

ECN 7060, Cours 9

2020-12-08

Un paradoxe I

- Modèle : $X_i \sim \text{iid } U(\theta, \theta + 1)$
- Vraisemblance:

$$f(x|\theta) = \prod_{i=1}^n 1_{[\theta, \theta+1]}(x_i) = \prod_{i=1}^n 1_{[x_i-1, x_i]}(\theta) = 1_{[x_{(n)}-1, x_{(1)}]}(\theta),$$

où $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ sont les statistiques d'ordre.

- Par le théorème de factorisation, $T(x) = (x_{(1)}, x_{(n)})$ est exhaustive pour θ .
- Vérification de minimalité par ratio :

$$\frac{f(x|\theta)}{f(y|\theta)} = \frac{1_{[x_{(n)}-1, x_{(1)}]}(\theta)}{1_{[y_{(n)}-1, y_{(1)}]}(\theta)}$$

ne dépend pas de θ seulement si $x_{(1)} = y_{(1)}$ et $x_{(n)} = y_{(n)}$.

Un paradoxe II

- ▶ Une autre statistique exhaustive minimale est $T'(x) = (x_{(1)} + x_{(n)}, x_{(n)} - x_{(1)})$.
- ▶ Pourquoi? $T(x)$ et $T'(x)$ sont chacun une fonction de l'autre :

$$\begin{bmatrix} x_{(1)} + x_{(n)} \\ x_{(n)} - x_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(1)} \\ x_{(n)} \end{bmatrix}.$$

- ▶ Le paradoxe : $x_{(1)} + x_{(n)}$ n'est pas exhaustive seule et $x_{(n)} - x_{(1)}$ est libre—sa distribution ne dépend pas de θ .
- ▶ Le concept de statistique complète est utile parce qu'une statistique complète et exhaustive est indépendante de n'importe quelle statistique libre.

Modèle binomial

- Modèle, $X_i \sim \text{iid Bn}(\theta)$, $\theta \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}f(x_i|\theta) &= \begin{cases} \theta & x_i = 1, \\ 1 - \theta & x_i = 0. \end{cases} \\ &= \theta^{x_i}(1 - \theta)^{1-x_i}.\end{aligned}$$

- Avec n observations, $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$f(x|\theta) = \theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0}$$

où n_1 est le nombre de fois que $x_i = 1$, $n_0 = n - n_1$ est le nombre de fois que $x_i = 0$.

Une statistique exhaustive

- ▶ Proposition : $T(x) = n_1$ est une statistique exhaustive.
- ▶ Vérification par ratio :

- ▶ $n_1 \sim \text{Bi}(n, \theta),$

$$q(T(x)|\theta) = \binom{n}{n_1} \theta^{n_1} (1 - \theta)^{n - n_1}$$

- ▶ $p(x|\theta) = \theta^{n_1} (1 - \theta)^{n - n_1}$
 - ▶ $p(x|\theta)/q(T(x)|\theta) = 1/\binom{n}{n_1}$ ne dépend pas de θ .
- ▶ Vérification par factorisation :
 - ▶ $p(x|\theta) = g(T(x)|\theta)h(x)$ pour $g(T(x)|\theta) = \theta^{n_1} (1 - \theta)^{n - n_1}$ et $h(x) = 1$.

Remarque sur le facteur $h(x)$

- Densité des données pour un modèle $\text{Po}(\theta)$ (Poisson) :

$$\prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}.$$

- $\sum_{i=1}^n x_i$ est une statistique exhaustive minimale.
- Le facteur $h(x) = (\prod_{i=1}^n x_i!)^{-1}$ ne dépend pas de θ .

Minimalité de la statistique exhaustive $T(x) = n_1$ dans le modèle binomial

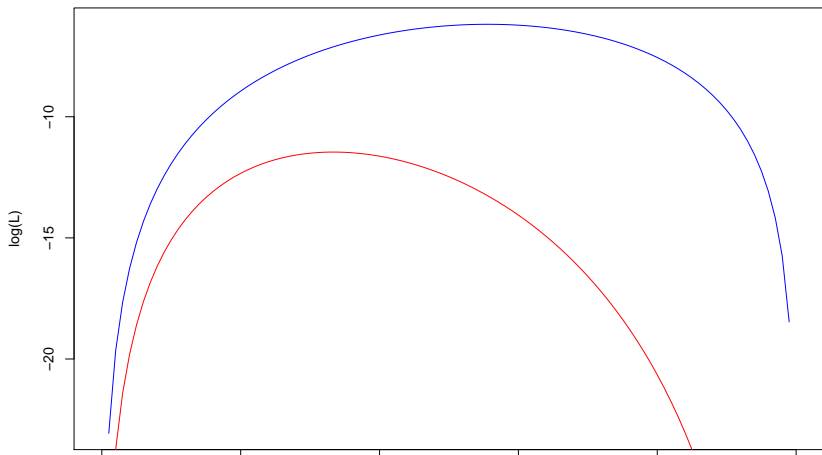
- ▶ Proposition : $T(x) = n_1$ est une statistique exhaustive minimale.
- ▶ Vérification par ratio de vraisemblances
 - ▶ Ratio de deux vraisemblances :

$$\frac{f(x|\theta)}{f(y|\theta)} = \frac{\theta^{\sum_i x_i} (1-\theta)^{n-\sum_i x_i}}{\theta^{\sum_i y_i} (1-\theta)^{n-\sum_i y_i}}.$$

