

# Actions cachées, aléa morale, problèmes principal-agent

ECN 6013, automne 2019

William McCausland

2019-12-04

# Actions cachées, aléa morale, problèmes principal-agent

- ▶ Un agent économique a un contrôle partiel sur un résultat (accident ou non, succès ou échec d'un projet).
- ▶ Son action (prudence, effort) n'est pas observée (par un assureur, par un employeur).
- ▶ Les actions qui augmentent la probabilité d'un bon résultat sont coûteuses pour l'agent.
- ▶ L'agent est averse pour le risque.
- ▶ Une réduction de risque atténue les incitations pour choisir les 'bonnes' actions.
- ▶ Partager le risque avec d'autres personnes entraîne une externalité.
- ▶ Tension entre la réduction de risque et les bonnes incitations.

# Assurance avec action cachée

## Exemples d'aléa morale en assurance

- ▶ Comportement au volant et assurance automobile
- ▶ Protection du domicile et assurance maison
- ▶ (Absence d') assurance pour perte de capital dans la maison.
- ▶ Assurance incendie et incendie criminel
- ▶ Assurance vie, meurtre et suicide
- ▶ Assurance médicale et choix de traitement
- ▶ Comportement des banques sous l'assurance implicite des gouvernements

Les actions prises ne sont pas efficaces, à cause d'une différence entre les coûts ou bénéfices privés et les coûts ou bénéfices sociaux.

# Les problèmes principal-agent

- ▶ Étudiés en droit, économie, sciences politiques.
- ▶ Interaction entre un (des) principal et un (des) agent.
- ▶ Le principal veut inciter l'agent à faire quelque chose.
- ▶ L'agent effectue une action cachée.
- ▶ Souvent le principal peut plus facilement tolérer du risque.
- ▶ Exemples : (principal, agent)
  - ▶ actionnaires, gérant
  - ▶ employeur, employé
  - ▶ client, mécanicien
  - ▶ propriétaires des terrains, agriculteurs
  - ▶ électorat, politiciens
  - ▶ politiciens des pays riches, bureaucrates de l'aide étrangère
  - ▶ système légal, conducteurs, firmes, etc. (degré de prudence)

## Aparté: la fonction d'utilité CARA

- La fonction d'utilité CARA (Constant Absolute Risk Aversion)

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x}) & \lambda > 0, \\ x & \lambda = 0. \end{cases}$$

- Elle est monotone et concave:

$$v'(x) = \frac{1}{\lambda}(\lambda e^{-\lambda x}) > 0 \quad v''(x) = -\lambda e^{-\lambda x} < 0$$

- L'aversion absolue pour le risque (indice Arrow-Pratt) est de

$$-\frac{v''(x)}{v'(x)} = \lambda.$$

- Plus grand  $\lambda$ , plus averse;  $\lambda = 0$  est la neutralité.

# L'espérance d'utilité CARA pour un risque Gaussien

- ▶ Si  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $E[e^x] = e^{\mu + \sigma^2/2}$  et alors

$$E[e^{-\lambda x}] = e^{-\lambda\mu + \lambda^2\sigma^2/2}.$$

- ▶ L'équivalent certain d'un risque Gaussien  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ , selon l'utilité CARA:

$$\begin{aligned} E[v(x)] &= E\left[\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x})\right] = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(\mu - \lambda\sigma^2/2)}) \\ &= v(\mu - \lambda\sigma^2/2). \end{aligned}$$

- ▶ La prime de risque ici est de  $\lambda\sigma^2/2$ ; on accepte  $\lambda\sigma^2/2$  moins en espérance pour avoir un montant certain.

# Un premier modèle principal-agent (manuel IEA)

L'agent:

- ▶ choisit d'accepter ou rejeter un contrat du principal,
- ▶ le cas échéant, choisit un niveau  $e \geq 0$  d'effort,
- ▶ a une utilité de réservation  $u_0$ ,
- ▶ obtient l'utilité  $E[v(w)] - e^2/(2a)$ , où
  - ▶  $w$  est le paiement du principal,
  - ▶  $v(w)$  est CARA avec aversion  $\lambda$  pour le risque,
  - ▶  $a > 0$  est l'habileté de l'agent,  $\{observée\}$

Un projet du principal:

- ▶ La valeur du projet est de  $x \sim N(e, \sigma^2)$ .

Le principal: (neutre pour le risque)

- ▶ offre un contrat à l'agent qui paie  $sx + y$  à l'agent,
- ▶ maximise la valeur nette (après le paiement) espérée du projet.

