

ECN 7060, Cours 4

William McCausland

2019-09-25

Intégration riemannienne

$$L \int_a^b X = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} X(t) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

$$U \int_a^b X = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} X(t) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

Notes :

- ▶ L'existence et la valeur de l'intégral.
- ▶ Extensions : (au 2ième cas, il y a une singularité à a ou à b)

$$\int_0^\infty X(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b X(t) dt \quad \int_a^b X(t) dt = \lim_{c \downarrow a} \lim_{d \nearrow b} \int_c^d X(t) dt.$$

Problèmes pour l'intégration riemannienne

- ▶ $L \int_0^1 1_{\mathbb{Q}}(t) = 0$ et $U \int_0^1 1_{\mathbb{Q}}(t) = 1$
- ▶ Soit \mathbb{Q}_n l'ensemble des n premiers rationnels dans $[0, 1]$. (L'ordre n'est pas importante.)
- ▶ Pour tout n , $U \int_0^1 1_{\mathbb{Q}_n}(t) = 0$.
- ▶ Notez que
 - ▶ $1_{\mathbb{Q}_n}(t) \leq 1_{\mathbb{Q}_{n+1}}(t)$ pour tous t ,
 - ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} 1_{\mathbb{Q}_n}(t) = 1_{\mathbb{Q}}(t)$ pour tous t ,
 - ▶ $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} U \int_0^1 1_{\mathbb{Q}_n}(t) \neq U \int_0^1 1_{\mathbb{Q}}(t) = 1$.
- ▶ δ de Dirac comme pansement lorsqu'il y a des points avec probabilité positive : défini comme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g(t) dt = g(0),$$

et pour tout $t \neq 0$,

$$\delta(t) = 0.$$

Une variable aléatoire simple sur $\Omega = [0, 1]$

- ▶ Trois façons d'écrire la même variable aléatoire :

1. $X(\omega) = 2 \cdot 1_{[0,1/4) \cap (1/2,1]}(\omega) + 3 \cdot 1_{[1/4,1/2]}(\omega)$
2. $X(\omega) = 2 \cdot 1_{[0,1/4)}(\omega) + 2 \cdot 1_{(1/2,1]}(\omega) + 3 \cdot 1_{[1/4,1/2]}(\omega)$
3. $X(\omega) = 2 \cdot 1_{\Omega}(\omega) + 1 \cdot 1_{[1/4,1/2]}(\omega)$

- ▶ L'image de X est $\{x_1, x_2\} = \{2, 3\}$, un ensemble fini.
- ▶ Dans 1, X est de la forme canonique

$$X(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot 1_{\{X^{-1}(\{x\})\}}(\omega).$$

- ▶ Dans 2, X n'est pas de cette forme, mais $[0, 1/4)$, $[1/4, 1/2]$ et $(1/2, 1]$ forment une partition de $[0, 1]$.
- ▶ Dans 3, $\{[0, 1], [1/4, 1/2]\}$ n'est pas une partition de $[0, 1]$.

Une variable aléatoire simple sur $\Omega = [0, 1]^2$

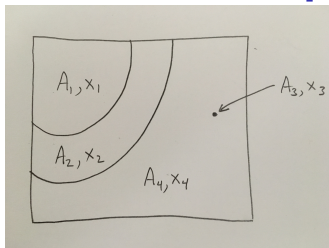


Figure 1: Une variable aléatoire simple

Ici,

$$X(\omega) = \begin{cases} x_1 & \omega \in A_1 \\ x_2 & \omega \in A_2 \\ x_3 & \omega \in A_3 \\ x_4 & \omega \in A_4. \end{cases}$$

En général (mais pas avec la mesure de Lebesgue), $P(A_3) > 0$ est possible.

L'espérance d'une variable aléatoire

- Pour une variable aléatoire simple ($X(\Omega)$ est fini):

$$E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X^{-1}(\{x\})).$$

- Pour une variable aléatoire non-négative :

$$E[X] = \sup\{E[Y] : Y \leq X, Y \text{ simple}\}.$$

- Pour une variable aléatoire générale :

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-].$$

- Notes :

- Quand l'expression de X simple n'est pas de forme canonique.
- Cohérence des trois définitions.
- Valeurs possibles; quand la troisième n'est pas bien définie.

Exemples pertinents de l'espérance d'une v.a. simple

- ▶ Soit (Ω, \mathcal{F}, P) l'espace de probabilité $([0, 1], \mathcal{B}, \mu)$ où μ est la mesure de Lebesgue.
- ▶ Pour tout n ,

$$E[1_{\mathbb{Q}_n}] = 1 \cdot \mu(\mathbb{Q}_n) + 0 \cdot \mu(\Omega \setminus \mathbb{Q}_n) = 0.$$

- ▶ $1_{\mathbb{Q}}$ est une v.a. simple! Par additivité dénombrable,

$$E[1_{\mathbb{Q}}] = 1 \cdot \mu(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) + 0 \cdot \mu(\mathbb{Q}^c \cap [0, 1]) = 0.$$

- ▶ Rappel : pour l'intégration riemannienne, $U \neq L$, échec de convergence monotone.

