ECN 6338 Cours 12 et 13

La Programmation Dynamique

William McCausland

2025-04-14

Un problème d'optimisation dynamique déterministe à horizon fini

- Objectif :

$$\sum_{t=1}^{T} \pi(x_t, u_t, t) + W(x_{T+1}),$$

  où
  - t est l'index du temps,
  - x_t est l'état en période t, $t = 1, \ldots, T+1$,
  - u_t est la décision (une variable de choix, control en anglais),
  - $\pi(\cdot)$ est le flux de valeur (souvent profit ou utilité),
  - $W(\cdot)$ est la valeur terminale.
- Contraintes :
  - x_1 donné,
  - $x_{t+1} = F(x_t, u_t, t)$, $t = 1, \ldots, T$,
  - $u_t \in D(x_t, t)$, $t = 1, \ldots, T$.

La version à horizon infini

- L'objectif devient
$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \pi(x_t, u_t).$$
  - le temps commence à zéro,
  - il n'y a pas de valeur terminale,
  - cas très spécial de $\pi(x_t, u_t, t)$: $\beta^t \pi(x_t, u_t)$.
- Quant aux contraintes :
  - $F(x_t, u_t)$ au lieu de $F(x_t, u_t, t)$ (pas vraiment une restriction),
  - $u_t \in D(x_t)$ au lieu de $D(x_t, t)$,
  - x_0 donnée au lieu de x_1.

Un exemple : accumulation de la richesse

- Le modèle :

$$\max_{c_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.c.} \quad k_{t+1} = F(k_t) - c_t,\ k_0 \text{ donné,}$$

- Notes :
  - L'état est le stock du capital : $x_t = k_t$
  - La décision est la consommation : $u_t = c_t$
  - F est une fonction de production d'un bien homogène (pas de distinction entre le capital et le seul bien de consommation).
  - Cas spécial important : $F(k) = (1-\delta)k + f(k)$, avec amortissement du capital.
  - Une interprétation du problème : celui du planificateur central dans un modèle simple de croissance néoclassique : il y a un équilibre concurrentiel qui donne le même résultat.

Autres exemples

- Problème dynamique d'un monopôle (Judd, page 404) :
  - la décision est la quantité de travail l et le dividende c
  - l'état est la quantité de capital k dans la firme
  - l'état prochain est k plus le profit (comme fonction de l et k) moins le dividende
  - le flux de valeur est le dividende versé durant une période
- Problème d'inventaire agricole (Judd, page 428)
  - la décision est le choix d'intrants de production agricole
  - l'état est l'inventaire agricole
  - l'état prochain est la production moins la consommation
  - le flux de valeur est l'utilité de la consommation d'une période
- Problème de gestion d'un forêt
  - la décision est la quantité récoltée de chaque type (âge) d'arbre,
  - l'état est la quantité de chaque type d'arbre,
  - l'état prochain est déterminé par la croissance des arbres et les quantités récoltées,
  - le flux de valeur est le profit apporté par la récolte d'une période

La fonction de valeur

La fonction de valeur est comme une fonction d'utilité indirecte :

- Soit $u(x, y)$ la fonction d'utilité pour deux biens, en quantités x et y.
- La contrainte budgétaire est $p_x x + p_y y = m$.
- La fonction d'utilité indirecte est

$$v(p_x, p_y, m) = \max_{x,y} u(x, y) \quad \text{s.c.} \quad p_x x + p_y y = m.$$

La fonction de valeur pour le problème à horizon fini est

$$V(x, t) = \sup_{u_t,\ldots,u_T} \sum_{s=t}^{T} \pi(x_s, u_s, s) + W(x_{T+1}),$$

sous les contraintes

- $x_t = x$,
- $x_{s+1} = F(x_s, u_s, s)$, $s = t, \ldots, T$,
- $u_s \in D(x_s, s)$, $s = t, \ldots, T$.

Le principe d'optimalilté de Bellman

Une commande (décision) optimale $u_t, \ldots, u_T$ *a la propriété que quelque soit l'état initial* x_t *et la décision initiale* u_t*, les décisions restantes* $(u_{t+1}, \ldots, u_T)$ *doivent être une commande optimale pour l'état* $x_{t+1} = F(x_t, u_t, t)$ *résultant de la décision* u_t*.*

Notes :

- Une relation entre fonctions de valeur de différentes périodes :

$$V(x,t) = \sup_{u \in D(x,t)} \pi(x,u,t) + V(F(x,u,t), t+1).$$

- Si $u \in D(x,t)$ atteint le sup, la fonction de décision est

$$U(x,t) = \arg \max_{u \in D(x,t)} \pi(x,u,t) + V(F(x,u,t), t+1).$$

- $U(x,t)$, $V(x,t)$ sans mémoire, fonctions seulement de x et t.

Trouver la fonction de valeur $V(x, 1)$

- Une condition terminal : $V(x, T+1) = W(x)$, une fonction connue.
- Les autres $V(\cdot, t)$ par raisonnement à rebours : l'application de l'opérateur défini par

$$V(x, t) = \sup_{u \in D(x,t)} \pi(x, u, t) + V(F(x, u, t), t+1).$$

- Attention : l'opérateur prend une fonction de x et donne une fonction de x. La valeur de t est fixe.

