ECN 7060, Cours 7

William McCausland

2019-10-16

La fonction caractéristique

- Comme F, une autre représentation de la loi d'une v.a. qui existe et qui est unique.
- Applications :
  - Calcul des moments : moins convenable que la fonction génératrice des moments, mais elle existe toujours
  - L'opération de convolution versus l'opération de multiplication.
  - Théorème central limite
  - Inférence quand les moments n'existent pas.

Propriétés de la fonction caractéristique

1. $\phi_X(0) = E[e^0] = 1$, peut importe X.
2. $|\phi_X(t)| \leq E[|e^{itX}|] = 1$.
3. Si X et Y sont indépendants,
   $\phi_{X+Y}(t) = E[e^{it(X+Y)}] = E[e^{itX}e^{itY}] = E[e^{itX}]E[e^{itY}]$.
4. $\phi(t) = E[\cos tX] + iE[\sin tX]$, par linéarité de l'espérance.
5. Pour X réelle,
   a. $\Re(\phi(t)) = E[\cos tX]$ est paire.
   b. $\Im(\phi(t)) = E[\sin tX]$ est impaire.
6. Pour X symétrique ($F(-x) = 1 - F(x)$ au points de continuité), ϕ est réelle.

Fonction caractéristique d'une loi $U(a, b)$

$$\phi(t) = E[e^{itX}] = E[\cos tX + i \sin tX] = \frac{1}{b-a}\int_a^b \cos tx + i \sin tx \, dx$$

$$\phi(t) = \frac{1}{t(b-a)}\left[\sin tx - i \cos tx\right]_a^b = \frac{1}{it(b-a)}\left[\cos tx + i \sin tx\right]_a^b$$

$$\phi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

- Cas spécial $a = -\theta, \; b = \theta$:

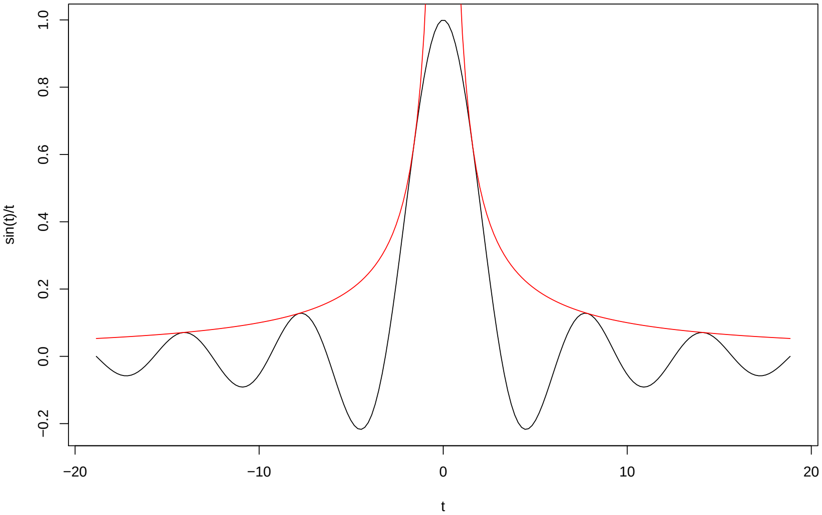
$$\phi(t) = \frac{\sin \theta t}{\theta t}.$$

- Cas spécial, $a = -1, \; b = 1$:

$$\phi(t) = \frac{\sin t}{t} \equiv \operatorname{sinc}(t).$$

La fonction sinc

```
t = seq(-6*pi, 6*pi, length.out = 200)
plot(t, sin(t)/t, type='l')
lines(t, 1/abs(t), col='red')
```



Cas discret

1. $X = x$
$$\phi_X(t) = E[e^{itx}] = e^{itx}.$$
2. $X \sim \mathrm{Bern}(p)$
$$\phi_X(t) = (1-p) + pe^{it}.$$
3. Bernoulli avec valeurs arbitraires
$$X = \begin{cases} x_0 & \text{avec probabilité}\,(1-p), \\ x_1 & \text{avec probabilité}\,p. \end{cases}$$
$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = (1-p)e^{itx_0} + pe^{itx_1}.$$
4. Cas spécial $p = 1/2$, $x_0 = -\theta$, $x_1 = \theta$
$$\phi_X(t) = (e^{-i\theta t} + e^{i\theta t})/2 = \cos\theta t.$$
5. $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$
$$\phi_X(t) = \exp[\lambda(e^{it} - 1)].$$

