

# ECN 6338 Cours 3

## Quelques sujets préalables

William McCausland

2023-01-25

# Survol du Cours 3

## Maximisation sous contraintes

- ▶ une contrainte d'égalité
- ▶ plusieurs contraintes d'égalité
- ▶ plusieurs contraintes d'égalité plus non-négativité
- ▶ plusieurs contraintes d'égalité et d'inégalité
- ▶ exemple

## Maximisation de la vraisemblance

- ▶ la vraisemblance
- ▶ l'estimateur maximum de vraisemblance et ses propriétés
- ▶ les problèmes d'optimisation à effectuer

## Inférence bayésienne

- ▶ les lois *a priori* et *a posteriori*
- ▶ les problèmes d'intégration à effectuer

# Problème de maximisation avec une contrainte d'égalité

Problème :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{t.q.} \quad g(x) = c,$$

où

- ▶  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- ▶  $c \in \mathbb{R}$ ,
- ▶  $f, g \in C^2$ , l'espace de fonctions avec deux dérivées continues.

Fonction de Lagrange, en  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda[c - g(x)].$$

Théorème : Si  $x^*$  est une solution et que  $g_j(x^*) \neq 0$  pour au moins un  $j$ , il existe  $\lambda^* \in \mathbb{R}$  tel que

- ▶  $L_j(x^*, \lambda^*) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , et  $L_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0$ .

# Problème avec plusieurs contraintes d'égalité

Problème :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{t.q.} \quad g(x) = c,$$

où

- ▶  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;  $m < n$ ;  $f, g \in C^2$ ,
- ▶  $c \in \mathbb{R}^m$ .

Fonction de Lagrange, en  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  est :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top [c - g(x)] = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [c_i - g^i(x)].$$

Théorème : Si  $x^*$  est une solution et le rang du jacobien  $g_x(x^*)$  est  $m$ , il existe  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  tel que

- ▶  $L_x(x^*, \lambda^*) = 0_n$ ,  $L_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0_m$ .

## Plusieurs contraintes d'égalité, non-négativité

Problème :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{t.q.} \quad g(x) = c, \quad x \geq 0,$$

où  $f$ ,  $g$  et  $c$  sont comme dans le problème précédent.

Fonction de Lagrange, comme dans le dernier problème :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top [c - g(x)].$$

Théorème : Si  $x^*$  est une solution et le rang du jacobien  $g_x(x^*)$  est  $m$ , il existe  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  tel que

- ▶  $L_x(x^*, \lambda^*) \leq 0, \quad x^* \geq 0$  avec écarts complémentaires,
- ▶  $L_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0$ .

## Exemple, utilité quasi-linéaire I (exemple 3.1 de Dixit)

Le problème : pour prix  $p > 0$  et  $q > 0$ , revenu  $I > 0$  et  $a > 0$ ,

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} y + a \ln x \quad \text{t.q.} \quad px + qy = I.$$

La fonction de Lagrange :

$$L(x, y, \lambda) = y + a \ln x + \lambda(I - px - qy).$$

Les conditions nécessaires pour un maximum :

$$L_x = \frac{a}{x} - \lambda p \leq 0, \quad x \geq 0;$$

$$L_y = 1 - \lambda q \leq 0, \quad y \geq 0;$$

$$I - px - qy = 0.$$

- ▶ Cas  $x = 0, y = 0$  :  $I - px - qy = 0$  est impossible.
- ▶ Cas  $x = 0, y > 0$  :  $L_x \leq 0$  est impossible.

## Exemple, utilité quasi-linéaire II

Les conditions nécessaires pour un maximum, encore :

$$L_x = \frac{a}{x} - \lambda p \leq 0, \quad x \geq 0;$$

$$L_y = 1 - \lambda q \leq 0, \quad y \geq 0;$$

$$I - px - qy = 0.$$

- ▶ Cas  $x > 0, y = 0$  :
  - ▶ dans ce cas  $x = I/p$  et  $\lambda = a/I$ ,
  - ▶ il faut que  $1 - aq/I \leq 0, I \leq aq$ .
- ▶ Cas  $x > 0, y > 0$  :
  - ▶ dans ce cas  $\lambda = a/(px) = 1/q$ ,
  - ▶  $x = aq/p$ ,
  - ▶ Il faut que  $I - px = I - aq > 0$ , auquel cas  $y = I/q - a$ .

