

# ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers, Hiver 2023

## Cours 4

William McCausland

2023-01-29

# Plan

1. Prédiction linéaire avec un modèle ARMA(p,q)
2. Modèles pour les deux premiers moments conditionnels (GARCH)
3. Simulation des modèles GARCH
4. Vraisemblance des modèles GARCH

# Prévision avec un modèle ARMA(p,q)

- ▶ Le problème : prévoir  $r_{t+h}$  à  $t$ , mesurer l'incertitude.
- ▶ Types de prévision
  - ▶ ponctuelle,
  - ▶ par intervalle,
  - ▶ par densité
- ▶ Si l'objectif est de choisir  $\hat{r}_t(h)$  pour minimiser  $E[(r_{t+h} - \hat{r}_t(h))^2 | F_t]$ , la meilleure prévision ponctuelle est  $\hat{r}_t(h) = E[r_{t+h} | F_t]$  et la valeur minimal est  $\text{Var}[r_{t+h} | F_t]$ .
- ▶ Dans un modèle ARMA(p,q),  $E[r_{t+h} | F_t]$  est linéaire en  $r_t, r_{t-1}, \dots, r_{t-p}$  et  $a_t, a_{t-1}, \dots, a_{t-q}$ .
- ▶ Avec les coefficients  $\phi_i$  et  $\theta_i$ , on peut évaluer  $E[r_{t+h} | F_t]$ .
- ▶ Avec  $\sigma_a^2$  aussi on peut évaluer  $\text{Var}[r_{t+h} | F_t]$ .
- ▶ Pour simplifier un peu,  $F_t$  comprend  $r_t, r_{t-1}, \dots$  et  $a_t, a_{t-1}, \dots$ .
- ▶ En réalité, on observe un échantillon  $r_1, \dots, r_T$  et recouvre  $a_1, \dots, a_T$  seulement de façon approximative.

# Prévision avec un modèle ARMA(2,2) à un horizon $h = 1$

- Équation ARMA(2,2) pour  $r_{t+1}$  :

$$r_{t+1} = \phi_1 r_t + \phi_2 r_{t-1} + a_{t+1} - \theta_1 a_t - \theta_2 a_{t-1}.$$

- Prenez l'espérance conditionnelle  $E[\cdot|F_t]$  des deux côtés pour obtenir une prévision :

$$E[r_{t+1}|F_t] = \phi_1 r_t + \phi_2 r_{t-1} - \theta_1 a_t - \theta_2 a_{t-1}.$$

- Calculez l'erreur de la prévision :

$$r_{t+1} - E[r_{t+1}|F_t] = a_{t+1}.$$

- Calculez la variance de l'erreur de la prévision :

$$\text{Var}[r_{t+1}|F_t] = \text{Var}[a_{t+1}|F_t] = \sigma_a^2.$$

# Prévision à un horizon $h = 2$ : la prévision ponctuelle

- Équation pour  $r_{t+2}$  :

$$r_{t+2} = \phi_1 r_{t+1} + \phi_2 r_t + a_{t+2} - \theta_1 a_{t+1} - \theta_2 a_t.$$

- Prenez l'espérance conditionnelle  $E[\cdot|F_t]$  des deux côtés pour obtenir :

$$E[r_{t+2}|F_t] = \phi_1 E[r_{t+1}|F_t] + \phi_2 r_t - \theta_2 a_t,$$

où  $E[r_{t+1}|F_t] = \phi_1 r_t + \phi_2 r_{t-1} - \theta_1 a_t - \theta_2 a_{t-1}$ .

- Alors la prévision à  $h = 2$  est

$$\begin{aligned} E[r_{t+2}|F_t] &= \phi_1 [\phi_1 r_t + \phi_2 r_{t-1} - \theta_1 a_t - \theta_2 a_{t-1}] + \phi_2 r_t - \theta_2 a_t \\ &= (\phi_1^2 + \phi_2) r_t + \phi_1 \phi_2 r_{t-1} - (\phi_1 \theta_1 + \theta_2) a_t - \phi_1 \theta_2 a_{t-1}. \end{aligned}$$

## Variance de l'erreur ( $h = 2$ ) : 1er perspectif de trois

- Calculez l'erreur de la prévision :

$$\begin{aligned}r_{t+2} - E[r_{t+2}|F_t] &= \phi_1(r_{t+1} - E[r_{t+1}|F_t]) + a_{t+2} - \theta_1 a_{t+1} \\ &= (\phi_1 - \theta_1)a_{t+1} + a_{t+2}.\end{aligned}$$

