ECN 7060, Cours 3

William McCausland

2020-09-16

Plan

Variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

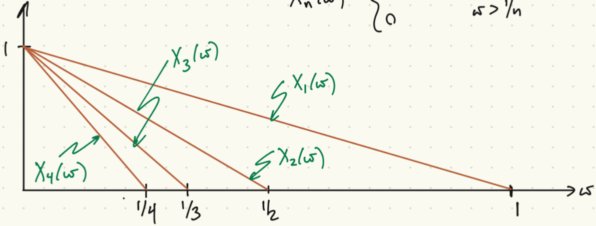
- Une fonction $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si

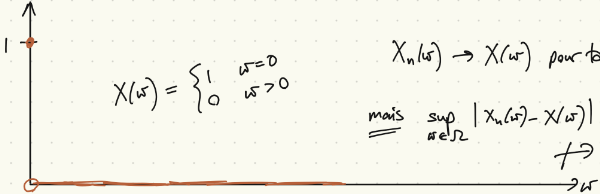
$$\{X \leq x\} \equiv \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}.$$

- Soit $X,\ Y,\ Z_1, Z_2, \ldots$ des variables aléatoires, $c > 0$.
- Les fonctions suivantes sont-elles des variables aléatoires?
  1. $1_A(\omega)$ où $A \in \mathcal{F}$
  2. $W(\omega) = cX(\omega)$
  3. $W = X + Y$
  4. $W = \min(X, Y),\ W = \max(X, Y)$
  5. $W = \inf_n Z_n,\ W = \sup_n Z_n$
- Supposez que $\lim_{n\to\infty} Z_n(\omega)$ existe et égale $Z(\omega)$ pour chaque $\omega \in \Omega$. $Z(\omega)$ est-elle une variable aléatoire?
  - Notez le mode de convergence : ponctuel, pas uniforme

Convergence ponctuelle, pas uniforme

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 - n\omega & \omega \le 1/n \\ 0 & \omega > 1/n \end{cases}$$





$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = 0 \\ 0 & \omega > 0 \end{cases}$$

$X_n(\omega) \to X(\omega)$ pour tous $\omega \in [0,\infty)$

mais $\sup_{\omega \in \Omega} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 1$ pour tous n

$\not\to 0$

Fonctions indicatrices

Notation pour une fonction indicatrice sur Ω, où $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité :

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \subseteq \Omega, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

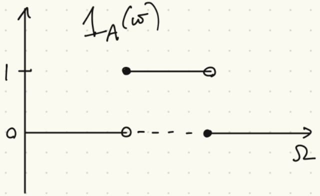
Si $A \in \mathcal{F}$,

$$\{\omega \in \Omega : 1_A(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \Omega & x \geq 1, \\ A^c & 0 \leq x < 1, \\ \emptyset & x < 0, \end{cases}$$

et $\emptyset, A^c, \Omega \in \mathcal{F}$. Alors $1_A(x)$ est une variable aléatoire.

Pré-images par une fonction indicatrice

$$\{\omega \in \Omega : \mathbb{1}_A(x) \leq x\}$$



Multiplication scalaire

Soit $X(\omega)$ une variable aléatoire, $c > 0$ et $W(\omega) \equiv cX(\omega)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega \colon W(\omega) \leq x\} &= \{\omega \in \Omega \colon cX(\omega) \leq x\} \\ &= \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \leq x/c\} \\ &\in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

En notation plus simple :

$$\{W \leq x\} = \{cX \leq x\} = \{X \leq x/c\} \in \mathcal{F}.$$

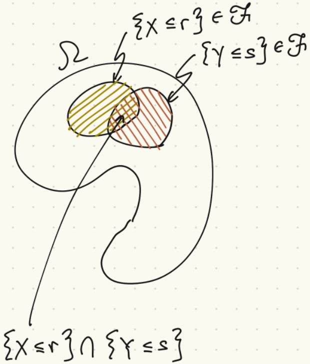
Notes :

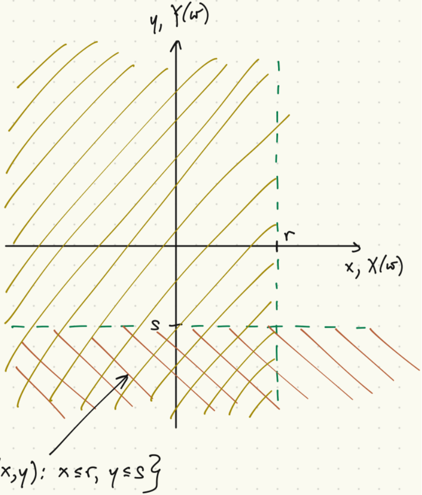
- pour le cas $c < 0$ il faut utiliser

$$\{W \leq x\} = \{X \geq x/c\} = \left(\cup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x/c - 1/n\}\right)^c \in \mathcal{F}.$$

- pour $c = 0$, $W = 0$ est trivialement une variable aléatoire.

