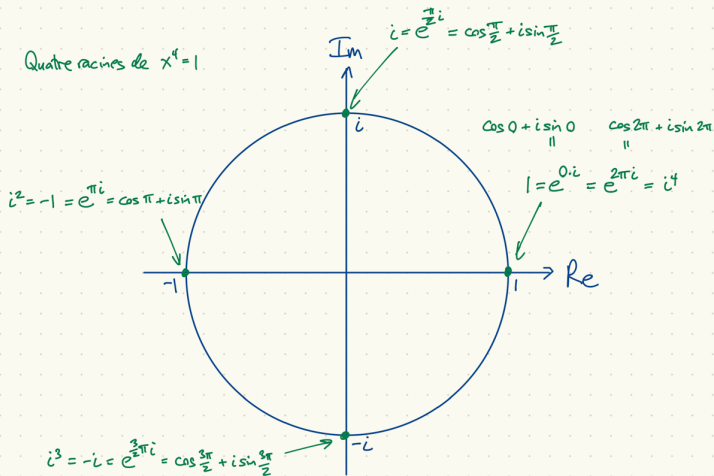


# ECN 7060, Cours 7

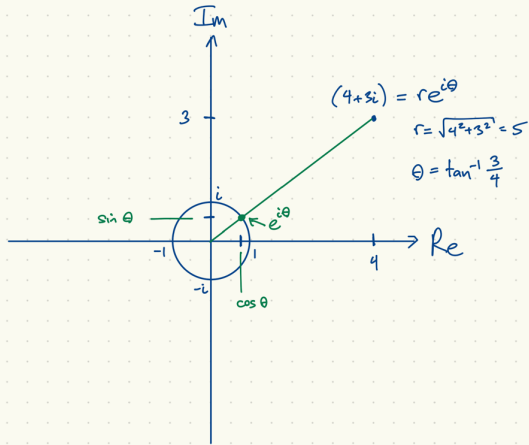
William McCausland

2021-10-13

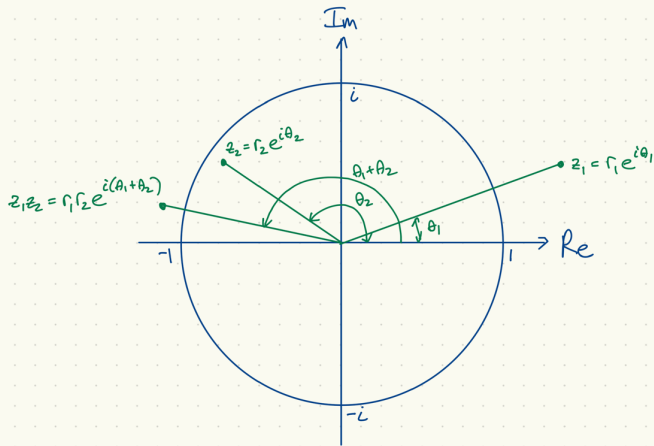
# Quatre racines de $x^4 = 1$



# Le module et l'argument (l'angle) d'un nombre complexe



# Multiplication des nombres complexes



# Des expansions des fonctions $\exp(\cdot)$ , $\cos(\cdot)$ , $\sin(\cdot)$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} (i\theta)^k / k! = 1 + i\theta + (i\theta)^2/2 + (i\theta)^3/3! + (i\theta)^4/4! + (i\theta)^5/5! + (i\theta)^6/6! \\ &= 1 - \theta^2/2 + \theta^4/4! - \theta^6/6! \dots \\ &\quad + i \left[ \theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \dots \right] \end{aligned}$$

