Lectures et exercices théoriques

William McCausland

2020-04-17

Avant l'intra

Cours 1

Lectures

1. Tsay, 3e édition :
    a. 1.1 rendements

Exercices

1. Pour les deux placements décrits à la diapo "Fonctions linéaires vs mélanges, un exemple", calculez la moyenne et la variance du rendement.
2. Étudiez la preuve du théorème de variance totale et prouvez le théorème de covariance totale : pour variables aléatoires X, Y et Z telles que les moments suivants existent,

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = E[\mathrm{Cov}[X,Y|Z]] + \mathrm{Cov}[E[X|Z], E[Y|Z]].$$

3. Trouvez $\mathrm{Var}[\mu]$ dans l'Application II de la loi des espérances itérées. Il y a deux façons. Vous pouvez confirmer que les deux façons donnent le même résultat. Les deux façons :
    a. Trouvez $\mathrm{Var}[\mu]$ directement comme $E[\mu^2] - E[\mu]^2$
    b. Trouvez $\mathrm{Var}[\mu]$ indirectement avec les expressions de $E[R]$, $E[R^2]$ et $\mathrm{Var}[R]$ sous "Calcul de quelques moments".

Cours 2

Lectures avant le cours

1. Tsay, 3e édition :
    a. 1.2.2 la loi des rendements
    b. 1.2.3 rendements multivariés
    c. 1.2.5 propriétés empiriques des rendements
    d. 2.1 stationnarité
    e. 2.2 corrélation et la fonction d'autocorrélation
    f. 2.3 le bruit blanc et les séries temporelles linéaires

Autres lectures

1. L'article de Cont (2001) que j'ai mis sur StudiUM.
2. Tsay, 3e édition :
    a. 1.2.1 lois statistiques et leurs moments

Exercices

1. La v.a. X suit une loi qui est un mélange de deux lois gaussiennes, chacune avec probabilité 0.5 : $N(\mu, \sigma^2)$ et $N(-\mu, \sigma^2)$. Calculez l'aplatissement K_x et $\lim_{\sigma^2 \downarrow 0} K_x$.
2. Trouvez l'asymétrie et l'aplatissement d'un mélange général de deux v.a. gaussiennes. Le site suivant donne les quatres premiers moments non centraux d'une v.a. $N(\mu, \sigma^2)$: https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale#Moments.
3. Le prix d'un actif le 4 janvier est de 14.50 dollars. Le prix de l'actif le 15 fevrier est de 13.15. Quel est le rendement simple annualisé et le log rendement annualisé?
4. On observe un échantillon $X_1, \ldots, X_T$, où $X_t \sim \text{iid}\, N(\mu, \sigma^2)$. Si on fait les tests 1 et 2 de la diapo "Attention : tests multiples!" quelle est la probabilité d'au moins un rejet, comme fonction de α?

Cours 3

Lectures avant le cours

1. Tsay, 3e édition :
   a. 2.4 Intro (avant 2.4.1)
   b. 2.5 Intro (avant 2.5.1)
   c. 2.6 Intro (avant 2.6.1)

Autres lectures

1. Tsay, 3e édition :
   a. 2.4 (modèles AR)
   b. 2.5 (modèles MA)
   c. 2.6 (modèles ARMA)
   d. 2.8.1 et 2.8.2 (pour faire l'exercise 2.4)

Exercices

1. Ecrivez les équations Yule-Walker pour un process AR(3) et pour un processus ARMA(1,1).
2. Trouvez la fonction d'autocorrélation pour un processus MA(3).
3. Considérez le process AR(3) suivant :

$$r_t = 1.9 r_{t-1} - 1.4 r_{t-2} + 0.45 r_{t-3} + a_t.$$

   a. Trouvez les racines du polynome caracteristique du processus.
   b. Est-ce que la condition de stationnarité tient?
4. Trouvez ψ_1, ψ_2, ψ_3 de la représentation MA infinie pour un ARMA(1,2) général.

