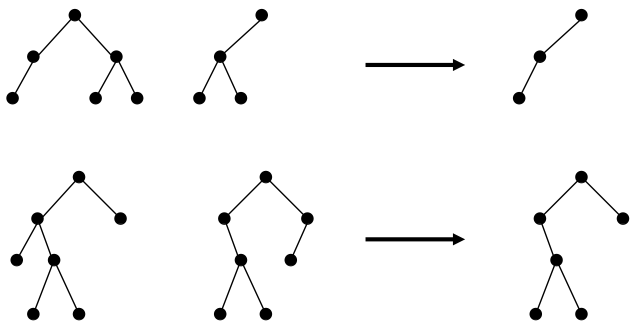
- Per a calcular l'arbre filogenètic més probable.
- Per a calcular el preu òptim de l'opció de compra d'un producte financer.
- Per a fer cabre les 9 simfonies de Beethoven en un sol CD.
- Per a resoldre recurrències que no tenen la forma dels teoremes mestre.

(0,5 punts) El problema SUMASUBCONJUNT és: Donada una llista de nombres naturals $a_1, \ldots, a_m$ i un objectiu b, tots escrits en decimal, determinar si existeix un subconjunt $S \subseteq \{1, \ldots, m\}$ tal que $\sum_{i \in S} a_i = b$. Si d denota el nombre de dígits del màxim nombre natural de l'entrada, escolliu l'única afirmació que és correcta (no cal justificació):

- El problema és NP-complet i per tant no admet cap algorisme que tingui cost $O(m \cdot d \cdot 10^d)$ a menys que P = NP.
- El problema és NP-complet i per tant no admet cap algorisme que tingui cost polinòmic en m i d a menys que P = NP.
- El problema és NP-complet però malgrat tot i ha un algorisme conegut de cost polinòmic en m i d.
- El problema es pot resoldre en temps $O(d \cdot m \cdot \log m)$, i per tant temps polinòmic en la mida de l'entrada, així: primer s'inclouen els m nombres en un max-heap; després es van extraient d'un en un fins que, o bé ens passem de b, o bé s'acabin els nombres sense arribar a b, o bé els nombres extrets sumin exactament b.

Punters **(2 punts)**

Donats dos arbres binaris, crear un nou arbre binari que sigui la seva intersecció (i deixar els arbres donats com estaven). Per exemple:



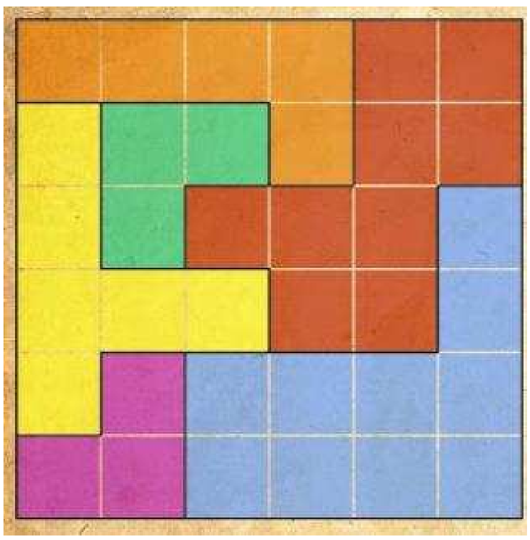
(1.5 punts) Fent servir el tipus i la capçalera que es donen, resoleu aquest problema.

```
struct Node {      // els nodes no guarden dades; només punters als fills
  Node* esq;       // punter al fill esquerre
  Node* dre;       // punter al fill dret
};

typedef Node* Arbre;

Arbre intersecció (Arbre a1, Arbre a2) {
    ...
}
```

(0.5 punts) Quin és el cost, en cas pitjor, en funció de les mides $n1$ i $n2$ de *a1* i *a2*?

Backtracking fill-in-the-gaps **(2 punts)**

Cebes és un trencaclosques[3] de lògica en el qual s'ens dona una matriu quadrada $n \times n$ dividida en n regions, cadascuna pintada d'un color diferent.



[3] El trencaclosques original es diu *Alberi* (abre en Italià) i les apps (per iOS i Android) per aquest joc van ser molt populars fa uns anys.

L'objectiu és plantar-hi n cebes de manera que

- cada fila conté exactament una ceba
- cada columna conté exactament una ceba
- cada regió conté exactament una ceba
- no hi ha dues cebes adjacents en horitzontal, vertical o diagonal, dit d'una altra manera, totes les caselles envoltant una ceba estan lliures.

Fent servir les següents definicions:

```
struct Cell {
  int color;        // el color (de 1 a n) de la seva regio
  bool has_onion;   // indica si hi ha una ceba plantada o no
}

typedef vector<vector<Cell> > OnionBoard;
```

es demana que completeu el codi del següent algorisme de *backtracking* per trobar una solució, o determinar que no n'hi ha. Si n'hi ha més d'una, qualsevol solució serveix.

```
class Onion {
  int n;
  bool solution_found;
  OnionBoard board;                 // solució parcial en curs
  vector<int> col;                  // col[i] = columna de la ceba de la fila i-essima
  vector<bool> onion_in_col;        // onion_in_col[i] = hi ha ceba a la columna i
  vector<bool> onion_in_region;     // onion_in_region[i] = hi ha ceba a la regio i

public:
  Onion(const OnionBoard& initial_board) {
    board = initial_board;
    n = board.size();
    col = vector<int>(n);
    onion_in_col = vector<bool>(n, false);
    onion_in_region = vector<bool>(n, false);
    solution_found = false;
    backtrack(0);
  }

  void backtrack(int k) {
    if (k == n) { solution_found = true; return; }
    for (int j = 0; j < n and not solution_found; ++j) {
      int cell_col = [                                   ]
      if (not onion_in_col[j] and not onion_in_region[ cell_col ]
        and not onion_in_neighborhood(k, j)) {
        col[k] = j;
        [                                                ]
        backtrack(k+1);
```

```
} } }

// indica si la solucio parcial board te cebes al veinatge de la casella (i,j)
// no cal que la implementeu.
bool onion_in_neighborhood(int i, int j) const;
```

Piulades **(4 punts)**

Una xarxa social tipus Twitter té diferents usuaris. Aquests mantenen una relació de seguiment d'altres usuaris (per exemple, en Salvador segueix l'Anna, la Ivet i en Leo Messi, però en Leo Messi no segueix ningú). Els usuaris poden afegir o eliminar altres usuaris de la seva llista d'usuaris seguits. A més, en qualsevol moment, un usuari pot piular un missatge. També, en qualsevol moment, un usuari pot consultar les k piulades més recents de tots els usuaris que segueix. (És a dir, si segueix n usuaris, en total vol (com a molt) k piulades, no nk piulades.) Les dimensions d'aquest sistema són les que hom podria imaginar:

- El nombre de usuaris és enorme; el de piulades encara més.
- El nombre d'usuaris que un usuari segueix és molt variable, però no enorme.
- Alguns usuaris són seguits per molts altres usuaris.
- El nombre de piulades per usuari és molt variable.
- El valor de k és relativament petit, i tant podria ser 10 com 1000.

Els usuaris es representen amb un struct *Usuari* que conté les seves dades personals (incloent un *string* nom que l'identifica de forma única) i les piulades es representen amb un struct tupla *Piulada* que conté el missatge i l'hora d'emissió:

```
struct Usuari {
    ...                         // dades personals
    string nom;                 // no hi ha dos usuaris amb el mateix nom
};

struct Piulada {
    string missatge;            // text del missatge
    int hora_emissio;           // nombre de milisegons des d'algun moment
};
```

Expliqueu quines estructures de dades i algorismes utilitzaríeu per guardar la informació descrita i implementeu tant eficient com sigui possible les operacions d'afegir i eliminar el seguiment d'un usuari, de piular un missatge, i d'obtenir les k piulades més recents dels usuaris seguits per un usuari donat. No cal que expliqueu com es donen d'alta/de baixa els usuaris. Analitzeu el cost de les operacions.

La resposta esperada és oberta però, per concreció, definiu l'estructura de dades *Xarxa* i descriviu (sense donar codi) com implementaríeu les operacions:

```
struct Xarxa { ... };
```

// *u1* passa a seguir a *u2* (si no ho feia); els usuaris existeixen.
void *afegir_seguiment* (*Xarxa*& *x*, **string** *u1*, **string** *u2*);

// *u1* deixa de seguir a *u2* (si ho feia); els usuaris existeixen.
void *treure_seguiment* (*Xarxa*& *x*, **string** *u1*, **string** *u2*);

// *u* piula el missatge *m*; l'usuari existeix.
void *piular_missatge* (*Xarxa*& *x*, **string** *u*, *Piulada* *m*);

// Retorna les *k* piulades més recents dels usuaris seguits per *u*; l'usuari existeix.
list <*Piulada*> *k_piulades_mes_recents_dels_seguits* (**const** *Xarxa*& *x*, **string** *u*, **int** *k*);

Examen Final EDA **Duració: 3 hores** **07/01/2016**

Problema 1 **(3 pts.)**

Responeu les següents preguntes:

(a) (1 pt.) Considereu els següents problemes decisionals:

- SAT: donada una fórmula proposicional, determinar si és satisfactible.
- COL: donats un graf $G = (V, E)$ i un nombre natural k, determinar si es pot pintar G amb k colors de forma que les arestes tinguin els extrems pintats amb colors diferents.
- SOR: donada una taula de n enters diferents, determinar si està ordenada de forma creixent.

Per cada afirmació a continuació, marqueu amb una 'X' la columna corresponent, segons si l'afirmació és certa, falsa, o és un problema obert i no se sap encara si és certa o falsa. No cal justificació.

	Cert	**Fals**	**Obert**
SOR és a la classe P			
SOR és a la classe NP			
SOR és NP-difícil			
SAT és a la classe P			
SAT és a la classe NP			
SAT és NP-difícil			
Es pot reduir polinòmicament SOR a COL			
Es pot reduir polinòmicament COL a SOR			
No es pot reduir polinòmicament SAT a SOR			
Es pot reduir polinòmicament COL a SOR, i no es pot reduir polinòmicament SAT a SOR			

(b) (1 pt.) Donats un vector d'enters v i un enter x, la funció

```
int posicio (const vector<int>& v, int x) {
  int n = v.size ();
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    if (v[i] == x) return i;
  return −1;
}
```

retorna la primera posició de v que conté x, o -1 si no n'hi ha cap.

Considereu una distribució de probabilitat sobre els paràmetres d'entrada tal que la probabilitat que x sigui l'element $v[i]$ és $\frac{1}{n}$ per a $0 \leq i < n$.

Responeu: el cost en temps de *posicio* en el cas mig en funció de n és $\Theta(\boxed{})$.

Justificació:

(c) (1 pt.) Què calcula l'algorisme de Floyd-Warshall? Quin és el seu cost en temps i espai en el cas pitjor? (no cal justificació)

Problema 2 **(2 pts.)**

Sigui V un **vector**<**int**> amb n enters diferents. Considereu aquest codi:

```
set<int> S;
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        S.insert(V[i]);
```

```
    cout << *S.begin() << ' ';
}
```

(a) (0.4 pts.) Què escriu el codi si $n = 6$ i els elements de V són 42 100 23 12 20 24 (en aquest ordre)?

(b) (0.4 pts.) Doneu una explicació d'alt nivell sobre quins valors escriu el codi amb una V qualsevol amb n enters diferents.

(c) (0.4 pts.) Raoneu quin cost asimptòtic en temps té el codi en el cas pitjor en funció de n.

Pista: Podeu fer servir la fórmula d'Stirling: $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.

(d) (0.4 pts.) Si els elements de V estiguessin repetits, el codi podria calcular alguna cosa diferent a la mencionada a l'apartat (b)? Si la resposta és afirmativa, mostreu un exemple. Si la resposta és negativa, expliqueu per què.

(e) (0.4 pts.) Escriviu amb tot detall un codi alternatiu al codi donat, que calculi el mateix amb un vector V qualsevol amb n enters diferents ($n \geq 1$), però amb cost asimptòtic en temps estrictament menor al calculat a l'apartat (c). Raoneu quin és aquest cost asimptòtic.

Problema 3 **(2 pts.)**

Considerem el problema de, donat un graf dirigit acíclic $G = (V, E)$, generar totes les seves ordenacions topològiques. El següent programa el resol (assumint $V = \{0, 1, ..., n-1\}$):

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

typedef vector<int> AdjList;
typedef vector<AdjList> Graph;

// implementation not given here
Graph read_graph ();
void print_solution (const vector<int>& sol);

bool ok(const Graph& G, const vector<int>& sol) {
  int n = sol.size ();
  vector<bool> mar(n, false);
  for (int i = 0; i < n; ++i) {
    int x = sol[i];
    if (mar[x]) return false;
    mar[x] = true;
    for (int y : G[x])
      for (int j = 0; j < i; ++j)
        if (sol[j] == y) return false;
  }
  return true;
}

void top_sorts_rec (int k, const Graph& G, vector<int>& sol) {
  int n = sol.size ();
  if (k == n) {
    if (ok(G, sol))
      print_solution (sol);
  }
  else
    for (int x = 0; x < n; ++x) {
      sol[k] = x;
      top_sorts_rec (k+1, G, sol);
    }
}

void top_sorts (const Graph& G, vector<int>& sol) {
  top_sorts_rec (0, G, sol);
}
int main() {
  Graph G = read_graph ();
  vector<int> sol(G.size ());
  top_sorts (G, sol);
}
```

Tanmateix, és massa lent. Reescriviu la funció *top_sorts* per resoldre el problema més eficientment, sense canviar el *main*. Implementeu també les funcions auxiliars que useu, excepte *print_solution* i les funcions de la llibreria estàndard de C++.

Problema 4 **(3 pts.)**

Sigui G la matriu d'adjacència d'un graf dirigit amb n vèrtexs. La *matriu de clausura* de (el graf representat per) G, que representarem com G^*, és una matriu $n \times n$ definida de la manera següent: donats u, v tals que $0 \leq u, v < n$, el coeficient a la fila u i columna v és

$$G^*_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{si hi ha un camí (potser buit) de } u \text{ a } v \text{ en el graf} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

on els vèrtexs del graf s'identifiquen amb els enters de 0 a $n - 1$ com és habitual.

(a) (1 pt.) Descriviu a alt nivell com implementar una funció

vector<**vector**<**int**>> *clausura*(**const vector**<**vector**<**int**>>& *G*);

que, donada la matriu d'adjacència G d'un graf dirigit, retorni la seva clausura. Analitzeu-ne el cost asimptòtic en temps en el cas pitjor.

(b) (1 pt.) Representem per I la matriu identitat $n \times n$, és a dir, la matriu on tots els coeficients són 0 llevat dels de la diagonal, que són 1. Demostreu que, per tot $k \geq 0$, hi ha un camí en el graf de u a v amb com a molt k arestes si i només si el coeficient a la fila u columna v de la matriu $(I + G)^k$ (la matriu resultant de multiplicar k matrius $I + G$) és diferent de 0, és a dir, $(I + G)^k_{uv} \neq 0$.

(c) (1 pt.) Descriviu a alt nivell un algorisme per, donada la matriu d'adjacència G d'un graf dirigit, calcular-ne la seva clausura G^* en temps estrictament millor que $\Theta(n^3)$ en el cas pitjor. Doneu-ne el cost en el cas pitjor i justifiqueu-lo. Assumiu que el cost de les operacions aritmètiques amb enters és constant.

Pista: si hi ha camí de u a v, almenys n'hi ha un amb com a molt $n-1$ arestes.

Examen Final EDA **Duració: 3 hores** **08/06/2016**

Problema 1 **(1.5 pts.)**

Responeu les següents preguntes:

(a) (0.9 pt.) El teorema mestre de resolució de recurrències divisores afirma que si tenim una recurrència de la forma $T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^k)$ amb $a > 0$, $b > 1$ i $k \geq 0$, llavors, fent $\alpha = \log_b a$,

$$T(n) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si } \alpha < k, \\ \boxed{} & \text{si } \alpha = k, \\ \boxed{} & \text{si } \alpha > k. \end{cases}$$

(b) (0.3 pt.) La k més petita tal que el següent enunciat és cert:

"Per a tot graf dirigit $G = (V, E)$, es compleix $|E| = O(|V|^k)$"

és $\boxed{}$.

(c) (0.3 pt.) La classe *stack* <*T*> de la STL té dues funcions membre *top*:

T& *top*();
const *T*& *top*() **const**;

En canvi, la classe *priority_queue* <*T*> només té una funció *top*:

const *T*& *top*() **const**;

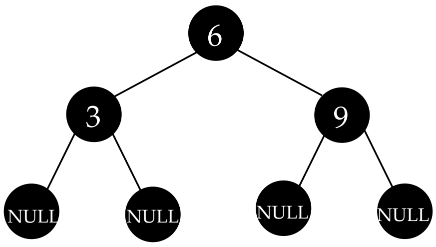
Quin inconvenient hi ha en què la classe *priority_queue* <*T*> tingui una funció *T*& *top*()?

Problema 2 **(1.5 pts.)**

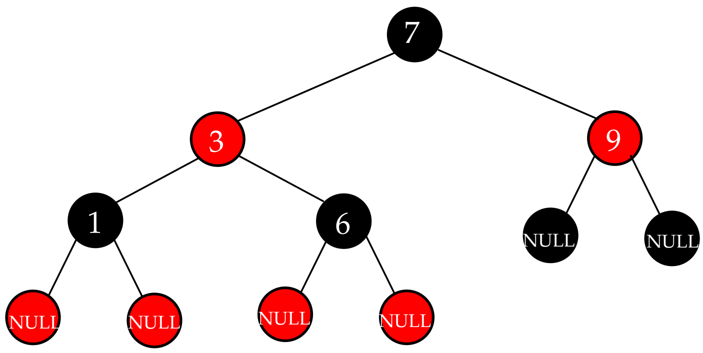
En aquest exercici, els nodes sombrejats representen pintats de color vermell.

Les respostes invàlides resten amb la mateixa puntuació que sumen les correctes.

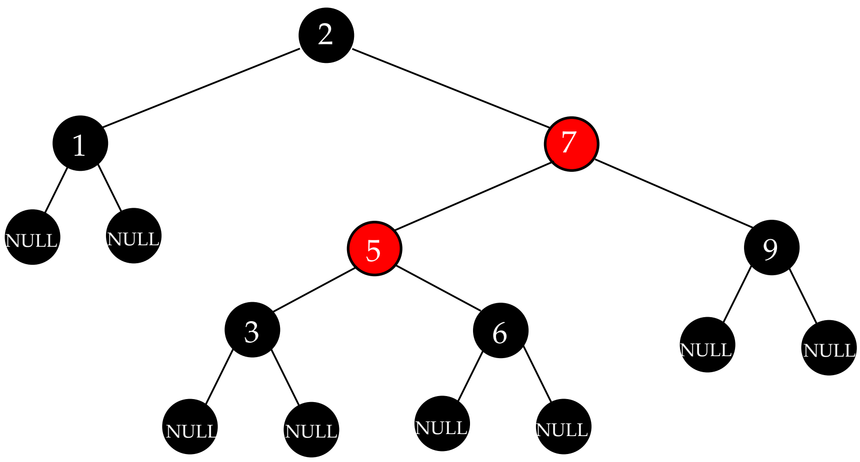
(a) El següent arbre binari és un arbre vermell-negre (responeu **Sí** o **No**):



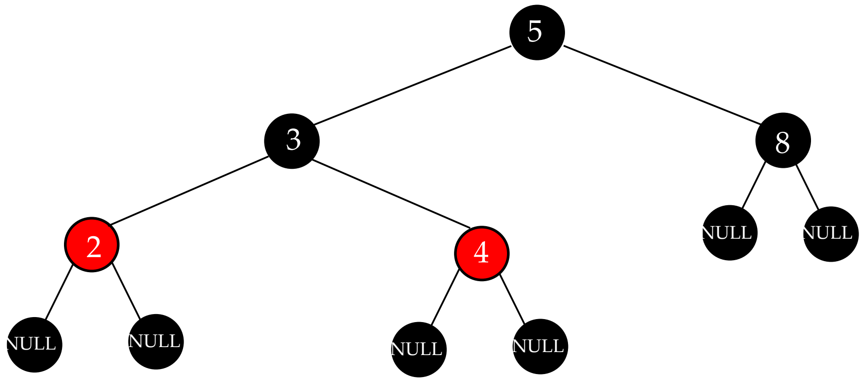
(b) El següent arbre binari és un arbre vermell-negre (responeu **Sí** o **No**):



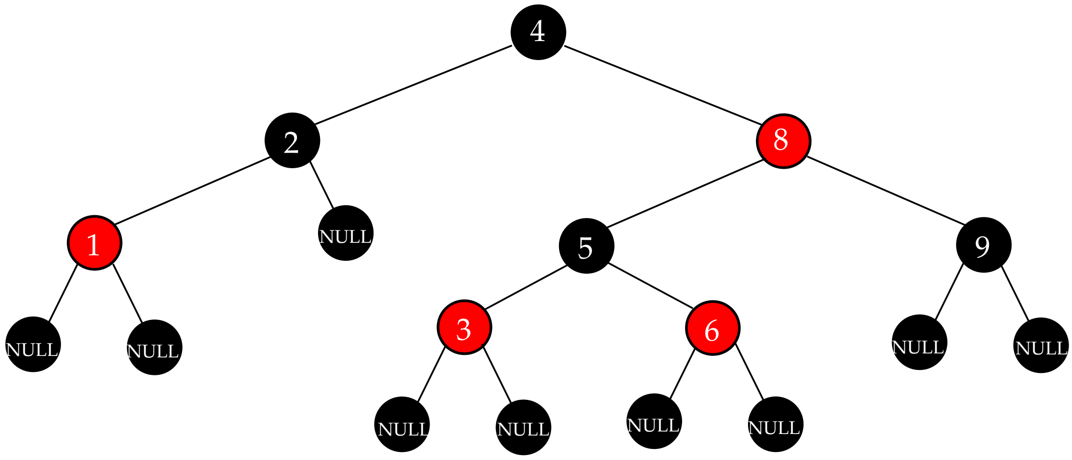
(c) El següent arbre binari és un arbre vermell-negre (responeu **Sí** o **No**):



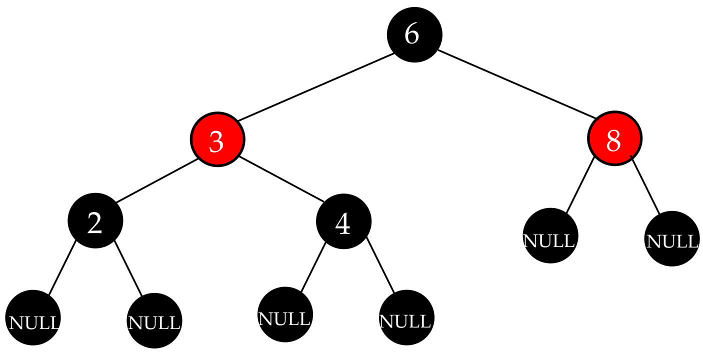
(d) El següent arbre binari és un arbre vermell-negre (responeu **Sí** o **No**):



(e) El següent arbre binari és un arbre vermell-negre (responeu **Sí** o **No**):



(f) El següent arbre binari és un arbre vermell-negre (responeu **Sí** o **No**):



Problema 3 **(2 pts.)**

Sigui $s \in \mathbb{R}$ tal que $0 < s < 1$.

Considerem la següent variant de la cerca dicotòmica que, donats:

- un element x,

- un vector v ordenat de forma no-decreixent, i
- dues posicions l i r,

retorna una posició entre l i r, ambdues incloses, en què x apareix a v (o -1 en cas que no n'hi hagi cap):

```
double s;   // 0 < s < 1

int posicio (double x, const vector<double>& v, int l, int r) {
  if (l > r) return -1;
  int p = l + int(s*(r-l));
  if (x < v[p]) return posicio (x, v,   l, p-1);
  if (x > v[p]) return posicio (x, v, p+1, r  );
  return p;
}
```

(a) (0.75 pt.) Segons el valor del paràmetre s, doneu una recurrència que descrigui el cost en temps en el cas pitjor de *posicio* en funció de $n = r-l+1$.

(b) (0.5 pt.) Segons el valor de s, quan es dóna el cas pitjor?

(c) (0.75 pt.) Segons el valor de s, resoleu la recurrència de la resposta de l'apartat (a) i doneu el cost asimptòtic en el cas pitjor.

Problema 4 **(2 pts.)**

Un *deque*<*T*> (acrònim de *d*ouble-*e*nded *que*ue, pronunciat: "dèk") és un contenidor seqüencial d'objectes de tipus *T* que permet afegir i treure elements tant al principi com al final, mitjançant les següents funcions:

```
void push_front (const T& x);     void push_back (const T& x);
void pop_front ();                void pop_back ();
```

respectivament. A més, es pot recuperar l'element del principi amb les funcions:

```
T& front ();
const T& front () const;
```

Totes aquestes funcions tenen cost en temps $\Theta(1)$.

(a) (1 pt.) Un graf dirigit $G = (V, E)$ amb pesos és *binari* si per tota aresta $e \in E$, el seu pes és 0 o 1. Utilitzant un *deque*, implementeu en C++ una funció

int *cost_minim*(**const vector**<**vector**<*pair*<**int**,**int**>>>& G, **int** x, **int** y);

que, donats un graf binari G i dos vèrtexs x i y de G, retorni el cost mínim d'anar de x a y (o -1 si no es pot arribar de x a y).

Assumiu que els vèrtexs es representen amb enters entre 0 i $n-1$, on n és el nombre de vèrtexs; i que el graf està representat amb llistes d'adjacències amb un **vector**<**vector**<*pair*<**int**,**int**>>>, on la primera component dels *pair*s representa el vèrtex successor i la segona component, el pes de l'aresta.

(b) (0.5 pt.) Analitzeu el cost en temps de la vostra funció *cost_minim* en el cas pitjor en funció del nombre de vèrtexs $|V|$ i d'arestes $|E|$.

(c) (0.5 pt.) Quin cost en temps en el cas pitjor tindria *cost_minim* si uséssim la versió de l'algorisme de Dijkstra que implementa la cua de prioritats amb un heap binari (com els vistos a classe)?

Problema 5 **(3 pts.)**

El problema de DESIGUALTATS consisteix en, donats un interval d'enters i un conjunt de desigualtats ($\neq$) entre variables, determinar si hi ha una solució de totes les desigualtats amb valors en l'interval. Més formalment, donats:

- un interval (finit) $[l, u] \subset \mathbb{Z}$,
- un conjunt de variables V, i
- un conjunt D de desigualtats de la forma $x \neq y$, on $x, y \in V$,

cal determinar si hi ha $s : V \to \mathbb{Z}$ tal que:

- per tot $x \in V$ es té $s(x) \in [l, u]$, i
- per tot $x \neq y \in D$ es compleix $s(x) \neq s(y)$.

Considerarem que el conjunt de variables és de la forma $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ per a una certa $n > 0$, i identificarem les variables amb enters entre 0 i $n-1$. A més, representarem les entrades per al problema de DESIGUALTATS mitjançant el tipus *ent_DESIGUALTATS* definit així:

```
struct ent_DESIGUALTATS {
  int l, u, n;
  set<pair<int,int>> D; // cada pair (i,j) es una desigualtat x_i ≠ x_j
};
```

(a) (1 pt.) Completeu la següent implementació de la funció

```
bool te_solucio (const ent_DESIGUALTATS& e);
```

que resol el problema de DESIGUALTATS:

```
bool ok(const vector<int>& s, const set<pair<int,int>>& D) {
  for (auto d : D)
    if ( [                              ] )
      return false;
  return true;
}

bool te_solucio (int k, vector<int>& s, const ent_DESIGUALTATS& e) {
  if (k == e.n) return ok(s, e.D);
  for (int v = [        ]; v ≤ [        ]; ++v) {
    [                      ]
    if ( te_solucio (k+1, s, e)) return true;
  }
  return false;
}

bool te_solucio (const ent_DESIGUALTATS& e) {
  vector<int> s(e.n);
  return te_solucio ( [        ] , s, e);
}
```

(b) (0.75 pt.) Demostreu que el cost en temps en el cas pitjor de la implementació anterior de *te_solucio* és $\Omega((u-l+1)^n)$.

(c) (0.75 pt.) Considerem el problema de COLOREJAT: donats un graf no dirigit G i un nombre natural $c > 0$, determinar si es poden pintar els vèrtexs de G amb c colors de forma que tota aresta tingui els extrems pintats amb colors diferents.

Suposem que representem les entrades per al problema de COLOREJAT amb el tipus *ent_COLOREJAT* definit així:

```
struct ent_COLOREJAT {
  vector<vector<int>> G;  // graf representat amb llistes d'adjacència
  int c;
};
```

Implementeu una reducció polinòmica de COLOREJAT a DESIGUALTATS:

```
ent_DESIGUALTATS reduccio(const ent_COLOREJAT& ec);
```

(d) (0.5 pt.) Veieu factible trobar un algorisme polinòmic per a DESIGUALTATS? Per què?

Examen Final EDA **Duració: 3 hores** **12/01/2017**

Problema 1 **(2 pts.)**

Ompliu els blancs següents de la forma més precisa possible:

(a) (0.25 pts.) Un graf de n vèrtexs té $O(\boxed{})$ arestes.

(b) (0.25 pts.) Un graf connex de n vèrtexs té $\Omega(\boxed{})$ arestes.

(c) (0.25 pts.) Un graf complet de n vèrtexs té $\Omega(\boxed{})$ arestes.

(d) (0.25 pts.) Un min-heap de n vèrtexs té $\Theta(\boxed{})$ fulles.

(e) (0.25 pts.) Un arbre binari de cerca de n vèrtexs té alçada $\Omega(\boxed{})$.

(f) (0.25 pts.) Un arbre binari de cerca de n vèrtexs té alçada $O(\boxed{})$.

(g) (0.25 pts.) Un arbre AVL de n vèrtexs té alçada $\Omega(\boxed{})$.

(h) (0.25 pts.) Un arbre AVL de n vèrtexs té alçada $O(\boxed{})$.

Problema 2 **(3 pts.)**

Sigui $G = (V, E)$ un graf dirigit amb pesos $\omega : E \to \mathbb{R}$. Volem resoldre el problema de, donat un vèrtex $s \in V$, calcular la distància de s a tots els vèrtexs del graf.

Recordem que:

- un *camí* és una seqüència de vèrtexs connectats consecutivament per arcs; és a dir, $(u_0, u_1, \ldots, u_k)$ tal que per tot $1 \leq i \leq k$, tenim $(u_{i-1}, u_i) \in E$.
- el *pes* d'un camí és la suma de pesos dels arcs que el formen:

$$\omega(u_0, u_1, \ldots, u_k) = \sum_{i=1}^{k} \omega(u_{i-1}, u_i)\,.$$

- la *distància* d'un vèrtex u a un vèrtex v és el pes del camí (anomenat *camí mínim*) amb pes mínim dels que surten de u i arriben a v, si existeix.

(a) (0.2 pts.) Suposem que per tota aresta $e \in E$, tenim $\omega(e) = 1$; és a dir, tots els pesos són 1. Quin algorisme podem usar per resoldre eficientment el problema de les distàncies?

(b) (0.2 pts.) Suposem que per tota aresta $e \in E$, tenim $\omega(e) \geq 0$; és a dir, tots els pesos són no negatius. Quin algorisme podem usar per resoldre eficientment el problema de les distàncies?

(c) (0.2 pts.) Quin algorisme podem usar per resoldre eficientment el problema de les distàncies, si alguns pesos poden ser negatius?

(d) (0.4 pts.) Quina condició sobre els cicles del graf cal que es compleixi per tal que, per tot parell de vèrtexs $u, v \in V$, existeixi un camí mínim de u a v?

(e) (1 pt.) Una funció $\pi : V \to \mathbb{R}$ és un *potencial* del graf si compleix que, per tota aresta $(u,v) \in E$, tenim $\pi(u) - \pi(v) \leq \omega(u,v)$. A més, es defineixen els *pesos reduïts* ω_π com $\omega_\pi(u,v) = \omega(u,v) - \pi(u) + \pi(v)$ per tot $(u,v) \in E$.

Demostreu que si c és un camí de u a v llavors $\omega_\pi(c) = \omega(c) - \pi(u) + \pi(v)$.

(f) (1 pt.) Suposem que el graf té un potencial π. Llavors es pot demostrar que per tot parell de vèrtexs $u, v \in V$ hi ha un camí mínim amb pesos ω de u a v. Assumint aquest fet, expliqueu com usar el potencial π per calcular la distància d'un vèrtex donat s a tots els vèrtexs del graf amb un algorisme alternatiu al de l'apartat (c) quan els pesos poden ser negatius.

Problema 3 **(2 pts.)**

Definim un tipus *matrix* per a representar matrius quadrades de nombres reals. Considereu el següent programa:

```
typedef vector<vector<double>> matrix;

matrix aux(const matrix& A, const matrix& B) {
  int n = A.size ();
  matrix C(n, vector<double>(n, 0));
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    for (int j = 0; j < n; ++j)
      for (int k = 0; k < n; ++k)
        C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
  return C;
}

matrix mystery(const matrix& M) {
  int n = M.size ();
  matrix P(M), Q(M);
  for (int i = 1; i < n; ++i) {
    P = aux(P, M);
    Q = aux(Q, P);
  }
  return Q;
}
```

(a) (0.5 pts.) Què calcula la funció *matrix mystery*(**const** *matrix*& *M*) en termes de la matriu *M*?

(b) (0.5 pts.) Si *M* és una matriu $n \times n$, quin és el cost en el cas pitjor de la funció

matrix mystery(**const** *matrix*& *M*)

en funció de n? Justifiqueu la resposta.

(c) (1 pt.) Implementeu en C++ una funció que calculi el mateix que la funció

matrix mystery(**const** *matrix*& *M*)

i que trigui temps $\Theta(n^3 \log n)$ en el cas pitjor. Implementeu també les funcions auxiliars que useu, excepte *aux* i les funcions de la llibreria estàndard de C++. Justifiqueu que el cost de la vostra funció és com es demana.

Problema 4 **(3 pts.)**

El problema de GRAF HAMILTONIÀ consisteix en, donat un graf (no dirigit), decidir si és Hamiltonià, és a dir, si hi ha un cicle que passa per tots els seus vèrtexs una sola vegada. Se sap que GRAF HAMILTONIÀ és un problema NP-complet.

També se sap que, a partir de la demostració que un problema pertany a la classe NP, es pot derivar un algorisme de força bruta que el resol. La següent funció

bool *ham*(**const vector**<**vector**<**int**>>& *G*) que,

donat un graf *G* representat amb llistes d'adjacència, diu si *G* és Hamiltonià, implementa aquest algorisme en el cas de GRAF HAMILTONIÀ.