## Exemple, utilité quasi-linéaire III

```
p <- 1; I <- 10  # Prix de x et revenu
a <- 5;          # Paramètre d'utilité
q1 <- 1; q2 <- 2; q3 <- 5  # Trois valeurs du prix de y
x <- seq(0, 10, length.out=1000)  # Grille, valeurs de x

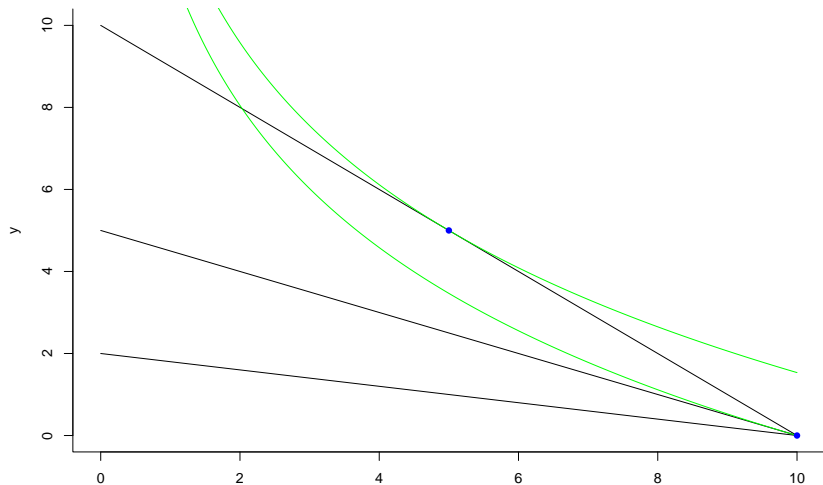
# Trois budgets
b1 <- (I - p*x)/q1;
b2 <- (I - p*x)/q2;
b3 <- (I - p*x)/q3;

# Deux courbes d'indifférence
y1 <- 5*log(5)+5 - 5*log(x)  # Qui passe par (5, 5)
y2 <- 5*log(10) - 5*log(x)   # Qui passe par (10, 0)
```



## Exemple, utilité quasi-linéaire IV

```
plot(x, b1, type='l', xlab='x', ylab='y', bty='l');  
lines(x, b2); lines(x, b3)  
lines(x, y1, col='green'); lines(x, y2, col='green')  
points(c(5, 10), c(5, 0), col='blue', pch=16)
```



# Plusieurs contraintes d'égalité et d'inégalité

Problème :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{t.q.} \quad g(x) = c, \quad h(x) \leq d,$$

où  $f$ ,  $g$  et  $c$  sont comme dans le problème précédent,

►  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $h \in C^2$ ,  $d \in \mathbb{R}^l$ .

Fonction de Lagrange :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top [c - g(x)] + \mu^\top [d - h(x)].$$

Théorème (Karush-Kuhn-Tucker) : Si  $x^*$  est une solution, le rang des jacobiens  $g_x(x^*)$  et  $h_x(x^*)$  sont  $m$  et  $l$ , il existe  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  et  $\mu^* \in \mathbb{R}^l$  tels que

- $L_x(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0_n$ ,
- $L_\lambda(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0_m$ ,
- $L_\mu(x^*, \lambda^*, \mu^*) \geq 0_l$ ,  $\mu \geq 0_l$  avec écarts complémentaires.

# Comparaison avec la page 122 dans Judd

Dans Judd :

- ▶  $g(x) = 0$  et  $h(x) \leq 0$ , pas  $g(x) = c$  et  $h(x) \leq d$ .
  - ▶ aucune perte de généralité : définie  $\tilde{g}(x) = g(x) - c$ ,  
 $\tilde{h}(x) = h(x) - d$
- ▶ moins de détail sur les conditions de rang (“constraint qualification”)
- ▶ problème de minimisation, pas de maximisation
  - ▶ le relâchement d'une contrainte *réduit* la valeur optimale  $f(x^*)$
- ▶  $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \mu^\top h(x)$  (signe opposé des deux derniers termes)
- ▶ Les conditions pour  $\mu$  et  $L_\mu$  sont  $\mu \leq 0$ ,  $L_\mu \leq 0$ .