- ▶ Le ratio ne dépend pas de θ seulement si $\sum_i x_i = \sum_i y_i$ ou $T(x) = T(y)$.

Des log vraisemblances pour le modèle binomial

```
theta = seq(0, 1, by=0.01)
n0 = 4; n1 = 5; L = theta^n1 * (1-theta)^n0
plot(theta, log(L), col='blue', type='l')
n0 = 12; n1 = 6; L = theta^n1 * (1-theta)^n0
lines(theta, log(L), col='red')
```



Estimation de θ

- ▶ Par la méthode des moments :
 - ▶ $E[X_i] = \theta$ et $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = n_1/n$
 - ▶ La solution de $E[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ donne

$$\hat{\theta}_{MM} = n_1/n.$$

- ▶ Par la méthode de maximum de vraisemblance :
 - ▶ $\mathcal{L}(\theta; x) = \log L(\theta; x) = n_1 \log \theta + (n - n_1) \log(1 - \theta)$
 - ▶ Deux dérivées par rapport à θ :

$$\frac{d\mathcal{L}(\theta; x)}{d\theta} = \frac{n_1}{\theta} - \frac{(n - n_1)}{1 - \theta}$$

$$\frac{d^2\mathcal{L}(\theta; x)}{d\theta^2} = -\frac{n_1}{\theta^2} - \frac{(n - n_1)}{(1 - \theta)^2}.$$

- ▶ Deuxième toujours négative, première nulle pour $\theta = n_1/n$.
- ▶ $\hat{\theta}_{ML} = n_1/n$.

La distribution de $\hat{\theta} = \hat{\theta}_{MM} = \hat{\theta}_{ML}$

- ▶ La distribution de $\hat{\theta} = T(X)/n$ vient de la distribution de X .
- ▶ Nous savons que $n\hat{\theta} = n_1 \sim \text{Bi}(n, \theta)$.
- ▶ $E[\hat{\theta}] = n^{-1} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \theta$.
- ▶ Puisque $E[X_i^2] = E[X_i] = \theta$, $\text{Var}[X_i] = \theta(1 - \theta)$ et

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = \theta(1 - \theta)/n.$$

- ▶ $E[X_i^4] = \theta < \infty$ alors $\hat{\theta}$ converge à θ presque sûrement.
- ▶ $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ converge en loi à la loi $N(0, \theta(1 - \theta))$.
- ▶ Notez la dépendance à θ partout.
- ▶ θ ici est inconnu mais fixe.

L'approche bayésienne

- ▶ Représenter l'incertitude concernant θ par une loi.
- ▶ Un modèle est une loi conjointe de θ et X .
- ▶ En pratique, le modèle est donné sous la forme $f(\theta)f(X|\theta)$.
- ▶ Une séparation entre l'apprentissage (automatique selon la règle de Bayes) et la prise des décisions.
- ▶ Au moment de prendre une décision, x est fixe (observé), θ est aléatoire, avec densité conditionnelle $f(\theta|x)$.

La loi beta

- La densité $\text{Be}(\alpha, \beta)$ sur $[0, 1]$:

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1}.$$

- Moyenne et variance :

$$E[\theta] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \text{Var}[\theta] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

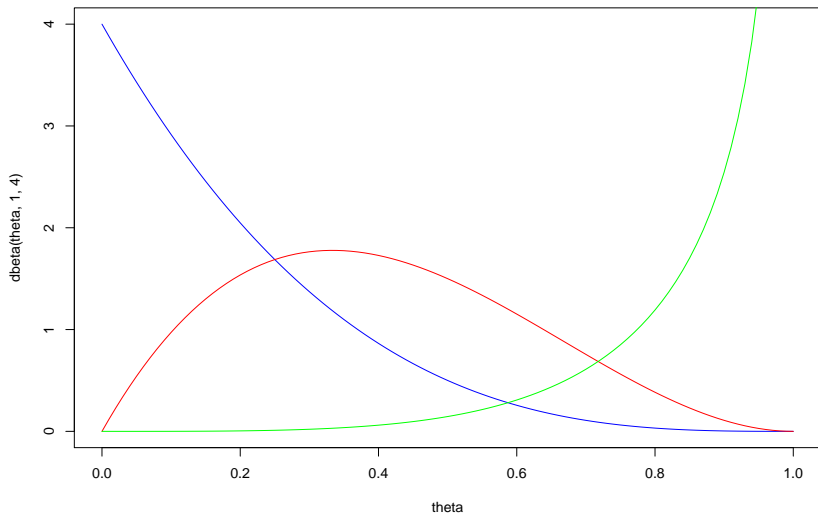
- Relation avec la loi gamma: si X et Y sont indépendantes, $X \sim \text{Ga}(\alpha, \gamma)$ et $Y \sim \text{Ga}(\beta, \gamma)$,

