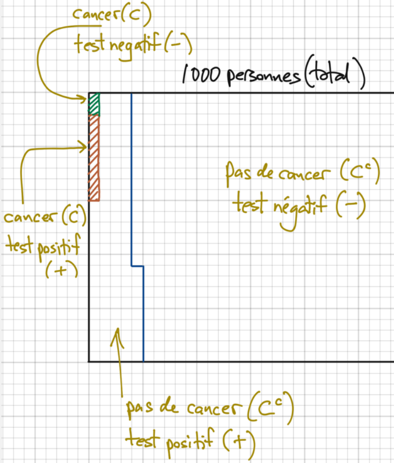
Cours 8

William McCausland

2022-11-03

Théorème de Bayes, événements de probabilité positive



$\Pr[C] = 0.01$
(10 personnes sur 1000)

$\Pr[C^c] = 0.99$
(990 personnes sur 1000)

$\Pr[+|C] = 0.8$
(8 personnes sur 10)

$\Pr[-|C] = 0.2$
(2 personnes sur 10)

$\Pr[-|C^c] = 0.9$
(891 personnes sur 990)

$\Pr[+|C^c] = 0.1$
(99 personnes sur 990)

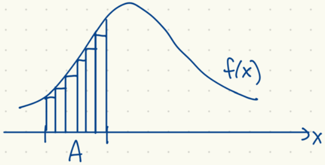
$$\Pr[C|+] = \frac{8}{8+99} = \frac{\Pr[C,+]}{\Pr[+]}$$

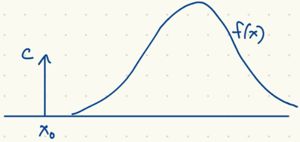
$$= \frac{\Pr[C]\Pr[+|C]}{\Pr[+]}$$

Un peu de Chapitre 12

- μ, ν, λ des mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$, λ Lebesgue.
- μ est absolument continue s'il existe f mesurable telle que $\mu(A) = \int_A f(x)\lambda(dx)$, A borelien (λ-mesurable).
- μ est absolument continue par rapport à ν s'il existe f, ν-mesurable, telle que $\mu(A) = \int_A f(x)\nu(dx)$, $A \in \mathcal{B}$.
- μ est discret si $\sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\}) = \mu(\mathbb{R})$.
- $\mu \ll \nu$ signifie $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.
- Théorème Radon-Nikodym : $\mu \ll \lambda \Leftrightarrow$ il existe f, λ-mesurable, telle que $\mu(A) = \int_A f(x)\lambda(dx)$, A mesurable.
- $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$ est la dérivée Radon-Nikodym de μ par rapport à λ.
- $\mu(A) = \int_A \left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right) d\lambda$.

Continuité absolue





$$\mu(A) = \int f(x)\,\lambda(dx)$$

Problème:

$$\Pr\left[[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\right] \sim \Pr\left[\{x_0\}\right] = c$$

mais $\lambda(\{x_0\}) = 0$

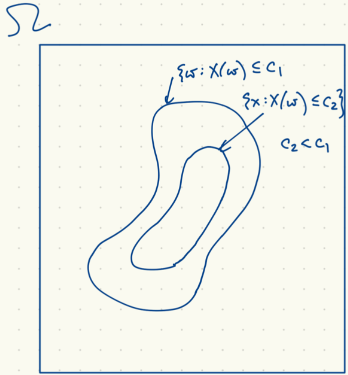
Pas de problème si $\lambda \gg \mu$ $\quad \lambda(A)=0 \Rightarrow \mu(A)=0$

$A \in \mathcal{B}$

Un peu plus sur la mesurabilité I

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité.
- Soit $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Définer $\sigma(X) \equiv \sigma(\{\{X \leq c\} \colon c \in \mathbb{R}\})$.
- Notez que $\{X = c\} = \{X \leq c\} \setminus (\cup_n \{X \leq c - 1/n\}) \in \sigma(X)$
- Si on sait assez pour répondre à la question suivante pour tout $c \in \mathbb{R}$, on connait la valeur de $X(\omega)$: Est-ce que $\omega \in \{X \leq c\}$?
- Soit $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une tribu.
- Si X est $\mathcal{G}$-mesurable (c.-à-d. $\{X \leq c\} \in \mathcal{G}$, tout $c \in \mathbb{R}$),
  - $\sigma(X) \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ (c.-à-d. $\mathcal{G}$ est (faiblement) plus fine que $\sigma(X)$).
- Une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est $\mathcal{F}$-mesurable par définition. Une fonction $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ qui n'est pas une variable aléatoire n'est pas $\mathcal{F}$-mesurable.

