

# ECN 7060, Cours 5

William McCausland

2021-09-28

# Inégalité de Markov

- ▶ Soit  $X \geq 0$  une variable aléatoire, soit  $\alpha \in (0, \infty)$ .
- ▶ Inégalité de Markov :

$$E[X] \geq \alpha P[X \geq \alpha]$$

- ▶ Preuve :
  - ▶ Soit

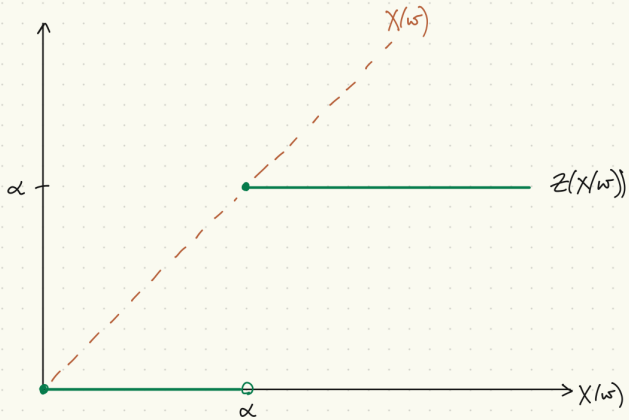
$$Z \equiv \begin{cases} 0 & X(\omega) < \alpha, \\ \alpha & X(\omega) \geq \alpha. \end{cases}$$

- ▶  $Z \leq X$  alors par monotonie,

$$E[Z] = \alpha P[X \geq \alpha] \leq E[X].$$

- ▶ Questions :
  1. Donnez un exemple d'un  $X \geq 0$  qui donne une égalité.
  2. Donnez des conditions nécessaires et suffisantes pour une égalité.

# Inégalité de Markov



# Inégalité de Chebychev

- ▶ Soit  $Y$  une variable aléatoire ou  $\mu_Y = E[Y]$  existe et est finie.
- ▶ Soit  $\epsilon > 0$ .
- ▶ Inégalité de Chebychev :

$$P[|Y - \mu_Y| \geq \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \text{Var}[Y].$$

- ▶ Preuve :
  - ▶ Soit  $X = (Y - \mu_Y)^2$ ,  $\alpha = \epsilon^2$ .
  - ▶ Alors par l'inégalité de Markov,

$$P(|Y - \mu_Y| \geq \epsilon) = P(X \geq \epsilon^2) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \text{Var}[Y].$$

- ▶ Notes :
  - ▶  $\text{Var}[Y] = \infty$  est possible, auquel cas l'inégalité ne contraint pas.
  - ▶  $\epsilon^{-2}$  peut être très grand, mais c'est fini.
  - ▶ Application : borner la probabilité d'une déviation plus grande qu'épsilon, pour chaque  $X_n$  d'une suite, où  $\text{Var}[X_n] \rightarrow 0$ . On veut choisir  $n$  après  $\epsilon$ .

# Définitions

- ▶ Soit  $Z_1, Z_2, \dots$  une suite de v.a.,  $Z$  une v.a.
- ▶ Convergence ponctuelle de  $Z_n$  à  $Z$  : pour tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega) = Z(\omega).$$

- ▶ Convergence de  $Z_n$  à  $Z$  presque sûre,  $Z_n \xrightarrow{p.s.} Z$  :

$$P[\{Z_n \rightarrow Z\}] = 1, \text{ ou } P(Z_n \rightarrow Z) = 1.$$

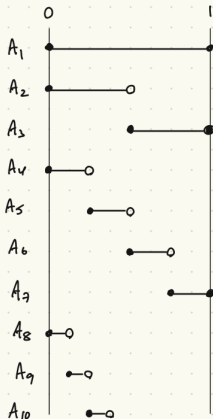
- ▶ Convergence de  $Z_n$  à  $Z$  en probabilité,  $Z_n \xrightarrow{p} Z$  : pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$P[\{|Z_n - Z| \geq \epsilon\}] \rightarrow 0, \text{ ou } P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) \rightarrow 0.$$