Linéarité de l'espérance, variables aléatoires simples I

Même $X(\omega)$ sur $\Omega = [0, 1]$ qu'on a vu avant :

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \omega \in A_1 \equiv [0, 1/4), \\ 3 & \omega \in A_2 \equiv [1/4, 1/2] \\ 2 & \omega \in A_3 \equiv (1/2, 1]. \end{cases}$$

Une autre variable aléatoire $Y(\omega)$ sur Ω :

$$Y(\omega) = \begin{cases} 5 & \omega \in B_1 \equiv [0, 3/4], \\ 4 & \omega \in B_2 = (3/4, 1]. \end{cases}$$

Toutes les intersections $A_i \cap B_j$:

| <hr/> | | | |
|------------------|--------------------|------------------|------------------|
| $A_1 = [0, 1/4)$ | $A_2 = [1/4, 1/2]$ | $A_3 = (1/2, 1]$ | |
| A_1 | A_2 | $(1/2, 1]$ | $B_1 = [0, 3/4]$ |
| \emptyset | \emptyset | B_2 | $B_2 = (3/4, 1]$ |
| <hr/> | | | |

Linéarité de l'espérance, variables aléatoires simples II

$$\begin{aligned}E[aX + bY] &= E \left[\sum_{i,j} (ax_i + by_j) 1_{A_i \cap B_j} \right] \\&= \sum_{i,j} (ax_i + by_j) P(A_i \cap B_j) \\&= a \sum_i x_i \sum_j P(A_i \cap B_j) + b \sum_j y_j \sum_i P(A_i \cap B_j) \\&= a \sum_i x_i P(A_i) + b \sum_j y_j P(B_j) \\&= aE[X] + bE[Y].\end{aligned}$$

Notes :

- ▶ L'additivité donne l'égalité des espérances de X (formes 1 et 2)
- ▶ La linéarité donne l'égalité des espérances de X (formes 2 et 3).

Monotonie, variables aléatoires simples

Preuve de monotonie, $X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$, pour des variables aléatoires simples X et Y :

$$\begin{aligned} X \leq Y &\Rightarrow Y - X \geq 0 \\ &\Rightarrow E[Y - X] \geq 0 \\ &\Rightarrow E[Y] - E[X] \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion immédiate : la définition suivante est cohérente avec la définition de $E[X]$ pour $X \geq 0$ simple.

Pour toute variable aléatoire $X \geq 0$,

$$E[X] \equiv \sup_{Y \leq X, Y \text{ simple}} E[Y].$$

Monotonicité, v.a. non-négatives

- ▶ Soit X, Y des variables aléatoires non-négatives, $X \leq Y$.
- ▶ $E[X] = \sup_{Z \leq X, Z \text{ simple}} E[Z]$
- ▶ $E[Y] = \sup_{Z \leq Y, Z \text{ simple}} E[Z]$
- ▶ $E[X]$ est le sup d'un ensemble plus petit, alors $E[X] \leq E[Y]$.

Espérances des variables aléatoires arbitraires

- ▶ Soit X une variable aléatoire arbitraire.
- ▶ Soit $X^+(\omega) = \max(X(\omega), 0)$, $X^-(\omega) = \max(-X(\omega), 0)$.
- ▶ Les deux sont des variables aléatoires non-négatives.
- ▶ $X^+ + X^- = X$.
- ▶ Soit $v^+ \equiv E[X^+]$, $v^- \equiv E[X^-]$.
- ▶ $E[X]$ défini par :

| $E[X^+]$ | $E[X^-]$ | $E[X]$ |
|----------------|----------------|-------------|
| $v^+ < \infty$ | $v^- < \infty$ | $v^+ - v^-$ |
| $v^+ = \infty$ | $v^- < \infty$ | ∞ |
| $v^+ < \infty$ | $v^- = \infty$ | $-\infty$ |
| $v^+ = \infty$ | $v^- = \infty$ | pas défini |

- ▶ Attention : la valeur d'une v.a. n'est jamais ∞ ou $-\infty$. La valeur d'un sup, inf ou lim peut l'être.

Les espérances et les intégrales impropres

Quelques choses à noter dans la définition, pour $X \geq 0$,

$$E[X] = \sup\{E[Y]: Y \leq X, Y \text{ simple}\}.$$

- ▶ Un seul sup/inf.
- ▶ L'importance de $X \geq 0$ et l'unidirectionnalité (cf. L et U pour l'intégration riemannienne)
- ▶ Aucune définition spéciale pour les singularités ou pour $\Omega = \mathbb{R}$.
- ▶ Pas besoin d'un pansement comme le δ de Dirac.