Le problème de maximisation est plus naturel pour les économistes mais les logiciels exigent souvent des fonctions à minimiser. Il faut “traduire” la spécification du problème et bien interpréter la signe des prix d'ombre et autres résultats.

## Exemple, chômage technique (exemple 3.2 de Dixit)

Le problème :

- ▶ Une économie a 300 unités de  $L$  (main d'oeuvre) et 450 unités de  $T$ , pour la production de blé et de boeuf.
- ▶ Produire une unité de blé prend 2 unités de  $L$ , 1 unité de  $T$ .
- ▶ Produire une unité de boeuf prend 1 unité de  $L$ , 2 unités de  $T$ .
- ▶ On veut maximiser  $W(x, y) = (1 - \beta) \ln x + \beta \ln y$ , où  $x$  et  $y$  sont les quantités de blé et de boeuf.
- ▶ On écarte d'emblée la possibilité des valeurs  $x < 0$ ,  $y < 0$ .

La fonction de Lagrange :

$$L(x, y, \mu_L, \mu_T) = (1 - \beta) \ln x + \beta \ln y + \mu_L [300 - 2x - y] + \mu_T [450 - x - 2y]$$

## Chomage technique, conditions de première ordre

$$L(x, y, \mu_L, \mu_T) = (1-\beta) \ln x + \beta \ln y + \mu_L [300 - 2x - y] + \mu_T [450 - x - 2y]$$

Les conditions de première ordre sont

$$\frac{1-\beta}{x} - 2\mu_L - \mu_T = 0, \quad \frac{\beta}{y} - \mu_L - 2\mu_T = 0,$$

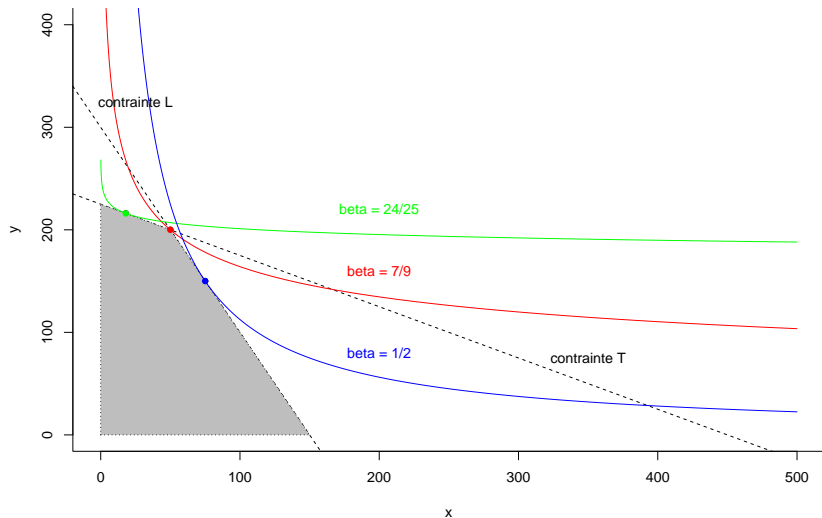
et avec écarts complémentaires,

$$300 - 2x - y \geq 0, \quad \mu_L \geq 0;$$

$$450 - x - 2y \geq 0, \quad \mu_T \geq 0.$$

- ▶  $\mu_L = 0, \mu_T = 0$  ne vérifie pas les deux premières équations.
- ▶  $\mu_L > 0, \mu_T > 0$  donne le plan unique sans chômage, mais il faut vérifier  $\mu_L > 0$  et  $\mu_T > 0$  : il faut que  $2/3 < \beta < 8/9$ .
- ▶  $\mu_L = 0$  et  $\mu_T > 0$  (chômage de  $L$ ) requiert  $\beta \geq 8/9$ .
- ▶  $\mu_L > 0$  et  $\mu_T = 0$  (chômage de  $T$ ) requiert  $\beta \leq 2/3$ .

