ECN 7060, Cours 2

William McCausland

2017-09-08

Plan de route, Chapitre 2

- 2.1 Définition d'un espace de probabilité
- 2.2 Construction de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour Ω dénombrable, une spécification suffisante (un semi-algèbre $\mathcal{J}$ et un $P\colon \mathcal{J} \to [0,1]$) avec superadditivité plus monotonicité dénombrable) pour $\Omega = [0,1]$
- 2.3 Théorème d'extension: outil pour construire $\mathcal{F}$, P
- 2.4 Application du théorème pour $\Omega = [0,1]$.
- 2.5 Variations du théorème (conditions alternatives)
- 2.6 Application du théorème pour d'autres Ω

Théorème d'extension

Conditions sur Ω, $\mathcal{J}$ et $P\colon \mathcal{J} \to [0,1]$:

1. $\mathcal{J}$ est une semi-algèbre sur Ω.
2. P est finiement superadditive.
3. P est dénombrablement monotone.

Conclusion : il y a une tribu $\mathcal{M}$ sur Ω et une probabilité P^* sur $\mathcal{M}$ telles que

1. $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{M}$.
2. $P^*(A) = P(A)$ pour chaque $A \in \mathcal{J}$

Deux tribus pour $\Omega = \mathbb{R}$ (Exercise 2.4.5)

- $\mathcal{J}$ est une semi-algèbre si
  - $\emptyset \in \mathcal{J}$, $\Omega \in \mathcal{J}$,
  - $\mathcal{J}$ est stable pour les intersections finies,
  - Si $A \in \mathcal{J}$, A^c est une réunion disjointe finie des éléments de $\mathcal{J}$.
- Un intervalle de $\mathbb{R}$ est n'importe $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ ou (a, b), où $a = \infty$, $b = \infty$, $a = b$ (auquel cas $[a, b] = \{a\}$) et $a < b$ (auquel cas $(a, b) = \emptyset$) sont permis.
- Soit $\mathcal{A}_2 = \{$tous intervalles dans $\mathbb{R}\}$.
  - Un semi-algèbre?
  - $\mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A}_2)$, la tribu la plus petite qui contient $\mathcal{A}_2$.
  - Il ne suffit pas de mettre les réunions dénombrables dans $\mathcal{F}$.
  - Spécification de $P \colon \mathcal{A}_2 \to [0, 1]$?
- Soit $\mathcal{A}_1 = \{(-\infty, x] \colon x \in \mathbb{R}\}$.
  - Un semi-algèbre?
  - Pourquoi utile?
- Montrez que $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B}$.

Démonstration de $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A}_2)$

- $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ alors $\sigma(\mathcal{A}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_2)$.
- L'autre direction, $\sigma(\mathcal{A}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$:
  - $(a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^c$ doit être un élément de $\sigma(\mathcal{A}_1)$.
  - $(a, b) = (\cup_n(-\infty, b - 1/n]) \cap (-\infty, a]^c \in \sigma(\mathcal{A}_1)$.
  - $[a, b] = (-\infty, b] \cap (\cup_n(-\infty, a - 1/n]^c) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$.
  - $[a, b) = (\cup_n(-\infty, b - 1/n]) \cap (\cup_n(-\infty, a - 1/n]^c) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$.
- Alors $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A}_2)$.

Un semi-algèbre pour $\Omega = \{(r_1, r_2, \ldots) : r_i \in \{0, 1\}\}$

- Ω est l'ensemble de séquences infinie des 'piles ou faces'.
- $A_{a_1 a_2 \ldots a_n} \equiv \{(r_1, r_2, \ldots) \in \Omega \colon r_i = a_i, 1 \leq i \leq n\} \subseteq \Omega$.
- $A_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ est l'ensembles de séquences infinies avec l'histoire initial $a_1 a_2 \ldots a_n$.
- $\mathcal{J} \equiv \{A_{a_1 a_2 \ldots a_n} \colon n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$.
- $A_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ comme un interval de $[0, 1)$.
- $A_{01011} \cap A_{0110000} =?$, $A_{01} \cap A_{01101} =?$, $A_{a_1 a_2 \ldots a_n} \cap A_{b_1 b_2 \ldots b_{n'}} =?$
- $A^c_{010} =?$, $A^c_{a_1 a_2 \ldots a_n} =?$
- $\mathcal{J}$ est-il un semi-algèbre?

