

# ECN 6338 Cours 6

## Approximation de fonctions

William McCausland

2025-02-18

# Survol du cours 6

## Approximations locales, basées sur les dérivées en un seul point

- ▶ Approximation de Taylor
- ▶ Approximation de Padé

## Expansions basées sur les évaluations sur une grille de points

- ▶ Approximation linéaire par morceaux
- ▶ Approximation de Bernstein
- ▶ Approximation spline cubique d'Hermite

## Expansions basées sur les projections

- ▶ Suites de polynômes orthogonaux

## L'approximation (locale) de Taylor

- ▶ L'approximation d'une fonction  $f(\cdot)$  est autour d'un point  $x_0$ .
- ▶ Elle utilise la valeur  $f(x_0)$  et les  $n$  premières dérivées  $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ .
- ▶ L'approximation est

$$\hat{f}(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0).$$

- ▶ Les valeurs de  $\hat{f}$  et de ses  $n$  premières dérivées coïncident avec celles de  $f$  au point  $x_0$ .
- ▶ Peu importe l'ordre  $n$ , l'approximation est locale : il existe une fonction  $h_n(x)$  telle que

$$f(x) - \hat{f}(x) = h_n(x - x_0) \cdot (x - x_0)^n \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} h_n(x) = 0.$$

# L'approximation (locale) Padé

- ▶ L'approximation Padé  $\hat{f}$  de  $f$ , comme celle de Taylor,
  - ▶ utilise la valeur de  $f$  et de ses premières  $n$  dérivées à  $x_0$ ,
  - ▶ concorde avec  $f$  sur ces valeurs,
  - ▶ a  $n + 1$  coefficients libres.
- ▶ L'approximation est une fonction rationnelle, un ratio de polynômes :

$$f(x) \approx r(x) \equiv \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1(x - x_0) + \dots + p_m(x - x_0)^m}{1 + q_1(x - x_0) + \dots + q_d(x - x_0)^d},$$

où  $m + d = n$  et souvent  $m = d$  ou  $m = d + 1$ .

- ▶ La condition  $f^i(x_0) = r^i(x_0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m + n$  s'exprime aussi comme

$$p^i(x) - (f \cdot q)^i(x) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m + d,$$

$n + 1$  équations pour trouver  $n + 1 = (m + 1) + d$  coefficients.

# Notes sur l'approximation Padé

- ▶ L'approximation est souvent meilleure que l'approximation de Taylor en pratique.
- ▶ Il convient de prêter attention aux zéros de  $q(x)$  où l'approximation n'est pas bien définie.

## Calcul de l'approximation Padé (2,1) de $e^x$ autour de $x = 0$

- L'approximation  $r(x)$  est

$$r(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2}{1 + q_1x}.$$

- Les coefficients  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  et  $q_1$  sont donnés par

$$\left[ (p_0 + p_1x + p_2x^2) - e^x(1 + q_1x) \right]_{x=0} = p_0 - 1 = 0,$$

$$\left[ (p_1 + 2p_2x) - e^x(1 + q_1x) - e^x q_1 \right]_{x=0} = p_1 - 1 - q_1 = 0,$$

$$\left[ 2p_2 - e^x(1 + q_1x) - 2e^x q_1 \right]_{x=0} = 2p_2 - 1 - 2q_1 = 0,$$

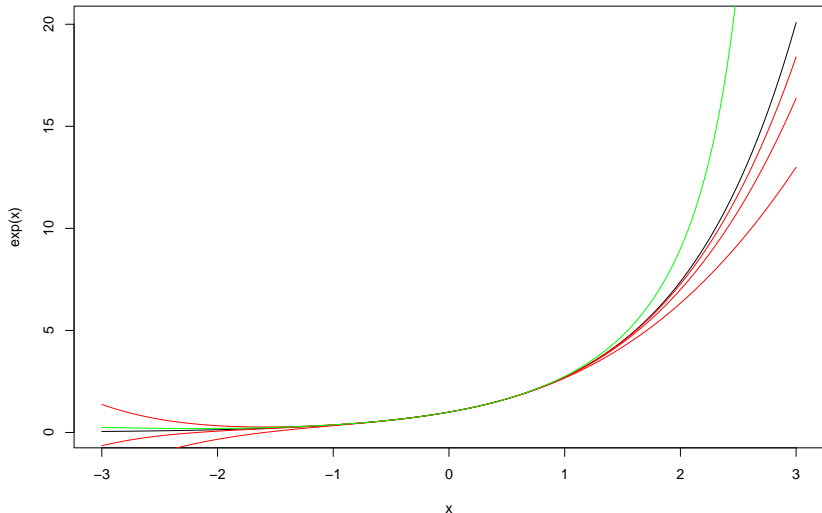
$$\left[ -e^x(1 + q_1x) - 3e^x q_1 \right]_{x=0} = -1 - 3q_1 = 0.$$

- La première équation donne  $p_0 = 1$ ; la dernière,  $q_1 = -\frac{1}{3}$ .
- Ensuite, la deuxième équation donne  $p_1 = 1 + q_1 = \frac{2}{3}$ ; la troisième,  $p_2 = \frac{1}{2} + q_1 = \frac{1}{6}$ .