# Trois solutions, selon la valeur de $\beta$ ('chomage.R')



# Éléments de l'analyse maximum de vraisemblance

- ▶ Quantités pertinentes :
  - ▶  $\theta$ , un vecteur de paramètres inconnus,
  - ▶  $y = (y_1, \dots, y_T)$ , un vecteur aléatoire des variables observables,
  - ▶  $y^\circ$ , le vecteur observé.
- ▶ Fonctions pertinentes :
  - ▶  $f(y|\theta)$ , la densité conditionnelle des données (modèle),
  - ▶  $\mathcal{L}(\theta; y) = f(y|\theta)$ , la vraisemblance,
  - ▶  $\mathcal{L}(\theta; y^\circ) = f(y^\circ|\theta)$ , la vraisemblance réalisée.

## Le modèle Bernoulli

- ▶ Supposez que les  $y_i$  sont iid Bernoulli avec probabilité  $\theta \in [0, 1]$ :  $y_i = 1$  avec probabilité  $\theta$ ,  $y_i = 0$  avec probabilité  $(1 - \theta)$ .
- ▶ Alors la fonction de masse de probabilité de  $y_i$  est

$$\begin{aligned} f(y_i|\theta) &= \begin{cases} \theta & y_i = 1 \\ (1 - \theta) & y_i = 0 \end{cases} \\ &= \theta^{y_i}(1 - \theta)^{1-y_i}. \end{aligned}$$

- ▶ On observe le vecteur aléatoire  $y = (y_1, \dots, y_n)$  ; la fonction de masse de probabilité de  $y$  est

$$f(y|\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \theta^{y_i}(1 - \theta)^{1-y_i} = \theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0},$$

où

- ▶  $n_1 = \sum_{i=1}^n y_i$  est le nombre de fois qu'on observe 1, et
- ▶  $n_0 = n - \sum_{i=1}^n y_i$  est le nombre de fois qu'on observe 0.

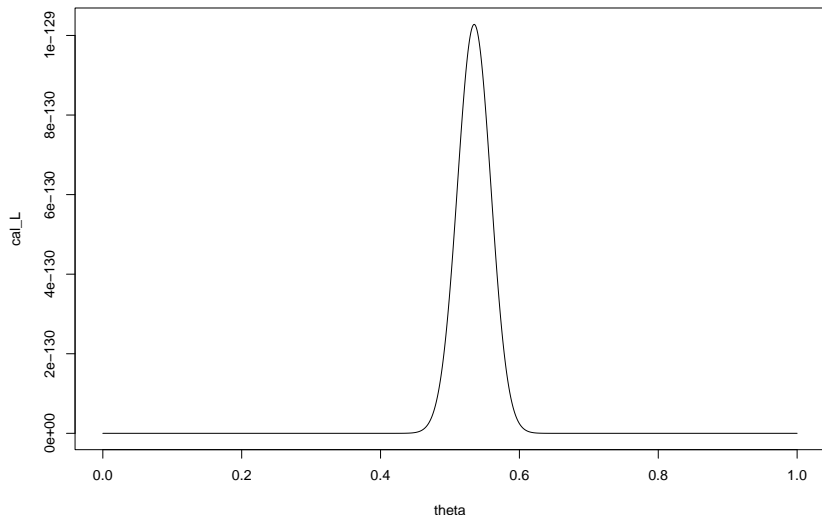


## Deux interprétations de la même expression

- ▶ Deux interprétations de l'expression  $\theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0}$  :
  - ▶ Fonction de masse de probabilité  $f(y|\theta) = \theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0}$ .
  - ▶ Fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}(\theta; y) = \theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0}$ .
- ▶  $f(y|\theta)$  donne, pour  $\theta$  fixe, les probabilités relatives des séquences possibles  $(y_1, \dots, y_n)$ .
- ▶  $\mathcal{L}(\theta; y)$  donne, pour  $y$  fixe (notamment  $y = y^\circ$ ) une note (ou évaluation) à chaque valeur  $\theta$  pour la qualité de sa prévision des données observées.
- ▶ Soit  $L(\theta; y) = \log \mathcal{L}(\theta; y)$ , la log-vraisemblance.