Une proto-probabilité pour $\Omega = \{(r_1, r_2, \ldots) : r_i \in \{0,1\}\}$

Une 'proto-probabilité' $P \colon \mathcal{J} \cup \{\emptyset, \Omega\} \to [0,1]$:

$$P(A_{a_1 a_2 \ldots a_n}) = 1/2^n, \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1.$$

- Soit $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{J}$ tel que $D \equiv \cup_{i=1}^n D_i \in \mathcal{J}$.
- Vérification d'additivité fini de $P \colon \mathcal{J} \to \mathbb{R}$.
- Il y a un $k \in \mathbb{N}$ tel que $D = A_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ et $P(D) = 2^{-k}$.
- $P(A_{a_1 a_2 \ldots a_n}) = 2^{-n} = P(A_{a_1 a_2 \ldots a_n 0}) + P(A_{a_1 a_2 \ldots a_n 1}) = 2 \cdot 2^{-n-1}$
- Traversez l'arborescence de bas en haut.
- Pourquoi le cas d'additivité dénombrable n'est pas trivial?

Un semialgèbre pour $\Omega_1 \times \Omega_2$

- Commençons avec deux espaces de probabilité : $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$.
- Nous voulons construire un semi-algèbre pour $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.
- Soit $\mathcal{J} \equiv \{A \times B \colon A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}$.
- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{J}$?
- $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) =?$
- $(A \times B)^c =?$

Une proto-probabilité pour $\mathcal{J} = \Omega_1 \times \Omega_2$

Une 'proto-probabilité' $P \colon \mathcal{J} \to [0,1]$: $P(A \times B) \equiv P_1(A)P_2(B)$.

Vérification d'additivité *finie* (dénombrable plus tard) :

- Si $\cup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i) \in \mathcal{J}$ alors il existe $\{\alpha_i \colon j \in J\} \subseteq \mathcal{F}_1$ et $\{\beta_k \colon k \in K\} \subseteq \mathcal{F}_2$ tels que

$$\cup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i) = (\cup_{j\in J}\alpha_i) \times (\cup_{k\in K}\beta_i) \equiv A \times B.$$

- $P(A \times B) = P_1(A)P_2(B) = \left(\sum_{j\in J} P_1(\alpha_j)\right)\left(\sum_{k\in K} P_2(\beta_j)\right)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} P(A_i \times B_i) &= \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} P(\alpha_j \times \beta_k) \\
&= \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} P_1(\alpha_j)P_2(\beta_k) \\
&= \left(\sum_{j\in J} P_1(\alpha_j)\right)\left(\sum_{k\in K} P_2(\beta_k)\right) = P(A \times B).
\end{aligned}$$

Aperçu du Chapitre 3, partie I

- Définition d'une variable aléatoire : $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$.
- Ce qu'on peut construire sans s'inquiéter si elle est une variable aléatoire ou non:
  - Les indicateurs $1_A(\omega)$, où $A \in \mathcal{F}$.
  - La somme de deux variables aléatoires, les multiples scalaires des variables aléatoires
  - Les limites des variables aléatoires ($Z(\omega) = \lim_{n\to\infty} Z_n(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$))
- Indépendence
  - d'événements (du même espace de probabilité)
  - de collections d'évènements
  - de variables aléatoires

Aperçu du Chapitre 3, partie II

Convergence monotone d'événements :

- Pour $A_n \equiv [0, 1/n]$, $A_n \searrow \cap_n [0, 1/n] = \{0\}$.
- Pour $A_n \equiv [0, 1 - 1/n]$, $A_n \nearrow \cup_n [0, 1 - 1/n] = [0, 1)$.

Par convergence de probabilités (un théorème),

- $\lim_{n\to\infty} P([0, 1/n]) = P(\{0\})$,
- $\lim_{n\to\infty} P([0, 1 - 1/n]) = P([0, 1))$,

Aperçu du Chapitre 3, partie III

Pour les séquences réels,

- $\liminf_{n\to\infty} x_n \equiv \lim_{n\to\infty}(\inf_{m\geq n} x_m)$
- $\limsup_{n\to\infty} x_n \equiv \lim_{n\to\infty}(\sup_{m\geq n} x_m)$

Exemple : $A_n \equiv (-1)^n(1 + 1/n) = 2, -3/2, 4/3, -5/3, \ldots$

Pour les suites d'événements, pas forcément monotone,

- $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$
- $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$

Exemple : $H_n \equiv \{(r_1, r_2, \ldots) \in \Omega \colon r_n = 1\}$. $\liminf_n H_n$ (H_n presque toujours) et $\limsup_n H_n$ (H_n infiniment souvent).