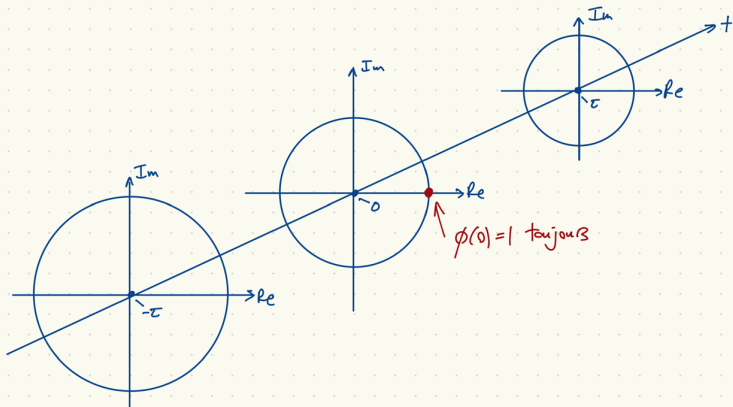
$$\cos \theta = 1 - \theta^2/2 + \theta^4/4! - \theta^6/6! \dots$$

$$\sin \theta = \theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \dots$$

# La fonction caractéristique $\phi$

- ▶ Comme la fonction de répartition  $F$ ,  $\phi$  est une autre représentation de la loi d'une v.a. qui existe et qui est unique.
- ▶ Applications :
  - ▶ Calcul des moments (mais moins convenable que la fonction génératrice des moments)
  - ▶ L'opération de convolution versus l'opération de multiplication, pour le produit des v.a. indépendantes.
  - ▶ Utilisée pour prouver le théorème central limite
  - ▶ Inférence quand les moments n'existent pas.

# La fonction caractéristique comme un film



# Propriétés de la fonction caractéristique

1.  $\phi_X(0) = E[e^0] = 1$ , peut importe  $X$ .
2.  $|\phi_X(t)| = |E[e^{itX}]| \leq E[|e^{itX}|] = 1$ .
3. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) &= E[e^{it(X+Y)}] = E[e^{itX} e^{itY}] = E[e^{itX}] E[e^{itY}] \\ &= \phi_X(t) \phi_Y(t).\end{aligned}$$

4.  $\phi(t) = E[\cos tX] + iE[\sin tX]$ , par linéarité de l'espérance.
5. Pour  $X$  réelle,
  - a.  $\Re(\phi(t)) = E[\cos tX]$  est paire.
  - b.  $\Im(\phi(t)) = E[\sin tX]$  est impaire.
6. Pour  $X$  symétrique ( $F(-x) = 1 - F(x)$  au points de continuité),  $\phi$  est réelle.



## L'extension de deux définitions

1. Une fonction  $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est une variable aléatoire si  $\Re(Z)$  et  $\Im(Z)$  le sont.
2. Si  $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est une variable aléatoire,  
$$E[Z] \equiv E[\Re(Z)] + iE[\Im(Z)].$$

## Fonction caractéristique d'une loi $U(a, b)$

$$\phi(t) = E[e^{itX}] = E[\cos tX + i \sin tX] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \cos tx + i \sin tx \, dx$$

$$\phi(t) = \frac{1}{t(b-a)} [\sin tx - i \cos tx]_a^b = \frac{1}{it(b-a)} [\cos tx + i \sin tx]_a^b$$

$$\phi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

► Cas spécial  $a = -\theta$ ,  $b = \theta$  :

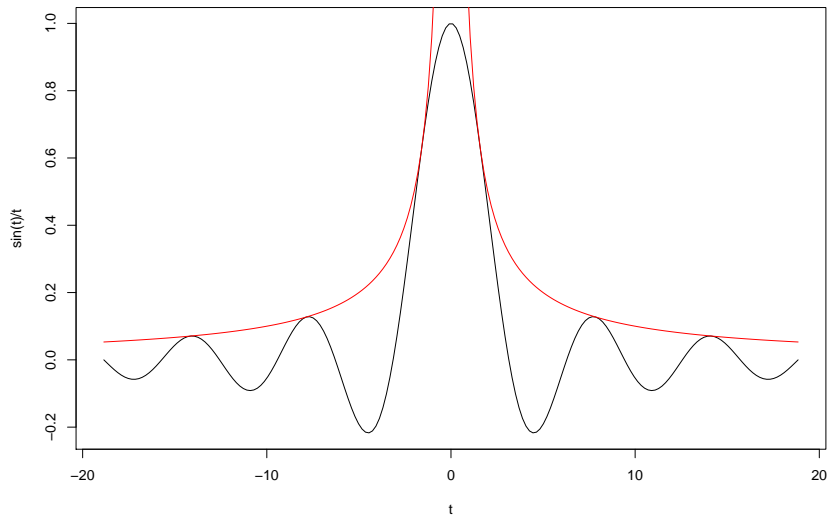
$$\phi(t) = \frac{\sin \theta t}{\theta t}.$$

