ECN 6338 Cours 3, annexe

Version avec le modèle poissonien

William McCausland

2022-01-28

Éléments de l'analyse maximum de vraisemblance

- Quantités pertinentes :
  - θ, un vecteur de paramètres inconnus,
  - $y = (y_1, \ldots, y_T)$, un vecteur aléatoire des variables observables,
  - y°, le vecteur observé.
- Fonctions pertinentes :
  - $f(y|\theta)$, la densité conditionnelle des données (modèle),
  - $\mathcal{L}(\theta; y) = f(y|\theta)$, la vraisemblance,
  - $\mathcal{L}(\theta; y^\circ) = f(y^\circ|\theta)$, la vraisemblance réalisée.

Le modèle poissonien

- Supposez que les y_i sont iid Poisson avec moyenne $\theta > 0$.
- La fonction de masse de probabilité de y_i est

$$f(y_i|\theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^{y_i}}{y_i!}.$$

- On observe le vecteur aléatoire $y = (y_1, \ldots, y_n)$; la fonction de masse de probabilité de y est

$$f(y|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\theta}\frac{\theta^{y_i}}{y_i!} = \left[\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i!}\right] e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}.$$

- Pour simplifier un facteur qui importe peu,

$$c \equiv \left[\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i!}\right].$$

Deux intérpretations de la même expression

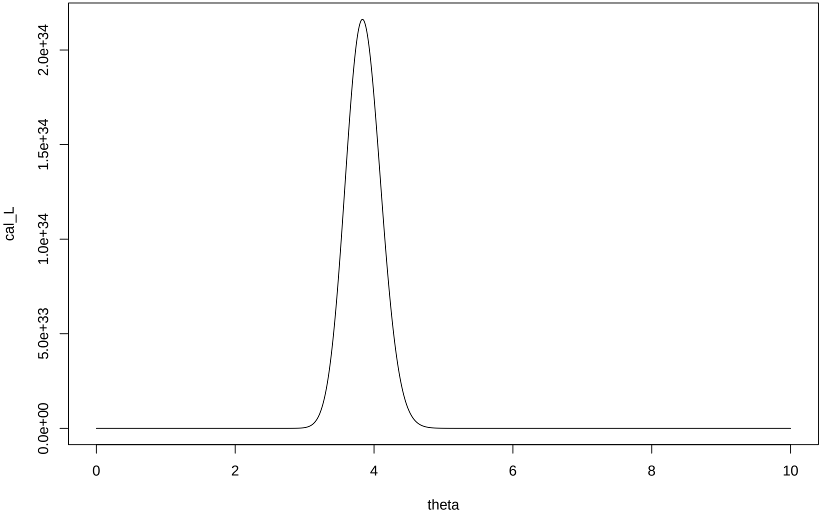
- L'expression :

$$f(y|\theta) = ce^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i} = \mathcal{L}(\theta; y).$$

- Deux intérpretations :
  - Fonction de masse de probabilité $f(y|\theta)$.
  - Fonction de vraisemblance $\mathcal{L}(\theta; y)$.
- $f(y|\theta)$ donne, pour θ fixe, les probabilités relatives des séquences possibles $(y_1, \ldots, y_n)$.
- $\mathcal{L}(\theta; y)$ donne, pour y fixe (notamment $y = y^\circ$) une note (ou évaluation) à chaque valeur θ pour la qualité de sa prévision des données observées.
- Soit $L(\theta; y) = \log \mathcal{L}(\theta; y)$, la log-vraisemblance.

