ECN 6338 Cours 6

Approximation de fonctions

William McCausland

2022-02-16

Survol du cours 5

Approximations locales

- Approximation de Taylor
- Approximation de Padé

Expansions avec coefficients simples

- Approximation linéaire par morceaux
- Approximations Bernstein, Bernstein itéré
- Approximation Hermite

Expansions avec projections

- Suites de polynômes orthogonaux

L'approximation de Taylor

- L'approximation de Taylor utilise l'information locale suivante à un point x_0 :
  - la valeur $f(x_0)$ de la fonction à approximer,
  - ses n premières dérivées $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$.
- L'approximation est

$$\hat{f}(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0).$$

- La valeur de $\hat{f}$ et de ses n premières dérivées concordent avec celles de f au point x_0.
- L'expansion a $n+1$ paramètres libres à spécifier.
- Peu importe l'ordre n, l'approximation est locale.

L'approximation Padé

- Comme l'approximation de Taylor, une approximation Padé
  - utilise la valeur de f et de ses premières n dérivées à x_0,
  - concorde avec f sur ces valeurs à x_0,
  - a $n+1$ paramètres libres à spécifier.
- L'approximation est une fonction rationnelle, un ratio de polynômes :

$$f(x) \approx r(x) \equiv \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1(x-x_0) + \ldots + p_m(x-x_0)^m}{1 + q_1(x-x_0) + \ldots + q_d(x-x_0)^d},$$

  où $m+d=n$ et souvent $m=d$ ou $m=d+1$.
- La condition $f^i(x_0) = r^i(x_0)$, $i = 0, 1, \ldots, m+n$ s'exprime aussi comme

$$p^i(x) - (f \cdot q)^i(x) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m+d,$$

  $n+1$ équations pour trouver $n+1 = (m+1)+d$ coefficients.

Calcul de l'approximation Padé (2,1) de e^x autour de $x = 0$

- L'approximation $r(x)$ est

$$r(x) = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2}{1 + q_1 x}.$$

- Les coefficients p_0, p_1, p_2 et q_1 sont donnés par

$$\left.(p_0 + p_1 x + p_2 x^2) - e^x(1 + q_1 x)\right|_{x=0} = p_0 - 1 = 0,$$

$$\left.(p_1 + 2p_2 x) - e^x(1 + q_1 x)\right|_{x=0} = p_1 - 1 - q_1 = 0,$$

$$\left.2p_2 - e^x(1 + q_1 x) - 2e^x q_1\right|_{x=0} = 2p_2 - 1 - 2q_1 = 0,$$

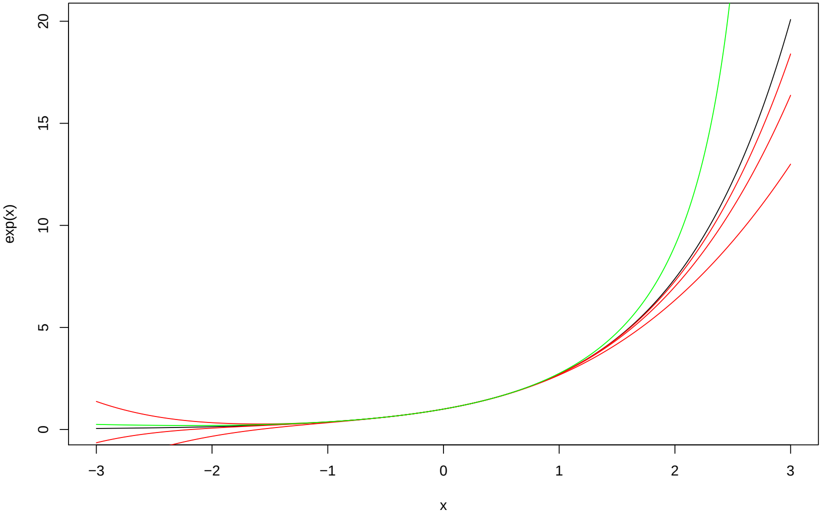
$$\left.-e^x(1 + q_1 x) - 3e^x q_1\right|_{x=0} = -1 - 3q_1 = 0.$$

- La première équation donne $p_0 = 1$; la dernière, $q_1 = -\frac{1}{3}$.
- Ensuite, la deuxième équation donne $p_1 = 1 + q_1 = \frac{2}{3}$; la troisième, $p_2 = \frac{1}{2} + q_1 = \frac{1}{6}$.

