ECN 6338 Cours 6

Approximation de fonctions

William McCausland

2022-02-15

Survol du cours 5

Approximations locales

- Approximation de Taylor
- Approximation de Padé

L'approximation Taylor

L'approximation Padé

- L'approximation en général est

$$f(x) \approx r(x) \equiv \frac{p(x)}{q(x)}.$$

- La condition $f^i(x_0) = r^i(x_0)$, $i = 0, 1, \ldots, m+n$ s'exprime aussi comme

$$p^i(x) - (f \cdot q)^i(x) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m+n.$$

Calcul de l'approximation Padé (2,1) de e^x autour de $x = 0$

- L'approximation $r(x)$ est

$$r(x) = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2}{1 + q_1 x}.$$

- Les coefficients p_0, p_1, p_2 et q_1 sont donnés par

$$(p_0 + p_1 x + p_2 x^2) - e^x(1 + q_1 x)\Big|_{x=0} = p_0 - 1 = 0,$$

$$(p_1 + 2p_2 x) - e^x(1 + q_1 x)|_{x=0} = p_1 - 1 - q_1 = 0,$$

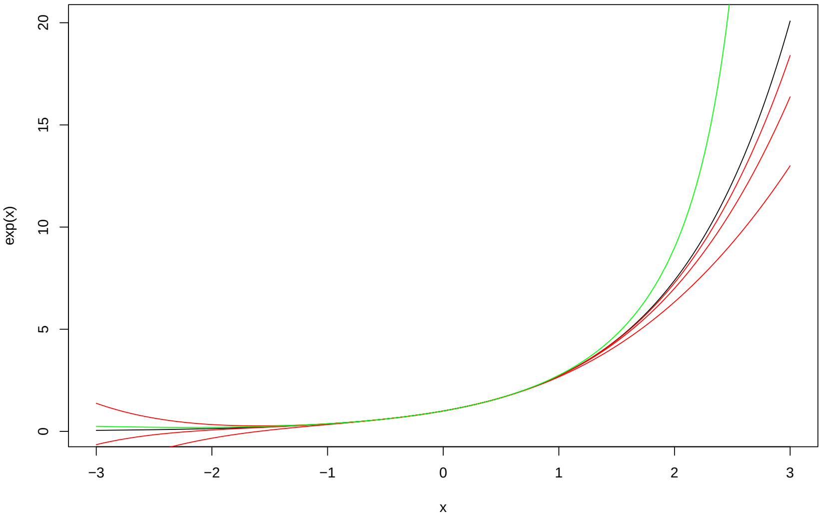
$$2p_2 - e^x(1 + q_1 x) - 2e^x q_1|_{x=0} = 2p_2 - 1 - 2q_1 = 0,$$

$$-e^x(1 + q_1 x) - 3e^x q_1|_{x=0} = -1 - 3q_1 = 0.$$

- La première équation donne $p_0 = 1$; la dernière, $q_1 = -\frac{1}{3}$.
- Ensuite, la deuxième équation donne $p_1 = 1 + q_1 = \frac{2}{3}$; la troisième, $p_2 = \frac{1}{2} + q_1 = \frac{1}{6}$.

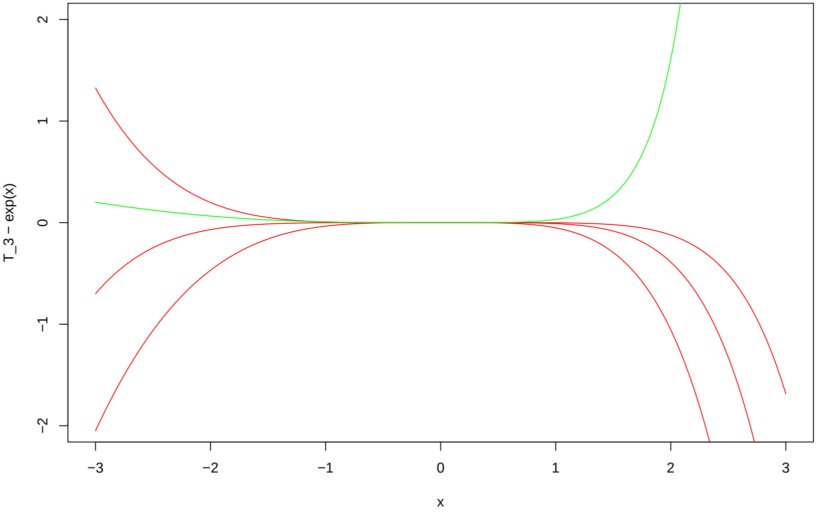
Exemple I, Taylor et Padé, $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

```
source('Taylor_Pade_exp.R')
```