## Exemple I, Taylor et Padé, $f(x) = e^x$ , $x_0 = 0$ .

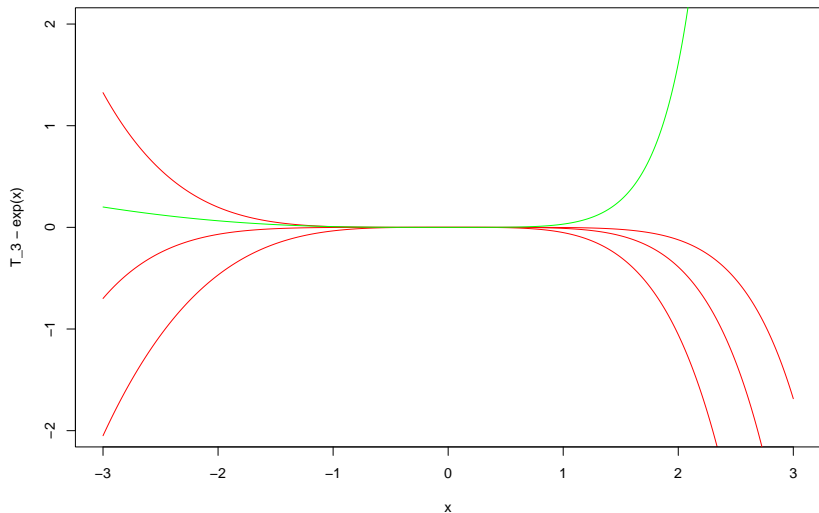
Approx. de Taylor (ordres 3, 4, 5, rouge), de Padé ((2,1), vert) :

```
source('Taylor_Pade_exp.R')
```



## Exemple I, erreurs d'approximation

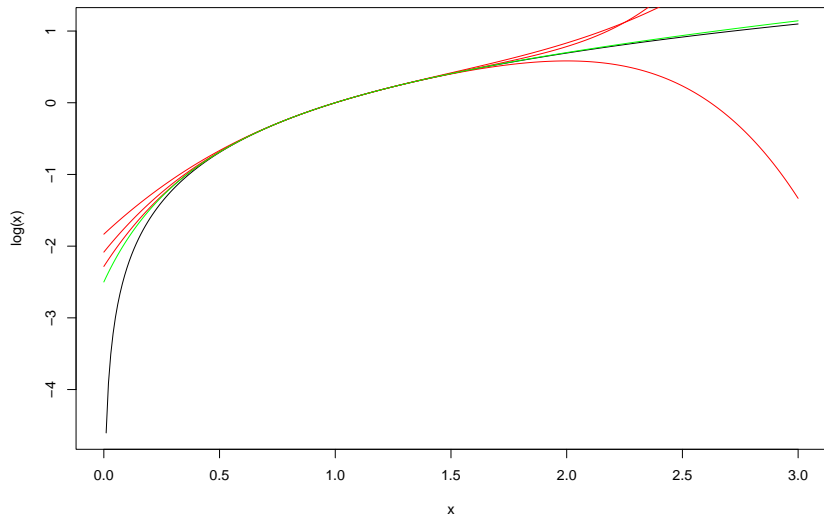
```
source('Taylor_Pade_exp_error.R')
```





