

# ECN 7060, Cours 1

William McCausland

2019-09-04

# Matières

## Partie 1, Livre de Rosenthal

- ▶ Espaces de probabilité, le théorème d'extension
- ▶ Variables aléatoires, lois, indépendance
- ▶ Espérance
- ▶ Convergence en probabilité, convergence presque sûre
- ▶ Fonctions caractéristiques, convergence en distribution et le théorème centrale limite
- ▶ Probabilité et espérance conditionnelles

## Partie 2, Livre de Casella et Berger

- ▶ Statistiques suffisantes et ancillaires, principe de vraisemblance
- ▶ Estimation ponctuelle, fréquentiste et bayésienne
- ▶ Estimation d'intervalle, fréquentiste et bayésienne
- ▶ Tests d'hypothèse, fréquentistes et bayésiens

## Les éléments de la note finale :

1. Questionnaires : 20% (meilleurs  $n - 1$  de  $n \approx 10$ )
2. Examen intra maison : 25%
3. Participation, cours et séance TP : 5%
4. Examen final : 50%

# Le cycle mercredi-mardi :

## 1. Mercredi 13h-16h, cours :

- ▶ retour des questionnaires corrigés du cours précédent
- ▶ réponses aux questions des étudiants
- ▶ questionnaire sur les lectures (matière du cours actuel)
- ▶ correction des questionnaires du cours actuel
- ▶ enseignement magistral avec participation des étudiants
- ▶ aperçu de la matière de la semaine prochaine
- ▶ attribution des lectures (pour la semaine prochaine) avec questions simple de lecture, des devoirs sur la matière du cours actuel

## 2. Mardi 11h30-13h, séance de travail pratique avec Narcisse

- ▶ discussion des devoirs

Mon site web : <https://mccauslw.github.io>

# Attentes :

## Avant le cours

1. Avoir lu les lectures, pouvoir répondre aux questions simples

## Avant la séance TP

1. Avoir essayé (idéalement complété) les devoirs

## Espaces de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans un monde fini

1.  $\Omega$ , l'espace d'états (exactement un état  $\omega \in \Omega$  se produit)
2.  $\mathcal{F}$ , algèbre, un ensemble d'événements (des parties de  $\Omega$ )
3.  $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , une probabilité

Exemple :

1.  $\Omega = \{0, 1\}$
2.  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} = 2^\Omega$
3.  $P(\cdot)$  selon le tableau suivant :

$A$	$P(A)$
$\emptyset$	0
$\{0\}$	0.4
$\{1\}$	0.6
$\{0, 1\}$	1

## Jugements cohérents (de Finetti et Ramsey)

- ▶ Ensemble d'états du monde :  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ 
  - ▶  $\omega_1$ : Le parti PLC gagne l'élection fédérale prochaine
  - ▶  $\omega_2$ : Le parti PLC ne gagne pas
- ▶ Un agent offre des prix (cours acheteur et cours vendeur) pour ces contrats:
  1. paie 1\$ si ni  $\omega_1$  ni  $\omega_2$  se produit (l'événement  $\emptyset$ )
  2. paie 1\$ si  $\omega_1$  se produit (l'événement  $\{\omega_1\}$ )
  3. paie 1\$ si  $\omega_2$  se produit (l'événement  $\{\omega_2\}$ )
  4. paie 1\$ si  $\omega_1$  ou  $\omega_2$  se produit (l'événement  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ )
- ▶ Ces jugements sont *cohérents* si un autre ne peut pas faire un profit sûr peu importe le résultat.
- ▶ Ils sont cohérents ssi les prix vérifient les axiomes de probabilité.
- ▶ Contribution de Ramsey: accommoder l'aversion pour le risque et mesurer à la fois les jugements de probabilité et l'utilité.
- ▶ Ch. 2 de Diaconis et Skyrms, "Ten Great Ideas about Chance".

# Interprétation fréquentiste de probabilité

- ▶ Venn et von Mises essaient de définir la probabilité en termes des (limites des) fréquences des événements semblables.
- ▶ Plusieurs fréquentistes rejettent l'aspect subjectif des définitions qui repose sur les jugements cohérents.
- ▶ Difficultés conceptuelles :
  1. Définition de « semblable » qui évite et des tautologies et des situations où toutes les probabilités sont 0 ou 1.
  2. L'irréalité des fréquences infinies
  3. La possibilité des fréquences sans limite.
- ▶ Ch. 4 de Diaconis et Skyrms, "Ten Great Ideas about Chance".



