ECN 7060, cours 12

William McCausland

2022-11-30

Introduction, estimation par intervalle

- Estimateur par intervalle $[L(X), U(X)]$, estimation par intervalle $[L(x), U(x)]$.
- Les propriétés fréquentistes concernent la probabilité de couverture

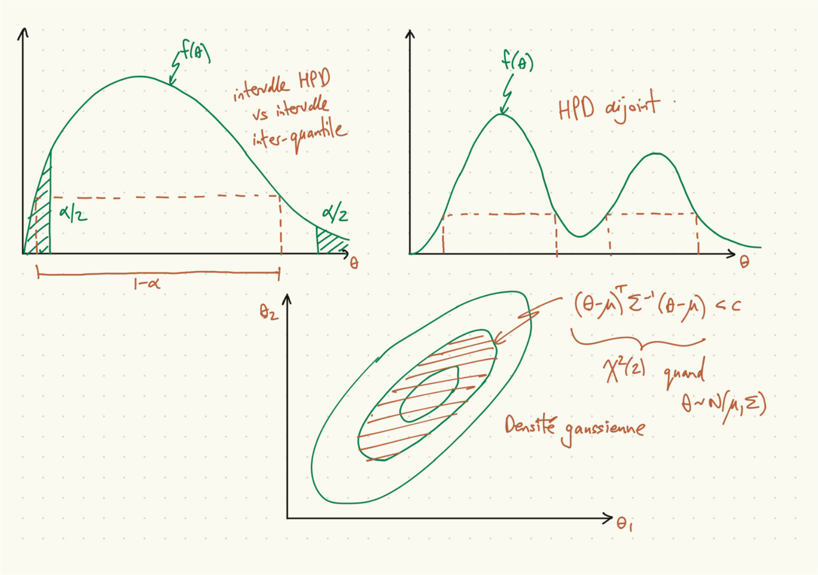
$$P_\theta[L(X) \leq \theta \leq U(X)].$$

  - souvent une fonction de θ, pas toujours (idéalement non)
  - restrictions sur le modèle pour obtenir cette non-dépendance
  - le coefficient de confiance est $\inf_\theta P_\theta(L(X) \leq \theta \leq U(X))$.
  - arbitrage : haute probabilité de couverture v. intervalle court
- Les propriétés bayésiennes concernent la probabilité

$$P[L(x) \leq \theta \leq U(x)|x] \quad \text{ou} \quad P[l \leq \theta \leq u|x]$$

  - Deux façons populaires pour choiser $L(x)$ et $U(x)$:
    - $L(x)$ et $U(x)$ sont les quantiles $\alpha/2$ et $1 - \alpha/2$ de θ, $U(x) - L(x)$ n'est pas forcément minimale
    - Intervalle de haute probabilité *a posteriori* : $U(x) - L(x)$ minimale sous la contrainte $P[L(x) \leq \theta \leq U(x)|x] = 1 - \alpha$.

Régions de haute probabilité et intervalles interquantile



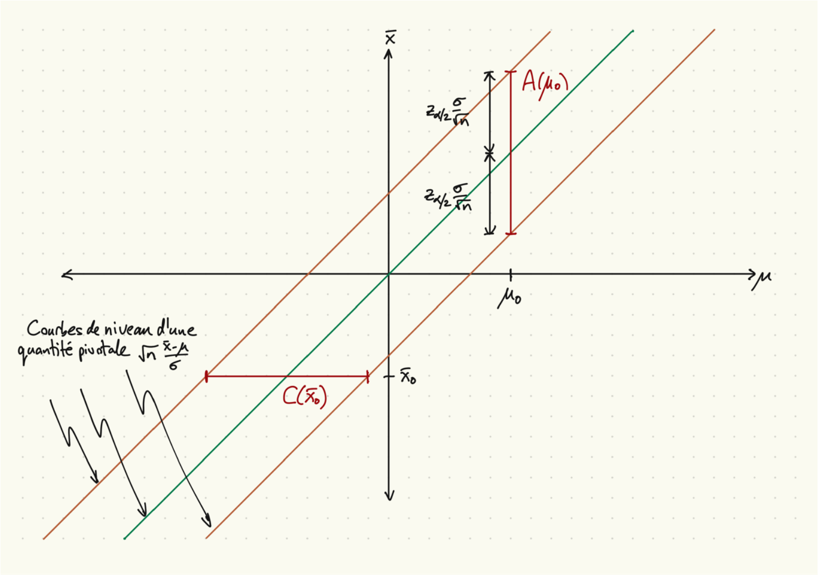
Estimation par ensemble

- Estimateur par ensemble $C(X)$, où $C(X) \subseteq \Theta$.
- Estimation par ensemble $C(x)$.
- Probabilité d'intérêt fréquentiste : $P_\theta(\theta \in C(X))$.
  - θ est fixe
  - la région $C(X)$ est aléatoire
  - analyse *ex ante*
- Probabilité d'intérêt bayésienne : $P(\theta \in C(x)|x)$.
  - x est fixe (l'échantillon observé)
  - l'élément θ est aléatoire (la probabilité est conditionnelle)
  - analyse *ex post*