- Calculez la variance de l'erreur de la prévision :

$$\text{Var}[r_{t+2}|F_t] = [(\phi_1 - \theta_1)^2 + 1]\sigma_a^2.$$

## Variance de l'erreur ( $h = 2$ ) : 2e perspectif de trois

- ▶ Par la loi de variance totale :

$$\text{Var}[r_{t+2}|F_t] = E[\text{Var}[r_{t+2}|F_{t+1}]|F_t] + \text{Var}[E[r_{t+2}|F_{t+1}]|F_t]$$

- ▶ Puisque  $\text{Var}[r_{t+2}|F_{t+1}] = \sigma_a^2$ ,

$$E[\text{Var}[r_{t+2}|F_{t+1}]|F_t] = \sigma_a^2.$$

- ▶ Puisque  $E[r_{t+2}|F_{t+1}] = \phi_1 r_{t+1} + \phi_2 r_t - \theta_1 a_{t+1} - \theta_2 a_t$ ,

$$\text{Var}[E[r_{t+2}|F_{t+1}]|F_t] = \text{Var}[(\phi_1 - \theta_1)a_{t+1}|F_t] = (\phi_1 - \theta_1)^2 \sigma_a^2$$

- ▶ Alors,

$$\text{Var}[r_{t+2}|F_t] = [1 + (\phi_1 - \theta_1)^2] \sigma_a^2.$$

## Variance de l'erreur ( $h = 2$ ) : 3e perspectif de trois

- La représentation MA infinie donne

$$r_{t+2} = a_{t+2} + \psi_1 a_{t+1} + \psi_2 a_t + \dots$$

- La variance conditionnelle est donc

$$\begin{aligned}\text{Var}[r_{t+2}|F_t] &= \text{Var}[a_{t+2} + \psi_1 a_{t+1}|F_t] \\ &= (1 + \psi_1^2)\sigma_a^2 \\ &= [1 + (\phi_1 - \theta_1)^2]\sigma_a^2.\end{aligned}$$



# Le modèle ARMA(p,q) comme modèle pour la moyenne conditionnelle

- L'équation ARMA(p,q) :

$$r_t = \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_p r_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}.$$

- La moyenne conditionnelle :

$$\mu_t \equiv E[r_t | F_{t-1}] = \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_p r_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}.$$

- Notez que l'innovation est une erreur de prévision :

$$a_t = r_t - E[r_t | F_{t-1}].$$

- Si on connaît  $r_{t-1}, \dots, r_{t-p}$  et  $a_{t-1}, \dots, a_{t-q}$ , on apprend  $a_t$  en même temps qu'on observe  $r_t$ .

# Introduction aux modèles ARCH, GARCH

- ▶ Modèles pour les deux premiers moments conditionnels de  $r_t$ .
- ▶  $F_{t-1}$  représente toute l'information connue à  $t - 1$ .
- ▶ Au minimum,  $F_{t-1}$  comprend  $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots$
- ▶ Définitions de la moyenne, de la variance conditionnelle de  $r_t$  :

$$\mu_t \equiv E[r_t | F_{t-1}], \quad \sigma_t^2 \equiv \text{Var}[r_t | F_{t-1}].$$

- ▶ 'Hétéroscédasticité conditionnelle' veut dire que  $\sigma_t^2$  varie avec  $t$ .
- ▶ Convention alternative (qu'on n'utilise pas ici) où l'indice indique le moment où la quantité est connue :

$$\mu_{t-1} \equiv E[r_t | F_{t-1}].$$

- ▶ Autres définitions :  $a_t \equiv r_t - \mu_t$ ,  $\epsilon_t \equiv a_t / \sigma_t$ , alors

$$r_t = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t.$$

- ▶ Notez que  $\epsilon_t | F_{t-1} \sim (0, 1)$ .