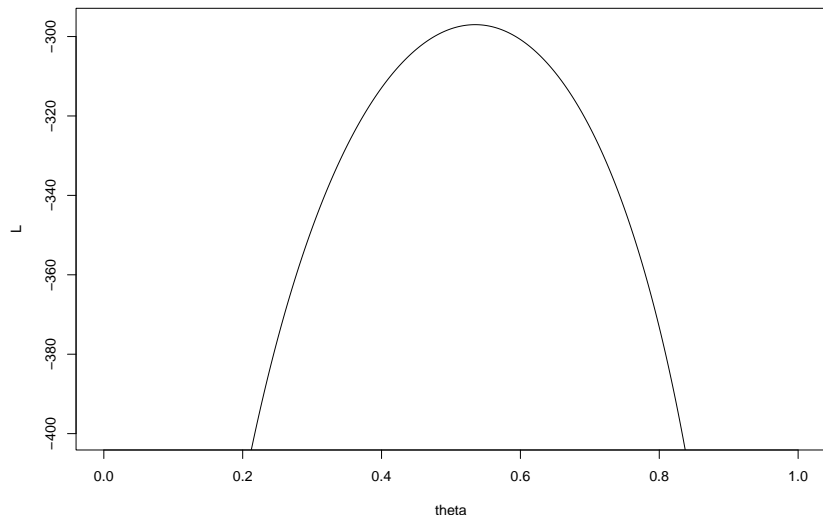
## La vraisemblance Bernoulli pour $n_0 = 200$ , $n_1 = 230$

```
n_0 = 200; n_1 = 230; theta = seq(0, 1, by=0.001)
cal_L = theta^n_1 * (1-theta)^n_0
plot(theta, cal_L, type='l')
```



## La log vraisemblance Bernoulli pour $n_0 = 200$ , $n_1 = 230$

```
L = n_1 * log(theta) + n_0 * log(1-theta)
plot(theta, L, type='l', ylim=c(-400, max(L)))
```



## Maximum de la vraisemblance Bernoulli

- Vraisemblance :  $\mathcal{L}(\theta; y) = \theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0}$ .
- Log vraisemblance :  $L(\theta; y) = n_1 \log(\theta) + n_0 \log(1 - \theta)$
- Deux dérivées de la log vraisemblance :

$$\frac{\partial L(\theta; y)}{\partial \theta} = \frac{n_1}{\theta} - \frac{n_0}{1 - \theta}$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta; y)}{\partial \theta^2} = -\frac{n_1}{\theta^2} - \frac{n_0}{(1 - \theta)^2} < 0.$$

- La valeur  $\hat{\theta}$  (souvent vue comme une variable aléatoire) qui maximise la vraisemblance et la log-vraisemblance est

$$\hat{\theta} = \frac{n_1}{n_0 + n_1} = \frac{n_1}{n}.$$

- Pour  $n_0 = 200$  et  $n_1 = 230$ ,  $\hat{\theta} = \frac{23}{43} \approx 0.5349$ .

# Maximum de vraisemblance : conditions de régularité

- ▶ Définitions :
  - ▶  $\theta$  est le vecteur des paramètres ;  $\Theta$ , l'ensemble de toutes les valeurs possibles de  $\theta$ .
  - ▶  $y$  est le vecteur (aléatoire) des données.
- ▶ Conditions informelles de régularité :
  1. Le modèle est correct pour une valeur  $\theta = \theta_0 \in \Theta$ .
  2. La vraie valeur  $\theta_0$  est dans l'intérieur de  $\Theta$ .
  3. Identification :

$$\theta \neq \theta_0 \Rightarrow f(\cdot|\theta) \neq f(\cdot|\theta_0).$$

4.  $L(\theta; y) \equiv \log f(y|\theta)$  a toujours un maximum global unique.
5. Le gradient de  $L(\theta; y)$  (par rapport à  $\theta$ ) est toujours borné.
6. La matrice  $\mathcal{I}(\theta)$  suivante (matrice d'information de Fisher) est définie positive:

$$\mathcal{I}(\theta) = E_{y|\theta} \left[ \frac{\partial L(\theta; y)}{\partial \theta^\top} \frac{\partial L(\theta; y)}{\partial \theta} \right].$$

# Maximum de vraisemblance : résultats

Résultats : (Soit  $\hat{\theta} \equiv \arg \max_{\theta} L(\theta; y)$ , qui existe et est unique.)

