

# ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers, Hiver 2021

## Cours 3

William McCausland

2021-02-01

# Plan

1. Comment spécifier un processus ARMA(p,q).
2. Comment trouver la fonction d'autocorrélation d'un processus ARMA(p,q).
3. Comment estimer les paramètres d'un processus ARMA(p,q).
4. Comment sélectionner les ordres d'un processus ARMA(p,q).

## Commentaires préliminaires

1. On focalise sur les processus covariance-stationnaires  $r_t$ .
2. Tous les moments d'ordre un et deux de  $r_t$  se trouvent dans la moyenne  $\mu$  et la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$
3. Spécification alternative : moyenne  $\mu$ , variance  $\sigma^2$  et fonction d'autocorrélation  $\rho_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , avec  $\sigma^2 = \gamma_0$ ,  $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$ .
4. On peut trouver les moments d'ordre un et deux de toutes les fonctions linéaires des  $r_t$  si on connaît  $\mu$ ,  $\gamma_k$ ,  $k = 1, \dots$
5. Un processus gaussien est complètement spécifié par ces moments d'ordre un et deux.
6. Il est très utile de définir un processus  $r_t$  en termes d'une transformation d'un bruit blanc  $a_t$  telle que la valeur  $r_t$  dépend seulement du passé ( $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots$ ) et l'innovation  $a_t$ .
7. Pour aujourd'hui, la notation  $a_t$  signifie toujours un bruit blanc et on suppose que  $r_t$  est toujours un processus covariance-stationnaire.

# Modèle AR(1) : spécification

AR(1) avec moyenne zéro, expressions équivalentes:

- ▶  $r_t = \phi r_{t-1} + a_t$
- ▶  $(1 - \phi B)r_t = a_t$
- ▶  $r_t = (1 - \phi B)^{-1}a_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} \phi^{\tau} B^{\tau} a_t$ :
  - ▶  $r_t = \phi r_{t-1} + a_t = \phi(\phi r_{t-2} + a_{t-1}) + a_t = a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 r_{t-2}$ .
  - ▶ remplace  $r_{t-2}$  par  $\phi r_{t-3} + a_{t-2}$  pour obtenir  
 $r_t = a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \phi^3 r_{t-3}$ , etc.
  - ▶  $r_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} \phi^{\tau} a_{t-\tau}$ .

AR(1) avec moyenne  $\mu$ , expressions équivalentes:

- ▶  $(1 - \phi B)(r_t - \mu) = a_t$
- ▶  $r_t = (1 - \phi)\mu + \phi r_{t-1} + a_t$
- ▶  $r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t$ , si  $\phi_0 = (1 - \phi)\mu$  et  $\phi_1 = \phi$ .

## Modèle AR(1) : Calcul de la fonction d'autocovariance II

- Supposons que  $\mu = 0$ ,  $\phi$  et  $\sigma_a^2 \equiv \text{Var}[a_t]$  sont donnés.

### Équations Yule-Walker pour trouver $\gamma_0, \gamma_1$

- Multipliez  $r_t = \phi r_{t-1} + a_t$  par  $r_t, r_{t-1}$  et prenez les espérances :

$$E[r_t^2] = \phi E[r_t r_{t-1}] + E[r_t a_t] \quad \text{ou} \quad \gamma_0 = \phi \gamma_1 + \sigma_a^2,$$

$$E[r_{t-1} r_t] = \phi E[r_{t-1}^2] + E[r_{t-1} a_t] \quad \text{ou} \quad \gamma_1 = \phi \gamma_0.$$

- La solution est  $\gamma_0 = \sigma_a^2 / (1 - \phi^2)$ ,  $\gamma_1 = \phi \sigma_a^2 / (1 - \phi^2)$ .