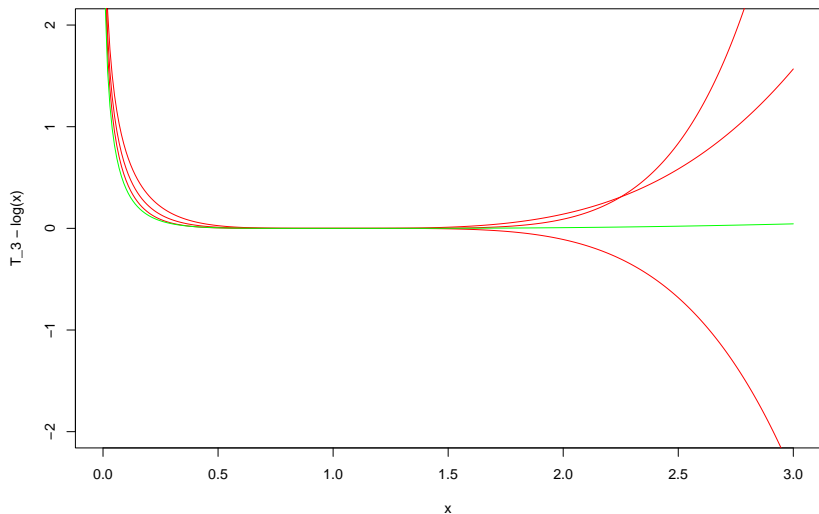
Exemple II, Taylor et Padé,  $f(x) = \log x$ ,  $x_0 = 1$ .

```
source('Taylor_Pade_log.R')
```



## Exemple II, erreurs d'approximation

```
source('Taylor_Pade_log_error.R')
```



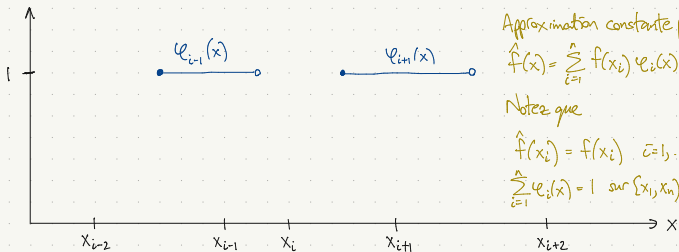
# Les approximations basées sur les évaluations sur une grille

- ▶ Abordons maintenant les expansions basées sur les évaluations sur une grille :
  - ▶ approximation constante par morceaux
  - ▶ approximation linéaire par morceaux
  - ▶ approximation de Bernstein (pas une interpolation)
  - ▶ approximation par spline cubique d'hermite
- ▶ Les trois premiers utilisent les évaluations  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  sur une grille  $x_1, \dots, x_n$  et les approximations  $\hat{f}(x)$  sur  $[x_1, x_n]$  prennent la forme

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \phi_i(x).$$

- ▶ Deux propriétés possibles :
  - ▶ partition d'unité :  $\sum_{i=1} \phi_i(x) = 1$  pour  $x \in [x_1, x_n]$
  - ▶ interpolation :  $\hat{f}(x_i) = f(x_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

# Approx. constante par morceaux et linéaire par morceaux



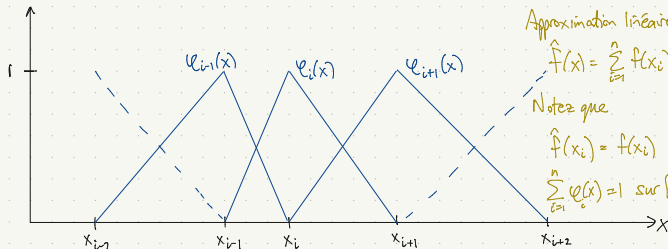
Approximation constante par morceaux

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \varphi_i(x)$$

Notiez que

$$\hat{f}(x_i) = f(x_i) \quad i=1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1 \text{ sur } [x_1, x_n], \hat{f} \text{ discontinue}$$



Approximation linéaire par morceaux

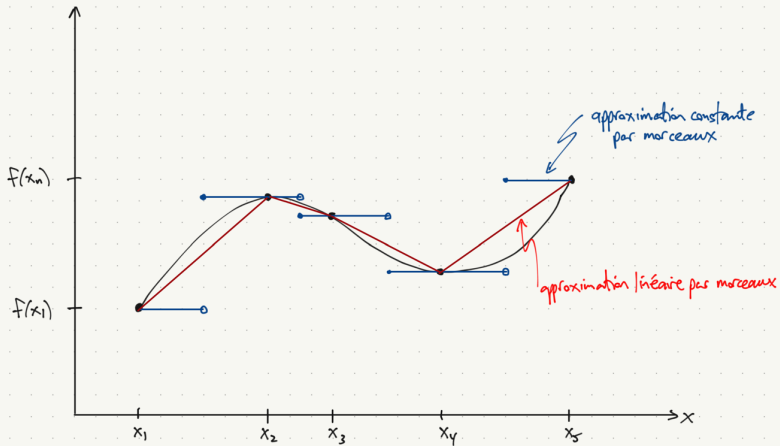
$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \varphi_i(x)$$