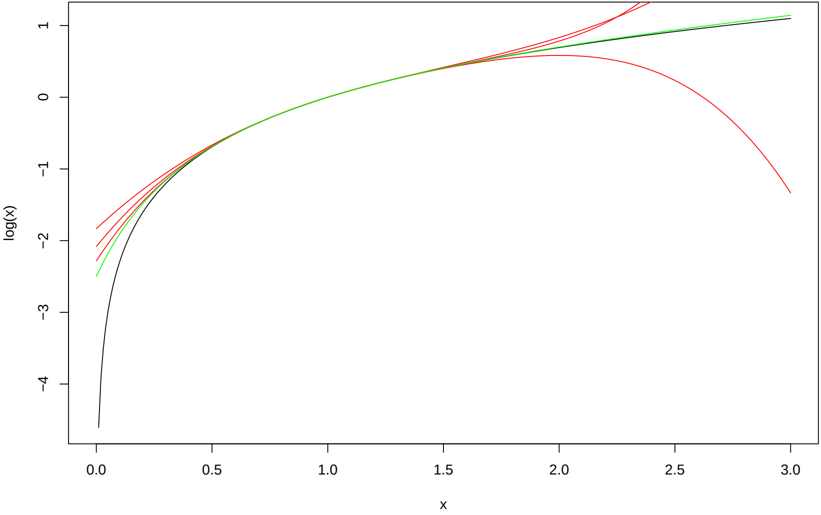
Exemple I, erreurs d'approximation

```
source('Taylor_Pade_exp_error.R')
```



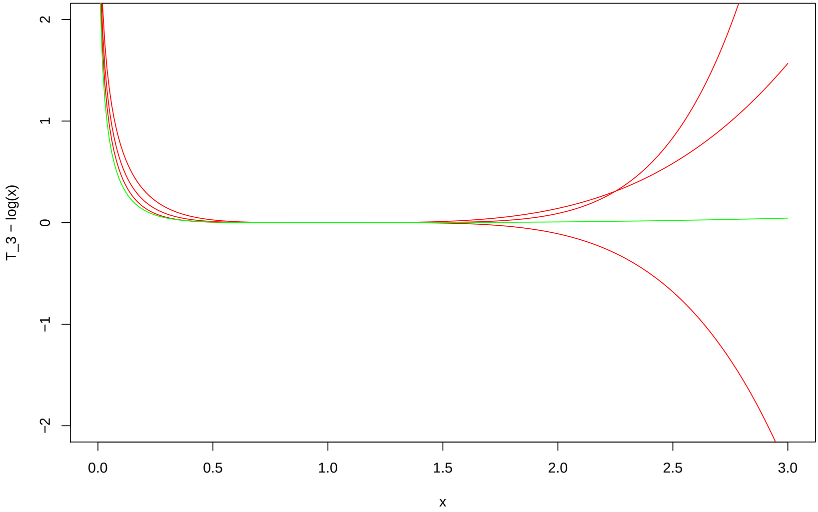
Exemple II, Taylor et Padé, $f(x) = \log x$, $x_0 = 1$.

```r
source('Taylor_Pade_log.R')
```