Le problème déterministe à horizon infinie

- La fonction de valeur est maintenant définie de façon récursive :

$$V(x) = \sup_{u \in D(x)} \pi(x, u) + \beta V(F(x, u)),$$

  ou $V = TV$; V est une fonction de $x \in X$, T est un opérateur.
- L'équation est une équation *fonctionnelle*, sa solution est V, la *fonction* de valeur.
- Une fonction de décision est maintenant une fonction $U(x)$ qui vérifie

$$U(x) \in \arg\max_{u \in D(x)} \pi(x, u) + \beta V(F(x, u)).$$

Le théorème des applications contractantes et l'itération de la fonction de valeur

- Le théorème des applications contractantes (contraction mapping theorem) : si $0 < \beta < 1$, $\pi(x, u)$ est borné et X est compacte,
  - T est monotone ($y_1 \geq y_2 \Rightarrow Ty_1 \geq Ty_2$)
  - T est une contraction de module β ($\|Ty_1 - Ty_2\| \leq \beta \|y_1 - y_2\|$)
  - $V = TV$ a une solution (T a un point fixe) unique.
- L'itération de la fonction de valeur donne une suite de fonctions de valeur V^l qui converge vers V : $V^{l+1} = TV^l$, ou

$$V^{l+1}(x) = \sup_{u \in D(x)} \pi(x, u) + \beta V^l(F(x, u)).$$

- Un sous-produit est une suite de fonctions de décision U^l correspondantes:

$$U^{l+1}(x) \in \arg \max_{u \in D(x)} \pi(x, u) + \beta V^l(F(x, u)).$$

Comment appliquer l'opérateur en pratique

- Prenons l'exemple de l'accumulation de richesse.
- La fonction de valeur est un point fixe de l'opérateur T, où

$$(TV)(k) \equiv \max_{0 \leq c \leq F(k)} u(c) + \beta V(F(k) - c).$$

- Comment trouver une approximation de $V(k)$?
- Une méthode : permettre seulement les valeurs de k sur une grille $K = \{k^m, \ldots, k^M\}$.
- En pratique il faut prendre $k^+ \equiv F(k) - c$, le capital à la prochaine période, comme la variable de décision.
- L'équation Bellman avec le changement de variables :

$$V(k) = \max_{0 \leq k^+ \leq F(k)} u(F(k) - k^+) + \beta V(k^+).$$

- L'équation Bellman avec $V \colon K \to K$ au lieu de $V \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$:

$$V(k) = \max_{k^+ \in K} u(F(k) - k^+) + \beta V(k^+).$$

- Elle est un système d'équations non-linéaire ; la solution est un vecteur.

Exemple (page 425)

Prenons :

- $\beta = 0.96$
- $u(c) = c^{\gamma+1}/(\gamma+1)$, $\gamma = -2$.
- $F(k) = k + f(k)$, où $f(k) = \frac{1-\beta}{\alpha\beta} k^{\alpha}$, $\alpha = 0.25$
- $k^m = 0.8$, $k^M = 1.2$, $\kappa = 0.001$, alors

$$K = \{0.800, 0.801, 0.802, \ldots, 1.200\}.$$

Notes :

- k^{ss} est un état stationnaire si $k^{ss} + f(k^{ss}) - U(k^{ss}) = k^{ss}$, où $U(\cdot)$ est la fonction de décision optimale.
- β dans la fonction de production est étrange, le coefficient $(1-\beta)/(\alpha\beta)$ fait en sorte que $k^{ss} = 1$.

Choisir une fonction de valeur initiale

- Distinguez $U_c(k)$, la fonction de décision qui donne la consommation actuelle, et $U_k(k)$, celle qui donne le capital prochain.
- Notez que $U_c(k) = f(k)$ donne $k^+ = k$ ou $U_k(k) = k$.
- Cette stratégie est faisable mais généralement sous-optimale lorsque $k \neq k^{ss} = 1$.
- Autour de $k = k^{ss}$, $U_c(k)$ et $U_k(k)$ devraient être près de les fonctions de décision optimales.
- La fonction de valeur (non-optimale) $V^c(k)$ associée à $U_c(k) = f(k)$ (non-optimale) vérifie

$$V^c(k) = u(f(k)) + \beta V^c(k), \text{ ou } V^c(k) = u(f(k))/(1-\beta).$$

- Notez que $V^c(k) \leq V(k)$, où $V(k)$ est la fonction de valeur associée à la fonction de décision optimale.
- Considérez aussi $V_z(k) = 0$ comme fonction de valeur initiale.
- Dans le code suivant, U signifie U_k.

Code initial : préférences et technologies

```r
# Valeurs des paramètres
gamma <- -2.0   # Paramètre de préférence
beta <- 0.96    # Paramètre d'impatience
alpha <- 0.25   # Paramètre de production

# Fonction d'utilité
u <- function(c) {
  ifelse(c>0, c^(gamma + 1)/(gamma + 1), -Inf)
}

# Fonction de production
f <- function(k) {
  ((1-beta)/(alpha*beta)) * k^alpha
}
```

Code initial : grille et précomputation

```
# Grille de capital
kappa <- 0.001
k <- seq(0.5, 1.5, by=kappa)
N <- length(k)

# Matrice de valeurs de u(k + f(k) - k+)
u_k <- function(k, kplus) {
  u(k + f(k) - kplus)
}
u_tab <- outer(k, k, u_k)

# Fonction de valeur initial, épargne zéro
V_c <- u(f(k))/(1-beta)

# Fonction de valeur initial, zéro
V_z <- rep(0, N)
```