Notiez que

$$\hat{f}(x_i) = f(x_i) \quad i=1, \dots, n$$

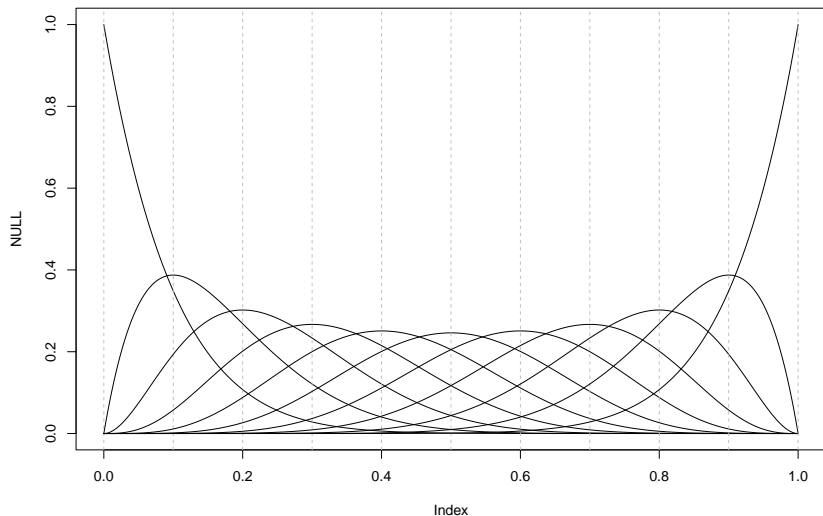
$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1 \text{ sur } [x_1, x_n], \hat{f} \in C^1$$

# Approximations par morceaux



# Polynômes de Bernstein d'ordre $n = 10$

```
source('Bernstein.R')
```



# Approximation de Bernstein

- ▶ Approximation d'une fonction  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .
- ▶ On normalise à  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(x) \equiv g(a + x(b - a))$ .
- ▶ L'approximation d'ordre  $n$  utilise les évaluations de  $f$  sur une grille  $(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ .
- ▶ L'approximation est

$$\hat{f}_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) b_{i,n}(x),$$

où  $b_{i,n}$  est le  $i$ -ième polynôme de Bernstein de degré  $n$  :

$$b_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

- ▶ Convergence uniforme :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - \hat{f}_n(x)| = 0$ .
- ▶  $\hat{f}$  n'est pas une interpolation de  $f$  :  $\hat{f}(\frac{i}{n}) \neq f(\frac{i}{n})$  en général.

## Autres notes sur l'approximation de Bernstein

- ▶ La convergence est lente, mais les dérivées existantes convergent également.
- ▶  $(n+1)b_{i,n}(x)$  est la densité  $\text{Beta}(i+1, n-i+1)$  sur  $[0, 1]$ .
- ▶ Pour  $\pi_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $\sum_{i=0}^n \pi_i = 1$ , la fonction suivante est une densité, un mélange de densités Beta :

$$g(x) = \sum_{i=0}^n \pi_i b_{i,n}(x).$$

- ▶ Soit  $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ , la fonction de répartition, un polynôme d'ordre  $n+1$ .
- ▶ Pour une fonction de répartition paramétrique  $F(x)$  sur  $(-\infty, \infty)$ ,  $H(x) = G(F(x))$  est une autre fonction de répartition sur  $(-\infty, \infty)$ .
- ▶ La densité est  $h(x) = g(F(x))f(x)$ .
- ▶ Spécifier  $F$  et  $G$  est une façon de spécifier une loi non-paramétrique, comme une perturbation de  $F(x)$ .