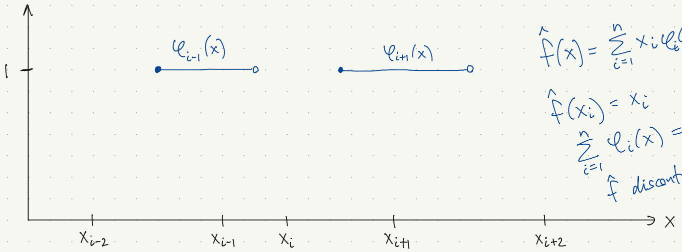


Exemple II, erreurs d'approximation

```r
source('Taylor_Pade_log_error.R')
```



Approximations constante par morceaux et linéaire par morceaux

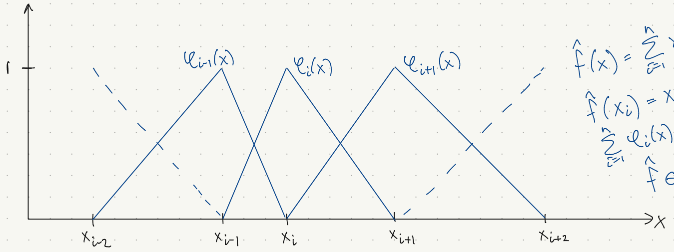


$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i(x)$

$\hat{f}(x_i) = x_i$

$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1$ sur $[x_1, x_n]$

$\hat{f}$ discontinue



$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i(x)$

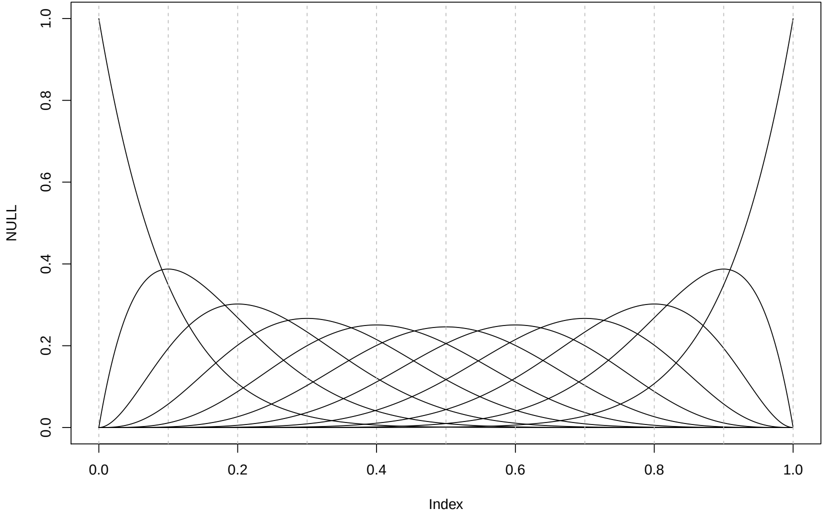
$\hat{f}(x_i) = x_i$

$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1$ sur $[x_1, x_n]$

$\hat{f} \in C^0$

Polynômes de Bernstein d'ordre $n = 10$

```r
source('Bernstein.R')
```



Interpolation à la Hermite

Quatre fonctions cubiques sur l'intervalle $[0,1]$:

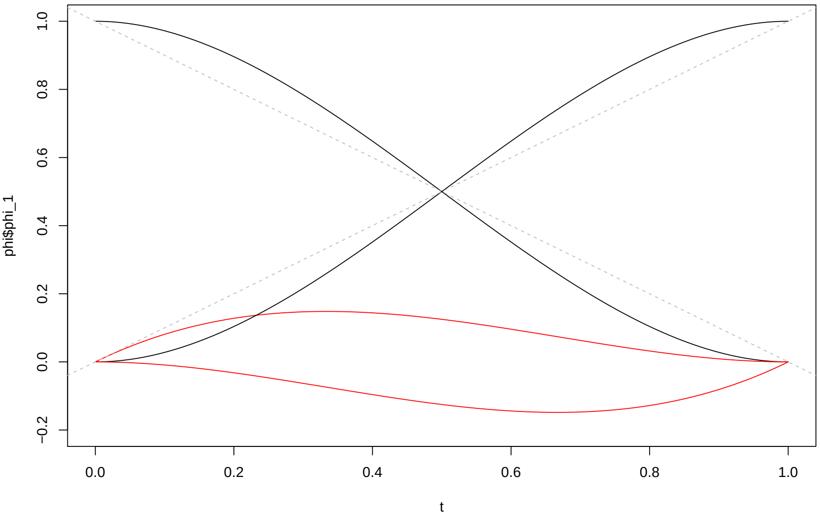
$$\varphi_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad \varphi_2(t) = t^3 - 2t^2 + t,$$

$$\varphi_3(t) = -2t^3 + 3t^2, \quad \varphi_4(t) = t^3 - t^2.$$

Fonction f	$f(0)$	$f'(0)$	$f(1)$	$f'(1)$
φ_1	1	0	0	0
φ_2	0	1	0	0
φ_3	0	0	1	0
φ_4	0	0	0	1
$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4$	a_1	a_2	a_3	a_4

Graphique, cubiques de l'interpolation à la Hermite

```r
source('Hermite_piece.R')
```



Notes, interpolation cubique à la Hermite

- Problème : interpoler une fonction avec la valeur et la dérivée spécifié à quelques points.
- Les intrants :
  - des points $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$,
  - des valeurs $f(x_1), \ldots, f(x_n)$,
  - et les dérivées $f'(x_1), \ldots, f'(x_n)$.
- Le résultat : une fonction
  - cubique par morceaux $[x_i, x_{i+1}]$, (piecewise cubic function)
  - C^1 dans l'intervalle $[x_1, x_n]$,
  - ayant une deuxième dérivée discontinu à chaque i
- Il faut tranformer les fonctions $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ pour avoir les fonctions $\varphi\colon [x_i, x_{i+1}]$.
- Il y a une version (rarement utilisée) avec 6 fonctions quintique φ qui donne une fonction C^2 avec les valeurs, premières dérivées et deuxième dérivées.