1.  $\hat{\theta} \rightarrow_p \theta_0$  (loi de grands nombres)
2.  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \rightarrow_d N(0, n\mathcal{I}(\theta_0)^{-1})$  (théorème central limite)
3.  $\mathcal{I}(\theta) = E_{y|\theta} \left[ -\frac{\partial^2 L(\theta; y)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right]$ .

Problèmes restants :

1. Il faut trouver  $\hat{\theta}$ .
2. La variance asymptotique  $\mathcal{I}(\theta_0)^{-1}$  de  $\hat{\theta}$  dépend de  $\theta_0$ , qui est inconnu.
3. L'espérance dans les deux expressions pour  $\mathcal{I}(\theta)$  sont difficiles à évaluer analytiquement.

## Exemple Bernoulli

- Un cas rare où les calculs analytiques sont faisables.
- La matrice d'information de Fisher :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\theta) &= E_{y|\theta} \left[ -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right] = E_{y|\theta} \left[ \frac{n_1}{\theta^2} + \frac{n_0}{(1-\theta)^2} \right] \\ &= \frac{n\theta}{\theta^2} + \frac{n(1-\theta)}{(1-\theta)^2} = \frac{n}{\theta(1-\theta)}.\end{aligned}$$

- La variance de  $\hat{\theta}$  (exacte, pas asymptotique) :

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = \text{Var} \left[ \frac{n_1}{n} \right] = \frac{1}{n^2} n \text{Var}[y_i] = \frac{1}{n} (\theta - \theta^2) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

- Pour  $n_0 = 200$  et  $n_1 = 230$ ,  $\text{Var}[\hat{\theta}]$  est de  $(0.02411)^2$  pour  $\theta = 1/2$  et  $(0.02405)^2$  pour  $\theta = \hat{\theta} \approx 0.5349$

# Éléments de l'analyse bayésienne

- ▶ Quantités pertinentes :
  - ▶  $\theta$ , un vecteur de paramètres inconnus *aléatoire*
  - ▶  $y = (y_1, \dots, y_T)$ , un vecteur aléatoire des variables observables,
  - ▶  $y^\circ$ , le vecteur observé.
- ▶ Fonctions pertinentes :
  - ▶  $f(y|\theta)$ , la densité conditionnelle des données (modèle),
  - ▶  $\mathcal{L}(\theta; y^\circ) = f(y^\circ|\theta)$ , la vraisemblance réalisé,
  - ▶  $f(\theta)$ , la densité *a priori*,
  - ▶  $f(\theta, y)$ , la densité conjointe,
  - ▶  $f(\theta|y)$ , la densité *a posteriori*,
  - ▶  $f(y)$ , la densité marginale des données,
  - ▶  $f(y^\circ)$ , la vraisemblance marginale (un nombre).



# Inférence bayésienne

- ▶ Par la règle de Bayes,

$$f(\theta|y^\circ) = \frac{f(\theta, y^\circ)}{f(y^\circ)} = \frac{f(\theta)f(y^\circ|\theta)}{f(y^\circ)} \propto f(\theta)f(y^\circ|\theta).$$

- ▶  $f(\theta)$  représente notre incertitude sur  $\theta$  avant l'observation de  $y$ .
- ▶  $f(\theta|y^\circ)$  représente notre incertitude sur  $\theta$  après qu'on observe  $y = y^\circ$ .
- ▶ Un point important à retenir :  $f(\theta|y^\circ) \propto f(\theta, y^\circ)$ .

## Reprise et extension de l'exemple Bernoulli

- ▶ Si  $y_i$  est Bernoulli avec probabilité  $\theta$ ,  $f(y|\theta) = \theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0}$ .
- ▶ Mettons qu'on choisit la loi *a priori*  $\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$  sur  $[0, 1]$  :

