

# ECN 7060, cours 13

William McCausland

2020-12-02

## Plan (résultats asymptotique)

- ▶ Les résultats asymptotiques reposent sur des conditions de régularité.
- ▶ Illustration des violations de ces conditions.
- ▶ Théorie asymptotique des estimateurs MV.

# Un modèle de mélange I

- ▶ Les  $X_i$  sont iid, chaque  $X_i$  un mélange de deux gaussiens

$$F(x_i|\theta) = p\Phi\left(\frac{x_i - \mu_1}{\sigma_1}\right) + (1 - p)\Phi\left(\frac{x_i - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

- ▶ Le vecteur de paramètres est  $\theta = (p, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2)$ .
- ▶ Irregularité I : paramètres non-identifiés

- ▶ (label switching)

$$f(X|\theta) = f(X|\theta')$$

où

$$\theta' = (1 - p, \mu_2, \mu_1, \sigma_2, \sigma_1)$$

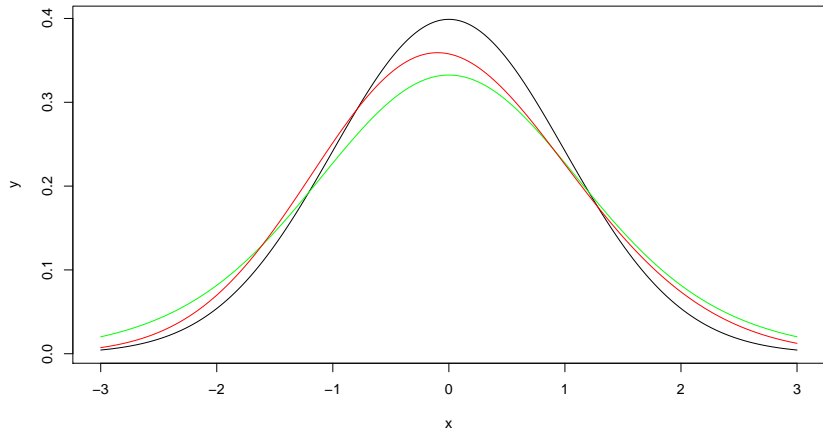
- ▶ (non-identification sous l'hypothèse  $p = 1$ )

$$f(X|(1, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2))$$

ne dépend pas de  $\mu_2, \sigma_2$ .

## Des mélanges de deux gaussiens

```
x = seq(-3, 3, by=0.001); y = dnorm(x, 0, 1)
y1 = 0.5 * dnorm(x, 0, 1) + 0.5 * dnorm(x, 0, 3/2)
y2 = 0.8 * dnorm(x, -1/4, 1) + 0.2 * dnorm(x, 1, 1)
plot(x, y, type='l'); lines(x, y1, col='green')
lines(x, y2, col='red')
```



# La question d'identification (ponctuelle)

- Identification I : (où  $\theta_0$  est la vraie valeur)

$$\theta \neq \theta_0 \Rightarrow f(\cdot|\theta) \neq f(\cdot|\theta_0).$$

- Sinon,  $\theta$  et  $\theta_0$  sont observationnellement équivalents.
- Identification II :

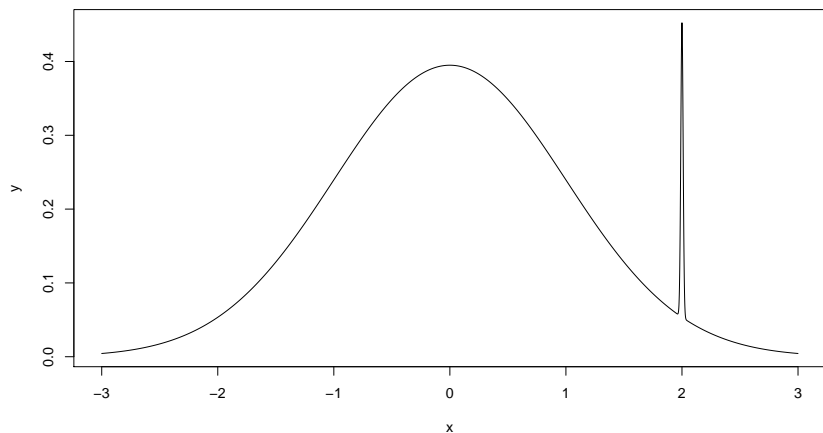
$$\theta_1 \neq \theta_2 \Rightarrow f(\cdot|\theta_1) \neq f(\cdot|\theta_2).$$