## Exemple ARMA(p,q)-GARCH(m,s)

- Un modèle pour  $\mu_t$  : (cas spécial de 3.3)

$$\mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i}.$$

- Un modèle pour  $\sigma_t^2$  : (3.14)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

- $r_t | F_{t-1} \sim (\mu_t, \sigma_t^2)$

# Modèle ARCH

- ▶ Le modèle ARCH(m) d'Engle :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2,$$

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \epsilon_t | F_{t-1} \sim (0, 1).$$

- ▶ La spécification implicite de  $\mu_t$  ici est  $\mu_t = 0$ .
- ▶ Puisque  $r_t \equiv \mu_t + a_t$ ,  $r_t$  et  $a_t$  ici sont pareille.
- ▶ La spécification de  $\sigma_t^2$  dépend du passé du processus.
- ▶ On suppose que  $a_t$  est covariance stationnaire, ce qui entraîne des restrictions aux paramètres.
- ▶  $\sigma_t$  connu à  $t - 1$ ;  $a_t$  et  $\epsilon_t$  connus à  $t$ .

# Moyenne et variance inconditionnelle du modèle ARCH(1)

## ► ARCH(1)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2, \quad E[a_t | F_{t-1}] = 0, \quad \text{Var}[a_t | F_{t-1}] = \sigma_t^2.$$

## ► Moyenne inconditionnelle

$$E[a_t] = E[E[a_t | F_{t-1}]] = E[0] = 0.$$

## ► Variance inconditionnelle

$$\text{Var}[a_t] = E[a_t^2] = E[E[a_t^2 | F_{t-1}]] = E[\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2],$$

$$(1 - \alpha_1)\text{Var}[a_t] = \alpha_0, \quad \text{Var}[a_t] = \alpha_0 / (1 - \alpha_1).$$

- Il faut que  $\alpha_1 < 1$  par covariance stationnarité.
- Il faut que  $\alpha_0 > 0$  et  $\alpha_1 \geq 0$  par positivité de la variance.

# Asymétrie conditionnelle et l'effet de levier

- ▶ L'asymétrie conditionnelle est  $E[r_t^3|F_{t-1}]/\sigma_t^3$ .
- ▶ L'effet de levier est souvent exprimé comme  $\text{Cov}[(\sigma_{t+1}^2 - \sigma_t^2), a_t] < 0$ .
- ▶ Il faut avoir un modèle pour parler des moments conditionnels en général, et les faits empiriques concernant l'asymétrie conditionnelle et l'effet de levier en particulier.

# L'asymétrie d'un modèle ARCH(1)

- ▶ Souvent les modèles de volatilité spécifie  $E[a_t^3|F_{t-1}]$  comme étant zéro ou constant; souvent, ils ne le spécifient pas.
- ▶ L'effet de levier en termes du troisième moment inconditionnel :

$$E[(\sigma_{t+1}^2 - \sigma_t^2)a_t] = E[(\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 - \sigma_t^2)a_t] = \alpha_1 E[a_t^3].$$

- ▶ Troisième moment inconditionnel en termes du troisième moment conditionnel :

$$E[a_t^3] = E[E[a_t^3|F_{t-1}]].$$

- ▶ Si l'asymétrie conditionnelle est nulle, l'asymétrie inconditionnelle et  $\text{Cov}[(\sigma_{t+1}^2 - \sigma_t^2), a_t]$  sont nulles aussi.
- ▶ Conclusion: pour un ARCH(1), une asymétrie inconditionnelle ou un effet de levier doit passer par une asymétrie conditionnelle.
- ▶ Même chose pour un ARCH(m).

## Aplatissement d'un ARCH(1) gaussien

- ▶ Le 4<sup>ième</sup> moment conditionnel dépend du choix de la loi de  $a_t$ .
- ▶ Pour un modèle ARCH(1) gaussien,

$$E[a_t^4 | F_{t-1}] = 3E[\sigma_t^4 | F_{t-1}] = 3(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2.$$

$$E[a_t^4] = 3E[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_1^2 a_{t-1}^4]$$

- ▶ Si  $E[a_t^4] = E[a_{t-1}^4]$  (une conséquence de stationnarité, mais pas de covariance-stationnarité) alors

$$E[a_t^4] = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}.$$

- ▶ Il faut que  $\alpha_1^2 < 1/3$  pour l'existence de l'aplatissement. Un peu inflexible.
- ▶ L'aplatissement inconditionnel, s'il existe, est de

$$\frac{E[a_t^4]}{E[a_t^2]^2} = 3(1 - \alpha_1^2)/(1 - 3\alpha_1^2) > 3.$$



# Les autocorrélations

- Autocorrélation de première ordre de  $r_t$  ou  $a_t$ :

$$E[a_t a_{t-1}] = E[E[a_t a_{t-1} | F_{t-1}]] = E[a_{t-1} E[a_t | F_{t-1}]] = E[a_{t-1} 0] = 0.$$