► Cas spécial,  $a = -1$ ,  $b = 1$  :

$$\phi(t) = \frac{\sin t}{t} \equiv \text{sinc}(t).$$

## La fonction sinc

```
t = seq(-6*pi, 6*pi, length.out = 200)
plot(t, sin(t)/t, type='l')
lines(t, 1/abs(t), col='red')
```



## Cas discret

1.  $X = x$ , une constante

$$\phi_X(t) = E[e^{itx}] = e^{itx}.$$

2.  $X \sim \text{Bern}(p)$

$$\phi_X(t) = (1 - p) + pe^{it}.$$

3. Bernoulli avec valeurs arbitraires

$$X = \begin{cases} x_0 & \text{avec probabilité } (1 - p), \\ x_1 & \text{avec probabilité } p. \end{cases}$$

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = (1 - p)e^{itx_0} + pe^{itx_1}.$$

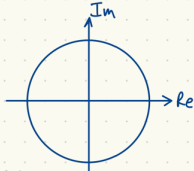
4. Cas spécial  $p = 1/2$ ,  $x_0 = -\theta$ ,  $x_1 = \theta$

$$\phi_X(t) = (e^{-i\theta t} + e^{i\theta t})/2 = \cos \theta t.$$

5.  $X \sim \text{Po}(\lambda)$

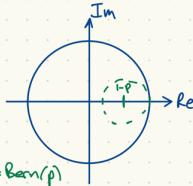
$$\phi_X(t) = \exp[\lambda(e^{it} - 1)].$$

# Cas discret, illustrations



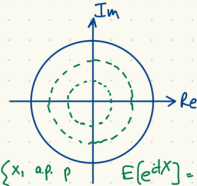
$$X=x$$

$$E[e^{itX}] = e^{itx}$$



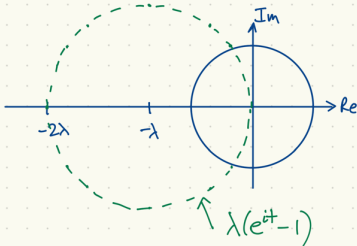
$$X = \text{Bern}(p)$$

$$E[e^{itX}] = (1-p) + pe^{it}$$



$$X = \begin{cases} x_1 & \text{a.p. } p \\ x_0 & \text{a.p. } (1-p) \end{cases}$$

