# ECN 7060, Cours 4

William McCausland

2019-09-25

# Intégration riemannienne

$$L\int_a^b X = \sup\left\{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} X(t) \colon a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\right\}$$

$$U\int_a^b X = \inf\left\{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} X(t) \colon a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\right\}$$

Notes :

- L'existence et la valeur de l'intégral.
- Extensions : (au 2ième cas, il y a une singularité à $a$ ou à $b$)

$$\int_0^\infty X(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} X(t)\,dt \qquad \int_a^b X(t)\,dt = \lim_{c\downarrow a}\lim_{d\nearrow b}\int_c^d X(t)\,dt.$$

# Problèmes pour l'intégration riemannienne

- $L \int_0^1 1_{\mathbb{Q}}(t) = 0$ et $U \int_0^1 1_{\mathbb{Q}}(t) = 1$
- Soit $\mathbb{Q}_n$ l'ensemble des $n$ premiers rationnels dans $[0, 1]$. (L'ordre n'est pas importante.)
- Pour tout $n$, $U \int_0^1 1_{\mathbb{Q}_n}(t) = 0$.
- Notez que
  - $1_{\mathbb{Q}_n}(t) \leq 1_{\mathbb{Q}_{n+1}}(t)$ pour tous $t$,
  - $\lim_{n\to\infty} 1_{\mathbb{Q}_n}(t) = 1_{\mathbb{Q}}(t)$ pour tous $t$,
  - $0 = \lim_{n\to\infty} U \int_0^1 1_{\mathbb{Q}_n}(t) \neq U \int_0^1 1_{\mathbb{Q}}(t) = 1$.
- $\delta$ de Dirac comme pansement lorsqu'il y a des points avec probabilité positive : défini comme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) g(t)\, dt = g(0),$$

et pour tout $t \neq 0$,

$$\delta(t) = 0.$$

# Une variable aléatoire simple sur $\Omega = [0, 1]$

- Trois façons d'écrire la même variable aléatoire :

  1. $X(\omega) = 2 \cdot 1_{[0,1/4) \cap (1/2,1]}(\omega) + 3 \cdot 1_{[1/4,1/2]}(\omega)$
  2. $X(\omega) = 2 \cdot 1_{[0,1/4)}(\omega) + 2 \cdot 1_{(1/2,1]}(\omega) + 3 \cdot 1_{[1/4,1/2]}(\omega)$
  3. $X(\omega) = 2 \cdot 1_{\Omega}(\omega) + 1 \cdot 1_{[1/4,1/2]}(\omega)$

- L'image de $X$ est $\{x_1, x_2\} = \{2, 3\}$, un ensemble fini.
- Dans 1, $X$ est de la forme canonique

$$X(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot 1_{\{X^{-1}(\{x\})\}}(\omega).$$

- Dans 2, $X$ n'est pas de cette forme, mais $[0, 1/4)$, $[1/4, 1/2]$ et $(1/2, 1]$ forment une partition de $[0, 1]$.
- Dans 3, $\{[0, 1], [1/4, 1/2]\}$ n'est pas une partition de $[0, 1]$.

# Une variable aléatoire simple sur $\Omega = [0,1]^2$

Ici,

$$X(\omega) = \begin{cases} x_1 & \omega \in A_1 \\ x_2 & \omega \in A_2 \\ x_3 & \omega \in A_3 \\ x_4 & \omega \in A_4. \end{cases}$$

En général (mais pas avec la mesure de Lebesgue), $P(A_3) > 0$ est possible.

# L'espérance d'une variable aléatoire

- Pour une variable aléatoire simple ($X(\Omega)$ est fini):

$$E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X^{-1}(\{x\})).$$

- Pour une variable aléatoire non-négative :

$$E[X] = \sup\{E[Y]\colon\ Y \leq X,\ Y \text{ simple}\}.$$

- Pour une variable aléatoire générale :

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-].$$

- Notes :
  - Quand l'expression de $X$ simple n'est pas de forme canonique.
  - Cohérence des trois définitions.
  - Valeurs possibles; quand la troisième n'est pas bien définie.

# Exemples pertinents de l'espérance d'une v.a. simple

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}, \mu)$ où $\mu$ est la mesure de Lebesgue.
- Pour tout $n$,

$$E[1_{\mathbb{Q}_n}] = 1 \cdot \mu(\mathbb{Q}_n) + 0 \cdot \mu(\Omega \backslash \mathbb{Q}_n) = 0.$$

- $1_{\mathbb{Q}}$ est une v.a. simple! Par additivité dénombrable,

$$E[1_{\mathbb{Q}}] = 1 \cdot \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) + 0 \cdot \mu(\mathbb{Q}^c \cap [0,1]) = 0.$$

- Rappel : pour l'intégration riemannienne, $U \neq L$, échec de convergence monotone.