```
bool ham_rec(const vector<vector<int>>& G, int k, vector<int>& p) {
  int n = G.size();
  if (k == n) {
    vector<bool> mkd(n, false);
    for (int u : p) {
      if (mkd[u]) return false;
      mkd[u] = true;
    }
    for (int k = 0; k < n; ++k) {
      int u = p[k];
      int v;
      if (k < n-1) v = p[k+1];
      else         v = p[0];
      if (find(G[u].begin(), G[u].end(), v) == G[u].end()) return false;
```

```
15        }
16        return true;
17      }
18      for (int v = 0; v < n; ++v) {
19        p[k] = v;
20        if (ham_rec(G, k+1, p)) return true;
21      }
22      return false;
23    }
24
25    bool ham(const vector<vector<int>>& G) {
26      int n = G.size();
27      vector<int> p(n);
28      return ham_rec(G, 0, p);
29    }
```

Nota: La funció de la llibreria STL

```
Iterator find ( Iterator first , Iterator last , int val );
```

retorna un iterador al primer element en el rang $[first, last)$ que és igual a *val*. Si tal element no existeix, la funció retorna *last*.

(a) (0.5 pts.) Identifiqueu la variable en el programa anterior que representa el testimoni quan la funció *ham* retorna **true**.

(b) (0.5 pts.) Identifiqueu el codi corresponent al verificador en el programa anterior. Per fer-ho, useu el números de línia del marge esquerre.

(c) (1 pt.) Ompliu els blancs següents per tal que la funció *ham2* calculi el mateix que la funció *ham*, però més eficientment.

```
bool ham2_rec(const vector<vector<int>>& G, int k, int u, vector<int>& next) {
  int n = G.size();
  if ( ______ == n)
    return find(G[u].begin(), G[u].end(), ______ ) ≠ G[u].end();

  for (int v : G[u])
    if (next[v] == ______ ) {
      next[u] = ______ ;
      if (ham2_rec(G, k+1, v, next)) return true;
      next[u] = −1;
    }
  return false;
}
```

```
bool ham2(const vector<vector<int>>& G) {
    int n = G.size ();
    vector<int> next(n, −1);
    return ham2_rec(G,        , 0, next);
}
```

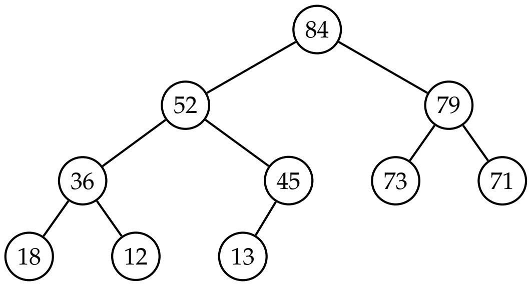
(d) (0.5 pts.) Suposem que les llistes d'adjacència de la representació de G estan ordenades (per exemple, de forma creixent). Expliqueu com utilitzar això per fer més eficient la funció de l'apartat (c).

(e) (0.5 pts.) Suposem que G és un graf **no connex**. Expliqueu com utilitzar això per fer més eficient la funció de l'apartat (c).

Examen Final EDA **Duració: 3 hores** **09/06/2017**

Problema 1 **(2 pts.)**

(a) (0.5 pts.) Donat el max-heap següent:



dibuixeu el max-heap resultant d'afegir 55 i d'esborrar l'element màxim (en aquest ordre). No cal justificar res.

(b) (0.5 pts.) Usant que P $\subseteq$ NP, demostreu que P $\subseteq$ co-NP.

(c) (0.5 pts.) Considereu la funció següent:

```
int f(const vector<int>& v, int i, int j) {
  // Precondition: 0 ≤ i ≤ j < v.size()
  if (i == j) return v[i];
  int p = (j − i + 1)/3;
```

```
    int m1 = i+p;
    int m2 = m1+p;
    return f(v, i, m1) + f(v, m1+1, m2) + f(v, m2+1, j);
}
```

Calculeu el cost asimptòtic temporal de f en funció de $n = j - i + 1$.

(d) (0.5 pts.) Considereu la següent afirmació:

La funció n^n creix asimptòticament més ràpid que qualsevol altra funció.

És certa? Si és així, justifiqueu-ho. Altrament doneu-ne un contraexemple.

Problema 2 **(2 pts.)**

Donats un vector A amb n enters diferents i un altre vector B amb m enters diferents, volem calcular un vector (d'enters diferents) que sigui la intersecció dels dos (és a dir, que contingui els elements comuns).

Per exemple, si $A = (3,1,6,0)$ i $B = (4,6,1,2,7)$, aleshores qualsevol dels dos vectors $(1,6)$, $(6,1)$ seria una resposta vàlida.

Suposem que A i B **no estan necessàriament** ordenats. Doneu una descripció a alt nivell de com implementaríeu una funció

vector<**int**> *intersection* (**const vector**<**int**>& A, **const vector**<**int**>& B);

que retorni la intersecció d'A i B amb un cost temporal $O(n+m)$ **en el cas mitjà**. Justifiqueu el cost.

Problema 3 **(3 pts.)**

Donat un graf dirigit acíclic (DAG) G, el *nivell* dels seus vèrtexs es defineix inductivament de la forma següent:

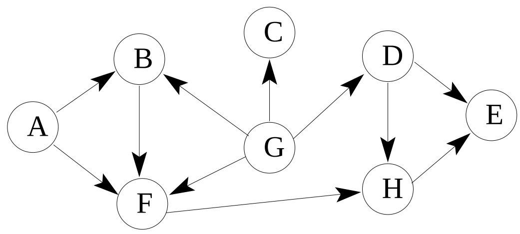
- si v és una arrel de G (un vèrtex sense predecessors) aleshores $\text{nivell}(v) = 0$
- altrament,

$$\text{nivell}(v) = 1 + \max\{\text{nivell}(u) \,|\, u \text{ és un predecessor de } v\}$$

A més, la profunditat de G és el nivell més gran de qualsevol vèrtex:

$$\text{profunditat}(G) = \max\{\text{nivell}(v) \,|\, v \text{ vèrtex de } G\}$$

(a) (0.9 pts.) Ompliu la taula següent indicant, per a cada vèrtex del DAG donat, el seu nivell. Quant val la profunditat del DAG? No cal justificar res.



nivell :

A	B	C	D	E	F	G	H

profunditat : $\square$

(b) (0.4 pts.) Per a cada afirmació donada a continuació, marqueu amb una X la casella corresponent segons si és certa o falsa. No cal justificar res.

Nota: Cada resposta correcta sumarà 0.1 punts; cada resposta equivocada restarà 0.1 punts, llevat del cas que hi hagi més respostes equivocades que correctes, en què la nota de l'exercici serà 0.

(1) Per a tot vèrtex u d'un DAG G, si u és una fulla (vèrtex sense successors) llavors $\text{nivell}(u) = \text{profunditat}(G)$.

(2) Per a tot vèrtex u d'un DAG G, si $\text{nivell}(u) = \text{profunditat}(G)$ llavors u és una fulla.

(3) La profunditat d'un DAG amb n vèrtexs és $O(n)$.

(4) La profunditat d'un DAG amb n vèrtexs és $\Omega(\log n)$.

	(1)	(2)	(3)	(4)
CERT				
FALS				

(c) (1.7 pts.) En aquest exercici assumirem que els grafs es representen amb llistes d'adjacències, i que el vèrtexs s'identifiquen amb naturals consecutius 0, 1, etc.

Ompliu els buits de la funció següent:

vector<**int**> *levels*(**const vector**<**vector**<**int**>>& G);

que, donat un DAG $G = (V, E)$, retorna un vector que, per a cada vèrtex $u \in V$, conté el valor nivell(u) a la posició u. Doneu i justifiqueu el cost temporal en el cas pitjor en termes de $n = |V|$ i $m = |E|$.

```
vector<int> levels(const vector<vector<int>>& G) {
  int n = G.size ();
  vector<int> lvl(n, −1), pred(n, 0);

  for (int u = 0; u < n; ++u)
    for (int v : G[u])
      ++pred[v];

  queue<int> Q;
  for (int u = 0; u < n; ++u)
    if (pred[u] == 0) {
      Q.push(u);
      [                              ]
    }

  while (not Q.empty()) {
    int u = Q.front (); Q.pop();
    for (int v : G[u]) {
      −−pred[v];
      [                              ]
      if (pred[v] == 0) Q.push(v);
  } }
  return lvl ;
}
```

Cost i justificació:

Problema 4 **(3 pts.)**

Donat $n > 0$, un *desarranjament* (de mida n) és una permutació de $\{0, \dots, n-1\}$ sense punts fixos; és a dir, π és un desarranjament si i només si $\pi(i) \neq i$ per tot i, $0 \leq i < n$. Per exemple

$\pi = (2,0,3,1)$ és un desarranjament, però $\pi' = (1,3,2,0)$ no (ja que $\pi'(2) = 2$).

Completeu el codi C++ següent per a generar tots els desarranjaments de mida n. No cal justificar res.

```
void write(const vector<int>& p, int n) {
  for (int k = 0; k < n; ++k) cout << " " << p[k];
  cout << endl;
}

void generate(int k, int n, vector<int>& p, vector<bool>& used) {
      if ( [                    ] ) write(p, n);
      else {
        for (int i = 0; i < n; ++i)
          if ( [                    ] ) {
            [                    ]
            [                    ]
            generate(k+1, n, p, used);
            [                    ]
        }
      }
};

void generate_all (int n) {
  vector<int> p(n);
  vector<bool> used(n, false);
  generate( [                    ] , n, p, used);
}
```

4

Solucions d'Exàmens Parcials

Solució de l'Examen Parcial EDA - torn 1 — 18/10/2010

Proposta de solució al problema 1

- Doneu la definició de $O(f)$:

$$\boxed{O(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |g(n)| \leq c|f(n)|\}}$$

- El teorema mestre de resolució de recurrències divisores afirma que si tenim una recurrència de la forma $T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^k)$ amb $b > 1$ i $k \geq 0$, llavors, fent $\alpha = \log_b a$,

$$T(n) = \begin{cases} \boxed{\Theta(n^k)} & \text{si } \alpha < k, \\ \boxed{\Theta(n^k \log n)} & \text{si } \alpha = k, \\ \boxed{\Theta(n^\alpha)} & \text{si } \alpha > k. \end{cases}$$

Proposta de solució al problema 2

Ompliu els blancs de la forma més precisa possible.

- Quicksort ordena n elements en temps $\boxed{\Theta(n^2)}$ en el cas pitjor.
- Per multiplicar dues matrius grans eficientment podem fer servir l'algorisme de $\boxed{\text{Strassen}}$.
- $2 + \cos(n) = \Theta(\ \boxed{1}\ )$.
- $2\sqrt{n} + 1 + n + n^2 = \Theta(\ \boxed{n^2}\ )$.
- $\log n + \log\log(n^2) = \Theta(\ \boxed{\log n}\ )$.
- $\frac{n^2-6n}{2} + 5n = \Theta(\ \boxed{n^2}\ )$.
- $n^2 - 3n - 18 = \ \boxed{\Omega}\ (n)$.
- Si

$$T(n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 1, \\ 3T(n/2) + n^2 - 2n + 1 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

aleshores, $T(n) = \Theta(\ \boxed{n^2}\ )$.

- Si

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 2T(n-1) + n^2 - 2n + 1 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

aleshores, $T(n) = \Theta(\ \boxed{2^n}\ )$.

Proposta de solució al problema 3

Sigui $c \in \mathbb{R}$ i siguin f i g dues funcions de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$ aleshores, per definició, tenim que $\forall\epsilon > 0 : \exists m > 0 : \forall n \geq m : \left|\frac{f(n)}{g(n)} - c\right| \leq \epsilon$. Fixant un $\epsilon > 0$ arbitrari, per propietats del valor absolut si $\left|\frac{f(n)}{g(n)} - c\right| \leq \epsilon$ aleshores $\left|\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| - |c|\right| \leq \epsilon$ i en particular es compleix que $|f(n)| \leq (|c| + \epsilon)|g(n)|$. Per tant,

$$\exists c' = |c| + \epsilon > 0 : \exists m > 0 : \forall n \geq m : |f(n)| \leq c'|g(n)| \implies f \in O(g).$$

Proposta de solució al problema 4

Suposeu que *primer*(n) és una crida a una funció amb temps $O(\sqrt{n})$.

Considereu un procediment amb cos principal:

if (*primer*(n)) A;
else B;

Doneu fites senzilles i ajustades amb notació O per al temps d'aquest procediment, en funció de n, suposant que:

1. A triga $O(n)$ i B triga $O(1)$.

   $\boxed{O(n)}$

2. A i B, ambdós, triguen $O(1)$.

   $\boxed{O(\sqrt{n})}$

Proposta de solució al problema 5

```
int misteri (int n) {
    if (n == 1) return 1;
    return misteri (n−1) + 2*n − 1;
}
```

- Digueu què calcula la funció *misteri*.

  $\boxed{n^2}$

- Doneu el seu cost en funció de n.

  $\boxed{\Theta(n)}$

Proposta de solució al problema 6

Per obtenir la unió de A i B s'ha d'ordenar el vector B amb un algorisme de temps $O(m \log m)$ en el cas pitjor (com per exemple mergesort) i cercar-hi els n elements de A amb una cerca dicotòmica. S'ha de copiar al resultat tot el conjunt B i a continuació els elements de A que no s'hagin trobat a B. El temps és $O((n + m) \log m) = O(n \log m)$ perquè $m \leq n$.

Si ens demanen la intersecció, el vector B s'ordena igualment i s'han de copiar al resultat només aquells elements de A que siguin a B.

Proposta de solució al problema 7

L'algorisme és mergesort (ordenació per fusió) però divideix la taula d'elements a ordenar en tres parts de mida semblant i fa tres crides recursives a cada subtaula en comptes de dividir en meitats i fer dues crides recursives. El seu cost en temps, $T(n)$, ve donat per la recurrència:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{si } n = 1, \\ 3T(n/3) + \Theta(n) & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

i per tant $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Solució de l'Examen Parcial EDA- torn 2 18/10/2010

Proposta de solució al problema 1

- Doneu la definició de $\Omega(f)$:

$$\boxed{\Omega(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |g(n)| \geq c|f(n)|\}}$$

- El teorema mestre de resolució de recurrències substractores afirma que si tenim una recurrència de la forma $T(n) = aT(n-c) + \Theta(n^k)$ amb $c > 0$ i $k \geq 0$, llavors,

$$T(n) = \begin{cases} \boxed{\Theta(n^k)} & \text{si } a < 1, \\ \boxed{\Theta(n^{k+1})} & \text{si } a = 1, \\ \boxed{\Theta(a^{\frac{n}{c}})} & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

Proposta de solució al problema 2

Ompliu els blancs de la forma més precisa possible.

- Per multiplicar dos naturals molts llargs eficientment podem fer servir l'algorisme de $\boxed{\text{Karatsuba}}$.
- Per ordenar n elements en temps $\Theta(n \log n)$ en el cas pitjor podem servir l'algorisme de $\boxed{\text{mergesort (ordenació per fusió)}}$.
- Multipliqueu $\log n + 6 + O(1/n)$ per $n + O(\sqrt{n})$. El resultat simplificat tan com és possible és $O(\ \boxed{n \log n}\ )$.
- $\sin(n) + 10 + n = \Theta(\ \boxed{n}\ )$.
- $\frac{1}{3}n^2 + 3n \log n + 5n^8 = \Theta(\ \boxed{n^8}\ )$.
- $n\sqrt{n} + n^2 = \Theta(\ \boxed{n^2}\ )$.
- $3n \log n = \ \boxed{O}\ (n^2)$.
- Si

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 3T(n/2) + n - 2 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

  aleshores, $T(n) = \Theta(\ \boxed{n^{\log_2(3)}}\ )$.

- Si

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 4T(n-1) + n & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

  aleshores, $T(n) = \Theta(\ \boxed{4^n}\ )$.

Proposta de solució al problema 3

Sigui $c \in \mathbb{R}$ i siguin f i g dues funcions de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0$ aleshores, $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \frac{1}{c} > 0$ i per definició, tenim que $\forall \epsilon > 0 : \exists m > 0 : \forall n \geq m : \left|\frac{g(n)}{f(n)} - \frac{1}{c}\right| \leq \epsilon$. Fixant un $\epsilon > 0$ arbitrari, per propietats del valor absolut si $\left|\frac{g(n)}{f(n)} - \frac{1}{c}\right| \leq \epsilon$ aleshores $\left|\left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| - \left|\frac{1}{c}\right|\right| \leq \epsilon$ i en particular es compleix que $|f(n)| \geq \frac{c}{c\epsilon+1}|g(n)|$. Per tant,

$$\exists c' = \frac{c}{c\epsilon + 1} > 0 : \exists m > 0 : \forall n \geq m : |f(n)| \geq c'|g(n)| \implies f \in \Omega(g).$$

Proposta de solució al problema 4

```
int misteri (int m, int n) {
    int result = 0;
    while (m > 0) {
        if (m % 2 ≠ 0) result += n;
        m /= 2; n *= 2;
    }
    return result ;
}
```

- Digueu què calcula la funció *misteri* .

  $\boxed{\text{És l'algorisme de la multiplicació russa i calcula } m \times n}$

- Doneu el seu cost en funció de m.

  $\boxed{\Theta(\log m)}$

Proposta de solució al problema 5

Considereu un procediment amb cos principal:

```
int k = f(n);
int s = 0;
for (int i = 1; i ≤ k; ++i) s += i;
```

amb $f(n)$ una crida a la funció f.

Doneu fites senzilles i ajustades amb notació O per al temps d'aquest procediment, en funció de n, suposant que:

1. El temps de $f(n)$ és $O(n)$ i el valor de $f(n)$ és $n!$.

   $\boxed{O(n!)}$

2. El temps de $f(n)$ és $O(n)$ i el valor de $f(n)$ és n.

   $\boxed{O(n)}$

3. El temps de $f(n)$ és $O(n^2)$ i el valor de $f(n)$ és $n!$.

   $\boxed{O(n!)}$

4. El temps de $f(n)$ és $O(1)$ i el valor de $f(n)$ és 0.

   $\boxed{O(1)}$

Proposta de solució al problema 6

1. Amb un vector ordenat, si un element apareix repetit més de $n/2$ vegades aquest element s'ha de trobar a la posició del mig. En temps $O(\log n)$ (amb dues cerques dicotòmiques) es poden trobar la posició de la primera aparició d'aquest element a la taula i la posició de la darrera. Fent la resta de la segona menys la primera trobem el nombre de vegades que es repeteix aquest element i podem determinar si això passa més de $n/2$ vegades.

2. Si el vector és de 3 elements (qualsevol constant pot servir) es calcula directament provant totes les possibilitats si hi ha un element repetit dues vegades o més. Si $n > 3$ aleshores es divideix el vector A per la meitat en dos subvectors A_1 i A_2 de (quasi) la mateixa mida i es crida l'algorisme recursivament en A_1 i A_2. Si A_1 conté un element majoritari (com demana l'enunciat) es compara aquest element amb tos els de A_2, el que dona el nombre d'aparicions d'aquest element a A. Es segueix el mateix procediment amb A_2. Si en algun dels dos casos obtenim un element repetit més de $n/2$ vegades, retornem aquest element i el nombre de vegades que es repeteix. En cas contrari no hi ha elements que compleixin amb la propietat.

Proposta de solució al problema 7

L'algorisme amagat és quicksort (ordenació ràpida) i quan tots els elements són iguals per cada increment de l'índex j hi ha un increment de l'index i i es fa un intercanvi de cada element del vector amb sí mateix, al final de cada crida recursiva ambdòs índexos ténen per valor d, i es fan dues crides recursives a problemes de mida $n-1$ i 1 respectivament. Per tant, el cost en temps, $T(n)$, de l'algorisme anterior ve donat per la recurrència:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{si } n = 1, \\ T(n-1) + \Theta(n) & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

i per tant $T(n) = \Theta(n^2)$.

Solució de l'Examen Parcial EDA — 21/03/2011

Proposta de solució al problema 1

Ompliu els blancs de la forma més precisa possible.

- Insertion sort ordena n elements en temps $\boxed{\Theta(n)}$ en el cas millor.
- Trobar la mediana de n elements té una complexitat en temps $\Omega(\boxed{\text{n}})$.
- Com de ràpid es poden multiplicar una matriu $kn \times n$ per una $n \times kn$ fent servir l'algorisme de Strassen? $\boxed{\Theta(k^2 n^{\log_2(7)})}$.
- Sigui $F(n)$ el número de línies que imprimeix el programa anterior amb entrada n, aleshores,

$$F(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{si } n \leq 1, \\ 2F(n/2) + \Theta(1) & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

  i per tant $F(n) = \Theta(n)$.

- Sigui

$$T(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n < 3, \\ 9T(n/3) + n^2 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

  Aleshores, $T(n) = \Theta(\boxed{n^2 \log(n)})$.

- Sigui

$$T(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 1, \\ 3T(n-1) + n^3 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

  Aleshores, $T(n) = \Theta(\boxed{3^n})$.

- Siguin $a = b = c = d = 01$, $u = (a+b)(c+d) = 10 \times 10$, $v = ac = 01 \times 01 = 1$ i $w = bd = 01 \times 01 = 1$. Per calcular el valor de u fem servir el mateix procediment amb $a' = c' = 1$, $b' = d' = 0$, $u' = (1+0) \times (1+0) = 1$, $v' = 1 \times 1 = 1$, i $w' = 0 \times 0 = 0$, $u' - v' - w' = 0$, aleshores $u = v' \times 100 = 100$ i $u - v - w = 10$. Per tant, $101 \times 101 = 1 \times 10000 + 10 \times 100 + 1 = 11001$.

-

2	3	5	10	1	6	7	13	mergesort
2	3	5	10	7	13	1	6	insertion sort
1	2	5	3	7	6	13	10	quicksort
1	2	3	5	6	13	10	7	selection sort

-

A	B	O	Ω	Θ
$\log^k(n)$	n^ϵ	sí	no	no
$\log n$	$\log\log(n^2)$	no	sí	no
n^k	c^n	sí	no	no
2^{n+1}	2^n	sí	sí	sí
2^{2n}	2^n	no	sí	no

Proposta de solució al problema 2

- El programa troba el k-èsim element més petit de taula T.
- El cas pitjor consisteix a no poder reduir la talla del problema a resoldre recursivament en més d'un element i fer una crida recursiva a una taula amb un únic element menys. D'aquesta manera es faran el màxim nombre possible de crides recursives. Si $T(n)$ és el cost en cas pitjor de l'algorisme anterior aleshores,

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{si } n \leq 1, \\ T(n-1) + \Theta(n) & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

  on $\Theta(n)$ és el cost no recursiu de cridar a *misteri_2* .
- En el cas millor per retornar el k-èsim valor més petit només calen tres crides recursives a *misteri_1* si $k > 1$, i dues si $k = 1$. Si $k > 1$, aquest cas millor es produeix quan en la 1a crida resulta que $q = k - 2$. Llavors la 2a crida es fa amb $k = 1$, i si aquí la partició fa que només quedi una finestra amb un sol element, aleshores la 3a crida recursiva retorna pel cas base el valor buscat. Com que en qualsevol cas es fan 2-3 crides a *misteri_2* , que és lineal, finalment resulta que el cost en el cas millor és $\Theta(n)$.
- A quicksort perquè la funció *misteri_2* és la mateixa partició que fa servir quicksort.

Proposta de solució al problema 3

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <cassert>

using namespace std;

int sqrt (int n, int l, int u) {
  assert (l*l ≤ n and n ≤ u*u);
  if (l+1 ≥ u) {
    if (u*u == n) return u;
    else          return l;
  }
  else {
    int m = (l+u)/2;
    int sq = m*m;
    if      (sq == n) return m;
    else if (sq < n) return sqrt (n, m, u);
    else             return sqrt (n, l, m);
  }
}

int main(void) {
  int n;
  cin >> n;
  cout << sqrt(n, 0, n) << endl;
}
```

El cas pitjor es produeix quan n no és un quadrat. Si $T(n)$ és el temps que es triga en aquest cas, tenim la recurrència $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$ i per tant $T(n) = \Theta(\log n)$.

Solució de l'Examen Parcial EDA 20/10/2011

Proposta de solució al problema 1

- Atès que $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$, $101+102+\ldots+999+1\,000 = \sum_{i=101}^{1\,000} i = \sum_{i=1}^{1\,000} i - \sum_{i=1}^{100} i = 1\,000 \cdot 1\,001/2 - 100 \cdot 101/2 = 500\,500 - 5\,050 = 495\,450$.

- Establir un "com a mínim" fent servir la notació asimptòtica O no té sentit, perquè O no expressa fites inferiors, només superiors. En particular, $O(n^2)$ inclou funcions que creixen tan lentament com vulguem.

- Ordenades de manera creixent: $5\log(n+100)^{10}, (\ln(n))^2, \sqrt{n}, 0.001n^4 + 3n^3 + 1, 3^n, 2^{2n}$

- Siguin T_A, T_B, T_C els costos en el cas pitjor dels algorismes A, B, C.
  - $T_A(n) = 5T_A(n/2) + \Theta(n) = \Theta(n^{\log_2 5})$
  - $T_B(n) = 2T_B(n-1) + \Theta(1) = \Theta(2^n)$
  - $T_C(n) = 9T_A(n/3) + \Theta(n^2) = \Theta(n^2 \log n)$

  L'algorisme C és el més eficient.

- El cas millor es dóna quan x és un nombre parell. En aquest cas no hi ha carry i la suma es fa en temps $\Theta(1)$.

  El cas pitjor es dóna quan x és $2^{n-1} - 1$. En aquest cas el $(n-1)$-èsim bit de x és 0, i la resta són 1. De forma que quan es suma 1, el carry es propaga per tota la cadena de bits fins a posar el $(n-1)$-èsim bit a 1. Per tant, el cost és $\Theta(n)$.

Proposta de solució al problema 2

- Atès que es recorren senceres les dues taules fent operacions de cost constant, el cost de `fusio2` és $\Theta(na + nb)$.

- A la i-èsima fusió, estem fusionant un vector de mida in amb un de mida n. Seguint l'apartat anterior, això té cost $\Theta((i+1)n)$. Així doncs, el cost d'aquest algorisme és $\sum_{i=1}^{k-1} \Theta((i+1)n) = \sum_{i=2}^{k} \Theta(in) = \Theta(n \cdot \sum_{i=2}^{k} i) = \Theta(nk^2)$.

- La funció seria:

```
vector<int> fusiok(const vector< vector<int> >& t, int e, int d) {
  if (e == d) return t[e];
  else {
    int m = (e + d)/2;
    return fusio2 (fusiok (t, e, m), fusiok (t, m+1, d));
  }
}

vector<int> fusiok(const vector< vector<int> >& t) {
  return fusiok (t, 0, t.size()-1);
}
```

El cost segueix la recurrència $T(k,n) = 2T(k/2,n) + \Theta(nk)$, que té solució $T(k,n) = \Theta(nk\log k)$.