- La deuxième condition est plus forte. En pratique, elle est souvent la condition à vérifier, mais quelquefois l'identification (ou l'absence) est locale.

# Un mélange extrême de deux gaussiens

► Ici,  $p = 0.01$ ,  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 0.01$ .

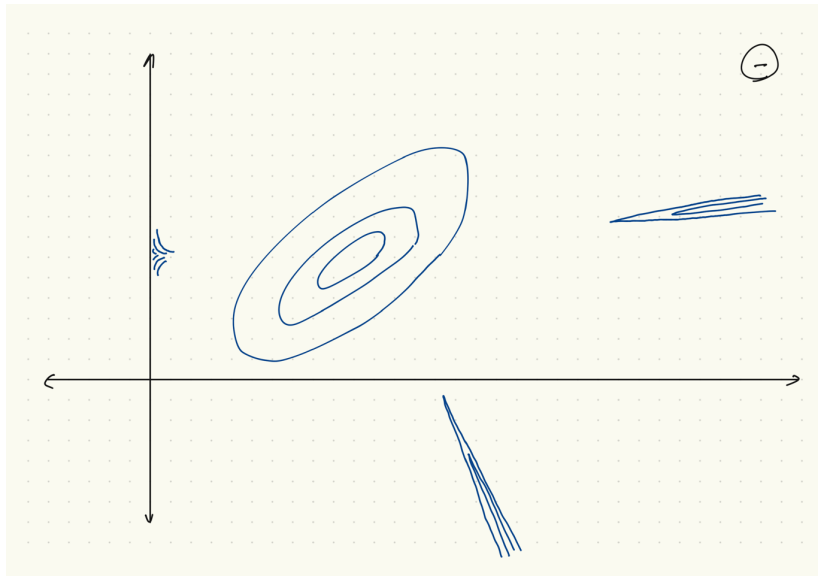
```
y = 0.01*dnorm(x, 2, 0.01) + 0.99*dnorm(x, 0, 1)  
plot(x, y, type='l')
```



# Un modèle de mélange II

- ▶ Rappel :  $\theta = (p, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2)$
- ▶ Irregularité II : la vraisemblance n'est pas bornée
  - ▶  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est arbitraire. Soit  $\bar{x} = n^{-1} \sum x_i$ .
  - ▶ Soit  $\theta(\epsilon) = (p, \mu_1, \mu_2, \sigma_1(\epsilon), \sigma_2) = (n^{-1}, x_1, \bar{x}, \epsilon, s)$ .
  - ▶  $f(x_1 | \theta(\epsilon)) = n^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} + (1 - n^{-1}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-(x_1 - \bar{x})/2s^2}$
  - ▶  $\lim_{\epsilon \downarrow 0} f(x_2, \dots, x_n | \theta(\epsilon)) \neq 0$
  - ▶  $\lim_{\epsilon \downarrow 0} f(x | \theta(\epsilon)) = \infty$ .
  - ▶ D'autres chemins où la vraisemblance croît sans borne
    - ▶  $p \in (0, 1)$  arbitraire
    - ▶ d'autres choix de  $\mu_2, \sigma_2$
    - ▶ échange d'index
  - ▶ D'autres modèles de mélange

# Une vraisemblance non-bornée





# Le modèle de mélange, implications pour la loi *a posteriori*

- ▶ Mettons que la vraisemblance n'est pas bornée.
- ▶ Pour certaines lois *a priori*, la densité *a posteriori* est bornée:
  - ▶ Si  $X_i \sim N(\mu, \omega^{-1})$  et  $\omega \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$ ,

$$f(x_i) \propto \omega^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \omega (x_i - \mu)^2 \right], \quad f(\omega) \propto \omega^{\alpha-1} e^{-\beta \omega}.$$