# Linéarité de l'espérance, variables aléatoires simples I

Même $X(\omega)$ sur $\Omega = [0, 1]$ qu'on a vu avant :

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \omega \in A_1 \equiv [0, 1/4), \\ 3 & \omega \in A_2 \equiv [1/4, 1/2] \\ 2 & \omega \in A_3 \equiv (1/2, 1]. \end{cases}$$

Une autre variable aléatoire $Y(\omega)$ sur $\Omega$ :

$$Y(\omega) = \begin{cases} 5 & \omega \in B_1 \equiv [0, 3/4], \\ 4 & \omega \in B_2 = (3/4, 1]. \end{cases}$$

Toutes les intersections $A_i \cap B_j$ :

| $A_1 = [0, 1/4)$ | $A_2 = [1/4, 1/2]$ | $A_3 = (1/2, 1]$ | |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $A_2$ | $(1/2, 1]$ | $B_1 = [0, 3/4]$ |
| $\emptyset$ | $\emptyset$ | $B_2$ | $B_2 = (3/4, 1]$ |

# Linéarité de l'espérance, variables aléatoires simples II

$$
\begin{aligned}
E[aX + bY] &= E\left[\sum_{i,j}(ax_i + by_j)1_{A_i \cap B_j}\right] \\
&= \sum_{i,j}(ax_i + by_j)P(A_i \cap B_j) \\
&= a\sum_i x_i \sum_j P(A_i \cap B_j) + b\sum_j y_j \sum_i P(A_i \cap B_j) \\
&= a\sum_i x_i P(A_i) + b\sum_j y_j P(B_j) \\
&= aE[X] + bE[Y].
\end{aligned}
$$

Notes :

- L'additivité donne l'égalité des espérances de $X$ (formes 1 et 2)
- La linéarité donne l'égalité des espérances de $X$ (formes 2 et 3).

# Monotonicité, variables aléatoires simples

Preuve de monotonicité, $X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$, pour des variables aléatoires simples $X$ et $Y$ :

$$\begin{aligned} X \leq Y &\Rightarrow Y - X \geq 0 \\ &\Rightarrow E[Y - X] \geq 0 \\ &\Rightarrow E[Y] - E[X] \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion immédiate : la définition suivante est cohérente avec la définition de $E[X]$ pour $X \geq 0$ simple.

Pour toute variable aléatoire $X \geq 0$,

$$E[X] \equiv \sup_{Y \leq X,\, Y \text{ simple}} E[Y].$$

# Monotonicité, v.a. non-négatives

- Soit $X$, $Y$ des variables aléatoires non-négatives, $X \leq Y$.
- $E[X] = \sup_{Z \leq X,\, Z \, \text{simple}} E[Z]$
- $E[Y] = \sup_{Z \leq Y,\, Z \, \text{simple}} E[Z]$
- $E[X]$ est le sup d'un ensemble plus petit, alors $E[X] \leq E[Y]$.

# Espérances des variables aléatoires arbitraires

- Soit $X$ une variable aléatoire arbitraire.
- Soit $X^+(\omega) = \max(X(\omega), 0)$, $X^-(\omega) = \max(-X(\omega), 0)$.
- Les deux sont des variables aléatoires non-négatives.
- $X^+ + X^- = X$.
- Soit $v^+ \equiv E[X^+]$, $v^- \equiv E[X^-]$.
- $E[X]$ défini par :

| $E[X^+]$ | $E[X^-]$ | $E[X]$ |
|---|---|---|
| $v^+ < \infty$ | $v^- < \infty$ | $v^+ - v^-$ |
| $v^+ = \infty$ | $v^- < \infty$ | $\infty$ |
| $v^+ < \infty$ | $v^- = \infty$ | $-\infty$ |
| $v^+ = \infty$ | $v^- = \infty$ | pas défini |

- Attention : la valeur d'une v.a. n'est jamais $\infty$ ou $-\infty$. La valeur d'un sup, inf ou lim peut l'être.

# Les espérances et les intégrales impropres

Quelques choses à noter dans la définition, pour $X \geq 0$,

$$E[X] = \sup\{E[Y] \colon\ Y \leq X,\ Y \,\text{simple}\}.$$

- Un seul sup/inf.
- L'importance de $X \geq 0$ et l'unidirectionnalité (cf. $L$ et $U$ pour l'intégration riemannienne)
- Aucune définition spéciale pour les singularités ou pour $\Omega = \mathbb{R}$.
- Pas besoin d'un pansement comme le $\delta$ de Dirac.