### Récursion pour trouver $\gamma_k, k > 1$

- Pour  $k > 1$ ,

$$\gamma_k = E[r_t r_{t-k}] = E[(\phi r_{t-1} + a_t) r_{t-k}] = \phi \gamma_{k-1}.$$

## Modèle AR(1) : Calcul de la fonction d'autocovariance II

- ▶ Avec la solution des équations Y-W et la récursion, on obtient la fonction d'autocovariance

$$\gamma_k = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi^2} \phi^k,$$

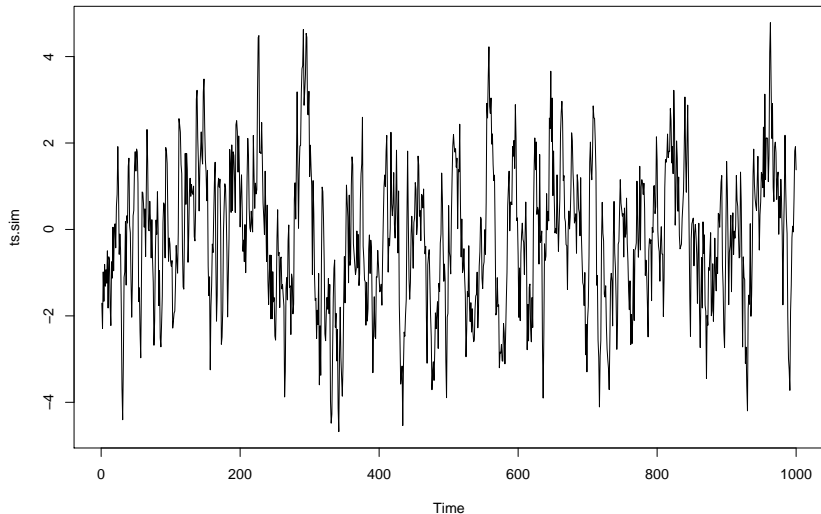
et la fonction d'autocorrélation

$$\rho_k = \phi^k.$$

- ▶ La fonction d'autocorrélation diminue à un taux exponentiel.
- ▶ La valeur  $\phi^{-1}$  est la racine du polynôme caractéristique  $1 - \phi x$ , où  $x$  remplace  $B$  dans l'expression  $1 - \phi B$ .
- ▶ La stationnarité implique  $|\phi| < 1$  ou  $|\phi^{-1}| > 1$ .

## Modèle AR(1) : Simulation

```
ts.sim = arima.sim(n=1000, list(ar=0.8, sd = 0.1))  
ts.plot(ts.sim)
```



# Introduction au modèle AR(2)

- ▶ Mettons que  $s_t$  est un AR(1) :  $(1 - \omega_1 B)s_t = a_t$ .
- ▶ Définissons  $r_t$  par  $(1 - \omega_2 B)r_t = s_t$ .
- ▶ Attention :  $r_t$  n'est pas un AR(1) parce que  $s_t$  n'est pas un bruit blanc.
- ▶ Notez que  $(1 - \omega_1 B)(1 - \omega_2 B)r_t = a_t$ .
- ▶ Autrement dit,  $[1 - (\omega_1 + \omega_2)B + \omega_1\omega_2 B^2]r_t = a_t$ .
- ▶ Alors  $r_t$  est un AR(2).
- ▶ Notez la symétrie  $(1 - \omega_1 B)(1 - \omega_2 B) = (1 - \omega_2 B)(1 - \omega_1 B)$  : l'ordre des opérations n'importe pas.



# Modèle AR(2) avec moyenne zéro : spécification

Expressions équivalentes pour un AR(2):

$$(1 - \omega_1 B)(1 - \omega_2 B)r_t = a_t$$

$$[1 - (\omega_1 + \omega_2)B + \omega_1\omega_2 B^2]r_t = a_t$$

$$(1 - \omega_2 B)(1 - \omega_1 B)r_t = a_t$$

$$r_t = (\omega_1 + \omega_2)r_{t-1} - \omega_1\omega_2 r_{t-2} + a_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)r_t = a_t, \text{ où } \phi_1 = \omega_1 + \omega_2, \phi_2 = -\omega_1\omega_2$$

$$r_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)^{-1} a_t$$

## Notes

- ▶ Remarquez que  $(1 - \omega_1 x)(1 - \omega_2 x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2$ .
- ▶ Alors  $\omega_1^{-1}$  et  $\omega_2^{-1}$  sont les deux racines de  $1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2$ .

# Racines du polynôme caractéristique et la stationnarité

- Les racines  $\omega_1^{-1}$  et  $\omega_2^{-1}$  sont réelles ou sont complexes conjuguées :

$$\omega_1^{-1} = a + bi, \quad \omega_2^{-1} = a - bi,$$

pour  $a$  et  $b$  réels.