- ▶ Bornée ou non, si la densité *a priori* est propre, la densité *a posteriori* l'est aussi.
- ▶ Même si la densité *a priori* est impropre, la densité *a posteriori* est souvent propre (mais il faut le vérifier).
- ▶ Même si la densité postérieure n'est pas bornée, la région où la densité postérieure est plus grande que le maximum local régulier a souvent une probabilité négligable.

# Un modèle Bernoulli

- ▶  $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid Bn}(p)$
- ▶  $R = \sum_{i=1}^n X_i$  est une statistique suffisante minimale pour  $p$ .
- ▶ Si  $r = 0$ ,
  - ▶  $f(x|p) = (1 - p)^n$ ,
  - ▶  $\hat{p}_{MV}(x) = 0$  (solution de coin),
  - ▶  $\text{Var}_p[\hat{p}_{MV}(X)] = 0$  quand  $p = \hat{p}_{MV}(x)$ .
- ▶ Irregularité :
  - ▶  $\hat{p}_{MV}(x)$  se trouve sur la frontière de  $\Theta = [0, 1]$ .
  - ▶ La dérivée (à droite) de  $\log f(x|p)$  n'égale pas à zéro à l'estimation MV :

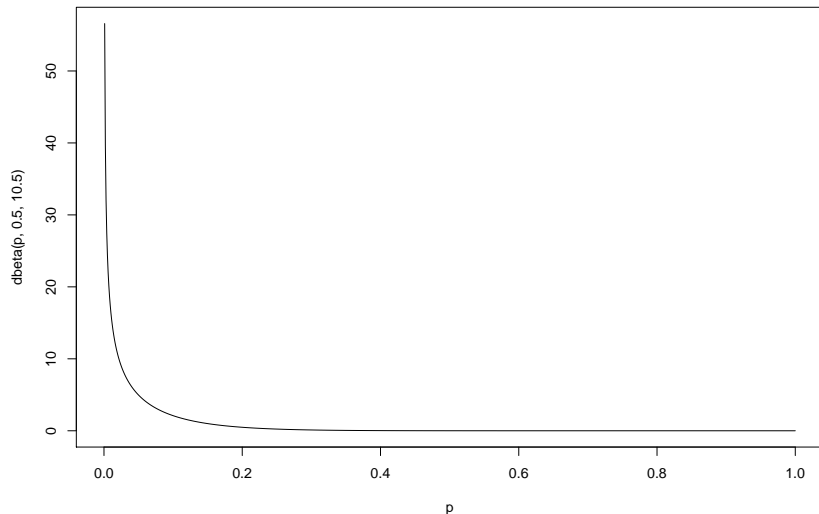
$$\left. \frac{\partial \log f(x|p)}{\partial p} \right|_{p=0} = \left. \frac{\partial n \log(1 - p)}{\partial p} \right|_{p=0} = -n/(1 - p)|_{p=0} = -n.$$

- ▶ D'autres cas :
  - ▶ Modèles avec restrictions sur les paramètres.

## Un modèle Bernoulli, continué

Si  $p \sim \text{Be}(\alpha, \beta)$ ,  $p|r \sim \text{Be}(\alpha, \beta + n)$  quand  $r = 0$ .

