ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers, Hiver 2020

Cours 12 : Valeur à risque

William McCausland

2021-04-12

Pourquoi la valeur à risque I

- L'objectif de l'investisseur : choisir un portefeuille selon ses préférences.
- L'information pertinente est la loi prédictive conjointe de tous les rendements des actifs.
- Gérer toute cette information est trop difficile :
  - estimation
  - élicitation des préférences
  - optimisation
- Simplification 1 : focaliser sur la moyenne et la variance des rendements : (CAPM)
- Simplification 2 : focaliser sur les grandes pertes et leur probabilité (VaR, ES)
- Pour un preneur de décisions, les deux sont complémentaires, pas exclusives.

Pourqoui la valeur à risque II

- Perte non-linéaire : risque de faire faillite, de devoir vendre des actifs productifs, d'avoir besoin d'un sauvetage financier
- Exemples de risque :
  - Institutions financières, levier de financement
  - Importeurs, exporteurs (risque des devises)
  - Firmes qui exploitent des ressources naturels (risque de changements de prix)
  - Pensions : risque de perte de valeur des actifs

Valeur à Risque (VaR)

- Pour les quantités suivantes
  1. Terme (ou horizon) l (en périodes),
  2. Probabilité p de grande perte, (souvent p $= 0.01$)
  3. Fonction de répartition $F_l(\cdot)$ pour le gain de valeur d'un portefeuille en l périodes,
- la valeur à risque (VaR) est (par définition) la solution de l'équation
$$p = F_l(-\mathrm{VaR}).$$
- la question de conditionnement
  - loi inconditionelle, longue terme, non-paramétrique
  - loi conditionnelle, court terme, besoin d'un modèle (régression quantile ou plein modèle)

RiskMetrics

- Modèle simple, IGARCH Gaussien :

$$\mu_t = 0, \quad \sigma_t^2 = \alpha\sigma_{t-1}^2 + (1-\alpha)r_{t-1}^2, \quad r_t = a_t = \sigma_t\epsilon_t$$

  où $\epsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$.
- Un seul paramètre $\alpha \in (0,1)$, approximativement 0.94.
- Utile à court terme, pour les rendements journaliers.
- Pour $j > i > 0$,

$$\mathrm{cov}[r_{t+i}, r_{t+j}|F_t] = E[\sigma_{t+i}\sigma_{t+j}\epsilon_{t+i}E[\epsilon_{t+j}|F_{t+j-1}]|F_t] = 0.$$

RiskMetrics : variance multipériode

- De la diapo précédente : $\mathrm{cov}[r_{t+i}, r_{t+j}|F_t] = 0$.
- Prochaine étape :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[a_{t+i}|F_t] &= \mathrm{Var}[E[a_{t+i}|F_{t+i-1}]|F_t] + E[\mathrm{Var}[a_{t+i}|F_{t+i-1}]|F_t] \\ &= E[\sigma^2_{t+i}|F_t].\end{aligned}$$

- Maintenant la variance conditionnelle (à t) du rendement k-période est

$$\sigma^2_t[k] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Var}[a_{t+i}|F_t] = \sum_{i=1}^{k} E[\sigma^2_{t+i}|F_t].$$

Une récursion pour le modèle RiskMetrics

- Pour tous t,

$$\sigma_t^2 = \alpha\sigma_{t-1}^2 + (1-\alpha)r_{t-i}^2 = \alpha\sigma_{t-1}^2 + (1-\alpha)\sigma_{t-1}^2\epsilon_t^2.$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 + (1-\alpha)\sigma_{t-1}^2(\epsilon_{t-1}^2 - 1)$$

- En particulier,

$$\sigma_{t+i}^2 = \sigma_{t+i-1}^2 + (1-\alpha)\sigma_{t+i-1}^2(\epsilon_{t+i-1}^2 - 1)$$

- La loi des espérences itérées donne $(E[E[\cdot|F_{t+i-2}]|F_t])$

$$E[\sigma_{t+i}^2|F_t] = E[\sigma_{t+i-1}^2|F_t].$$

- Par induction, $E[\sigma_{t+i}^2|F_t] = \sigma_{t+1}^2$ pour chaque i, alors

$$\sigma_t^2[k] = k\sigma_{t+1}^2.$$

Calcul de VaR RiskMetrics

- À t, on détient une quantité Q d'un portefeuille à prix P_t.
- Pour $p = 0.05$, $l = 1$, la VaR est de

$$P_t Q \times -\Phi^{-1}(0.05)\sigma_{t+1} \approx P_t Q \times 1.65\sigma_{t+1}$$