Deux variables aléatoires





Discussion : minimum, maximum, infimum

Rappel : $X, Y, Z_1, Z_2, \ldots$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. $W = \min(X, Y)$
2. $W = \max(X, Y)$
3. $W = \inf_n Z_n$

Addition

Soit $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ deux variables aléatoires sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit $W(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Pour tout $w \in \mathbb{R}$,

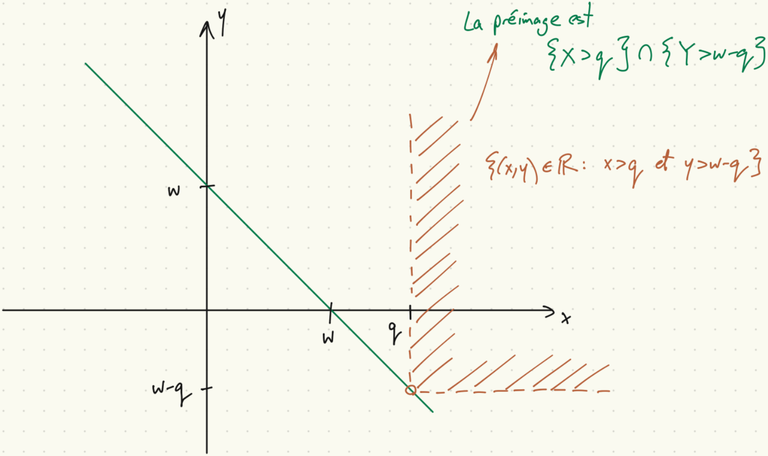
$$\begin{aligned}\{W > w\} &= \cup_{q \in \mathbb{Q}}(\{X > q\} \cap \{Y > w - q\}) \\ &= \cup_{q \in \mathbb{Q}}(\{X \leq q\}^c \cap \{Y \leq w - q\}^c) \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

Alors $\{W \leq w\} = \{W > w\}^c \in \mathcal{F}$.

Notes pour la première équation :

- Pour inclure le point $(x, w - x + \epsilon)$ arbitraire qui vérifie $x + y > w$, choisit $q \in (x - \epsilon, x)$.
- Entre deux nombres réels, il y a toujours un nombre rationnel (la densité des rationnels dans les réels).

La somme $X(\omega)+Y(\omega)$



Limites ponctuelles

Supposez que $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $Z(\omega) = \lim_{n\to\infty} Z_n(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Alors

$$\begin{aligned}\{Z \leq x\} &= \{\lim_{k\to\infty} Z_k \leq x\} = \{\forall\epsilon > 0,\, \exists n,\, \forall k > n,\, Z_k \leq x + \epsilon\}\\ &= \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} \{Z_k \leq x + 1/m\} \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Notes :

1. Fonctions sur $\Omega = \mathbb{R}$ avec un ensemble dénombrable de discontinuités.
2. Avec des limites et des sommes finies, on a des sommes infinies convergentes.

Indépendance de deux événements sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

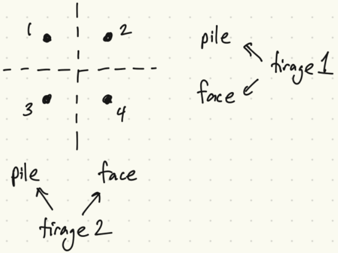
- $A, B \in \mathcal{F}$ sont indépendants (dénoté $A \perp B$) si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Résultat : $A \perp B \Rightarrow A \perp B^c$, $A^c \perp B$, $A^c \perp B^c$.
- Deux faits :
  - $P(A \cap B) + P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c) = 1$
  - $(P(A) + P(A^c))(P(B) + P(B^c)) = P(A)P(B) + P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) + P(A^c)P(B^c) = 1.$
- $P(A \cap B^c) + P(A \cap B) = P(A)$ par additivité. Si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap B^c) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$.

Indépendance de trois événements

- $A, B, C \in \mathcal{F}$ sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ et $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
- Importance de $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$:
  - $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(\{i\}) = 0.25$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.
  - Soit $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3\}$.
  - $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.25$, $P(A \cap C) = P(A)P(C) = 0.25$, $P(B \cap C) = P(B)P(C) = 0.25$.
  - Mais $P(A \cap B \cap C) = 0$ et $P(A)P(B)P(C) = 0.125$.
  - Intuition: si $\omega \in C$, $\omega \in A \cap B$ est impossible, tandis que si $\omega \notin C$, c'est possible.

Indépendance par pair vs indépendance

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$



Indépendance d'un ensemble I d'événements

- L'ensemble I peut être indénombrable (Exemple : processus stochastique en temps continu)
- $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sont indépendants si pour chaque $j \in \mathbb{N}$ et chaque $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$,

$$P(A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \cap \ldots \cap A_{\alpha_j}) = P(A_{\alpha_1})P(A_{\alpha_2}) \cdots P(A_{\alpha_j})$$

- Si les $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sont indépendants et $a \in I$, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I \setminus \{a\}} \cup \{A_a^c\}$ le sont aussi. (On peut remplacer un évènement arbitraire par son complément.)

