ECN 7060, Cours 1

William McCausland

2022-09-06

Matières

Partie 1, Livre de Rosenthal

- Espaces de probabilité, le théorème d'extension
- Variables aléatoires, lois, indépendance
- Espérance
- Convergence en probabilité, convergence presque sûre
- Fonctions caractéristiques, convergence en loi, le théorème centrale limite
- Probabilité et espérance conditionnelles

Partie 2, Livre de Casella et Berger

- Statistiques exhaustives et libres, principe de vraisemblance
- Estimation ponctuelle, fréquentiste et bayésienne
- Estimation d'intervalle, fréquentiste et bayésienne
- Tests d'hypothèse, fréquentistes et bayésiens
- Prévision, fréquentiste et bayésienne

Les éléments de la note finale :

1. Quiz : 20% (meilleures $n-1$ de $n \approx 9$)
2. Examen intra : 35% (à remettre le 2 novembre avant 12h)
3. Examen final : 45% (le 21 décembre)

Le cycle de mercredi 13h à mardi soir

1. Mardi 18h - Mercredi 12h, par StudiUM
   - quiz sur les lectures (sur la matière du cours du même jour)
2. Mercredi 13h-16h, cours
   - enseignement magistral avec participation des étudiants
   - aperçu de la matière de la semaine suivante
3. Mercredi avant la fin de la journée
   - correction du quiz du cours actuel
   - solutions du quiz mise au site web (parfois)
   - mise à jour du document “Devoirs et Lectures”
     - devoirs sur la matière du cours actuel
     - lectures sur la matière de la semaine suivante
     - questions sur la matière de la semaine suivante
4. Lundi 13h-14h30, séance de travail pratique
   - discussion des devoirs avec Sawadogo, le moniteur
5. Mardi soir
   - chargement des diapos du lendemain

Communications

1. Documents à mon site web :
   https://mccauslw.github.io/ECN7060.html
   - Diapos (un fichier pour chaque cours)
   - Devoirs et lectures (un fichier)
   - Examens précédents
2. StudiUM
   - Nouvelles
   - Questions et réponses écrites

Attentes :

Avant le cours

1. Avoir lu les lectures, pouvoir répondre aux questions simples

Avant la séance TP

1. Avoir essayé (idéalement complété) les devoirs

Espaces de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans un monde fini

1. Ω, l'*espace d'états* (exactement un état $\omega \in \Omega$ se produit)
2. $\mathcal{F}$, algèbre, un ensemble d'événements (des parties de Ω)
3. $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$, une probabilité

Exemple :

1. $\Omega = \{0, 1\}$
2. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} = 2^{\Omega}$
3. $P(\cdot)$ selon le tableau suivant :

A	$P(A)$
$\emptyset$	0
$\{0\}$	0.4
$\{1\}$	0.6
$\{0,1\}$	1

Jugements cohérents (de Finetti et Ramsey)

- Ensemble d'états du monde : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$
  - ω_1: Le parti CAQ gagne l'élection du 3 octobre au Québec.
  - ω_2: Le parti CAQ ne gagne pas.
- Un agent offre des prix (un prix est à la fois le cours acheteur et le cours vendeur) pour tous ces contrats :
  1. paie 1\$ si ni ω_1 ni ω_2 se produit (l'événement $\emptyset$)
  2. paie 1\$ si ω_1 se produit (l'événement $\{\omega_1\}$)
  3. paie 1\$ si ω_2 se produit (l'événement $\{\omega_2\}$)
  4. paie 1\$ si ω_1 ou ω_2 se produit (l'événement $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$)
- Cet ensemble de jugements est *cohérent* si un autre ne peut pas faire un profit sûr peu importe le résultat.
- Il est cohérents ssi les prix vérifient les axiomes de probabilité.
- Contribution de Ramsey : accommoder l'aversion pour le risque et mesurer à la fois les jugements de probabilité et l'utilité.
- Ch. 2 de Diaconis et Skyrms, "Ten Great Ideas about Chance".