$$E[e^{itX}] = (1-p)e^{itx_0} + pe^{itx_1}$$



$$X \sim \text{Po}(\lambda)$$

$$E[e^{itX}] = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

↓

module entre  $e^{-2\lambda}$  et 1

angle entre  $-\lambda$  et  $\lambda$

## Illustration, cas Bernoulli avec valeurs $x_0 = 1$ et $x_1 = 6$

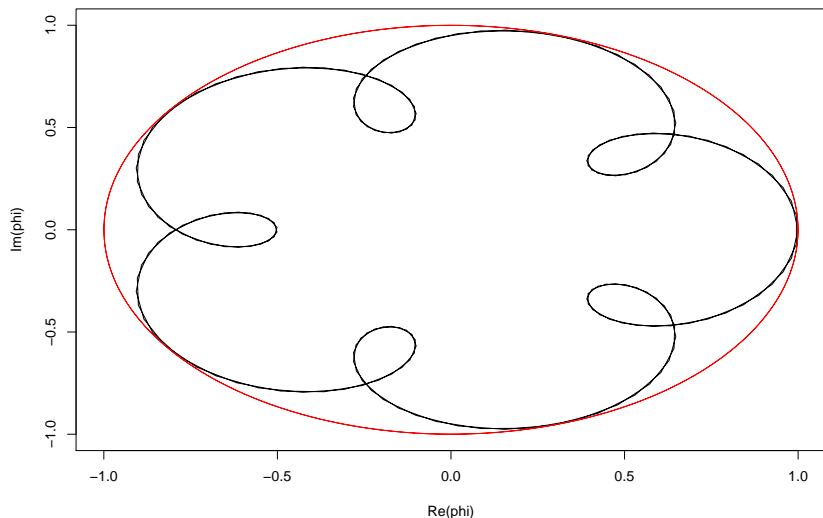
Voici le code pour les trois prochaines figures:

```
t = seq(-2*pi, 2*pi, length.out = 200)
x0 = 1; x1 = 6; p = 0.25
phi = (1-p)*exp(complex(imaginary=t*x0))
phi = phi + p*exp(complex(imaginary=t*x1))

cercle = exp(complex(imaginary=t))
```

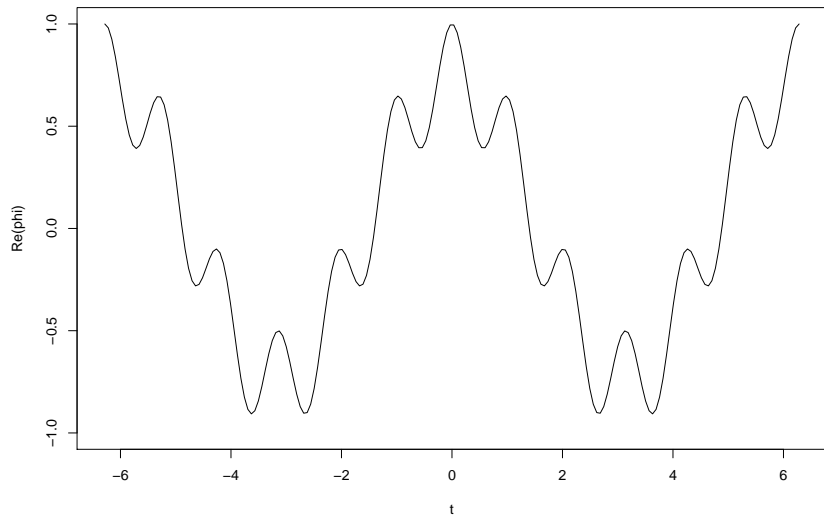
## Trajet dans le cercle unitaire

```
plot(Re(phi), Im(phi), type='l', xlim=c(-1,1), ylim=c(-1,1))  
lines(Re(cercle), Im(cercle), col='red')
```



## Partie réelle

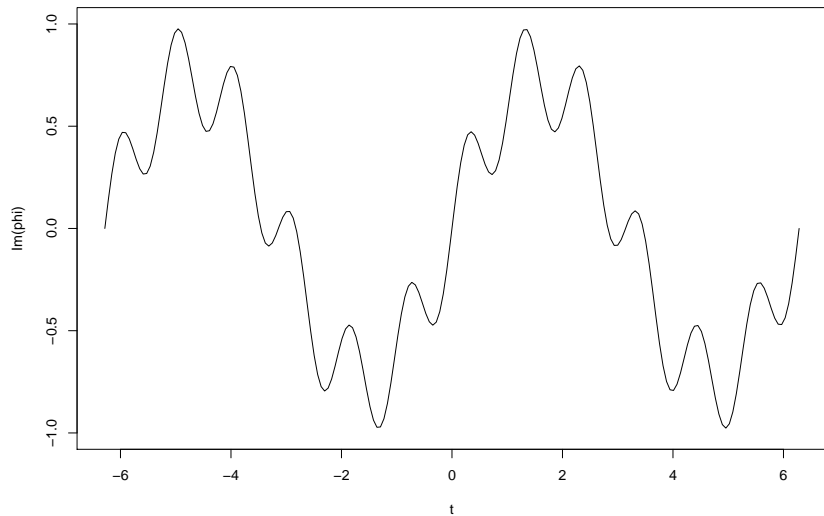
```
plot(t, Re(phi), type='l', ylim=c(-1,1))
```