Inversion d'une statistique test

- Pour chaque θ_0, soit $A(\theta_0)$ la région de non-rejet pour un test de niveau α de l'hypothèse nulle $H_0 : \theta = \theta_0$.
- Alors $A(\theta)$ vérifie $P_\theta[X \notin A(\theta)] \leq \alpha$.
- Définez, pour chaque $x \in \mathcal{X}$, $C(x) = \{\theta : x \in A(\theta)\}$.
- Notez que $x \in A(\theta) \Leftrightarrow \theta \in C(x)$.
- Résultat : $C(X)$ est une région de confiance $(1 - \alpha)$.
- Preuve :
  - Puisque le niveau du test est de α,
    $$P_\theta[X \notin A(\theta)] \leq \alpha.$$
  - Alors
    $$P_\theta[\theta \in C(X)] = P_\theta[X \in A(\theta)] \geq (1 - \alpha).$$
  - Si on remplace la première inégalité par une égalité, la deuxième devient une égalité.

$C(\bar{x})$ et $A(\theta)$ pour un exemple gaussien, σ^2 connu



Exemple gaussien, σ^2 connu

- Supposons que $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{iid}\, N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 connu.
- Encore, $\bar{X} \equiv n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 \equiv (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.
- Statistique LRT pour $H_0 \colon \mu = \mu_0$ contre $H_1 \colon \mu \neq \mu_0$:

$$\lambda(x) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right]}$$

- Puisque $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2$,

$$\lambda(x) = \exp[-n(\bar{x} - \mu_0)^2/(2\sigma^2)].$$

- La loi de $\bar{X}$ est connue : $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
- Pour le test avec $A(\mu_0) = \{x \colon |\bar{x} - \mu_0| \leq z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\}$, la probabilité de rejet quand $\mu = \mu_0$ est de α.
- Conditions équivalentes à $x \in A(\mu_0)$:

$$\begin{aligned} |\bar{x} - \mu_0| \leq z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} &\Leftrightarrow -z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu_0 - \bar{x} \leq z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \\ &\Leftrightarrow \bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu_0 \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \end{aligned}$$

- Alors $P[\bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu_0 \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}] = 1 - \alpha$.

Inversion d'un test, Exemple 9.2.11

- Considérez la construction d'un intervalle pour p dans le modèle $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$.
- Une idée raisonnable est de construire, pour α donné et pour chaque p, la région de non-rejet $A(p) \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ avec le nombre minimal d'éléments,...
- ... puis invertir $A(p)$ pour obtenir $C(X)$.
- Cependant, considerez le résultat quand $n = 3$ et $1 - \alpha = 0.442$.

Inversion d'un test, Exemple 9.2.11 (cont.)

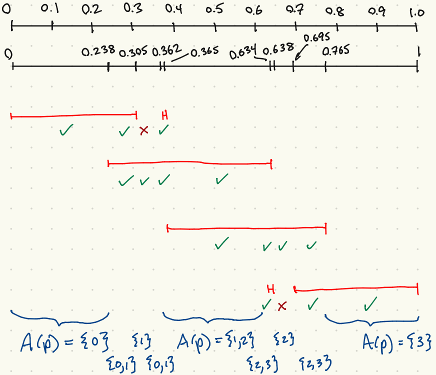
$X \sim Bi(3,p)$ $\quad 1-\alpha = 0.442 \quad$ Ensembles à longeur minimal.

