

ECN 7060, Cours 5

William McCausland

2019-10-02

Inégalité de Markov

- ▶ Soit $X \geq 0$ une variable aléatoire, soit $\alpha \in (0, \infty)$.
- ▶ Inégalité de Markov :

$$E[X] \geq \alpha P[X \geq \alpha]$$

- ▶ Preuve :
 - ▶ Soit

$$Z \equiv \begin{cases} 0 & X(\omega) < \alpha, \\ \alpha & X(\omega) \geq \alpha. \end{cases}$$

- ▶ Alors, par monotonie,

$$E[Z] = \alpha P[X \geq \alpha] \leq E[X].$$

- ▶ Questions :
 1. Donnez un exemple d'un $X \geq 0$ qui donne une égalité.
 2. Donnez des conditions nécessaires et suffisantes pour une égalité.

Inégalité de Chebychev

- ▶ Soit Y une variable aléatoire ou $\mu_Y = E[Y]$ existe et est finie.
- ▶ Soit $\epsilon > 0$.
- ▶ Inégalité de Chebychev :

$$P[|Y - \mu_Y| \geq \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \text{Var}[Y].$$

- ▶ Preuve :
 - ▶ Soit $X = (Y - \mu_Y)^2$, soit $\alpha = \epsilon^2$.
 - ▶ Alors par l'inégalité de Markov,

$$P(|Y - \mu_Y| \geq \epsilon) = P(X \geq \epsilon^2) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \text{Var}[Y].$$

- ▶ Notes :
 - ▶ $\text{Var}[Y] = \infty$ est possible, mais l'inégalité ne contraint pas.
 - ▶ ϵ^{-2} peut être très grand, mais c'est fini.
 - ▶ Application : borner la probabilité d'une valeur loin de la moyenne, pour une v.a. X_n d'une suite où la variance devient arbitrairement petite. On veut choisir n après ϵ .

Définitions

- ▶ Soit Z_1, Z_2, \dots une suite de v.a., Z une v.a.
- ▶ Convergence ponctuelle de Z_n à Z : pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega) = Z(\omega).$$

- ▶ Convergence de Z_n à Z presque sur, $Z_n \xrightarrow{p.s.} Z$:

$$P[\{Z_n \rightarrow Z\}] = 1, \text{ ou } P(Z_n \rightarrow Z) = 1.$$

- ▶ Convergence de Z_n à Z en probabilité, $Z_n \xrightarrow{p} Z$: pour tout $\epsilon > 0$,

$$P[\{|Z_n - Z| \geq \epsilon\}] \rightarrow 0, \text{ ou } P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) \rightarrow 0.$$

Convergence en probabilité mais pas convergence p.s.

- ▶ Prenez l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) où $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, P la mesure de Lebesgue.
- ▶ Soit $A_1 = \Omega = [0, 1]$, $A_2 = [0, 1/2)$, $A_3 = [1/2, 1]$,
 $A_4 = [0, 1/4)$, $A_5 = [1/4, 1/2)$, $A_6 = [1/2, 3/4)$, $A_7 = [3/4, 1]$,
...
- ▶ Soit $X = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = 1_{A_n}(\omega)$.
- ▶ Convergence presque sûre?
 - ▶ Pour tous ω , $\liminf_n X_n(\omega) = 0$, $\limsup_n X_n(\omega) = 1$.
 - ▶ Échec de convergence pour tout $\omega \in \Omega$!
 - ▶ Alors $P[\{X_n \rightarrow X\}] = 0$.
- ▶ Convergence en probabilité?
 - ▶ $P(X_n = X) \approx 1 - 1/n \rightarrow 1$.
 - ▶ Alors pour tout $\epsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \epsilon) \rightarrow 0$.

Une condition suffisante pour convergence p.s.

La condition : pour tout $\epsilon > 0$, $\sum_n P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) < \infty$.