## Le problème de l'agent

- Son utilité s'il accepte le contrat est de

$$u = E[v(sx + y)] - e^2/(2a) = se + y - s^2\lambda\sigma^2 - e^2/(2a).$$

- L'effort optimal :

$$\frac{\partial u}{\partial e} = s - e/a, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = -1/a < 0, \quad e^* = sa.$$

- Son utilité indirecte (pour  $e = e^*$ ) :

$$\begin{aligned} u^*(s, y) &= s^2a + y - s^2\lambda\sigma^2 - s^2a^2/(2a) \\ &= s^2a/2 + y - s^2\lambda\sigma^2. \end{aligned}$$

- Il accepte le contrat  $(s, y)$  si  $u^*(s, y) > u_0$ , ou si

$$y + s^2a/2 - s^2\lambda\sigma^2 \geq u_0.$$



## Le problème du principal

- La condition pour accepter le contrat devient la contrainte de participation pour le principal

$$y + s^2 a / 2 - s^2 \lambda \sigma^2 \geq u_0.$$

- Cette condition est saturée, alors  $y = u_0 - s^2 a / 2 + s^2 \lambda \sigma^2$ .
- La valeur nette du projet est de

$$\begin{aligned}\pi &= E[x - sx - y] = (1 - s)sa - (u_0 - s^2 a / 2 + s^2 \lambda \sigma^2) \\ &= sa - s^2 a / 2 - u_0 - s^2 \lambda \sigma^2.\end{aligned}$$

- La part optimale:

$$\frac{\partial \pi}{\partial s} = a - sa - 2s\lambda\sigma^2, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial s^2} = -a - 2\lambda\sigma^2 < 0,$$

$$s^* = \frac{a}{a + 2\lambda\sigma^2}.$$

# Notes sur le problème principal-agent

- ▶ Le principal veut donner les bonnes incitations pour l'effort, mais doit compenser l'agent pour assumer du risque.
- ▶ L'effort efficace égalise le gain marginal (1) et le coût marginal ( $e/a$ ) à  $e = a$ .
- ▶ Si le principal observe l'effort,  $e = a$  est optimal (et efficace)
- ▶ Si l'agent est neutre pour le risque ( $\lambda = 0$ ),  $s = 1$  est optimal pour le principal et puis  $e = a$  est le choix de l'agent.
- ▶ Si  $\lambda > 0$ , le principal choisit  $s < 1$  et l'agent  $e < a$ .
- ▶ Interpretations de  $s$  :
  - ▶  $s = 1$ : vente du projet à l'agent pour  $-y$ .
  - ▶  $s = 0$ : relation employeur/employée avec salaire versé,
  - ▶  $0 < s < 1$ : commission de vente, métayage, franchisage

# Un modèle principal-agent avec actions discrètes

L'agent :

- ▶ choisit d'accepter ou de rejeter un contrat du principal,
- ▶ le cas échéant, choisit un niveau  $e \in \{0, 1\}$  d'effort,
- ▶ a une utilité de réservation  $u_0$ ,
- ▶ obtient l'utilité  $E_e[u(s)] - c_e$  sous le contrat s'il fait l'effort  $e$ , avec  $c_1 > c_0 = 0$ ,  $u$  concave.
- ▶ maximise son utilité.

Un projet du principal :

- ▶ réussit avec probabilité  $\pi_e$ , selon l'effort  $e$  de l'agent, avec  $\pi_1 > \pi_0$ ,
- ▶ vaut 1 au cas de succès, 0 sinon.

Le principal:

- ▶ est neutre pour le risque,
- ▶ choisit un contrat  $(s_0, s_1)$  qui paie  $s_1$  en cas de succès,  $s_0$  sinon
- ▶ maximise la valeur espérée du projet moins le paiement espéré à l'agent (neutralité pour le risque)

## Le cas où l'effort est observé

Dans ce cas, le principal peut acheter la participation à bas effort au coût  $s_0$  qui vérifie

$$u(s_0) = u_0, \quad s_0 = u^{-1}(u_0),$$

et la participation à haut effort au coût  $s_1$  qui vérifie

$$u(s_1) - c_1 = u_0, \quad s_1 = u^{-1}(u_0 + c_1).$$

Notes:

- ▶ Le profit dans le premier cas est de  $\pi_0 - u^{-1}(u_0)$ .
- ▶ Le profit dans le deuxième cas est de  $\pi_1 - u^{-1}(u_0 + c_1)$ .
- ▶ Le principal offre le contrat le plus payant (pour lui).
- ▶ Le principal assume tout le risque; l'agent est assuré contre le risque.
- ▶ Le principal choisit le contrat (ou  $s_0$  pour  $e = 0$  ou  $s_1$  pour  $e = 1$ ) qui maximise son profit ; l'action de l'agent est efficace.