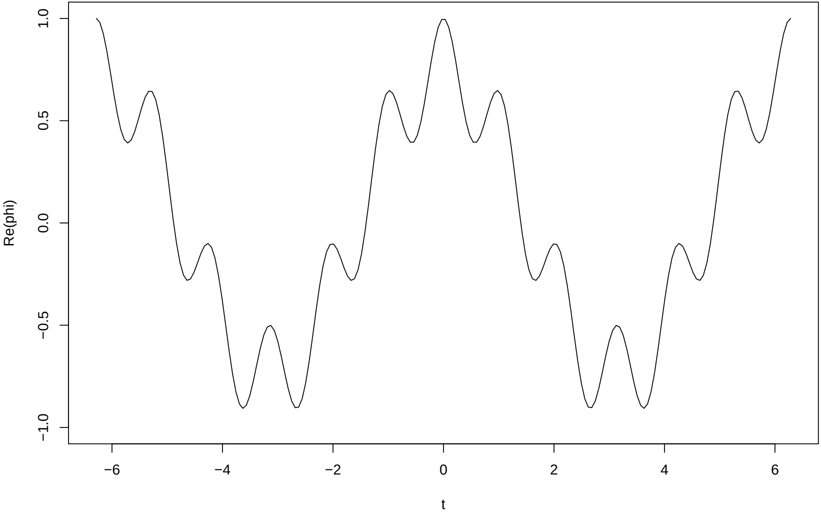
Illustration, cas Bernoulli avec valeurs x_0 et x_1

```
t = seq(-2*pi, 2*pi, length.out = 200)
x0 = 1; x1 = 6; p = 0.25
phi = (1-p)*exp(complex(imaginary=t*x0))
phi = phi + p*exp(complex(imaginary=t*x1))

cercle = exp(complex(imaginary=t))
```

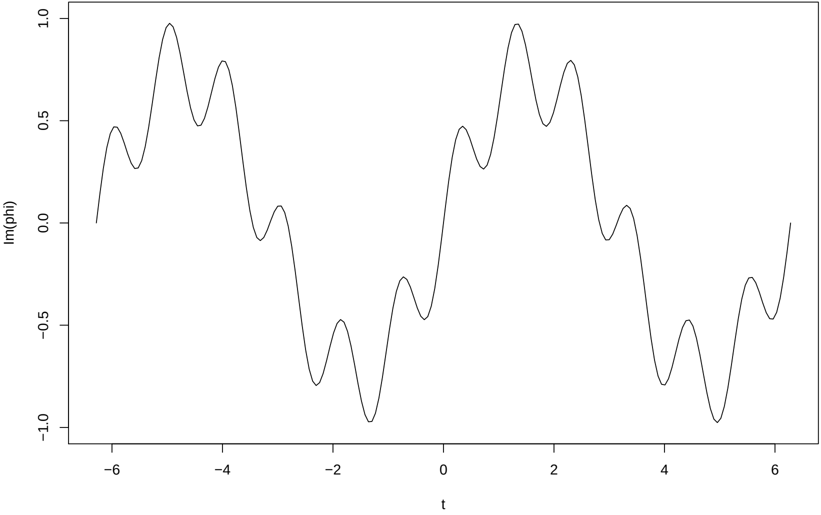
Partie réelle

```
plot(t, Re(phi), type='l', ylim=c(-1,1))
```



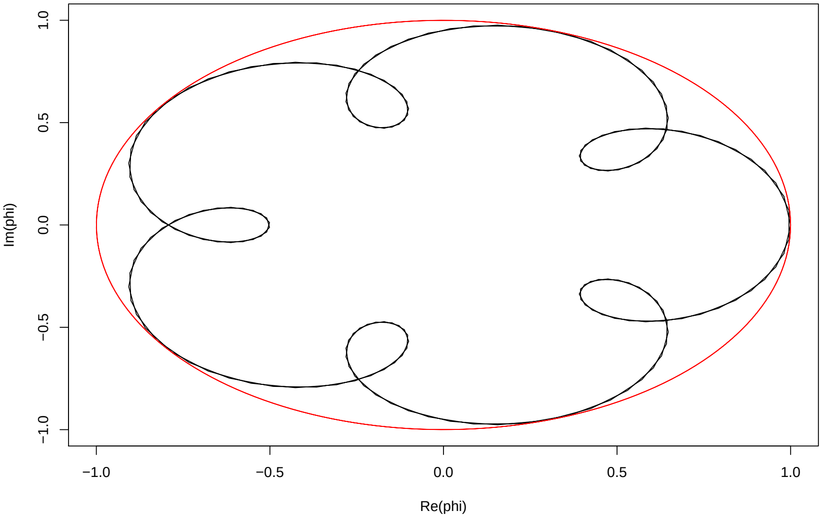
Partie imaginaire

```
plot(t, Im(phi), type='l', ylim=c(-1,1))
```