## Convergence en probabilité mais pas convergence p.s.

- ▶ Prenez l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  où  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ ,  $P$  la mesure de Lebesgue.
- ▶ Soit  $A_1 = \Omega = [0, 1]$ ,  $A_2 = [0, 1/2)$ ,  $A_3 = [1/2, 1]$ ,  
 $A_4 = [0, 1/4)$ ,  $A_5 = [1/4, 1/2)$ ,  $A_6 = [1/2, 3/4)$ ,  $A_7 = [3/4, 1]$ ,  
 $A_8 = [0, 1/8)$ , ... (prochaine diapo).
- ▶ Soit  $X = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = 1_{A_n}(\omega)$ .
- ▶ Convergence presque sûre?
  - ▶ Pour tous  $\omega$ ,  $\liminf_n X_n(\omega) = 0$ ,  $\limsup_n X_n(\omega) = 1$ .
  - ▶ Échec de convergence pour tout  $\omega \in \Omega$ !
  - ▶ Alors  $P[\{X_n \rightarrow X\}] = 0$ .
- ▶ Convergence en probabilité?
  - ▶  $P(X_n = X) \approx 1 - 1/n \rightarrow 1$ .
  - ▶ Alors pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $P(|X_n - X| \geq \epsilon) \rightarrow 0$ .

Convergence en probabilité mais pas presque sûr.



$$\Omega = [0, 1]$$

$$\limsup_n A_n = [0, 1]$$

$$\limsup_n 1_{A_n}(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\liminf_n A_n = \emptyset$$

$$\liminf_n 1_{A_n}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

mais  $\Pr[1_{A_n}(\omega) > 0] \rightarrow 0$

$$(\approx \frac{1}{n}, = \frac{1}{n} \text{ quand } \log_2 n \text{ est entier})$$

## Une condition suffisante pour convergence p.s.

La condition : pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) < \infty$ .

Preuve de suffisance :

► Soit  $\epsilon > 0$  et supposez que  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) < \infty$ .

► Alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{\infty} P(|Z_k - Z| \geq \epsilon) = 0.$$

► Pour  $m$  fixe,

$$\begin{aligned} P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} |Z_k - Z| \geq \epsilon) &\leq P(\cup_{k=m}^{\infty} |Z_k - Z| \geq \epsilon) \\ &\leq \sum_{k=m}^{\infty} P(|Z_k - Z| \geq \epsilon). \end{aligned}$$

► Puisque  $m$  est arbitraire,  $P(|Z_k - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) = 0$ .



## Preuve, continuée

Rappel : la condition suffisante de l'avant-dernière diapo entraîne  $P(|Z_k - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) = 0$ .

Alors (nous utilisons ce résultat à la dernière équation)

$$\begin{aligned} P(\exists \epsilon > 0, |Z_n - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) &\leq P(\exists \epsilon' > 0, \epsilon' \in \mathbb{Q}, |Z_n - Z| \geq \epsilon' \text{ i.o.}) \\ &= P(\cup_{\epsilon \in \mathbb{Q}_{++}} |Z_n - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) \\ &\leq \sum_{\epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0} P(|Z_n - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$P(\forall \epsilon > 0, |Z_n - Z| < \epsilon \text{ a.a.}) = 1,$$

$$P(Z_n \rightarrow Z) = 1.$$

## Infiniment souvent et presque toujours

		$\omega \in A_c$	
		infiniment souvent	presque toujours
	finiment souvent	infiniment souvent pas presque toujours	presque toujours ✓
$\omega \in A_n$	infiniment souvent pas presque toujours	✓	
	presque toujours	✓	

# Convergence presque sûre $\rightarrow$ convergence en probabilité

Preuve :

- ▶ Supposez que  $P(Z_n \rightarrow Z) = 1$  (convergence p.s.).
- ▶ Soit  $\epsilon > 0$ .
- ▶ Soit  $A_n = \{\exists m \geq n, |Z_m - Z| \geq \epsilon\}$ .
- ▶ Alors

$$A_n \searrow \cap_n A_n \subseteq \{Z_n \not\rightarrow Z\}.$$

$$P(A_n) \rightarrow P(\cap_n A_n) \leq P(Z_n \not\rightarrow Z) = 0.$$

$$P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) \leq P(A_n) \rightarrow 0.$$

- ▶ Puisque  $\epsilon > 0$  est arbitraire, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  
 $P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) \rightarrow 0$  (convergence en probabilité).