- Pour $p = 0.05$, $l = k$, la VaR est de

$$P_t Q \times -\Phi^{-1}(0.05)\sqrt{k}\sigma_{t+1} \approx P_t Q \times 1.65\sqrt{k}\sigma_{t+1}$$

- Notez l'approximation $R_t = r_t$.
- Exemple 7.1 :
  - $\sigma_t = 0.53\%$ (écart-type empirique du rendement journalier pour le taux d'échange DM/Dollar, juin 1997)
  - $P_t Q = 10^7\,\$$
  - $p = 0.05$ alors $\Phi^{-1}(p) = \Phi^{-1}(0.05) \approx -1.65$
  - $\mathrm{VaR}(1) = 10^7 \times 1.65 \times 0.0053 = 87450\,\$$
  - $\mathrm{VaR}(10) = 10^7 \times \sqrt{10} \times 1.65 \times 0.0053 = 276541\,\$$

Discussion

- Simple
- L'hypothèse de gaussianité peut être très trompeur pour $p \leq 0.01$.

Approche économétrique I

- Un modèle ARMA(p,q)-GARCH(u,v) pour $r_1, \ldots, r_n$:

$$\mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j a_{t-j}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{u} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{v} \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

- En évaluant la vraisemblance, on obtient les μ_t, σ_t^2.
- Chaque μ_t et σ_t^2 est une fonction de tous les $r_1, \ldots, r_{t-1}$
- Par la suite, on peut calculer $a_t = r_t - \mu_t$, $t = 1, \ldots, n$.
- Sachant $(r_1, \ldots, r_n)$, $r_{n+1} \sim (\mu_{n+1}, \sigma_{n+1})$, où

$$\mu_{n+1} = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{n+1-i} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j a_{n+1-j}$$

$$\sigma_{n+1}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{u} \alpha_i a_{n+1-i}^2 + \sum_{j=1}^{v} \beta_j \sigma_{n+1-j}^2.$$

Approche économétrique II

- Si $r_{n+1}|r_1,\ldots,r_n \sim N(\mu_{n+1},\sigma^2_{n+1})$, la VaR pour une période avec $p = 0.05$ est, par unité de valeur et avec l'approximation $R_{t+1} = r_{t+1}$,

$$-\mathrm{VaR} = \mu_{n+1} + \Phi^{-1}(0.05)\sigma_{n+1} = \mu_{n+1} - 1.65\sigma_{n+1}.$$

- Si $r_{n+1}|r_1,\ldots,r_n \sim t(\mu_{n+1},\sigma^2_{n+1},\nu)$:
  - La variance d'un aléa t de Student standard avec ν degrés de liberté est $\nu/(\nu-2)$.
  - Soit $t_\nu(p)$ la quantile d'un aléa $t(\nu)$.
  - La valeur à risque est, par unité de valeur

$$-\mathrm{VaR} = \mu_{n+1} + \frac{t_\nu(p)\sigma_{n+1}}{\sqrt{\nu/(\nu-2)}}.$$

Exemple, calcul du VaR ou $r_{n+1}|r_1, \ldots, r_n$ est un t de Student

- Mettons que $\mu_{n+1} = 0.001$, $\sigma_{n+1} = 0.02$, $\nu = 12$.
- Exemple, calcul du VaR, par unité de valeur, pour $p = 0.05$

```
p = 0.05
nu = 12
mu.np1 = 0.001
sigma.np1 = 0.02
t.nu.p = qt(p, nu)
mVaR = mu.np1 + t.nu.p * sigma.np1 / (sqrt(nu/(nu-2)))
-mVaR
```

```
## [1] 0.03153997
```

Estimation quantile, approche inconditionnelle

- Trier les rendements $r_1, \ldots, r_n$ pour calculer les statistiques d'ordre :

$$r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \ldots \leq r_{(n)}.$$

- Supposons que r_t est iid avec fonction de répartition F et densité f.
- On veux estimer $x_p = F^{-1}(p)$, la quantile p de la population
- Pour $l = np$ entier, $r_{(l)}$ est la quantile p de l'échantillon et

$$r_{(l)} \sim_{\text{asy}} N\left(x_p, \frac{p(1-p)}{n[f(x_p)]^2}\right).$$

- $r_{(l)}$ est une estimation de x_p.
- Il faut estimer $f(x_p)$ pour calculer la variance de l'estimateur.