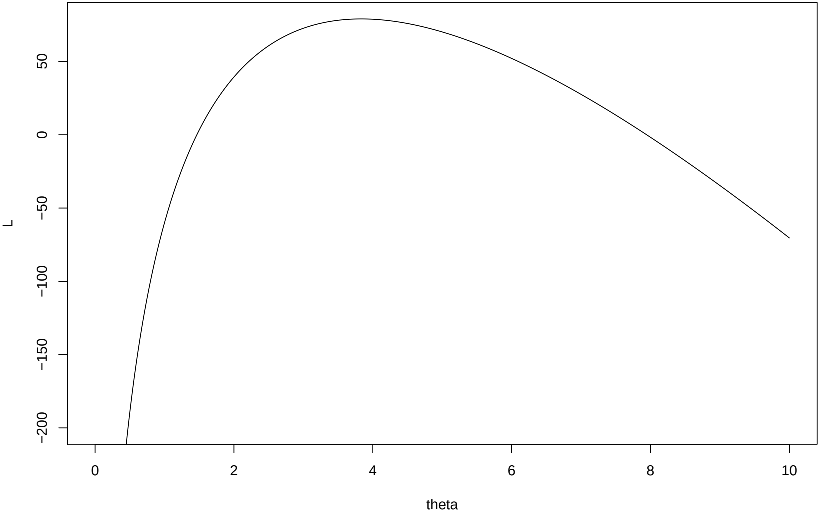
Vraisemblance poissonienne pour $n = 60$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 230$

```
n = 60; somme_y = 230; theta = seq(0, 10, by=0.001)
cal_L = exp(-n*theta) * theta^somme_y
plot(theta, cal_L, type='l')
```



Log vraisemblance poissonienne, $n = 60$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 230$

```
L = -n*theta + somme_y*log(theta)
plot(theta, L, type='l', ylim=c(-200, max(L)))
```



Maximum de la vraisemblance poissonienne

- Vraisemblance : $\mathcal{L}(\theta; y) = ce^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}$.
- Log vraisemblance : $L(\theta; y) = \log c - n\theta + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\log\theta$.
- Deux dérivées de la log vraisemblance :

$$\frac{\partial L(\theta; y)}{\partial \theta} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\theta}$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta; y)}{\partial \theta^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\theta^2} < 0.$$

- La valeur $\hat{\theta}$ (souvent vue comme une variable aléatoire) qui maximise la vraisemblance et la log-vraisemblance est

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

- Pour $n = 60$ et $\sum_{i=1}^{n} y_i = 230$, $\hat{\theta} = \frac{23}{6} \approx 3.833$.

Maximum de vraisemblance : conditions de régularité

- Définitions :
  - θ est le vecteur des paramètres ; Θ, l'ensemble de toutes les valeurs possibles de θ.
  - y est le vecteur (aléatoire) des données.
- Conditions informelles de regularité :
  1. Le modèle est correct pour une valeur $\theta = \theta_0 \in \Theta$.
  2. La vraie valeur θ_0 est dans l'intérieur de Θ.
  3. Identification :

  $$\theta \neq \theta_0 \Rightarrow f(\cdot|\theta) \neq f(\cdot|\theta_0).$$

  4. $L(\theta; y) \equiv \log f(y|\theta)$ a toujours un maximum global unique.
  5. Le gradient de $L(\theta; y)$ (par rapport à θ) est toujours borné.
  6. La matrice $\mathcal{I}(\theta)$ suivante (matrice d'information de Fisher) est définie positive:

  $$\mathcal{I}(\theta) = E_{y|\theta}\left[\frac{\partial L(\theta; y)}{\partial \theta^\top}\frac{\partial L(\theta; y)}{\partial \theta}\right].$$

Maximum de vraisemblance : résultats

Résultats : (Soit $\hat{\theta} \equiv \arg\max_\theta L(\theta; y)$, qui existe et est unique.)

1. $\hat{\theta} \to_p \theta_0$ (loi de grands nombres)
2. $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \to_d N(0, n\mathcal{I}(\theta_0)^{-1})$ (théorème central limite)
3. $\mathcal{I}(\theta) = E_{y|\theta}\left[-\frac{\partial^2 L(\theta; y)}{\partial\theta\partial\theta^\top}\right]$.