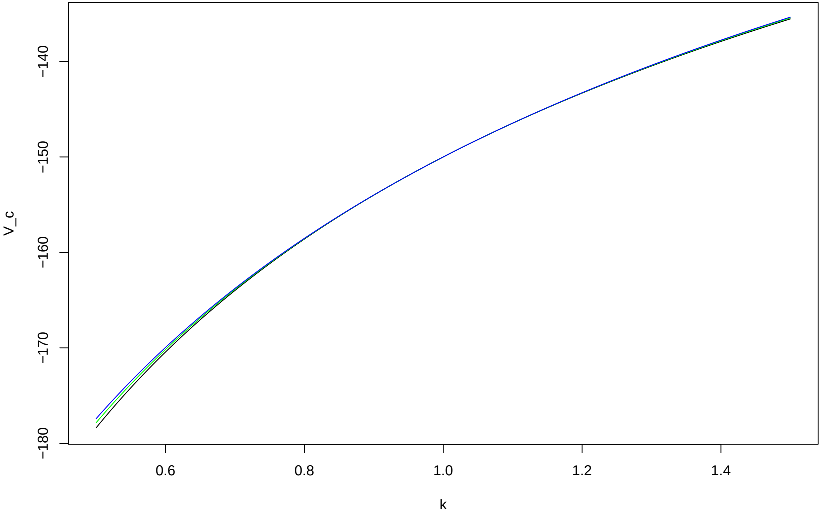
Code, itération de la fonction de valeur

```
# Iteration de la fonction de valeur
VU_suiv <- function(V) {
  V_suiv <- rep(0, N);
  U_suiv <- rep(0, N); U_suiv_i <- vector('integer', N)
  for (i in 1:N) {
    # k[i_plus] est la décision optimale à l'état k[i]
    i_plus = which.max(u_tab[i,] + beta*V)
    U_suiv[i] = k[i_plus]; U_suiv_i[i] = i_plus
    # V_suiv[i] est la fonction V suivante à l'état k[i]
    V_suiv[i] = u_tab[i, i_plus] + beta*V[i_plus]
  }
  list(V=V_suiv, U=U_suiv, U_i=U_suiv_i)
}

# Deux itérations de T à partir de V_c
VUs_c <- VU_suiv(V_c); VUss_c <- VU_suiv(VUs_c$V)
```

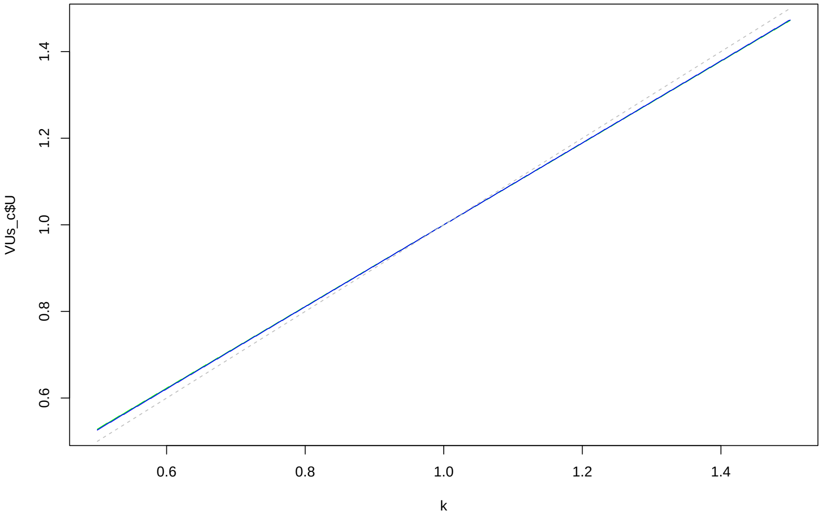
La fonction de valeur $TV_c(k)$ (deux itérations)

```
plot(k, V_c, type='l')
lines(k, VUs_c$V, col='green'); lines(k, VUss_c$V, col='blu
```



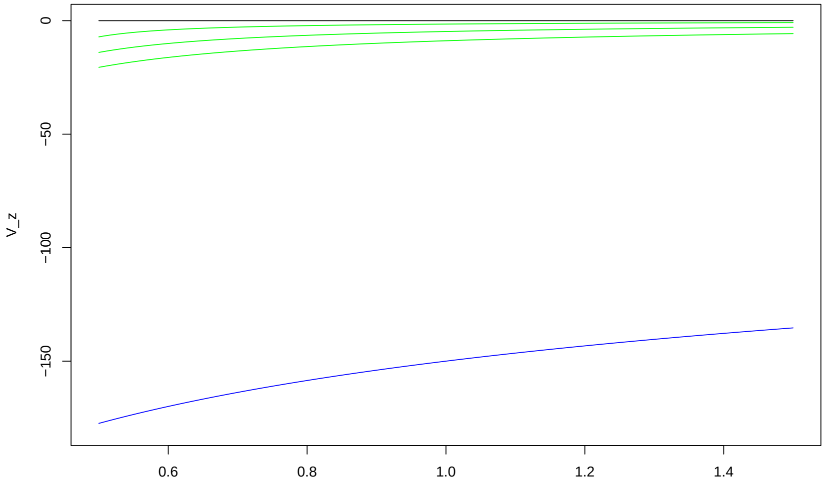
La fonction de décision après deux itération de $V_c(k)$

```
plot(k, VUs_c$U, type='l', col='green'); lines(k, VUss_c$U,
lines(k, k, lty='dashed', col='grey');
```