Quelles propriétés  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  devrait-il posséder ( $\Omega$  fini)?

Propriétés désirables :

1. Additivité finie :

$$A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2.  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$ ,

3.  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$ ,

4.  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c, A \cup B, A \cap B \in \mathcal{F}$

Par 3 et 4,  $\mathcal{F}$  est une algèbre, pas forcément une tribu.

Une façon de spécifier une probabilité :

1. Donner  $P(\{\omega\}) = p_\omega \geq 0$ ,  $\omega \in \Omega$ , où  $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$

2. Définir l'extension  $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ ,  $A \subseteq \Omega$ .

# Dénombrable ou non?

Un ensemble  $S$  est

- ▶ *dénombrable* s'il existe une fonction injective de  $S$  vers  $\mathbb{N}$ ,
- ▶ *infini dénombrable* s'il existe une fonction bijective de  $S$  vers  $\mathbb{N}$ ,
- ▶ *indénombrable* s'il n'est pas dénombrable.

Quelques ensembles :

1.  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
2.  $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
3.  $\mathbb{Z}^2$
4.  $\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
5.  $\mathbb{Z}^n$
6.  $\mathbb{R}$
7.  $2^{\mathbb{N}}$ , l'ensemble des sous-ensembles de  $\mathbb{N}$
8. L'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$
9. L'ensemble des fichiers (livres, dessins, audio, vidéo)
10. L'ensemble des programmes informatiques

## Exemples de $\Omega$ : finis, dénombrables, indénombrables

1.  $\Omega = \{1, \dots, n\}$
2.  $\Omega = \{(r_1, \dots, r_n) : r_i \in \{0, 1\}\}$
3.  $\Omega = \{(r_1, \dots, r_n) : r_i \in \mathbb{Z}\}$
4.  $\Omega = \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$
5.  $\Omega = \{(r_1, \dots) : r_i \in \{0, 1\}\}$
6.  $\Omega = [0, 1]$
7.  $\Omega = \mathbb{R}$
8.  $\Omega = \mathbb{R}^n$

## Construire $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour la loi uniforme $[0, 1]$

Premier essai:  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ , trouver une  $P$  qui vérifie

1.  $P([a, b]) = P((a, b]) = P([a, b)) = P((a, b)) = b - a$  pour tout  $0 \leq a \leq b \leq 1$ .
2.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  disjoints  $\Rightarrow P(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$
3.  $P(A \oplus r) = P(A)$ ,  $0 \leq r \leq 1$ .

Impossible! Preuve :

1. Définir  $x \sim y$  ssi  $y - x \in \mathbb{Q}$  ;  $\sim$  est transitive et réflexive.
2. Partitionner  $[0, 1]$  en classes d'équivalence :  $\{0, 1/3, 1/5, \dots\}$ ,  $\{\pi, \pi - 3, \pi - 3.1, \dots\}$ ,  $\{e, e - 2.7, e - 2.71\}$ , etc.
3. Construire  $H$ , un ensemble avec un élément de chaque classe.
4. Noter que  $[0, 1] = \cup_{r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} (H \oplus r)$  (ensembles disjoints).
5. Constater l'implication impossible :

$$1 = P(\Omega) = \sum_{r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} P(H \oplus r) = \sum_{r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} P(H)$$

# La construction d'un espace de probabilité

Supposez que l'espace d'états  $\Omega$  est donné, on doit spécifier  $\mathcal{F}$  et  $P$ .  
On veut

1. un système cohérent (qui vérifie certains axiomes)
2. une façon de spécifier une partie de  $P$  et laisser les axiomes déterminer le reste
3. une tribu  $\mathcal{F}$  faisable mais assez riche qu'elle contient les événements d'intérêt.

La semaine prochaine on développe un outil important pour cette construction des espaces de probabilité.

# Axiomes de probabilités

Un espace de probabilité est un  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tel que

1.  $\Omega \neq \emptyset$ ;
2.  $\mathcal{F}$  satisfait
  - a.  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$ ,
  - b.  $A \in \mathcal{F} \rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ ,
  - c.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i, \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ ;
3.  $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait
  - a.  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$ ,
  - b.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  disjoints  $\rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ .

## Aperçu, Rosenthal chapitre 2

1. Construction d'un espace de probabilité à partir d'une semi-algèbre
2. Le théorème d'extension
3. Construction d'un espace de probabilité pour la loi uniforme sur  $[0, 1]$
4. Construction d'un espace de probabilité pour un modèle du tirage répété au pile ou face