Exemples :

1. $X(\omega) = 1/\sqrt{\omega}$, mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
2. $X(\omega) = 1/\omega$, mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
3. $X(\omega) = \omega$, loi gaussienne sur $\mathbb{R}$.
4. $X(\omega) = \omega$, loi Cauchy sur $\mathbb{R}$.
5. $X$ de la Figure 4.2.1.

# Convergence monotone de $X_n$ simple à $X$ non-négative

- Les fonctions $\Psi_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ :
$$\Psi_n(x) = \min(n, 2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor).$$
- Propriétés de $\Psi_n(x)$ :
  - $0 \leq \Psi_n(x) \leq x$, $x \geq 0$.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi_n(x) \nearrow x$.
  - Pour tout $n$, $\Psi_n(\mathbb{R})$ est fini.
- Construction $X_n(\omega) = \Psi_n(X(\omega))$.
- Propriétés de $X_n$ :
  - $X_n$ est simple
  - $X_n \leq X_{n+1} \leq X$
  - $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$.
  - $E[X_n] \leq E[X]$ (définition de $E[X]$)
  - $\lim_{n\to\infty} E[X_n(\omega)] \leq E[X]$
- Pourquoi pas $\Psi_n(x) = \min(n, n^{-1}\lfloor nx \rfloor)$? $\Psi_n(x) = 2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor)$?
- Remarquez la discrétisation de $X(\Omega)$, pas $\Omega$.

# Théorème de convergence monotone

- Supposez que $X_1, X_2, \ldots$ sont des variables aléatoires non-négatives avec $X_n(\omega) \nearrow X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Alors $X$ est une variable aléatoire et $E[X] = \lim_{n\to\infty} E[X_n]$.
- Remarque : les $X_n$ ne sont pas forcément simples.
- Par monotonicité, $E[X_1] \leq E[X_2] \leq \ldots \leq E[X]$.
- Attention : $E[X_n] = \infty$, $E[X] = \infty$ possible.
- Immédiatement, $\lim_{n\to\infty} E[X_n] \leq E[X]$.
- Il reste à prouver que $\lim_{n\to\infty} E[X_n] \geq E[X]$.

# Preuve de $\lim_{n\to\infty} E[X_n] \geq E[X]$

- Soit $Y$ simple, $Y \leq X$ (alors $E[Y] \leq E[X]$). Soit $\epsilon > 0$.
- $Y = \sum_i v_i 1_{A_i}$ où $\{A_i\}$ est une partition de $\Omega$ en événements et $v_i \leq X(\omega)$ pour tout $\omega \in A_i$.
- Pour tout $i$ et $n$, soit $A_{in} \equiv \{\omega \in A_i \colon X_n(\omega) \geq v_i - \epsilon\}$.
- Alors pour tout $i$, $\{A_{in}\} \nearrow A_i$. (monotonicité, convergence)
- Alors $E[X_n] \geq \sum_i (v_i - \epsilon) P(A_{in})$. (à droite : $E[Y_n]$, $Y_n$ simple)
- Par convergence de probabilité :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_i (v_i - \epsilon) P(A_{in}) = \left( \sum_i v_i P(A_i) \right) - \epsilon,$$

- Alors $lim_{n\to\infty} E[X_n] \geq E[Y] - \epsilon$.
- $\epsilon > 0$ est arbitraire alors $\lim_{n\to\infty} E[X_n] \geq E[Y]$.
- $Y$ est arbitraire, alors $\lim_{n\to\infty} E[X_n] \geq E[X]$.

# Remarques

- On peut affaiblir la condition $X_n(\omega) \nearrow X(\omega)$ en

$$P(\{X_n(\omega) \nearrow X(\omega)\}) = 1.$$

- Autrement dit, $X_n \nearrow X$ presque surement.
- Importance de monotonicité, positivité
- Échec de convergence monotone pour l'intégration riemannienne
- Linéarité de $E[\cdot]$ pour variables aléatoires positives : soit $X_n = \Psi_n(X),\ Y_n = \Psi_n(Y),\ a, b \geq 0.$ Alors

$$\begin{aligned} E[aX + bY] &= \lim_n E[aX_n + bY_n] \\ &= \lim_n aE[X_n] + bE[Y_n] = aE[X] + bE[Y]. \end{aligned}$$

# Aperçu des chapitres 5 et 6

- Chapitre 5
  - Inégalités de Markov, Chebychev, Cauchy-Schwarz, Jensen
  - Convergence presque sur, convergence en probabilité
  - Lois de grand nombres
- Chapitre 6
  - Distributions, fonctions de distribution, de densité