Proposta de solució al problema 3

Demostrarem la identitat per inducció en $n \geq 1$. El cas base $n = 1$ és cert ja que $f_2 = 1$, $f_1 = 1$ i $f_0 = 0$. Suposem ara que la identitat és certa per $n \geq 1$ i la demostrarem per $n + 1$. Tenim:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n & f_{n+1} \\ f_n + f_{n-1} & f_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Per dissenyar l'algorisme de cost $\Theta(\log n)$ farem servir la recurrència següent per calcular potències d'una matriu M:

$$M^n = \begin{cases} I & \text{si } n = 0 \\ (M^{\lfloor n/2 \rfloor})^2 & \text{si } n > 0 \text{ i és parell} \\ (M^{\lfloor n/2 \rfloor})^2 \cdot M & \text{si } n > 0 \text{ i és senar} \end{cases}$$

Aplicarem la recurrència a la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i retornarem $M^n[0][1]$. Donat que M és una matriu 2×2, el cost de calcular aquesta recurrència és $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$, i per tant $T(n) = \Theta(\log n)$ pel Teorema Mestre.

L'algorisme escrit en C++ és el següent:

```
void pow(int n, vector<vector<int> >& R) {
    if (n == 0) {
        R[0][0] = R[1][1] = 1;
        R[0][1] = R[1][0] = 0;
    }
    else {
        pow(n/2, R);
        vector<vector<int> > S(2,vector<int>(2));
        S[0][0] = R[0][0]*R[0][0] + R[0][1]*R[1][0];
        S[0][1] = R[0][0]*R[0][1] + R[0][1]*R[1][1];
        S[1][0] = R[1][0]*R[0][0] + R[1][1]*R[1][0];
        S[1][1] = R[1][0]*R[0][1] + R[1][1]*R[1][1];
        if (n % 2 == 0) R = S;
        else {
            R[0][0] = S[0][0] + S[0][1];
            R[0][1] = S[0][0];
            R[1][0] = S[1][0] + S[1][1];
```

```
            R[1][1] = S[1][0];
        }
    }
}

int fib(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    vector<vector<int> > R(2, vector<int>(2));
    pow(n, R);
    return R[0][1];
}
```

Solució de l'Examen Parcial EDA 19/3/2012

Proposta de solució al problema 1

-

$f(n)$	$g(n)$	$f = O(g)$	$f = \Omega(g)$	$f = \Theta(g)$
$\sqrt{n}$	$n^{2/3}$	cert	fals	fals
$\log(2n)$	$\log(3n)$	cert	cert	cert
$n^{0.1}$	$(\log n)^{10}$	fals	cert	fals
2^n	2^{n+1}	cert	cert	cert
$100n + \log n$	$n + (\log n)^2$	cert	cert	cert

- S'ordena el vector amb un algorisme d'ordenació de cost $O(n \log n)$ en el cas pitjor (com per exemple merge sort). Després de l'ordenació els elements repetits es troben a posicions consecutives del vector, per tant amb un recorregut lineal es poden treure les repeticions.

-

```
string pwr2bin(int n) {
    if (n == 1) return "1010"; // 10 en binari (8 + 2)
    string z = pwr2bin(n/2);
    return Karatsuba(z, z);
}
```

Sigui $T(n)$ el cost de l'algorisme anterior amb entrada n. Aleshores $T(n)$ satisfà la recurrència:

$$T(n) = T(n/2) + O(n^{\log_2 3})$$

perquè es fa una crida recursiva a un problema de la meitat de la mida més el cost $O(n^{\log_2 3})$ de fer servir l'algorisme de Karatsuba amb enters de mida n a cada crida recursiva. Com que $\log_2 3 > 0$, domina el cost de fer servir l'algorisme de Karatsuba i per tant $T(n) = O(n^{\log_2 3})$.

- No. Si tenim un algorisme per multiplicar dos enters de n bits, aleshores podem elevar al quadrat un enter x de n bits amb la mateixa complexitat asimptòtica usant l'algorisme per multiplicar x per x.

Proposta de solució al problema 2

- El nombre màxim $C(n)$ de crides a f que pot haver-hi en un moment donat a la pila de recursió segueix la recurrència:

$$C(n) = C(n/2) + \Theta(1).$$

Per tant $C(n) = \Theta(\log n)$, i l'opció correcta és la c).

- El nombre $C'(n)$ de crides a f en el cas pitjor (el qual es dóna, per exemple, si $n = 2^p + 1$ per a un cert $p \geq 0$) segueix la recurrència:

$$C'(n) = 2C'(n/2) + \Theta(1).$$

Per tant $C'(n) = \Theta(n)$, i l'opció correcta és la b).

Proposta de solució al problema 3

La funció *misteri* ordena els elements de $V[e..d]$. Es pot raonar per inducció. Si $e \geq d$ la funció no fa res, ja que $V[e..d]$ ja està ordenat. Si $e < d$, llavors la crida $misteri(e, d-1, V)$ ordena $V[e..d-1]$. Els següents bucle i intercanvi col·loquen el valor $V[d]$ a la posició i que li correspon. Ara $V[e..i]$ està ordenat, i tots els elements de $V[i+1..d]$ són més grans o iguals que els de $V[e..i]$. La crida $misteri(i+1, d, V)$ acaba d'ordenar finalment $V[e..d]$.

El cas pitjor es dóna quan, després de barrejar, a la posició d hi queda l'element més petit. Si $n = d - e + 1$, llavors tant la primera crida com la segona a *misteri* es fan sobre vectors de mida $n-1$. El cost $T(n)$ ve determinat doncs per:

$$T(n) = 2T(n-1) + \Theta(n)$$

i per tant $T(n) = \Theta(2^n)$.

Simètricament, el cas millor es dóna quan, després de barrejar, a la posició d hi queda l'element més gran. Aleshores la primera crida a *misteri* es fa sobre un vector de mida $n-1$, i la segona sobre un vector buit, que té cost constant. Així, el cost $T(n)$ ve determinat per:

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

i per tant $T(n) = \Theta(n^2)$.

Proposta de solució al problema 4

- Sí. Com que $f \in O(g)$, hi ha $k > 0$ i $n_1 \in \mathbb{N}$ tals que $n \geq n_1$ implica $f(n) \leq kg(n)$. Com que $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$, hi ha $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$ llavors $g(n) \geq k$, i per tant $\log g(n) \geq \log k$. Si $n \geq \max(n_1, n_2)$, prenent logaritmes $\log f(n) \leq \log k + \log g(n) \leq 2\log g(n)$. Així doncs, $\log f \in O(\log g)$.
- No. Considerem $f(n) = 2n+2$ i $g(n) = n+1$. És clar que $\lim_{n\to\infty} g(n) = +\infty$. A més, $f \in O(g)$, però $2^f \notin O(2^g)$ ja que $2^{f(n)} = 2^{2n+2} = (2^{n+1})^2 = (2^{g(n)})^2$.

Proposta de solució al problema 5

Descripció de l'algorisme:

```
int max_rec(const seq& A, const seq& B, int l, int u) {
  // Pre: l < u and B^l ⊆ A and B^u ⊈ A
  // Post: max{ i | l ≤ i < u and B^i ⊆ A }
  if (l == u−1) return l;
  else {
    int h = (l+u)/2;
    if ( is_subseq (B^h, A)) return max_rec(A, B, h, u);
    else return max_rec(A, B, l, h);
  }
}

int max(const seq A&, const seq& B) {
  int n = A.length ();
  int m = B.length ();
  return max_rec(A, B, 0, n/m + 1);
}
```

Justificació de la correctesa:

Vegem que la funció *max_rec* és correcta per inducció. Si $l = u - 1$, llavors de la precondició es dedueix que el valor buscat és l. Si $l < u - 1$ llavors $l < h < u$. A més, si $B^h \subseteq A$ llavors $max\_rec(A, B, h, u)$ satisfà la precondició, i per hipòtesi d'inducció el valor retornat és el buscat. Si en canvi $B^h \not\subseteq A$ llavors $max\_rec(A, B, l, h)$ satisfà la precondició, i per hipòtesi d'inducció el valor retornat és el buscat.

Finalment, $max\_rec(A, B, 0, n/m + 1)$ satisfà la precondició, ja que $B^0 = \lambda \subseteq A$, i raonant sobre les longituds sabem que $B^{n/m+1} \not\subseteq A$. Com que *max_rec* és correcta, el valor retornat és el buscat.

Justificació del cost:

Calculem primer el cost de la part no recursiva d'una crida a *max_rec*. El cost de construir B^h és $O(hm)$, i com que B^h té longitud hm, el cost de $is\_subseq(B^h, A)$ és $O(hm + n)$. Com que $h \leq n/m$, el cost és $O(n)$.

Calculem ara el nombre de crides que es fan a *max_rec*. Sigui $p = u - l$. Llavors el nombre de crides $C(p)$ ve determinat per la recurrència

$$C(p) = C(p/2) + 1.$$

Per tant, el nombre de crides és $C(p) = O(\log p)$.

En conclusió el cost de l'algorisme és $O(n \log p) = O(n \log(1 + n/m))$.

Solució de l'Examen Parcial EDA 22/10/2012

Proposta de solució al problema 1

-
  - Cert.
  - Cert.
  - Fals.
  - Fals.
- $T(n) = \Theta(\sqrt{n}\log(n))$.

Proposta de solució al problema 2

En primer lloc observem que

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdots \cdot n \leq n^n \\ n! &= 1 \cdot 2 \cdots \cdot n \geq (n/2)^{(n/2)}. \end{aligned}$$

En segon lloc, utilitzant el fet que $\log_2(x)$ és creixent tenim que

$$\log_2(n!) \leq \log_2(n^n) \leq n\log_2(n) = O(n\log(n))$$
$$\log_2(n!) \geq \log_2((n/2)^{(n/2)}) \geq (n/2)\log_2(n/2) \geq (n/2)\log_2(n) - (n/2) = \Omega(n\log(n)).$$

Per tant $\log_2(n!)$ és alhora $O(n\log(n))$ i $\Omega(n\log(n))$ i per tant és $\Theta(n\log(n))$[1] .

Proposta de solució al problema 3

- La iteració més interior suma $n - j$ a r. Per tant, la iteració d'enmig suma

  $$\sum_{j=i+1}^{n} (n-j) = n(n-i) - \left(\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i} j\right) = n(n-i) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{i(i+1)}{2}$$

  a r. Aleshores, la iteració més exterior suma

  $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} (n-j) &= n^3 - n\sum_{i=1}^{n} i - \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= n^3 - \frac{n \cdot n(n+1)}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \cdot 2} + \frac{n(n+1)}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} \end{aligned}$$

  a r, que inicialment val 0. El grau del polinomi és doncs 3 i els coeficients (de menor a major grau) són $0, 1/3, -1/2, 1/6$.

  Una solució alternativa consisteix en observar que la funció compta tots els possibles subconjunts de 3 elements que es poden formar en un conjunt de n elements. Per tant, la funció calcula $\binom{n}{3} = \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$.

[1] La inducció no va bé per demostrar fites en notació asimptòtica. Per exemple, es pot "demostrar per inducció en n"que $n = \Theta(1)$ la qual cosa és òbviament absurda. "Demostració: Cas base ($n = 1$): $1 = \Theta(1)$. Cas inductiu (de n a $n + 1$): $n + 1 = \Theta(1) + 1 = \Theta(1)$."Penseu què hi ha d'incorrecte en aquesta demostració.

- El cos de la iteració més interior s'executa exactament $n(n^2 - 3n + 2)/6$ vegades. Per tant, la funció té cost $\Theta(n^3)$.

Proposta de solució al problema 4

La funció *misteri_a* és l'algorisme d'exponenciació ràpida, que calcula x^n amb cost $\Theta(\log(n))$ (el mateix en els casos pitjor, mitjà i millor). Per tant, *misteri_b* eleva a la potència n cada element del vector V, és a dir, calcula V^n, amb cost $\Theta(m \log(n))$ (el mateix en els casos pitjor, mitjà i millor).

Proposta de solució al problema 5

S'aplica un algorisme d'exponenciació ràpida on els productes es fan amb l'algorisme de Karatsuba.

Sigui $k = \log_2(3)$, l'exponent de l'algorisme de Karatsuba. Llavors (ignorant els productes dels senars que, com a molt són el doble):

1. Es multiplica $m \times m$ per obtenir m^2. És un Karatsuba de n bits per n bits, per tant cost n^k.

2. Es multiplica $m^2 \times m^2$ per obtenir m^4. És un Karatsuba de $2n$ bits per $2n$ bits, per tant cost $(2n)^k$.

3. Es multiplica $m^4 \times m^4$ per obtenir m^8. És un Karatsuba de $4n$ bits per $4n$ bits, per tant cost $(4n)^k$.

...

log_2(m/2). Es multiplica $m^{(m/2)} \times m^{(m/2)}$ per obtenir m^m. És un Karatsuba de $(m/2)n$ bits per $(m/2)n$ bits, per tant cost $((m/2)n)^k$.

En total,

$$T(n) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} (2^i n)^k = n^k \sum_{i=0}^{n-1} 2^{ik} = \Theta(n^k 2^{kn})$$

on s'utilitza el fet que $\sum_{i=0}^{n} 2^{ik} = \Theta(2^{kn})$.

Alternativament, es podria fer la majoració següent:

$$T(n) \;\leq\; n((m/2)n)^k \;=\; O(n^{k+1} 2^{kn}).$$

Proposta de solució al problema 6

```
double zero(double a, double b, double tol) {
  double c = (a+b)/2;
  if        (b - a ≤ tol or f(c) == 0)   return c;
  else if   (f(c) * f(b) < 0)            return zero(c, b, tol);
  else                                   return zero(a, c, tol);
}
```

En el cas pitjor a cada crida recursiva la longitud de l'interval es redueix en un factor $\frac{1}{2}$, i després de k crides l'interval té doncs longitud $\frac{b-a}{2^k}$. El programa s'atura quan aquesta longitud és més petita o igual que *tol*. Per tant, el nombre de crides recursives és com a molt $O(\log(\frac{b-a}{tol}))$. Com que a cada crida recursiva el treball que es fa és $O(1)$, el programa costa en el cas pitjor $O(\log(\frac{b-a}{tol}))$.

Solució de l'Examen Parcial EDA 18/3/2013

Proposta de solució al problema 1

A: $T(n) = 5T(n/2) + \Theta(n)$. És a dir $T(n) = \Theta(n^{\log_2 5})$.
B: $T(n) = 2T(n-1) + \Theta(1)$. És a dir $T(n) = \Theta(2^n)$.
C: $T(n) = 9T(n/3) + \Theta(n^2)$. És a dir $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$.
D: El B és exponencial, i els altres com a molt polinòmics; per tant el descartem. Entre A i C ens quedem amb C perquè $\log_2 5 > 2.01$ i $\lim_{n\to\infty} n^{2.01}/n^2 \log n = \lim_{n\to\infty} n^{0.01}/\log n = \infty$.

Proposta de solució al problema 2

a) Cert. Justificació: El nombre de compostos a l'interval $[1, \ldots, n]$ és $n - \pi(n)$. Per tant, és suficient comprovar que $n - \pi(n) > \pi(n)$ per n suficientment gran. Fem-ho. Del fet que $\pi(n) = \Theta(n/\log n)$ podem concloure que

$$(n - \pi(n))/\pi(n) = n/\pi(n) - 1 = \Theta(\log n).$$

Donat que $\lim_{n\to\infty} \log n = \infty$ en deduïm que $n - \pi(n) > \pi(n)$ per n suficientment gran.

b) Fals. Justificació: El nombre de quadrats a l'interval $[1, \ldots, n]$ és com a molt $\sqrt{n}$. Per tant, és suficient comprovar que $\sqrt{n} < \pi(n)$ per n suficientment gran. Fem-ho. Del fet que $\pi(n) = \Theta(n/\log n)$ podem concloure que

$$\pi(n)/\sqrt{n} = \Theta(\sqrt{n}/\log n).$$

Donat que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}/\log n = \infty$ en deduïm que $\pi(n) > \sqrt{n}$ per n suficientment gran.

Proposta de solució al problema 3

a) Això són tres bucles imbricats, cadascún d'n iteracions, i amb cost $\Theta(1)$ per cada iteració. Total: $\Theta(n^3)$.

b) Això tornen a ser tres bucles imbricats, però ara el cost és

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} \Theta(1) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \Theta(1) = \Theta(n^3).$$

Per altra banda tenim que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} \Theta(1) \geq \sum_{i=0}^{n/3} \sum_{j=n/3}^{2n/3} \sum_{k=2n/3}^{n-1} \Theta(1) = \Theta((n/3)^3) = \Theta(n^3).$$

Total: el cost és alhora $O(n^3)$ i $\Omega(n^3)$ i per tant $\Theta(n^3)$.

c) Construir Q té cost $\Theta(n^2)$. Ordenar Q té cost $\Theta(n^2 \log n^2) = \Theta(n^2 \log n)$. L'última fase té cost $\Theta(n \log n^2) = \Theta(n \log n)$ perquè per a cada k busquem $s - V[k]$ a Q fent una cerca dicotòmica. Total: $\Theta(n^2 \log n)$.

d) Construir Q té cost $\Theta(n^2)$. Ordenar V té cost $\Theta(n \log n)$. L'última fase té cost $\Theta(n^2 \log n)$ perquè per a cada ℓ busquem $s - Q[\ell]$ a V fent una cerca dicotòmica. Total: $\Theta(n^2 \log n)$.

Proposta de solució al problema 4

1. El següent codi satisfà els requeriments:

```
int g1(int n) {
    if (n ≤ 2) return 1;
    int v1, v2, v3;
    v1 = v2 = v3 = 1;
    for (int i = 2; i < n; ++i) {
        int aux = v2 + v3;
        v3 = v2;
        v2 = v1;
        v1 = aux;
    }
    return v1;
}
```

   Per a $n \geq 3$ es fan $n-2$ iteracions, cadascuna de les quals amb cost temporal $\Theta(1)$. D'aquí el cost en temps $\Theta(n)$.

2. Aquí és el codi amb les caixetes plenes:

```
void misteri (const matrix<int>& m, int k, matrix<int>& p) {
    if (k == 0)
        for (int i = 0; i < 3; ++i) p[i][i] = 1;
    else {
        misteri (m, k/2, p);
        p = p * p;
        if (k % 2 == 1) p * m;
}   }
```

Proposta de solució al problema 5

Primer busquem la posició $p \geq 1$ d'algun ∞ així:

```
int p = 1;
while (V[p] ≠ ∞) p *= 2;
```

Comencem en 1 perquè ens diuen que $n \geq 1$. El nombre d'iteracions serà el mínim $i \geq 0$ tal que $2^i \geq n$. És a dir $i = \Theta(\log n)$. Un cop tenim aquest p fem una cerca dicotòmica entre $v[p/2]$ i $v[p]$ buscant la posició del primer ∞ així:

```
int l = p/2;
int r = p;
while (l < r − 1) {
    int q = (l + r)/2;
    if (V[q] == ∞) r = q;
    else l = q;
}
return r;
```

El nombre d'iteracions d'aquesta segona fase és $\Theta(\log(p/2))$. Donat que $p/2 < n \leq p$, tenim $p/2 = \Theta(n)$. Per tant això són $\Theta(\log n)$ iteracions. Cost total: $\Theta(\log n) + \Theta(\log n) = \Theta(\log n)$.

Solució de l'Examen Parcial EDA 21/10/2013

Proposta de solució al problema 1

- $T(n) = \Theta(n)$.
- Les tres: $O(n^2)$, $\Theta(n \log n)$ i $\Omega(n \log n)$.
- $f(n) = n \log \log n$.
- $T(n) = \Theta(n^2)$.
- $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n)$.
- $T(n) = \Theta(n)$.
- $T(n) = \Theta(1)$.
- $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Proposta de solució al problema 2

a) El primer fa $n-1$ iteracions de cost constant i, per tant, té un cost $\Theta(n)$. El cost del segon es pot descriure amb la recurrència $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(1)$, que pel teorema mestre de les recurrències divisores, és $\Theta(n)$.

b) El primer compara les variables *min* i *max* amb cada posició del vector $A[i]$, per a $1 \le i \le n-1$, de manera que el nombre total de comparacions és $2n-2$. En el cas que n és potència de dos, suposem $n = 2^k$, l'arbre de recursió generat pel segon algorisme serà un arbre binari complet on cada fulla correspondrà a un subvector de dos elements. Per tant, l'alçària de l'arbre serà $k-1$, el nombre de fulles $2^{k-1} = n/2$ i el nombre de nodes interns (corresponents a crides amb subvectors de mida més gran que 2)

$$\sum_{i=0}^{k-2} 2^i = 2^{k-1} - 1.$$

Tenint en compte que en el cas base (subvectors de mida 2) es fa només una comparació i que en cada crida del cas general (subvectors de mida > 2) se'n fan 2, el total de comparacions serà

$$2^{k-1} + 2(2^{k-1} - 1) = 2^{k-1} + 2^k - 2 = 3 \cdot 2^{k-1} - 2 = 3n/2 - 2,$$

que millora les $2n-2$ comparacions de l'algorisme iteratiu.

Proposta de solució al problema 3

a) Creem un vector addicional $P[1, \ldots, n]$ que dirà, per cada $i = 1, \ldots, n$, la posició de i a V. Per omplir P simplement recorrem l'entrada i, per cada $i = 1, \ldots, n$, fem $P[V[i]] = i$. Finalment fem $D[i] = |P[i+1] - P[i]|$ per cada $i = 1, \ldots, n-1$. El cost és $\Theta(n)$ perquè són dos recorreguts de dos vectors de longitud n.

b) Creem un vector addicional $P[1, \ldots, n]$ que dirà, per cada $i = 1, \ldots, n$, la posició de l'i-èssim element més gran de V. Per fer-ho, ordenarem el vector V fent un mergesort modificat de manera que, quan col·loqui l'element $V[k]$ a la seva posició definitiva i, posi $P[i] = k$.

Finalment fem $D[i] = |P[i+1] - P[i]|$ per cada $i = 1, \ldots, n-1$. El cost és $\Theta(n \log n)$ per la fase on s'executa el mergesort modificat, i $\Theta(n)$ per la fase on es genera D. El cost total és doncs $\Theta(n \log n)$.

Proposta de solució al problema 4

La funció *misteri_a* és l'algorisme d'exponenciació ràpida, que calcula x^n amb cost $\Theta(\log(n))$ (el mateix en els casos pitjor, mitjà i millor). Per tant, *misteri_b* eleva a la potència n cada element del vector V, és a dir, calcula V^n, amb cost $\Theta(m \log(n))$ (el mateix en els casos pitjor, mitjà i millor).

Proposta de solució al problema 5

Per una banda tenim que $S(n) \geq 1$ i per l'altra que

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 1 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Per tant $S(n)$ és alhora $\Omega(1)$ i $O(1)$ i per tant $\Theta(1)$.

Proposta de solució al problema 6

L'enunciat és fals. Un contraexemple seria $f(n) = 2^n$ i $c = 2$. En efecte

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(cn)}{f(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n}}{2^n} = \lim_{n \to \infty} 2^n = \infty$$

i per tant $f(cn)$ no és $\Theta(f(n))$.

Solució de l'Examen Parcial EDA 24/3/2014

Proposta de solució al problema 1

a) $H(n) = H(n-1) + 1$ i $W(n) = 2W(n-1) + 2$.

b) $L(n) = 2L(n-1) + 2$.

c) El teorema mestre dóna $H(n) = \Theta(n)$, $W(n) = \Theta(2^n)$ i $L(n) = \Theta(2^n)$. Siguin $A_1(n)$ i $A_2(n)$ les àrees per un arbre complet de 4^n fulles en la primera i la segona construcció, respectivament. Tenint en compte que $4^n = 2^{2n}$ tenim que $A_1(n) = H(2n)W(2n) = \Theta(2^{2n})\Theta(2n) = \Theta(2^{2n}n)$. Per altra banda $A_2(n) = L(n)^2 = \Theta(2^{2n})$. Donat que $\lim_{n\to\infty} 2^{2n}n/2^{2n} = +\infty$, en deduïm que $A_2(n)$ és $O(A_1(n))$ però no $\Theta(A_1(n))$. Per tant, la segona construcció és asimptòticament més eficient que la primera.

Proposta de solució al problema 2

El cos de cada iteració de cada bucle és $\Theta(1)$ i per tant només cal comptar quantes iteracions fa cada bucle. Si y_t denota el valor de y al final de la t-èssima iteració, el que busquem és el mínim $t \geq 0$ tal que $y_t > n$. Determinem y_t per cada bucle:

1. $y_t = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (t+1) = \sum_{j=1}^{t+1} j = \Theta(t^2)$.
2. $y_t = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^t = \Theta(2^t)$.
3. $y_t = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdots 2^t = 2^{\sum_{j=1}^t j} = 2^{\Theta(t^2)}$.
4. $y_t = 1 \cdot 2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot 2^{2^2} \cdot 2^{2^3} \cdots 2^{2^{t-1}} = 2^{\sum_{j=0}^{t-1} 2^j} = 2^{\Theta(2^t)}$.

Ara busquem el mínim t que satisfà $y_t > n$:

1. Volem $\Theta(t^2) > n$ i el mínim tal t és $t = \Theta(\sqrt{n})$.
2. Volem $\Theta(2^t) > n$ i el mínim tal t és $t = \Theta(\log n)$.
3. Volem $2^{\Theta(t^2)} > n$, o $\Theta(t^2) > \log n$, i el mínim tal t és $t = \Theta(\sqrt{\log n})$.
4. Volem $2^{\Theta(2^t)} > n$, o $\Theta(2^t) > \log n$, i el mínim tal t és $t = \Theta(\log \log n)$.

Proposta de solució al problema 3

a) Considerem una k arbitrària tal que $i < k < j$. Hi ha dos casos:

- Si $T[i] > T[k]$, llavors el parell (i,k) és una inversió.
- Altrament, com que $T[k] \geq T[i] > T[j]$, el parell (k,j) és una inversió.

En qualsevol cas, per cada k tal que $i < k < j$ podem comptar almenys una inversió. Comptant també la inversió (i,j), tenim almenys $j - i$ inversions.

b) De l'apartat anterior deduïm que, si T és un vector amb com a molt N inversions, aleshores tota inversió (i,j) ha de satisfer $j - i \leq N$. A continuació es mostra una possible implementació que utilitza aquesta observació:

```
bool cerca (int x, const vector<int>& T, int l, int r) {
  if (r−l+1 < 2*N+1) {
    for (int i = l; i ≤ r; ++i) if (T[i] == x) return true;
    return false;
  }
  int m = (l+r)/2;
  if (T[m] > x) {
    for (int k = 1; k ≤ N; ++k) if (T[m+k] == x) return true;
    return cerca (x, T, l, m−1);
  }
  if (T[m] < x) {
    for (int k = 1; k ≤ N; ++k) if (T[m−k] == x) return true;
    return cerca (x, T, m+1, r);
  }
  return true;
} }

bool cerca (int x, const vector<int>& T) {
   return cerca (x, T, 0, T.size () − 1);
}
```

Com que N és una constant, el cost dels bucles dels casos recursius és $\Theta(1)$. La recurrència que descriu el cost $C(n)$ de *cerca* per a vectors de mida n en el cas pitjor (per exemple, quan l'enter x no pertany al vector T) és doncs

$$C(n) = C(n/2) + \Theta(1),$$

la solució de la qual és $C(n) = \Theta(\log n)$ d'acord amb el Teorema Mestre de Recurrències Divisores.

Proposta de solució al problema 4

1) Resposta: $\Theta(n)$. Justificació: Donat que $-1 \le \cos(x) \le 1$ per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$, tenim que $\log(3) \le \log(\cos(n\pi)+4) \le \log(5)$ per a qualsevol $n \ge 0$. Per tant $\log(\cos(n\pi)+4) = \Theta(1)$ i $f(n) = n\Theta(1) = \Theta(n)$.

2) Resposta: 1. Justificació: Si ja hem calculat 7^{2^i} podem obtenir $7^{2^{i+1}}$ simplement elevant-lo al quadrat. Fem-ho, tot mòdul 10: $7^2 = 9$, $7^4 = 9^2 = 1$, $7^8 = 1^2 = 1$. I d'aquí no ens movem perquè $1^2 = 1$. Per tant $7^{1024} = 7^{2^{10}} = 1$.

3) $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$.

4) Resposta: $\Theta(n^2)$. Justificació: El cost en el cas mitjà és

$$\frac{1}{2^n} \cdot \Theta(n^4) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \cdot \Theta(n^2)$$

que és $\Theta(n^4/2^n) + \Theta(n^2) - \Theta(n^2/2^n)$ i per tant $\Theta(n^2)$ perquè les altres dues funcions tendeixen a 0 quan n tendeix a infinit.

Solució de l'Examen Parcial EDA 13/10/2014

Proposta de solució al problema 1

a) Veurem que la suma és $O(n^4)$ i $\Omega(n^4)$. Primer, $\sum_{i=0}^{n} i^3 \leq n \cdot n^3 = n^4 = O(n^4)$. Segon, si n és parell, llavors $\sum_{i=0}^{n} i^3 \geq \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^3 \geq \frac{1}{16} n^4 = \Omega(n^4)$. I si n és senar, llavors $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \sum_{i=0}^{n-1} i^3 + n^3 \geq \frac{1}{16}(n-1)^4 + n^3 = \Omega(n^4)$. En qualsevol cas obtenim que $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \Omega(n^4)$.

b) g creix més ràpid que f. Per justificar-ho veurem que $\lim_{n\to+\infty} f(n)/g(n) = 0$. Sigui $h(n) = \log_2(f(n)/g(n))$. Simple manipulació dóna $h(n) = \sqrt{\log n} - \log_2 n$ i per tant $\lim_{n\to+\infty} h(n) = -\infty$. Això implica que $\lim_{n\to+\infty} 2^{h(n)} = 0$ i per tant $\lim_{n\to+\infty} f(n)/g(n) = 0$. Pel criteri del límit en concloem que $f(n) = O(g(n))$ i $f(n) \neq \Omega(g(n))$. Per tant g creix més ràpid que f.

Proposta de solució al problema 2

a) B conté els elements de A ordenats de més petit a més gran. Per justificar-ho, fixeu-vos que, abans d'executar l'últim bucle, $C[i]$ conté el nombre d'elements de A que estan entre 0 i i, ambdós inclosos, per $0 \leq i \leq k$. Per tant, l'últim bucle posa a B tantes còpies de cada element de A com hi ha al vector A, de dreta a esquerra i de més gran a més petit.

b) Quan $k = O(n)$, el cost és $\Theta(n)$. Per justificar-ho, analitzem línia a línia. La primera línia té cost $\Theta(1)$. La segona línia té cost $\Theta(k)$. La tercera línia té cost $\Theta(n)$. La quarta línia té cost $\Theta(k)$. La cinquena línia té cost $\Theta(n)$. I l'últim bucle té cost $\Theta(n)$. El cost global és doncs $\Theta(n+k)$ i, quan $k = O(n)$, el terme n guanya i obtenim cost $\Theta(n)$.

c) Primer computem $C[0,\ldots,k]$ com a *misteri* de manera que $C[i]$ és el nombre d'elements de A que estan entre 0 i i, ambdós inclosos. I després, per cada $i = 0,\ldots,m-1$, si $a_i > 0$ escrivim $C[b_i] - C[a_i - 1]$, i si $a_i = 0$ escrivim $C[b_i]$. El cost per calcular C és $\Theta(n+k)$ i el cost per tractar els (a_i, b_i) és $\Theta(m)$. El cost global és doncs $\Theta(n+k+m)$.