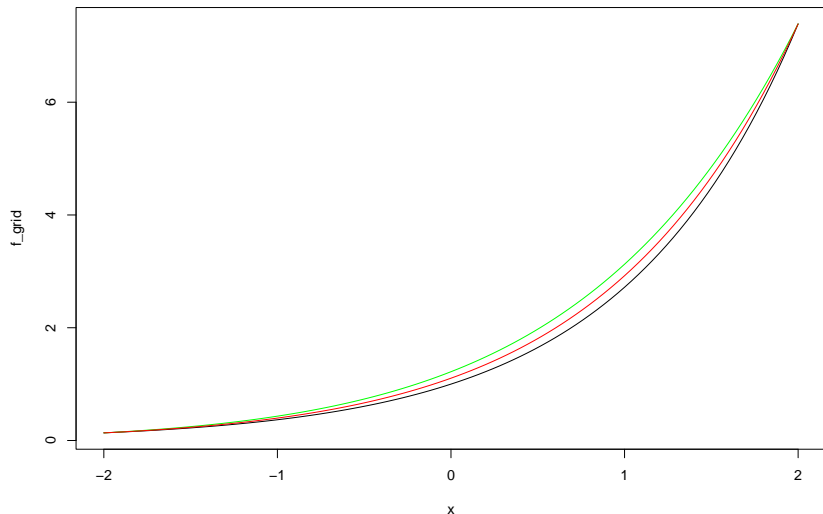


## Approximation de $g(x) = e^x$ sur l'intervalle $[-2, 2]$

```
# On normalise la fonction g:[-2,2] -> R, où g(x) = exp(x).  
# à la fonction f:[0,1] -> R, où f(t) = g(-2 + 4*t)  
f <- function(t) {exp(-2 + 4*t)}  
  
# Grille de points t in [0,1]  
t <- seq(0, 1, by=0.01)  
  
# Grille de points x in [-2,2]  
x <- -2 + 4*t  
  
# Valeurs de f et de g sur la grille  
f_grid <- f(t)
```

## Approximation de Bernstein de $g(x) = e^x$ pour $n = 10, 20$

```
plot(x, f_grid, type='l')  
lines(x, bernstein(f, 10, t), col='green')  
lines(x, bernstein(f, 20, t), col='red')
```



## Splines cubiques d'hermite

Quatre fonctions cubiques sur l'intervalle  $[0, 1]$  :

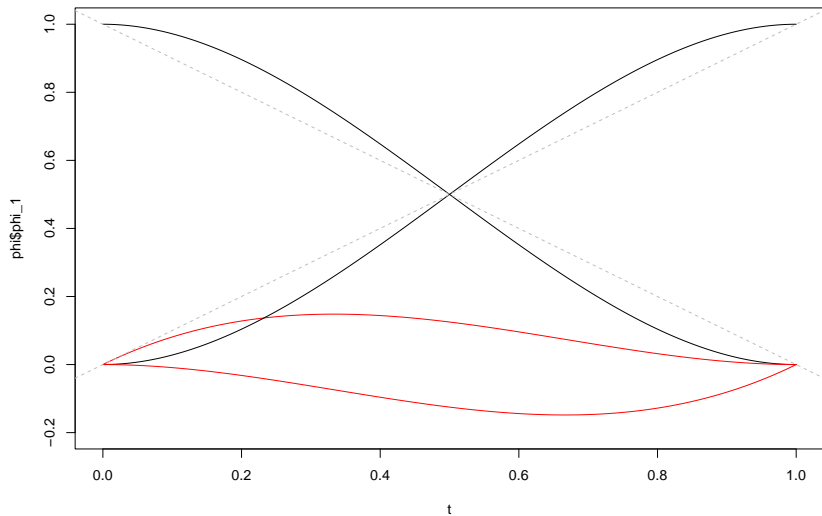
$$\varphi_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad \varphi_2(t) = t^3 - 2t^2 + t,$$

$$\varphi_3(t) = -2t^3 + 3t^2, \quad \varphi_4(t) = t^3 - t^2.$$

Fonction $f$	$f(0)$	$f'(0)$	$f(1)$	$f'(1)$
$\varphi_1$	1	0	0	0
$\varphi_2$	0	1	0	0
$\varphi_3$	0	0	1	0
$\varphi_4$	0	0	0	1
$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$

# Graphique, spline cubiques d'hermite

```
source('Hermite_piece.R')
```



# Notes, splines cubiques d'hermite

- ▶ Problème : interpoler une fonction dont la valeur et la dérivée sont spécifiées à quelques points.
- ▶ Les données d'entrée :
  - ▶ des points  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ,
  - ▶ des valeurs  $f(x_1), \dots, f(x_n)$ ,
  - ▶ et les dérivées  $f'(x_1), \dots, f'(x_n)$ .
- ▶ Le résultat : une fonction
  - ▶ cubique par morceaux  $[x_i, x_{i+1}]$ , (piecewise cubic function)
  - ▶  $C^1$  dans l'intervalle  $[x_1, x_n]$ ,
  - ▶ ayant une deuxième dérivée discontinue à chaque  $x_i$ .
- ▶ Il faut transformer les fonctions  $\varphi_j: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , pour obtenir les fonctions  $\varphi_j: [x_i, x_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ .
- ▶ Il y a une version (rarement utilisée) avec six fonctions quintiques d'hermite qui donne une fonction  $C^2$  à partir des valeurs, des premières dérivées et des deuxième dérivées à un ensemble de points.