Preuve :

- ▶ Soit $\epsilon > 0$ et supposez que $\sum_n P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) < \infty$.
- ▶ Alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{\infty} P(|Z_k - Z| \geq \epsilon) = 0.$$

- ▶ Pour m fixe,

$$\begin{aligned} P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} |Z_k - Z| \geq \epsilon) &\leq P(\cup_{k=m}^{\infty} |Z_k - Z| \geq \epsilon) \\ &\leq \sum_{k=m}^{\infty} P(|Z_k - Z| \geq \epsilon). \end{aligned}$$

- ▶ Puisque m est arbitraire, $P(|Z_k - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) = 0$.

Preuve, continuée

Rappel : la condition entraine $P(|Z_k - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) = 0$.

Alors

$$\begin{aligned} P(\exists \epsilon > 0, |Z_n - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) &= P(\exists \epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0, |Z_n - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) \\ &= P(\cup_{\epsilon \in \mathbb{Q}_{++}} |Z_n - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) \\ &\leq \sum_{\epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0} P(|Z_n - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} P(\forall \epsilon > 0, |Z_n - Z| < \epsilon \text{ a.a.}) &= 1, \\ P(Z_n \rightarrow Z) &= 1. \end{aligned}$$

Convergence presque sûre \rightarrow convergence en probabilité

Preuve :

- ▶ Supposez que $P(Z_n \rightarrow Z) = 1$ (convergence p.s.).
- ▶ Soit $\epsilon > 0$.
- ▶ Soit $A_n = \{\exists m \geq n, |Z_m - Z| \geq \epsilon\}$.
- ▶ Alors

$$A_n \searrow \cap_n A_n \subseteq \{Z_n \not\rightarrow Z\}.$$

$$P(A_n) \rightarrow P(\cap_n A_n) \leq P(Z_n \not\rightarrow Z) = 0.$$

$$P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) \leq P(A_n) \rightarrow 0.$$

- ▶ Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire, pour tout $\epsilon > 0$,
 $P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) \rightarrow 0$ (convergence en probabilité).

Deux exemples

Soit $Y = Z = 0$, Y_n, Z_n des suites de v.a. telles que

- ▶ $\Pr[Y_n = 0] = 1 - 1/n^2, \Pr[Y_n = 1] = 1/n^2.$
- ▶ $\Pr[Z_n = 0] = 1 - 1/n, \Pr[Z_n = 1] = 1/n.$

Pour la suite Y_n :

- ▶ $\Pr[Y_n \neq Y] = 1/n^2 \rightarrow 0$ alors $Y_n \xrightarrow{P} Y.$
- ▶ $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr[Y_n \neq Y] = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6 < \infty$ alors $Y_n \xrightarrow{a.s.} Y.$

Pour la suite Z_n :

- ▶ $\Pr[Z_n \neq Z] = 1/n \rightarrow 0$ alors $Z_n \xrightarrow{P} Z.$
- ▶ Mais $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr[|Z_n - Z| \geq 1] = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty.$
- ▶ Si $Z_n = 1_{(0,1/n)}$, P est la mesure de Lebesgue sur $\Omega = [0, 1]$, $P(Z_n \rightarrow Z) = 1$ (la condition est suffisante, pas nécessaire).
- ▶ Par contre, si les Z_n sont indépendants, par Borel-Cantelli (ii)

$$P(|Z_n - Z| = 1 \text{ i.o.}) = 1, \quad P(Z_n \rightarrow Z) = 0.$$

Une faible loi de grands nombres

- ▶ Une faible loi de grands nombres :
 - ▶ Soit X_1, X_2, \dots des v.a. indépendents, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
 - ▶ Supposez que pour tous n , $E[X_n] = m$ et $\text{Var}[X_n] < v < \infty$.
 - ▶ Alors $S_n \xrightarrow{P} m$.
- ▶ Preuve :
 - ▶ Pour tous n , $E[S_n] = m$ et $\text{Var}[S_n] \leq v/n$.
 - ▶ Par l'inégalité de Chebyshev, $P(|S_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{v}{n} \frac{1}{\epsilon^2} \rightarrow 0$.

Une forte loi de grands nombres

- ▶ Une forte loi de grands nombres
 - ▶ Soit X_1, X_2, \dots des v.a. indépendents, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
 - ▶ Supposez que pour tous n , $E[X_n] = m$, $E[(X_n - m)^4] \leq a < \infty$.
 - ▶ Alors $P(S_n \rightarrow m) = 1$.