## Deux exemples

Soit  $Y = Z = 0$ ,  $Y_n, Z_n$  des suites de v.a. sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  telles que

- ▶  $\Pr[Y_n = 0] = 1 - 1/n^2, \Pr[Y_n = 1] = 1/n^2.$
- ▶  $\Pr[Z_n = 0] = 1 - 1/n, \Pr[Z_n = 1] = 1/n.$

Par exemple, sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ , où  $P((a, b]) = \min(b, 1) - \max(a, 0)$  pour  $b \geq a$ ,

- ▶  $Y_n = 1_{[0, 1/n^2]}$
- ▶  $Z_n = 1_{[0, 1/n]}$

## Deux exemples, suite

Pour la suite  $Y_n$  :

- ▶  $\Pr[Y_n \neq Y] = 1/n^2 \rightarrow 0$  alors  $Y_n \xrightarrow{P} Y$ .
- ▶  $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr[Y_n \neq Y] = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6 < \infty$  alors  $Y_n \xrightarrow{a.s.} Y$ .

Pour la suite  $Z_n$  :

- ▶  $\Pr[Z_n \neq Z] = 1/n \rightarrow 0$  alors  $Z_n \xrightarrow{P} Z$ .
- ▶ Mais  $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr[|Z_n - Z| \geq 1] = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$ .
- ▶ Si  $Z_n = 1_{[0,1/n]}$  et  $P$  est la mesure de Lebesgue sur  $\Omega = [0, 1]$ ,  
(comme dans l'exemple de la diapo précédente)  
 $P(Z_n \rightarrow Z) = 1$  (la condition est suffisante, pas nécessaire).
- ▶ Par contre, si les  $Z_n$  sont indépendants, par Borel-Cantelli (ii)

$$P(|Z_n - Z| = 1 \text{ i.o.}) = 1, \quad P(Z_n \rightarrow Z) = 0.$$

# Une faible loi de grands nombres

- ▶ Une faible loi de grands nombres :
  - ▶ Soit  $X_1, X_2, \dots$  des v.a. indépendents,  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
  - ▶ Supposez que pour tous  $n$ ,  $E[X_n] = m < \infty$  et  $\text{Var}[X_n] < v < \infty$ .
  - ▶ Alors  $S_n \xrightarrow{P} m$ .
- ▶ Preuve :
  - ▶ Pour tous  $n$ ,  $E[S_n] = m$  et  $\text{Var}[S_n] \leq v/n$ .
  - ▶ Par l'inégalité de Chebyshev,  $P(|S_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{v}{n} \frac{1}{\epsilon^2} \rightarrow 0$ .

# Une forte loi de grands nombres

- ▶ Une forte loi de grands nombres
  - ▶ Soit  $X_1, X_2, \dots$  des v.a. indépendents,  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
  - ▶ Supposez que pour tous  $n$ ,  $E[X_n] = m < \infty$ ,  
 $E[(X_n - m)^4] \leq a < \infty$ .
  - ▶ Alors  $P(S_n \rightarrow m) = 1$ .

## Preuve, forte loi de grands nombres

- Notez que  $(X_i - m)^2 \leq (X_i - m)^4 + 1$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . (Si  $(X_i - m)^2 > 1$ ,  $(X_i - m)^2 < (X_i - m)^4$ .)
- Supposez que  $m = 0$ , sans perte de généralité.
- Remarquez que  $S_n^4 = \frac{1}{n^4} \sum_{i,j,k,l} X_i X_j X_k X_l$ .
- Alors

$$\begin{aligned} E[S_n^4] &= \frac{1}{n^4} \sum_{i,j,k,l} E[X_i X_j X_k X_l] \\ &= \frac{1}{n^4} \left[ \sum_i E[X_i^4] + \binom{4}{2} \sum_i \sum_{j>i} E[X_i^2 X_j^2] \right] \\ &\leq \frac{1}{n^4} (na + 3n(n-1)v^2). \end{aligned}$$

- Alors

$$P(|S_n| \geq \epsilon) = P(|S_n|^4 \geq \epsilon^4) \leq \frac{a + 3v^2}{n^2 \epsilon^4}$$

et la somme suivante converge :  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \geq \epsilon) < \infty$ .