$P[X=0] = (1-p)^3$ $\quad C(0)$

$P[X=1] = 3(1-p)^2 p$ $\quad C(1)$

$P[X=2] = 3(1-p)p^2$ $\quad C(2)$

$P[X=3] = p^3$ $\quad C(3)$



Quantités pivotales

- Une fonction $Q(X, \theta)$ est pivotale si sa loi ne dépend pas de θ.
- Interprétation bayésienne : sa loi ne dépend pas de $f(\theta)$
- Famille $f(x|\mu) = f_0(x - \mu)$: $Q(X, \theta) = \bar{X} - \mu$ est pivotale.
- Preuve :
  - Soit $Z_i \sim \mathrm{iid}\, f_0(z)$. Sa distribution ne dépend pas de μ.
  - Si $X_i \sim \mathrm{iid}\, f(x|\mu) = f_0(x - \mu)$,

$$(X_1, \ldots, X_n) \sim (Z_1 + \mu, \ldots, Z_n + \mu)$$

$$\bar{X} - \mu \sim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Z_i + \mu) - \mu = \bar{Z}$$

  - La loi de $\bar{Z}$ (et de $Q(X, \theta) = \bar{X} - \mu$) ne dépend pas de μ.
- Famille $f(x|\sigma) = \frac{1}{\sigma} f_0(x/\sigma)$: $Q(X, \sigma^2) = \bar{X}/\sigma$ est pivotale.
- Famille $f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma} f_0((x - \mu)/\sigma)$: $Q_1(X, \theta) = (\bar{X} - \mu)/\sigma$, $Q_2(X, \theta) = (\bar{X} - \mu)/S$, $Q_3(X, \theta) = S/\sigma$ sont pivotales.

Utiliser une quantité pivotale pour construire un ensemble de confiance

- Supposez que $Q(X, \theta)$ est une quantité pivotale, $\mathcal{A}$ est un ensemble.
- $C(X) = \{\theta \colon Q(X, \theta) \in \mathcal{A}\}$ est un estimateur par ensemble de θ dont la probabilité $P_\theta(C(X))$ ne dépend pas de θ.
- Stratégie : trouver une quantité pivotale $Q(X, \theta)$ et un ensemble $\mathcal{A}$ avec de bonnes propriétés ($C(X)$ petit, $P_\theta(C(X))$ grand).

Exemples gaussiens I

- Supposons que $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{iid}\, N(\mu, \sigma^2)$.
- Quantités pivotales :
  - $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$,
  - $T_{n-1} = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S \sim t(n-1)$.
  - $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$.
- Cas où σ^2 est connu :

$$1 - \alpha = P_\theta(-z_{\alpha/2} \leq -Z \leq z_{\alpha/2}) = P_\theta(\mu \in C(X)).$$

où $C(X)$ est l'estimateur par ensemble suivant

$$C(X) = \{\mu \colon \bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\}.$$

Exemples gaussiens II

- Cas où σ^2 n'est pas connu, intervalle pour μ :

$$1 - \alpha = P_\theta(-t_{n-1,\alpha/2} \leq -T_{n-1} \leq t_{n-1,\alpha/2}) = P_\theta(C(X)),$$

où

$$C(X) = \{\mu \colon \bar{X} - t_{n-1,\alpha/2} S/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2} S/\sqrt{n}\}.$$

- Cas où σ^2 n'est pas connu, intervalle pour σ^2 :

$$1 - \alpha = P_\theta(\chi_{n-1,1-\alpha/2} \leq (n-1)S^2/\sigma^2 \leq \chi_{n-1,\alpha/2}) = P_\theta(C(X)),$$

où

$$C(X) = \left\{\sigma^2 \colon \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1,\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1,1-\alpha/2}}\right\}.$$

Un aparté

- Soit T une variable aléatoire avec fonction de répartion F inversible.
- $F(t)$ est une fonction, $F(T)$ est une variable aléatoire avec une loi sur $[0,1]$.
- Proposition : $F(T) \sim U(0,1)$.
- Preuve :
  - Soit G la fonction de répartition de $F(T)$.
  - Pour $u \in [0,1]$,

    $$G(u) = P[F(T) \leq u] = P[T \leq F^{-1}(u)] = F[F^{-1}(u)] = u.$$

  - Alors $F(T) \sim U(0,1)$.

Pivot de la fonction de répartition

- Soit T une statistique avec fonction de répartition $F_T(t|\theta)$.
- Si F_T est toujours inversible (c.-à-d. pour tous θ), $F_T(T|\theta) \sim U(0,1)$, une loi qui ne dépend pas de θ.
- Supposons que T est stochastiquement croissante en θ.
- C'est à dire que $F_T(t|\theta)$ est décroissante en θ.
- Pour t donné, soit $\theta_L(t)$ et $\theta_U(t)$ les solutions de