Exemple I, Taylor et Padé, $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

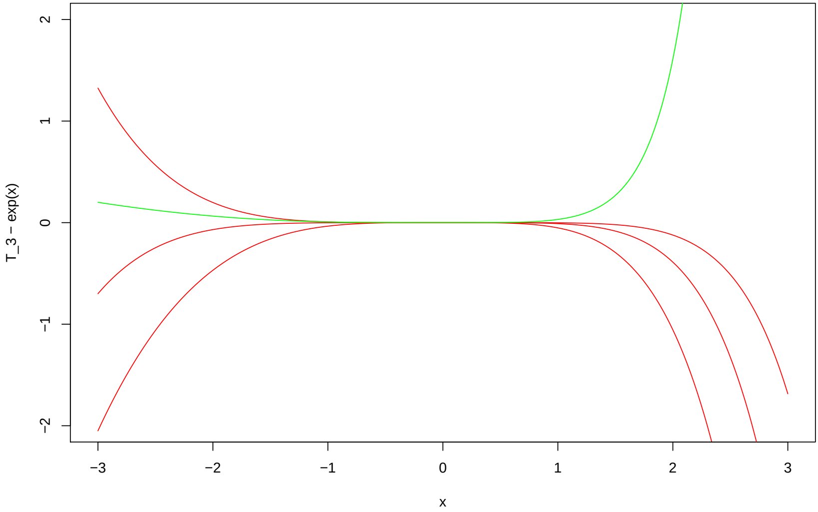
Approx. de Taylor (ordres 3, 4, 5, rouge), de Padé ((2,1), vert) :

```
source('Taylor_Pade_exp.R')
```



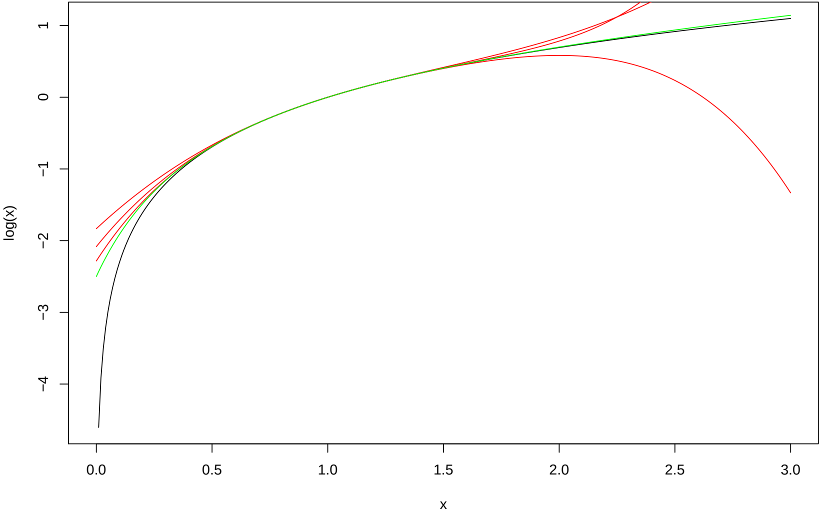
Exemple I, erreurs d'approximation

```
source('Taylor_Pade_exp_error.R')
```