Deux évènements dans $\sigma(X)$



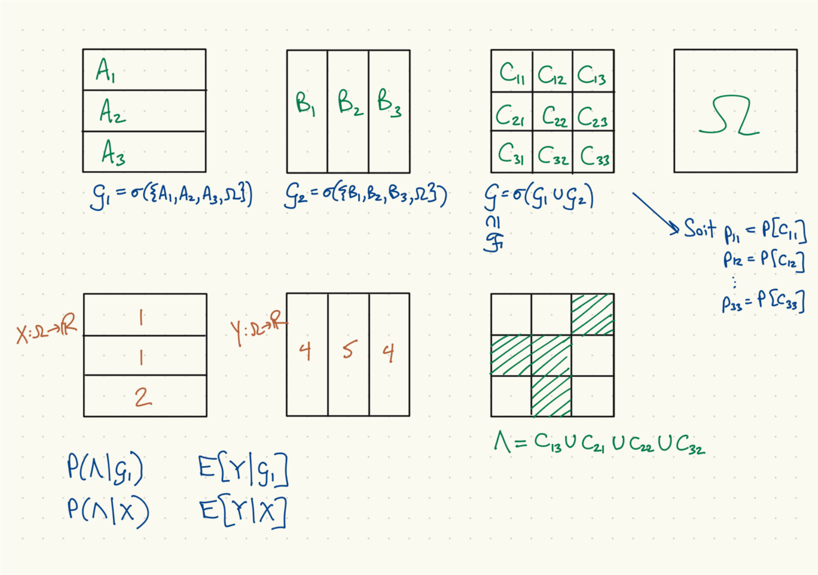
Un peu plus sur la mesurabilité II

- Si une variable aléatoire est $\sigma(X)$-mesurable, c'est une fonction seulement de X—elle dépend de ω seulement à travers $X(\omega)$.
  - Supposons que la variable aléatoire Z est $\sigma(X)$-mesurable.
  - Pour tous $z \in \mathbb{R}$, il existe une unique $B_z \in \mathcal{B}$ tel que $\{Z = z\} = \{X \in B_z\}$. (Notez que $\{X \in B_z\} \subseteq \sigma(X)$.)
  - Considérez ceci comme la définition de B_z pour tout $z \in \mathbb{R}$.
  - Alors $Z = f(X)$, où la fonction f est définie par : pour tout $z \in \mathbb{R}$ et tout $x \in B_z$, $f(x) = z$.
  - $\sigma(Z) \subseteq \sigma(X)$ mais $\sigma(X) \subseteq \sigma(Z)$ n'est pas vrai en général : Si $Z = \max(0, X)$, $\{X \leq -3\} \not\subseteq \sigma(Z)$.
- Si $A \in \sigma(X)$ et il n'existe pas $B \subset A$ telle que $B \in \sigma(X)$, X est constante sur A.
  - Mettons que $X(\omega_0) = x_0 < x_1 = X(\omega_1)$ pour $\omega_0, \omega_1 \in A$. Alors $A \cap \{X \leq x_0\} \in \sigma(X)$ et $A \cap \{X \leq x_0\} \subset A$.

Objets d'intérêt

- Soit $A, B \in \mathcal{F}$, X, Y des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une tribu.
- Nombres :
  - $P(A|B)$, (Si $P(B) > 0$, $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$).
  - $E[Y|B]$. (Si $P(B) > 0$, $E[Y|B] = E[Y 1_B]/P(B)$).
- Variables aléatoires, $\mathcal{G}$-mesurables :
  - $P(A|\mathcal{G})$,
  - $E[Y|\mathcal{G}]$.
- Variables aléatoires, $\sigma(X)$-mesurables :
  - $P(A|X) \equiv P(A|\sigma(X))$,
  - $E[Y|X] \equiv E[Y|\sigma(X)]$.
- $\sigma(X) \equiv \sigma(\{\{X < c\} : c \in \mathbb{R}\})$.

