

Exercices, ECN 6338, Hiver 2022

William McCausland

2022-01-19

Cours 1. Introduction

Exercices théorique

1. Montrez que $6n^2 + 3n + 10 = O(n^2)$.

Exercices de computation

1. Lisez l'aide sur la fonction `expm1` et démontrez son avantage par rapport à la fonction `exp` pour évaluer $e^x - 1$ quand $|x|$ est près de zéro. Vous pouvez suivre l'exemple sur `log1p` dans les diapos.
2. Téléchargez le paquet R `microbenchmark`, lisez l'aide sur la fonction `microbenchmark` et mesurez le temps nécessaire pour faire les opérations $\mathbf{x} * \mathbf{y}$, \mathbf{x} / \mathbf{y} , `exp(y)` et `log(x)`, pour un vecteur $x > 0$ de mille éléments et un vecteur y de mille éléments.

Cours 2. La résolution de systèmes d'équations linéaires

Exercices préliminaires

1. Soit L_1 et L_2 des matrices triangulaires inférieures $n \times n$. Soit U_1 et U_2 des matrices triangulaires supérieures $n \times n$. Supposez que L_1 et U_1 sont inversibles.
 - a. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont toujours triangulaires inférieures : $L_1 L_2$, $L_1 + L_2$, L_1^{-1} , L_1^\top , U_1^\top , $L_1 U_1$?
 - b. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont toujours triangulaires supérieures : $U_1 U_2$, $U_1 + U_2$, U_1^{-1} , U_1^\top , L_1^\top , $L_1 U_1$?
2. (Substitution avant et substitution arrière) Soit L et U des matrices inversibles $n \times n$, où L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure. Soit y un vecteur $n \times 1$. Notez que Judd utilise le terme “back substitution” pour décrire deux algorithmes distincts (a. et b.). Plusieurs auteurs font une distinction entre “back substitution” (b.) et “forward substitution” (a.).
 - a. Trouver un algorithme pour résoudre l'équation $Lx = y$. Notez que $L_{11}x_1 = y_1$, alors $x_1 = y_1/L_{11}$.
 - b. Trouvez un algorithme pour résoudre l'équation $Ux = y$. Commencez par x_n .
3. Soit x un n -vecteur aléatoire avec moyenne μ ($n \times 1$) et variance Σ ($n \times n$). Soit A une matrice constante $m \times n$. Quelles sont la moyenne et la variance de Ax .

Exercices théoriques

1. Quelquefois, il est plus facile de spécifier la matrice de précision $H = \Sigma^{-1}$ que la matrice de variance Σ , pour une loi gaussienne multivariée $N(\mu, \Sigma)$. Si vous avez la matrice H et non la matrice Σ , décrivez comment on peut tirer des variables aléatoires $N(\mu, \Sigma)$ et évaluer la densité gaussienne multivariée. Commencez par la décomposition cholesky de H .
2. La matrice de précision H pour un processus AR(1) gaussien est tridiagonale ($H_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 1$) et symétrique. Si $\omega = \sigma^{-2}$ est la précision de l'innovation et ϕ est le coefficient d'autorégression, le diagonal de H est $\omega(1, 1+\phi^2, \dots, 1+\phi^2, 1)$ et le sous-diagonal est $-\omega(\phi, \dots, \phi)$. Trouvez la décomposition cholesky de H , en utilisant une description de l'algorithme (page 59 de Judd, par exemple).
3. Dans l'exemple MCO, calculez le vecteur $e = y - Xb$ des résiduelles et $\hat{\sigma}^2(X^\top X)^{-1}$, une estimation de la variance de b . Utilisez seulement y et la décomposition QR de X , pas X elle-même. Notez que $\hat{\sigma}^2 = e^\top e / (n - k)$.

Exercices de computation

1. Regardez la démonstration `GPA.R` de l'analyse d'une régression linéaire, exemple 3.1 dans Wooldridge (2016) *Introductory Econometrics*. Calculez b , e et $\hat{\sigma}^2(X^\top X)^{-1}$ en utilisant la décomposition QR. La fonction `qr` effectue la décomposition QR, les fonctions `qr.Q` et `qr.R` extraient les matrices Q_1 et R_1 du résultat. Les fonctions `backsolve` et `t` (transpose) pourraient être utiles.

Cours 3. Quelques sujets préalables

Exercices préliminaires

1. Trouvez le panier de consommation (x_1, x_2) qui maximise $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ sous les contraintes $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$, $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$, où $m \geq 0$, $p_1 \geq 0$ et $p_2 \geq 0$. Utilisez la méthode de Lagrange.
2. Si $X_i | \lambda \sim \text{iid Exp}(\lambda)$ (loi exponentielle) et $\lambda \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$ (loi gamma) écrivez
 - a. la fonction de densité conditionnelle de (X_1, \dots, X_n) sachant λ .
 - b. la densité conjointe de (X_1, \dots, X_n) et λ .

Exercices théoriques

Exercices de computation

Aucune, étant donnée la nature du cours 3.

Cours 4. L'optimisation statique