Voici la densité pour  $r = 0$ ,  $n = 10$ ,  $\alpha = \beta = 1/2$ :



# Un modèle uniforme

- ▶  $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } U(0, \theta)$ .
- ▶  $X_{(1)} = \max_i X_i$  est une statistique suffisante minimale pour  $\theta$ .
- ▶ Ici,
  - ▶  $f(x|\theta) = \theta^{-n} 1_{[x_{(1)}, \infty)}(\theta)$ .
  - ▶  $\hat{\theta}_{MV} = X_{(1)}$ , la valeur minimale possible de  $\theta$
  - ▶ Pour  $\theta > x_{(1)}$ ,
    - ▶  $\log f(x|\theta) = -n \log \theta$
    - ▶  $\frac{\partial \log f(x|\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta}$
    - ▶  $E_\theta \left[ \frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial \theta} \right] = -\frac{n}{\theta} \neq 0$ .
- ▶ Irregularités :
  - ▶ le support de  $X_i$  dépend de  $\theta$
  - ▶ on ne peut pas prendre la dérivé dans l'intégral

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\theta f(x_i|\theta) dx = 0 \quad \text{mais} \quad \int_0^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} f(x_i|\theta) dx = \int_0^\theta \frac{-1}{\theta^2} dx = -\frac{1}{\theta}.$$

## Information de Fisher, deux formes

- Ici,  $X = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- Deux dérivées de la log vraisemblance, si elles existent :

$$\frac{\partial \log f(x|\theta)}{\partial \theta^\top} = \frac{1}{f(x|\theta)} \frac{\partial f(x|\theta)}{\partial \theta^\top}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} &= \frac{1}{f(x|\theta)} \frac{\partial^2 f(x|\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} - \frac{1}{f(x|\theta)^2} \frac{\partial f(x|\theta)}{\partial \theta^\top} \frac{\partial f(x|\theta)}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{f(x|\theta)} \frac{\partial^2 f(x|\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} - \frac{\partial \log f(x|\theta)}{\partial \theta^\top} \frac{\partial \log f(x|\theta)}{\partial \theta} \end{aligned}$$

- Espérance des deux côtés, si on peut passer l'espérance après les dérivées :

$$E_\theta \left[ \frac{\partial^2 \log f(X|\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right] = -E_\theta \left[ \frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial \theta^\top} \frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial \theta} \right] \equiv -I_n(\theta)$$

- Attention : existence des dérivées, changement de l'ordre.

## Une remarque

Si l'espérance du score est nulle,

$$E_{\theta} \left[ \frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial \theta^{\top}} \right] = 0,$$

alors

$$E_{\theta} \left[ \frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial \theta^{\top}} \frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial \theta} \right] = \text{Var} \left[ \frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial \theta^{\top}} \right]$$

## Exemple gaussien

Supposons que  $y = X\beta + u$ ,  $u \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ , la matrice de covariance  $X$  est  $n \times K$ , le paramètre  $\beta$  est  $K \times 1$  et le paramètre scalaire  $\sigma^2$  est connu. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\beta; y) &= \frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)^\top (y - X\beta) \\ &= \frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (y^\top y - 2\beta^\top X^\top y + \beta^\top X^\top X\beta),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\beta; y)}{\partial \beta^\top} = -\frac{1}{\sigma^2} (X^\top X\beta - X^\top y) = \frac{1}{\sigma^2} X^\top u.$$

Puisque  $E[u] = 0$ ,

$$E \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\beta; y)}{\partial \beta^\top} \right] = 0.$$

La matrice hessienne est constante :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\beta; y)}{\partial \beta^\top \partial \beta} = -\frac{1}{\sigma^2} X^\top X.$$

## Exemple gaussien, continué

Ici, la variance du score est moins l'espérance de la matrice hessienne :

$$\begin{aligned}\text{Var} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\beta; y)}{\partial \beta^\top} \right] &= E \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\beta; y)}{\partial \beta^\top} \frac{\partial \mathcal{L}(\beta; y)}{\partial \beta} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^4} E[X^\top u u^\top X] = \frac{1}{\sigma^2} X^\top X\end{aligned}$$

Dans un contexte bayésien où  $\beta \sim N(\bar{\beta}, \bar{H}^{-1})$ ,

$$\beta|y, X \sim N(\bar{\bar{\beta}}, \bar{\bar{H}}^{-1}),$$

où  $\bar{\bar{H}} = \bar{H} + \sigma^{-2} X^\top X$ ,  $\bar{\bar{\beta}} = \bar{H} \bar{\beta} + \sigma^{-2} X^\top X b$  et  $b = (X^\top X)^{-1} X^\top y$ .