Exemple, probabilités et espérances conditionelles



Définitions de probabilité, espérance conditionnelle

- Soit X, Y deux variables aléatoires avec $E[|Y|] < \infty$
- Soit A un évènement : $A \in \mathcal{F}$.
- Une variable aléatoire $P(A|X)(\omega)$ est une *probabilité conditionnelle* de A sachant X si elle est $\sigma(X)$-mesurable et pour chaque $S \in \mathcal{B}$,

$$E[P[A|X]1_{X \in S}] = P[A \cap \{X \in S\}].$$

- Une variable aléatoire $E[Y|X](\omega)$ est une *espérance conditionnelle* de Y sachant X si elle est $\sigma(X)$-mesurable et pour chaque $S \in \mathcal{B}$,

$$E[E[Y|X]1_{X \in S}] = E[Y1_{X \in S}].$$

Définitions plus large

- Soit A un évènement : $A \in \mathcal{F}$.
- Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.
- La *probabilité conditionnelle* $P(A|\mathcal{G})$ est une variable aléatoire, $\mathcal{G}$-mesurable, telle que pour tout $G \in \mathcal{G}$

$$E[P[A|\mathcal{G}]1_G] = P[A \cap G].$$

- Soit Y une variable aléatoire
- L'*espérance conditionnelle* $E[Y|\mathcal{G}]$ est une variable aléatoire, $\mathcal{G}$-mesurable, telle que pour tout $G \in \mathcal{G}$,

$$E[E[Y|\mathcal{G}]1_G] = E[Y1_G].$$

- Notez que la cohérence des définitions : $P[A|X] = P[A|\sigma(X)]$ et $E[Y|X] = E[Y|\sigma(X)]$.

Trouver $P(\Lambda|\mathcal{G}_1)$

Conditions pour $P(\Lambda|\mathcal{G}_1)$

- $\mathcal{G}_1$ mesurable $\quad (\mathcal{G}_1 = \sigma(A_1, A_2, A_3, \Omega))$

$$E[P(\Lambda|\mathcal{G}_1)\mathbb{1}_{A_1}] = P(\Lambda \cap A_1)$$

$$E[P(\Lambda|\mathcal{G}_1)\mathbb{1}_{A_2}] = P(\Lambda \cap A_2)$$

$$E[P(\Lambda|\mathcal{G}_1)\mathbb{1}_{A_3}] = P(\Lambda \cap A_3)$$

Autres éléments de $\mathcal{G}_1$ par linéarité.

Probabilités conditionnelles de l'événement $\Lambda \in \Omega$

- Par rapport à la sous-tribu $\mathcal{G}_1$:

$$P(\Lambda|\mathcal{G}_1) = \begin{cases} p_{13}/P(A_1) & \omega \in A_1 \\ (p_{21}+p_{22})/P(A_2) & \omega \in A_2 \\ p_{32}/P(A_3) & \omega \in A_3 \end{cases}$$

- Par rapport à la variable aléatoire X

$$P(\Lambda|X) = P(\Lambda|\sigma(X)) = \begin{cases} \frac{p_{13}+p_{21}+p_{22}}{P(A_1 \cup A_2)} & \omega \in A_1 \cup A_2 = \{X=1\} \\ p_{32}/P(A_3) & \omega \in A_3 = \{X=2\} \end{cases}$$

- Par rapport à la sous-tribu minimale $\{\emptyset, \Omega\}$:

$$P(\Lambda|\{\emptyset, \Omega\}) = P(\Lambda) = p_{13}+p_{21}+p_{22}+p_{32}, \text{ tous } \omega \in \Omega$$

- Par rapport à la sous-tribu maximal $\mathcal{F}$ (ou par rapport à $\mathcal{G}$) :

$$P(\Lambda|\mathcal{F}) = 1_\Lambda(\omega) = P(\Lambda|\mathcal{G}).$$

Vérification de $P(\Lambda|\mathcal{G}_1)$

- À vérifier : $E[P(\Lambda|\mathcal{G}_1)1_A] = P(\Lambda \cap A)$, $A \in \mathcal{G}_1$.

$$E[P(\Lambda|\mathcal{G}_1)1_{A_1}] = E\left[\frac{p_{13}}{P(A_1)}1_{A_1}\right] = \frac{p_{13}}{P(A_1)}E[1_{A_1}] = p_{13} = P(\Lambda \cap A_1)$$

$$\begin{aligned} E[P(\Lambda|\mathcal{G}_1)1_{A_2}] = E\left[\frac{p_{21}+p_{23}}{P(A_2)}1_{A_2}\right] &= \frac{p_{21}+p_{22}}{P(A_2)}E[1_{A_2}] \\ &= p_{21}+p_{22} = P(\Lambda \cap A_2) \end{aligned}$$

$$E[P(\Lambda|\mathcal{G}_1)1_{A_3}] = E\left[\frac{p_{32}}{P(A_3)}1_{A_3}\right] = \frac{p_{32}}{P(A_3)}E[1_{A_3}] = p_{32} = P(\Lambda \cap A_3)$$