Proposta de solució al problema 3

a) $R_{i,j}$ és la probabilitat d'anar de i a j en exactament dues tirades. Per justificar-ho, només cal interpretar k com el pas intermig i adonar-se que $P_{i,k}P_{k,j}$ és la probabilitat que en la primera tirada anem de i a k i en la segona anem de k a j. Sumant sobre $k = 1,\ldots,64$ obtenim el que volem.

b)

```
void probabilities (const Matrix& P, int t, Matrix& Q) {
    if (t == 0) identity (Q, 64);
    else {
        Matrix R, S;
        probabilities (P, t/2, R);
        multiply(R, R, S);
        if (t \% 2 == 1) multiply(S, P, Q);
        else Q = S;
}   }
```

```
void identity (Matrix& Q, int n) {
    Q = Matrix(n, Row(n, 0.0));
    for (int i = 0; i < n; ++i) Q[i][i] = 1.0;
}

void multiply(const Matrix& A, const Matrix& B, Matrix& C) {
    C = Matrix(A.size (), Row(B[0].size (), 0.0));
    for (int i = 0; i < A.size (); ++i) {
        for (int j = 0; j < B[0].size (); ++j) {
            for (int k = 0; k < B.size (); ++k) {
                C[i][j] += A[i][k]*B[k][j];
} } } }
```

Cost: $T(t) = T(t/2) + \Theta(1)$ i per tant $T(t) = \Theta(\log t)$ pel cas $\alpha = k = 0$ del teorema mestre de recurrències divisores.

Proposta de solució al problema 4

a) Resposta: $\Omega(2^n)$.

Justificació: Sigui B el número d'entrades que causen cost asimptòtic $\Theta(n^2)$, i sigui $G = 2^n - B$ el número d'entrades amb cost asimptòticament inferior a n^2. Llavors el cost en el cas mitjà és $(B/2^n)\Theta(n^2) + (1 - B/2^n)f(n)$ on $f(n)$ és una funció de creixement asimptòticament inferior a n^2. Per a què aquest cost sigui $\Theta(n^2)$ és necessari que, per n suficientment gran, B sigui al menys una fracció de 2^n, és a dir, $B \geq c2^n$ per alguna $c > 0$, o $B = \Omega(2^n)$. La mateixa fórmula permet veure que la condició $B = \Omega(2^n)$ també és suficient per garantir cost $\Theta(n^2)$.

b) Resposta: $\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^k$

Justificació: Perquè l'algorisme faci **exactament** k iteracions cal que A acabi amb k 9's **i** el dígit just anterior sigui diferent de 9. La probabilitat d'aquest esdeveniment és el què hem escrit.

c) Resposta: $T(n) = \Theta(1)$.

Justificació: Amb la notació de classe per les recurrències subtractores tenim que $a = 1/10$, $c = 1$ i $k = 0$. Per tant, donat que $a < 1$, el resultat és $T(n) = \Theta(n^k) = \Theta(1)$.

d) $T(n)$ correspon al cost asimptòtic en el cas mitjà amb la distribució de probabilitat especificada a l'apartat b).

Solució de l'Examen Parcial EDA 23/03/2015

Proposta de solució al problema 1

a) $\lfloor n/2 \rfloor - 1$

b) 0

c) $\lfloor n/17 \rfloor - 1$

d) El cost de l'algorisme es pot expressar com:

$$\sum_{\substack{x=2\\ x \text{ primer}}}^{n} \Theta(\lfloor n/x \rfloor - 1) \quad + \sum_{\substack{x=2\\ x \text{ no primer}}}^{n} \Theta(1).$$

El segon sumatori és $O(n)$. Per altra banda, com que $\lfloor n/x \rfloor - 1$ és $\Theta(n/x)$, el primer sumatori és equivalent a

$$\sum_{\substack{x=2\\ x \text{ primer}}}^{n} \Theta(n/x) = n \sum_{\substack{x=2\\ x \text{ primer}}}^{n} \Theta(1/x) = \Theta(n \log \log n).$$

El resultat és doncs

$$\Theta(n \log \log n) + O(n) = \Theta(n \log \log n).$$

e) El cost no millora, continua essent $\Theta(n \log \log n)$, perquè el cost en aquest cas té una expressió similar a l'anterior amb l'única diferència que ara els sumatoris arriben només fins a $\sqrt{n}$. Per tant, l'expressió final que un obté és $\Theta(n \log \log \sqrt{n})$, que és el mateix que $\Theta(n \log \log n)$, ja que $\log \log \sqrt{n} = \log(\frac{1}{2} \log n) = \log \frac{1}{2} \; + \; \log \log n = \Theta(\log \log n)$.

Proposta de solució al problema 2

a) El mínim n tal que $n^3 \geq 10n^{2.81}$, és a dir, $n^{0.19} \geq 10$, és $n = \lceil 10^{\frac{1}{0.19}} \rceil = 183299$.

b) El mínim n tal que $10n^{2.81} \geq 100n^{2.38}$, és a dir, $n^{0.43} \geq 10$, és $n = \lceil 10^{\frac{1}{0.43}} \rceil = 212$.

Proposta de solució al problema 3

a) Una solució consisteix en ordenar els intervals en ordre creixent per l'extrem esquerre en temps $\Theta(n \log n)$, i després processar-los de la manera descrita a continuació. Recorrem la seqüència d'esquerra a dreta mantenint l'extrem esquerre mínim (*eem*) i l'extrem dret màxim (*edM*) vistos des de l'últim interval que hem escrit a la sortida. Si el següent interval de la seqüència te un extrem esquerre més gran que l'*edM* llavors podem *tancar* l'interval [*eem*,*edM*], afegir-lo a la sortida, i actualitzar *eem* i *edM* als extrems esquerre i dret de l'interval que acabem de processar. En cas contrari actualitzem l'*edM* si és necessari, és a dir, si l'extrem dret de l'interval processat és més gran que l'*edM*. El cost d'aquesta fase és $\Theta(n)$ i per tant el cost total és $\Theta(n \log n)$.[2]

[2] Una segona solució seria un algorisme de dividir-i-vèncer semblant a l'ordenació per fusió.

b) En primer lloc calculem la unió dels intervals igual que en el primer apartat, amb cost $\Theta(n \log n)$. Després determinem, per cada punt p_i, si està dins d'algun interval de la unió o no. Quan m és gran, com és el cas si $m = n$, una bona solució consisteix a ordenar p en ordre creixent, i després "fusionar" intervals i punts en temps lineal. A cada pas de la fusió considerem un interval $[a_i, b_i]$ i un punt p_j. Si $b_i < p_j$, l'interval es descarta i avancem a la seqüència d'intervals. Si $a_i \leq p_j \leq b_j$, incrementem el comptador i avancem a les dues seqüències. Si $p_j < a_i$, el punt es descarta i avancem a la seqüència de punts. Quan no quedin punts, el procés acaba. El cost de la segona fase és $\Theta(m \log m) + \Theta(n + m)$. Per $m = n$, això és $\Theta(n \log n)$.

c) Farem servir un altre algorisme. Un punt pertany a la unió si i només si pertany a algun dels intervals de la seqüència d'entrada, i per tant podem determinar si pertany a la unió en temps $\Theta(n)$ simplement recorrent la seqüència d'intervals tal com ens ve donada (sense processar-la prèviament). Donat que $m \leq 5$, això són no més de 5 recorreguts de cost $\Theta(n)$ cadascún i per tant el cost total és $\Theta(n)$.[3]

Proposta de solució al problema 4

a) Resposta: $\Theta(3^{\log_2(n)}) \neq \Theta(3^{\log_4(n)})$. Justificació: Siguin $f(n) = 3^{\log_2(n)}$ i $g(n) = 3^{\log_4(n)} = 3^{\log_2(n)/2}$ de manera que $f(n)/g(n) = 3^{\log_2(n) - \log_2(n)/2} = 3^{\log_2(n)/2}$. Com que $\lim_{n \to \inf} f(n)/g(n) = \infty$, $f(n)$ creix estrictament més ràpid que $g(n)$.

b) Cal calcular $2^1 \cdot \dots \cdot 2^{100} = 2^{5050} \pmod 9$. Com que $2^6 = 1 \pmod 9$ i $5050 = 4 \pmod 6$, tenim $2^{5050} = 2^4 = 7 \pmod 9$.

c) Ordenades d'ordre de creixement més petit a més gran, les funcions són

$$(\ln(n))^2, n^{1/3}, \sqrt{n}, n^4 - 3n^3 + 1.$$

d) Les tres recurrències són:

$A(n) = \Theta(n) + 5A(n/2) = \Theta(n^{\log_2 5})$.
$B(n) = \Theta(1) + 2B(n-1) = \Theta(2^n)$.
$C(n) = \Theta(n^2) + 9C(n/3) = \Theta(n^2 \log n)$.

C és la més eficient perquè $\log n$ creix més lentament que $n^{\log_2 5 - 2} = n^{0.3219\dots}$.

[3]Una segona solució, menys eficient, seria primer calcular la unió en forma d'intervals disjunts ordenats com en el primer apartat en temps $\Theta(n \log n)$, i després fer m cerques dicotòmiques en temps $\Theta(m \log n)$. Quan m és una constant, el cost total és $\Theta(n \log n)$.

Solució de l'Examen Parcial EDA 19/10/2015

Proposta de solució al problema 1

(a) Anàlisi de cost:

- *En temps:* el cost de les inicialitzacions és $\Theta(k)$, per la creació del vector f. Com que el bucle s'executa $\Theta(k)$ vegades i cada iteració costa temps $\Theta(1)$, la contribució al cost del bucle és $\Theta(k)$. En total el cost és doncs $\Theta(k)$.
- *En espai:* $\Theta(k)$, ja que el consum de memòria està dominat per la creació del vector f, de mida $k+1$.

(b) Per inducció.

- *Cas base:* $k = 2$. Aleshores efectivament

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k & f_{k-1} \\ f_{k-1} & f_{k-2} \end{pmatrix}.$$

- *Cas inductiu:* $k > 2$. Per hipòtesi d'inducció:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k & f_{k-1} \\ f_{k-1} & f_{k-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_k + f_{k-1} & f_k \\ f_{k-1} + f_{k-2} & f_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix}.$$

(c) Una possible solució:

```
typedef vector<vector<int>> matrix;

matrix mult(const matrix& A, const matrix& B) {
  assert (A.size () == A[0].size ());
  assert (B.size () == B[0].size ());
  assert (A.size () == B.size ());
  int n = A.size ();
  matrix C(n, vector<int>(n, 0));
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    for (int j = 0; j < n; ++j)
      for (int k = 0; k < n; ++k)
        C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
  return C;
}

matrix misteri (const matrix& M, int q) {
  int s = M.size ();
  if (q == 0) {
    matrix R(s, vector<int>(s, 0));
    for (int i = 0; i < s; ++i) R[i][i] = 1;
    return R;
  }
```

```
    else {
      matrix P = misteri (M, q/2);
      if (q % 2 == 0) return mult(P, P);
      else            return mult(mult(P, P), M);
    } }

  int fib2 (int k) {
    if (k ≤ 1) return k;
    matrix M = { {1, 1}, {1, 0} };
    matrix P = misteri (M, k−1);
    return P [0][0];
  }
```

(d) Primer analitzem el cost de *misteri* (M, k) en funció de k, que anomenarem $C(k)$. Observem que les crides a *mult* sempre es fan amb matrius 2×2, i per tant triguen temps constant. Per tant el cost no recursiu és constant i tenim que $C(k) = C(k/2) + \Theta(1)$, d'on aplicant el Teorema Mestre de Recurrències Divisores s'obté que $C(k) = \Theta(\log k)$.

Així doncs, el cost de *fib2* (k) és $C(k-1) + \Theta(1) = \Theta(\log k)$.

Proposta de solució al problema 2

(a) Un cas millor es dóna quan x és a la primera posició, és a dir, x és $v[0]$. Aleshores només s'entra un cop al bucle, i el cost total és $\Theta(1)$.

(b) Un cas pitjor es dóna quan x no apareix al vector v. Aleshores es fan $\Theta(n)$ iteracions del bucle, cadascuna de les quals triga temps $\Theta(1)$. El cost total és $\Theta(n)$.

(c) Per inducció.

- *Case base:* $n = 1$. Tenim $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2}$, i $2 - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}|_{n=1} = 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.
- *Cas inductiu:* $n > 1$. Tenim que $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n-1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Per tant $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = \frac{n}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} = \frac{n}{2^n} + 2 - \frac{n-1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{n}{2^n} + 2 - \frac{2n-2}{2^n} - \frac{4}{2^n} = 2 + \frac{n-2n+2-4}{2^n} = 2 - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}$.

(d) Si x és l'element $v[i]$, aleshores l'algorisme té cost $\Theta(i)$. Per tant el cost mig és

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{0 \le i < n} \mathrm{Prob}(x = v[i]) \cdot \mathrm{Cost}(x = v[i]) = \\
&\textstyle\sum_{0 \le i < n} \mathrm{Prob}(x = v[i]) \cdot \Theta(i) = \\
&\textstyle\Theta(\sum_{0 \le i < n} \mathrm{Prob}(x = v[i]) \cdot i) = \\
&\textstyle\Theta(\sum_{1 \le i < n} \mathrm{Prob}(x = v[i]) \cdot i) = \\
&\textstyle\Theta(\mathrm{Prob}(x = v[n-1]) \cdot (n-1) + \sum_{1 \le i < n-1} \mathrm{Prob}(x = v[i]) \cdot i) = \\
&\textstyle\Theta(\frac{n-1}{2^{n-1}} + \sum_{1 \le i < n-1} \frac{i}{2^{i+1}}) = \\
&\textstyle\Theta(\frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n-2} \frac{i}{2^i}) = \\
&\textstyle\Theta(\frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \cdot (2 - \frac{n-2}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-3}})) = \\
&\Theta(1)
\end{aligned}
$$

donat que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Proposta de solució al problema 3

(a) Considerem cadascun dels casos:

- Assumim a,b parells. Tenim $\gcd(a/2,b/2) \mid a/2$, i així $2\gcd(a/2,b/2) \mid a$. Similarment, $2\gcd(a/2,b/2) \mid b$. Per tant $2\gcd(a/2,b/2) \mid \gcd(a,b)$. Per altra banda, com que a i b són parells, $gcd(a,b)$ és parell. Però $\gcd(a,b) \mid a$ implica que $\gcd(a,b)/2 \mid a/2$, i similarment $\gcd(a,b)/2 \mid b/2$. Per tant $\gcd(a,b)/2 \mid \gcd(a/2,b/2)$, i $\gcd(a,b) \mid 2\gcd(a/2,b/2)$, d'on finalment $\gcd(a,b) = 2\gcd(a/2,b/2)$.
- Assumim a senar i b parell. Per una banda $\gcd(a,b) \mid a$. Per una altra $\gcd(a,b) \mid b$, i com que a és senar, $\gcd(a,b) \mid b/2$. Així doncs tenim que $\gcd(a,b) \mid \gcd(a,b/2)$. I com que $\gcd(a,b/2) \mid a$ i $\gcd(a,b/2) \mid b$, tenim $\gcd(a,b/2) \mid \gcd(a,b)$. Per tant $\gcd(a,b) = \gcd(a,b/2)$.
- Assumim a,b senars i $a > b$. Si a i b són senars, $a-b$ és parell. Per tant $\gcd(a,b) = \gcd(a-b,b) = \gcd((a-b)/2,b)$ per la pista i l'apartat anterior.

(b) Una possible solució:

```
int gcd(int a, int b) {
  if (a == b)                          return a;
  if (a == 1 or b == 1)                return 1;
  if (a % 2 == 0 and b % 2 == 0) return 2*gcd(a/2, b/2);
  if (a % 2 == 1 and b % 2 == 0) return gcd(a,   b/2);
  if (a % 2 == 0 and b % 2 == 1) return gcd(a/2, b  );
  else
    if (a > b) return gcd((a-b)/2, b  );
    else       return gcd(  a, (b-a)/2);
}
```

(c) Un cas pitjor es dóna, per exemple, quan a és una potència de 2 i b és senar. Aleshores a cada crida recursiva només decreix el primer argument, i b sempre és el segon argument. Quan el primer argument té i bits, el cost és $\Theta(i)$, per la divisió entre 2. Per tant el cost és $\sum_{i=1}^{n} \Theta(i) = \Theta(n^2)$.

Solució de l'Examen Parcial EDA 31/03/2016

Proposta de solució al problema 1

(a) $\Theta(n^{\log 7})$

(b) El teorema mestre de recurrències substractores afirma que si tenim una recurrència de la forma $T(n) = aT(n-c) + \Theta(n^k)$ amb $a, c > 0$ i $k \geq 0$, llavors

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } a < 1, \\ \Theta(n^{k+1}) & \text{si } a = 1, \\ \Theta(a^{\frac{n}{c}}) & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

(c) $\Theta(n)$

Proposta de solució al problema 2

(a) El cost del programa queda determinat per la suma de costos de dos grups d'instruccions:

A. Les instruccions que s'executen a cada iteració del bucle: l'avaluació de la condició $i \leq n$, la crida $f(i)$, l'avaluació de la condició $i == p$ i l'increment i++.

B. Les instruccions que s'executen quan la condició de l'**if** és certa: la crida $g(n)$ i l'increment p *= 2.

Comptem per separat la contribució al cost total dels dos grups d'instruccions:

A. Si el cost de $f(m)$ és $\Theta(m)$, llavors a la iteració i-èsima el cost de **A** és $\Theta(i)$. Per tant, en total la contribució al cost és $\sum_{i=1}^{n} \Theta(i) = \Theta(\sum_{i=1}^{n} i) = \Theta(n^2)$.

B. Si el cost de $g(m)$ és $\Theta(m)$, llavors cada vegada que la condició de l'**if** és certa el cost de **B** és $\Theta(n)$. Com que això passa $\Theta(\log n)$ vegades, la contribució al cost total és $\Theta(n \log n)$.

En total doncs el cost de $h(n)$ és $\Theta(n^2) + \Theta(n \log n) = \Theta(n^2)$.

(b) Considerem els dos mateixos grups d'instruccions de l'apartat anterior, i de nou comptem per separat la seva contribució al cost total:

A. Si el cost de $f(m)$ és $\Theta(1)$, llavors el cost de **A** a cada iteració és $\Theta(1)$. Com que es fan $\Theta(n)$ voltes, el cost en total és $\Theta(n)$.

B. Si el cost de $g(m)$ és $\Theta(m^2)$, llavors cada vegada que la condició de l'**if** és certa el cost de **B** és $\Theta(n^2)$. Com que això passa $\Theta(\log n)$ vegades, el cost és $\Theta(n^2 \log n)$.

En total doncs el cost de $h(n)$ és $\Theta(n) + \Theta(n^2 \log n) = \Theta(n^2 \log n)$.

Proposta de solució al problema 3

(a) La fila i-èsima ocupa $i+1$ caselles ($0 \le i < n$). En total, l'espai usat és

$$\sum_{i=0}^{n-1}(i+1) = \sum_{j=1}^{n} j = \Theta(n^2).$$

(b) Una possible solució:

```
int p(int x) { return x*(x+1)/2;}

int misteri (int k, int l, int r) {
  if (l+1 == r) return l;
  int m = (l+r)/2;
  if (p(m) ≤ k) return misteri (k, m, r);
  else          return misteri (k, l, m);
}

pair<int,int> fila_columna (int n, int k) {
  if (k < 0 or k ≥ p(n)) return {−1,−1};
  int i = misteri (k, 0, n);
  return {i, k − p(i)};
}
```

(c) Sigui $C(N)$ el cost en el cas pitjor d'una crida a la funció *misteri* $(k,\ l,\ r)$, on $N = r - l + 1$. La recurrència que descriu $C(N)$ és

$$C(N) = C(N/2) + \Theta(1),$$

ja que es fa una crida recursiva sobre un interval de mida la meitat, més operacions que tenen cost constant. Usant el teorema mestre de recurrències divisores, es té que la solució de la recurrència és $C(N) = \Theta(\log N)$.

Per tant, el cost en el cas pitjor d'una crida a la funció *fila_columna* $(n,\ k)$ és $\Theta(\log n)$.

(d) L'índex i de la fila buscada és el natural $0 \le i < n$ tal que $p(i) \le k < p(i+1)$. El podem calcular resolent l'equació de segon grau $p(x) = k$ i prenent $i = \lfloor x \rfloor$:

```
int p(int x) { return x*(x+1)/2;}

pair<int,int> fila_columna (int n, int k) {
  if (k < 0 or k ≥ p(n)) return {−1,−1};
  int i(floor ((sqrt (1.+8*k) − 1)/2));
  return {i, k − p(i)};
}
```

Proposta de solució al problema 4

(a) Demostrem-ho per reducció a l'absurd. Suposem que i és tal que $0 \le i < n-1$ i $f_A(i+1) < f_A(i)$. Prenem $k = i+1$, $j = f_A(i+1)$ i $l = f_A(i)$, de forma que $0 \le i < k < n$ i

$0 \le j < l < n$. Com que $j = f_A(k)$, tenim que $A_{k,j} \le A_{k,l}$. I com que $l = f_A(i)$, tenim que $A_{i,l} \le A_{i,j}$; de fet, com que $j < l$, ha de ser $A_{i,l} < A_{i,j}$. Per tant, sumant tenim que $A_{i,l} + A_{k,j} < A_{i,j} + A_{k,l}$. Això contradiu que A sigui una matriu de Monge.

(b) Per cada i parell, es pot calcular la columna on apareix el mínim més a l'esquerra de la fila i de A de la manera següent. A partir de la crida recursiva sobre B_1, tenim la columna j_1 on apareix el mínim més a l'esquerra de la fila i de A entre les columnes 0 i $\frac{n}{2} - 1$. Similarment, a partir de la crida recursiva sobre B_2, tenim la columna j_2 on apareix el mínim més a l'esquerra de la fila i de A entre les columnes $\frac{n}{2}$ i $n - 1$. Per tant, $f_A(i) = j_1$ si $A_{i,j_1} \le A_{i,j_2}$, i $f_A(i) = j_2$ altrament.

Per cada i senar, es determina $f_A(i)$ recorrent les columnes entre $f_A(i-1)$ i $f_A(i+1)$ (definim $f_A(n) = n - 1$ per conveniència notacional), i escollint l'índex on apareix el mínim més a l'esquerra. Això té cost $\Theta(f_A(i+1) - f_A(i-1) + 1)$. En total:

$$\sum_{i=1, i \text{ senar}}^{n-1} \Theta(f_A(i+1) - f_A(i-1) + 1) = \Theta((n-1) - f_A(0) + \frac{n}{2}) = \Theta(n)$$

ja que $0 \le f_A(0) < n$.

(c) Sigui $C(n)$ el cost de l'algorisme proposat per calcular la funció f_A per a totes les files d'una matriu de Monge A de mida $n \times n$.

A banda de les dues crides recursives del pas (2) sobre matrius de mida $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$, els passos (1) i (3) requereixen temps $\Theta(n)$ en total. Per tant, la recurrència que descriu el cost és

$$C(n) = 2C(n/2) + \Theta(n).$$

Usant el teorema mestre de recurrències divisores, es té que la solució de la recurrència és $C(n) = \Theta(n \log n)$.

Solució de l'Examen Parcial EDA 07/11/2016

Proposta de solució al problema 1

(a)

	Cas millor	*Cas mig*	*Cas pitjor*
Quicksort (amb partició de Hoare)	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$
Mergesort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$
Inserció	$\Theta(n)$	**No ompliu**	$\Theta(n^2)$

(b) $\Theta(\sqrt{n})$

(c) $\Theta(\sqrt{n} \log n)$

(d) $\Theta(n)$

(e) L'algorisme de Karatsuba calcula el producte de dos nombres naturals de n bits en temps $\Theta(n^{\log_2 3})$.

(f) L'algorisme de Strassen calcula el producte de dues matrius de mida $n \times n$ en temps $\Theta(n^{\log_2 7})$.

Proposta de solució al problema 2

(a) Una possible solució:

```
#include <vector>

using namespace std;

bool dic_search (const vector<int>& a, int l, int r, int x) {
  if (l > r) return false;
  int m = (l+r)/2;
  if (a[m] < x) return dic_search (a, m+1, r,   x);
  if (a[m] > x) return dic_search (a,   l, m−1, x);
  return true;
}

bool search (const vector<int>& a, int l, int r, int x) {
  if (l+1 == r) return a[l] == x or a[r] == x;
  int m = (l+r)/2;
  if (a[m] ≥ a[l]) {
    if (a[l] ≤ x and x ≤ a[m]) return dic_search (a, l, m, x);
    else                       return search (a, m, r, x);
  }
  else {
    if (a[m] ≤ x and x ≤ a[r]) return dic_search (a, m, r, x);
    else                       return search (a, l, m, x);
} }
```

```
bool search(const vector<int>& a, int x) {
  return search(a, 0, a.size()−1, x);
}
```

(b) Sigui $C(n)$ el cost de tractar un vector de mida n (sigui amb la funció *search* o amb la funció *dic_search*) en el cas pitjor (per exemple, quan l'element x no apareix a la seqüència). A banda d'operacions de cost constant (càlculs aritmètics, comparacions i assignacions entre enters, accessos a vectors), es fa exactament una crida sobre un vector de mida la meitat de la de l'entrada. Així doncs, el cost ve determinat per la recurrència:

$$C(n) = C(n/2) + \Theta(1),$$

que, pel teorema mestre de recurrències divisores, té solució $C(n) = \Theta(\log(n))$.

Proposta de solució al problema 3

(a) Calcula m^n.

(b) El cost de la funció ve determinat pel cost del bucle. Cada iteració requereix temps $\Theta(1)$, ja que només s'hi duen a terme operacions aritmètiques i assignacions d'enters. Per tant, el cost és proporcional al nombre d'iteracions. Observem que si y és parell, aleshores y es redueix a la meitat. I si y és un senar amb $y > 1$, a la següent iteració es considera $y - 1$, que és parell, i llavors es redueix a la meitat. Així doncs, si $n \geq 1$ el nombre de voltes està entre $1 + \lfloor \log(n) \rfloor$ i $1 + 2\lfloor \log(n) \rfloor$. En conclusió, el cost és $\Theta(\log(n))$.

Proposta de solució al problema 4

(a) Tenim que $\phi - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, i aleshores

$$\phi \cdot (\phi - 1) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{5-1}{4} = 1$$

De forma que efectivament $\phi^{-1} = \phi - 1$.

(b) Per inducció sobre n:

- **Cas base $n = 0$:** per una banda $F(0) = 0$, i per una altra

$$F(n) = \left.\frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}\right|_{n=0} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0.$$

- **Cas base $n = 1$:** per una banda $F(1) = 1$, i per una altra

$$F(n) = \left.\frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}\right|_{n=1} = \frac{\phi + \phi^{-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

- **Cas inductiu $n > 1$:** per hipòtesi d'inducció,

$$F(n) = F(n-2) + F(n-1) = \frac{\phi^{n-2} - (-\phi)^{-(n-2)}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{n-1} - (-\phi)^{-(n-1)}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\phi^{n-1}(\phi^{-1}+1) - (-\phi)^{-(n-1)}(-\phi+1)}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n-1}\cdot\phi - (-\phi)^{-(n-1)}(-\phi^{-1})}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

(c) Tenim que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(n)}{\phi^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\phi^n-(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}}{\phi^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(\frac{-1}{\phi^2})^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

donat que $\phi > 1$, $\phi^2 > 1$ i $\lim_{n\to+\infty}(\frac{-1}{\phi^2})^n = 0$. Per tant $F(n) = \Theta(\phi^n)$.

Solució de l'Examen Parcial EDA 20/04/2017

Proposta de solució al problema 1

(a) L'algorisme d'ordenació per inserció té cost $\Theta(n)$ quan el vector està ordenat, i cost $\Theta(n^2)$ quan està ordenat del revés. Així doncs, el cost mig és:

$$(1 - \frac{\log n}{n})\Theta(n) + \frac{\log n}{n}\Theta(n^2) = \Theta(n - \log n + n \log n) = \Theta(n \log n)$$

(b) La funció retorna si n és un nombre primer. El cost està determinat pel bucle, que fa $O(\sqrt{n})$ iteracions, cadascuna de les quals de cost constant. Així doncs, el cost és $O(\sqrt{n})$.

(c) Cadascun dels nombres que es multipliquen a $n!$ són menors o iguals que n. Com que se'n multipliquen n, es té $n! \leq n^n$ per tot $n \geq 1$. D'aquí $n! = O(n^n)$, prenent $n_0 = 1$ i $C = 1$.

(d) Llevat de 1, tots els nombres que es multipliquen a $n!$ són majors o iguals que 2. Com que se'n multipliquen $n - 1$, es té $n! \geq 2^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^n$ per tot $n \geq 1$. D'aquí $n! = \Omega(2^n)$, prenent $n_0 = 1$ i $C = \frac{1}{2}$.

Proposta de solució al problema 2

(a) Una possible solució:

```
int top_rec (const vector<int>& a, int l, int r) {
  if (l + 1 ≥ r) {
    if (a[l] < a[r]) return r;
    else             return l;
  }
  int m = (l+r)/2;
  if (a[m−1] > a[m]) return top_rec(a, l, m−1);
  if (a[m+1] > a[m]) return top_rec (a, m+1, r);
  return m;
}

int top(const vector<int>& a) {
  return top_rec (a, 0, a.size()−1);
}
```

Sigui $C(n)$ el cost en temps en el cas pitjor de la funció *top_rec* sobre un vector de mida n. En el cas pitjor (per exemple, quan el cim és en un extrem del vector) es farà una crida recursiva sobre un subvector de mida $n/2$, a més d'operacions de cost constant (càlculs aritmètics, comparacions i assignacions entre enters, accessos a vectors). Així doncs tenim la recurrència $C(n) = C(n/2) + \Theta(1)$, que pel teorema mestre de recurrències divisores té solució $C(n) = \Theta(\log n)$.

(b) Una possible solució que usa la funció **int** *top*(**const vector**<**int**>& *a*) de l'apartat anterior i la funció *binary_search* de la STL:

```
bool search(const vector<int>& a, int x) {
  int t = top(a);
  int n = a.size();
  if (binary_search(a. begin(), a. begin() + t,      x)) return true;
  if (binary_search(a.rbegin(), a.rbegin() + n - t, x)) return true;
  return false;
}
```

En una altra possible solució, la funció *search* anterior es pot reemplaçar per:

```
bool bin_search_inc(const vector<int>& a, int l, int r, int x) {
  if (l > r) return false;
  int m = (l+r)/2;
  if (a[m] < x) return bin_search_inc(a, m+1, r,   x);
  if (a[m] > x) return bin_search_inc(a,   l, m-1, x);
  return true;
}

bool bin_search_dec(const vector<int>& a, int l, int r, int x) {
  if (l > r) return false;
  int m = (l+r)/2;
  if (a[m] < x) return bin_search_dec(a,   l, m-1, x);
  if (a[m] > x) return bin_search_dec(a, m+1, r,   x);
  return true;
}

bool search(const vector<int>& a, int x) {
  int t = top(a);
  int n = a.size();
  if (bin_search_inc(a, 0, t-1, x)) return true;
  if (bin_search_dec(a, t, n-1, x)) return true;
  return false;
}
```

Quan la funció *search* busca en un vector de mida n, a més de cridar la funció *top*, també es fan una o dues cerques dicotòmiques, cadascuna de les quals té cost $O(\log n)$, i operacions de cost constant. Per tant, el cost de *search* és $O(\log n) + O(\log n) + O(1) = O(\log n)$. A més, si per exemple el cim de la seqüència és en un extrem del vector, aleshores el cost és $\Theta(\log n) + O(\log n) + O(1) = \Theta(\log n)$. Per tant, el cost en el cas pitjor és $\Theta(\log n)$.

