ECN 6338 Cours 3

Quelques sujets préalables

William McCausland

2022-01-26

Survol du Cours 2

Maximisation sous contraintes

- une contrainte d'égalité
- plusieures contraintes d'égalité
- plusieures contraintes d'égalité plus non-négativité
- plusieures contraintes d'égalité et d'inégalité
- exemple

Maximisation de la vraisemblance

- la vraisemblance
- l'estimateur maximum de vraisemblance et ses propriétés
- les problèmes d'optimisation à effectuer

Inférence bayésienne

- les lois *a priori* et *a posteriori*
- les problèmes d'intégration à effectuer

Problème de maximisation avec une contrainte d'égalité

Problème :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{t.q.} \quad g(x) = c,$$

où

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
- $c \in \mathbb{R}$,
- $f, g \in C^2$, l'espace de fonctions avec deux dérivées continues.

Fonction de Lagrange, en $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda[c - g(x)].$$

Théorème : Si x^* est une solution et que $g_j(x^*) \neq 0$ pour au moins un j, il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que

- $L_j(x^*, \lambda^*) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, et $L_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0$.

Problème avec plusieurs contraintes d'égalité

Problème :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{t.q.} \quad g(x) = c,$$

où

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $m < n$; $f, g \in C^2$,
- $c \in \mathbb{R}^m$.

Fonction de Lagrange, en $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ est :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top [c - g(x)] = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [c_i - g^i(x)].$$

Théorème : Si x^* est une solution et le rang du jacobien $g_x(x^*)$ est m, il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que

- $L_x(x^*, \lambda^*) = 0_n$, $L_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0_m$.

Plusieurs contraintes d'égalité, non-négativité

Problème :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{t.q.} \quad g(x) = c,\ x \geq 0,$$

où f, g et c sont comme dans le problème précédent.

Fonction de Lagrange, comme dans le dernier problème :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda[c - g(x)].$$

Théorème : Si x^* est une solution et le rang du jacobien $g_x(x^*)$ est m, il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que

- $L_x(x^*, \lambda^*) \leq 0$, $x^* \geq 0$ avec écarts complémentaires,
- $L_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0$.

Exemple, utilité quasi-linéaire I (exemple 3.1 de Dixit)

Le problème : pour prix $p > 0$ et $q > 0$, revenu $I > 0$ et $a > 0$,

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} y + a \ln x \quad \text{t.q.} \quad px + qy = I.$$

La fonction de Lagrange :

$$L(x, y, \lambda) = y + a \ln x + \lambda(I - px - qy).$$

Les conditions nécessaires pour un maximum :

$$L_x = \frac{a}{x} - \lambda p \leq 0,\ x \geq 0;$$

$$L_y = 1 - \lambda q \leq 0,\ y \geq 0;$$

$$I - px - qy = 0.$$

- Cas $x = 0,\ y = 0$: $I - px - qy = 0$ est impossible.
- Cas $x = 0,\ y > 0$: $L_x \leq 0$ est impossible.

Exemple, utilité quasi-linéaire II

Les conditions nécessaires pour un maximum, encore :

$$L_x = \frac{a}{x} - \lambda p \leq 0, \; x \geq 0;$$

$$L_y = 1 - \lambda q \leq 0, \; y \geq 0;$$

$$I - px - qy = 0.$$

- Cas $x > 0$, $y = 0$:
  - dans ce cas $x = I/p$ et $\lambda = a/I$,
  - il faut que $1 - aq/I \leq 0$, $I \leq aq$.
- Cas $x > 0$, $y > 0$:
  - dans ce cas $\lambda = a/(px) = 1/q$,
  - $x = aq/p$,
  - Il faut que $I - px = I - aq > 0$, auquel cas $y = I/q - a$.

Exemple, utilité quasi-linéaire III

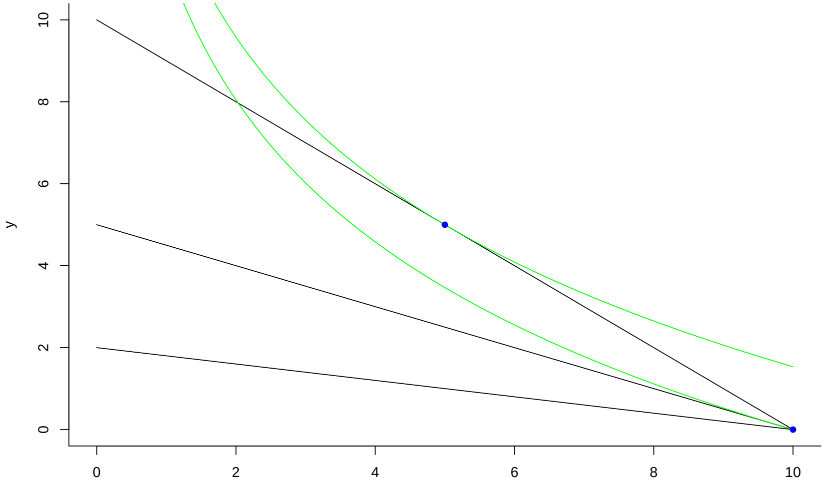
```r
p <- 1; I <- 10  # Prix de x et revenu
a <- 5;          # Paramètre d'utilité
q1 <- 1; q2 <- 2; q3 <- 5   # Trois valeurs du prix de y
x = seq(0, 10, length.out = 1000)  # Grille, valeurs de x

# Trois budgets
b1 = (I - p*x)/q1;
b2 = (I - p*x)/q2;
b3 = (I - p*x)/q3;

# Deux courbes d'indifférence
y1 = 5*log(5)+5 - 5*log(x)  # Qui passe par (5, 5)
y2 = 5*log(10) - 5*log(x)   # Qui passe par (10, 0)
```