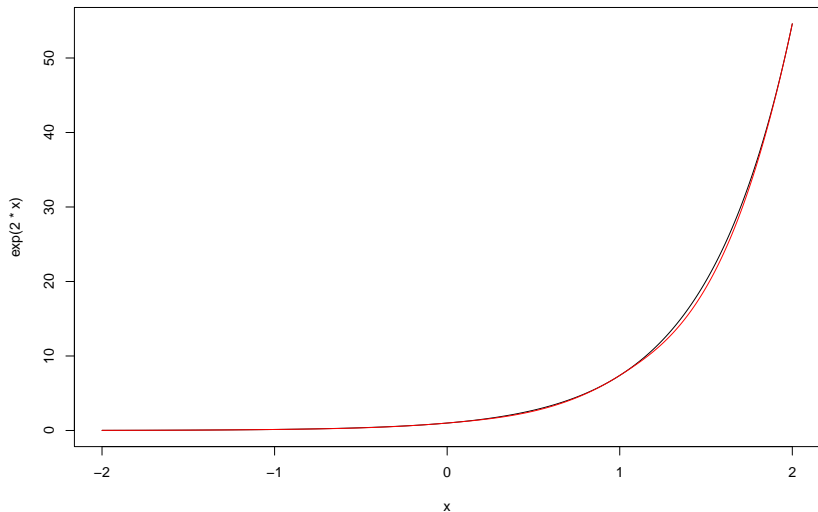
## Évaluation des splines cubiques d'hermite

```
sp_cub_h <- function(x, x_g, f_g, fp_g)
{
  i <- findInterval(x, x_g)
  t <- (x - x_g[i]) / (x_g[i+1] - x_g[i])
  t2 <- t*t; t3 <- t2*t
  fch <- f_g[i] * (2*t3 - 3*t2 + 1) +
    fp_g[i] * (t3 - 2*t2 + t) +
    f_g[i+1] * (-2*t3 + 3*t2) +
    fp_g[i+1] * (t3 - t2)
}

x_grid <- seq(-2, 3, by=1)
f_grid <- exp(2*x_grid)
fp_grid <- 2*f_grid
x <- array(seq(-2, 2, by=0.01))
f_approx <- apply(x, 1, sp_cub_h, x_grid, f_grid, fp_grid)
```

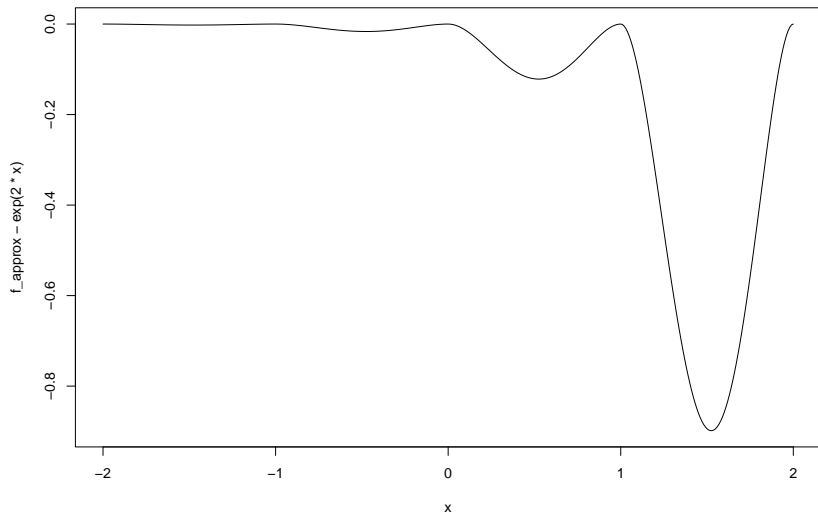
## Évaluation des splines cubiques d'hermite (suite)

```
plot(x, exp(2*x), 'l', col='black')  
lines(x, f_approx, col='red')
```



## Évaluation des splines cubiques d'hermite (erreur)

```
plot(x, f_approx - exp(2*x), 'l', col='black')
```





## Aparté sur MCO

- ▶ Moindres carrés ordinaire (MCO), rappel :
  - ▶ Soit  $X$  une matrice  $n \times K$  de rang  $K$ ,  $y$  un vecteur  $n \times 1$ .
  - ▶ Problème MCO : choisir  $\beta$  qui minimise la somme de carrés  $(y - X\beta)^\top (y - X\beta)$ .
  - ▶ Solution :  $b = (X^\top X)^{-1}(X^\top y)$ .
  - ▶ Le vecteur  $\hat{y} \equiv Xb = (X(X^\top X)^{-1}X^\top)y$  est la combinaison linéaire des colonnes de  $X$  le plus près de  $y$ .
- ▶ La matrice  $M = X(X^\top X)^{-1}X^\top$  de “projection” :
  - ▶ Prenons une combinaison linéaire  $Xa$  des colonnes de  $X$ .
  - ▶ Multiplication par  $M$  ne change pas  $Xa$  :

$$M(Xa) = X(X^\top X)^{-1}X^\top Xa = Xa.$$

- ▶ Prenons  $u$ ,  $n \times 1$ , perpendiculaire à toutes les colonnes de  $X$ .

