Université de Montréal
Faculté des arts et des sciences
Département de sciences économiques

EXAMEN FINAL

Jeudi 20 avril 2023, de 8h30 à 11h15

ECN 6338A — **ANALYSE NUMÉRIQUE EN ÉCONOMÉTRIE** — HIVER 2023

Professeur :	William MCCAUSLAND
Directives pédagogiques :	Documentation **non permise**, calculatrice non programmable **permise**.
Pondération :	Cet examen compte pour 40% de la note finale.

Il y a sept questions, chacune avec une valeur nominale de 10 points. La note de votre examen final, sur 100, consiste en la somme des sept notes plus la somme de vos trois meilleures notes.

La densité gaussienne est

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right].$$

1. (10 points) Génération de variables aléatoires.
   (a) Si $U \sim U(0,1)$ (loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$) et $\lambda > 0$, trouvez la fonction de densité de $\lambda^{-1}\ln U$.
   (b) Décrivez comment tirer de la loi uniforme sur le disque unité en utilisant seulement des tirages de la loi $U(0,1)$.
2. (10 points) Approximez l'utilité espérée de la consommation aléatoire C, pour la fonction d'utilité $u(C) = 1 - e^{-C/10^5}$, quand $\ln C \sim N(\ln 10^5, (\ln 10^4)^2)$. Pour l'intégral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2}\, dx,$$

   les noeuds et les poids de la règle de quadrature Gauss-Hermite de 3e ordre sont :

Noeuds	Poids
-1.2247	0.29541
0	0.11816
1.2247	0.29541

3. (10 points) Vous allez recevoir trois offres aléatoires pour un actif qui vous vaut 0.2. Elles sont i.i.d. $U(0,1)$, à prendre ou à laisser et séquentielles. Le jeu se termine quand vous acceptez une offre, auquel cas vous vendez l'actif au prix offert ; ou quand vous rejetez la troisième offre, auquel cas vous gardez l'actif. Trouvez la politique qui maximise l'espérance *a priori* de la valeur à la fin du jeu.
4. (10 points) Voici un modèle à facteurs gaussien :

$$y_t = \Lambda f_t + \epsilon_t,$$

   où y_t est $N \times 1$, Λ est $N \times K$ et déterministe, $f_t \sim N(0, \Sigma)$, $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 I_N)$. Seulement le terme Λf_t nous concerne ici et l'information dans la partie (c) est utile pour (a) et (b).
   (a) Trouvez une matrice $\tilde{\Lambda}$, $N \times K$, et un vecteur $\tilde{f}_t$, $K \times 1$, tels que $\Lambda f_t = \tilde{\Lambda}\tilde{f}_t$ et $\tilde{f}_t \sim N(0, I_K)$.
   (b) Trouvez une matrice $\tilde{\tilde{\Lambda}}$, $N \times K$, et un vecteur $\tilde{\tilde{f}}_t$, $K \times 1$, tels que $\Lambda f_t = \tilde{\tilde{\Lambda}}\tilde{\tilde{f}}_t$, $\tilde{\tilde{f}}_t \sim N(0, I_K)$ et $\tilde{\tilde{\Lambda}}_{ij}$ est triangulaire inférieur.
   (c) Décrivez comment calculer $\tilde{\tilde{\Lambda}}$ à partir de Λ et Σ avec seulements les opérations suivantes : la décomposition BQ d'une matrice $N \times K$ en B, triangulaire inférieure, et une matrice Q, $K \times K$ et orthogonale ; la décomposition Cholesky $LL^\top$ d'une matrice définie positive ; la multiplication matricielle ; la substitution avant ou arrière ; et la transposée.

5. (10 points) Considérez le problème de trouver une racine de la fonction $f(x) = 2e^x - x - 3$ dans l'intervalle $[0, 1]$.
   (a) Avec la méthode de dichotomie, trouvez un intervalle de longeur $\frac{1}{4}$ qui contient une racine.
   (b) À partir de $x_0 = 0$, trouvez les valeurs x_1 et x_2 générées par les deux premières itérations de la méthode de Newton.
6. (10 points) Considérez la fonction $f(x) = xe^{-x}$.
   (a) Trouvez l'approximation de Taylor d'ordre 2 au point $x_0 = 0$.
   (b) Trouvez le prochain point x_1 de la méthode de Newton pour maximiser une fonction.
   (c) Trouvez l'approximation de Padé d'ordres $(1, 1)$ à x_0.
7. (10 points) Répondez brièvement aux questions suivantes.
   (a) Considérez la méthode ziggurat. Donnez un avantage et un inconvénient d'augmenter le nombre de couches.
   (b) Si on utilise la méthode Newton pour maximiser une fonction multivariée dont toutes les deuxièmes dérivées sont continues, donnez trois problèmes distincts qui peuvent se présenter.
   (c) Pourquoi les méthodes du type Monte Carlo Séquentiel sont plus convenables que d'autres méthodes pour simuler les lois multimodales ?