Exercices, ECN 6338, Hiver 2022

William McCausland

2022-01-21

Cours 1. Introduction

Exercices théorique

1. Montrez que $6n^2 + 3n + 10 = O(n^2)$.

Exercices de computation

1. Lisez l'aide sur la fonction `expm1` et démontrez son avantage par rapport à la fonction `exp` pour évaluer $e^x - 1$ quand $|x|$ est prés de zéro. Vous pouvez suivre l'exemple sur `log1p` dans les diapos.
2. Téléchargez le paquet R `microbenchmark`, lisez l'aide sur la fonction `microbenchmark` et mesurer le temps nécessaire pour faire les opérations `x * y`, `x / y`, `exp(y)` et `log(x)`, pour un vecteur $x > 0$ de mille éléments et un vecteur y de mille éléments.

Cours 2. La résolution de systèmes d'équations linéaires

Exercices préliminaires

1. Soit L_1 et L_2 des matrices triangulaires inférieures $n \times n$. Soit U_1 et U_2 des matrices triangulaires supérieures $n \times n$. Supposez que L_1 et U_1 sont inversibles.
   a. Parmi les matrices suivantes, lequelles sont toujours triangulaires inférieures : $L_1 L_2$, $L_1 + L_2$, L_1^{-1}, $L_1^\top$, $U_1^\top$, $L_1 U_1$?
   b. Parmi les matrices suivantes, lequelles sont toujours triangulaires supérieures : $U_1 U_2$, $U_1 + U_2$, U_1^{-1}, $U_1^\top$, $L_1^\top$, $L_1 U_1$?
2. (Substitution avant et substitution arrière) Soit L et U des matrices inversibles $n \times n$, où L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure. Soit y un vecteur $n \times 1$. Notez que Judd utilise le terme "back substitution" pour décrire deux algorithmes distincts (a. et b.). Plusieurs auteurs font une distinction entre "back substitution" (b.) et "forward substitution" (a.).
   a. Trouver un algorithme pour résoudre l'équation $Lx = y$. Notez que $L_{11} x_1 = y_1$, alors $x_1 = y_1 / L_{11}$.
   b. Trouvez un algorithme pour résoudre l'équation $Ux = y$. Commencez par x_n.
3. Soit x un n-vecteur aléatoire avec moyenne μ $(n \times 1)$ et variance Σ $(n \times n)$. Soit A une matrice constante $m \times n$. Quelles sont la moyenne et la variance de Ax?

Exercices théoriques

1. Quelquefois, il est plus facile de spécifier la matrice de précision $H = \Sigma^{-1}$ que la matrice de variance Σ, pour une loi gaussienne multivariée $N(\mu, \Sigma)$. Si vous avez la matrice H et non la matrice Σ, décrivez comment on peut tirer des variables aléatoires $N(\mu, \Sigma)$ et évaluer la densité gaussienne multivariée. Commencez par la décomposition cholesky de H.

2. La matrice de précision H pour un processus AR(1) gaussien est tridiagonale ($H_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 1$) et symmétrique. Si $\omega = \sigma^{-2}$ est la précision de l'innovation et ϕ est le coefficient d'autorégression, le diagonal de H est $\omega(1, 1+\phi^2, \ldots, 1+\phi^2, 1)$ et le sous-diagonal est $-\omega(\phi, \ldots, \phi)$. Trouvez la décomposition cholesky de H, en utilisant une description de l'algorithme (page 59 de Judd, par exemple).

3. Dans l'exemple MCO, calculez le vecteur $e = y - Xb$ des résiduelles et $\hat{\sigma}^2 (X^\top X)^{-1}$, une estimation de la variance de b. Utilisez seulement y et la décomposition QR de X, pas X elle-même. Notez que $\hat{\sigma}^2 = e^\top e / (n - k)$.

4. Donnez la matrice creuse des diapos en format colonne compressée après les deux opérations suivantes. Décrivez brièvement les algorithmes pour l'insertion et la supression en général.

   a. Une insertion `A[2,4] <- 24`,
   b. Une supression `A[3,2] <- 0`.

Exercices de computation

1. Regardez la démonstration `GPA.R` (au site Github du cours) de l'analyse d'une régression linéaire, exemple 3.1 dans Wooldridge (2016) Introductory Econometrics. Calculez b, e et $\hat{\sigma}^2 (X^\top X)^{-1}$ en utilisant la décomposition QR. La fonction `qr` effectue la décomposition QR, les fonctions `qr.Q` et `qr.R` extraient les matrices Q_1 et R_1 du résultat. Les fonctions `backsolve` et `t` (transpose) pourraient être utiles.

Cours 3. Quelques sujets préalables

Exercices préliminaires

1. Trouvez le panier de consommation (x_1, x_2) qui maximise $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ sous les contraintes $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$, $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$, où $m \geq 0$, $p_1 \geq 0$ et $p_2 \geq 0$. Utilisez la méthode de Lagrange.
2. Si $X_i | \lambda \sim$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$ (loi exponentielle) et $\lambda \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$ (loi gamma) écrivez
   a. la fonction de densité conditionnelle de $(X_1, \ldots, X_n)$ sachant λ.
   b. la densité conjointe de $(X_1, \ldots, X_n)$ et λ.

Exercices théoriques

Exercices de computation

Aucune, étant donnée la nature du cours 3.

Cours 4. L'optimisation statique