- Le reste ($A_1 \cup A_2$, etc.) par linéarité de l'espérance, additivité de probabilité

Construction de $P(\Lambda|\mathcal{G}_1) = \frac{d\nu}{dP_0}$

- La mesure ν : $\nu(A) \equiv P(\Lambda \cap A)$, $A \in \mathcal{G}_1$

$$\nu(A_1) = P(\Lambda \cap A_1) = p_{13}$$

$$\nu(A_2) = P(\Lambda \cap A_2) = p_{21} + p_{22}$$

$$\nu(A_3) = P(\Lambda \cap A_2) = p_{32}$$

- La mesure P_0 : $P_0(A) \equiv P(A)$, $A \in \mathcal{G}_1$.

$$P_0(A_1) = p_{11} + p_{12} + p_{13}$$

$$P_0(A_2) = p_{21} + p_{22} + p_{23}$$

$$P_0(A_3) = p_{31} + p_{32} + p_{33}$$

- Notez que $P_0(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$, $A \in \mathcal{G}_1$: c-à-d $\nu \ll P_0$.
- Si $P_0(A) > 0$, $P(\Lambda|\mathcal{G}_1)(\omega) = \nu(A)/P_0(A)$, $\omega \in A \in \mathcal{G}_1$.

Trouvez $E[Y|\mathcal{G}_1]$

Les conditions sur $E[Y|\mathcal{G}_1]$

- Doit être $\mathcal{G}_1$-mesurable, où $\mathcal{G}_1 = \sigma(\{A_1, A_2, A_3\})$.
- $E[E[Y|\mathcal{G}_1]1_{A_1}] = E[Y1_{A_1}] =$
- $E[E[Y|\mathcal{G}_1]1_{A_2}] = E[Y1_{A_2}] =$
- $E[E[Y|\mathcal{G}_1]1_{A_3}] = E[Y1_{A_3}] =$
- Autres éléments de $\mathcal{G}_1$ par linéarité.

Espérances conditionnelles de Y

- Par rapport à la sous-tribu $\mathcal{G}_1$:

$$E[Y|\mathcal{G}_1] = \begin{cases} (4(p_{11}+p_{13})+5p_{12})/P(A_1) & \omega \in A_1 \\ (4(p_{21}+p_{23})+5p_{22})/P(A_2) & \omega \in A_2 \\ (4(p_{31}+p_{33})+5p_{32})/P(A_3) & \omega \in A_3 \end{cases}$$

- Par rapport à la variable aléatoire X

$$E[Y|X] = \begin{cases} \frac{4(p_{11}+p_{13}+p_{21}+p_{23})+5(p_{12}+p_{22})}{P(A_1\cup A_2)} & \omega \in A_1 \cup A_2 = \{X=1\} \\ (4(p_{31}+p_{33})+5p_{32})/P(A_3) & \omega \in A_3 = \{X=2\} \end{cases}$$

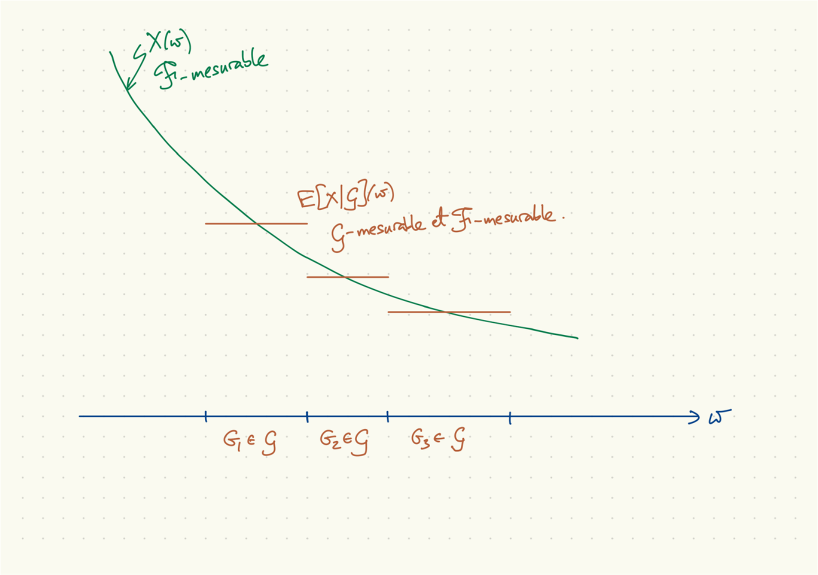
- Par rapport à la sous-tribu minimale $\{\emptyset, \Omega\}$:

$$E[Y|\{\emptyset, \Omega\}] = E[Y]$$

- Par rapport à la sous-tribu maximal $\mathcal{F}$:

$$E[Y|\mathcal{F}] = Y(\omega)$$

Espérance conditionnelles : une illustration



Vérification de $E[Y|\mathcal{G}_1]$

- À vérifier : $E[E[Y|\mathcal{G}_1]1_A] = E[Y1_A]$, $A \in \mathcal{G}_1$:
- Pour $A = A_1$:

$$E[E[Y|\mathcal{G}_1]1_{A_1}] = \frac{4(p_{11} + p_{13}) + 5p_{12}}{P(A_1)} E[1_{A_1}] = 4(p_{11}+p_{13})+5p_{12}$$

$$E[Y1_{A_1}] = 4(p_{11} + p_{13}) + 5p_{12}$$

- $A = A_2$, $A = A_3$ semblables
- Le reste par linéarité de l'espérance

Construction de $E[Y|\mathcal{G}_1]$:

- En général, $E[Y|\mathcal{G}_1](\omega) = E[Y^+|\mathcal{G}_1](\omega) - E[Y^-|\mathcal{G}_1](\omega)$.
- Mêmes cas ∞, $-\infty$, fini, indéfini, événement par événement
- Ici, $Y = Y^+$, alors $E[Y|\mathcal{G}_1] = E[Y^+|\mathcal{G}_1] = \frac{d\rho^+}{dP_0}$, où

$$\rho^+(A) \equiv E[Y^+ 1_A], \quad P_0(A) \equiv P(A), \quad A \in \mathcal{G}_1,$$

  et notez que $\rho^+ \ll P_0$ alors $\rho^+(A) = \int_A E[Y|\mathcal{G}_1] P_0(dx)$.
- Pour $A = A_1$,
  - $\rho^+(A_1) = E[Y^+ 1_{A_1}] = 4(p_{11} + p_{13}) + 5p_{12}$
  - $P_0(A_1) = P(A_1) = p_{11} + p_{12} + p_{13}$
- Les cas $A = A_2$, $A = A_3$ sont semblables.
- Pour chaque $\omega \in A \in \mathcal{G}_1$, $E[Y^+|\mathcal{G}_1](\omega) = \rho^+(A)/P_0(A)$.
- Pour $\omega \in A_1$, par exemple,

$$E[Y^+|\mathcal{G}_1](\omega) = \frac{4(p_{11} + p_{13}) + 5p_{12}}{p_{11} + p_{12} + p_{13}}.$$

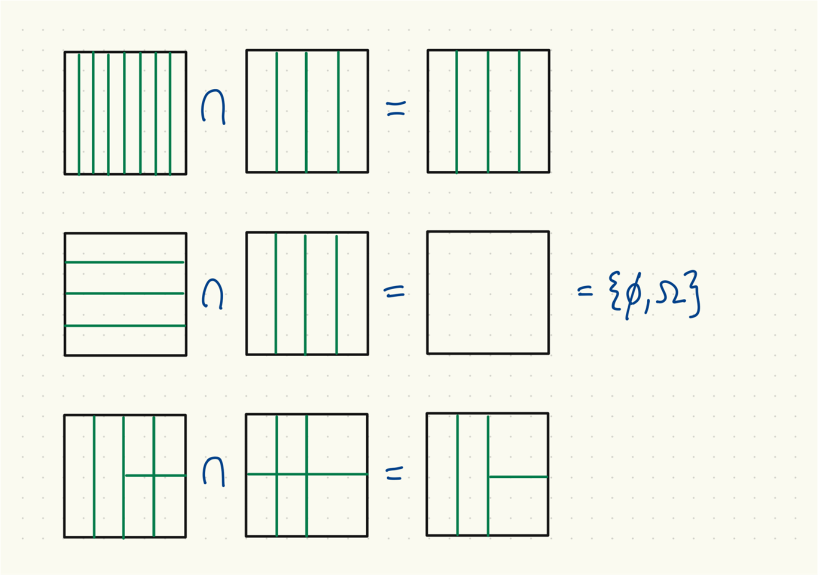
Exercice 13.2.3

- Soit $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$.