Trajet dans le cercle unitaire

```
plot(Re(phi), Im(phi), type='l', xlim=c(-1,1), ylim=c(-1,1)
lines(Re(cercle), Im(cercle), col='red')
```

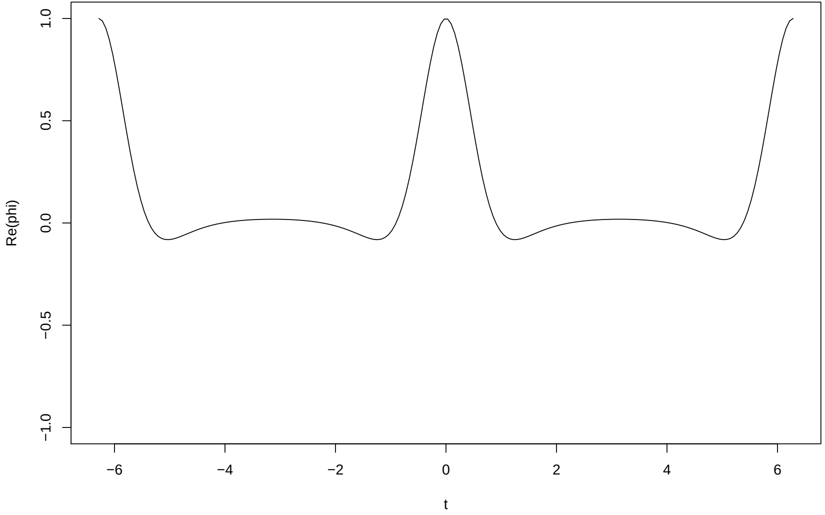


Illustration, cas Poisson

```
t = seq(-2*pi, 2*pi, length.out = 200)
lambda = 2
phi = exp(lambda*(exp(complex(imaginary = t))-1))
```

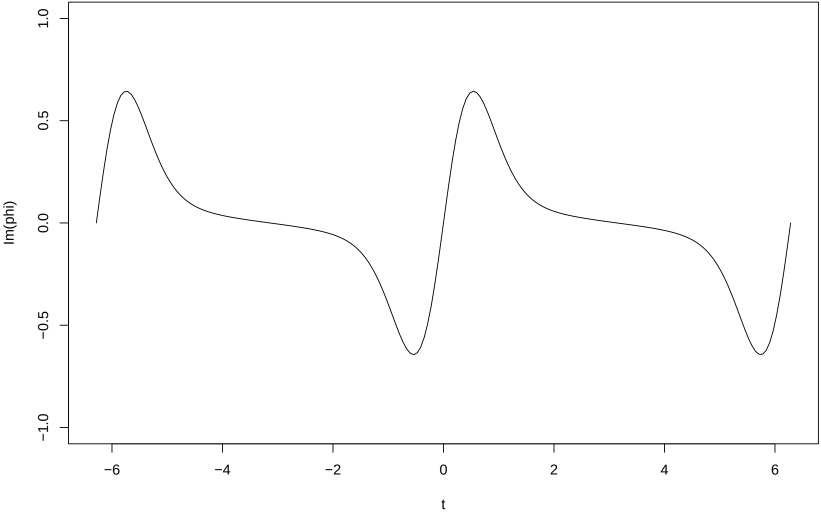
Partie réelle

```
plot(t, Re(phi), type='l', ylim=c(-1,1))
```