Exemple, utilité quasi-linéaire IV

```
plot(x, b1, type='l', xlab='x', ylab='y', bty='l');
lines(x, b2); lines(x, b3)
lines(x, y1, col='green'); lines(x, y2, col='green')
points(c(5, 10), c(5, 0), col='blue', pch=16)
```



Plusieurs contraintes d'égalité et d'inégalité

Problème :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{t.q.} \quad g(x) = c,\ h(x) \leq d,$$

où f, g et c sont comme dans le problème précédent,

- $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, $h \in C^2$, $d \in \mathbb{R}^l$.

Fonction de Lagrange :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top [c - g(x)] + \mu^\top [d - h(x)].$$

Théorème : Si x^* est une solution, le rang des jacobiens $g_x(x^*)$ et $h_x(x^*)$ sont m et l, il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^l$ tels que

- $L_x(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0_n$,
- $L_\lambda(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0_m$,
- $L_\mu(x^*, \lambda^*, \mu^*) \geq 0_l$, $\mu \geq 0_l$ avec écarts complémentaires.

Comparaison avec la page 122 dans Judd

Dans Judd :

- $g(x) = 0$ et $h(x) \leq 0$, pas $g(x) = c$ et $h(x) \leq d$.
  - aucune perte de généralité : défine $\tilde{g}(x) = g(x) - c$, $\tilde{h}(x) = h(x) - d$
- moins de détail sur les conditions de rang (“constraint qualification”)
- problème de minimisation, pas de maximisation
  - le relâchement d’une contrainte *réduit* la valeur optimale $f(x^*)$
- $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \mu^\top h(x)$ (signe opposé des deux derniers termes)
- Les conditions pour μ et L_μ sont $\mu \leq 0$, $L_\mu \leq 0$.

Le problème de maximisation est plus naturel pour les économistes mais les logiciels exigent souvent des fonctions à minimiser. Il faut “traduire” la spécification du problème et bien intérpreter la signe des prix d’ombre et autres résultats.

Exemple, chomage technique (exemple 3.2 de Dixit)

Le problème :

- Une économie a 300 unités de L (main d'oeuvre) et 450 unités de T, pour la production de blé et de boeuf.
- Produire une unité de blé prend 2 unités de L, 1 unité de T.
- Produire une unité de boeuf prend 1 unité de L, 2 unités de T.
- On veut maximiser $W(x, y) = (1 - \beta) \ln x + \beta \ln y$, où x et y sont les quantités de blé et de boeuf.
- On écarte d'emblée la possibilité des valeurs $x < 0$, $y < 0$.

La fonction de Lagrange :

$$L(x, y, \mu_L, \mu_T) = (1-\beta) \ln x + \beta \ln y + \mu_L[300 - 2x - y] + \mu_T[450 - x - 2y]$$

Chomage technique, conditions de première ordre

$$L(x, y, \mu_L, \mu_T) = (1-\beta) \ln x + \beta \ln y + \mu_L[300 - 2x - y] + \mu_T[450 - x - 2y]$$

Les conditions de première ordre sont

$$\frac{1-\beta}{x} - 2\mu_L - \mu_T = 0, \quad \frac{\beta}{y} - \mu_L - 2\mu_T = 0,$$

et avec écarts complémentaires,

$$300 - 2x - y \geq 0, \quad \mu_L \geq 0;$$

$$450 - x - 2y \geq 0, \quad \mu_T \geq 0.$$

- $\mu_L = 0$, $\mu_T = 0$ ne vérifie pas les deux premières équations.
- $\mu_L > 0$, $\mu_T > 0$ donne le plan unique sans chomage, mais il faut vérifier $\mu_L > 0$ et $\mu_T > 0$: il faut que $2/3 < \beta < 8/9$.
- $\mu_L = 0$ et $\mu_T > 0$ (chomage de L) requiert $\beta \geq 8/9$.
- $\mu_L > 0$ et $\mu_T = 0$ (chomage de T) requiert $\beta \leq 2/3$.

Trois solutions, selon la valeur de β ('chomage.R')