Les fonctions de valeur $T^i V_z(k)$, $i = 1, 2, 3$

```
plot(k, V_z, type='l', ylim = c(-180, 0)); V = V_z
for (i in 1:3)
  { V <- VU_suiv(V)$V; lines(k, V, col='green') }
lines(k, VUss_c$V, col='blue')
```



Deux types d'itération

Les deux types d'itération :

1. Itération de la fonction de valeur : ce qu'on a déjà vu
2. Itération de la fonction de décision : la matière prochaine

Pour faire l'itération de la fonction de décision, il faut pouvoir calculer une approximation de la valeur de cette fonction de décision comme fonction de l'état : pour une fonction de décision $U\colon K \to \mathbb{R}$ donnée, il faut approximer sa valeur $V^U\colon K \to \mathbb{R}$.

Approximation de V^U pour U_k donnée

- Pour une fonction de décision $k^+ = U_k(k)$, pas forcément optimale, on peut calculer, pour chaque $k_0 \in K$, la suite d'état

$$k_0, U_k(k_0), U_k^{(2)}(k_0), U_k^{(3)}(k_0), \ldots,$$

  où $U_k^{(0)}(k_0) = k_0$, $U_k^{(i+1)}(k_0) = U_k(U_k^{(i)}(k_0))$.
- On peut approximer la fonction de valeur correspondante, le vecteur $V^U(k_0)$, $k_0 \in K$ par $\hat{V}^U(k_0)$ défini comme

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u(U^{(t)}(k_0) + f(U^{(t)}(k_0)) - U^{(t+1)}(k_0)) + \beta^{T+1} \tilde{V}(U^{(T+1)}(k_0)),$$

  où $\tilde{V}$ est une approximation de la fonction de valeur optimale.
- Si on fait ce calcul direct pour chaque k_0 il peut y avoir des calculs redondants; pire, le calcul direct ne fonctionne pas pour les problèmes analogues stochastiques.

La version rétrograde de l'approximation de V^U

Cette version rétrograde évite des calculs redondants et se généralise aux problèmes stochastiques, équation (12.4.2) de Judd :

- $W^0 = V$ (un vecteur, une approximation initiale de V^U)
- Pour $j = 0, \ldots, T$:
  - Pour $k \in K$,

$$W^{j+1}(k) = u(k + f(k) - U(k)) + \beta W^j(U(k)).$$

- $V^U \approx \hat{V}^U \equiv W^{T+1}$ (un vecteur, l'approximation finale de V^U)

Code, approximation de V^U, version rétrograde

```r
# Approximation de V^U, version rétrograde
VdeU <- function(VU, n_iter) {
  # VU$V est W0
  # VU$U est la fonction de décision qui donne k+
  # VU$Ui donne l'index de k+
  V <- VU$V; V_suiv = rep(0, N);
  for (i in 1:n_iter) {
    for (i in 1:N) {
      Ui = VU$U_i[i]
      V_suiv[i] = u_tab[i, Ui] + beta*V[Ui]
    }
    V <- V_suiv
  }
  V
}
```

Itération de la fonction de décision

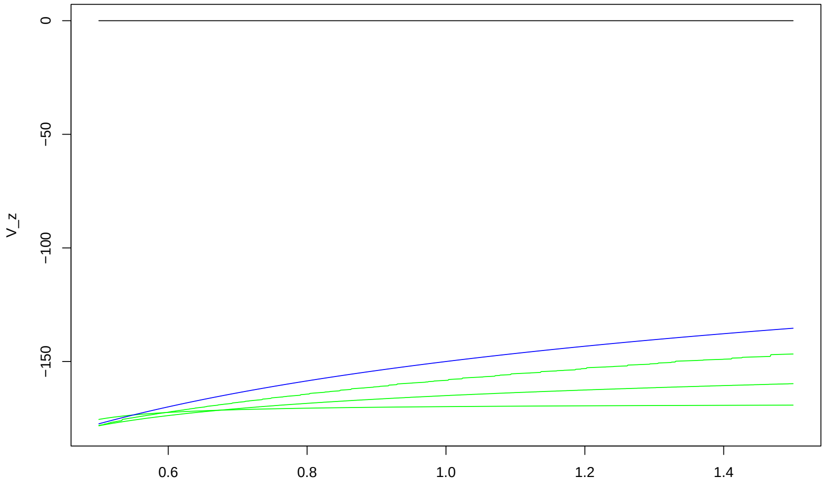
Itérez les étapes suivantes jusqu'à ce que $\|V^{l+1} - V^l\| < \epsilon$:

1. Utilisez V^l pour calculer U^{l+1}, la fonction de décision obtenue comme sous-produit de l'itération de la fonction de valeur.
2. Utilisez U^{l+1} et V^l (pour la valeur résiduelle à $t = T + 1$) pour calculer V^{l+1} comme

$$V^{l+1} \equiv \hat{V}^{U^{l+1}}$$

Iteration de la fonction de décision (graphique)

```
plot(k, V_z, type='l', ylim = c(-180, 0)); V <- V_z
for (i in 1:3)
  { VU <- VU_suiv(V); V <- VdeU(VU, 100); lines(k, V, col=
lines(k, VUss_c$V, col='blue')
```