## Partie imaginaire

```
plot(t, Im(phi), type='l', ylim=c(-1,1))
```



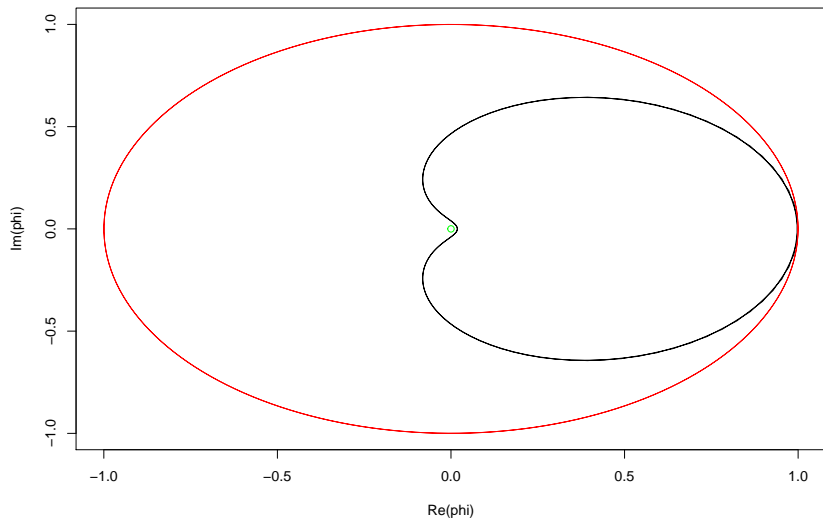
## Illustration, cas Poisson, $\lambda = 2$

Voici le code pour les trois prochaines figures:

```
t = seq(-2*pi, 2*pi, length.out = 200)
lambda = 2
phi = exp(lambda*(exp(complex(imaginary = t))-1))
```

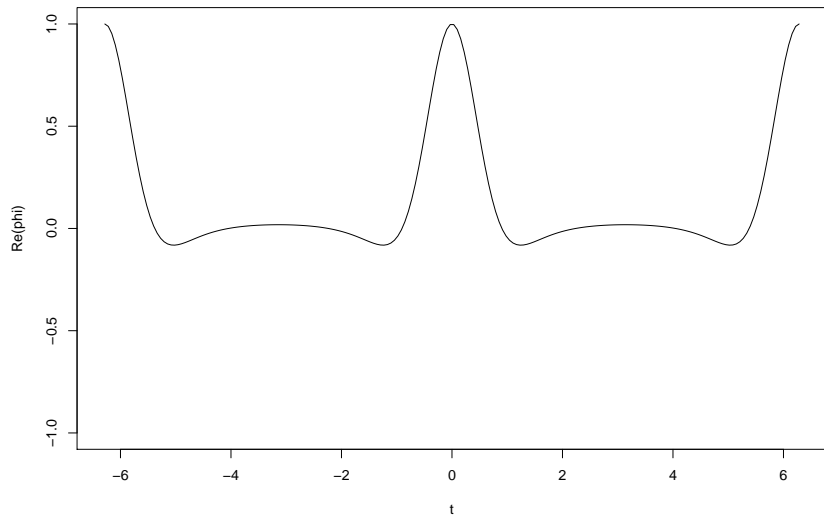
## Trajet dans le cercle unitaire

```
plot(Re(phi), Im(phi), type='l', xlim=c(-1,1), ylim=c(-1,1))  
lines(Re(cercle), Im(cercle), col='red')  
points(0, 0, col='green')
```