# Additivité de l'information de Fisher

On considère ici les modèles où les  $X_i$  sont iid et on peut échanger l'ordre de l'espérance et le gradient.

- ▶ Si les  $X_i$  sont indépendantes, les  $\partial \log f(X_i|\theta)/\partial\theta$  le sont aussi.
- ▶ Si on peut changer l'ordre de l'espérance et le gradient, ils ont une espérance de 0.
- ▶ Alors

$$\begin{aligned} I_n(\theta) &= E_\theta \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(X_i|\theta)}{\partial \theta^\top} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(X_i|\theta)}{\partial \theta} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n E_\theta \left[ \frac{\partial \log f(X_i|\theta)}{\partial \theta^\top} \frac{\partial \log f(X_i|\theta)}{\partial \theta} \right] \\ &\equiv nI(\theta). \end{aligned}$$

## Gradient de la log vraisemblance

- ▶ Soit  $l(\theta; \mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^n \log f(x_i|\theta)$ .
- ▶ Soit  $\hat{\theta}$  l'estimateur MV,  $\theta_0$  la vraie valeur du paramètre.
- ▶ Expansion Taylor du gradient à  $\hat{\theta}$  (où  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} h(\theta) = 0_{K \times K}$ )

$$\frac{\partial l(\hat{\theta}; \mathbf{x})}{\partial \theta^\top} = \frac{\partial l(\theta_0; \mathbf{x})}{\partial \theta^\top} + \frac{\partial^2 l(\theta_0; \mathbf{x})}{\partial \theta \partial \theta^\top} (\hat{\theta} - \theta_0) + h(\hat{\theta})(\hat{\theta} - \theta_0).$$

- ▶ Alors si le gradient à gauche est nulle,

$$(\hat{\theta} - \theta_0) = - \left[ \frac{\partial^2 l(\theta_0; \mathbf{x})}{\partial \theta \partial \theta^\top} + h(\hat{\theta}) \right]^{-1} \frac{\partial l(\theta_0; \mathbf{x})}{\partial \theta^\top}$$

- ▶ Notes : on a besoin de
  - ▶ l'existence d'un maximum intérieur de la vraisemblance
  - ▶ l'existence des dérivées jusqu'au deuxième ordre
  - ▶ la non-singularité de la matrice hessienne

# Continuous mapping theorem

- ▶ Si  $g(\cdot)$  est continu,  $X, X_1, X_2, \dots$  des vecteurs aléatoires,

$$X_n \rightarrow_p X \Rightarrow g(X_n) \rightarrow_p g(X),$$

$$X_n \rightarrow_{ps} X \Rightarrow g(X_n) \rightarrow_{ps} g(X),$$

$$X_n \rightarrow_d X \Rightarrow g(X_n) \rightarrow_d g(X).$$

- ▶ Notes

- ▶ Le théorème de Slutsky est un cas spécial parce que  $X_n \rightarrow_p c \Rightarrow X_n \rightarrow_d c$ .
- ▶ Slutsky : si  $X_n \rightarrow_d X$  et  $Y_n \rightarrow_p c$ ,  $X_n + Y_n \rightarrow_d X + c$ ,  $X_n Y_n \rightarrow_d cX$ ,  $X_n/Y_n \rightarrow_d X/c$  si  $c > 0$ .
- ▶ On peut relacher la continuité :  $g$  peut avoir un ensemble  $D$  de points de discontinuité avec  $P(X \in D) = 0$ .