Quand np n'est pas entier

- Trouver l_1, l_2 entiers tels que $l_2 = l_1 + 1$, $l_1 < np < l_2$.
- Alors l_1 est le plancher de np.
- Soit $p_1 = l_1/n$, $p_2 = l_2/n$.
- Trouver $\hat{x}_p$ entre $\hat{x}_{p_1}$ et $\hat{x}_{p_2}$:

$$\hat{x}_p = \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} r_{(l_1)} + \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} r_{(l_2)}$$

Exemple à longue terme

```
# Séries IBM journalière
r = scan('d-ibmln.txt')
r.sort = sort(r)
n = length(r)
# Calcul de x-chapeau-p
p = 0.05
l1 = floor(p*n); p1 = l1/n;
l2 = ceiling(p*n); p2 = l2/n;
x.ch.p = ((p2-p) * r.sort[l1] + (p-p1) * r.sort[l2]) / (p2-
# Calcul de f(x-chapeau-p)
ds = density(r)
x.ch.p.index = which.min((ds$x-x.ch.p)^2)
f.x.ch.p = ds$y[x.ch.p.index]
sigma = sqrt(p*(1-p)/n)/f.x.ch.p
```

Valeurs

```
p1;p2;l1;l2
```

```
## [1] 0.04989931
```

```
## [1] 0.05001119
```

```
## [1] 446
```

```
## [1] 447
```

```
x.ch.p;f.x.ch.p;sigma
```

```
## [1] -2.1492
```

```
## [1] 0.05977387
```

```
## [1] 0.03856694
```

Illustration : histogramme

```r
hist(r, 80)
abline(v=x.ch.p)
```

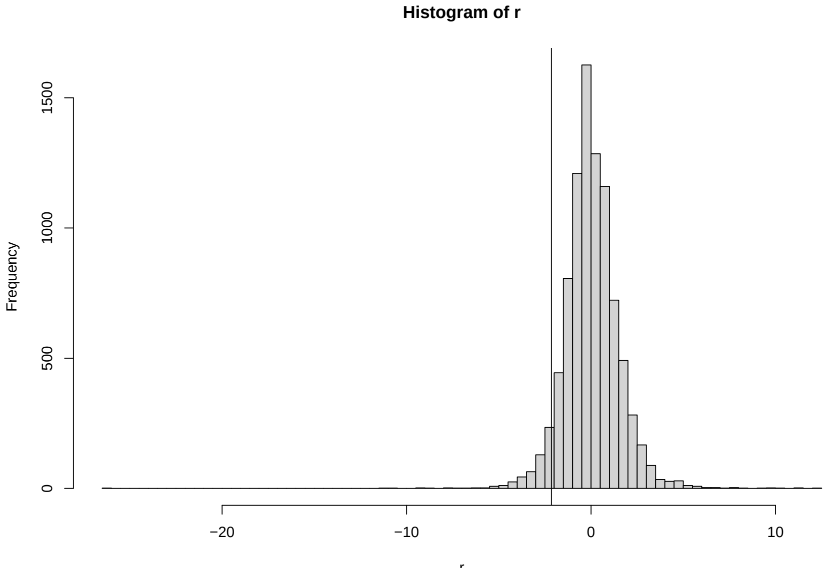
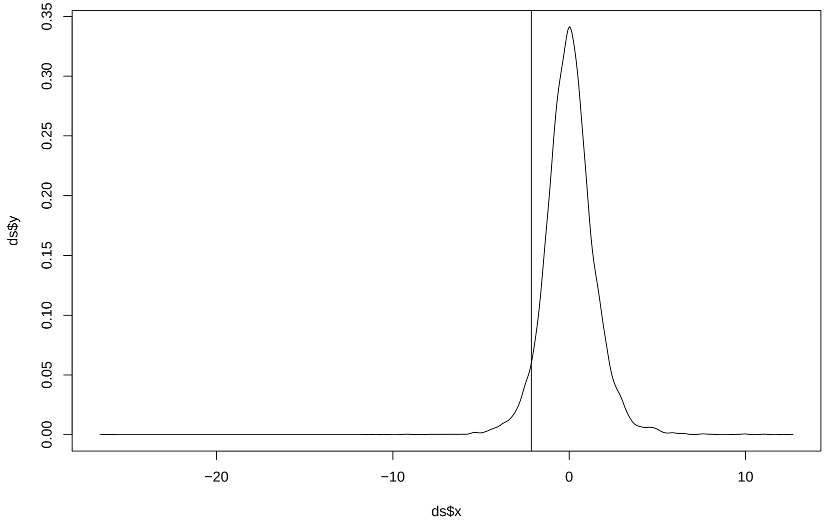