$$Mu = X(X^\top X)^{-1}X^\top u = X(X^\top X)^{-1}0 = 0.$$

- ▶  $M$  projette un vecteur  $n \times 1$  sur l'espace engendré par les colonnes de  $X$ .
- ▶  $\hat{y} = My$  est la projection de  $y$  sur cet espace.

## $X$ avec colonnes orthogonales

- Supposons que les colonnes de  $X$  sont orthogonales. (Pas réaliste pour les données observées, possible dans le cas où  $X$  est une matrice de conception pour une expérience.)
- Alors,

$$X^{\top}X = \begin{bmatrix} x_1^{\top}x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2^{\top}x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_K^{\top}x_K \end{bmatrix}, \quad X^{\top}y = \begin{bmatrix} x_1^{\top}y \\ x_2^{\top}y \\ \vdots \\ x_K^{\top}y \end{bmatrix}.$$

$$b_k = \frac{x_k^{\top}y}{x_k^{\top}x_k}, \quad k = 1, \dots, K; \quad \hat{y} = Xb = \sum_{k=1}^K \frac{x_k^{\top}y}{x_k^{\top}x_k} x_k.$$

- Chaque  $\frac{x_k^{\top}y}{x_k^{\top}x_k} x_k$  est la projection de  $y$  sur  $x_k$ .
- Notez bien les produits intérieurs.

# MCO avec colonnes orthogonales et l'approximation par projection

MCO	Approximation par projection
vecteur $y$	fonction $f(\cdot)$
valeurs prédites $\hat{y}$	approximation $\hat{f}(\cdot)$
vecteurs $x_k, k = 1, \dots, K$	polynômes $\phi_k(\cdot), k = 1, \dots, K$
produit intérieur $x_k^\top y$	produit intérieur $\langle \phi_k, f \rangle$
colonnes orthogonales $x_k^\top x_l = 0$	polynômes orthogonales $\langle \phi_k, \phi_l \rangle = 0.$
projection de $y$ sur $x_k : \frac{x_k^\top y}{x_k^\top x_k} x_k$	projection de $f$ sur $\phi_k(\cdot) : \frac{\langle \phi_k, f \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle} \phi_k(\cdot)$

## Familles de polynômes orthogonaux : produits intérieurs

- ▶ Il y a plusieurs produits intérieurs possibles pour les espace des fonctions, y compris

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_a^b f(x)g(x)w(x) dx,$$

pour plusieurs choix de  $(a, b)$  et  $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

- ▶ Trois cas classiques

Nom	$(a, b)$	$w(x)$
Jacobi	$(-1, 1)$	$(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta,$ $\alpha, \beta > -1$
Laguerre	$(0, \infty)$	$e^{-x}$
Hermite	$(-\infty, \infty)$	$e^{-x^2}$

- ▶ Pour quelles valeurs de  $\alpha, \beta$  est-ce que les fonctions  $w(x)$  des cas Legendre et Tchebyshev sont des cas spécial de  $w(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$ ?

# Importance de l'orthogonalité

- Un problème de moindres carré : choisir un polynôme d'ordre  $n$  pour minimiser la distance carrée (selon le produit intérieur spécifié par  $(a, b)$  et  $w(\cdot)$ ) entre le polynôme et une fonction  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  donnée :

$$\min_{p \in \mathcal{P}_n} \langle f - p, f - p \rangle = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \int_a^b (f(x) - p(x))^2 w(x) dx.$$

- Si on a une famille  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  de polynômes orthogonaux (toujours par rapport à  $(a, b)$  et  $w(\cdot)$ ) la solution du problème de moindres carrés est

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \varphi_k(x).$$

- les monômes,  $1, x, x^2, \dots$  ne sont pas orthogonaux, peu importe le choix de produit intérieur.