$$\frac{X}{X + Y} \sim \text{Be}(\alpha, \beta).$$

- Remarquez la forme fonctionnelle en θ et sa ressemblance à la vraisemblance binomiale.

Des densités beta

```
plot(theta, dbeta(theta, 1, 4), type='l', col='blue')  
lines(theta, dbeta(theta, 2, 3), col='red')  
lines(theta, dbeta(theta, 4.5, 0.5), col='green')
```



La loi conjointe de θ et x dans le modèle beta-binomial

- ▶ Si $\theta \sim \text{Be}(\alpha, \beta)$, $x_i \sim \text{iid Bn}(\theta)$,

$$\begin{aligned}f(\theta, x) &= f(\theta)f(x|\theta) \\&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1} \theta^{n_1} (1 - \theta)^{n-n_1} \\&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{n_1 + \alpha - 1} (1 - \theta)^{n - n_1 + \beta - 1}.\end{aligned}$$

- ▶ La densité postérieure de θ est proportionnelle à la densité conjointe :

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta, x)}{f(x)} \propto f(\theta, x) \propto \theta^{n_1 + \alpha - 1} (1 - \theta)^{n - n_1 + \beta - 1}.$$

- ▶ $\theta|x \sim \text{Be}(\alpha + n_1, \beta + n - n_1)$
- ▶ La densité postérieure normalisée est

$$f(\theta|x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n)}{\Gamma(\alpha + n_1)\Gamma(\beta + n - n_1)} \theta^{n_1 + \alpha - 1} (1 - \theta)^{n - n_1 + \beta - 1}.$$

Trois fonctions de perte pour l'analyse bayésienne

- ▶ Supposons que a est une action associée à l'estimation du paramètre θ .
- ▶ Trois fonctions de perte $L(\theta, a)$:
 1. Perte quadratique $L(\theta, a) = (a - \theta)^2$
 2. Perte valeur absolue $L(\theta, a) = |a - \theta|$
 3. Perte 0-1 $L_\epsilon(\theta, a) = 1 - 1_{[0, \epsilon]}(|a - \theta|)$

Trois estimateurs bayésiens de θ

1. La valeur $\hat{\theta}_1$ qui minimise $E[(\theta - \hat{\theta}_1)^2|x]$ est la moyenne postérieure.
 2. La valeur $\hat{\theta}_2$ qui minimise $E[|\theta - \hat{\theta}_2||x]$ est la médiane postérieure.
 3. La valeur $\hat{\theta}_3$ qui est la limite ($\epsilon \downarrow 0$) de la valeur a qui minimise $E[1 - 1_{[0,\epsilon]}(|a - \theta|)|x]$ est le mode postérieur.
- Dans le modèle beta-binomial, si $\alpha + n_1, \beta + n - n_1 > 1$

$$\hat{\theta}_1 = E[\theta|x] = \frac{\alpha + n_1}{\alpha + \beta + n},$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\alpha + n_1 - 1/3}{\alpha + \beta + n - 2/3},$$

$$\hat{\theta}_3 = \frac{\alpha + n_1 - 1}{\alpha + \beta + n - 2}.$$

Biais et variance dans le modèle binomial

- ▶ Calculs préliminaires ($X_i \sim \text{iid Bn}(\theta)$), $i = 1, \dots, n$.
 - ▶ $E[X_i] = E[X_i^2] = \theta$, $\text{Var}[X_i] = \theta - \theta^2 = \theta(1 - \theta)$.
 - ▶ $n_1 = \sum_{i=1}^n X_i$, $E[n_1] = n\theta$, $\text{Var}[n_1] = n\theta(1 - \theta)$
- ▶ Propriétés de l'estimateur $\hat{\theta} = n_1/n$:
 - ▶ $E[\hat{\theta}] = \theta$, $\text{Var}[\hat{\theta}] = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$, $\text{Var}[\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)] = \theta(1 - \theta)$.
 - ▶ $\text{biais}[\hat{\theta}] = E[\hat{\theta}] - \theta = 0$, $\text{EQM}[\hat{\theta}] = \text{Var}[\hat{\theta}] = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$.
- ▶ Propriétés de l'estimateur $\hat{\theta}_1 = \frac{\alpha + n_1}{\alpha + \beta + n}$:
 - ▶ $E[\hat{\theta}_1] = \frac{\alpha + n\theta}{\alpha + \beta + n}$, $\text{Var}[\hat{\theta}_1] = \frac{n\theta(1-\theta)}{(\alpha + \beta + n)^2} < \text{Var}[\hat{\theta}]$.
 - ▶ $\text{biais}[\hat{\theta}_1] = E[\hat{\theta}_1] - \theta = \frac{\alpha(1-\theta) - \beta\theta}{\alpha + \beta + n}$,