Exemples :

1. $X(\omega) = 1/\sqrt{\omega}$, mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
2. $X(\omega) = 1/\omega$, mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
3. $X(\omega) = \omega$, loi gaussienne sur \mathbb{R} .
4. $X(\omega) = \omega$, loi Cauchy sur \mathbb{R} .
5. X de la Figure 4.2.1.

Convergence monotone de X_n simple à X non-négative

- ▶ Les fonctions $\Psi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Psi_n(x) = \min(n, 2^{-n} \lfloor 2^n x \rfloor).$$

- ▶ Propriétés de $\Psi_n(x)$:
 - ▶ $0 \leq \Psi_n(x) \leq x$, $x \geq 0$.
 - ▶ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi_n(x) \nearrow x$.
 - ▶ Pour tout n , $\Psi_n(\mathbb{R})$ est fini.
- ▶ Construction $X_n(\omega) = \Psi_n(X(\omega))$.
- ▶ Propriétés de X_n :
 - ▶ X_n est simple
 - ▶ $X_n \leq X_{n+1} \leq X$
 - ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$.
 - ▶ $E[X_n] \leq E[X]$ (définition de $E[X]$)
 - ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n(\omega)] \leq E[X]$
- ▶ Pourquoi pas $\Psi_n(x) = \min(n, n^{-1} \lfloor nx \rfloor)$? $\Psi_n(x) = 2^{-n} \lfloor 2^n x \rfloor$?
- ▶ Remarquez la discrétisation de $X(\Omega)$, pas Ω .

Théorème de convergence monotone

- ▶ Supposez que X_1, X_2, \dots sont des variables aléatoires non-négatives avec $X_n(\omega) \nearrow X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Alors X est une variable aléatoire et $E[X] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$.
- ▶ Remarque : les X_n ne sont pas forcément simples.
- ▶ Par monotonie, $E[X_1] \leq E[X_2] \leq \dots \leq E[X]$.
- ▶ Attention : $E[X_n] = \infty$, $E[X] = \infty$ possible.
- ▶ Immédiatement, $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] \leq E[X]$.
- ▶ Il reste à prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] \geq E[X]$.

Preuve de $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] \geq E[X]$

- ▶ Soit Y simple, $Y \leq X$ (alors $E[Y] \leq E[X]$). Soit $\epsilon > 0$.
- ▶ $Y = \sum_i v_i 1_{A_i}$ où $\{A_i\}$ est une partition de Ω en événements et $v_i \leq X(\omega)$ pour tout $\omega \in A_i$.
- ▶ Pour tout i et n , soit $A_{in} \equiv \{\omega \in A_i : X_n(\omega) \geq v_i - \epsilon\}$.
- ▶ Alors pour tout i , $\{A_{in}\} \nearrow A_i$. (monotonie, convergence)
- ▶ Alors $E[X_n] \geq \sum_i (v_i - \epsilon)P(A_{in})$. (à droite : $E[Y_n]$, Y_n simple)
- ▶ Par convergence de probabilité :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i (v_i - \epsilon)P(A_{in}) = \left(\sum_i v_i P(A_i) \right) - \epsilon,$$

- ▶ Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] \geq E[Y] - \epsilon$.
- ▶ $\epsilon > 0$ est arbitraire alors $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] \geq E[Y]$.
- ▶ Y est arbitraire, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] \geq E[X]$.

Remarques

- ▶ On peut affaiblir la condition $X_n(\omega) \nearrow X(\omega)$ en

$$P(\{X_n(\omega) \nearrow X(\omega)\}) = 1.$$

- ▶ Autrement dit, $X_n \nearrow X$ presque surement.
- ▶ Importance de monotonie, positivité
- ▶ Échec de convergence monotone pour l'intégration riemannienne
- ▶ Linéarité de $E[\cdot]$ pour variables aléatoires positives : soit $X_n = \Psi_n(X)$, $Y_n = \Psi_n(Y)$, $a, b \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} E[aX + bY] &= \lim_n E[aX_n + bY_n] \\ &= \lim_n aE[X_n] + bE[Y_n] = aE[X] + bE[Y]. \end{aligned}$$

Aperçu des chapitres 5 et 6

- ▶ Chapitre 5
 - ▶ Inégalités de Markov, Chebychev, Cauchy-Schwarz, Jensen
 - ▶ Convergence presque sur, convergence en probabilité
 - ▶ Lois de grand nombres
- ▶ Chapitre 6
 - ▶ Distributions, fonctions de distribution, de densité