- Autocorrélation de  $a_t^2$ :

$$\begin{aligned} E[a_t^2 a_{t-1}^2] &= E[E[a_t^2 a_{t-1}^2 | F_{t-1}]] = E[a_{t-1}^2 E[a_t^2 | F_{t-1}]] \\ &= E[a_{t-1}^2 (\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)] = \frac{\alpha_0^2}{1 - \alpha_1} + \alpha_1 E[a_{t-1}^4] \end{aligned}$$

$$\text{Cov}[a_t^2, a_{t-1}^2] = E[a_t^2 a_{t-1}^2] - E[a_t^2] E[a_{t-1}^2] = \alpha_1 E[a_{t-1}^4] - \frac{\alpha_0^2 \alpha_1}{(1 - \alpha_1)^2}$$

$$\text{Var}[a_t^2] = E[a_t^4] - E[a_t^2]^2 = E[a_t^4] - \frac{\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2}$$

- Avec stationnarité en 4e moment,  $\text{corr}[a_t^2, a_{t-1}^2] = \alpha_1$ .

# Résumé des conclusions théoriques

## Le modèle ARCH

- ▶ capture la variabilité et la persistance de la volatilité
- ▶ capture l'aplatissement inconditionnel plus grand que 3
- ▶ un peu d'inflexibilité pour l'autocorrélation de  $a_t^2$
- ▶ ne capture pas la longue mémoire pour la volatilité
- ▶ ne capture pas l'asymétrie inconditionnelle, indépendamment de l'asymétrie conditionnelle
- ▶ ne capture pas l'effet de levier, indépendamment de l'asymétrie conditionnelle

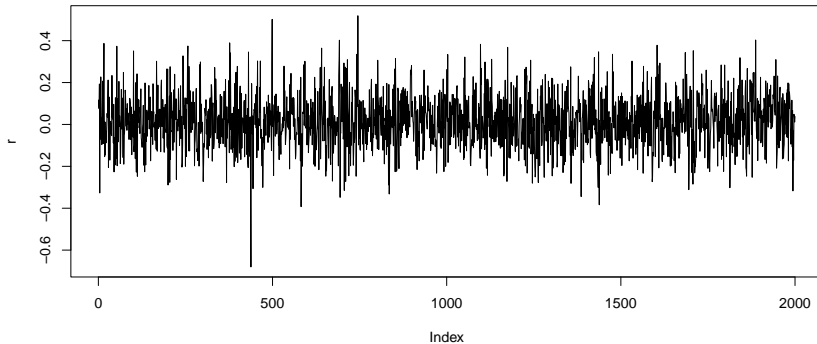
## Simulation du modèle ARCH(3)

```
# Paramètres (de l'exemple Intel, Exemple 3.1)
mu = 0.0122
al0 = 0.0106; al = c(0.2131, 0.0770, 0.0599)
variance = al0/(1-al[1]-al[2]-al[3])

T = 2000 # Nombre de périodes
epsilon = rnorm(T) # Innovations gaussiennes
a = rep(0, T); r = rep(0, T) # Mémoire réservé
a[1:3] = rnorm(3, sd=sqrt(variance));
r[1:3] = a[1:3] + mu
for (t in 4:T) {
  mu_t = mu
  sigma2_t = al0 + al %*% a[(t-1):(t-3)]^2
  a[t] = sqrt(sigma2_t) * epsilon[t]
  r[t] = a[t] + mu_t
}
```

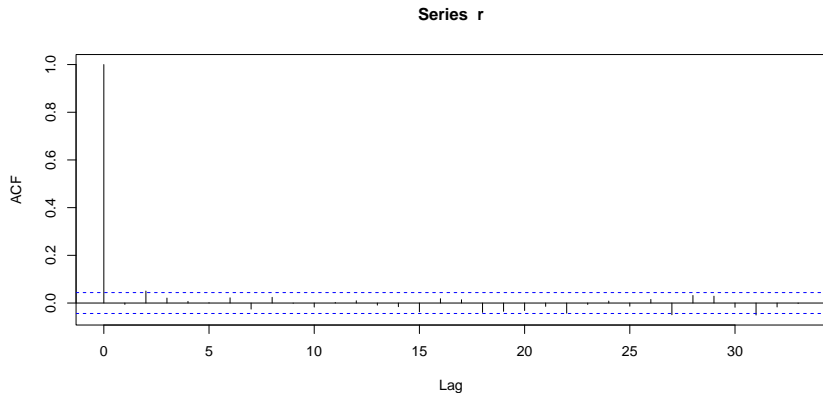
## Graphique de $r_t$ artificiel

```
plot(r, type='l')
```