Problèmes restants :

1. Il faut trouver $\hat{\theta}$.
2. La variance asymptotique $\mathcal{I}(\theta_0)^{-1}$ de $\hat{\theta}$ dépend de θ_0, qui est inconnu.
3. L'espérance dans les deux expressions pour $\mathcal{I}(\theta)$ sont difficiles à évaluer analytiquement.

Exemple poissonien

- Un cas rare où les calculs analytiques sont faisables.
- La matrice d'information de Fisher : ($E[y_i] = \theta$, $\mathrm{Var}[y_i] = \theta$)

$$\mathcal{I}(\theta) = E_{y|\theta}\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\right] = E_{y|\theta}\left[\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\theta^2}\right] = \frac{n\theta}{\theta^2} = \frac{n}{\theta}.$$

- La variance de $\hat{\theta}$ (exacte, pas asymptotique) :

$$\mathrm{Var}[\hat{\theta}] = \mathrm{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2} n \mathrm{Var}[y_i] = \frac{\theta}{n}.$$

- Pour $n = 60$ et $\sum_{i=1}^n y_i = 230$, $\mathrm{Var}[\hat{\theta}]$ est de $(0.2528)^2$ pour $\theta = \hat{\theta} \approx 3.833$, $(0.2236)^2$ pour $\theta = 3$ et $(0.2739)^2$ pour $\theta = 4.5$.

Éléments de l'analyse bayésienne

- Quantités pertinentes :
  - θ, un vecteur de paramètres inconnus *aléatoire*
  - $y = (y_1, \ldots, y_T)$, un vecteur aléatoire des variables observables,
  - y°, le vecteur observé.
- Fonctions pertinentes :
  - $f(y|\theta)$, la densité conditionnelle des données (modèle),
  - $\mathcal{L}(\theta; y^\circ) = f(y^\circ|\theta)$, la vraisemblance réalisé,
  - $f(\theta)$, la densité *a priori*,
  - $f(\theta, y)$, la densité conjointe,
  - $f(\theta|y)$, la densité *a posteriori*,
  - $f(y)$, la densité marginale des données,
  - $f(y^\circ)$, la vraisemblance marginale (un nombre).

Inférence bayésienne

- Par la règle de Bayes,

$$f(\theta|y^\circ) = \frac{f(\theta, y^\circ)}{f(y^\circ)} = \frac{f(\theta)f(y^\circ|\theta)}{f(y^\circ)} \propto f(\theta)f(y^\circ|\theta).$$

- $f(\theta)$ représente notre incertitude sur θ avant l'observation de y.
- $f(\theta|y^\circ)$ resprésente notre incertitude sur θ après qu'observe $y = y^\circ$.
- Un point important à retenir : $f(\theta|y^\circ) \propto f(\theta, y^\circ)$.

Reprise et extension de l'exemple poissonien

- Si $y_i \sim \mathrm{iid}\,\mathrm{Po}(\theta)$, $f(y|\theta) = c e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^n y_i}$.
- Mettons qu'on choisit la loi *a priori* $\theta \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$ sur $[0, \infty)$:

$$f(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}.$$

- La densité conjointe est

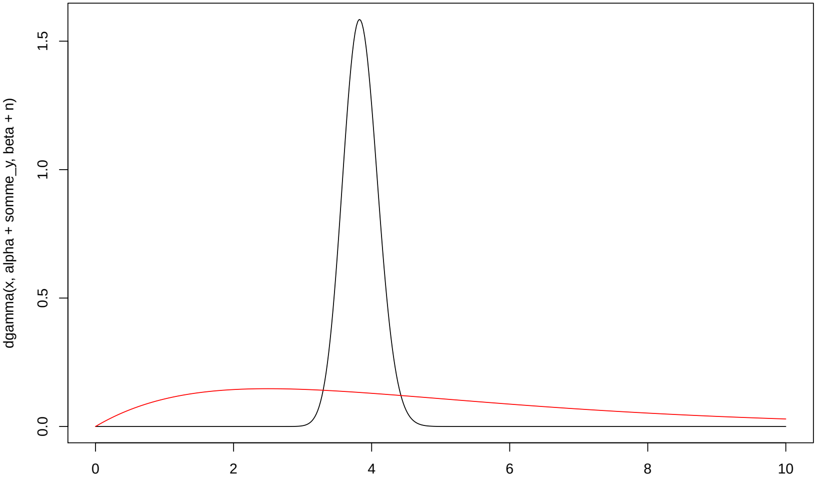
$$f(\theta, y) = f(\theta) f(y|\theta) = c \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \theta^{\alpha + \sum_{i=1}^n y_i - 1} \cdot e^{-(\beta+n)\theta}.$$