Problèmes dynamiques avec incertitude

- Soit X l'ensemble d'états possibles.
- Rappel, évolution des états dans les modèles déterministes :

$$x_{t+1} = F(x_t, u_t, t) \quad \text{ou} \quad x_{t+1} = F(x_t, u_t).$$

- Dans les modèles stochastiques, l'évolution de l'état devient stochastique :

$$F(A, x_t, u_t, t) \equiv \Pr[x_{t+1} \in A | x_t, u_t, t], \; A \subseteq X.$$

- Le problème général est la maximisation de

$$E\left[\sum_{t=1}^{T} \pi(x_t, u_t, t) + W(x_{T+1})\right] \quad \text{ou} \quad E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \pi(x_t, u_t)\right].$$

  sous les contraintes décrites en termes de $F(\cdot)$, $D(\cdot)$ et x_0.
- Notez la séparabilité et la linéarité :
  - temporelle dans les problèmes déterministes et stochastiques,
  - l'espérance dans les problèmes stochastiques.

Structure intertemporelle avec incertitude

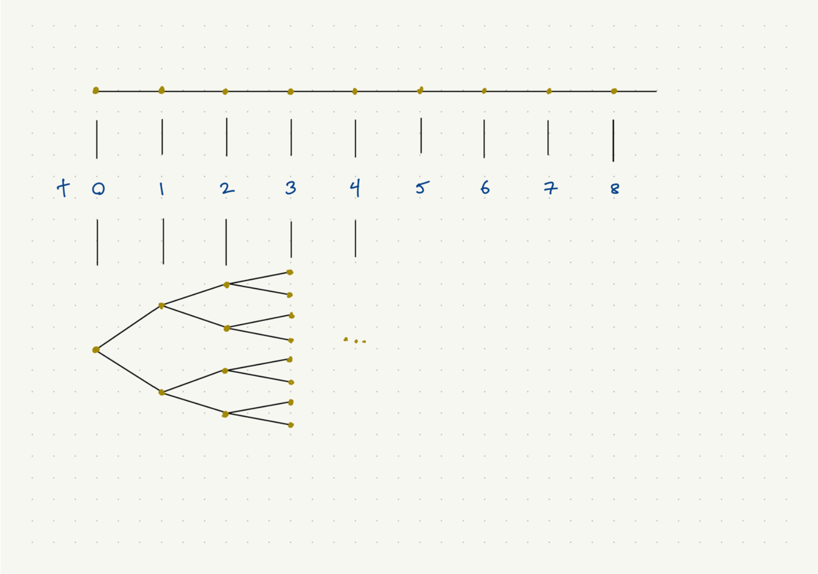


Figure 1: Deux structures avec autosimilarité

Les équations de Bellman dans le cas stochastique

Horizon fini :

$$V(x,t) = \sup_{u \in D(x_t,t)} \pi(x,u,t) + E\left[V(x_{t+1},t+1)|x_t = x, u_t = u\right],$$

$$V(x, T+1) = W(x).$$

Horizon infini :

$$V(x) = \sup_{u \in D(x)} \pi(x,u) + \beta E[V(x^+)|x,u].$$

Exemple, modèle de recherche de McCall

- Une simplification du modèle de McCall (1970) dans "Quantitative Economics with Python" par Sargent et Stachurski, section Job Search I: The McCall Search Model
- L'état est la réalisation w_t d'une offre de salaire aléatoire.
- La densité $q(w_t|w_{t-1}, u_{t-1}) = q(w_t)$ ne dépend pas de w_{t-1}, u_{t-1}. Soit W l'ensemble de valeurs possibles des w_t.
- L'action u_t est d'accepter ($u_t = 1$) l'offre w_t et gagner w_t chaque période à tout jamais ou de rejeter ($u_t = 0$) l'offre, gagner c à t et attendre une autre offre.
- L'agent maximise

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t\right],$$

où y_t dépend du moment t^* où l'agent accepte l'offre :

$$y_t \equiv \begin{cases} c & t < t^* \\ w_{t^*} & t \geq t^* \end{cases}$$

L'équation de Bellman

L'équation de Bellman est (pour W fini)

$$V(w) = \max\left\{\frac{w}{1-\beta}, c + \beta E[V(w')]\right\}$$
$$= \max\left\{\frac{w}{1-\beta}, c + \beta \sum_{v \in W} V(v)q(v)\right\}.$$

Notes :

- Le terme $c + \beta E[V(w')]$ ne dépend pas de w, ce qui simplifie énormément le problème.
- L'action optimale $\sigma(w) \in \{0, 1\}$ doit être de la forme où l'agent accepte une offre plus grande ou égale à $\bar{w}$ et rejette une offre moins grande que $\bar{w}$.
- Le salaire de réserve $\bar{w}$ est $(1-\beta)(c + \beta E[V(w')])$.
- Intuition : $\bar{w}$ devrait être croissant en β et c.