Indépendance des variables aléatoires

- Indépendance de deux variables aléatoires : X et Y sont indépendants si pour tous ensembles boréliens S_1 et S_2, $X^{-1}(S_1)$ et $Y^{-1}(S_2)$ sont indépendants.
- Indépendance par paire : pour toutes paires (X, Y) dans une collection de variables aléatoires, X et Y sont indépendants.
- Indépendance : une collection $\{X_\alpha \colon \alpha \in I\}$ de variables aléatoires est indépendante si pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_j \in I$, $S_1, \ldots, S_j$ boréliens,

$$P(X_{\alpha_1} \in S_1, \ldots, X_{\alpha_j} \in S_j) = P(X_{\alpha_1} \in S_1) \cdots P(X_{\alpha_j} \in S_j)$$

- Indépendance de $f(X)$ et $g(Y)$ pour X, Y indépendant, f et g réelles et mesurables
- Suffisance de $F(x, y) = F(x)F(y)$ pour indépendance.

Indépendance de $f(X)$ et $g(Y)$, f,g réelles et mesurable

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r] & f(X) \\
 & \in f^{-1}(S_1) & \in S_1 \text{ Borélienne} \\
\Omega \arrow[uur, bend left, "\{X^{-1}(f^{-1}(S_1))\}\in\mathcal{F}"] \arrow[ddr, bend right, "\{Y^{-1}(g^{-1}(S_2))\}\in\mathcal{F}"'] & & \\
 & & \\
 & Y \arrow[r] & g(Y) \\
 & \in f^{-1}(S_2) & \in S_2 \text{ Borélienne.}
\end{tikzcd}
$$

Continuité de probabilité (résultat)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité.

Résultat (continuité de probabilité)

- Si $A_n \nearrow A$, $A_n \in \mathcal{F}$, $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
- Si $A_n \searrow A$, $A_n \in \mathcal{F}$, $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Attention :

- $[0, 1 - 1/n] \nearrow [0, 1)$.
- On peut avoir $P([0, 1 - 1/n]) \to P([0, 1)) = 0.5$ et $P([0, 1]) = 1$ en même temps.
- Plus généralement, la fonction de répartition n'est pas forcément continue. Mais la continuité de probabilité implique qu'elle est continue à droite.

Continuité de probabilité (preuve)

- Soit $A_n \nearrow A$, $A_n \in \mathcal{F}$.
- On construit une suite d'anneaux disjoints :

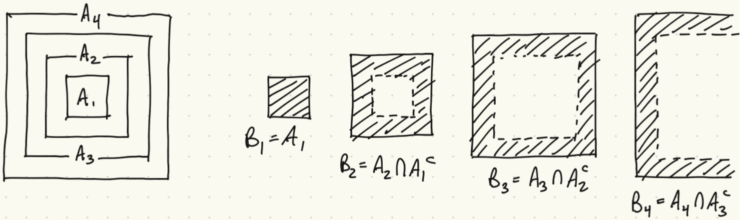
$$B_1 = A_1,\; B_2 = A_2 \cap A_1^c,\; \dots,\; B_n = A_n \cap A_{n-1}^c,\; \dots$$

- Notez que $B_n \in \mathcal{F}$, $A_n = \cup_{m=1}^n B_m$ et $A = \cup_{m=1}^\infty B_m$.
- Alors

$$P(A) = P(\cup_{m=1}^\infty B_m) = \sum_{m=1}^\infty P(B_m) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^n P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

- Si $A_n \searrow A$ et $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n^c \nearrow A^c$ puis $P(A^c) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$, $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Construction des B_n



Convergence : suites d'événements A_n non-monotones

- $C_n = \cap_{k=n}^{\infty} A_k \nearrow C \equiv \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$ (A_n presque toujours, $\liminf_n A_n$).
- $D_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k \searrow D \equiv \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$ (A_n infiniment souvent, $\limsup_n A_n$).
- Les ensembles "infiniment souvent", "presque toujours" existe toujours.
- (Proposition 3.4.1, preuve)

$$
\begin{aligned}
P(\liminf_n A_n) = P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k) &= \lim_{n\to\infty} P(\cap_{k=n}^{\infty} A_k) \\
&= \liminf_{n\to\infty} P(\cap_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n),
\end{aligned}
$$

$$
P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n) \leq \limsup_n P(A_n) \leq P(\limsup_n A_n).
$$

- Si $P(\liminf_n A_n) = P(\limsup_n A_n)$, $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ existe.

Aperçu du Chapitre 4, Espérance

1. Pour les variables aléatoires simples $X(\omega) = \sum_{i=1} x_i 1_{A_i}(\omega)$,

$$E[X(\omega)] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i).$$

   - linéarité
   - $E[XY] = E[X]E[Y]$ pour X, Y indépendant
2. Des variables aléatoires non-négatives

$$E[X] = \sup\{E[Y] \colon Y \,\text{simple},\ Y \leq X\}.$$

3. Des variables aléatoires générales.
4. Espérance comme une généralisation de l'intégration riemannienne.