- La loi *a posteriori* doit être $\theta \sim \mathrm{Ga}(\alpha + \sum_{i=1}^n y_i, \beta + n)$.
- La vraisemblance marginale est $f(\theta, y)/f(\theta|y)$:

$$f(y) = c \frac{\beta^\alpha}{(\beta+n)^{\alpha + \sum_{i=1}^n y_i}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \sum_{i=1}^n y_i)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Graphique pour l'exemple poissonien

```
n = 60; somme_y = 230; alpha=2; beta=0.4
x = seq(0, 10, by=0.02)
plot(x, dgamma(x, alpha+somme_y, beta+n), type='l')
lines(x, dgamma(x, alpha, beta), col='red')
```



L'intégration et les objectifs de l'analyse bayésienne

- Plusieurs problèmes d'inférence bayésienne ont, comme solution, une intégrale par rapport à la densité *a posteriori*.
- Exemple 1, estimation ponctuelle de θ_k sous perte quadratique:

$$\hat{\theta}_k = E[\theta_k|y^\circ] = \int \theta_k f(\theta|y^\circ)\, d\theta.$$

- Exemple 2, quantification de l'incertitude sur θ_k :

$$\mathrm{Var}[\theta|y^\circ] = E[(\theta_k - E[\theta_k|y^\circ])^2|y^\circ].$$

- Exemple 3, densité prédictive (valeurs de y_{T+1} sur une grille) :

$$f(y_{T+1}|y^\circ) = E[f(y_{T+1}|\theta, y^\circ)|y^\circ].$$

Preuve de l'exemple 3

$$
\begin{aligned}
&E[f(y_{T+1}|y_1,\ldots,y_T,\theta)|y_1,\ldots,y_T] \\
&\qquad = \int f(y_{T+1}|y_1,\ldots,y_T,\theta)f(\theta|y_1,\ldots,y_T)\,d\theta \\
&\qquad = \int f(y_{T+1},\theta|y_1,\ldots,y_T)\,d\theta \\
&\qquad = f(y_{T+1}|y_1,\ldots,y_T)
\end{aligned}
$$

Méthodes pour trouver $E[g(\theta)|y^\circ]$

- Calcul analytique : élégant, exacte, presque toujours insoluble.
- Simulation Monte Carlo indépendante :
  - Si on peut simuler $\theta^m \sim \mathrm{iid}\, \theta|y^\circ$,
$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g(\theta^m) \to_p E[g(\theta)|y^\circ].$$
  - Cependant, cette simulation est rarement faisable.
- Simulation Monte Carlo chaîne de markov (MCMC) :
  - On choisit un processus markovien avec densité de transition $f(\theta^m|\theta^{m-1})$ telle que la loi *a posteriori* $\theta|y^\circ$ est la loi stationnaire du processus. C'est à dire :
$$\theta^{m-1} \sim f(\theta|y^\circ) \Rightarrow \theta^m \sim f(\theta|y^\circ).$$
  - Sous quelques conditions techniques, la loi de θ^m converge à la loi *a posteriori* et
$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g(\theta^m) \to_p E[g(\theta)|y^\circ].$$