Quatre “probabilités’ ’ sur $(\Omega, 2^\Omega)$ où $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$

$A \in \mathcal{F} = 2^\Omega$	1	2	3	4
$\emptyset$	0.2	0	0	0
$\{\omega_1\}$	2.0	0.6	0.01	0.9
$\{\omega_2\}$	-1	0.5	0.99	0.0
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$	0	1	1	1

Interprétation fréquentiste de probabilité

- Venn et (Richard) von Mises essaient de définir la probabilité en termes des (limites des) fréquences des événements semblables.
- Plusieurs fréquentistes rejettent l'aspect subjectif des définitions qui reposent sur les jugements cohérents.
- Difficultés conceptuelles :
  1. Définition de « semblable » qui évite et des tautologies et des situations où toutes les probabilités sont 0 ou 1.
  2. L'irréalité des fréquences infinies
  3. La possibilité des fréquences sans limite.
- Ch. 4 de Diaconis et Skyrms, "Ten Great Ideas about Chance".

Quelles propriétés $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ devrait-il posséder (Ω fini)?

Propriétés désirables :

1. Additivité finie :

$$A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
3. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$,
4. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c, A \cup B, A \cap B \in \mathcal{F}$

Par 3 et 4, $\mathcal{F}$ est une algèbre, pas forcément une tribu.

Une façon de spécifier une probabilité :

1. Stipuler $\{\omega\} \in \mathcal{F}$, donner $P(\{\omega\}) = p_\omega \geq 0$, $\omega \in \Omega$, telles que $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.
2. Laisser les axiomes donner l'extension avec $\mathcal{F} = 2^\Omega$ et les probabilités

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega, \; A \subseteq \Omega.$$

Dénombrable ou non?

Un ensemble S est

- *dénombrable* s'il existe une fonction injective de S vers $\mathbb{N}$,
- *infini dénombrable* s'il existe une fonction bijective de S vers $\mathbb{N}$,
- *indénombrable* s'il n'est pas dénombrable.

Quelques ensembles :

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$
2. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$
3. $\mathbb{Z}^2$
4. $\mathbb{Q} = \{a/b \colon a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
5. $\mathbb{Z}^n$
6. $[0, 1)$, $\mathbb{R}$
7. $2^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$
8. L'ensemble des fonctions $f \colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$
9. L'ensemble des fichiers finis (livres, documents, dessins, audio, vidéo, programmes informatiques)

Démonstration que $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrable

Démonstration que $[0, 1)$ est indénombrable

Une liste présumée d'éléments de $[0, 1)$

n	
1	0.3141595358979 ...
2	0.0100000000000 ...
3	0.01011011101111 ...
4	0.1000 ...
5	0.000090000900009 ...
⋮	⋮

Construction d'un élément de $[0, 1)$ qui n'est pas dans la liste

Démonstration que $2^{\mathbb{N}}$ est dénombrable

Une liste présumée de parties de $\mathbb{N}$ ($S_1 = \{1, 4, 5, 7, 9, \ldots\}$)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
1	✓			✓	✓		✓		✓	...
2		✓	✓			✓				...
3	✓	✓		✓		✓		✓		...
4			✓	✓		✓		✓		...
5	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓		...
⋮	⋮									

Construction d'une partie de $\mathbb{N}$ qui n'est pas dans la liste

Ensembles que ressemblent à $2^{\mathbb{N}}$

1. $[0,1)$ ($x_i = \sum_{j \in S_i} 2^{-j}$)
2. ensemble de fonctions $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$
3. ensemble de suites infinies de tirages à pile ($\notin$) ou face ($\in$)

Exemples de Ω : finis, dénombrables, indénombrables

1. $\Omega = \{1, \dots, n\}$
2. $\Omega = \{(r_1, \dots, r_n) \colon r_i \in \{0, 1\}\}$
3. $\Omega = \{(r_1, \dots, r_n) \colon r_i \in \mathbb{Z}\}$
4. $\Omega = \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$
5. $\Omega = \{(r_1, \dots) \colon r_i \in \{0, 1\}\}$
6. $\Omega = [0, 1]$
7. $\Omega = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}_+$.
8. $\Omega = \mathbb{R}^n$

Propriétés de $\mathbb{Q}$

La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

1. Entre $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, il y a un nombre dénombrable de rationnels.
2. Pour chaque nombre réel x, il y a une suite dans $\mathbb{Q}$ qui converge à x.