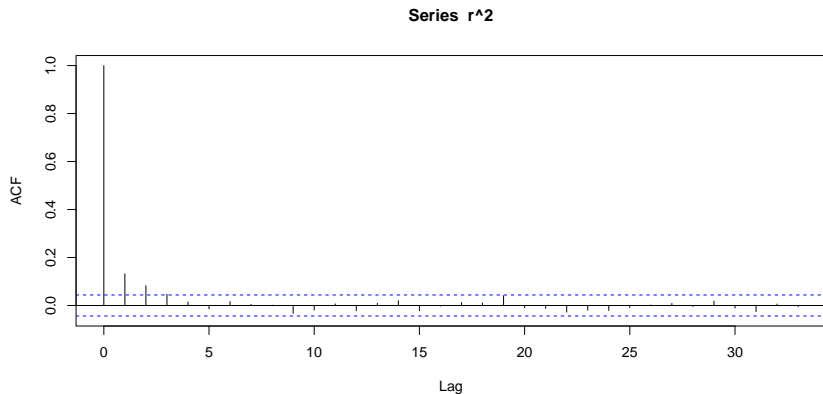
# La fonction d'autocorrélation de $r_t$ artificiel

acf(r)



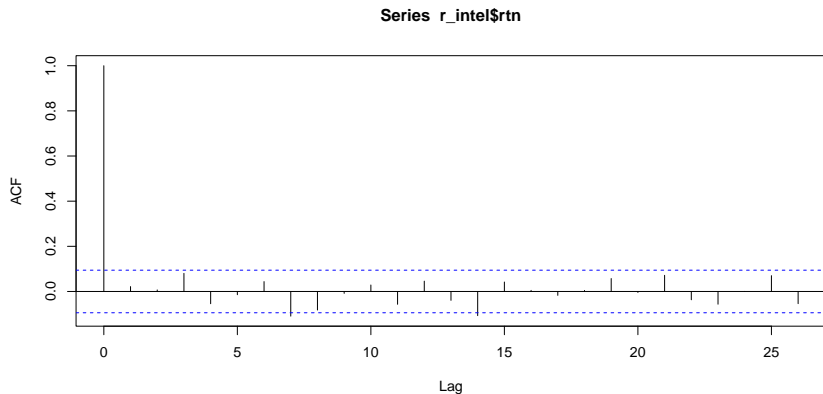
# La fonction d'autocorrélation de $r_t^2$ artificiel

```
acf(r^2)
```



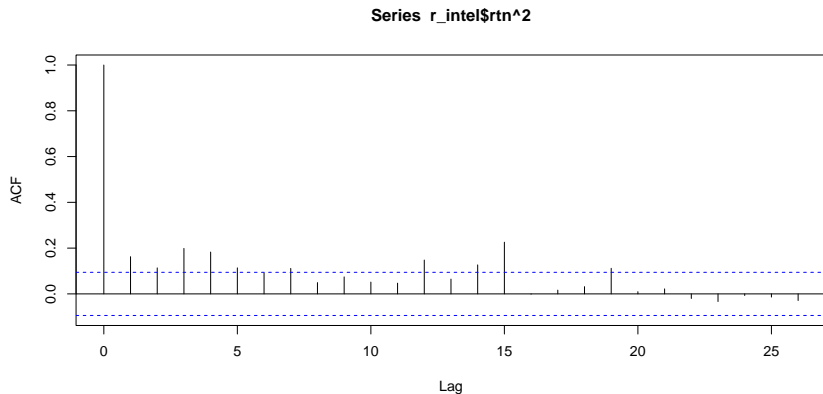
# La fonction d'autocorrélation de $r_t$ , Intel 1973-2008

```
r_intel = read.table('m-intc7308.txt', header=TRUE)
acf(r_intel$rtn)
```