La spécification des détails du problème

La spécification :

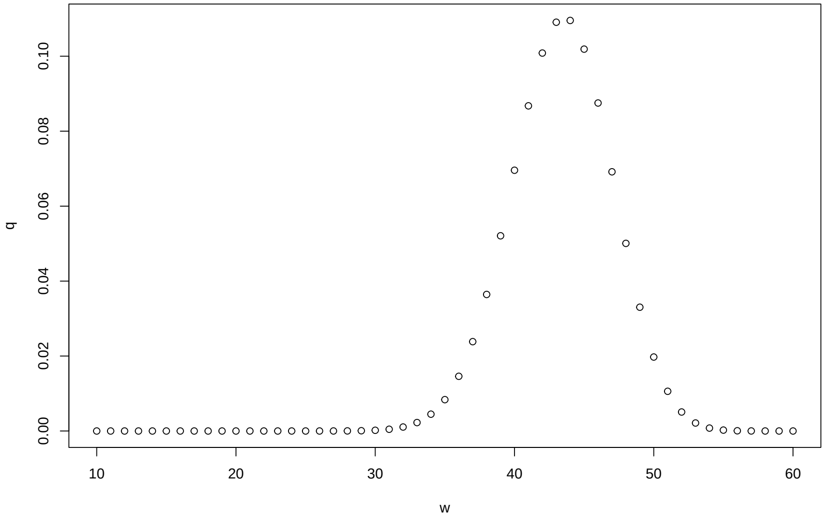
- Valeurs des paramètres : $\beta = 0.99$, $c = 25$.
- Loi de w : $w - 10 \sim \mathrm{Bb}(50, 200, 100)$ (beta-binomial)
- $k \equiv w - 10$ est un mélange : $\pi \sim \mathrm{Be}(200, 100)$, $k|\pi \sim \mathrm{Bi}(50, \pi)$.

```r
# Valeurs des paramètres
beta <- 0.99
c <- 25

# Loi de w : valeurs w, probabilités q
w <- 10:60
n = 50; a <- 200; b <- 100; k <- w-10
lnq <- lchoose(n, k) + lbeta(a+k, b+n-k) - lbeta(a, b)
q <- exp(lnq)
```

La loi discrète des offres de salaire

```r
plot(w, q, type='p')
```



L'itération de la fonction de valeur

- Dans un premier temps, on ne profite pas de la structure du problème.
- On commence par la fonction de valeur qui correspond à la fonction de décision $\sigma_0(w) = 1$, selon laquelle on accepte chaque offre :

$$V^{\sigma_0}(w) = \frac{w}{1-\beta}.$$

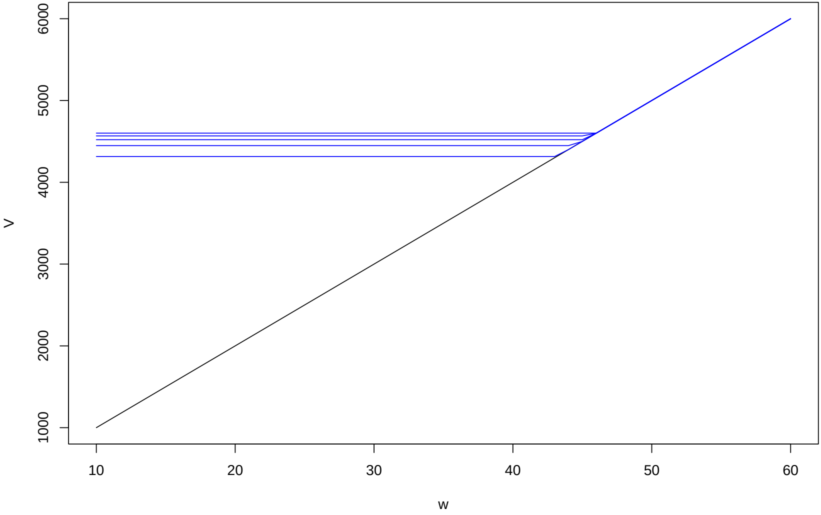
- On applique l'opérateur T de façon répétitive jusqu'à la convergence, où

$$(TV)(w) = \max\left\{\frac{w}{1-\beta}, c + \beta \sum_{v \in W} V(v)q(v)\right\}.$$

```
library(geometry)
V0 <- w/(1-beta)
T <- function(V) {pmax(w/(1-beta), c+beta*dot(V, q))}
```

L'iteration de la fonction de valeur (graphique)

```r
V = V0; plot(w, V, type='l')
for (i in 1:5) {V = T(V); lines(w, V, col='blue')}
```



L'itération du salaire de réserve

- On définit $h = \bar{w}/(1-\beta) = c + \beta E[V(w')]$.
- En termes de h, l'équation de Bellman s'écrit

$$V(w) = \max\left\{\frac{w}{1-\beta},\, h\right\}.$$

- Si on substitue $V(w)$ dans la définition de h, on obtient

$$h = c + \beta E\left[\max\left\{\frac{w'}{1-\beta},\, h\right\}\right].$$

- On peut résoudre cette équation non-linéaire avec l'itération

$$h' = c + \beta \sum_{v \in W} \max\left\{\frac{v}{1-\beta},\, h\right\} q(v).$$

- C'est une équation scalaire, donc plus facile à résoudre numériquement, bien qu'elle nécessite le calcul d'un produit intérieur par itération.

L'itération du salaire de réserve

```r
wbar <- function(beta_c, tol) {
  beta <- beta_c[1]; c <- beta_c[2]
  h <- c / (1-beta)
  repeat {
    h_plus <- c + beta * dot(pmax(w/(1-beta), h), q)
    if (abs(h - h_plus) < tol) break
    h <- h_plus
  }
  wbar <- (1-beta) * h
}
```

Code pour une graphique de $\bar{w}$ comme fonction de β, c.