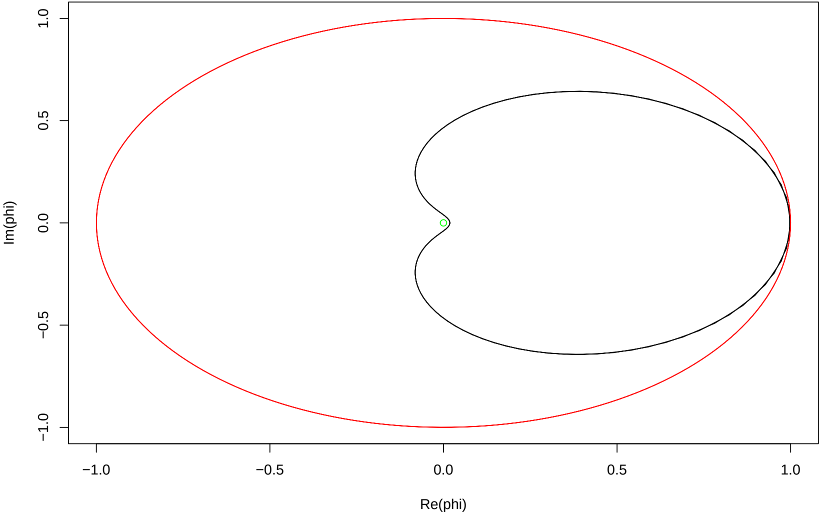
Partie imaginaire

```
plot(t, Im(phi), type='l', ylim=c(-1,1))
```



Trajet dans le cercle unitaire

```
plot(Re(phi), Im(phi), type='l', xlim=c(-1,1), ylim=c(-1,1
lines(Re(cercle), Im(cercle), col='red')
points(0, 0, col='green')
```



Fonction caractéristique d'une loi $N(0,1)$

- Puisque $\sin(tx)$ est impair, $e^{-x^2/2}$ est pair,

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \cdot e^{-x^2/2}\, dx$$

$$\phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\sin tx \cdot xe^{-x^2/2}\, dx$$

- Intégration par parties, $u = -\sin tx$, $dv = xe^{-x^2/2}\, dx$, $du = -t\cos tx$, $v = -e^{-x^2/2}$, donne

$$\phi'(t) = [uv]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t\cos tx \cdot e^{-x^2/2}\, dx = -t\phi(t).$$

- La solution de l'équation différentielle $\log\phi(0) = 0$, $\frac{d\log\phi(t)}{dt} = -t$ est $\log\phi(t) = \int_0^t -s\, ds = -t^2/2$.
- Alors $\phi(t) = e^{-t^2/2}$.

Fonction caractéristique d'une loi $N(\mu, \sigma^2)$

Si $X \sim N(0,1)$ et $Y = \mu + \sigma X$ alors $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ et

$$\phi_Y(t) = E[e^{i(\mu+\sigma X)t}] = e^{i\mu t} E[e^{i(t\sigma)X}] = e^{i\mu t}\phi_X(\sigma t) = e^{i\mu t} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

La densité de Y est de la même forme fonctionnelle :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right].$$

Continuité de la fonction caractéristique

$$\begin{aligned}|\phi_x(t+h)-\phi_x(t)| &= \left|\int (e^{i(t+h)x}-e^{itx})\mu(dx)\right| \\ &\leq \int \left|e^{i(t+h)x}-e^{itx}\right|\mu(dx).\end{aligned}$$

- Deux bornes qui ne dépend pas de t

$$\left|e^{i(t+h)x}-e^{itx}\right| \leq h|x|, \qquad \left|e^{i(t+h)x}-e^{itx}\right| \leq 2.$$

- Selon la deuxième, (convergence dominée)

$$\lim_{h\downarrow 0} E\left[\left|e^{i(t+h)X}-e^{itX}\right|\right] = E\left[\lim_{h\downarrow 0}\left|e^{i(t+h)X}-e^{itX}\right|\right]$$

- Selon la première,

$$E\left[\lim_{h\downarrow 0}\left|e^{i(t+h)X}-e^{itX}\right|\right] = E[0] = 0.$$

Dérivée de la fonction caractéristique

- Soit X une variables aléatoire, $\phi(t)$ sa fonction caractéristique.
- Si $E[|X|^k] < \infty$, alors pour $0 \leq j \leq k$, $\phi^{(j)}(t) = E[(iX)^j e^{itX}]$.
- Preuve par induction :
  - $E[(iX)^0 e^{itX}] = E[e^{itX}] = \phi(t) = \phi^{(0)}(t)$, alors vrai pour $j = 0$.
  - Supposez que $\phi^{(j-1)}(t) = E[(iX)^{j-1} e^{itX}]$.
  - $|(iX)^j e^{itX}| = |i|^j |X|^j |e^{itX}| = |X|^j$
  - $E[|X|^k] < \infty \Rightarrow E[|X|^j] < \infty$
  - $\phi^{(j)}(t) = E\left[\frac{d}{dt}(iX)^{j-1} e^{itX}\right] = E[(iX)^j e^{itX}]$
- Génération des moments :

$$\phi^{(j)}(0) = i^j E[X^j]$$

- Attention : $\phi_X(t) = \exp(-\gamma|t|)$ pour X Cauchy symétrique avec paramètre d'échelle γ, n'est pas différentiable à $t = 0$.