Preuve, forte loi de grands nombres

- Notez que $(X_i - m)^2 \leq (X_i - m)^4 + 1$ pour tout $\omega \in \Omega$. (Soit $(X_i - m)^2 > 1$, soit non; $y^2 - y + 1$ n'a pas de racine réelle)
- Supposez que $m = 0$, sans perte de généralité.
- Remarquez que $S_n^4 = \frac{1}{n^4} \sum_{i,j,k,l} X_i X_j X_k X_l$.
- Alors

$$\begin{aligned} E[S_n^4] &= \frac{1}{n^4} \sum_{i,j,k,l} E[X_i X_j X_k X_l] \\ &= \frac{1}{n^4} \left[\sum_i E[X_i^4] + \binom{4}{2} \sum_i \sum_{j>i} E[X_i^2 X_j^2] \right] \\ &\leq \frac{1}{n^4} (na + 3n(n-1)v^2). \end{aligned}$$

- Alors

$$P(|S_n| \geq \epsilon) = P(|S_n|^4 \geq \epsilon^4) \leq \frac{a + 3v^2}{n^2 \epsilon^4}$$

et la somme suivante converge : $\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \geq \epsilon) < \infty$

Inégalité de Jensen

- ▶ Soit $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.
- ▶ Soit X une v.a. avec $E[X]$ fini.
- ▶ Par la convexité de ϕ , il y a une fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que
 - ▶ $g(x) = ax + b$
 - ▶ $g(x) \leq \phi(x)$
 - ▶ $g(E[X]) = \phi(E[X])$
- ▶ Notez que ϕ n'a pas forcément une dérivée à $E[X]$, auquel cas g n'est pas unique.
- ▶ L'inégalité de Jensen :

$$E[\phi(X)] \geq E[g(X)] = aE[X] + b = \phi(E[X]).$$

- ▶ Note : Si g n'est pas unique, tous les choix donnent le même résultat.

Applications de l'inégalité de Jensen

1. Kurtosis K , s'il existe, est toujours plus grand que 1, où

$$K \equiv \frac{E[(Z - \mu)^4]}{E[(Z - \mu)^2]^2}.$$

Supposons que les quatre premiers moments existent et sont finis. Soit $Y = Z - \mu$. Prenez $\phi(x) = x^2$, $X = Y^2$.

2. Kurtosis d'un mélange-échelle Z de v.a. gaussiennes. Soit $Y = Z - \mu$.

$$E[Y^4] = E[E[X^4|\sigma^2]] = E[3\sigma^4] \geq 3E[\sigma^2]^2,$$

$$E[Y^2] = E[E[X^2|\sigma^2]] = E[\sigma^2],$$

$$K \geq 3.$$

Première équation : $X = \sigma^2$, $\phi(x) = x^2$.

3. La fonction d'utilité $u(x)$ concave, richesse X . ($\phi(x) = -u(x)$)

$$-E[u(X)] = E[-u(X)] \geq -u(E[X]), \quad u(E(X)) \geq E[u(X)].$$

Une note sur les distributions

- ▶ La fonction de répartition : $F(x) \equiv \Pr[(-\infty, x]]$.
- ▶ Monotonie de F par monotonie de probabilité.
- ▶ Continuité à droite :
 $x_n \searrow x \Rightarrow (-\infty, x_n] \searrow (-\infty, x] \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x)$, par continuité de probabilité.
- ▶ Continuité à gauche? :
 $x_n \nearrow x \Rightarrow (-\infty, x_n] \nearrow (-\infty, x) \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x) - \Pr[\{x\}]$.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = P(\Omega) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = P(\emptyset) = 0$ par continuité de probabilité.

Aperçu des chapîtres 9 et 10

- ▶ Chapitre 9
 - ▶ Lemme de Fatou
 - ▶ Théorème de convergence monotone, une méthode plus flexible de démontrer $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]$.
 - ▶ Deux applications : les dérivées des espérances, la fonction génératrice des moments.
- ▶ Chapitre 10
 - ▶ Convergence faible, en loi