ECN 7060, Cours 1

William McCausland

2020-09-01

Matières

Partie 1, Livre de Rosenthal

- Espaces de probabilité, le théorème d'extension
- Variables aléatoires, lois, indépendance
- Espérance
- Convergence en probabilité, convergence presque sûre
- Fonctions caractéristiques, convergence en distribution et le théorème centrale limite
- Probabilité et espérance conditionnelles

Partie 2, Livre de Casella et Berger

- Statistiques suffisantes et ancillaires, principe de vraisemblance
- Estimation ponctuelle, fréquentiste et bayésienne
- Estimation d'intervalle, fréquentiste et bayésienne
- Tests d'hypothèse, fréquentistes et bayésiens

Les éléments de la note finale :

1. Questionnaires : 20% (meilleurs $n-1$ de $n \approx 10$)
2. Examen intra maison : 25%
3. Participation, cours et séance TP : 5%
4. Examen final : 50%

Le cycle mercredi-mardi :

1. Mercredi 13h-16h, cours :
   - retour des questionnaires corrigés du cours précédent
   - réponses aux questions des étudiants
   - questionnaire sur les lectures (matière du cours actuel)
   - correction des questionnaires du cours actuel
   - enseignement magistral avec participation des étudiants
   - aperçu de la matière de la semaine prochaine
   - attribution des lectures (pour la semaine prochaine) avec questions simple de lecture, des devoirs sur la matière du cours actuel
2. Mardi 11h30-13h, séance de travail pratique avec Narcisse
   - discussion des devoirs

Mon site web : https://mccauslw.github.io

Attentes :

Avant le cours

1. Avoir lu les lectures, pouvoir répondre aux questions simples

Avant la séance TP

1. Avoir essayé (idéalement complété) les devoirs

Espaces de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans un monde fini

1. Ω, l'*espace d'états* (exactement un état $\omega \in \Omega$ se produit)
2. $\mathcal{F}$, algèbre, un ensemble d'événements (des parties de Ω)
3. $P\colon \mathcal{F} \to [0, 1]$, une probabilité

Exemple :

1. $\Omega = \{0, 1\}$
2. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} = 2^{\Omega}$
3. $P(\cdot)$ selon le tableau suivant :

A	$P(A)$
$\emptyset$	0
$\{0\}$	0.4
$\{1\}$	0.6
$\{0, 1\}$	1

Jugements cohérents (de Finetti et Ramsey)

- Ensemble d'états du monde : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$
  - ω_1: Le parti PLC gagne l'élection fédérale prochaine
  - ω_2: Le parti PLC ne gagne pas
- Un agent offre des prix (cours acheteur et cours vendeur) pour ces contrats:
  1. paie 1$ si ni ω_1 ni ω_2 se produit (l'événement $\emptyset$)
  2. paie 1$ si ω_1 se produit (l'événement $\{\omega_1\}$)
  3. paie 1$ si ω_2 se produit (l'événement $\{\omega_2\}$)
  4. paie 1$ si ω_1 ou ω_2 se produit (l'événement $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$)
- Ces jugements sont *cohérents* si un autre ne peut pas faire un profit sûr peu importe le résultat.
- Ils sont cohérents ssi les prix vérifient les axiomes de probabilité.
- Contribution de Ramsey: accommoder l'aversion pour le risque et mesurer à la fois les jugements de probabilité et l'utilité.
- Ch. 2 de Diaconis et Skyrms, "Ten Great Ideas about Chance".

Interprétation fréquentiste de probabilité

- Venn et von Mises essaient de définir la probabilité en termes des (limites des) fréquences des événements semblables.
- Plusieurs fréquentistes rejettent l'aspect subjectif des définitions qui repose sur les jugements cohérents.
- Difficultés conceptuelles :
  1. Définition de « semblable » qui évite et des tautologies et des situations où toutes les probabilités sont 0 ou 1.
  2. L'irréalité des fréquences infinies
  3. La possibilité des fréquences sans limite.
- Ch. 4 de Diaconis et Skyrms, "Ten Great Ideas about Chance".