Proposta de solució al problema 3

(a) Després de m crides a la funció *reserve* sobre un vector inicialment buit, la capacitat del vector és de $C(m) = Am$ elements. Per tant, el nombre de crides fetes a *reserve* després de n crides a *push_back* és el menor m tal que $Am \geq n$, és a dir, $\lceil \frac{n}{A} \rceil$. Com que A és constant, m és $\Theta(n)$.

(b) Per inducció.

- **Cas base:** $m = 0$. Tenim que $\frac{BA^m - B}{A-1}|_{m=0} = \frac{B-B}{A-1} = 0 = C(0)$.
- **Cas inductiu:** suposant que és cert per a m, vegem que és cert per a $m + 1$. Per hipòtesi d'inducció es té $C(m) = \frac{BA^m - B}{A-1}$. Aleshores:

$$C(m+1) = AC(m) + B = A\frac{BA^m - B}{A-1} + B = \frac{BA^{m+1} - AB + AB - B}{A-1} = \frac{BA^{m+1} - B}{A-1}$$

(c) Després de m crides a la funció *reserve* sobre un vector inicialment buit, usant l'apartat anterior tenim que la capacitat del vector és de $C(m) = \frac{BA^m - B}{A-1}$ elements. Per tant, el nombre de crides fetes a *reserve* després de n crides a *push_back* és el menor m tal que $\frac{BA^m - B}{A-1} \geq n$, és a dir, $\lceil \log_A(\frac{n(A-1)+B}{B}) \rceil$. Com que A i B són constants, m és $\Theta(\log n)$.

Proposta de solució al problema 4

(a) Una possible solució:

```
int stable_partition (int x, vector<int>& a) {
  int n = a.size ();
  vector<int> w(n);
  int i = 0;
  for (int y : a)
    if (y ≤ x) {
      w[i] = y;
      ++i;
    }
  int r = i−1;
  for (int y : a)
    if (y > x) {
      w[i] = y;
      ++i;
    }
  for (int k = 0; k < n; ++k)
    a[k] = w[k];

  return r;
}
```

El cost en temps és $\Theta(n)$, ja que es fan 3 recorreguts sobre el vector, cada iteració dels quals només requereix temps constant. El cost en espai de la memòria auxiliar està dominat pel vector w, que té mida n. Així, el cost en espai és $\Theta(n)$.

(b) Transposa els dos subvectors de a de l a p i de $p + 1$ a r: si abans de la crida $a[l..r]$ és $A_l, \ldots, A_p, A_{p+1}, \ldots, A_r$, després de la crida $a[l..r]$ és $A_{p+1}, \ldots, A_r, A_l, \ldots, A_p$.

(c) Solució:

```
int stable_partition (int x, vector<int>& a) {
  return stable_partition_rec (x, a, 0, a.size()−1);
}

int stable_partition_rec (int x, vector<int>& a, int l, int r) {
```

```
    if (l == r) {
      if (a[l] ≤ x) return l;
      else          return l−1;
    }
    int m = (l+r)/2;
    int p = stable_partition_rec (x, a, l, m);
    int q = stable_partition_rec (x, a, m+1, r);
    mystery(a, p+1, m, q);
    return p+q−m;
  }
```

Sigui $C(n)$ el cost de la funció *stable_partition_rec* sobre un vector de mida $n = r - l + 1$ en el cas pitjor. Per una banda es fan dues crides recursives sobre vectors de mida $n/2$. Per una altra, el cost del treball no recursiu està dominat per la funció *mystery*, que triga temps lineal en la mida del vector que transposa. Usant la hipòtesi de l'enunciat (que es dóna, per exemple, en un vector en què es van alternant successivament elements més petits i més grans que x), aquest vector té mida $\Theta(n)$. Així doncs tenim la recurrència $C(n) = 2C(n/2) + \Theta(n)$, que pel teorema mestre de recurrències divisores té solució $\Theta(n \log n)$. En conclusió, el cost de la funció *stable_partition* sobre un vector de mida n en el cas pitjor és $\Theta(n \log n)$.

5

Solucions d'Exàmens d'Ordinador

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 13/12/2010

Torn 1

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>
#include <cassert>

using namespace std;

const int N_DIRS = 4;
const int di[N_DIRS] = { 1,  0, −1,  0};
const int dj[N_DIRS] = { 0,  1,  0, −1};

struct Pos {
  int i, j;
  Pos(int ii = −1, int jj = −1) : i(ii), j(jj) { }
};

bool ok(int n, int m, int i, int j) {
  return
    0 ≤ i and i < n and
    0 ≤ j and j < m;
}

int search(const vector< vector<char> >& map, int n, int m, int i0, int j0) {
  const int MINFTY = −1;
  vector< vector<int> > dist(n, vector<int> (m, MINFTY));
  queue<Pos> q;
  int max_dist = MINFTY;
  q.push(Pos(i0,j0));
  dist[i0][j0] = 0;
  while (not q.empty()) {
    Pos p = q.front();
    q.pop();
    int i = p.i;
    int j = p.j;
    for(int k = 0; k < N_DIRS; ++k) {
      int ii = i + di[k];
      int jj = j + dj[k];
      if (ok(n,m,ii,jj) and map[ii][jj] ≠ 'X' and dist[ii][jj] == MINFTY) {
        q.push(Pos(ii,jj));
        dist[ii][jj] = 1 + dist[i][j];
        if (map[ii][jj] == 't') max_dist = dist[ii][jj];
      }
    }
```

```
  }
  return max_dist;
}

int main(void) {
  int n, m;
  cin >> n >> m;
  vector < vector<char> > map(n, vector<char>(m));
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    for (int j = 0; j < m; ++j)
      cin >> map[i][j];
  int f, c;
  cin >> f >> c;
  --f;
  --c;
  int dist = search(map, n, m, f, c);
  if (dist >= 0) cout << "distancia maxima: " << dist << endl;
  else           cout << "no es pot arribar a cap tresor" << endl;
}
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

typedef vector<bool> Vec;
typedef vector<Vec > Mat;

void next(int i, int j, int n, int& ni, int& nj) {
  if (j < n-1) {
    ni = i;
    nj = j+1;
  }
  else {
    ni = i+1;
    nj = 0;
  }
}

const int N_DIRS = 8;
const int DI[N_DIRS] = { -1, -1,  0,  1,  1,  1,  0, -1};
const int DJ[N_DIRS] = {  0, -1, -1, -1,  0,  1,  1,  1};

bool ok(int i, int j, int n) {
  return
    0 <= i and i < n and
```

```
    0 ≤ j and j < n;
}

bool safe(int i, int j, int n, Mat& m) {
  for (int k = 0; k < 8; ++k) {
    int ii = i + DI[k];
    int jj = j + DJ[k];
    if (ok(ii, jj, n) and m[ii][jj]) return false;
  }
  return true;
}

void escriu(int n, const Mat& m) {
  for (int i = 0; i < n; ++i) {
    for (int j = 0; j < n; ++j)
      if (m[i][j]) cout << 'K';
      else         cout << '.';
    cout << endl;
  }
  cout << "----------" << endl;
}

void search(int i, int j, int n, int r, int s, Mat& m) {
  if (s == r) escriu(n, m);
  else if (i != n) {
    int ni, nj;
    next(i, j, n, ni, nj);
    if (safe(i, j, n, m)) {
      m[i][j] = true;
      search(ni, nj, n, r, s+1, m);
    }
    m[i][j] = false;
    search(ni, nj, n, r, s, m);
  }
}

int main(void) {
  int n, r;
  cin >> n >> r;
  Mat m(n, Vec(n, false));
  search(0, 0, n, r, 0, m);
}
```

Torn 2

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <map>

using namespace std;

typedef map<string, int>::iterator Iterator ;

int main(void) {
  map<string, int> bagmul;
  string command;
  while (cin >> command) {
    if (command == "store") {
      string word;
      cin >> word;
      pair<Iterator , bool> res = bagmul.insert (pair<string,int>(word, 1));
      if (not res .second)  ++bagmul[word];
    }
    else if (command == "delete") {
      string word;
      cin >> word;
      Iterator i = bagmul.find(word);
      if (i != bagmul.end()) {
        if (i->second == 1)  bagmul.erase(i );
        else                 --bagmul[word];
      }
    }
    else if (command == "minimum?") {
      if (bagmul.empty())  cout << "indefinite minimum" << endl;
      else {
        Iterator i = bagmul.begin ();
        cout << "minimum: "
             << i-> first << ", "
             << i->second << " time(s)" << endl;
      }
    }
    else {
      if (bagmul.empty())  cout << "indefinite maximum" << endl;
      else {
        Iterator i = bagmul.end();
        --i;
        cout << "maximum: "
             << i->first << ", "
             << i->second << " time(s)" << endl;
      }
```

```
    }
  }
}
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

typedef vector<char> CVec;
typedef vector<CVec> CMat;
typedef vector<bool> BVec;
typedef vector<BVec> BMat;

const int N_DIRS = 4;
const int DR[N_DIRS] = { 0,−1, 0, 1};
const int DC[N_DIRS] = { 1, 0,−1, 0};

struct Point {
  int r, c;
  Point(int rr, int cc) : r(rr), c(cc) { }
};

bool ok(int r, int c, int n, int m) {
  return
    0 ≤ r and r < n and
    0 ≤ c and c < m;
}

void search(int re, int ce, int n, int m, const CMat& t, vector<Point>& v, BMat& seen) {
  Point p = v.back();
  if (p.r == re and p.c == ce) {
    for (int i = 0; i < v.size(); ++i)
      cout << t[v[i].r][v[i].c];
    cout << endl;
  }
  else {
    for (int k = 0; k < N_DIRS; ++k) {
      int rr = p.r + DR[k];
      int cc = p.c + DC[k];
      if (ok(rr, cc, n, m) and not seen[rr][cc]) {
        seen[rr][cc] = true;
        v.push_back(Point(rr,cc));
        search(re, ce, n, m, t, v, seen);
        v.pop_back();
        seen[rr][cc] = false;
```

```
            }
        }
    }
}

int main(void) {
    int n, m;
    cin >> n >> m;
    CMat   t(n, CVec(m));
    BMat seen(n, BVec(m, false));
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = 0; j < m; ++j)
            cin >> t[i][j];
    int ri, ci, re, ce;
    cin >> ri >> ci >> re >> ce;
    seen[ri][ci] = true;
    vector<Point> v(1, Point(ri, ci));
    search(re, ce, n, m, t, v, seen);
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 19/5/2011

Proposta de solució al problema 1 (5 punts)

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

struct Point {
  int r, c;
  Point(int rr, int cc) : r(rr), c(cc) {}
};

bool ok(int n, int m, const Point& p) {
  return
    0 <= p.r and p.r < n and
    0 <= p.c and p.c < m;
}

const int N_DIRS_KNIGHT = 8;
const int DR_KNIGHT[8] = {-2, -1, 2, 1, -2, -1, 2, 1};
const int DC_KNIGHT[8] = {-1, -2, -1, -2, 1, 2, 1, 2};

const int N_DIRS_BISHOP = 4;
const int DR_BISHOP[4] = { 1, -1, 1, -1};
const int DC_BISHOP[4] = { 1, 1, -1, -1};

int dfs(int n, int m, const Point& p,
        vector< vector<char> >& map, vector< vector<bool> >& marked,
        const int N_DIRS, const int DR[], const int DC[]) {
  int s = 0;
  marked[p.r][p.c] = true;
  for (int i = 0; i < N_DIRS; ++i) {
    Point q(p.r + DR[i], p.c + DC[i]);
    if (ok(n,m,q) and map[q.r][q.c] != 'T' and not marked[q.r][q.c])
      s += dfs(n, m, q, map, marked, N_DIRS, DR, DC);
  }
  if ('0' <= map[p.r][p.c] and map[p.r][p.c] <= '9') {
    s += map[p.r][p.c] - '0';
    map[p.r][p.c] = '.';
  }
  return s;
}

int main(void) {
  int n, m;
  while (cin >> n >> m) {
```

```
      vector<Point> knights, bishops;
      vector< vector<char> > map(n, vector<char>(m));
      for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = 0; j < m; ++j) {
          cin >> map[i][j];
          switch(map[i][j]) {
          case 'K': knights.push_back(Point(i,j)); break;
          case 'B': bishops.push_back(Point(i,j)); break;
          };
        }
      int s = 0;
      vector< vector<bool> > marked_knight(n, vector<bool>(m, false));
      for (int k = 0; k < knights.size(); ++k) {
        Point p = knights[k];
        if (not marked_knight[p.r][p.c])
          s += dfs(n, m, p, map, marked_knight, N_DIRS_KNIGHT, DR_KNIGHT, DC_KNIGHT);
      }
      vector< vector<bool> > marked_bishop(n, vector<bool>(m, false));
      for (int k = 0; k < bishops.size(); ++k) {
        Point p = bishops[k];
        if (not marked_bishop[p.r][p.c])
          s += dfs(n, m, p, map, marked_bishop, N_DIRS_BISHOP, DR_BISHOP, DC_BISHOP);
      }
      cout << s << endl;
    }
  }
```

Proposta de solució al problema 2 **(5 punts)**

```
#include <iostream>
#include <set>

using namespace std;

typedef long long int lint;

int main(void) {

  lint suma = 0;
  set<lint> selec;
  set<lint> resta;

  int n;
  cin >> n;
  string op;
  lint val;
  while (cin >> op >> val) {
    if (op == "deixar") {
```

```
        if (selec.size() < n) {
          selec.insert(val);
          suma += val;
        }
        else {
          lint min = *(selec.begin());
          if (min < val) {
            selec.insert(val);
            selec.erase(selec.begin());
            suma = suma + val − min;
            resta.insert(min);
          }
          else resta.insert(val);
        }
      }
      else {
        if (*(selec.begin()) ≤ val) {
          selec.erase(val);
          suma −= val;
          if (resta.size() > 0) {
            set<lint>::iterator it = resta.end();
            −−it;
            selec.insert(*it);
            suma += *it;
            resta.erase(it);
          }
        }
        else resta.erase(val);
      }
      cout << suma << endl;
    }
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 13/12/2011

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

typedef vector<char> VC;
typedef vector<VC>  MC;
typedef vector<bool> VB;
typedef vector<VB>  MB;

const int N_DIRS = 4;
const int DI[N_DIRS] = { 1,  0, −1,  0};
const int DJ[N_DIRS] = { 0,  1,  0, −1};

bool ok(int n, int m, int i, int j) {
  return
    0 ≤ i and i < n and
    0 ≤ j and j < m;
}

int search(const MC& map, int n, int m, int i, int j, MB& marked) {
  int t = 0;
  if (map[i][j] == 't') ++t;
  marked[i][j] = true;
  for (int k = 0; k < N_DIRS; ++k) {
    int ii = i + DI[k];
    int jj = j + DJ[k];
    if (ok(n, m, ii, jj) and map[ii][jj] ≠ 'X' and not marked[ii][jj])
      t += search(map, n, m, ii, jj, marked);
  }
  return t;
}

int main(void) {
  int n, m;
  cin >> n >> m;
  MC map(n, VC(m));
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    for (int j = 0; j < m; ++j)
      cin >> map[i][j];
  int f, c;
  cin >> f >> c;

  MB marked(n, VB(m, false));
```

```
  cout << search(map, n, m, f-1, c-1, marked) << endl;
}
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

void b(int k, int n, string& s) {
  if (k == n) cout << s << endl;
  else {
    s[k] = 'A'; b(k+1, n, s);
    s[k] = 'C'; b(k+1, n, s);
    s[k] = 'G'; b(k+1, n, s);
    s[k] = 'T'; b(k+1, n, s);
  }
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  string s(n, 'X');
  b(0, n, s);
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 14/05/2012

Proposta de solució al problema 1 (5 punts)

```
#include<iostream>
#include<string>
#include<map>

using namespace std;

typedef map<string,string>::iterator ite;

int main() {
    string s;
    map<string,string> liats;
    while(cin >> s) {
        if (s == "info") {
            cout << "PARELLES:" << endl;
            for (ite it = liats.begin(); it != liats.end(); ++it)
                if (it->second != "" and it->first < it->second)
                    cout << it->first << " " << it->second << endl;
            cout << "SOLS:" << endl;
            for (ite it = liats.begin(); it != liats.end(); ++it)
                if (it->second == "")
                    cout << it->first << endl;
            cout << "----------" << endl;
        }
        else {
            string x, y;
            cin >> x >> y;
            if (liats[x] != "") liats[liats[x]] = "";
            if (liats[y] != "") liats[liats[y]] = "";
            liats[x] = y;
            liats[y] = x;
        }
    }
}
```

Proposta de solució al problema 2 (5 punts)

```
#include<iostream>
#include<vector>
#include<queue>
#include<algorithm>

using namespace std;
```

```
const int xf[8] = {−1,−1,−1,0,0,1,1,1};
const int yf[8] = {−1,0,1,−1,1,−1,0,1};
const int x[4] = {0,0,1,−1};
const int y[4] = {1,−1,0,0};

bool cerca_bolet (vector<vector<char> >& M, pair<int,int> p) {
    queue<pair<int, int> > Q;
    if (M[p.first ][p.second] == 'X') return false;
    M[p.first ][p.second] = 'X'; Q.push(p);
    while (not Q.empty()) {
        pair<int,int> q = Q.front (); Q.pop();
        for (int i = 0; i < 4; ++i) {
            int u = q.first + x[i];
            int v = q.second + y[i];
            if (M[u][v] == 'B') return true;
            if (M[u][v] ≠ 'X') {
                M[u][v] = 'X';
                Q.push(make_pair(u,v));
            }
        }
    }
    return false;
}

int main() {
    int f, c;
    while (cin >> f >> c) {
        vector<vector<char> > M(f, vector<char> (c));
        pair<int, int> p;
        queue<pair<int,int> > F;
        for (int i = 0; i < f; ++i) {
            for (int j = 0; j < c; ++j) {
                cin >> M[i][j];
                if (M[i][j] == 'P') {p.first = i; p.second = j;}
                if (M[i][j] == 'F') F.push(make_pair(i,j));
            }
        }
        while (not F.empty()) {
            int i = (F.front ()). first ;
            int j = (F.front ()). second;
            F.pop();
            for (int k = 0; k < 8; ++k) M[i+xf[k]][j+yf[k]] = 'X';
        }
        if ( cerca_bolet (M,p)) cout << "si" << endl;
        else cout << "no" << endl;
    }
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 29/11/2012

Proposta de solució al problema 1 (5 punts)

```
#include <iostream>
#include <sstream>
#include <vector>
#include <queue>

using namespace std;

typedef vector< queue<string> > VQS;

void read_queues(int n, VQS& v) {
    v = VQS(n);
    for (int k = 0; k < n; ++k) {
        string line;
        getline(cin, line);
        istringstream in(line);
        string name;
        while (in >> name) v[k].push(name);
    }
}

void process_exits(VQS& v) {
    cout << "SORTIDES" << endl;
    cout << "---------" << endl;

    string op;
    while (cin >> op) {
        if (op == "SURT") {
            int idx;
            cin >> idx;
            --idx;
            if (0 <= idx and idx < v.size() and not v[idx].empty()) {
                cout << v[idx].front() << endl;
                v[idx].pop();
            }
        }
        else {
            string name;
            int idx;
            cin >> name >> idx;
            --idx;
            if (0 <= idx and idx < v.size())
                v[idx].push(name);
            }
        }
```

```
    cout << endl;
}

void write_final_contents (VQS& v) {
    cout << "CONTINGUTS FINALS" << endl;
    cout << "-----------------" << endl;
    for (int k = 0; k < v.size (); ++k) {
        cout << "cua " << k+1 << ":";
        while (not v[k].empty()) {
            cout << ' ' << v[k].front ();
            v[k].pop ();
        }
        cout << endl;
    }
}

int main() {
    int n;
    cin >> n;
    string line ;
    getline (cin, line ); // Read empty line.

    VQS v;
    read_queues(n, v);
    process_exits (v);
    write_final_contents (v);
}
```

Proposta de solució al problema 2 **(5 punts)**

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>

using namespace std;

typedef vector<int> VI;
typedef vector<VI> VVI;

void compute_topological_ordering (const VVI& g, VI& indeg, VI& ord) {
    int n = g. size ();
    priority_queue <int, vector<int>, greater<int> > pq;
    for (int u = 0; u < n; ++u)
        if (indeg[u] == 0) pq.push(u);

    ord = VI(n);
    int cnt = 0;
    while (not pq.empty()) {
```

```
        int u = pq.top ();
        pq.pop ();
        ord[cnt] = u;
        ++cnt;
        for (int k = 0; k < g[u].size (); ++k) {
            int v = g[u][k];
            --indeg[v];
            if (indeg[v] == 0) pq.push(v);
        }
    }
}

void write(const VI& v) {
    cout << v[0];
    for (int k = 1; k < v.size (); ++k)
        cout << ' ' << v[k];
    cout << endl;
}

int main() {
    int n, m;
    while (cin >> n >> m) {
        VVI g(n);
        VI indeg(n, 0);
        for (int k = 0; k < m; ++k) {
            int u, v;
            cin >> u >> v;
            g[u].push_back(v);
            ++indeg[v];
        }
        VI ord;
        compute_topological_ordering (g, indeg, ord);
        write(ord);
    }
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 22/5/2013

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

typedef vector<int> VI;

int n, m;
VI div;

bool ok(int y) {
  for (int i = 0; i < m; ++i)
    if (y % div[i] == 0)
      return false;
  return true;
}

void backtracking(int k, int x) {
  if (k == n) cout << x << endl;
  else {
    for (int v = 0; v <= 9; ++v) {
      int y = 10*x + v;
      if (ok(y)) backtracking(k+1, y);
    }
  }
}

int main() {
  while (cin >> n >> m) {
    div = VI(m);
    for (int i = 0; i < m; ++i)
      cin >> div[i];
    backtracking(0, 0);
    cout << "----------" << endl;
  }
}
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>
```

```
using namespace std;

typedef vector<char> VC;  typedef vector< int> VI;
typedef vector< VC > VVC; typedef vector< VI > VVI;

typedef pair<int,int> P;

const int DF[] = {1, 1,−1,−1, 2, 2,−2,−2};
const int DC[] = {2,−2, 2,−2, 1,−1, 1,−1};

const int oo = 200 * 200;

bool ok(int i, int j, int n, int m, const VVC& t) {
  return i ≥ 0 and i < n and j ≥ 0 and j < m and t[i][j] ≠ 'X';
}

int distance (int f0, int c0, const VVC& t) {
  int n = t    .size ();
  int m = t [0]. size ();
  VVI d(n, VI(m, +oo));
  queue<P> q;
  q.push(P(f0, c0));
  d[f0][c0] = 0;
  while (not q.empty()) {
    P p = q.front ();
    q.pop ();
    int f = p. first ;
    int c = p.second;
    if (t[f][c] == 'p') return d[f][c];
    for (int k = 0; k < 8; ++k) {
      int i = f + DF[k];
      int j = c + DC[k];
      if (ok(i, j, n, m, t) and d[i][j] == +oo) {
        q.push(P(i, j));
        d[i][j] = d[f][c] + 1;
      }
    }
  }
  return +oo;
}

int main() {
  int n, m;
  while (cin >> n >> m) {
    VVC t(n, VC(m));

    for (int i = 0; i < n; ++i)
      for (int j = 0; j < m; ++j)
        cin >> t[i][j];
```

```
        int f0, c0;
        cin >> f0 >> c0;
        int dist = distance(f0-1, c0-1, t);
        if (dist == +oo) cout << "no" << endl;
        else             cout << dist << endl;
    }
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 4/12/2013

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>

using namespace std;

const int UNDEF = −1;
const int N_DIRS = 4;
const int DI[N_DIRS] = { 1,  0, −1,  0};
const int DJ[N_DIRS] = { 0,  1,  0, −1};

struct Pos {
  int i, j;
  Pos(int ii, int jj) : i(ii), j(jj) { }
};

bool ok(int n, int m, int i, int j) {
  return
    0 ≤ i and i < n and
    0 ≤ j and j < m;
}

int bfs(const vector < vector<char> >& map, int i0, int j0) {
  int n = map   .size();
  int m = map[0].size();
  queue<Pos> q;
  q.push( Pos(i0,j0) );
  vector< vector<int> > dist(n, vector<int>(m, UNDEF));
  dist[i0][j0] = 0;
  while (not q.empty()) {
    Pos p = q.front();
    q.pop();
    int i = p.i;
    int j = p.j;
    if (map[i][j] == 't') return dist[i][j];
    else {
      for(int k = 0; k < N_DIRS; ++k) {
        int ii = i + DI[k];
        int jj = j + DJ[k];
        if (ok(n, m, ii, jj) and map[ii][jj] ≠ 'X' and dist[ii][jj] == UNDEF) {
          q.push( Pos(ii, jj) );
          dist[ii][jj] = 1 + dist[i][j];
        }
      }
```

```
    }
  }
  return UNDEF;
}


int main(void) {

  int n, m;
  cin >> n >> m;

  vector < vector<char> > map(n, vector<char>(m));
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    for (int j = 0; j < m; ++j)
      cin >> map[i][j];

  int f, c;
  cin >> f >> c;

  int dist = bfs(map, f-1, c-1);
  if (dist > 0) cout << "distancia minima: " << dist << endl;
  else          cout << "no es pot arribar a cap tresor" << endl;
}
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <map>
#include <assert.h>

using namespace std;

typedef map<string,int> MSI;
typedef vector<string> VS;
typedef vector<bool>   VB;
typedef vector<int>    VI;
typedef vector<VI>     VVI;

int n_outputs, n_inputs;
VVI gdir, ginv;
MSI s2v;
VS v2s;

int string2vertex(const string& s) {
  auto i = s2v.find(s);
  if (i != s2v.end())
    return i->second;
```

```
  else {
    int v = v2s.size();
    v2s.push_back(s);
    s2v.insert(make_pair(s, v));
    return v;
  }
}

int main() {

  n_outputs = n_inputs = 0;

  string token;

  cin >> token;
  assert(token == "OUTPUT");
  while (cin >> token and token != "END") {
    ++n_outputs;
    string2vertex(token);
  }

  cin >> token;
  assert(token == "INPUT");
  while (cin >> token and token != "END") {
    ++n_inputs;
    string2vertex(token);
  }

  while (cin >> token and token != "END") {

    string s;
    cin >> s;
    int ov = string2vertex(s);
    if (ov+1 > gdir.size()) gdir.resize(ov+1);

    cin >> s;
    int iv1 = string2vertex(s);
    if (iv1 + 1 > ginv.size()) ginv.resize(iv1 + 1);

    if (token == "NOT") {
      gdir[ov].push_back(iv1);
      ginv[iv1].push_back(ov);
    }
    else {
      cin >> s;
      int iv2 = string2vertex(s);
      if (iv2 + 1 > ginv.size()) ginv.resize(iv2 + 1);
      if (token == "AND") {
        gdir[ov].push_back( min(iv1,iv2) );
```

```
        gdir[ov].push_back( max(iv1,iv2) );
      }
      else {
        gdir[ov].push_back( max(iv1,iv2) );
        gdir[ov].push_back( min(iv1,iv2) );
      }
      ginv[iv1].push_back(ov);
      ginv[iv2].push_back(ov);
    }
  }

  int n = gdir.size();
  VI ddir(n, 0);
  for (int v = 0; v < n; ++v)
    ddir[v] = gdir[v].size();

  VI bag;
  for (int v = n_outputs; v < n_inputs + n_outputs; ++v)
    bag.push_back(v);

  VI ord;
  while (not bag.empty()) {
    int v = bag.back();
    ord.push_back(v);
    bag.pop_back();
    for (auto w : ginv[v]) {
      --ddir[w];
      if (ddir[w] == 0)
        bag.push_back(w);
    }
  }

  VB val(n);
  while (cin >> token) {
    val[ n_outputs ] = (token == "T");
    for (int v = n_outputs+1; v < n_inputs + n_outputs; ++v) {
      cin >> token;
      val[v] = (token == "T");
    }

    for (auto v : ord) {
      if      (gdir[v].size() == 1) {
        val[v] = not val[gdir[v][0]];
      }
      else if (gdir[v].size() == 2) {
        int iv1 = gdir[v][0];
        int iv2 = gdir[v][1];
        if (iv1 < iv2) val[v] = val[iv1] and val[iv2];
        else           val[v] = val[iv1]  or val[iv2];
```

```
      }
    }
    cout << (val[0] ? 'T' : 'F');
    for (int v = 1; v < n_outputs; ++v)
      cout << ' ' << (val[v] ? 'T' : 'F');
    cout << endl;
  }
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 19/5/2014

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

typedef vector<bool> VB;
typedef vector<int>  VI;
typedef vector<VI>   VVI;

void path(int xi, int xf, const VI& p) {
  if (xf == xi) cout << xi;
  else {
    path(xi, p[xf], p);
    cout << " " << xf;
  }
}

void bfs(const VVI& g, int xi, int xf) {
  int n = g.size();
  VI   p(n, -1);
  VB mkd(n, false);
  VI cur, pos;

  cur.push_back(xi);
  mkd[xi] = true;
  while (not cur.empty()) {
    for (int x : cur) {
      if (x == xf) {
        path(xi, xf, p);
        cout << endl;
        return;
      }
      for (int y : g[x])
        if (not mkd[y]) {
          pos.push_back(y);
          mkd[y] = true;
          p[y] = x;
        }
    }
    swap(pos, cur);
  }
}
```

```
int main() {
  int n, m;
  while (cin >> n >> m) {
    VVI g(n);
    for (int k = 0; k < m; ++k) {
      int x, y;
      cin >> x >> y;
      g[x].push_back(y);
    }
    for (int x = 0; x < n; ++x)
      sort(g[x].begin(), g[x].end());

    bfs(g, 0, n-1);
  }
}
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

typedef vector<bool> VB;

void bt(int k, int n, string& w, VB& mkd) {
  if (k == n) cout << w << endl;
  else {
    for (int i = 0; i < n; ++i)
      if (not mkd[i] and (k == 0 or 'a' + i != w[k-1] + 1)) {
        mkd[i] = true;
        w[k] = 'a' + i;
        bt(k+1, n, w, mkd);
        mkd[i] = false;
      }
  }
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  string w(n, 'a');
  VB mkd(n, false);
  bt(0, n, w, mkd);
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 22/12/2014