Autres propriétés

1. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
2. Il n'y a pas de liste ordonnée d'éléments de $\mathbb{Q}$.
3. Selon l'espace de probabilité pour la loi uniforme sur $U(0,1)$,

$$\Pr([0,1]) = 1, \text{ mais } \Pr([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0.$$

Construire $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour la loi uniforme $[0, 1]$

Premier essai: $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, trouver une P qui vérifie

1. $P([a, b]) = P((a, b]) = P([a, b)) = P((a, b)) = b - a$ pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$.
2. $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{F}$ disjoints $\Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
3. $P(A \oplus r) = P(A)$, $0 \leq r \leq 1$.

Impossible! Preuve :

1. Définir $x \sim y$ ssi $y - x \in \mathbb{Q}$; $\sim$ est transitive et réflexive.
2. Partitionner $[0, 1]$ en classes d'équivalence : $\{0, 1/3, 1/5, \ldots\}$, $\{\pi - 3, \pi - 3.1, \pi - 3.14, \ldots\}$, $\{e - 2.7, e - 2.71, e - 2.717\}$, etc.
3. Construire H, un ensemble avec un élément de chaque classe.
4. Noter que $[0, 1] = \cup_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} (H \oplus r)$ (ensembles disjoints).
5. Constater l'implication impossible :

$$1 = P(\Omega) = \sum_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} P(H \oplus r) = \sum_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} P(H)$$

La construction d'un espace de probabilité

Supposez que l'espace d'états Ω est donné, on doit spécifier $\mathcal{F}$ et P. On veux

1. un système cohérent (qui vérifie certains axiomes)
2. une façon de spécifier une partie de P et laisser les axiomes déterminer le reste
3. une tribu $\mathcal{F}$ faisable mais assez riche qu'elle contient les événements d'intérêt.

La semaine prochaine on développe un outil important pour la construction des espaces de probabilité.

Axiomes de probabilités

Un espace de probabilité est un $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que

1. $\Omega \neq \emptyset$;
2. $\mathcal{F}$ satisfait
   a. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$,
   b. $A \in \mathcal{F} \to A^c \in \mathcal{F}$,
   c. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \to \cup_{i=1}^{\infty} A_i, \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$;
3. $P \colon \mathcal{F} \to [0, \infty)$ satisfait
   a. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
   b. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ disjoints $\to P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Mesures

- Si $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω, $(\Omega, \mathcal{F})$ est un *espace mesurable*.
- Une probabilité $P\colon \mathcal{F} \to [0, \infty)$ (ou mesure de probabilité) vérifie $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, additivité dénombrable.
- Une mesure $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, \infty)$ vérifie $\mu(\emptyset) = 0$, additivité dénombrable.
  - On relâche la normalisation $P(\Omega) = 1$.
  - Applications : calcul de longeur, aire, volume, masse; intégration
- Une mesure signée $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ vérifie $\mu(\emptyset) = 0$, additivité dénombrable.
  - On relâche aussi la non-négativité de μ.
  - Applications : charge électrique, intégration
- Plusieurs théorèmes dans le cours s'appliquent aux mesures, pas seulement les mesures de probabilité.

Aperçu, Rosenthal chapitre 2

1. Construction d'un espace de probabilité à partir d'une semi-algèbre
2. Le théorème d'extension
3. Construction d'un espace de probabilité pour la loi uniforme sur $[0, 1]$
4. Construction d'un espace de probabilité pour un modèle du tirage répété au pile ou face