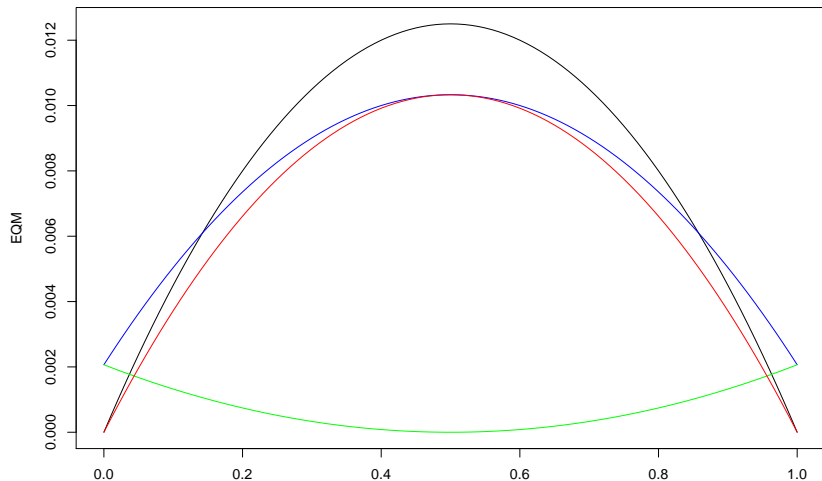
$$\text{EQM}[\hat{\theta}_1] = \frac{n\theta(1 - \theta) + [\alpha(1 - \theta) - \beta\theta]^2}{(\alpha + \beta + n)^2}.$$

Illustration graphique I

```
theta = seq(0, 1, by=0.01)
n = 20; alpha = 1; beta = 1;
EQM = theta * (1-theta) / n
biais1 = (alpha*(1-theta) - beta*theta)/(alpha + beta + n)
var1 = n*theta*(1-theta)/(alpha + beta + n)^2
EQM1 = biais1^2 + var1
```

Illustration graphique II

```
plot(theta, EQM, type='l')  
lines(theta, EQM1, col='blue')  
lines(theta, biais1^2, col='green')  
lines(theta, var1, col='red')
```



Complétion du carré dans les modèles gaussiens I

- y_i scalaire, $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^n ((y_i - \bar{y}) + (\bar{y} - \mu))^2 \\&= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(\bar{y} - \mu) + n(\bar{y} - \mu)^2 \\&= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + n(\bar{y} - \mu)^2 \\&= (n-1)S^2 + n(\bar{y} - \mu)^2\end{aligned}$$

ou $\bar{y} \equiv n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i$ et $S^2 \equiv (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$.

Complétion du carré dans les modèles gaussiens II

- y est $n \times 1$, X est $n \times k$, β est $k \times 1$, $b = (X^\top X)^{-1} X^\top y$ existe.

$$\begin{aligned} u^\top u &\equiv (y - X\beta)^\top (y - X\beta) \\ &= (y - Xb + X(b - \beta))^\top (y - Xb + X(b - \beta)) \\ &= (y - Xb)^\top (y - Xb) + (b - \beta)^\top X^\top X (b - \beta) \\ &\quad + 2(b - \beta)^\top X^\top (y - Xb) \\ &= (y - Xb)^\top (y - Xb) + (b - \beta)^\top X^\top X (b - \beta) \end{aligned}$$

parce que $X^\top Xb = X^\top y$

Complétion du carré dans les modèles gaussiens III

- y_i est $k \times 1$, $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}T(y) &= \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^\top H (y_i - \mu) \\&= \sum_{i=1}^n ((y_i - \bar{y}) + (\bar{y} - \mu))^\top H ((y_i - \bar{y}) + (\bar{y} - \mu)) \\&= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^\top H (y_i - \bar{y}) + n(\bar{y} - \mu)^\top H (\bar{y} - \mu) \\&= \sum_{i=1}^n \text{tr}[H(y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})^\top] + n(\bar{y} - \mu)^\top H (\bar{y} - \mu) \\&= \text{tr} \left[H \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})^\top \right] + n(\bar{y} - \mu)^\top H (\bar{y} - \mu)\end{aligned}$$