Cours 4

Lectures avant le cours

1. Tsay, 3e édition :
   a. Chapitre 3 jusqu'à l'introduction de 3.4 (avant 3.4.1)

Autres lectures

1. Tsay 3e édition :
   a. Sections 1.2.2 (Distributions des rendements)
   b. Sections 1.2.4 (Fonction de vraisemblance des rendements)
   c. Section 3.4.1 (Propriétés des modèles ARCH)
   d. Section 3.4.2 (Faiblesses des modèles ARCH)

Exercices

1. Mettons que r_t suit un modèle ARMA(1,3) avec moyenne zéro. Au moment t, trouvez les prévisions de r_{t+1} et de r_{t+2} qui minimisent l'erreur moyenne carrée. Trouvez la variance de l'erreur de prévision dans les deux cas.

2. Mettons que r_t suit un GARCH(1,1) gaussien avec moyenne zéro. Calculez la variance, l'asymétrie et l'aplatissement de r_t. Vous pouvez vérifier la variance et l'aplatissement en comparant vos résultats aux résultats à la page 132 de Tsay.

Cours 5

Lectures avant le cours

1. Dans Tsay, 3e édition :
   a. 3.5 intro (avant 3.5.1) (Modèle GARCH)
   b. 3.8 intro, 3.8.1 (Modèle EGARCH)
2. Au site web suivant : https://fr.wikipedia.org/wiki/Maximum_de_vraisemblance
   a. Sections Exemple, Principe, Définitions, Propriétés, Exemples

Autres lectures

1. Dans Tsay, 3e édition :
   a. 3.5.1 (exemple GARCH)

Exercices

1. Trouvez la moyenne et la variance de $\ln \sigma_t^2$ pour un modèle EGARCH(1,1)

2. Faites des prévision du rendement r_{T+1} pour une modèle AR(1)-GARCH(1,1). Quelle est la variance conditionnelle des erreurs de prévision? Exprime le résultat en termes des paramètres, de r_T et de σ_T^2.

Cours 6

Lectures avant le cours

1. Dans Tsay, 3e édition :
   a. 3.12 (Modèle de volatilité stochastique)
   b. 12.3 intro, 12.3.1 (inférence bayésienne, lois postérieures)

Autres lectures

Exercices

1. Trouvez la loi *a posteriori* quand les observations sont iid Poisson(λ) et la loi *a priori* de λ est la loi Gamma($\bar{\alpha}, \bar{\beta}$), où $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont des hyperparamètres fixes.
2. Trouvez la loi *a posteriori* conditionnelle de h dans le modèle gaussien.
3. Prenez le modèle de volatilité stochastique. L'exercice est de trouver comment construire la densité prédictive $f(y_{T+1}|y_1, \ldots, y_T)$ sur une grille de points.

   a. Montrez que

   $$f(y_{T+1}|y_1, \ldots, y_T) = E[f(\log h_{T+1}|\log h_T, \theta, y_1, \ldots, y_T) \cdot f(y_{T+1}|\log h_{T+1}, \log h_T, \theta, y_1, \ldots, y_T)],$$

   où l'espérance est par rapport à la loi conditionnelle de (θ, h_T) sachant $y_1, \ldots, y_T$.

   b. Écrivez les densités $f(\log h_{T+1}|\log h_T, \theta, y_1, \ldots, y_T)$ et $f(y_{T+1}|\log h_{T+1}, \log h_T, \theta, y_1, \ldots, y_T)$ en utilisant les équations d'état et d'observation.

   c. Comment peut-on approximer la densité prédictive $f(y_{T+1}|y_1, \ldots, y_T)$ sur une grille à partir d'un échantillon de la loi de $\theta, \log h_T|y_1, \ldots, y_T$? Indice: comme étape intermédiaire, créez un échantillon de la loi de $\theta, \log h_T, \log h_{T+1}|y_1, \ldots, y_T$.

Après l'intra

Cours 7

Lectures

1. CLM 5.0, 5.1, 5.2, 5.3
2. CLM 5.7.1 (anomalies)
3. CLM 6.0, 6.1 (APT)

Exercices

1. Prouvez les 5 résultats des diapos 16 et 17, « Résultats I » et « Résultats II »

Voici des suggestions pour les 5 résultats :