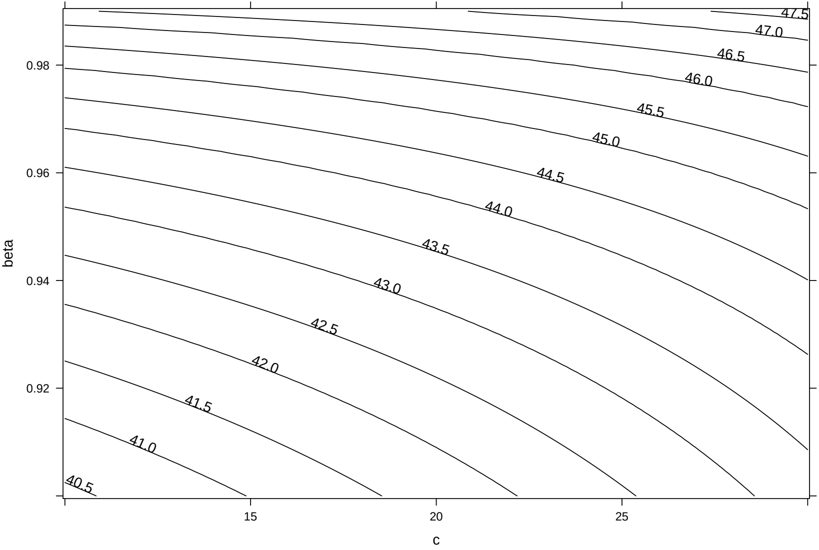
```
# Grilles de points pour beta et c
beta_gr <- seq(0.9, 0.99, by=0.001)
c_gr <- seq(10, 30, by=0.1)

# Tableau des pairs (beta, c)
bc <- as.matrix(expand.grid(beta_gr, c_gr))
colnames(bc) <- c('beta', 'c')

# Évaluer la fonction wbar à chaque pair (beta, c)
wbar_c <- apply(bc, 1, wbar, tol = 1e-6)
df <- data.frame(wbar_fn = wbar_c, bc)
```

Salaire de réserve comme fonction de β et c

```r
library(lattice)
contourplot(wbar_fn ~ c*beta, data=df, cuts=12)
```



Un modèle avec séparation

- Un autre modèle du type McCall au site QuantEcon
- Job Search II: Search and Separation
- L'agent entre dans la période t
  - ou avec emploi à salaire w_e, auquel cas l'agent reçoit le flux d'utilité $u(w_e)$ et ensuite est congédié avec probabilité α.
  - ou sans emploi, auquel cas l'agent reçoit une offre w_t et choisit entre travailler au salaire w_t (jusqu'au congédiement) ou recevoir c et rester sans emploi au début de la prochaine période. Le flux d'utilité est $u(w_t)$ ou $u(c)$, respectivement.
- La fonction d'utilité est

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(y_t)\right].$$

- Soit $v(w_e)$ l'utilité espérée d'un agent avec emploi au début de la période, au salaire w_e.
- Soit $h(w)$ l'utilité espérée d'un agent sans emploi qui reçoit une offre w au début de la période.

Une autre perspective

- L'état est (e, w), où
  - $e \in \{0, 1\}$, ($e = 1$ veut dire avec emploi; $e = 0$, sans emploi)
  - w est le salaire, interprété comme
    - le salaire d'emploi déjà accepté (w_e) dans le passé si $e = 1$,
    - l'offre de salaire actuel si $e = 0$.
- On peut définir une fonction $V(e, w)$ comme

$$V(e, w) = \begin{cases} v(w) & e = 1 \\ h(w) & e = 0 \end{cases}$$

- Notez que l'agent a un choix (accepter ou rejeter l'offre) seulement quand $e = 0$.
- On n'a pas besoin d'une notation différente pour w_e (salaire actuel) et w (offre de salaire), l'interprétation est déterminée par e.

Les équations de Bellman

Les deux équations tiennent de façon simultanée :

$$v(w_e) = u(w_e) + \beta \left[(1-\alpha) v(w_e) + \alpha \sum_{w' \in W} h(w') q(w') \right],$$

$$h(w) = \max \left\{ v(w),\; u(c) + \beta \sum_{w' \in W} h(w') q(w') \right\}.$$

Encore une fois, une reformulation simplifie l'analyse :

$$d \equiv E[h(w')] = \sum_{w' \in W} h(w') q(w').$$

On peut écrire maintenant (pas besoin de distinguer w et w_e)

$$v(w) = u(w) + \beta[(1-\alpha) v(w) + \alpha d],$$

$$h(w) = \max\{v(w), u(c) + \beta d\},$$

$$d = \sum_{w' \in W} h(w') q(w') = \sum_{w' \in W} \max\{v(w'), u(c) + \beta d\} q(w').$$

Notes sur le problème

- L'équation pour $h(w)$ étant éliminée, on peut itérer les étapes suivantes jusqu'à ce que tienne une condition de tolérance :

$$d_{n+1} = \sum_{w' \in W} \max\{v_n(w'), u(c) + \beta d_n\} q(w'),$$

$$v_{n+1}(w) = u(w) + \beta[(1-\alpha)v_n(w) + \alpha d_n].$$

- Le salaire de réserve $\bar{w}$ est maintenant la solution de l'équation

$$v(\bar{w}) = u(c) + \beta d.$$

La spécification du problème

- La fonction d'utilité :