Propriétés de la fonction $(\sin\theta t)/t = \theta\mathrm{sinc}(\theta t)$

1. Pour $\theta = 0$, $(\sin\theta t)/t \equiv 0$.
2. Pour $\theta \neq 0$, $t = k\pi/\theta$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$,
$$\frac{\sin\theta t}{t} = 0.$$
3. Pour $\theta \neq 0$,
$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin\theta t}{t} = \frac{\lim_{t\to 0}\theta\cos\theta t}{\lim_{t\to 0} 1} = \theta$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin\theta t}{t} = 0.$$
4. Pour $\theta \neq 0$, la fonction est paire :
$$\frac{\sin\theta(-t)}{-t} = \frac{\sin\theta t}{t}$$
5. Lemme 11.1.3 du livre,
$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\sin\theta t}{t}\,dt = \begin{cases}\pi & \theta > 0\\ 0 & \theta = 0\\ -\pi & \theta < 0\end{cases}$$

Théorème d'inversion I

- Soit μ une mesure borélienne, $\phi(t)$ sa fonction caractéristique. Alors si $a < b$ et $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$,

$$\mu([a,b]) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t)\, dt$$

- Puisque

$$\left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right| = \left| \int_a^b e^{itr}\, dr \right| < \infty$$

  l'intégral entre $-T$ et T est fini.
- Par Fubini,

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mu(dx)\, dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it}\, dt\, \mu(dx).$$

Théorème d'inversion II

La partie imaginaire de l'intégrand est impair, l'intégral est réel,

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t(x-a)}{t}-\frac{\sin t(x-b)}{t}\,dt\,\mu($$

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sign}(x-a)-\operatorname{sign}(x-b)\,\mu(dx).$$

- La valeur de l'intégral est

$$\frac{1}{2}(\mu(\{a\})+\mu(\{b\})+\mu((a,b)).$$

La dualité en cas de $\phi_X(t)$ intégrable

Théorème d'inversion spécial quand $\phi_X(t)$ est intégrable :

X a une densité

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi_X(t) dt.$$

Unicité de la fonction caractéristique

- Théorème d'unicité $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) \Leftrightarrow \phi_X(t) = \phi_Y(t)$
- $\Rightarrow$ de la définition de la fonction caractéristique en termes de μ
- $\Leftarrow$ du théorème d'inversion. Probabilités des intervalles par continuité de probabilité, autres événements par unicité des extensions.

Théorème de continuité

- Soit $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ des mesures boréliennes, $\phi, \phi_1, \phi_2, \ldots,$ leurs fonctions caractéristiques. Alors μ_n converge en loi à μ ssi $\phi_n(t) \to \phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- Par la définition de convergence en loi et la continuité des fonctions $\cos xt$ et $\sin xt$ en x pour t donné, si μ_n converge en loi à μ, $\phi_n(t) \to \phi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
- L'autre direction est plus difficile.

Théorème centrale limite I

- Supposez que $X_1, X_2, \ldots,$ sont iid, avec moyenne 0, variance 1.
- Soit $Y_n = \sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. La fonction caractéristique de Y_n est

$$\phi_n(t) = \phi_X^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[1 + \frac{it}{\sqrt{n}}E[X_1] + \frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^2 E[X_1^2] + o(n^{-1})\right]^n$$

- Avec $E[X_1] = 0$, $E[X_1^2] = 1$,

$$\phi_n(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right)^n.$$

$$\log\phi_n(t) = n\log\left(1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right) = n\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right)$$

$$\log\phi_n(t) \to -\frac{t^2}{2}$$

$$\phi_n(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Théorème centrale limite II

- Si Y est une variable aléatoire $N(0,1)$, sa fonction caractéristique est $\phi(t) = e^{-t^2/2}$.
- Puisque $\phi_n(t) \to \phi(t)$, $\mathcal{L}(Y_n) \Rightarrow \mathcal{L}(Y)$.