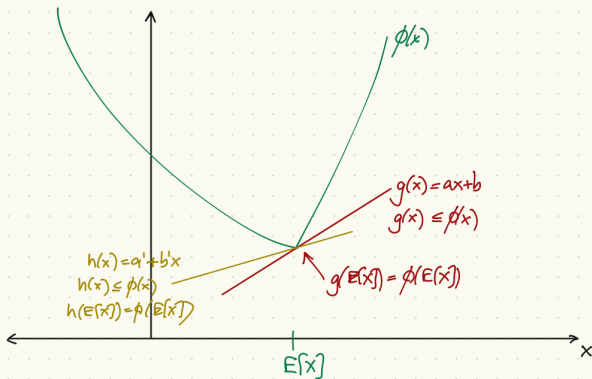
# Inégalité de Jensen

- ▶ Soit  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe.
- ▶ Soit  $X$  une v.a. avec  $E[X]$  fini.
- ▶ Par la convexité de  $\phi$ , il y a une fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que
  - ▶  $g(x) = ax + b$
  - ▶  $g(x) \leq \phi(x)$
  - ▶  $g(E[X]) = \phi(E[X])$
- ▶ Il est possible que  $\phi$  n'ait pas de dérivée à  $E[X]$ , auquel cas  $g$  n'est pas unique.
- ▶ L'inégalité de Jensen :

$$E[\phi(X)] \geq E[g(X)] = aE[X] + b = \phi(E[X]).$$

- ▶ Note : Si  $g$  n'est pas unique, tous les choix donnent le même résultat.

# Inégalité de Jensen



# Applications de l'inégalité de Jensen

1. Kurtosis  $K$ , s'il existe, vérifie  $K \geq 1$ , où

$$K \equiv \frac{E[(Z - \mu)^4]}{E[(Z - \mu)^2]^2}.$$

Supposons que les quatre premiers moments existent et sont finis. Soit  $Y = Z - \mu$ . Prenez  $\phi(x) = x^2$ ,  $X = Y^2$ .

2. Kurtosis d'un mélange-échelle  $Z$  de v.a. gaussiennes. Soit  $Y = Z - \mu$ .

$$E[Y^4] = E[E[Y^4|\sigma^2]] = E[3\sigma^4] \geq 3E[\sigma^2]^2,$$

$$E[Y^2] = E[E[Y^2|\sigma^2]] = E[\sigma^2],$$

$$K \geq 3.$$

Première équation :  $X = \sigma^2$ ,  $\phi(x) = x^2$ .

3. La fonction d'utilité  $u(x)$  concave, richesse  $X$ . ( $\phi(x) = -u(x)$ )

$$-E[u(X)] = E[-u(X)] \geq -u(E[X]), \quad u(E(X)) \geq E[u(X)].$$

# Une note sur les distributions

- ▶ La fonction de répartition :  $F(x) \equiv \Pr[(-\infty, x]]$ .
- ▶ Monotonie de  $F$  par monotonie de probabilité.
- ▶ Continuité à droite :  
 $x_n \searrow x \Rightarrow (-\infty, x_n] \searrow (-\infty, x] \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x)$ , par continuité de probabilité.
- ▶ Continuité à gauche? :  $x_n \nearrow x, x_n < x \Rightarrow (-\infty, x_n] \nearrow (-\infty, x) \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x) - \Pr[\{x\}]$ .
- ▶  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = P(\Omega) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = P(\emptyset) = 0$  par continuité de probabilité.

# Aperçu des chapîtres 9 et 10

- ▶ Chapitre 9

- ▶ Lemme de Fatou
- ▶ Théorème de convergence monotone, une méthode plus flexible de démontrer  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]$ .
- ▶ Deux applications : les dérivées des espérances, la fonction génératrice des moments.

- ▶ Chapitre 10

- ▶ Convergence faible, en loi