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

typedef vector<bool> VB;
typedef vector<int> VI;
typedef vector<VI> VVI;

const int UNDEF = −1;

bool cyclic (int x, const VVI& g, VB& mkd, VI& par) {
  if (mkd[x]) return true;
  mkd[x] = true;
  for (int y : g[x])
    if (par[x] ≠ y) {
      par[y] = x;
      if ( cyclic (y, g, mkd, par)) return true;
    }
  return false;
}

int nombre_arbres(const VVI& g) {
  int n = g. size ();
  VB mkd(n, false);
  VI par(n, UNDEF);
  int n_arb = 0;
  for (int x = 0; x < n; ++x) {
    if (not mkd[x]) {
      if ( cyclic (x, g, mkd, par)) return UNDEF;
      else ++n_arb;
    }
  }
  return n_arb;
}

int main() {
  int n, m;
  while (cin >> n >> m) {
    VVI g(n);
    for (int k = 0; k < m; ++k) {
      int x, y;
      cin >> x >> y;
      g[x].push_back(y);
```

```
      g[y].push_back(x);
    }
    int n_arb = nombre_arbres(g);
    if (n_arb == UNDEF) cout << "no" << endl;
    else                cout << n_arb << endl;
  }
}
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

typedef vector<int> VI;

int bt(int k, const VI& m, int x, int sum_par, int max_und) {
  if (sum_par > x or sum_par + max_und < x) return 0;
  if (k == m.size()) return 1;
  int cnt = 0;
  for (int v = 0; v <= 2; ++v)
    cnt += bt(k+1, m, x, sum_par + v*m[k], max_und - 2*m[k]);
  return cnt;
}

int main() {
  int x, n;
  while (cin >> x >> n) {
    VI m(n);
    int s = 0;
    for (int k = 0; k < n; ++k) {
      cin >> m[k];
      s += m[k];
    }
    cout << bt(0, m, x, 0, 2*s) << endl;
  }
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 25/05/2015

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

typedef vector<char> VC;
typedef vector<VC> VVC;

int bt(int i, int j, VVC& sol, int curr) {
  int n = sol    .size();
  int m = sol[0].size();
  if (i == n) return curr;
  int next_i, next_j;
  if (j == m-1) {
    next_i = i+1;
    next_j = 0;
  }
  else {
    next_i = i;
    next_j = j+1;
  }

  sol[i][j] = 'L';
  int new_lols = 0;
  if (i >= 2              and sol[i-1][j  ] == 'O' and sol[i-2][j  ] == 'L') ++new_lols;
  if (          j >= 2    and sol[  i ][j-1] == 'O' and sol[  i ][j-2] == 'L') ++new_lols;
  if (i >= 2 and j >= 2   and sol[i-1][j-1] == 'O' and sol[i-2][j-2] == 'L') ++new_lols;
  if (i >= 2 and j+2 < m and sol[i-1][j+1] == 'O' and sol[i-2][j+2] == 'L') ++new_lols;
  int nl = bt(next_i, next_j, sol, curr + new_lols);

  sol[i][j] = 'O';
  int no = bt(next_i, next_j, sol, curr);

  return max(nl, no);
}

int main() {
  int n, m;
  while (cin >> n >> m) {
    VVC sol(n, VC(m));
    cout << bt(0, 0, sol, 0) << endl;
  }
}
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

typedef vector<char> VC;
typedef vector<VC> VVC;
typedef vector<bool> VB;
typedef vector<VB> VVB;

bool ok(int i, int j, const VVC& t) {
  int n = t.size();
  int m = t[0].size();
  return i >= 0 and i < n and j >= 0 and j < m and t[i][j] != 'X';
}

const int di[] = {0, 1, 0, -1};
const int dj[] = {1, 0, -1, 0};

bool possible(int i_ini, int j_ini, int i_fin, int j_fin, const VVC& t, VVB& mkd) {
  if (mkd[i_ini][j_ini]) return false;
  mkd[i_ini][j_ini] = true;
  if (i_ini == i_fin and j_ini == j_fin) return true;
  for (int k = 0; k < 4; ++k) {
    int i = i_ini + di[k];
    int j = j_ini + dj[k];
    if (ok(i, j, t) and possible(i, j, i_fin, j_fin, t, mkd)) return true;
  }
  return false;
}

int main() {
  int n, m;
  while (cin >> n >> m) {
    VVC t(n, VC(m));
    int i_ini, j_ini, i_fin, j_fin;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
      for (int j = 0; j < m; ++j)
        cin >> t[i][j];

    for (int i = 0; i < n; ++i)
      for (int j = 0; j < m; ++j)
        if (t[i][j] == 'I') {
          i_ini = i;
          j_ini = j;
        }
        else if (t[i][j] == 'F') {
```

```
            i_fin = i;
            j_fin = j;
        }
        else if (t[i][j] == 'M') {
            t[i][j] = 'X';
            if (i−1 ≥ 0 and t[i−1][j] ≠ 'M') t[i−1][j] = 'X';
            if (i+1 < n and t[i+1][j] ≠ 'M') t[i+1][j] = 'X';
            if (j−1 ≥ 0 and t[i][j−1] ≠ 'M') t[i][j−1] = 'X';
            if (j+1 < m and t[i][j+1] ≠ 'M') t[i][j+1] = 'X';
        }

    VVB mkd(n, VB(m, false));
    if (possible(i_ini, j_ini, i_fin, j_fin, t, mkd)) cout << "SI" << endl;
    else                                              cout << "NO" << endl;
  }
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 22/12/2015

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>

using namespace std;

const vector<pair<int, int>> DIRS = { {1, 0}, {−1, 0}, {0, 1}, {0, −1} };
const int UNDEF = −1;

int dist_2on_tresor_mes_llunya (int i0, int j0, vector<vector<char>>& mapa) {
  int max_dist  = UNDEF;
  int max_dist2 = UNDEF;
  queue<pair< pair<int, int>, int>> q;
  q.push({{i0, j0}, 0});
  mapa[i0][j0] = 'X';
  while (not q.empty()) {
    int i = q.front().first.first;
    int j = q.front().first.second;
    int d = q.front().second;
    q.pop();
    for (auto dir : DIRS) {
      int ii = i + dir.first;
      int jj = j + dir.second;
      if (mapa[ii][jj] ≠ 'X') {
        if (mapa[ii][jj] == 't') {
          max_dist2 = max_dist;
          max_dist  = d+1;
        }
        q.push({{ii, jj}, d+1});
        mapa[ii][jj] = 'X';
      }
    }
  }
  return max_dist2;
}

int main() {
  int n, m;
  cin >> n >> m;
  vector<vector<char>> mapa(n+2, vector<char>(m+2, 'X'));
  for (int i = 1; i ≤ n; ++i)
    for (int j = 1; j ≤ m; ++j)
      cin >> mapa[i][j];
```

```
  int f, c;
  cin >> f >> c;

  int d2 = dist_2on_tresor_mes_llunya (f, c, mapa);
  if (d2 == UNDEF) cout << "no es pot arribar a dos o mes tresors" << endl;
  else             cout << "segona distancia maxima: " << d2 << endl;
}
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

void escriu (int f, int c, const vector<int>& col) {
  for (int i = 0; i < f; ++i) {
    for (int j = 0; j < c; ++j)
      if (col[i] == j) cout << "R";
      else             cout << ".";
    cout << endl;
  }
  cout << endl;
}

void torres (int f, int c, int i, vector<int>& col, vector<bool>& marked) {
  if (i == f) escriu (f, c, col);
  else
    for (int j = 0; j < c; ++j)
      if (not marked[j]) {
        col[i] = j;
        marked[j] = true;
        torres (f, c, i+1, col, marked);
        marked[j] = false;
      }
}

int main() {
  int f, c;
  cin >> f >> c;
  vector<int> col(f);
  vector<bool> marked(c, false);
  torres (f, c, 0, col, marked);
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 19/05/2016

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>

using namespace std;

typedef pair<int,int> P;

int main(void) {
  int n, m;
  while (cin >> n >> m) {
    vector<vector<P>> g(n);
    for (int k = 0; k < m; ++k) {
      int x, y, c;
      cin >> x >> y >> c;
      --x;
      --y;
      g[x].push_back(P(c, y));
      g[y].push_back(P(c, x));
    }
    vector<bool> mkd(n, false);
    mkd[0] = true;
    priority_queue<P, vector<P>, greater<P> > pq;
    for (P x : g[0]) pq.push(x);
    int sz = 1;
    int sum = 0;
    while (sz < n) {
      int c = pq.top().first;
      int x = pq.top().second;
      pq.pop();
      if (not mkd[x]) {
        mkd[x] = true;
        for (P y : g[x]) pq.push(y);
        sum += c;
        ++sz;
      }
    }
    cout << sum << endl;
  }
}
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <vector>

using namespace std;

// Pre: l ≤ r, x < v[r].
// Return the smallest i s.t. l ≤ i ≤ r and x < v[i].
int mes_a_la_dreta (double x, const vector<double>& v, int l, int r) {
  if (l == r) return l;
  int m = (l+r)/2;
  if (x < v[m]) return mes_a_la_dreta (x, v,    l, m);
  else          return mes_a_la_dreta (x, v, m+1, r);
}

int mes_a_la_dreta (double x, const vector<double>& v) {
  return mes_a_la_dreta (x, v, 0, v.size ());
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 15/12/2016

Torn 1

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

vector<vector<int>> su;
vector<vector<bool>> r_mkd, c_mkd;
vector<vector<vector<bool>>> s_mkd;

void write() {
  cout << endl;
  for (int i = 0; i < 9; ++i) {
    cout << su[i][0] + 1;
    for (int j = 1; j < 9; ++j)
      cout << ' ' << su[i][j] + 1;
    cout << endl;
  }
}

bool fill(int i, int j) {
  if (i == 9)          return true;
  if (j == 9)          return fill(i+1, 0);
  if (su[i][j] != -1)  return fill(i, j+1);
  for (int v = 0; v < 9; ++v)
    if (not r_mkd[i][v] and not c_mkd[j][v] and not s_mkd[i/3][j/3][v]) {
      r_mkd[i][v] = c_mkd[j][v] = s_mkd[i/3][j/3][v] = true;
      su[i][j] = v;
      if (fill(i, j+1)) return true;
      r_mkd[i][v] = c_mkd[j][v] = s_mkd[i/3][j/3][v] = false;
    }
  su[i][j] = -1;
  return false;
}

int main() {
  su = vector<vector<int>>(9, vector<int>(9));
  int n;
  cin >> n;
  cout << n << endl;
  while (n--) {
    r_mkd = c_mkd = vector<vector<bool>>(9, vector<bool>(9, false));
    s_mkd = vector<vector<vector<bool>>>(3, vector<vector<bool>>(3, vector<bool>(9, false)));
    for (int i = 0; i < 9; ++i)
```

```
        for (int j = 0; j < 9; ++j) {
          char c;
          cin >> c;
          if (c == '.') su[i][j] = -1;
          else {
            int v = c - '1';
            r_mkd[i][v] = c_mkd[j][v] = s_mkd[i/3][j/3][v] = true;
            su[i][j] = v;
          }
        }
      if (fill (0, 0)) write ();
    }
  }
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

bool search(const vector<int>& a, int l, int r, int x) {
  if (l+1 == r) return a[l] == x or a[r] == x;
  int m = (l+r)/2;
  if (a[m] >= a[l]) {
    if (a[l] <= x and x <= a[m]) {
      return binary_search(a.begin()+l, a.begin()+m+1, x);
    }
    else return search(a, m, r, x);
  }
  else {
    if (a[m] <= x and x <= a[r]) {
      return binary_search(a.begin()+m, a.begin()+r+1, x);
    }
    else return search(a, l, m, x);
  }
}

bool search(int x, const vector<int>& a) {
  return search(a, 0, a.size()-1, x);
}
```

Torn 2

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

int m, n;
vector<int> l;

void gen(int i, int pos) {
  if (pos >= -m/2 and pos <= m/2) {
    if (i == n) cout << pos << endl;
    else {
      gen(i+1, pos+l[i]);
      gen(i+1, pos-l[i]);
    }
  }
}

int main() {
  cin >> m >> n;
  l = vector<int>(n);
  for (int& x : l) cin >> x;
  gen(0, 0);
}
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <iostream>

using namespace std;

typedef int Matrix[2][2];

void product(int m, const Matrix& a, const Matrix& b, Matrix& c) {
  for (int i = 0; i < 2; ++i)
    for (int j = 0; j < 2; ++j) {
      c[i][j] = 0;
      for (int k = 0; k < 2; ++k)
        c[i][j] = (c[i][j] + a[i][k] * b[k][j]) % m;
    }
}

void identity (Matrix& b) {
```

```
  b[0][0] = b[1][1] = 1;
  b[0][1] = b[1][0] = 0;
}

void power(int n, int m, const Matrix& a, Matrix& b) {

  if (n == 0)
    identity(b);
  else {
    if (n%2 == 0) {
      Matrix c;
      power(n/2, m, a, c);
      product(m, c, c, b);
    }
    else {
      Matrix c, d;
      power(n/2, m, a, c);
      product(m, c, c, d);
      product(m, a, d, b);
    }
  }
}

int main() {
  Matrix a;
  a[0][0] = 1;      a[0][1] = 1;
  a[1][0] = 1;      a[1][1] = 0;
  int n, m;
  while (cin >> n >> m) {
    Matrix b;
    power(n, m, a, b);
    cout << b[1][0] << endl;
  }
}
```

Solució de l'Examen d'Ordinador EDA 25/05/2017

Proposta de solució al problema 1

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

enum Letter {CON = 0, VOC};

void g(int k, int n, vector<string>& let, string& sol, vector<vector<bool>>& mkd) {
  if (k == 2*n) cout << sol << endl;
  else {
    int k2 = k%2;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
      if (not mkd[k2][i]) {
        sol[k] = let[k2][i];
        mkd[k2][i] = true;
        g(k+1, n, let, sol, mkd);
        mkd[k2][i] = false;
      }
  }
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<bool>> mkd(2, vector<bool>(n, false));
  vector<string> let(2);
  cin >> let[CON] >> let[VOC];
  string sol(2*n, ' '); // Need a char for filling.
  g(0, n, let, sol, mkd);
}
```

Proposta de solució al problema 2

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <unordered_set>
#include <queue>

using namespace std;

const int UND = −1;
```

```
int main() {
  int n, t;
  while (cin >> n >> t) {
    vector<unordered_set<int>> g(n);
    while (--t >= 0) {
      int s;
      cin >> s;
      vector<int> pub(s);
      for (int i = 0; i < s; ++i)
        cin >> pub[i];

      for (int i = 0; i < s; ++i)
        for (int j = i+1; j < s; ++j) {
          int u = pub[i];
          int v = pub[j];
          g[u].insert(v);
          g[v].insert(u);
        }
    }
    vector<int> dst(n, UND);
    queue<int> q;
    dst[0] = 0;
    q.push(0);
    while (not q.empty()) {
      int u = q.front();
      q.pop();
      for (int v : g[u])
        if (dst[v] == UND) {
          dst[v] = dst[u] + 1;
          q.push(v);
        }
    }
    for (int u = 0; u < n; ++u) {
      cout << u << ": ";
      if (dst[u] == UND) cout << "no";
      else               cout << dst[u];
      cout << endl;
    }
    for (int k = 0; k < 10; ++k) cout << "-";
    cout << endl;
  }
}
```

6

Solucions d’Exàmens Finals

Solució de l'Examen Final EDA 18/01/2011

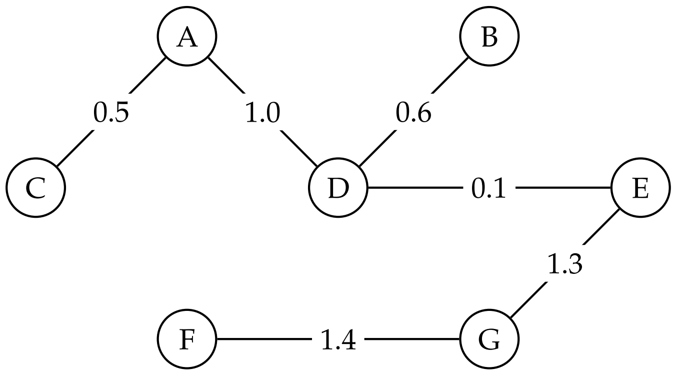
Proposta de solució al problema 1

a) A, B, D, C, E, F, G, H, I, J, K, L, M.

b)

$v[A]$	$v[B]$	$v[C]$	$v[D]$	$v[E]$	$v[F]$	$v[G]$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	1.5	0.5	1.0	∞	∞	∞
0	1.5	0.5	1.0	∞	6.8	∞
0	1.5	0.5	1.0	1.1	6.1	4.3
0	1.5	0.5	1.0	1.1	6.1	2.4
0	1.5	0.5	1.0	1.1	6.1	2.4
0	1.5	0.5	1.0	1.1	3.8	2.4

c)



Proposta de solució al problema 2

Considereu que n és un enter positiu i que G és un graf de N nodes (vèrtexs) i E arestes (arcs) amb pesos.

- Primera afirmació. Cert. Les funcions de la forma $f(n) = An^k$ (amb A i k constants) tenen un creixement polinòmic mentre que la funció 2^n el té exponencial: $lim_{n\to\infty} \frac{An^k}{2^n} = 0$.

- Segona afirmació. Cert. Tots els prefixos d'un camí mínim també són mínims. Altrament es podría trobar un camí alternatiu a C de cost menor (remplaçant el prefix no mínim pel mínim) contradient la hipòtesi de minimalitat de C.

- Tercera afirmació. Fals. Les $N-1$ arestes de menys pes de G poden formar un cicle i una d'elles quedar exclosa de l'arbre d'expansió mínim.

- Quarta afirmació. Fals. Considereu que G és tal que $V = \{u, v, w\}$ i $E = \{(u,v), (u,w), (v,w)\}$ cada arc amb pesos 1, 2.5 i 1 respectivament. El camí mínim de u a w és u, v, w però si s'afegeix 1 a cada arc aleshores seria u, w.

Proposta de solució al problema 3

void *escriu* (*Abc a*) {
    if ($a \neq NULL$) {

```
            escriu (a -> fe);
            cout << a -> x << endl;
            escriu (a -> fd);
        }
    }
```

El cost és lineal.

Proposta de solució al problema 4

El primer problema és el problema de la PARTICIÓ, que sabem és **NP**-complet. Per tant, si $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, no pertany a **P**.

El segon problema es pot resoldre en temps $O(n^3)$ amb l'algorisme evident. Per tant, pertany a **P** amb independència de la hipòtesi.

Proposta de solució al problema 5

En una taula de dispersió (hash) H, s'insereixen totes les arestes (u_i, v_i) de la llista E amb clau (u_i, v_i).

A continuació, es fa un recorregut lineal de E per verificar si per cada aresta (u_i, v_i), la clau (v_i, u_i) és a H.

El primer pas triga $\Theta(m)$ en el cas mitjà, i com que en el cas mitjà cada operació de cerca a H té cost $\Theta(1)$, el segon pas triga $\Theta(m)$ en mitjana.

Proposta de solució al problema 6

a) Si $d \geq 2$, T (l'arbre AVL més petit de profunditat d) no pot ser buit i els seus fills T_E i T_D són arbres AVL i almenys un d'ells ha de tenir profunditat $d-1$. Suposem que és T_E. Llavors T_D pot tenir profunditat $d-1$ o $d-2$. Com que a més profunditat més nodes T_D ha de tenir profunditat $d-2$, d'on es dedueix l'equació.

b) L'algorisme demanat és pràcticament idèntic al que es fa servir per calcular els nombres de Fibonacci i es troba a la col·lecció d'algorismes de l'assignatura. El seu cost tant en temps com en espai és lineal. L'espai es pot reduir a constant si a l'aplicació no es repeteixen consultes amb valors inferiors de d.

Solució de l'Examen Final EDA 6/6/2011

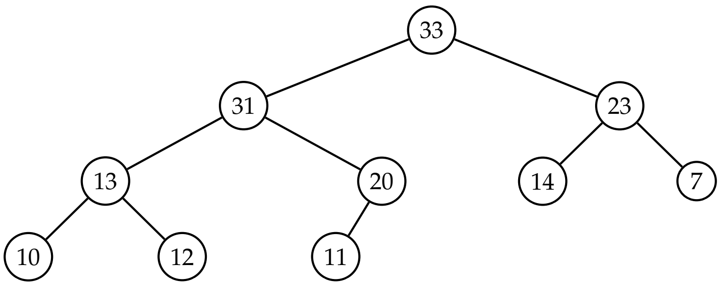
Proposta de solució al problema 1

a) Els dos bucles tenen un cost $\Theta(n^2)$ i es fan K crides recursives a `desperdici`$(n/2)$. Si $T(n)$ és el cost de desperdici amb entrada n, tenim que $T(n) = KT(n/2) + \Theta(n^2)$, amb $n > 0$ i $K > 0$. Aplicant el teorema mestre, $\alpha = \log_2(K)$ i per tant,

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^2) & K < 4 \\ \Theta(n^2 \log(n)) & K = 4 \\ \Theta(n^\alpha) & K > 4 \end{cases}$$

b) Sí és possible. Sigui $T(n)$ el cost de l'algorisme que estem desenvolupant amb una entrada de mida n i $g(n)$ el cost de dividir i ajuntar el problema de mida n. Aleshores $T(n) = 3T(n/4) + g(n)$ amb $g(n) = \Theta(n^k)$. Aplicant el teorema mestre, si $k > \log_4(3)$, aleshores $T(n) = \Theta(n^k)$. Si $k = 2$, $T(n)$ seria de complexitat més gran que la desitjada, per tant la màxima k ha de ser $k = 1$ i $g(n) = \Theta(n)$.

c) $14, 20, 31$



d)

$v[A]$	$v[B]$	$v[C]$	$v[D]$	$v[E]$	$v[F]$	$v[G]$	$v[H]$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	1	∞	∞	2	8	∞	∞
0	1	3	∞	2	7	7	∞
0	1	3	∞	2	7	7	∞
0	1	3	4	2	7	5	∞
0	1	3	4	2	7	5	8
0	1	3	4	2	6	5	7
0	1	3	4	2	6	5	7

e)

$v[A]$	$v[B]$	$v[C]$	$v[D]$	$v[E]$	$v[F]$	$v[G]$	$v[H]$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	10	∞	∞	∞	∞	∞	8
0	10	∞	∞	∞	12	9	8
0	5	10	∞	∞	8	9	8
0	5	6	11	∞	7	9	8
0	5	5	7	14	7	9	8
0	5	5	6	10	7	9	8
0	5	5	6	9	7	9	8

Proposta de solució al problema 2

a) *misteri (Abc t , Elem x)* retorna el nombre de nodes de l'arbre binari de cerca t que són estrictament més petits que x.

b) Si n és la mida de l'arbre, el cost en el cas pitjor és $O(n)$, ja que com a molt es visita cada node de l'arbre, i el treball a cada node costa temps constant. A més, això succeeix per exemple quan tots els elements de l'arbre són estrictament més petits que x. Per tant el cost és $\Theta(n)$.

c)

```
int misteri (Abc t , Elem x) {
    if (t == null) return 0;
    if (t->info < x) {
        if ( t->fe == null ) return 1 + misteri (t->fd, x);
        else                 return 1 + t->fe->m + misteri(t->fd, x);
    }
    return misteri (t->fe, x);
}
```

d) El cost en el cas pitjor no millora perquè l'arbre pot no estar ben balancejat: per exemple, si l'arbre t és tal que tots els subarbres esquerres són nulls (és a dir, l'arbre de fet és una llista), i tots els elements de l'arbre són més petits que x, aleshores el cost continua sent lineal en la mida de l'arbre.

e) El cost de la nova implementació de `misteri` en el cas pitjor és $\Theta(h)$, on h és l'alçada de l'arbre. Si l'arbre és un AVL, aleshores l'alçada és $\Theta(\log(n))$, on n és la mida de l'arbre. Per tant, en termes de n, el cost de `misteri` és $\Theta(\log(n))$.

Proposta de solució al problema 3

a) `u == n`

b) `usat[w] = false;`

c) `G1[u][v] != G2[f[u]][f[v]]`

d) `iso = backtracking(0);`

Proposta de solució al problema 4

a) **Solució 1:** Com que CLIQUE és NP-complet, en particular és NP. I com que CLIQUE-3 és CLIQUE restringit a un subconjunt de les seves entrades, llavors CLIQUE-3 també és NP: els mateixos certificats i verificador serveixen.

   Solució 2: Un candidat a certificat és un subconjunt de k vèrtexs del graf. Clarament té mida com a molt polinòmica (de fet, lineal) en l'entrada, i es pot verificar que realment és un certificat en temps polinòmic: només cal comprovar que tot parell de vèrtexs del subconjunt està connectat per una aresta.

b) El raonament no permet concloure que CLIQUE-3 és NP-difícil. Per fer-ho, caldria reduir CLIQUE (o qualsevol altre problema NP-complet) en temps polinòmic a CLIQUE-3.

Solució de l'Examen Final EDA 13/1/2012

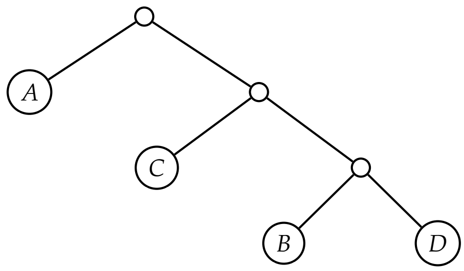
Proposta de solució al problema 1

a) $\Theta(n)$ en tots tres casos.

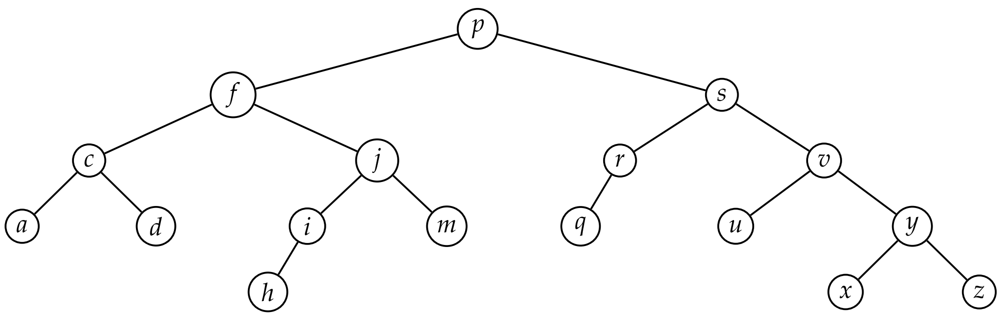
9	8	8	6	5	7	1	2	6	5	3	7	4

b)

A	0
B	110
C	10
D	111



c)



d) Exponenciar la matriu M amb l'algorisme d'exponenciació ràpida, multiplicant matrius amb l'algorisme de Strassen i enters amb l'algorisme de Karatsuba i Ofman.

Proposta de solució al problema 2

Compte! Funciona per pancakes però no per crêpes.

```
for (int i = n−1; i ≥ 0; −−i) {
    int p = posicio del pancake mes gran entre 0 i i
    girar en el punt p
    girar en el punt i
}
```

L'algorisme és semblant a l'ordenació per selecció en el sentit que, a cada pas, es col·loca el següent element més gran a la posició que li pertoca. Com que es fan n iteracions i cada iteració necessita dos girs d'espàtula com a molt, s'ordenen n pancakes amb $2n$ girs o menys.

Proposta de solució al problema 3

```
*Node seguent(Abc a, Elem x) {
    if (not a) return a;
    if (x ≥ a -> info) return seguent(a -> fd, x);
    Node *p = seguent(a -> fe, x);
    if (p) return p;
    return a;
}
```

El cost és proporcional a l'alçada de l'arbre.

Proposta de solució al problema 4

```
typedef pair<int, int>             ArcP; // arc amb pes
typedef vector< vector<ArcP> > GrafP; // graf amb pesos

const int INFINIT = numeric_limits<int>::max();

void calcula (const GrafP& G, int s, vector<int>& d, vector<int>& p) {
    int n = G.size ();
    d = vector<int>(n, INFINIT);
    d[s] = 0;
    p = vector<int>(n, 0);
    p[s] = 1;
    vector<bool> S(n, false);
    priority_queue <ArcP, vector<ArcP>, greater<ArcP> > Q;
    Q.push(ArcP(0, s ));
    while (not Q.empty()) {
        int u = Q.top (). second; Q.pop ();
        if (not S[u]) {
            S[u] = true;
            for (int i = 0; i < int(G[u]. size ()); ++i) {
                int v = G[u][i ]. first ;
                int c = G[u][i ]. second;
                if (d[v] > d[u] + c) {
                    d[v] = d[u] + c;
                    p[v] = p[u];
                    Q.push(ArcP(d[v], v ));
                }
                else if (d[v] == d[u] + c) p[v] += p[u];
}   }   }   }
```

```
int main(void) {
    int n, m;
    while (cin >> n >> m) {
        GrafP G(n);
        for (int k = 0; k < m; ++k) {
            int u, v, c;
            cin >> u >> v >> c;
            G[u].push_back(ArcP(v,c ));
        }
        int x, y;
        cin >> x >> y;
        vector<int> d,p;
        calcula (G, x, d, p);
        if (d[y] == INFINIT)
            cout << "No hi ha cami de " << x << " a " << y << endl;
        else
            cout << "Cost " << d[y] << ", " << p[y] << " manera(es)" << endl;
}   }
```

Proposta de solució al problema 5

Donada una instància $(G = (V, E), k)$ del problema RECOBRIMENT volem transformar-la en una instància $(k', P, \mathcal{C})$ del problema de CLAUS.

Fem $k' = k$, $P = E$ i $C_i = \{\{v_i, v_j\} \in E \text{ per algun } v_j \in V\}$ on $V = v_1 \dots v_n$ i $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ (recordem que cal que $C_i \subseteq P$).

Aleshores, si la instància de RECOBRIMENT és positiva, la instància corresponent de CLAUS també ho és. Efectivament, si existeix un $A \subseteq V$ de k vèrtexs tal que $\forall (u, v) \in E, u \in A \vee v \in A$, podem construir $\mathcal{C}$ amb els C_i que corresponen als $v_i \in A$. Així doncs, $\forall p \in P$ cal veure que $\exists C_j \in \mathcal{C}, p \in C_j$, però $p \equiv (u, v)$ i $u \in A \vee v \in A$ per ser A un recobriment. Aleshores és fàcil veure que l'aresta p pertany a C_u i també a C_v.

A l'inrevés, donat $\mathcal{C}$ triem els vèrtexs que es corresponen a les claus per formar A. Com tot pany (aresta) és obert al menys per una clau C_s, és clar que, per definició, o bé un extrem de p pertany a C_s o bé hi pertany l'altre extrem. Sigui com sigui, això és el mateix que dir que un dels dos extrems de p és a A, per construcció d'A. Per tant, com p és en realitat qualsevol aresta, A és un recobriment.