## Le cas où l'effort n'est pas observé

La stratégie :

1. trouver le contrat qui incite  $e = 0$  et qui maximise le profit parmi tous les contrats qui incite  $e = 0$ , (attention: une contrainte de compatibilité des incitations pour éviter  $e = 1$ )
2. trouver le contrat qui incite  $e = 1$  et qui maximise le profit parmi tous les contrats qui incite  $e = 1$ , (attention: une contrainte de compatibilité des incitations pour éviter  $e = 0$ )
3. choisit le contrat le plus payant entre les deux.

Le premier est facile :

- ▶ offrir à l'agent  $s_0 = u^{-1}(u_0)$  peut importe le résultat,
- ▶ on obtient le même résultat qui était optimal pour un problème moins contraignant,
- ▶ ce contrat doit être optimal parmi les contrats qui incitent  $s_0$ .

# Comment inciter l'effort $e = 1$

- ▶ Prenons  $u(s) = s^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  (concave)
- ▶ La contrainte de participation:

$$\pi_1 s_1^\alpha + (1 - \pi_1) s_0^\alpha - c_1 \geq u_0. \quad (1)$$

- ▶ La contrainte de compatibilité des incitations:

$$\pi_1 s_1^\alpha + (1 - \pi_1) s_0^\alpha - c_1 \geq \pi_0 s_1^\alpha + (1 - \pi_0) s_0^\alpha,$$

ou

$$s_1^\alpha - s_0^\alpha \geq c_1 / (\pi_1 - \pi_0). \quad (2)$$

- ▶ Le problème du principal est

$$\max_{s_0, s_1} \pi_1(1 - s_1) + (1 - \pi_1)(-s_0) \quad \text{s.c.} \quad (1), (2)$$

## La contrainte de participation est saturée

- ▶ Mettons que non: on a une solution  $(s_0, s_1)$  qui vérifie la contrainte de compatibilité des incitations et

$$\pi_1 s_1^\alpha + (1 - \pi_1) s_0^\alpha - c_1 = u' > u_0.$$

- ▶ Remplacer  $s_1^\alpha$  par  $s_1^\alpha - (u' - u_0)$ ,  $s_0^\alpha$  par  $s_0^\alpha - (u' - u_0)$ , la contrainte de participation tient toujours.
- ▶ La contrainte de compatibilité des incitations tient toujours elle aussi.
- ▶ Le profit du principal est plus élevé.
- ▶ Contradiction.

## La contrainte de compatibilité des incitations est saturée

- ▶ Mettons que non: la solution résout le problème avec fonction de Lagrange

$$L(s_0, s_1, \lambda) = \pi_1(1 - s_1) + (1 - \pi_1)(-s_0) \\ + \lambda(\pi_1 s_1^\alpha + (1 - \pi_1)s_0^\alpha - c_1 - u_0)$$

- ▶  $L(s_0, s_1, \lambda)$  est concave, un point stationnaire vérifie

$$\frac{\partial L}{\partial s_0} = -(1 - \pi_1) + \lambda(1 - \pi_1)\alpha s_0^{\alpha-1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = -\pi_1 + \lambda\pi_1\alpha s_1^{\alpha-1} = 0.$$

- ▶ On a  $\lambda = s_0^{1-\alpha}/\alpha = s_1^{1-\alpha}/\alpha$ , alors  $s_0 = s_1$ .
- ▶ Intuition : s'il n'avait pas besoin d'inciter  $e = 1$ , il assurerait l'agent complètement.
- ▶  $s_0 = s_1$  n'est pas cohérent avec la contrainte de compatibilité des incitations : contradiction.



## La solution au problème d'inciter l'effort haut

- ▶ Les deux contraintes sont saturées, on obtient  $s_0^\alpha$  et  $s_1^\alpha$  comme la solution deux équations linéaires (les deux contraintes).
- ▶ On compare le profit optimal ici avec le profit optimal associé avec  $e = 0$ .
- ▶ La solution globale est celle qui donne le profit maximal.
- ▶ La solution dépend des paramètres  $\alpha$ ,  $\pi_0$ ,  $\pi_1$ ,  $u_0$ ,  $c_1$ .