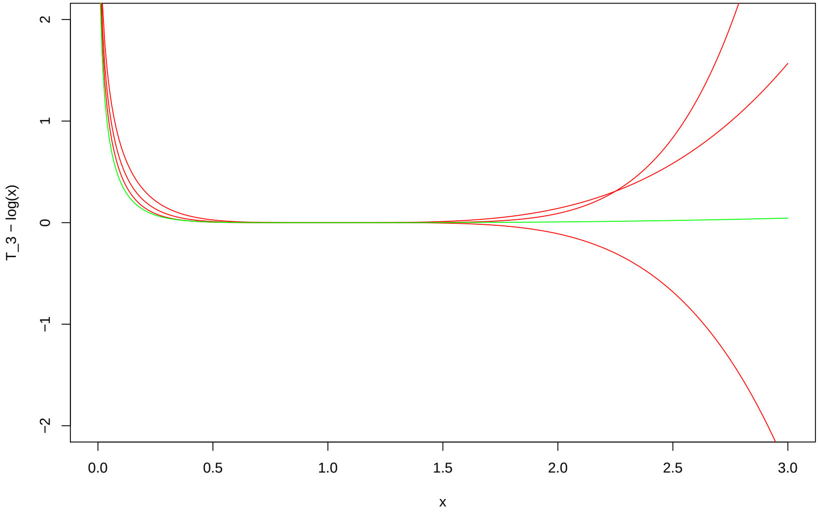
Exemple II, Taylor et Padé, $f(x) = \log x$, $x_0 = 1$.

```
source('Taylor_Pade_log.R')
```