$$F_T(t|\theta_U(t)) = \alpha_1, \quad F_T(t|\theta_L(t)) = 1 - \alpha_2.$$

- Pour tous t, θ,

$$\theta > \theta_U(t) \Leftrightarrow F_T(t,\theta) < \alpha_1$$

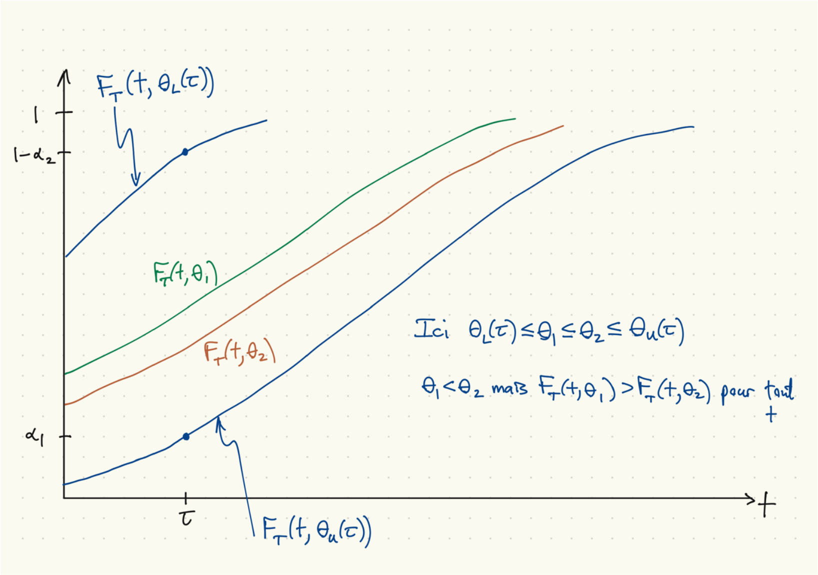
$$\theta < \theta_L(t) \Leftrightarrow F_T(t,\theta) > 1 - \alpha_2$$

- Considérer l'intervalle de confiance $[\theta_L(T), \theta_U(T)]$:

$$\{t\colon \theta_L(t) \leq \theta \leq \theta_U(t)\} = \{t\colon \alpha_1 \leq F_T(t|\theta) \leq 1 - \alpha_2\},$$

$$P_\theta[\theta_L(T) \leq \theta \leq \theta_U(T)] = P_\theta[\alpha_1 \leq F_T(T|\theta) \leq 1-\alpha_2] = 1-\alpha_1-\alpha_2.$$

Graphique, pivot de la fonction de répartition



Exemple gaussien (Question 5(e) de l'examen final 2021)

- Soit $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{iid}\, N(\mu, 1)$.
- $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Soit $F_T(t; \mu)$ la fonction de répartition de T pour μ donnée.
- Question de l'examen 2021 : montrez que la quantité $F_T(T; \mu)$ est pivotale et utilisez-la pour construire un intervalle de confiance pour μ avec probabilité de couverture $1 - \alpha$.
- Réponse (première partie)
  - Remarquez que la fonction de répartition de T est inversible.
  - Soit G la fonction de répartition de $F_T(T; \mu)$.
  - Pour $u \in [0, 1]$,

$$
\begin{aligned}
G(u) &= P(F_T(T; \mu) \leq u) \\
&= P(T \leq F_T^{-1}(u; \mu)) \\
&= F_T(F_T^{-1}(u; \mu); \mu) = u.
\end{aligned}
$$

Exemple gaussien, cont.

- Réponse (deuxième partie) (soit $\alpha_1 = 0.025$, $\alpha_2 = 0.975$)
  - Remarquez que $F_T(t;\mu) = P(T \leq t;\mu) = \Phi(\sqrt{n}(t-\mu))$, où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi $N(0,1)$.
  - La solution de $\Phi(\sqrt{n}(t-\mu_U(t))) = \alpha_1 = 0.025$ est celle de
  $$\sqrt{n}(t-\mu_U(t)) = \Phi^{-1}(\alpha_1) = -z_{0.025}.$$
  - Alors la solution est $\mu_U(t) = t + z_{0.025}/\sqrt{n}$.
  - La solution de $\Phi(\sqrt{n}(t-\mu_L(t))) = \alpha_2 = 0.975$ est celle de
  $$\sqrt{n}(t-\mu_L(t)) = \Phi^{-1}(\alpha_2) = z_{0.025}.$$
  - Alors la solution est $\mu_L(t) = t - z_{0.025}/\sqrt{n}$.
  - L'intervalle de confiance pour α_1, α_2 données est
  $$[T-\Phi^{-1}(\alpha_2)/\sqrt{n},\, T-\Phi^{-1}(\alpha_1)/\sqrt{n}] = [T-z_{0.025}/\sqrt{n},\, T+z_{0.025}/\sqrt{n}].$$