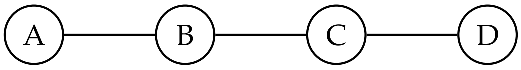
Així acabem la demostració RECOBRIMENT $\leq_p$ CLAUS, per tant CLAUS és NP-difícil.

Per veure que CLAUS és a NP (i per tant concloure que CLAUS és NP-complet) caldria un testimoni per poder veure, en temps polinòmic, si una instància del problema és o no positiva. El testimoni pot ser el mateix conjunt $\mathcal{C}$. Per veure si la instància és o no positiva caldria comprovar que tot pany és obert per alguna clau C_i. Ho podem fer mirant que la unió de tots els C_i és P. Això òbviament es pot fer en temps polinòmic.

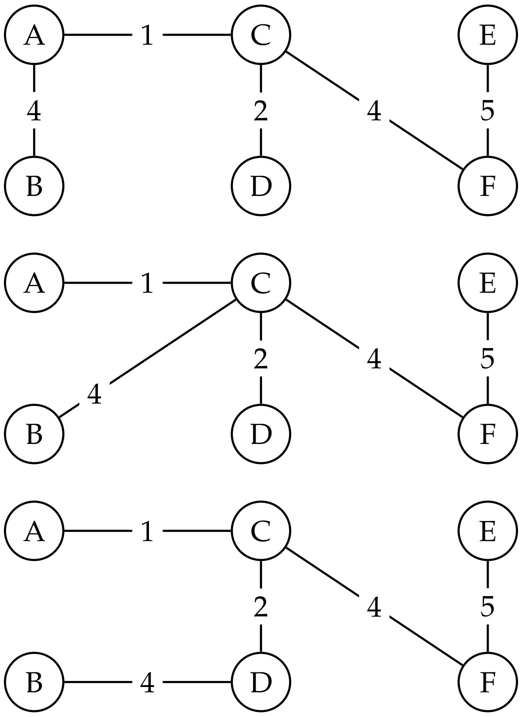
Solució de l'Examen Final EDA **15/6/2012**

Proposta de solució al problema 1

a) El vèrtex d'inici és l'A.



b) A continuació es mostren diversos arbres d'expansió mínims del graf de l'enunciat (i per tant, no hi ha unicitat):

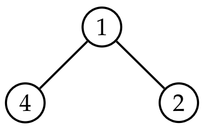


c) Res. Com que el cost dels intercanvis és $\Theta(1)$, fent $n = d - e + 1$ el cost del codi segueix la recurrència

$$T(n) = 3T(n/2) + \Theta(1),$$

i del Teorema Mestre de Recurrències Divisores obtenim que $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$.

d) • FALS. Considerem el següent heap:



La seva representació en taula és:

1	4	2

L'element màxim (4) ocupa la 2a posició final. Però en aquest cas $n = 3$ i $\lfloor n/2 \rfloor = 1$.

- FALS. En el cas pitjor quicksort és quadràtic, mentre que per exemple mergesort *sempre* és $\Theta(n \log n)$.
- CERT. Representem el conjunt de vèrtexs amb V i el grau d'un vèrtex $v \in V$ amb $g(v)$. Llavors tenim que

$$2|E| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V,\ g(v) \text{ parell}} g(v) + \sum_{v \in V,\ g(v) \text{ senar}} g(v),$$

  d'on $\sum_{v \in V,\ g(v) \text{ senar}} g(v) = 2|E| - \sum_{v \in V,\ g(v) \text{ parell}} g(v)$ ha de ser parell. Per tant, hi ha un nombre parell de sumands a $\sum_{v \in V,\ g(v) \text{ senar}} g(v)$, és a dir, hi ha un nombre parell de vèrtexos de grau senar.
- CERT. Per definició de problema decisional.

Proposta de solució al problema 2

a)
```
void resize () {
    vector<vector<KeyInfo>> aux(n);
    for (int i = 0; i < M; ++i) {
        for (int j = 0; j < v[i]. size (); ++j) {
            Key& k = v[i][j];
            int p = hash_function (k) % n;
            aux[p].push_back(k);
    } }
    v.swap(aux);
    M = n;
}
```

b) El cos del bucle intern i l'increment de j tenen cost $\Theta(1)$ i s'executen $\Theta(n)$ vegades en total. Per tant, contribueixen al cost total en $\Theta(n)$. Per altra banda, l'increment de i, la inicialització de j i l'avaluació de la condició del bucle més extern tenen cost $\Theta(1)$, i s'executen $\Theta(M)$ vegades. Com que $M = n/\alpha$ i $\alpha > 2$, tenim $M = O(n)$ i que la contribució al cost total és $O(n)$. Pel que fa a l'avaluació de la condició del bucle més intern, contribueix al cost total en $\Theta(n + M) = \Theta(n)$. Finalment, la creació d' *aux* té cost $\Theta(n)$, i la resta del codi contribueix en cost constant. Així doncs, el cost és $\Theta(n)$.

c) Cada cop que el nombre d'elements guardats a la taula és de la forma $2^l - 1$, amb $l \geq 2$, es fa una crida a *resize*. Per tant, si n està entre $2^{k+1} - 1$ i $2^{k+2} - 2$ per a un cert k, llavors es fan k crides a *resize*, la contribució al cost de les quals en el cas pitjor és, per l'apartat anterior, $\sum_{l=2}^{k+1} \Theta(2^l - 1) = \sum_{l=2}^{k+1} \Theta(2^l) = \Theta(2^k) = \Theta(n)$. Per altra banda, la resta del codi de *insert* costa $\Theta(1)$ a cada crida. Per tant, després de n crides la contribució al cost és $\Theta(n)$. Finalment, el cost total és doncs $\Theta(n)$.

Proposta de solució al problema 3

a)
```
void rotacio (Node*& a, int x) {
    if (x < a−>x) return rotacio(a−>fe, x);
    if (x > a−>x) return rotacio(a−>fd, x);
    Node* b = a;
```

```
        a = a->fe;
        b->fe = a->fd;
        a->fd = b;
    }
```

b) El cost de *rotacio* () ve donat pel de trobar l'element a l'arbre, més el de fer la rotació. Aquest últim és constant i el primer és proporcional a l'alçada de l'arbre. En el cas pitjor, un ABC té alçada lineal i, per tant, el cost en el cas pitjor és $\Theta(n)$.

c) Per un raonament semblant a l'anterior el cost de *rotacio* () en un arbre AVL és $\Theta(\log n)$.

Proposta de solució al problema 4

```
class Particio {
    int n, min_dif, dif, total;
    vector<int> v;

    void recursiu (int i) {
        int va = valor_absolut (dif);
        if (va − total ≥ min_dif) return;
        if (i == n) min_dif = va;
        else {
            dif += v[i]; total −= v[i];
            recursiu (i+1);
            dif −= 2*v[i];
            recursiu (i+1);
            dif += v[i]; total += v[i];
    } }

public:

    Particio (int n, int total, vector<int>& v) {
        this −> n = n;
        this −> total = total;
        this −> v = v;
        min_dif = total;
        dif = 0;
        recursiu (0);
        cout << min_dif << endl;
    }
};

int main() {
    int n;
    cin >> n;
    int total = 0;
    vector<int> v(n);
    for (int i = 0; i<n; ++i) {cin >> v[i]; total += v[i];}
    Particio p(n, total, v);
}
```

Proposta de solució al problema 5

a) Com que X es pot reduir polinòmicament a A i A pertany a NP (per ser NP-complet), aleshores X pertany a NP. No obstant, no es pot afirmar que X sigui NP-complet.

b) Per ser A NP-complet, tenim que A és NP-difícil. Per tant, tot problema de la classe NP es pot reduir polinòmicament a A. Com que per hipòtesi A es pot reduir polinòmicament a X, això implica que X és NP-difícil. No obstant, això no implica que X pertanyi a NP, i per tant tampoc implica que sigui NP-complet.

c) Com que B pertany a NP, la resposta és la mateixa que a l'apartat a).

d) A diferència de l'apartat b), en aquest cas no podem ni tan sols afirmar que X sigui NP-difícil. Tampoc podem afirmar que X pertanyi a NP, ni que sigui NP-complet.

Solució de l'Examen Final EDA 10/01/2013

Proposta de solució al problema 1

A Fer una passada per a cada nombre fins tornar-lo a trobar. Temps $O(n^2)$ en cas pitjor i espai addicional $O(1)$.

B Ordenar els nombres i fer una passada fins trobar l'únic. Temps $O(n \log n)$ en cas pitjor i espai addicional $O(1)$ utilitzant Heapsort.

C Utilitzar un conjunt d'enters. Es recorre cada element de la seqüència, esborrant-lo del conjunt si ja hi era, afegint-lo al conjunt si no hi era. Al final, només pot haver-hi un sol element al conjunt, que és la solució. Temps $O(n \log n)$ i espai addicional $O(n)$ amb arbres equilibrats. Temps $O(n)$ en mitjana i espai addicional $O(n)$ amb hashing.

D Calcular la xor de tots els enters. El resultat és el nombre únic, perquè els bits dels repetits s'han cancel·lat. Temps $O(n)$ i espai addicional $O(1)$.

Proposta de solució al problema 2

- La solució a) té cost en el cas pitjor $\Theta(n \log n)$, mentre que la solució b) té cost $\Theta(mn)$. Així doncs, si m és $O(\log n)$, llavors la solució b) és almenys tan bona com la a); i si m és $\Omega(\log n)$, llavors la solució a) és almenys tan bona com la b).
- Seleccionar l'element m-èsim (amb cost lineal) i després fer una partició (à la quicksort) amb aquest element de pivot (també amb cost lineal). Així, a les primeres m posicions tindríem (no ordenats) els elements que busquem. El cost total en temps d'aquest algorisme és per tant $\Theta(n)$.

Proposta de solució al problema 3

1. Un digraf implementat amb la classe *Digraf1* té cost en espai $\Theta(n^2)$, i un d'implementat amb la classe *Digraf2* té cost en espai $\Theta(n+m)$. En qualsevol de les dues implementacions, qualsevol digraf és cas pitjor.
2. (a) Per a la classe *Digraf1*:

   ```
   bool hi_ha_arc (int u, int v) { return t[u][v];}
   ```

   Té cost en el cas pitjor $\Theta(1)$. Aquest cas pitjor es dóna sempre.

   (b) Per a la classe *Digraf2*:

   ```
   bool hi_ha_arc (int u, int v) {
     for (int i = 0; i < t[u].size(); ++i)
       if (t[u][i] == v) return true;
     return false;
   }
   ```

   Té cost en el cas pitjor $\Theta(\min(m,n))$. Per exemple, aquest cas pitjor es dóna:

   - si $m < n$: quan totes les arestes surten de u i cap arriba a v.
   - si $m \geq n$: quan u té com a successors tota la resta de vèrtexs menys v.

3.
```
class Digraf3 {

    vector< set<int> > t;

  public:

    Digraf3(int n) { t = vector< set<int> >(n); }

    void afegeix_arc (int u, int v) {  t[u].insert (v); }

    bool hi_ha_arc (int u, int v) {
      return t[u].find (v) ≠ t[u].end ();
    }
  };
```

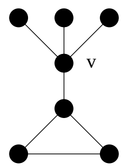
Proposta de solució al problema 4

```
#include <vector>
#include <iostream>

using namespace std;

typedef vector<vector<int>> Graph;

class ThreeColoring {

    Graph G;
    int n;
    vector<int> col;
    bool done;


    bool legal (int u, int c) {
        for (int v : G[u]) {                  // què bonic!
            if (v < u and col[v] == c) {
                return false;
        }   }
        return true;
    }


    void rec (int u) {
        if (u == n) done = true
        else {
            for (int c = 0; c < 3 and not done; ++c) {
                if ( legal (u, c)) {
                    col[u] = c;
                    rec (u+1);
    }   }   }
```

```
public:

    ThreeColoring(Graph G) : G(G), n(G.size()), col(n), done(false) { rec(0); }

    bool colorable() const { return done; }

    int color(int u) { return col[u]; }

};


int main() {
    Graph G = { {1,2}, {0,3}, {0,3}, {1,2} };

    ThreeColoring col(G);
    cout << col.colorable() << endl;
}
```

Proposta de solució al problema 5

(a) *Incorrecta*. Considerem el graf G següent:



El parell $(G, 3)$ pertany a **CLICA** però, en canvi, la transformació que en fa f és $(G, 3, v)$, que no pertany a **CLICA-CENTRADA** perquè v no és part del triangle.

(b) *Incorrecta*. En aquest cas, (G', k, w_1) sempre pertany a **CLICA-CENTRADA** i, per tant, la reducció no pot ser vàlida. Qualsevol parell (G, k) tal que G no tingui una k-clica serveix de contraexemple.

(c) *Correcta*. És evident que si G té una k-clica amb conjunt de vèrtexs U, llavors G'' té una $(k+1)$-clica amb conjunt $U \cup \{u\}$. D'altra banda, si G'' té una $(k+1)$-clica que conté u, la còpia de G ha de tenir una k-clica.

Solució de l'Examen Final EDA 5/6/2013

Proposta de solució al problema 1

a) Dominen els polinomis de grau 3, per tant $\Theta(n^3)$.

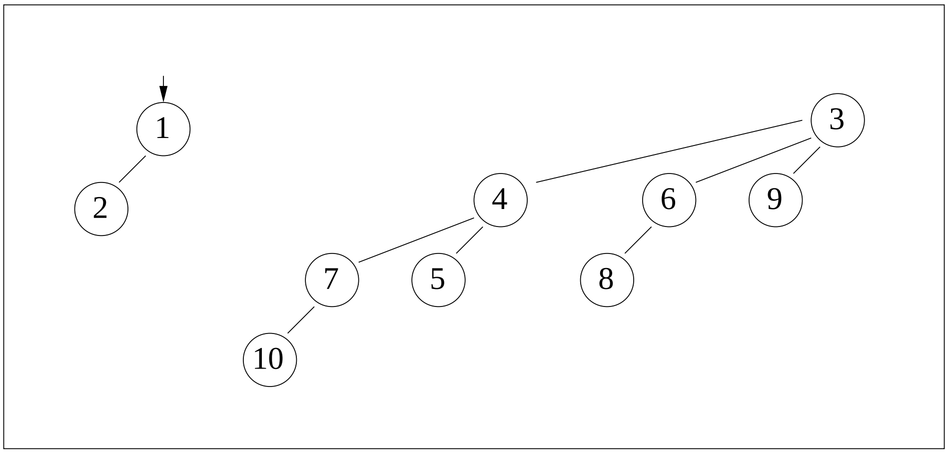
b) Tenim $\Theta(n^3) = \Theta((n^2)^{3/2}) = \Theta(N^{3/2})$ perquè $N = \Theta(n^2)$. Per tant la resposta és $\Theta(N^{3/2})$.

c) Quan n es multiplica per 2, el temps es multiplica per $2^3 = 8$. Per tant 8 vegades 15 segons, és a dir 2 minuts.

d) El factor k que ens demanen ha de ser tal que $k^3 = 1000$. És a dir, $k = 10$.

Proposta de solució al problema 2

El heap binomial resultant és el següent:



Per obtenir-lo, hem mantingut el B_1 del primer heap i hem fusionat els dos B_3 de cada heap. Aquest segon pas l'hem fet penjant el B_3 que té l'arrel més gran de l'arrel de l'altre B_3 per tal de preservar la propietat de min-heap.

Proposta de solució al problema 3

Sense pèrdua de generalitat, suposem que $V = \{1, \ldots, n\}$.

Apartat a. Demostració per inducció sobre k.

Cas base. Per $k = 1$ tenim que $A^1 = A$ és la matriu d'adjacències de G i se satisfà que $A[i,j] = 1$ si i només si hi ha camí de longitud ≤ 1 en G.

Hipòtesi d'inducció. A^i és la matriu d'adjacències de G^i, per a tot i, $1 \leq i \leq k$ essent $k \geq 1$.

Considerem ara la potència (booleana) $(k+1)$-èsima $A^{k+1} = A^k A$. Per la definició del producte (booleà) de matrius, $A^{k+1}[i,j] = \bigvee_{\ell=1}^{n}(A^k[i,\ell] \wedge A[\ell,j])$. Aleshores, $A^{k+1}[i,j] = 1$ si i només si existeix ℓ, $1 \leq \ell \leq n$ tal que $A^k[i,\ell] = 1$ i $A[\ell,j] = 1$. Aplicant la hipòtesi d'inducció, $A^k[i,\ell] = 1$ si i només si hi ha algun camí de i a ℓ de longitud $\leq k$ en G. Per tant, $A^{k+1}[i,j] = 1$ si i només si per algun ℓ, $1 \leq \ell \leq n$ hi ha algun camí de longitud $\leq k$ en G des de i a ℓ i hi ha algun camí de longitud ≤ 1 en G des de ℓ a j. Aleshores, $A^{k+1}[i,j] = 1$ si i només si hi ha algun camí de longitud $\leq k+1$ en G des de i a j o el que és el mateix, si i només si $(i,j) \in E^{k+1}$.

Apartat b.

```
typedef vector<int> VB;
typedef vector<VB> VVB;

VVB Potencia_2(VVB& A){
    int n = A.size ();
    VVB B(n, VB(n, 0));
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = 0; j < n; ++j)
            for (int l = 0; l < n; ++l){
                B[i][j] = B[i][j] or (A[i][l] and A[l][j]);
            }
    return B;
}

VVB Potencia_4(VVB& A){
    A = Potencia_2(A); /* A matriu d'adjacencies de G^2 */
    A = Potencia_2(A); /* A matriu d'adjacencies de G^4 */
    return A;
}
```

Sigui A una matriu de 0s i 1s qualsevol de dimensió $n \times n$ on $n \geq 1$. La funció `Potencia_2` amb entrada A, computa el quadrat booleà d'A. El temps de computació és $\Theta(n^3)$. Aleshores, la funció `Potencia_4` amb entrada A, computa A^4 (4a potència booleana) i el temps de computació de `Potencia_4` és també $\Theta(n^3)$.

Apartat c.

Si fem el producte de matrius d'enters habitual, sense canviar el producte d'enters per un AND ni la suma d'enters per un OR, llavors el resultat de $A^k[i,j]$ serà 0 si i només si no hi ha cap camí de longitud menor o igual que k de i a j. Vist així, podem fer servir l'algorisme de Strassen per multiplicar dues matrius d'enters dues vegades, primer per obtenir A^2 i després per obtenir A^4. El temps serà $\Theta(n^{\log_2 7})$ i d'aquí en podrem treure el resultat en $\Theta(n^2)$ passos adicionals canviant cada entrada diferent de 0 per 1 i deixant les que són 0 a 0. El temps total serà $\Theta(n^{\log_2 7})$.

Proposta de solució al problema 4

Per simplificar l'escriptura direm clica en lloc de subgraf complet i k-clica en lloc de subgraf complet de mida k.

L'algorisme B redueix CLICA a CLICA^{+1}.

Sigui $\langle G,k\rangle$ un parell on $G=(V,E)$ i k és un natural. Sigui $\langle G',k\rangle$ el parell que retorna B amb entrada $\langle G,k\rangle$. B és de temps polinòmic, només ha d'afegir al graf d'entrada un nou vèrtex i n arestes.

Si G conté una k-clica aleshores G' conté una $(k+1)$-clica. Només cal afegir u_{nou} al conjunt de vèrtexs U que indueix una k-clica a G. Per la construcció de G', $U \cup \{u_{nou}\}$ indueix un $(k+1)$-clica a G'.

Si G' conté una $(k+1)$-clica, volem demostrar que G conté una k-clica. Sigui $U \subseteq V'$ el conjunt que indueix la clica a G' i $|U| = k+1$. Si $u_{nou} \notin U$, aleshores $U \subseteq V$ indueix una $(k+1)$-clica a G. Si eliminem un vèrtex qualsevol $v \in U$, aleshores $U - \{v\}$ indueix una k-clica a G. Si $u_{nou} \in U$, aleshores $U - \{u_{nou}\}$ indueix una k-clica a G.

L'algorisme A redueix CLICA^{+1} a CLICA.

Sigui $\langle G, k\rangle$ un parell on $G = (V, E)$ i k és un natural. Sigui $\langle G, k+1\rangle$ el parell que retorna A amb entrada $\langle G, k\rangle$. És clar que A és de temps polinòmic; només ha d'incrementar la k.

Fixeu-vos que $\langle G, k\rangle$ és un parell de CLICA^{+1} si i només si G conté una $(k+1)$-clica si i només si $\langle G, k+1\rangle$ és de CLICA.

Proposta de solució al problema 5

a) Es manté un diccionari que, per a cadasuna de les n paraules possibles mantingui un conjunt ordenat amb els identificadors dels documents que la contenen. En C++ es podria fer amb:

   map<**string**, *set*<**int**>> *dic*;

   [Aquesta ED d'anonema un fitxer invertit i és semblant a l'índex de termes al final dels llibres.]

   El pre-procés consistiria en, per a cada document d, per a cada paraula p, inserir d en $dic\,[p]$.

   Per calcular la resposta a una consulta amb una sola paraula p, només cal iterar sobre tots els elements de $dic\,[p]$. Com que es troben en un conjunt ordenat, la resposta ja es donaria ordenada.

b) Els diccionaris i els conjunts es poden guardar en espai lineal amb AVLs. Per tant, l'espai de l'ED seria $O(N+n) = O(N)$.

c) El temps en el cas pitjor és $O(N(\log n + \log M))$, perquè per cadascuna de les N paraules, cal cercar-la en el diccionari que en té $\leq n$, i inserir-la en un conjunt que en té $\leq M$.

d) En el cas pitjor el temps és $O(\log n + D)$. El primer terme és per cercar en el diccionari que té n elements. El segon terme és el temps per recórrer el seu conjunt de documents, que en té D.

e) Per a cada paraula de la consutla, es pot obtenir la llista ordenada dels documents on apareix (com a la Part 1). Després, cal retornar la intersecció ordenada d'aquestes llistes. Hi ha moltes maneres de fer-ho, per exemple, fent $k-1$ fusions.

f) Cal repetir k cops el temps $O(\log n + D)$ per cercar la llista per cada paraula. Això dóna k llistes de $\leq D$ elements cadascuna. Les k fusions tenen doncs cost $O(kD)$. En total, doncs, $O(k(\log n + D))$.

Nota: Es podria utilitzar també un

unordered_map<**string**, *set*<**int**>> *dic*;

En aquest cas, els costos de temps en el cas mitjà s'obtindrien fent desaparèixer els factors logarítmics.

Solució de l'Examen Final EDA 15/1/2014

Problema 1

Aquest problema és el mateix que el primer problema del parcial.

Problema 2

(a) $\boxed{st + sr - a[k] >= l}$ $\boxed{st + a[k] <= u}$ $\boxed{sols(0,0,s,x)}$

(b) Només cal invertir l'ordre de les crides recursives: és a dir, intercanviar els dos **if**s (amb el seu codi corresponent) que hi ha dins de l'**else**.

Problema 3

Per mantenir l'ED requerida utilitzarem aquestes informacions:

unordered_map<string, int> urls;

vector<unordered_map<string, int>::iterator> iters;

El diccionari *urls* mantindrà les n URLs de les pàgines com a claus. Per a cada clau, es mantindrà com a infomació un enter de 0 a $n-1$ (tots diferents) que correspon a la seva posició al vector *iters*. El vector *iters* mantindrà n iteradors: per a cada pàgina es tindrà un iterador que apunti a la seva posició en el diccionari URLs (no importa en quina posició). Caldrà vetllar que les dues estructures de dades sempre s'enllacin mútuament.

L'operació *insert_url* hauria d'inserir la nova URL al diccionari, i col.locar l'iterador que apunta al nou element al final del vector. Això es fa en temps constant en mitjana.

L'operació *random_url* hauria de triar un enter r a l'atzar entre 0 i $n-1$, on n és la talla d' *urls* i d' *iters*. Després, accediria al r-èsim element de *iters* i retornaria la clau de l'element apuntat per aquell iterador. Això es fa en temps constant en el cas pitjor.

L'operació *remove_url* hauria de cercar l'URL en el diccionari, trobar la seva posició al vector (gràcies a la informació associada), col.locar el darrer iterador del vector al forat del que s'esborra, actualitzar la informació del mogut al diccionari, i treure l'últim element del vector. Això es fa en temps constant en mitjana.

L'espai necessari per emmagatzemar n pàgines és $\Theta(n)$, a banda de l'espai necessari per les seves strings.

Problema 4

(a) La reducció crea un objecte nou x_{n+1} i una comanda $C_{k+1} = (x_{n+1}, \neg x_{n+1})$ que s'afegeix a la llista de comandes. Evidentment aquesta reducció es pot computar en temps polinòmic. A més, si la instància del problema del Johnny té com a mínim una solució, llavors la instància resultant de la reducció en tindrà com a mínim dues: la original amb l'objecte x_{n+1} afegit a la solució, i la original sense l'objecte x_{n+1} afegit a la solució. Inversament, si la instància del problema del Johnny no té cap solució, llavors la instància resultant de la reducció tampoc en tindrà cap, i per tant no en tindrà almenys dues.

(b) El certificat és un vector de n bits, on l'i-èssim bit indica si l'objecte x_i està a la solució o no. El verificador només ha de comprovar que, per cada comanda, o bé com a mínim un dels objectes desitjats per aquella comanda té el seu bit a 1 en el certificat, o bé com a mínim un dels objectes no desitjats per aquella comanda té el seu bit a 0 en el certificat. El certificat té mida n i per tant polinòmica en la mida de l'entrada, i el verificador pot executar la seva tasca en temps polinòmica en la mida de l'entrada simplement recorrent cada clàusula i consultant el vector de bits.

Problema 5

(a) Un arbre d'expansió d'un graf és un subgraf que és connex i acíclic, i que conté tots els vèrtexs del graf. L'arbre d'expansió és mínim si la suma dels pesos de les seves arestes és mínima entre tots els arbres d'expansió.

(b) $\boxed{\textbf{not } \mathit{usat}[v]}$ $\boxed{\mathit{Q.push(WEdge(p, pair< \textbf{int}, \textbf{int} >(v, w)))}}$

Solució de l'Examen Final EDA 20/6/2014

Proposta de solució al problema 1

Aquest problema ja va sortir al parcial; no repetim la solució que ja vam publicar.

Proposta de solució al problema 2

a) Primer fem una funció auxiliar que refà l'ABC el preodre del qual és el subvector $v[e,\ldots,d]$ (amb la precondició que $v[e,\ldots,d]$ és el preodre correcte d'algun ABC).

```
abc refer_i (const vector<Elem> &v, int e, int d) {
    if (d < e) return NULL;
    int i = e + 1;
    bool found = false;
    while (i ≤ d and not found) {
        found = (v[i] > v[e]);
        if (not found) ++i;
    }
    return new(v[e], refer_i (v, e + 1, i − 1), refer_i (v, i, d));
}
```

Amb aquesta auxiliar, el que volem és *refer_i* $(v,\ 0,\ v.size() - 1)$.[1]

b) Primer plantejem una funció auxiliar que refà un AVL l'inordre del qual és el subvector $v[e,\ldots,d]$ (amb la precondició que $v[e,\ldots,d]$ està ordenat).

```
abc munta_AVL(const vector<Elem> &v, int e, int d) {
    if (d < e) return NULL;
    int m = (e + d)/2;
    return new node(v[m], munta_AVL(v, e, m − 1), munta_AVL(v, m + 1, d);
}
```

Amb aquesta auxiliar, el que volem és *munta_AVL*$(v, 0, v.size() - 1)$.

c) Completem el codi:

```
bool es_AVL(abc T) {
    if (T == NULL) return true;
    else if (T−>fe == NULL or T−>fd = NULL) return (T−>alc ≤ 1);
    else {
        if (T−>fe−>alc − T−>fd−>alc > 1) return false;
        if (T−>fd−>alc − T−>fe−>alc > 1) return false;
        if (not es_AVL(T−>fe)) return false;
        if (not es_AVL(T−>fd)) return false;
        return true;
    }
}
```

[1] Aquesta solució té cost $\Theta(n^2)$ en el cas pitjor (p.ex. amb l'arbre xurro cap a l'esquerra). Hi ha una solució de cost $\Theta(n)$ que és bastant més difícil de trobar i que no s'exigia.

Proposta de solució al problema 3

a)

```
bool es_torneig (const Graf& G) {
    int n = G.size ();
    for (int u = 0; u < n; ++u) {
        if (G[u][u]) return false;
        for (int v = u+1; v < n; ++v) {
            if (G[u][v] == G[v][u]) return false;
    }   }
    return true;
}
```

b) Base: És clar que un graf torneig amb un vèrtex o dos vèrtexs té un camí Hamiltonià. Inducció: Suposem que tot graf torneig amb n vèrtexs té un camí Hamiltonià. Considerem un graf torneig G amb $n+1$ vèrtexs. Sigui u un vèrtex qualsevol de G. Llavors $G-u$ és un graf torneig de n vèrtexs i, per hipotesi d'inducció, té un camí Hamiltonià $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Si (u, v_1) és un arc de G, llavors $u, v_1, v_2, \ldots, v_n$ és un camí Hamiltonià de G. Sinó, (v_1, u) ha de ser un arc de G (perquè és torneig). Si (u, v_2) també és un arc de G, llavors $v_1, u, v_2, \ldots, v_n$ és un camí Hamiltonià de G. Sinó, (v_2, u) ha de ser un arc de G (perquè és torneig). Continuant així fins a considerar v_n, arribem a que si (u, v_n) no és un arc de G llavors (v_n, u) ho ha de ser (perquè és torneig), i llavors $v_1, \ldots, v_n, u$ és un camí Hamiltonià de G.

c)

```
list<int> cami (const Graf& G) {
    int n = G.size (); // suposarem n ≥ 2, altrament poseu ifo.
    list<int> L;
    if (G[0][1]) L = {0, 1}; else L = {1, 0};
    for (int u = 2; u < n; ++u) insereix (L, u, G);
    return L;
}

void insereix ( list<int>& L, int u, const Graf& G) {
    auto it1 = L.begin ();
    if (G[u][*it1 ]) { L.push_front (u); return; }
    auto it2 = it1 ; ++it2;
    while (it2 ≠ L.end()) {
        if (G[*it1 ][u] and G[u][*it2 ]) { L.insert (it2 , u); return; }
        ++it1; ++it2;
    }
    L.push_back(u);
}
```

d) El cost de *cami*() en el cas pitjor es dóna quan a cada iteració cal recórrer tota la llista a *insereix* (). Com que a la iteració i, la llista té i elements, el cost és proporcional a $\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$.

Proposta de solució al problema 4

El que ha volgut dir la Steffy és que el graf proposat és un contraexemple a l'afirmació que el vèrtex v^{MID} no és necessari per obtenir una reducció correcta de DHAM a UHAM. I té raó: si s'aplica aquesta transformació modificada al graf suggerit, el que queda és un graf no dirigit que conté un cicle Hamiltonià, p.ex. aquest:

$$e^{\mathrm{OUT}}, a^{\mathrm{IN}}, b^{\mathrm{OUT}}, b^{\mathrm{IN}}, c^{\mathrm{OUT}}, c^{\mathrm{IN}}, a^{\mathrm{OUT}}, d^{\mathrm{IN}}, d^{\mathrm{OUT}}, e^{\mathrm{IN}}$$

malgrat que el graf dirigit d'inici no en té cap.

