Il y a sept questions, chacune avec une valeur nominale de 10 points. La note de votre examen final, sur 100, consiste en la somme des sept notes individuelles plus la somme de vos trois meilleures notes.

1. (10 points) Considérez la densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1], \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

   Décrivez comment générer une variable pseudo-aléatoire suivant la loi avec cette densité

   (a) par la méthode de rejet ;

   (b) par l'inversion de la fonction de répartition.

   On suppose que vous disposez d'un générateur des variables i.i.d. uniformes sur $[0,1]$.

2. (10 points) Approximez la valeur actuelle du flux de profit $\pi(t) = e^{gt}$ avec $g = 0.03$, sur l'intervalle $[0,\infty)$, en appliquant le facteur d'actualisation $e^{-\rho t}$ avec $\rho = 0.05$, à l'aide de la règle de quadrature Gauss-Laguerre d'ordre 3. Comparez le résultat à la valeur analytique. Pour l'intégral

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}\,dx,$$

   les nœuds et poids sont :

| Nœuds | Poids |
|---|---|
| 0.41577 | 0.71109 |
| 2.29428 | 0.27852 |
| 6.28995 | 0.01039 |

3. (10 points) Une entreprise minière dispose d'un stock fini d'un minerai non renouvelable. Au début de chaque période $t = 0, 1, 2, \ldots$, le stock restant est noté $x_t \geq 0$. La valeur $x_0$ est donnée. Au cours de la période $t$, elle choisit la quantité à extraire, $u_t$ tonnes. Le minerai extrait est vendu immédiatement à un prix constant $p > 0$ par tonne et engendre un coût $C(u_t)$. L'entreprise actualise les flux monétaires futurs au taux $\beta \in (0,1)$ par période.

   (a) Formulez mathématiquement le problème d'optimisation à horizon infini de l'entreprise, dans le cadre de la programmation dynamique. Votre formulation doit indiquer clairement la fonction objectif, l'équation de transition d'état et l'ensemble de décisions faisables exprimé en fonction de l'état courant.

   (b) Écrivez l'équation de Bellman pour ce problème.

   (c) Décrivez brièvement comment on peut approximer numériquement la fonction de valeur.

4. (10 points) Donnez une approximation de la fonction $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, sous la forme d'une expansion Legendre d'ordre 3. Les polynômes Legendre sur l'intervalle $[-1, 1]$ sont orthogonaux par rapport au produit intérieur

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\, dx.$$

Les polynômes Legendre jusqu'à l'ordre trois, et leurs normes carrées, sont

| $n$ | $P_n(x)$ | $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| 1 | $x$ | 2/3 |
| 2 | $\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ | 2/5 |
| 3 | $\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ | 2/7 |

Indice : l'intégral sur $[-1, 1]$ d'une fonction impaire est zéro et le produit d'une fonction impaire et une fonction paire est une fonction impaire.

5. (10 points) Considérez le problème de trouver une racine du système de fonctions

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - e^{x_2}, \quad f_2 = x_2 e^{x_1} + 2.$$

À partir de $(x_1, x_2) = (0, 0)$, faites une itération de la méthode de Newton.

6. (10 points) Considérez le problème d'évaluation de la densité gaussienne multivariée

$$(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left[ -\tfrac{1}{2} x^\top \Sigma^{-1} x \right]$$

aux vecteurs $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, $m = 1, \ldots, M$, où $M$ est grand. Vous avez la variance $\Sigma$, $n \times n$ et définie positive. Vous pouvez utilisez les décompositions matricielles standard, ainsi que la substitution avant et arrière. Comment peut-on le faire efficacement ?

7. (10 points) Répondez brièvement aux questions suivantes.
   (a) Donnez un exemple d'une méthode de calcul abordée dans ce cours qui se prête au traitement parallèle, ainsi qu'un autre exemple de méthode qui ne s'y prête pas. Expliquez vos réponses brièvement.
   (b) À quoi servent les phases S (sélection) et M (mutation) des méthodes Monte Carlo Séquentiel ?
   (c) Donnez un avantage des nombres quasi-aléatoires et un avantage des variables pseudo-aléatoires pour l'intégration numérique. Expliquez vos réponses brièvement.