Illustration : densité

```
plot(ds$x, ds$y, type='l')
abline(v=x.ch.p)
```



Commentaires

- Avantages :
  1. Simple
  2. Pas de modèle
- Inconvénients :
  1. L'hypothèse de iid peu crédible : il y a plus d'incertitude quand les rendements ne sont pas indépendents.
  2. Pas de conditionnement à l'information pertinente.
  3. Les quantiles empiriques ne sont pas précises pour p petit.
  4. Pas de changement de distribution entre la période de l'échantillon et la période de prévision.

Régression quantile I

- Rappel : la moyenne $E[r]$ est la solution du problème suivant de minimization de perte quadratique espérée :

$$\arg\min_{\beta} E[(r-\beta)^2] = \arg\min_{\beta} E[(r-E[r])^2] + (E[r]-\beta)^2.$$

- La quantile $x_p = F^{-1}(p)$ est la solution du problème suivant minimization de perte espérée :

$$x_p = \arg\min_{\beta} E[w_p(r-\beta)],$$

- La fonction de perte w_p est

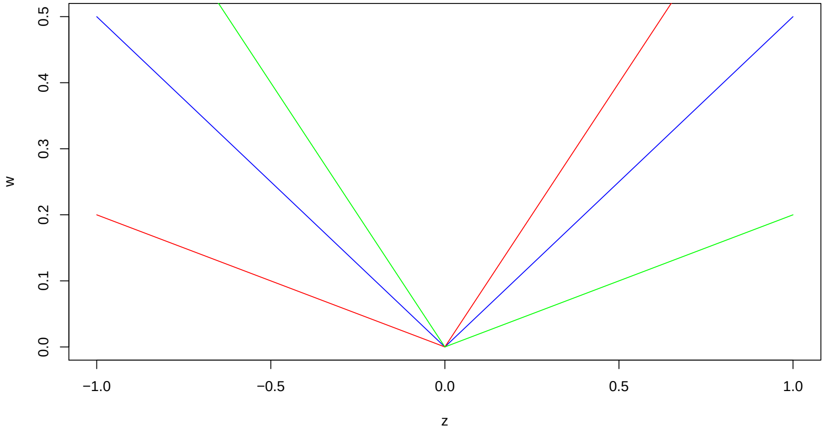
$$w_p(z) = \begin{cases} pz, & z \geq 0 \\ -(1-p)z, & z < 0. \end{cases}$$

- La quantile empirique (ou de l'échantillon) est la solution de

$$\hat{x}_p = \arg\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} w_p(r_i - \beta).$$

La fonction $w_p(z)$

```
z = seq(-1, 1, by=0.1)
p=0.5; plot(z, p*z*(z>=0) - (1-p)*z*(z<0), col='blue', type
p=0.8; lines(z, p*z*(z>=0) - (1-p)*z*(z<0), col='red')
p=0.2; lines(z, p*z*(z>=0) - (1-p)*z*(z<0), col='green')
```



Régression quantile II

- Supposons que la quantile conditionnelle de r_t sachant x_t, dénoté $q_p|x_t$, est linéaire en x_t : $q_p|x = \beta_p^\top x$.
- Alors β_p est la solution de

$$\beta_p = \arg\min_\beta E[w_p(r - \beta^\top x)].$$

- L'analogue dans l'échantillon donne l'estimateur

$$\hat{\beta}_p = \arg\min_\beta \sum_{t=1}^{n} w_p(r_t - \beta^\top x_t).$$

- Notes
  - Dans le contexte de VaR, x_t comprend des variables dans F_{t-1}.
  - la fonction de perte w_p est moins sensible aux valeurs aberrantes que la fonction de perte quadratique.