(a) Si Z est $\mathcal{G}_1$-mesurable et $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, Z est $\mathcal{G}_2$ mesurable :
  - Pour tous $z \in \mathbb{R}$, $\{Z \leq z\} \in \mathcal{G}_1$ alors $\{Z \leq z\} \in \mathcal{G}_2$.

(b) Si Z est $\mathcal{G}_1$-mesurable et $\mathcal{G}_2$-mesurable, Z est $(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2)$-mesurable :
  - Pour tous $z \in \mathbb{R}$, $\{Z \leq z\} \in \mathcal{G}_1$ et $\{Z \leq z\} \in \mathcal{G}_2$, alors $\{Z \leq z\} \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$.

Intersection des tribus



Proposition 13.2.6

- Rappel, définition de la v.a. $E[X|\mathcal{G}]$: pour tout $G \in \mathcal{G}$,

$$E[E[X|\mathcal{G}]1_G] = E[X1_G].$$

- Soit X, Y des variables aléatoires, X est $\mathcal{G}$-mesurable, $E[Y] < \infty$, $E[XY] < \infty$.
- Proposition : $E[XY|\mathcal{G}] = XE[Y|\mathcal{G}]$ avec probabilité 1.
- Preuve :
  - Soit $G_0, G \in \mathcal{G}$, $X = 1_{G_0}$. Alors

$$E[XE[Y|\mathcal{G}]1_G] = E[E[Y|\mathcal{G}]1_{G\cap G_0}] = E[Y1_{G\cap G_0}] = E[XY1_G].$$

$$E[E[XY|\mathcal{G}]1_G] = E[XY1_G].$$

  - G est arbitraire, alors $XE[Y|\mathcal{G}] = E[XY|\mathcal{G}]$ avec probabilité 1, pour $X = 1_{G_0}$.
  - G_0 est arbitraire, alors la même chose tient pour X simple (linéarité), positive (convergence dominée), générale.

Proposition 13.2.7 (espérances itérées)

- Définition de $E[X|\mathcal{G}]$: $E[E[X|\mathcal{G}]1_G] = E[X1_G]$, tous $G \in \mathcal{G}$.
- Proposition : Si $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$, $E[E[Y|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = E[Y|\mathcal{G}_1]$.
- Preuve : fixez $G \in \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$,

$$E[\ E[E[Y|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]\ 1_G\ ] = E[E[Y|\mathcal{G}_2]1_G] = E[Y1_G]$$

$$E[E[Y|\mathcal{G}_1]1_G] = E[Y1_G]$$

  alors

$$E[E[Y|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = E[Y|\mathcal{G}_1] \text{ avec probabilité 1.}$$

- Cas spécial, espérance conditionnelle comme projection :

$$E[E[Y|\mathcal{G}]|\mathcal{G}] = E[Y|\mathcal{G}]$$

- Deux autres cas spéciaux :
  - $E[E[X|Y]] = E[X]$ pour $\mathcal{G}_1 = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{G}_2 = \sigma(Y)$.
  - $E[E[X|Y,Z]|Z] = E[X|Z]$ pour $\mathcal{G}_1 = \sigma(Z) \subseteq \mathcal{G}_2 = \sigma(Y,Z)$.

Loi de covariance total

La loi de covariance totale :

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = E[\mathrm{Cov}[X, Y|Z]] + \mathrm{Cov}[E[X|Z], E[Y|Z]]$$

Preuve: soit $m_X \equiv E[X] = E[E[X|Z]]$, $m_Y \equiv E[Y] = E[E[Y|Z]]$.
Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X, Y] &= E[E[(X - m_X)(Y - m_Y)]|Z] \\ &= E[E[(X - E[X|Z] + E[X|Z] - m_X) \\ &\qquad (Y - E[Y|Z] + E[Y|Z] - m_Y)|Z]].\end{aligned}$$

Puisque $E[(E[X|Z] - m_X)(Y - E[Y|Z])|Z] = 0]$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X, Y] &= E[\mathrm{Cov}[X, Y|Z]] + E[(E[X|Z] - m_X)(E[Y|Z] - m_Y)] \\ &= E[\mathrm{Cov}[X, Y]|Z] + \mathrm{Cov}[E[X|Z], E[Y|Z]].\end{aligned}$$

Apérçu du cours 9 (Casella et Berger)

- Statistiques exhaustives (sufficient), complètes, minimales, libres (ancillary)
- Estimation ponctuelle, méthode des moments et maximum de vraisemblance
- L'approche bayésienne et les lois a priori, conjointe et a posteriori
- Estimation ponctuelle bayésienne