Université de Montréal
Faculté des arts et des sciences
Département de sciences économiques

EXAMEN FINAL

Vendredi 22 avril 2022, de 8h30 à 11h15

ECN 6338A **ANALYSE NUMÉRIQUE EN ÉCONOMÉTRIE** HIVER 2022

Professeur :	William MCCAUSLAND
Directives pédagogiques :	Documentation **non permise**, calculatrice non programmable **permise**.
Pondération :	Cet examen compte pour 25% de la note finale.

Il y a sept questions, chacune avec une valeur nominale de 10 points. La note de votre examen final, sur 100, consiste en la somme des sept notes plus la somme de vos trois meilleures notes.

1. (10 points) La fonction de répartition de la loi Weibull, pour les paramètres $\lambda > 0$ et $k > 0$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\lambda)^k} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Supposez que vous pouvez générer des variables pseudo-aléatoires de la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Décrivez comment générer des variables pseudo-aléatoires de la loi Weibull. Donnez assez de détails pour que quelqu'un puisse programmer l'algorithme à partir de votre réponse.

2. (10 points) Considérez une vente aux enchères hollandaise (ou descendante) avec n enchéreurs. Les valeurs privées de l'objet à vendre, $v_1, v_2, \ldots v_n$, sont iid avec fonction de répartition F sur $[v_{\min}, v_{\max}]$. En équilibre de Nash, un enchéreur avec une valeur privée de v fait une enchère de

$$b(v) = v - \frac{\int_{v_{\min}}^{v} [F(x)]^{n-1}\, dx}{[F(v)]^{n-1}}.$$

Dans ce type de vente aux enchères, celui qui fait l'enchère la plus grande obtient l'objet, au prix égal à son enchère. Supposez que vous pouvez évaluer $F(v)$ et tirer des variables pseudo-aléatoires de la loi avec cette fonction de répartition, de façon iid.

(a) Pour $v \in [v_{\min}, v_{\max}]$ donné, décrivez comment approximer $b(v)$, en utilisant les N premiers éléments d'une suite $\{w_i\}$ de nombres quasi-aléatoires sur $[0,1]$.

(b) Supposons maintenant qu'on peut évaluer $b(v)$. Décrivez comment on peut approximer l'espérance de l'enchère gagnante.

3. (10 points) Pour k entier,

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} = k!.$$

Montrez que les polynômes de Laguerre $L_0(x) = 1$ et $L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$ sont orthogonaux par rapport au produit intérieur

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x)\, dx.$$

4. (10 points) Considerez le problème suivant, en temps discret et avec horizon infini. À $t = 0$, le seul agent a $x_0 = \bar{x}$ unités d'un gateau. À chaque période t, il y a x_t unités du gateau au début de la période, l'agent consomme c_t unités du gateau pendant la période et laisse $x_{t+1} = x_t - c_t$ unités du gateau pour les prochaines périodes. L'agent maximise l'utilité

$$\sum_{t=0}^\infty \beta^t u(c_t).$$

   (a) Quelle est la variable de commande ?

   (b) Quelle est la variable d'état ?

   (c) Donnez la fonction de Bellman pour le problème.

5. (10 points) Considerez le problème de tirer des variables aléatoires de la loi multivariée $N(\mu, \Sigma)$, où μ est $n \times 1$ et Σ est $n \times n$. Vous avez (seulement) la matrice de précision $H = \Sigma^{-1}$, sa décomposition de Cholesky $H = LL^\top$, le covecteur $c = H\mu$, et une façon de tirer des variables aléatoires de la loi $N(0, I_n)$. Décrivez comment utiliser la substitution avant et arrière pour

   (a) calculer μ.

   (b) tirer de la loi $N(0, \Sigma)$.

   (c) tirer de la loi $N(\mu, \Sigma)$ avec seulement une substitution avant et une substitution arrière.

6. (10 points) Considérez le problème de trouver une racine de la fonction $f(x) = e^x - x - 2$ dans l'intervalle $[0, 2]$.

   (a) Avec la méthode de dichotomie, trouvez un intervalle de longeur $\frac{1}{2}$ qui contient une racine.

   (b) À partir de $x_0 = 0$, trouvez les valeurs x_1 et x_2 générées par les deux premières itérations de la méthode de Newton.

7. (10 points) Répondez brièvement aux questions suivantes.

   (a) Considérez la méthode ziggurat. Pour quel avantage numérique est-ce que toutes les couches de la ziggurat ont la même probabilité ?

   (b) Expliquez pourquoi la méthode de BFGS est plus robuste que la méthode de Newton pour trouver le maximum d'une fonction.

   (c) À quoi servent les phases S (sélection) et M (mutation) des méthodes Monte Carlo Séquentiel ?