

# Exercices, ECN 6338, Hiver 2022

William McCausland

2022-01-27

## Cours 1. Introduction

### Exercices théorique

1. Montrez que  $6n^2 + 3n + 10 = O(n^2)$ .

### Exercices de computation

1. Lisez l'aide sur la fonction `expm1` et démontrez son avantage par rapport à la fonction `exp` pour évaluer  $e^x - 1$  quand  $|x|$  est près de zéro. Vous pouvez suivre l'exemple sur `log1p` dans les diapos.
2. Téléchargez le paquet R `microbenchmark`, lisez l'aide sur la fonction `microbenchmark` et mesurez le temps nécessaire pour faire les opérations `x * y`, `x / y`, `exp(y)` et `log(x)`, pour un vecteur  $x > 0$  de mille éléments et un vecteur  $y$  de mille éléments.

## Cours 2. La résolution de systèmes d'équations linéaires

### Exercices préliminaires

1. Soit  $L_1$  et  $L_2$  des matrices triangulaires inférieures  $n \times n$ . Soit  $U_1$  et  $U_2$  des matrices triangulaires supérieures  $n \times n$ . Supposez que  $L_1$  et  $U_1$  sont inversibles.
  - a. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont toujours triangulaires inférieures :  $L_1 L_2$ ,  $L_1 + L_2$ ,  $L_1^{-1}$ ,  $L_1^\top$ ,  $U_1^\top$ ,  $L_1 U_1$ ?
  - b. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont toujours triangulaires supérieures :  $U_1 U_2$ ,  $U_1 + U_2$ ,  $U_1^{-1}$ ,  $U_1^\top$ ,  $L_1^\top$ ,  $L_1 U_1$ ?
2. (Substitution avant et substitution arrière) Soit  $L$  et  $U$  des matrices inversibles  $n \times n$ , où  $L$  est triangulaire inférieure et  $U$  est triangulaire supérieure. Soit  $y$  un vecteur  $n \times 1$ . Notez que Judd utilise le terme “back substitution” pour décrire deux algorithmes distincts (a. et b.). Plusieurs auteurs font une distinction entre “back substitution” (b.) et “forward substitution” (a.).
  - a. Trouver un algorithme pour résoudre l'équation  $Lx = y$ . Notez que  $L_{11}x_1 = y_1$ , alors  $x_1 = y_1/L_{11}$ .
  - b. Trouvez un algorithme pour résoudre l'équation  $Ux = y$ . Commencez par  $x_n$ .
3. Soit  $x$  un  $n$ -vecteur aléatoire avec moyenne  $\mu$  ( $n \times 1$ ) et variance  $\Sigma$  ( $n \times n$ ). Soit  $A$  une matrice constante  $m \times n$ . Quelles sont la moyenne et la variance de  $Ax$ ?

### Exercices théoriques

1. Quelquefois, il est plus facile de spécifier la matrice de précision  $H = \Sigma^{-1}$  que la matrice de variance  $\Sigma$ , pour une loi gaussienne multivariée  $N(\mu, \Sigma)$ . Si vous avez la matrice  $H$  et non la matrice  $\Sigma$ , décrivez comment on peut tirer des variables aléatoires  $N(\mu, \Sigma)$  et évaluer la densité gaussienne multivariée. Commencez par la décomposition cholesky de  $H$ .
2. La matrice de précision  $H$  pour un processus AR(1) gaussien est tridiagonale ( $H_{ij} = 0$  pour  $|i - j| > 1$ ) et symétrique. Si  $\omega = \sigma^{-2}$  est la précision de l'innovation et  $\phi$  est le coefficient d'autorégression, le diagonal de  $H$  est  $\omega(1, 1+\phi^2, \dots, 1+\phi^2, 1)$  et le sous-diagonal est  $-\omega(\phi, \dots, \phi)$ . Trouvez la décomposition cholesky de  $H$ , en utilisant une description de l'algorithme (page 59 de Judd, par exemple).
3. Dans l'exemple MCO, calculez le vecteur  $e = y - Xb$  des résiduelles et  $\hat{\sigma}^2(X^\top X)^{-1}$ , une estimation de la variance de  $b$ . Utilisez seulement  $y$  et la décomposition QR de  $X$ , pas  $X$  elle-même. Notez que  $\hat{\sigma}^2 = e^\top e / (n - k)$ .
4. Donnez la matrice creuse des diapos en format colonne compressée après les deux opérations suivantes. Décrivez brièvement les algorithmes pour l'insertion et la suppression en général.
  - a. Une insertion `A[2,4] <- 24`,
  - b. Une suppression `A[3,2] <- 0`.

### Exercices de computation

1. Regardez la démonstration `GPA.R` (au site Github du cours) de l'analyse d'une régression linéaire, exemple 3.1 dans Wooldridge (2016) *Introductory Econometrics*. Calculez  $b$ ,  $e$  et  $\hat{\sigma}^2(X^\top X)^{-1}$  en utilisant la décomposition QR. La fonction `qr` effectue la décomposition QR, les fonctions `qr.Q` et `qr.R` extraient les matrices  $Q_1$  et  $R_1$  du résultat. Les fonctions `backsolve` et `t` (transpose) pourraient être utiles.

## Cours 3. Quelques sujets préalables

### Exercices préliminaires

1. Trouvez le panier de consommation  $(x_1^*, x_2^*)$  qui maximise  $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$  sous les contraintes  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$ ,  $x_1 \geq 0$  et  $x_2 \geq 0$ , où  $m > 0$ ,  $p_1 > 0$  et  $p_2 > 0$ . Utilisez la méthode de Lagrange.
2. Si  $X_i | \lambda \sim \text{iid Exp}(\lambda)$  (loi exponentielle) et  $\lambda \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$  (loi gamma) écrivez
  - a. la fonction de densité conditionnelle de  $(X_1, \dots, X_n)$  sachant  $\lambda$ .
  - b. la densité conjointe de  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $\lambda$ .

### Exercices théoriques

1. Considérez l'exercice préliminaire 1, avec la contrainte remplacée par  $(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)^3 = 0$ . La solution du problème doit être pareille. Décrivez le problème qui se présente quand vous essayez d'utiliser la méthode de Lagrange. Expliquez brièvement pourquoi ce problème ne représente pas une contradiction du théorème de Lagrange.
2. Pour le modèle de l'exercice préliminaire 2,
  - a. trouvez l'estimateur maximum de vraisemblance de  $\lambda$ , sa moyenne et sa variance.
  - b. trouvez la distribution postérieure  $\lambda | x^\circ$ , où  $x^\circ$  est une réalisation de  $(X_1, \dots, X_n)$ .

### Exercices de computation

Aucune, étant donnée la nature du cours 3.

## Cours 4. L'optimisation statique

### Exercice préliminaire

1. Prenez la fonction de log vraisemblance (graphique, diapo 19, cours 3)  $L(\theta; y) = n_1 \log \theta + n_0 \log(1 - \theta)$ , pour  $n_0 = 200$  et  $n_1 = 230$ .
  - a. Calculez l'expansion Taylor d'ordre deux (quadratique) de  $L(\theta; y)$  autour de  $\theta = 1/2$ .
  - b. Trouvez la valeur de  $\theta$  qui maximise cette fonction quadratique.
  - c. Considérez le même problème que a., mais pour la vraisemblance  $\mathcal{L}(\theta; y) = \theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0}$ . Faites assez de ce problème pour vous convaincre que c'est plus difficile.