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

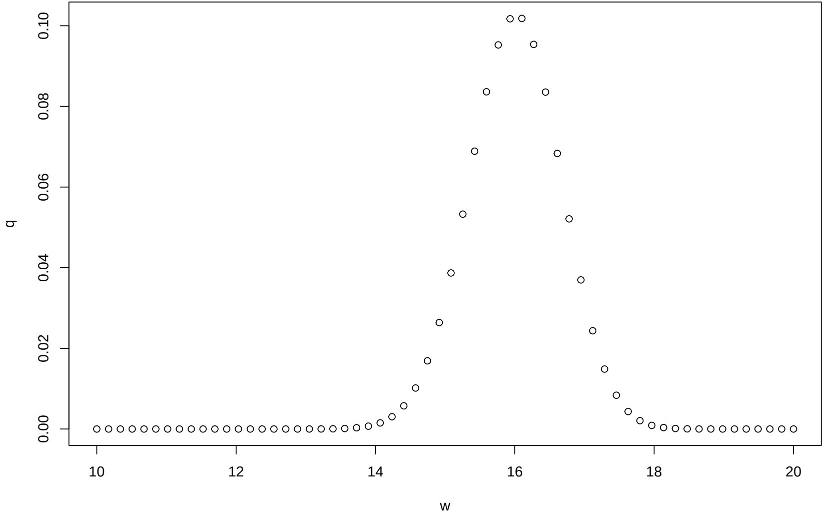
- Les valeurs des paramètres sont : $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.98$, $\sigma = 2$, $c = 6$.
- Loi de w : $\frac{59}{10}(w - 10) \sim \mathrm{Bb}(59, 600, 400)$ (beta-binomial)

```
# Valeurs des paramètres
alpha <- 0.2; beta <- 0.98; sigma <- 2; c <- 6

# Loi de w : valeurs w, probabilités q
w <- seq(10, 20, length=60)
n = 59; a <- 600; b <- 400; k <- (59/10)*(w-10)
lnq <- lchoose(n, k) + lbeta(a+k, b+n-k) - lbeta(a, b)
q <- exp(lnq)
```

La loi discrète des offres de salaire

```
plot(w, q, type='p')
```



L'itération en code

```r
# Fonction d'utilité et des évaluations préliminaires
u <- function(w, sigma) { (w^(1-sigma)-1) / (1-sigma) }
uw = u(w, sigma)
uc = u(c, sigma)

# Itération de Bellman
T <- function(vd) {
  v_plus <- uw + beta * ((1-alpha) * vd$v + alpha * vd$d)
  d_plus <- sum(pmax(vd$v, uc + beta * vd$d) * q)
  list(v = v_plus, d = d_plus)
}
```

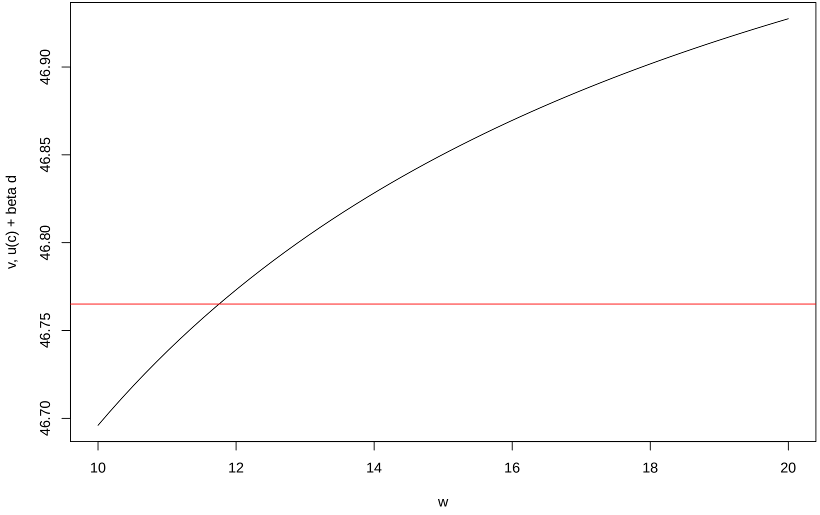
Trouver la fonction de valeur $v(w)$ et $d \equiv E[h(w')]$

```
solve_model <- function(tol=1e-5, max_iter=2000) {
  vd <- list(v = rep(1, length(w)), d=1)
  for (i in 1:max_iter) {
    Tvd <- T(vd)
    err1 <- max(abs(vd$v - Tvd$v))
    err2 <- abs(vd$d - Tvd$d)
    if (max(err1, err2) < tol)
      break
    vd <- Tvd
  }
  Tvd
}

vd <- solve_model()
```

Graphique de la fonction de valeur $v(w)$ et de $u(c) + \beta d$

```r
plot(w, vd$v, type='l', xlab='w', ylab='v, u(c) + beta d')
abline(h = uc + beta*vd$d, col='red') # h pour horizontal!
```



Interprétation de la graphique

- $v(w)$, la valeur d'avoir un emploi avec salaire w, est en noir.
- $u(c) + \beta d$, la valeur de réservation, est en rouge.
- L'intersection $(\bar{w}, u(c) + \beta d)$ donne le salaire de réservation $\bar{w}$.
- $h(w)$, la valeur d'avoir une offre de w en état de chômage est le maximum des deux fonctions :

$$h(w) = \max(v(w), u(c) + \beta d).$$

- Notez que $u(c) + \beta d$ est une constante et (dans l'équation) une fonction constante.
- Un agent rationnel qui a optimisé dans le passé ne devrait pas se trouver dans l'état $(1, w)$, si $w < \bar{w}$.
- Attention : l'argument `h` dans la commande `abline` est pour spécifier la position d'une droite horizontale.