1. Le résultat dépend de l'unicité de la solution $g + \mu_p h$. Si vous n'en servez pas, la solution est incorrecte.
2. Exprimez $\sigma_p^2 \equiv (g + \mu_p h)\Omega(g + \mu_p h)$ et minimisez. Écrivez le résultat en terms de μ, Ω.
3. La covariance entre le rendement du portefeuille $g + \mu_p h$ et celui du portefeuille $g + \mu_q h$ est $(g + \mu_p h)\Omega(g + \mu_q h)$.
4. Servez-vous du troisième résultat pour trouver le μ_{op} unique, en termes de μ_p, qui donne $\mathrm{Cov}[R_p, R_{op}] = 0$.
5. La covariance entre le rendement du portefeuille p sur le FMV et le portefeuille arbitraire ω est $(g + \mu_p h)\Omega\omega$. Écrivez-la en forme $\lambda\mu_i + \gamma$, où $\mu_i = E[R_i]$, et λ et γ sont des fonctions de μ_p, A, B, C, D. Écrivez l'équation pour deux cas spéciaux, $i = op$ et $i = p$, pour obtenir (5.2.19) dans le manuel CLM.

Cours 8, 9

Lectures avant le premier cours

1. CLM 8 intro, 8.1 avant 8.1.1

Autres lectures

1. CLM 8.1 (FAS)
2. CLM 8.2 (CCAPM, utilité isoélastiques, casse-têtes empiriques)
3. CLM 8.4 Utilité Epstein-Zin, utilité non-séparable
4. CLM A.2 GMM

Exercices

1. Considérez le milieu introduit à la diapo “Absence d’arbitrage et le FAS”. Il y a $S = 2$ états et 2 actifs. Le premier actif a un rendement net R_f dans les deux états et coûte 100 \$. Le deuxième actif a un rendement net R_1 dans le permier état et un rendement net R_2 dans le deuxième et coûte 500 \$.
    a. Donnez les matrices X et G et le vecteur q en termes de R_f, R_1 et R_2.
    b. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur R_f, R_1 et R_2 pour la complétion du marché.
    c. Supposant que le marché est complet, trouvez le vecteur des prix d’états et donnez une condition supplémentaire sur R_f, R_1 et R_2 pour l’absence d’arbitrage.
    d. Si les états sont équiprobable ($\pi_1 = \pi_2 = 0.5$) trouvez le facteur d’actualisation stochastique.
2. Considérez le problème à la diapo “Un problème à deux périodes sans incertitude”.
    a. Démontrez que si $(C_t^{(i)}, C_{t+1}^{(i)})$ est une solution du problème pour un consommateur avec revenu m_i, $i = 1, 2$, que $(C_t^{(1)} + C_t^{(2)}, C_{t+1}^{(1)} + C_{t+1}^{(2)})$ est une solution du problème pour un consommateur avec revenu $m_1 + m_2$.
    b. Généralisez le problème à trois périodes. Le taux d’intérêt R est constant et la pondération de $U(C_{t+2})$ est δ^2. Démontrez que pour la solution (C_t, C_{t+1}, C_{t+2}), les ratios C_{t+2}/C_t et C_{t+1}/C_t ne dépendent pas du revenu m.

Questions (Cours 9)

1. Regardez l’expression pour $r_{f,t+1}$ dans le modèle CCAPM avec préférences Epstein-Zin. Pourquoi est-ce la moyenne historique de $r_{f,t+1}$ est plus cohérente avec ce modèle, par rapport au modèle avec préférences isoélastique, quand γ est très élevé?
2. Regardez l’expression pour la prime de risque associée à l’actif i dans le même modèle. Quelle est la prime de risque associée au marché (ou portefeuille agrégé)? Pourquoi est-ce que les préférences E-Z aident à capturer la prime historique des actions, par rapport aux préférences isoélastique?
3. Supposons qu’on utilise la méthode GMM pour estimer les paramètres δ et γ du modèle CCAPM avec utilité isoélastique. On observe $w_t = (C_t, C_{t+1}, R_{t+1}, Z_t)$, $t = 1, \ldots, T$.
    a. Pourquoi est-ce qu’on ne devrait pas utiliser, comme élément de Z_t, une variable qui n’est pas observée à $t + 1$?
    b. Mettons que Z_t comprend une variable observée à t mais qui n’aide pas à prévoir la consommation future C_{t+1}. Quelles sont les implications pour l’inférence GMM?
4. Si la fonction de moment $g(w_t, \theta)$ (un vecteur) a un élément qui est une fonction de w_t mais pas de θ, quelles sont les implications pour l’estimation est les tests.