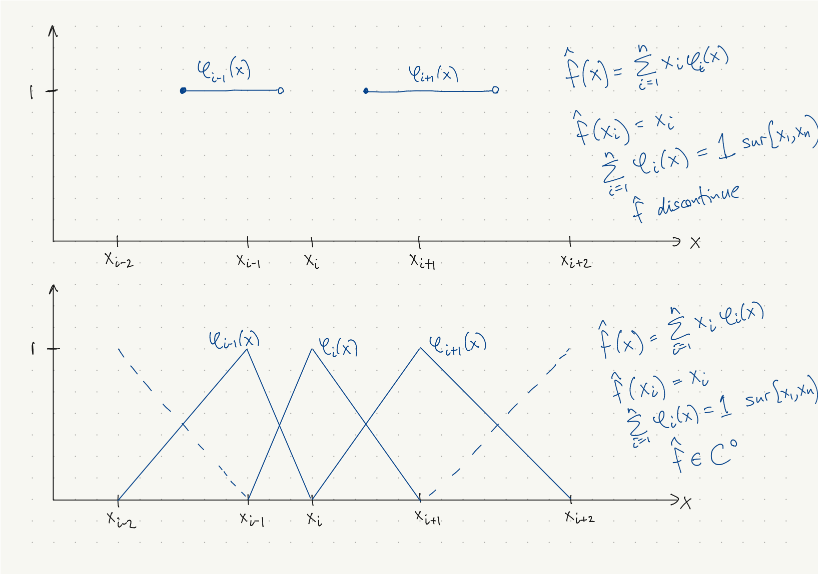


Exemple II, erreurs d'approximation

```
source('Taylor_Pade_log_error.R')
```

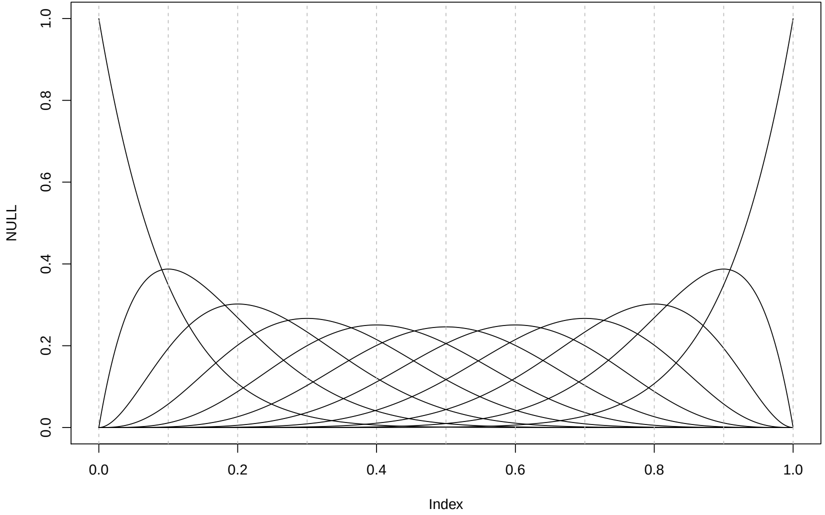


Approx. constante par morceaux et linéaire par morceaux



Polynômes de Bernstein d'ordre $n = 10$

```r
source('Bernstein.R')
```



Approximation de Bernstein

- La région d'approximation est un intervalle fini $[a, b]$, normalisé à $[0, 1]$
- L'approximation d'ordre n utilise les évaluations de f sur une grille $0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$.
- L'approximation est

$$\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{i,n}(x),$$

où $b_{i,n}$ est le i-ième polynôme de Bernstein de degré n :

$$b_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

Interpolation à la Hermite

Quatre fonctions cubiques sur l'intervalle $[0, 1]$:

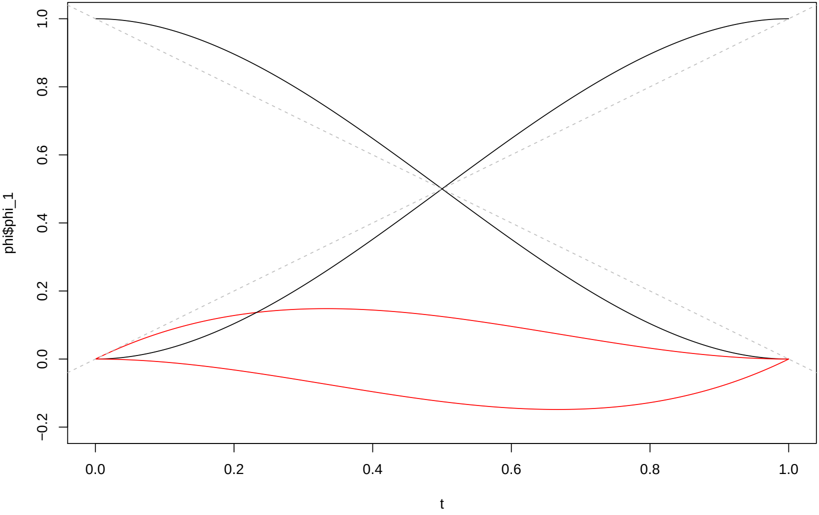
$$\varphi_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad \varphi_2(t) = t^3 - 2t^2 + t,$$

$$\varphi_3(t) = -2t^3 + 3t^2, \quad \varphi_4(t) = t^3 - t^2.$$

Fonction f	$f(0)$	$f'(0)$	$f(1)$	$f'(1)$
φ_1	1	0	0	0
φ_2	0	1	0	0
φ_3	0	0	1	0
φ_4	0	0	0	1
$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4$	a_1	a_2	a_3	a_4

Graphique, cubiques de l'interpolation à la Hermite

```r
source('Hermite_piece.R')
```



Notes, interpolation cubique à la Hermite

- Problème : interpoler une fonction avec la valeur et la dérivée spécifié à quelques points.
- Les intrants :
  - des points $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$,
  - des valeurs $f(x_1), \ldots, f(x_n)$,
  - et les dérivées $f'(x_1), \ldots, f'(x_n)$.
- Le résultat : une fonction
  - cubique par morceaux $[x_i, x_{i+1}]$, (piecewise cubic function)
  - C^1 dans l'intervalle $[x_1, x_n]$,
  - ayant une deuxième dérivée discontinu à chaque i
- Il faut tranformer les fonctions $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ pour avoir les fonctions $\varphi\colon [x_i, x_{i+1}]$.
- Il y a une version (rarement utilisée) avec 6 fonctions quintique φ qui donne une fonction C^2 avec les valeurs, premières dérivées et deuxième dérivées.