Quelles propriétés $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ devrait-il posséder (Ω fini)?

Propriétés désirables :

1. Additivité finie :

$$A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
3. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$,
4. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c, A \cup B, A \cap B \in \mathcal{F}$

Par 3 et 4, $\mathcal{F}$ est une algèbre, pas forcément une tribu.

Une façon de spécifier une probabilité :

1. Donner $P(\{\omega\}) = p_\omega \geq 0$, $\omega \in \Omega$, où $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$
2. Définir l'extension $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$, $A \subseteq \Omega$.

Dénombrable ou non?

Un ensemble S est

- *dénombrable* s'il existe une fonction injective de S vers $\mathbb{N}$,
- *infini dénombrable* s'il existe une fonction bijective de S vers $\mathbb{N}$,
- *indénombrable* s'il n'est pas dénombrable.

Quelques ensembles :

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$
2. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$
3. $\mathbb{Z}^2$
4. $\mathbb{Q} = \{a/b \colon a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
5. $\mathbb{Z}^n$
6. $\mathbb{R}$
7. $2^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$
8. L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$
9. L'ensemble des fichiers (livres, dessins, audio, vidéo)
10. L'ensemble des programmes informatiques

Exemples de Ω : finis, dénombrables, indénombrables

1. $\Omega = \{1, \ldots, n\}$
2. $\Omega = \{(r_1, \ldots, r_n) \colon r_i \in \{0, 1\}\}$
3. $\Omega = \{(r_1, \ldots, r_n) \colon r_i \in \mathbb{Z}\}$
4. $\Omega = \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \ldots\}$
5. $\Omega = \{(r_1, \ldots) \colon r_i \in \{0, 1\}\}$
6. $\Omega = [0, 1]$
7. $\Omega = \mathbb{R}$
8. $\Omega = \mathbb{R}^n$

Construire $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour la loi uniforme $[0,1]$

Premier essai: $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, trouver une P qui vérifie

1. $P([a,b]) = P((a,b]) = P([a,b)) = P((a,b)) = b - a$ pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$.
2. $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{F}$ disjoints $\Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
3. $P(A \oplus r) = P(A)$, $0 \leq r \leq 1$.

Impossible! Preuve :

1. Définir $x \sim y$ ssi $y - x \in Q$; $\sim$ est transitive et réflexive.
2. Partitionner $[0,1]$ en classes d'équivalence : $\{0, 1/3, 1/5, \ldots\}$, $\{\pi, \pi - 3, \pi - 3.1, \ldots\}$, $\{e, e - 2.7, e - 2.71\}$, etc.
3. Construire H, un ensemble avec un élément de chaque classe.
4. Noter que $[0,1] = \cup_{r \in [0,1] \cap Q} (H \oplus r)$ (ensembles disjoints).
5. Constater l'implication impossible :

$$1 = P(\Omega) = \sum_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} P(H \oplus r) = \sum_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} P(H)$$

La construction d'un espace de probabilité

Supposez que l'espace d'états Ω est donné, on doit spécifier $\mathcal{F}$ et P. On veux

1. un système cohérent (qui vérifie certains axiomes)
2. une façon de spécifier une partie de P et laisser les axiomes déterminer le reste
3. une tribu $\mathcal{F}$ faisable mais assez riche qu'elle contient les événements d'intérêt.

La semaine prochaine on développe un outil important pour cette construction des espaces de probabilité.

Axiomes de probabilités

Un espace de probabilité est un $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que

1. $\Omega \neq \emptyset$;
2. $\mathcal{F}$ satisfait
   a. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$,
   b. $A \in \mathcal{F} \to A^c \in \mathcal{F}$,
   c. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \to \cup_{i=1}^{\infty} A_i, \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$;
3. $P \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ satisfait
   a. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
   b. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ disjoints $\to P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Aperçu, Rosenthal chapitre 2

1. Construction d'un espace de probabilité à partir d'une semi-algèbre
2. Le théorème d'extension
3. Construction d'un espace de probabilité pour la loi uniforme sur $[0, 1]$
4. Construction d'un espace de probabilité pour un modèle du tirage répété au pile ou face