Cours 10

Lectures

- CLM 10.1, 11.1 (Obligations)
- CLM 3.1, 3.2 (Données de haute fréquence)
- Tsay 5.1, 5.2 (Données de haute fréquence)

Exercices

1. Dérivez les équations (11.1.21) et (11.1.23) dans CLM.

2. Terminez la preuve de

$$\mathrm{Cov}[r^\circ_{At}, r^\circ_{A,t-k}] = -\pi_A^k \mu_A^2.$$

3. Dans le modèle de rebond acheteur/vendeur, supposez qu'un achat (au cours vendeur) est plus probable quand le prix latent augmente. Plus spécifiquement, supposez qu'avec probabilité 1/2, $P_t^* \sim (P_{t-1}^* + \mu, \sigma^2)$ et $P_t = P_t^* + S/2$ et qu'avec probabilité 1/2, $P_t^* \sim (P_{t-1}^* - \mu, \sigma^2)$ et $P_t = P_t^* - S/2$. Trouvez $E[\Delta P_t]$, puis $\mathrm{Cov}[\Delta P_t, \Delta P_{t-1}]$.

Questions

Tableau de P_{nt}

$n \backslash t$	0	1	2
1	0.990	0.985	0.990
2	0.980	0.975	
3	0.960		

1. Pour le tableau de prix d'obligations ci-haut :
   a. À quelle période le prix P_{12} est-il observé?
   b. Trouvez les valeurs de Y_{20} et y_{20}.
   c. Trouvez la valeur du rendement “holding period” R_{22}. À quelle période est-il observé?
   d. Trouvez la structure à terme à la période $t = 0$.
   e. Trouvez la valeur du cours à terme F_{20}. À quelle période est-il observé?

Cours 11

Lectures

- Tsay 5.4.1, 5.5, Appendix B du chapitre 5.

Questions

1. Considérez un mélange de deux distributions exponentielles, avec densité

$$f(t) = \pi\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) + (1-\pi)\lambda_2 \exp(-\lambda_2 t).$$

   Supposons que $\lambda_2 > \lambda_1$. Soit $h(t)$ le taux d'incidence pour le mélange.
   a. Trouvez $h(0)$.
   b. Trouvez $\lim_{t\to\infty} h(t)$.
   c. Montrez que la fonction $h(t)$ est décroissante. Une généralisation utile : le mélange de plusieurs distributions, ayant chacune un taux d'incidence faiblement décroissant, a un taux d'incidence faiblement décroissant.
2. Considérez une variable aléatoire qui est la somme de deux variables iid exponentielles avec taux d'incidence λ. Soit $h(t)$ le taux d'incidence pour la somme. (Indice : la somme est une variable aléatoire Gamma$(2, \lambda)$).
   a. Trouvez $h(0)$.
   b. Trouvez $\lim_{t\to\infty} h(t)$.
   c. Montrez que $h(t)$ est croissant. Une généralisation utile : une somme de variables aléatoires indépendentes, ayant chacune un taux d'incidence faiblement croissant, a un taux d'incidence faiblement croissant.)
3. Considérez le modèle ACD suivant :

$$x_i = \psi_i \epsilon_i, \quad \psi_i = \omega + \gamma x_{i-1} + \lambda \psi_{i-1}, \quad \epsilon_i \sim \mathrm{iid}\,\mathrm{Exp}(1).$$

   Supposons que x_i est faiblement stationnaire. Soit $\gamma = 0.15$, $\lambda = 0.80$, $\omega = 0.75s$.

a. Si x_i est faiblement stationnaire, quelles sont sa moyenne et sa variance inconditionnelle?
b. Si $x_i = 8s$ et $\psi_i = 20s$, quelle est la loi conditionnelle de x_{i+1}? Quelles sont sa moyenne et sa variance conditionnelle?

4. Pour les valeurs estimées des diapos “Résultats empiriques I” quelle est la probabilité que le prix de la prochaine transaction égale le prix de la précédente? Supposons que $x_i\beta = 0.13$ et $\sigma_i^2(w_i) = 1.4$.

Cours 12

Lectures

- Tsay 7 (intro), 7.1, 7.2, 7.3, 7.4

Questions

1. Examen Intra 2017, Question 6