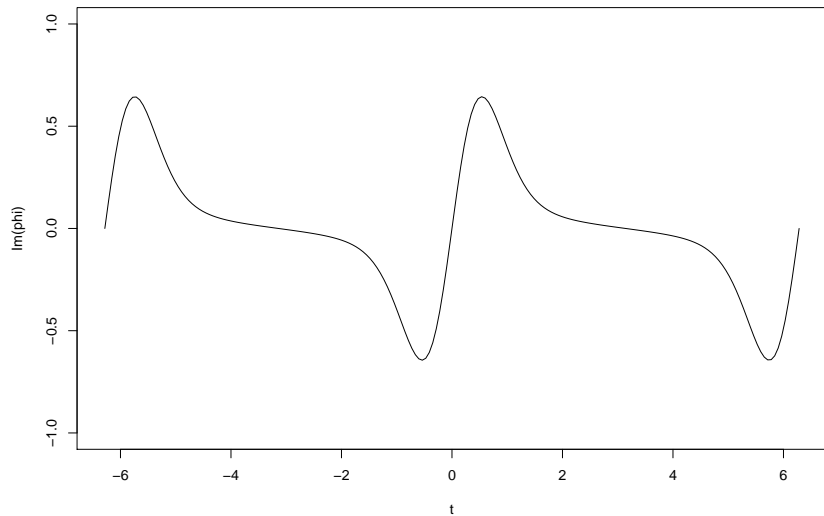
## Partie réelle

```
plot(t, Re(phi), type='l', ylim=c(-1,1))
```



## Partie imaginaire

```
plot(t, Im(phi), type='l', ylim=c(-1,1))
```



## Fonction caractéristique d'une loi $N(0, 1)$

- Puisque  $\sin(tx)$  est impair et  $e^{-x^2/2}$  est pair,

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \cdot e^{-x^2/2} dx$$

$$\phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\sin tx \cdot x e^{-x^2/2} dx$$

- Intégration par parties,  $u = -\sin tx$ ,  $dv = x e^{-x^2/2} dx$ ,  
 $du = -t \cos tx$ ,  $v = -e^{-x^2/2}$ , donne

$$\phi'(t) = [uv]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cos tx \cdot e^{-x^2/2} dx = -t\phi(t).$$

- La solution de l'équation différentielle  $\log \phi(0) = 0$ ,  
 $\frac{d \log \phi(t)}{dt} = -t$  est  $\log \phi(t) = \int_0^t -s ds = -t^2/2$ .
- Alors  $\phi(t) = e^{-t^2/2}$ .

## Fonction caractéristique d'une loi $N(\mu, \sigma^2)$

Si  $X \sim N(0, 1)$  et  $Y = \mu + \sigma X$  alors  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$  et

$$\phi_Y(t) = E[e^{i(\mu + \sigma X)t}] = e^{i\mu t} E[e^{i(t\sigma)X}] = e^{i\mu t} \phi_X(\sigma t) = e^{i\mu t} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

La densité de  $Y$ , en  $y$ , est de la même forme fonctionnelle de  $\phi_Y(t)$ , en  $t$  :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(y - \mu)^2}{\sigma^2} \right].$$

## Continuité de la fonction caractéristique

$$\begin{aligned} |\phi_x(t+h) - \phi_x(t)| &= \left| \int (e^{i(t+h)x} - e^{itx}) \mu(dx) \right| \\ &\leq \int |e^{i(t+h)x} - e^{itx}| \mu(dx). \end{aligned}$$

- Deux bornes qui ne dépend pas de  $t$

$$|e^{i(t+h)x} - e^{itx}| \leq h|x|, \quad |e^{i(t+h)x} - e^{itx}| \leq 2.$$

- Selon la deuxième, (convergence dominée)