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1}.$$

- ▶ La densité conjointe est

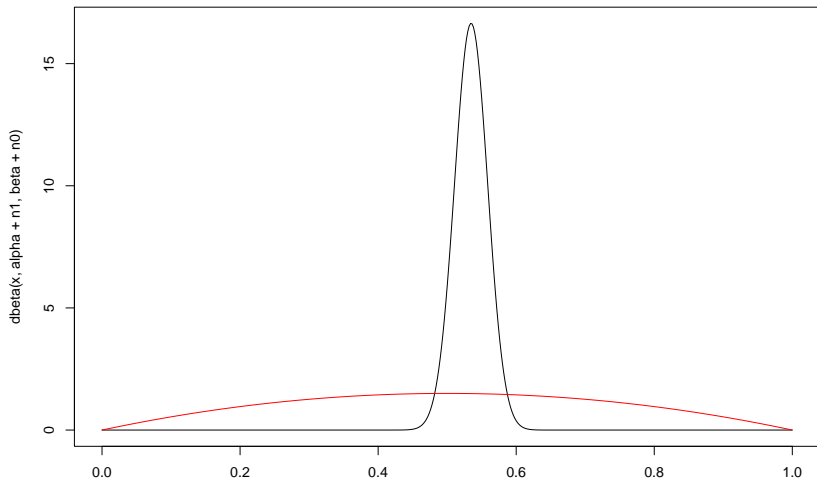
$$f(\theta, y) = f(\theta)f(y|\theta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha+n_1-1} (1 - \theta)^{\beta+n_0-1}.$$

- ▶ La loi *a posteriori* doit être  $\theta \sim \text{Beta}(\alpha + n_1, \beta + n_0)$ .
- ▶ La vraisemblance marginale est  $f(\theta, y)/f(\theta|y)$  :

$$f(y) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha + n_1)\Gamma(\beta + n_0)}{\Gamma(\alpha + \beta + n)}.$$

## Graphique pour l'exemple Bernoulli

```
n0 = 200; n1 = 230; alpha=2; beta=2  
x = seq(0, 1, by=0.002)  
plot(x, dbeta(x, alpha+n1, beta+n0), type='l')  
lines(x, dbeta(x, alpha, beta), col='red')
```



# L'intégration et les objectifs de l'analyse bayésienne

- ▶ Plusieurs problèmes d'inférence bayésienne ont, comme solution, une intégrale par rapport à la densité *a posteriori*.
- ▶ Exemple 1, estimation ponctuelle de  $\theta_k$  sous perte quadratique:

$$\hat{\theta}_k = E[\theta_k | y^\circ] = \int \theta_k f(\theta | y^\circ) d\theta.$$

- ▶ Exemple 2, quantification de l'incertitude sur  $\theta_k$  :

$$\text{Var}[\theta | y^\circ] = E[(\theta_k - E[\theta_k | y^\circ])^2 | y^\circ].$$

- ▶ Exemple 3, densité prédictive (valeurs de  $y_{T+1}$  sur une grille) :

$$f(y_{T+1} | y^\circ) = E[f(y_{T+1} | \theta, y^\circ) | y^\circ].$$

## Preuve de l'exemple 3

$$\begin{aligned} E[f(y_{T+1}|y_1, \dots, y_T, \theta)|y_1, \dots, y_T] \\ &= \int f(y_{T+1}|y_1, \dots, y_T, \theta) f(\theta|y_1, \dots, y_T) d\theta \\ &= \int f(y_{T+1}, \theta|y_1, \dots, y_T) d\theta \\ &= f(y_{T+1}|y_1, \dots, y_T) \end{aligned}$$

## Méthodes pour trouver $E[g(\theta)|y^\circ]$

- ▶ Calcul analytique : élégant, exacte, presque toujours insoluble.
- ▶ Simulation Monte Carlo indépendante :
  - ▶ Si on peut simuler  $\theta^m \sim \text{iid } \theta|y^\circ$ ,

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g(\theta^m) \rightarrow_p E[g(\theta)|y^\circ].$$

- ▶ Cependant, cette simulation est rarement faisable.
- ▶ Simulation Monte Carlo chaîne de markov (MCMC) :
  - ▶ On choisit un processus markovien avec densité de transition  $f(\theta^m|\theta^{m-1})$  telle que la loi *a posteriori*  $\theta|y^\circ$  est la loi stationnaire du processus. C'est à dire :

$$\theta^{m-1} \sim f(\theta|y^\circ) \Rightarrow \theta^m \sim f(\theta|y^\circ).$$

- ▶ Sous quelques conditions techniques, la loi de  $\theta^m$  converge à la loi *a posteriori* et

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g(\theta^m) \rightarrow_p E[g(\theta)|y^\circ].$$