Proposta de solució al problema 5

a) $\Theta(|V| \cdot |E|)$

b) La imprecisió en l'afirmació és que, si bé és veritat que l'algorisme de Bellman-Ford permet que el graf dirigit d'entrada tingui pesos negatius, el que no diu l'afirmació és que si el graf té algun cicle de pes negatiu accessible des del vèrtex de partida llavors l'algorisme no és capaç de trobar els camins de pes mínim (perquè, de fet, *no hi ha* pes mínim). Per tant, donat que el resultat d'assignar pes -1 a cada arc podria provocar cicles negatius, l'aplicació de Bellman-Ford no està justificada.

Solució de l'Examen Final EDA 16/1/2015

Proposta de solució al problema 1

a) Veurem que la suma és $O(n^4)$ i $\Omega(n^4)$. Primer, $\sum_{i=0}^{n} i^3 \leq n \cdot n^3 = n^4 = O(n^4)$. Segon, $\sum_{i=0}^{n} i^3 \geq \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^3 = \Omega(n^4)$. [Per ser més precisos: la desigualtat només és vàlida si n és parell. Però si n és senar llavors $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \sum_{i=0}^{n-1} i^3 + n^3 = \Omega((n-1)^4) + n^3 = \Omega(n^4)$. En qualsevol cas obtenim que $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \Omega(n^4)$.]

b) g creix més ràpid que f. Per justificar-ho veurem que $\lim_{n\to+\infty} f(n)/g(n) = 0$. Sigui $h(n) = \log_2(f(n)/g(n))$. Simple manipulació dóna $h(n) = \sqrt{\log n} - \log_2 n$ i per tant $\lim_{n\to+\infty} h(n) = -\infty$. Això implica que $\lim_{n\to+\infty} 2^{h(n)} = 0$ i per tant $\lim_{n\to+\infty} f(n)/g(n) = 0$. Pel criteri del límit en concloem que $f(n) = O(g(n))$ i $f(n) \neq \Omega(g(n))$. Per tant g creix més ràpid que f.

Proposta de solució al problema 2

a)

```
int menors(abc T, const Clau& x) {
      if (T == NULL) return 0;
      if (x < T->k) return menors(T->esq, x);
      else {
          int aux;
          if (T->esq == NULL) aux = 0; else aux = (T->esq)->size;
          return 1 + aux + menors(T -> dre, x);
      }
}
```

b)

```
// Precondició: T no conté k
void inserta (abc& T, const Clau& k, const Valor& v) {
    if (T == NULL) {
        T = new node;
        T->esq = T->dre = NULL;
        T->k = k; T->v = v;
        T->mida = 0;
    }
    else if (k < T->k) inserta(T->esq, k, v);
    else if (k > T->k) inserta(T->dre, k, v);
    else throw ERROR_PRECONDICIO;
    ++T->mida;
}
```

Proposta de solució al problema 3

a) Una possible solució és:

```
bool two_col_aux(const vector<vector<int>>& g, int u, vector<bool>& col,
                 vector<bool>& marked, bool is_red) {
```

```
    col [u] = is_red ;
    marked[u] = true;
    for (int v : g[u]) {
      if (not marked[v]) {
        if (not two_col_aux(g, v, col , marked, not is_red )) return false;
      }
      else if (col [v] == col[u]) return false;
    }
    return true;
  }
```

b) El problema de 3-colorabilitat és NP-complet. Per tant, si el que diu el fòrum fos cert, tindríem un algorisme polinòmic per a resoldre un problema NP-complet, i per tant P = NP. Com que a dia d'avui el problema de si P = NP continua obert (i, a més, la conjectura predominant és que és fals), el que diu el fòrum no és creïble.

Proposta de solució al problema 4

a) Algorisme de Bellman–Ford.

b) Posem $n = |V|$. L'algorisme calcula la distància mínima entre un vèrtex inicial v i la resta de vèrtexs. Es manté un vector *dist* amb el millor cost trobat fins al moment des de v fins a cada vèrtex x. Inicialment, tenim $dist[x] = \infty$ per a tot x, excepte que $dist[v] = 0$. Aquí ∞ denota un valor especial més gran que el cost de qualsevol camí. És útil usar-lo per simplificar el codi. La part principal de l'algorisme consisteix a "relaxar" tots els arcs $n - 1$ vegades. Relaxar un arc $x \xrightarrow{c} y$ significa fer $dist[y] = min(dist[y],\ dist[x] + c)$. Per relaxar tots els arcs, cal tractar tots els veïns de cada vèrtex, guardats en llistes d'adjacències. És obvi que els valors de *dist* no es poden incrementar a cap iteració. Si en una iteració no es produeix cap canvi, l'algorisme es pot aturar. Aquesta és una millora en general, encara que en el cas pitjor cal seguir fent $n - 1$ iteracions.

c) Fins i tot amb la millora, el cost en el cas pitjor és $\Theta(|V|(|V| + |E|))$, perquè cada iteració costa $\Theta(|V| + |E|)$. [nota: algunes fonts diuen $\Theta(|V||E|)$, però això està assumint que $|E| = \Omega(|V|)$, la qual cosa no sempre és certa].

d) Si en alguna de les $|V| - 1$ iteracions no ha millorat cap distància, segur que no hi ha cap cicle negatiu. Altrament, només cal relaxar una vegada més. Hi ha algun cicle negatiu si i només si alguna distància millora.

Solució de l'Examen Final EDA 12/06/2015

Proposta de solució al problema 1

a) Aquest ja va sortir al parcial i la solució és la mateixa.
b) L'algorisme serveix per comprimir dades i per tant la correcta és la tercera.
c) El problema és en efecte NP-complet i per tant no pot existir cap algorisme de cost polinòmic que el resolgui a menys que P = NP; per tant la resposta correcta és la segona.

Proposta de solució al problema 2

a)

```
Arbre interseccio (Arbre a1, Arbre a2) {
    if (not a1 or not a2) return nullptr;
    Node* p = new Node;
    p->esq = interseccio (a1->esq, a2->esq);
    p->dre = interseccio (a1->dre, a2->dre);
    return p;
}
```

b) El cas pitjor és $\Theta(n1 + n2)$ (i es dóna quan els dos arbres són iguals, p.ex.).

Proposta de solució al problema 3

```
void backtrack(int k) {
  if (k == n) { solution_found = true; return; }
  for (int j = 0; j < n and not solution_found; ++j) {
    int cell_col = board[k][j].color;
    if (not onion_in_col[j] and not onion_in_region[ cell_col ]
      and not onion_in_neighborhood(k, j)) {
      col[k] = j;
      board[k][j].has_onion = true;
      onion_in_col[j] = true;
      onion_in_region[ cell_col ] = true;
      backtrack(k+1);
      if (not solution_found) {
        onion_in_region[ cell_col ] = false;
        onion_in_col[j] = false;
        board[k][j].has_onion = false;
      }
} } }
```

Proposta de solució al problema 4

Les EDs quedarien així:

```
struct Usuari {
    ...                               // dades personals
    string nom;                       // no hi ha dos usuaris amb el mateix nom
    unordered_set<string> seguits;    // conjunt dels noms dels usuaris seguits
    list<Piulada> piulades;           // piulades de l'usuari en ordre invers
};
```

```
struct Xarxa {
    unordered_map<string, Usuari> usuaris;
};
```

El tipus *Usuari* és una extensió del donat; també podríem haver creat un tipus nou que es digui *UsuariExtes*. Aquesta diferència és menor.

Mantindrem tots els usuaris en un diccionari on les claus són els *nom*s d'usuari i les dades són les tuples dels *Usuari*s associats. D'aquesta forma, podrem accedir eficientment a totes les dades dels usuaris a través del seu nom. Com que no ens importa l'ordre, podem utilitzar una taula de hash per implementar el diccionari.

Per guardar les relacions de seguiment, extendrem la tupla *Usuari* amb un conjunt de strings que identifiquen els usuaris seguits. Com que no ens importa l'ordre, podem utilitzar una taula de hash per implementar el conjunt. Les operacions de *afegir_seguiment* (x, $u1$, $u2$) i *treure_seguiment* (x, $u1$, $u2$) s'implementen cercant $u1$ al diccionaris *usuaris* i inserint/esborrant $u2$ al conjunt *seguits* corresponent. El temps d'aquestes operacions és doncs constant en mitjana.

Per guardar les piulades, també extendrem la tupla *Usuari* amb una llista de piulades, aquesta llista guardarà les piulades en ordre cronològic invers. L'operació *piular_missatge* (x, u, m) ha d'afegir el missatge m al davant de la llista de piulades de l'usuari u trobat al diccionari. El temps d'aquesta operació és doncs constant en mitjana.

Per implementar *mes_recents* (x,u,k) cal trobar primer la llista L de seguits de l'usuari u amb el diccionari. Després, conceptualment, cal concatenar totes les llistes de piulades dels usuaris en L, ordenar-les per hora d'emissió inversa i quedar-se amb les k primeres.

Però això es pot fer més eficient amb una cua de prioritats: Partint d'una cua de prioritats buida, s'insereix el primer missatge (el més recent doncs) de cada usuari seguit en L. Després, es repeteix k vegades el procés següent:

- S'extreu la piulada més recent de la cua de prioritats (i s'afegeix al final de la llista de piulades retornades),
- s'afegeix a la cua de prioritats el següent missatge del mateix usuari que el que s'ha tret.

Si u segueix m usuaris i $n = \max\{k, m\}$, el cost d'aquest procés és $O(n \log n)$, que sembla prou eficient donat que k és petit i n no és massa gran.

Solució de l'Examen Final EDA 07/01/2016

Proposta de solució al problema 1

(a) Les respostes són:

	Cert	**Fals**	**Obert**
SOR és a la classe P	X		
SOR és a la classe NP	X		
SOR és NP-difícil			X
SAT és a la classe P			X
SAT és a la classe NP	X		
SAT és NP-difícil	X		
Es pot reduir polinòmicament SOR a COL	X		
Es pot reduir polinòmicament COL a SOR			X
No es pot reduir polinòmicament SAT a SOR			X
Es pot reduir polinòmicament COL a SOR, i no es pot reduir polinòmicament SAT a SOR		X	

(b) Si x és l'element $v[i]$, aleshores l'algorisme té cost $\Theta(i)$. Per tant el cost mig és:

$\sum_{0\le i<n} \text{Prob}(x=v[i]) \cdot \text{Cost}(x=v[i]) =$

$\sum_{0\le i<n} \text{Prob}(x=v[i]) \cdot \Theta(i) =$

$\Theta(\sum_{0\le i<n} \text{Prob}(x=v[i]) \cdot i) =$

$\Theta(\sum_{0\le i<n} \frac{i}{n}) =$

$\Theta(\frac{1}{n}) \cdot \Theta(\sum_{0\le i<n} i) =$

$\Theta(\frac{1}{n}) \cdot \Theta(n^2) =$

$\Theta(n)$

(c) Donat un graf dirigit $G=(V,E)$ amb pesos, l'algorisme de Floyd-Warshall calcula a la vegada el cost del camí mínim de tot vèrtex $u \in V$ a tot vèrtex $v \in V$. En el cas pitjor, el seu cost en temps és $\Theta(|V|^3)$, i en espai $\Theta(|V|^2)$.

Proposta de solució al problema 2

(a) 42 42 23 12 12 12

(b) A cada iteració escriu l'element més petit de $V[0..i]$.

(c) El cost de la primera iteració és constant. Respecte a la resta d'iteracions, el cost està dominat per la inserció en S. Si $i > 0$, a la i-èsima iteració, en què S té inicialment i elements, en el cas pitjor aquesta inserció té cost $\Theta(\log i)$. Si a cada iteració es dóna aquest cost, aleshores el cost total és:

$$\Theta(1) + \sum_{i=1}^{n-1} \Theta(\log i) = \Theta(1) + \Theta(n \log n) = \Theta(n \log n),$$

donat que de la fórmula d'Stirling tenim que $\sum_{i=1}^{n-1} \Theta(\log i) = \Theta(n \log n)$.

(d) En cas que el vector tingui elements repetits, el codi escriu el mateix.

(e) Una possible solució:

```
int min = V[0];
for (int i = 1; i < n; ++i) {
    if (V[i] < min)
      min = V[i];
    cout << min << ' ';
}
```

Cada iteració del bucle només requereix operacions de cost constant. Com que es fan $n - 1$ voltes, el cost del codi en funció de n és $\Theta(n)$, que és estrictament millor que $\Theta(n \log n)$.

Proposta de solució al problema 3

Una possible solució al problema:

```
void top_sorts_rec (int k, const Graph& G, vector<int>& sol, vector<int>& indeg) {
  int n = sol.size();
  if (k == n)
    print_solution(sol);
  else
    for (int x = 0; x < n; ++x)
      if (indeg[x] == 0) {
        indeg[x] = −1;
        for (int y : G[x]) −−indeg[y];
        sol[k] = x;
        top_sorts_rec(k+1, G, sol, indeg);
        for (int y: G[x]) ++indeg[y];
        indeg[x] = 0;
      }
}

void top_sorts (const Graph& G, vector<int>& sol) {
  int n = G.size();
  vector<int> indeg(n, 0);
  for (int x = 0; x < n; ++x)
    for (int y: G[x])
      ++indeg[y];
```

```
    top_sorts_rec (0, G, sol , indeg );
}
```

Proposta de solució al problema 4

(a) Omplim la matriu de clausura, diguem-ne *Gstar*, de la manera següent. Des de cada vèrtex u del graf es fa una DFS o una BFS, usant $Gstar[u]$ com a vector de marques booleanes. D'aquesta manera, després de processar el vèrtex u tenim marcats a $Gstar[u]$ aquells vèrtexs als quals es pot arribar des de u. Cal fer doncs n recorreguts, cadascun dels quals costa en el cas pitjor $\Theta(n^2)$. En total el cost en el cas pitjor és $\Theta(n^3)$.

(b) Per inducció. Suposem que $k = 0$. Aleshores $(I+G)^k = I$. El resultat és cert perquè un camí buit només pot connectar un vèrtex amb sí mateix.

Considerem ara el cas que $k > 0$. Tenim que:

$$(I+G)^k_{uv} = \sum_{0 \le w < n} (I+G)^{k-1}_{uw} \cdot (I+G)_{wv}$$

Suposem que hi ha un camí de u a v amb com a molt k arestes. Si aquest camí té com a molt $k-1$ arestes, aleshores per hipòtesi d'inducció $(I+G)^{k-1}_{uv} > 0$; com que a més $(I+G)_{vv} > 0$, necessàriament tenim $(I+G)^k_{uv} > 0$. Si en canvi aquest camí té exactament k arestes, aleshores hi ha un vèrtex intermig w tal que hi ha un camí de u a w amb $k-1$ arestes, i una aresta de w a v. De nou per hipòtesi d'inducció, tenim $(I+G)^{k-1}_{uw} > 0$, i $(I+G)_{wv} > 0$. Per tant, $(I+G)^k_{uv} > 0$ altra vegada.

Suposem ara que no hi ha camí de u a v amb com a molt k arestes. En particular, per tot w tal que $0 \le w < n$, o bé no hi ha camí de u a w amb com a molt $k-1$ arestes, o bé no hi ha aresta de w a v; per tant, $(I+G)^{k-1}_{uw} = 0$ o $(I+G)_{wv} = 0$. De forma que $(I+G)^k_{uv} = 0$.

(c) Hi ha un camí del graf de u a v si i només si hi ha un camí del graf de u a v amb com a molt $n-1$ arestes. Però per l'apartat b), hi ha un camí en el graf de u a v amb com a molt $n-1$ arestes si i només si $(I+G)^{n-1}_{uv} \neq 0$. Per tant, un algorisme consisteix en calcular $(I+G)^{n-1}$ combinant l'algorisme d'exponenciació ràpida amb l'algorisme d'Strassen, i canviar en la matriu resultant tots els coeficients diferents de 0 per 1. El cost és el de $\Theta(\log n)$ multiplicacions de matrius, cadascuna de les quals costa $\Theta(n^{\log_2 7})$ (ja que les operacions aritmètiques amb enters tenen cost $\Theta(1)$). Així doncs, el cost total és $\Theta(n^{\log_2 7} \log n)$, que és millor que $\Theta(n^3)$.

Solució de l'Examen Final EDA 08/06/2016

Proposta de solució al problema 1

(a) El teorema mestre de resolució de recurrències divisores afirma que si tenim una recurrència de la forma $T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^k)$ amb $a > 0$, $b > 1$ i $k \geq 0$, llavors, fent $\alpha = \log_b a$,

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } \alpha < k, \\ \Theta(n^k \log n) & \text{si } \alpha = k, \\ \Theta(n^\alpha) & \text{si } \alpha > k. \end{cases}$$

(b) 2

(c) Les *priority_queue* <*T*> s'implementen amb max-heaps. Si existís una funció

T& *top*();

aleshores un usuari de la classe podria modificar l'arrel del heap i trencar l'invariant que tot node és més gran o igual que els seus fills.

Proposta de solució al problema 2

(a) Sí

(b) No (les fulles han de ser negres)

(c) No (els fills d'un node vermell han de ser negres)

(d) Sí

(e) No (cal que sigui un arbre binari de cerca)

(f) No (el nombre de nodes negres en un camí de l'arrel a una fulla ha de ser constant)

Proposta de solució al problema 3

(a) Anomenem $C(n)$ el cost de l'algorisme en el cas pitjor en funció de n. Llavors:

- Si $s \geq \frac{1}{2}$: $C(n) = C(sn) + \Theta(1)$
- Si $s \leq \frac{1}{2}$: $C(n) = C((1-s)n) + \Theta(1)$

(b) El cas pitjor es dóna, per exemple:

- si $s \geq \frac{1}{2}$, quan $x < v[l]$.
- si $s \leq \frac{1}{2}$, quan $x > v[r]$.

(c) Podem resoldre les recurrències separadament, o bé observar que:

$$C(n) = C(\max(s, 1-s)n) + \Theta(1) = C\left(\frac{n}{\frac{1}{\max(s,1-s)}}\right) + \Theta(1)$$

Com que $0 < s < 1$, tenim $0 < \max(s, 1-s) < 1$, i per tant $\frac{1}{\max(s,1-s)} > 1$. Aplicant el teorema mestre de recurrències divisores tenim que $\alpha = k = 0$, i per tant el cost és $\Theta(\log n)$ (independentment de s).

Proposta de solució al problema 4

(a) Una possible solució:

```
#include <limits>

const int oo = numeric_limits<int>::max();

int cost_minim(const vector<vector<pair<int,int>>>& G, int x, int y) {
  vector<int> cost(G.size (), +oo);
  cost [x] = 0;
  deque<int> dq;
  dq.push_back(x);
  while (not dq.empty()) {
    int u = dq.front ();
    dq.pop_front ();
    if (u == y) return cost [y];
    for (auto p : G[u]) {
      int v = p. first ;
      int w = p.second;
      if ( cost [v] > cost[u] + w) {
        cost [v] = cost [u] + w;
        if (w == 0) dq.push_front (v);
        else        dq.push_back(v);
      } } }
  return −1;
}
```

(b) Per una banda hi ha un cost proporcional al nombre de vèrtexs (inicialització del vector de costos). Per una altra, el cost del bucle és proporcional al nombre d'arestes que se segueixen (sent doncs el cas pitjor quan es recorren totes les arestes). En suma, el cost és $\Theta(|V| + |E|)$.

(c) $\Theta((|V| + |E|) \log |V|)$

Proposta de solució al problema 5

(a) Una possible solució:

```
bool ok(const vector<int>& s, const set<pair<int,int>>& D) {
  for (auto d : D)
    if (s[d. first ] == s[d.second])
      return false;
  return true;
}

bool te_solucio (int k, vector<int>& s, const ent_DESIGUALTATS& e) {
  if (k == e.n) return ok(s, e.D);
  for (int v = e.l; v ≤ e.u; ++v) {
    s[k] = v;
    if ( te_solucio (k+1, s, e)) return true;
  }
```

```
    return false;
  }

  bool te_solucio(const ent_DESIGUALTATS& e) {
    vector<int> s(e.n);
    return te_solucio(0, s, e);
  }
```

(b) Quan no hi ha solució, l'algorisme considera cadascuna de les $(u - l + 1)^n$ possibles assignacions de les n variables als valors en $[l, u]$. Per cadascuna d'aquestes assignacions, es realitza un treball amb cost $\Omega(1)$. Així doncs, el cost en el cas pitjor és $\Omega((u - l + 1)^n)$.

(c) Una possible solució:

```
  ent_DESIGUALTATS reduccio(const ent_COLOREJAT& ec) {
    ent_DESIGUALTATS ed;
    ed.l = 1;
    ed.u = ec.c;
    ed.n = ec.G.size();
    for (int u = 0; u < ec.G.size(); ++u)
      for (int v : ec.G[u])
        if (u < v)
          ed.D.insert({u, v});
    return ed;
  }
```

(d) No. Per l'apartat anterior tenim que, com que COLOREJAT és NP-difícil, aleshores DESIGUALTATS també ho és. Així doncs, si hi hagués un algorisme polinòmic per resoldre DESIGUALTATS, tindríem $P = NP$ i hauríem resolt un problema llargament obert en informàtica teòrica.

Solució de l'Examen Final EDA 12/01/2017

Proposta de solució al problema 1

(a) Un graf de n vèrtexs té $O(n^2)$ arestes.

(b) Un graf connex de n vèrtexs té $\Omega(n)$ arestes.

(c) Un graf complet de n vèrtexs té $\Omega(n^2)$ arestes.

(d) Un min-heap de n vèrtexs té $\Theta(n)$ fulles.

(e) Un arbre binari de cerca de n vèrtexs té alçada $\Omega(\log n)$.

(f) Un arbre binari de cerca de n vèrtexs té alçada $O(n)$.

(g) Un arbre AVL de n vèrtexs té alçada $\Omega(\log n)$.

(h) Un arbre AVL de n vèrtexs té alçada $O(\log n)$.

Proposta de solució al problema 2

(a) La cerca en amplada.

(b) L'algorisme de Dijkstra.

(c) L'algorisme de Bellman-Ford.

(d) Cal que no hi hagi cap cicle amb pes negatiu al graf.

(e) Per inducció sobre el nombre d'arcs del camí.

- **Cas base:** Si el camí no té cap arc, el vèrtex de sortida u és el mateix que el d'arribada v. En aquest cas tenim doncs que $\omega_\pi(c) = \omega(c) = 0$. Com que $\omega(c) - \pi(u) + \pi(v) = 0$, es compleix el que volíem.
- **Cas inductiu:** Suposem que el camí té k arcs, és a dir, és de la forma $(u_0, u_1, \ldots, u_k)$, on $u_0 = u$ i $u_k = v$. Com que $u_1, \ldots, u_k$ és un camí de u_1 a u_k amb $k-1$ arcs, podem aplicar la hipòtesi d'inducció. Per tant $\omega_\pi(u_1, \ldots, u_k) = \omega(u_1, \ldots, u_k) - \pi(u_1) + \pi(u_k)$. Però

$$
\begin{aligned}
\omega_\pi(u_0, \ldots, u_k) &= \omega_\pi(u_0, u_1) + \omega_\pi(u_1, \ldots, u_k) \\
&= \omega_\pi(u_0, u_1) + \omega(u_1, \ldots, u_k) - \pi(u_1) + \pi(u_k) \\
&= \omega(u_0, u_1) - \pi(u_0) + \pi(u_1) + \omega(u_1, \ldots, u_k) - \pi(u_1) + \pi(u_k) \\
&= \omega(u_0, u_1) - \pi(u_0) + \omega(u_1, \ldots, u_k) + \pi(u_k) \\
&= \omega(u_0, \ldots, u_k) - \pi(u_0) + \pi(u_k)
\end{aligned}
$$

(f) Si π és un potencial, aleshores els pesos reduïts ω_π són no negatius. Per tant, podem aplicar l'algorisme de Dijkstra per calcular les distàncies amb pesos ω_π des de s a tots els vèrtexs. Llavors podem calcular les distàncies amb pesos ω usant la següent observació: si $u, v \in V$ i c és el camí mínim amb pesos ω de u a v (que existeix per hipòtesi), aleshores c és el camí mínim amb pesos ω_π de u a v i $\omega(c) = \omega_\pi(c) + \pi(u) - \pi(v)$.

Proposta de solució al problema 3

(a) Si M és una matriu $n \times n$, la funció *matrix mystery*(**const** *matrix*& M) calcula $M^{\sum_{i=1}^{n} i}$, o equivalentment, $M^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

(b) El producte de dues matrius $n \times n$ que calcula la funció *aux* costa temps $\Theta(n^3)$. Com que es fan $\Theta(n)$ iteracions, i en cadascuna es fan dos productes de matrius amb cost $\Theta(n^3)$, en total el cost és $\Theta(n^4)$.

(c) Una possible solució:

```
matrix exp(const matrix& M, int k) {
  if (k == 1) return M;
  matrix P = exp(M, k/2);
  if (k % 2 == 0) return aux(P, P);
  else            return aux(aux(P, P), M);
}

matrix mystery(const matrix& M) {
  int n = M.size ();
  return exp(M, n*(n+1)/2);
}
```

L'exponenciació ràpida fa $\Theta(\log(n(n+1)/2)) = \Theta(\log(n))$ productes de matrius, cadascun dels quals costa temps $\Theta(n^3)$. En total, el cost és $\Theta(n^3 \log n)$.

Proposta de solució al problema 4

(a) El testimoni és p.

(b) El codi del verificador es troba entre les línies 4 i 16.

(c) Una possible solució:

```
bool ham2_rec(const vector<vector<int>>& G, int k, int u, vector<int>& next) {
  int n = G.size ();
  if (k == n)
    return find (G[u].begin (), G[u].end (), 0) ≠ G[u].end();

  for (int v : G[u])
    if (next[v] == −1) {
      next[u] = v;
      if (ham2_rec(G, k+1, v, next)) return true;
      next[u] = −1;
    }
  return false;
}

bool ham2(const vector<vector<int>>& G) {
  int n = G.size ();
  vector<int> next(n, −1);
  return ham2_rec(G, 1, 0, next);
}
```

(d) Es pot reemplaçar la crida

$$\textbf{return}\ \mathit{find}\,(G[u].\mathit{begin}\,(),\ \ G[u].\mathit{end}\,(),\ \ 0)\ \neq G[u].\mathit{end}\,();$$

per

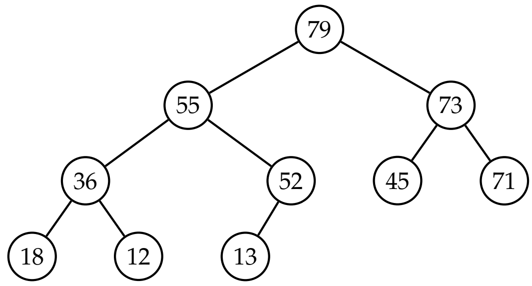
$$\textbf{return not}\ G[u].\mathit{empty}()\ \ \textbf{and}\ G[u][0] == 0;$$

(e) Si G és no connex llavors no pot ser Hamiltonià. En aquest cas només cal que la funció retorni **false**.

Solució de l'Examen Final EDA 09/06/2017

Proposta de solució al problema 1

(a) El max-heap resultant és:



(b) Per veure que P $\subseteq$ co-NP cal veure que si L és un problema de la classe P, aleshores el seu complementari $\overline{L}$ pertany a NP. Però si L és de P aleshores hi ha un algorisme polinòmic determinista A que decideix L. Considerem ara l'algorisme $\overline{A}$ que fa el mateix que A, però retorna 1 quan A retorna 0, i retorna 1 quan A retorna 0. Llavors $\overline{A}$ decideix $\overline{L}$, i com que $\overline{A}$ triga temps polinòmic, tenim $\overline{L} \in \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.

(c) El cost $C(n)$ de f en funció de n segueix la recurrència

$$C(n) = 3C(n/3) + \Theta(1)$$

ja que hi ha 3 crides recursives sobre subvectors de mida $n/3$ i addicionalment es fan operacions de cost constant. Pel Teorema Mestre de Recurrències Divisores, la solució a la recurrència és $C(n) = \Theta(n)$.

(d) No és certa. Per exemple, $n^{2n} = (n^n)^2$ creix asimptòticament més ràpid que n^n.

Proposta de solució al problema 2

Cal usar un diccionari amb claus enteres implementat amb una taula de hash, i un vector inicialment buit que contindrà la intersecció.

En primer lloc fem una passada sobre A i afegim tots els seus elements al diccionari. Es fan n insercions al diccionari, cadascuna de les quals triga temps $O(1)$ en mitjana. De forma que la primera passada costa $O(n)$ en mitjana.

En segon lloc fem una passada sobre B i, per a cadascun dels seus elements, mirem si ja pertany al diccionari. En cas afirmatiu, l'element s'afegeix al vector intersecció fent un *push_back*. En cas contrari no es fa res. D'aquesta manera es fan m consultes al diccionari, cadascuna de les quals triga temps $O(1)$ en mitjana. Com que cada *push_back* triga temps constant, el cost de la segona passada és $O(m)$ en mitjana.

En total, el cost és $O(n+m)$ en mitjana.

Proposta de solució al problema 3

(a) La taula plena és:

nivell :

A	B	C	D	E	F	G	H
0	1	1	1	4	2	0	3

profunditat : $\boxed{4}$

(b) La taula plena és:

	(1)	(2)	(3)	(4)
CERT		X	X	
FALS	X			X

(c) Una possible solució:

```
vector<int> levels(const vector<vector<int>>& G) {
  int n = G.size ();
  vector<int> lvl(n, −1), pred(n, 0);

  for (int u = 0; u < n; ++u)
    for (int v : G[u])
      ++pred[v];

  queue<int> Q;
  for (int u = 0; u < n; ++u)
    if (pred[u] == 0) {
      Q.push(u);
      lvl [u] = 0;
    }

  while (not Q.empty()) {
    int u = Q.front (); Q.pop();
    for (int v : G[u]) {
      −−pred[v];
      lvl [v] = max(lvl[v], lvl [u]+1);
      if (pred[v] == 0) Q.push(v);
   } }
  return lvl ;
}
```

La creació dels vectors té cost $\Theta(n)$. El primer bucle té cost $\Theta(n+m)$. El segon bucle té cost $\Theta(n)$. El tercer bucle té cost $\Theta(n+m)$. En total el cost és $\Theta(n+m)$.

Proposta de solució al problema 4

```
void write(const vector<int>& p, int n) {
  for (int k = 0; k < n; ++k) cout << " " << p[k];
  cout << endl;
}

void generate(int k, int n, vector<int>& p, vector<bool>& used) {
      if (k == n) write(p, n);
      else {
        for (int i = 0; i < n; ++i)
          if (not used[i] and k ≠ i) {
            used[i] = true;
            p[k] = i;
            generate(k+1, n, p, used);
            used[i] = false;
```

```
        }
      }
};

void generate_all (int n) {
  vector<int> p(n);
  vector<bool> used(n, false);
  generate (0, n, p, used);
}
```