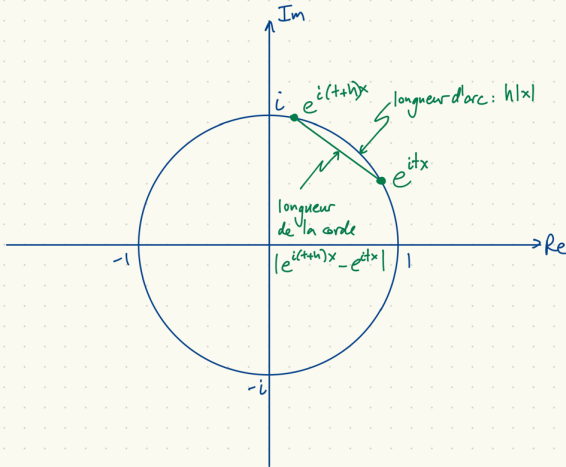
$$\lim_{h \downarrow 0} E \left[ |e^{i(t+h)X} - e^{itX}| \right] = E \left[ \lim_{h \downarrow 0} |e^{i(t+h)X} - e^{itX}| \right]$$

- Selon la première,

$$E \left[ \lim_{h \downarrow 0} |e^{i(t+h)X} - e^{itX}| \right] = E[0] = 0.$$



# Arc et corde



# Dérivée de la fonction caractéristique

- ▶ Soit  $X$  une variable aléatoire,  $\phi(t)$  sa fonction caractéristique.
- ▶ Si  $E[|X|^k] < \infty$ , alors pour  $0 \leq j \leq k$ ,  $\phi^{(j)}(t) = E[(iX)^j e^{itX}]$ .
- ▶ Preuve par induction : fixons  $k$  et supposons que  $E[|X|^k] < \infty$ .
  - ▶  $E[(iX)^0 e^{itX}] = E[e^{itX}] = \phi(t) = \phi^{(0)}(t)$ , alors vrai pour  $j = 0$ .
  - ▶ Supposez que  $\phi^{(j-1)}(t) = E[(iX)^{j-1} e^{itX}]$ .
  - ▶  $|(iX)^j e^{itX}| = |i|^j |X|^j |e^{itX}| = |X|^j$
  - ▶  $E[|X|^k] < \infty \Rightarrow E[|X|^j] < \infty$
  - ▶  $\phi^{(j)}(t) = E\left[\frac{d}{dt}(iX)^{j-1} e^{itX}\right] = E[(iX)^j e^{itX}]$
- ▶ Génération des moments :

$$\phi^{(j)}(0) = i^j E[X^j]$$

- ▶ Attention :  $\phi_X(t) = \exp(-\gamma|t|)$  pour  $X$  Cauchy symétrique avec paramètre d'échelle  $\gamma$ , n'est pas différentiable à  $t = 0$ .

## Propriétés de la fonction $(\sin \theta t)/t = \theta \text{sinc}(\theta t)$

1. Pour  $\theta = 0$ ,  $(\sin \theta t)/t \equiv 0$ .
2. Pour  $\theta \neq 0$ ,  $t = k\pi/\theta$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ,

$$\frac{\sin \theta t}{t} = 0.$$

3. Pour  $\theta \neq 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \theta t}{t} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \theta \cos \theta t}{\lim_{t \rightarrow 0} 1} = \theta$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta t}{t} = 0.$$

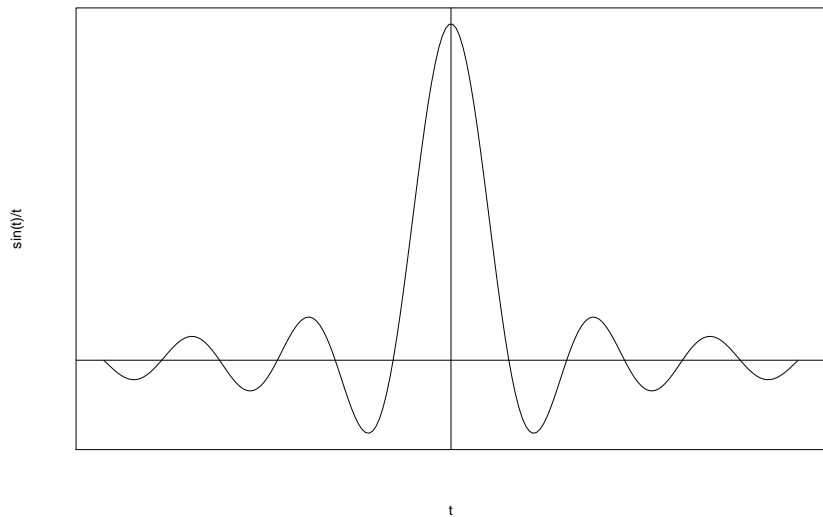
4. Pour  $\theta \neq 0$ , la fonction est paire :