## Pour préparer une analyse asymptotique

- Pour préparer une analyse asymptotique, on peut écrire

$$(\hat{\theta} - \theta_0) = \left[ -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 l(\theta_0; \mathbf{x})}{\partial \theta \partial \theta^\top} + \frac{1}{n} h_n(\hat{\theta}) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{n} \frac{\partial l(\theta_0; \mathbf{x})}{\partial \theta^\top} \right].$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) = \left[ -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 l(\theta_0; \mathbf{x})}{\partial \theta \partial \theta^\top} + \frac{1}{n} h_n(\hat{\theta}) \right]^{-1} \left[ \sqrt{n} \frac{1}{n} \frac{\partial l(\theta_0; \mathbf{x})}{\partial \theta^\top} \right].$$

## Théorème limite central, loi de grand nombres pour le gradient

$$\sqrt{n} \frac{1}{n} \frac{\partial l(\theta_0; X)}{\partial \theta^\top} = \sqrt{n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(X_i | \theta_0)}{\partial \theta^\top}$$

- Pour la vraie valeur  $\theta_0$ ,

$$E_{\theta_0} \left[ \frac{\partial \log f(X_i | \theta_0)}{\partial \theta^\top} \right] = 0, \quad \text{Var}_{\theta_0} \left[ \frac{\partial \log f(X_i | \theta_0)}{\partial \theta^\top} \right] = I(\theta_0).$$

- Par une loi de grand nombres,

$$\frac{1}{n} \frac{\partial l(\theta_0; x)}{\partial \theta^\top} \rightarrow_p 0.$$

- Par un théorème central limite,

$$\sqrt{n} \frac{1}{n} \frac{\partial l(\theta_0; x)}{\partial \theta^\top} \rightarrow_d N(0, I(\theta_0)).$$

# Notes sur le gradient

On a besoin de

- ▶ l'existence des dérivées, échange d'ordre (intégral, dérivée),
- ▶ une variance fini,
- ▶  $X_i$  indépendents, identiquement distribués.

## Loi de grand nombres pour la matrice hessienne et son inverse

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^2 l(\theta_0; X)}{\partial \theta \partial \theta^\top} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \log f(X_i | \theta_0)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \rightarrow_p I(\theta_0)$$

- Par le théorème « continuous mapping, »

$$\left[ \frac{1}{n} \frac{\partial^2 l(\theta_0; x)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right]^{-1} \rightarrow_p I(\theta_0)^{-1}.$$

## Combinaison des résultats

- Convergence de  $(\hat{\theta} - \theta)$  en probabilité :

$$(\hat{\theta} - \theta_0) \approx \left[ -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 l(\theta_0; x)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right]^{-1} \left[ \frac{1}{n} \frac{\partial l(\theta_0; x)}{\partial \theta^\top} \right] \rightarrow_p 0.$$

- Convergence de  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$  en loi :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \approx \left[ -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 l(\theta_0; x)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right]^{-1} \left[ \sqrt{n} \frac{1}{n} \frac{\partial l(\theta_0; x)}{\partial \theta^\top} \right] \rightarrow_d N(0, I(\theta_0)^{-1}).$$

- Remarquez que  $I(\theta_0)^{-1}$  est la borne inférieure Cramer-Rao. Sous les conditions de régularité,  $\hat{\theta}_{MV}$  est un estimateur asymptotiquement efficace de  $\theta_0$ .



# Distribution asymptotique de la statistique test LRT

- Développement quadratique de  $l(\theta|x)$  autour de  $\theta_0$ , évalué à  $\hat{\theta}$  :

$$l(\theta_0|x) = l(\hat{\theta}|x) + \frac{1}{2}(\hat{\theta} - \theta_0)^\top \frac{\partial^2 l(\tilde{\theta}; x)}{\partial \theta \partial \theta^\top} (\hat{\theta} - \theta_0) + \dots$$

- Sous l'hypothèse nulle  $H_0 : \theta = \theta_0$ ,

$$\begin{aligned} -2 \log \lambda(x) &= -2(l(\theta_0|x) - l(\hat{\theta}|x)) \\ &\rightarrow_d (\hat{\theta} - \theta_0)^\top \frac{\partial^2 l(\hat{\theta}; x)}{\partial \theta \partial \theta^\top} (\hat{\theta} - \theta_0) \rightarrow_d \chi_k^2. \end{aligned}$$