# L'orthogonalisation de polynômes

- ▶ Pour un ensemble de vecteurs d'un espace pré-hilbertien (inner product space), l'algorithme de Gram-Schmidt crée un ensemble de vecteurs orthogonaux engendrant le même espace.
- ▶ L'application de l'algorithme à l'ensemble des monômes donne les formules de récursion relativement simples.
- ▶ Par exemple, les polynômes de Tchebyshev  $((a, b) = (-1, 1), w(x) = (1 - x^2)^{-1/2})$  sont définie par  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = x$ ,  $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ , alors

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x.$$

- ▶ Pour  $n$  pair (impair),  $T_n(x)$  est une fonction pair (impair).
- ▶ La solution, en forme réduite, est  $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$ .
- ▶ Pour évaluer une expansion  $\sum_{k=1}^n a_k T_k(x)$  à un point, on peut évaluer dans un premier temps, les  $T_k(x)$  avec la récursion.

# Notes sur les polynômes

- ▶ Le théorème de Weierstrass démontre la force potentielle des polynômes pour l'approximation des fonctions sur les intervalles bornés.

- ▶ Pour  $f \in C^k[a, b]$ , il existe une suite de polynômes  $p_n$ , où chaque  $p_n$  est un polynôme de degré  $n$ , telle que pour  $l \leq k$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f^{(l)}(x) - p_n^{(l)}(x)| = 0.$$

- ▶ Trouvez  $p_n(x)$  qui minimise  $\max_{x \in [a, b]} |f^{(l)}(x) - p_n^{(l)}(x)|$  est difficile, mais une solution moindres carrés est souvent près du minimum.
- ▶ Trouvez  $p_n(x)$  qui minimise  $\langle f - p_n, f - p_n \rangle$  est facile en principe, mais
  - ▶ les produits intérieurs sont rarement faisable de façon analytique
  - ▶ les intégrales numériques sont coûteux

## Approximation moindres carrés de $x^3$

- Problème : approximer  $f(x) = x^3$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .
- Utilisons le produit intérieur avec  $(a, b) = (-1, 1)$  et  $w(x) = 1$ .
- Problème moindres carrés : minimiser  $\|f - p_2\|^2 = \langle f - p_2, f - p_2 \rangle$  pour un polynôme  $p_2$  d'ordre 2 ou moins.
- La solution est

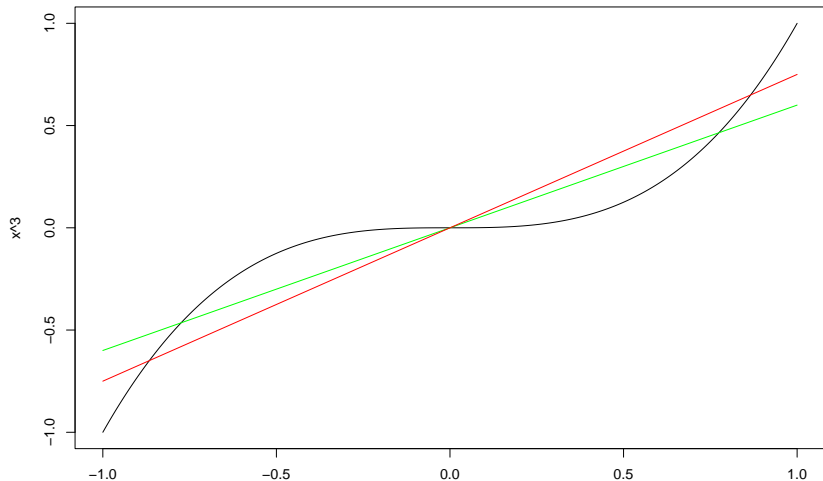
$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \frac{\langle f, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0(x) + \frac{\langle f, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} P_1(x) + \frac{\langle f, P_2 \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} P_2(x) \\ &= \frac{2/5}{2/3} P_1(x) = \frac{3}{5} x.\end{aligned}$$

- Le polynôme d'ordre 2 ou moins qui minimise  $\max_{x \in (-1, 1)} |f(x) - p_2(x)|$  est  $\frac{3}{4} x$ .



## Meilleures approximations de $x^3$

```
x = seq(-1, 1, by=0.001)
plot(x, x^3, type='l')           # Fonction à approximer
lines(x, 0.6*x, col='green')    # Meilleur approx. MC
lines(x, 0.75*x, col='red')     # Meilleur approx. uniforme
```



## Meilleures approximations de $x^3$ , cont.

```
x = seq(-1, 1, by=0.001)
plot(x, x^3 - 0.6*x, type='l', col='green') # Meilleur approx.
lines(x, x^3 - 0.75*x, col='red') # Meilleur approx. unif.
abline(h=-0.25, lty='dashed', col='grey')
```