# La fonction d'autocorrélation de $r_t^2$ , Intel 1973-2008

```
acf(r_intel$rt^n^2)
```





## Test des effets ARCH, Intel

```
Box.test(r_intel$rtn, lag=12)
```

```
##  
## Box-Pierce test  
##  
## data:  r_intel$rtn  
## X-squared = 15.987, df = 12, p-value = 0.1918
```

```
Box.test(r_intel$rtn^2, lag=12)
```

```
##  
## Box-Pierce test  
##  
## data:  r_intel$rtn^2  
## X-squared = 78.075, df = 12, p-value = 9.599e-12
```

## La log-vraisemblance pour un ARCH(1) gaussien, $\mu_t = \mu$

- En générale, pour une séries  $r_t$ , la log-vraisemblance est

$$L(\theta; r_1, \dots, r_T) = \sum_{t=1}^T \log[f(r_t | \theta, r_1, \dots, r_{t-1})]$$

- La densité d'une aléa  $N(\mu, \sigma^2)$  :

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$

- La log-densité :

$$\log f(x; \mu, \sigma) = -\frac{1}{2}[\log \sigma^2 + \log 2\pi + (x - \mu)^2/\sigma^2]$$

## La log-vraisemblance pour un ARCH(1) gaussien, $\mu_t = \mu$

- Terme  $t = 1$  :

$$\log f(r_1) = -\frac{1}{2} \left[ \log \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \log 2\pi + \frac{(r_1 - \mu)^2}{\alpha_0 / (1 - \alpha_1)} \right].$$

- Termes  $t > 1$  :

$$\log f(r_t | r_{t-1}) = -\frac{1}{2} \left[ \log[\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2] + \log 2\pi + \frac{(r_t - \mu)^2}{\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2} \right].$$

- La somme de tous les termes donne  $L(\mu, \alpha_0, \alpha_1; r_1, \dots, r_T)$
- Les “constantes” de normalisation importent. Même si elles ne dépendent pas des  $r_t$  actuelles, elles dépendent des paramètres et des rendements retardés.
- Pourquoi en logs?

## Évaluation de la vraisemblance

```
vraisemblance <- function(mu, al0, al1, r) {  
  T = length(r)  
  a = rep(0, T); # Mémoire réservé  
  mu_t = mu  
  sigma2_t = al0/(1-al1)  
  a[1] = r[1]-mu_t  
  L = -0.5*(sigma2_t + log(2*pi) + a[1]^2/sigma2_t)  
  for (t in 2:T) {  
    mu_t = mu  
    sigma2_t = al0 + al1 * a[t-1]^2  
    a[t] = r[t] - mu_t  
    L = L - 0.5*(sigma2_t + log(2*pi) + a[t]^2/sigma2_t)  
  }  
}
```

## Prévision avec un ARCH(m)

- ▶ La meilleure prévision ponctuelle, en termes de perte quadratique, est la moyenne.
- ▶ Prévision de  $\sigma_{t+1}^2$  à  $t$  :

$$\sigma_t^2(1) \equiv E[\sigma_{t+1}^2 | F_t] = \alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \dots + \alpha_m a_{t+1-m}^2.$$

- ▶ Prévision de  $\sigma_{t+2}^2$  à  $t$  :

$$\sigma_t^2(2) \equiv E[\sigma_{t+2}^2 | F_t] = E[E[\sigma_{t+2}^2 | F_{t+1}] | F_t]$$

$$\sigma_t^2(2) = E[\alpha_0 + \alpha_1 a_{t+1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t+2-m}^2 | F_t]$$

$$\sigma_t^2(2) = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_t^2(1) + \alpha_2 a_t^2 + \dots + \alpha_m a_{t+2-m}^2.$$

- ▶ Prévision de  $\sigma_{t+h}^2$  à  $t$  :

$$\sigma_t^2(h) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \sigma_t^2(h-i),$$

$$\text{où } \sigma_t^2(h-i) = a_{t+h-i}^2 \text{ si } h-i \leq 0 \text{ (} t+h-i \leq t \text{)}$$

# Notes sur la prévision ponctuelle

- ▶ Il faut avoir plus de structure pour évaluer l'incertitude associée à  $\sigma_{t+h}$ . (Par exemple, on peut spécifier une loi pour  $\epsilon_t$ )
- ▶ L'incertitude concernant les paramètres et le modèle n'est pas pris en compte.

# Cours 5, la semaine prochaine

## Plan préliminaire

1. La théorie des estimateurs maximum de vraisemblance
2. Évaluation de la vraisemblance des modèles GARCH
3. Modèle EGARCH et l'effet de levier