$$\frac{\sin \theta(-t)}{-t} = \frac{\sin \theta t}{t}$$

5. Lemme 11.1.3 du livre,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\sin \theta t}{t} dt = \begin{cases} \pi & \theta > 0 \\ 0 & \theta = 0 \\ -\pi & \theta < 0 \end{cases}$$

## La fonction $\theta \text{sinc}(\theta t)$



# Théorème d'inversion I

- Soit  $\mu$  une mesure borélienne,  $\phi(t)$  sa fonction caractéristique. Alors si  $a < b$  et  $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$ ,

$$\mu([a, b]) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt$$

- Puisque

$$\left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right| = \left| \int_a^b e^{-itr} dr \right| \leq \int_a^b |e^{-itr}| dr = b - a < \infty$$

l'intégral entre  $-T$  et  $T$  est fini.

- Par Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mu(dx) dt \\ = \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^T \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt \mu(dx). \end{aligned}$$

## Théorème d'inversion II

La partie imaginaire de l'intégrand est impair, l'intégral est réel,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t(x-a)}{t} - \frac{\sin t(x-b)}{t} dt \mu(x)$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x-a) - \text{sign}(x-b) \mu(dx).$$

► La valeur de l'intégral est

$$\frac{1}{2}(\mu(\{a\}) + \mu(\{b\}) + \mu((a, b))).$$

## La dualité en cas de $\phi_X(t)$ intégrable

Théorème d'inversion spécial quand  $\phi_X(t)$  est intégrable :

$X$  a une densité

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi_X(t) dt.$$

# Unicité de la fonction caractéristique

- ▶ Théorème d'unicité  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) \Leftrightarrow \phi_X(t) = \phi_Y(t)$
- ▶  $\Rightarrow$  de la définition de la fonction caractéristique en termes de  $\mu$
- ▶  $\Leftarrow$  du théorème d'inversion. Probabilités des intervalles par continuité de probabilité, autres événements par unicité des extensions.



# Théorème de continuité

- ▶ Soit  $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$  des mesures boréliennes,  $\phi, \phi_1, \phi_2, \dots$ , leurs fonctions caractéristiques. Alors  $\mu_n$  converge en loi à  $\mu$  ssi  $\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Par la définition de convergence en loi et la continuité des fonctions  $\cos xt$  et  $\sin xt$  en  $x$  pour  $t$  donné, si  $\mu_n$  converge en loi à  $\mu$ ,  $\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .
- ▶ L'autre direction est plus difficile.

# Théorème centrale limite I

- Supposez que  $X_1, X_2, \dots$ , sont iid, avec moyenne 0, variance 1.
- Soit  $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k$ . La fonction caractéristique de  $Y_n$  est

$$\phi_n(t) = \phi_{X_1}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[1 + \frac{it}{\sqrt{n}}E[X_1] + \frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^2 E[X_1^2] + o(n^{-1})\right]^n$$

- Avec  $E[X_1] = 0$ ,  $E[X_1^2] = 1$ ,

$$\phi_n(t) = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right)^n.$$

$$\log \phi_n(t) = n \log \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right) = n \left(-\frac{1}{2} \frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right)$$

$$\log \phi_n(t) \rightarrow -\frac{t^2}{2}$$

$$\phi_n(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

# Théorème centrale limite II

- ▶ Si  $Y$  est une variable aléatoire  $N(0, 1)$ , sa fonction caractéristique est  $\phi(t) = e^{-t^2/2}$ .
- ▶ Puisque  $\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$ ,  $\mathcal{L}(Y_n) \Rightarrow \mathcal{L}(Y)$ .