- Dans les deux cas, la stationnarité implique  $|\omega_1| < 1$  et  $|\omega_2| < 1$
- Condition équivalente :  $|\omega_1^{-1}| > 1$  et  $|\omega_2^{-1}| > 1$ .
- Si  $(\omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}) = a \pm bi$ ,  $|\omega_1^{-1}| = |\omega_2^{-1}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,

$$(\omega_1, \omega_2) = \frac{a \mp bi}{a^2 + b^2}.$$

# Modèle AR(2) : Calcul de la fonction d'autocovariance I

## Équations Yule-Walker pour trouver $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$

- Multipliez  $r_t = \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + a_t$  par  $r_t, r_{t-1}, r_{t-2}$  et prenez l'espérance:

$$E[r_t^2] = \phi_1 E[r_t r_{t-1}] + \phi_2 E[r_t r_{t-2}] + E[r_t a_t],$$

$$E[r_{t-1} r_t] = \phi_1 E[r_{t-1}^2] + \phi_2 E[r_{t-1} r_{t-2}] + E[r_{t-1} a_t],$$

$$E[r_{t-2} r_t] = \phi_1 E[r_{t-2} r_{t-1}] + \phi_2 E[r_{t-2}^2] + E[r_{t-2} a_t].$$

- En termes de  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ,

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_a^2,$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1,$$

$$\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0.$$

- On trouve la solution  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  pour  $\phi_1, \phi_2$  et  $\sigma_a^2$  donnés.

## Modèle AR(2) : Calcul de la fonction d'autocovariance II

### Récursion pour trouver $\gamma_k$ , $k > 2$

- Une récursion qui donne une équation de différence pour  $\gamma_k$  :

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E[r_t r_{t-k}] = E[(\phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + a_t) r_{t-k}] \\ &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}.\end{aligned}$$

- La solution générale de cette équation de différence linéaire de 2e ordre est (pourvu que  $\omega_1 \neq \omega_2$ )

$$\gamma_k = c_1 \omega_1^k + c_2 \omega_2^k,$$

où  $\omega_1^{-1}$  et  $\omega_2^{-1}$  sont les deux racines de  $1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2$ .

- On peut trouver  $c_1$  et  $c_2$  avec les valeurs initiales  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ .
- Signification : une description des ailes de la fonction d'autocorrélation.

## Fonction d'autocovariance pour quelques processus AR(2)

1.  $\omega_1 = \omega_2 = 0.4$  :

$$(1 - 0.4B)(1 - 0.4B) = 1 - 0.8B + 0.16B^2.$$

2.  $\omega_1 = -0.1, \omega_2 = 0.9$  :

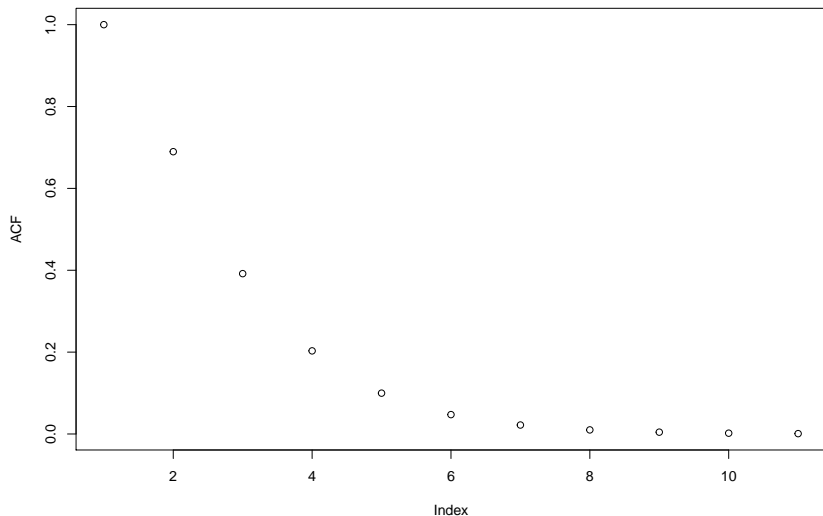
$$(1 + 0.1B)(1 - 0.9B) = 1 - 0.8B - 0.09B^2.$$

3.  $\omega_1 = 0.4 + 0.5i, \omega_2 = 0.4 - 0.5i$  :

$$(1 - (0.4 + 0.5i)B)(1 - (0.4 - 0.5i)B) = 1 - 0.8B + 0.41B^2.$$

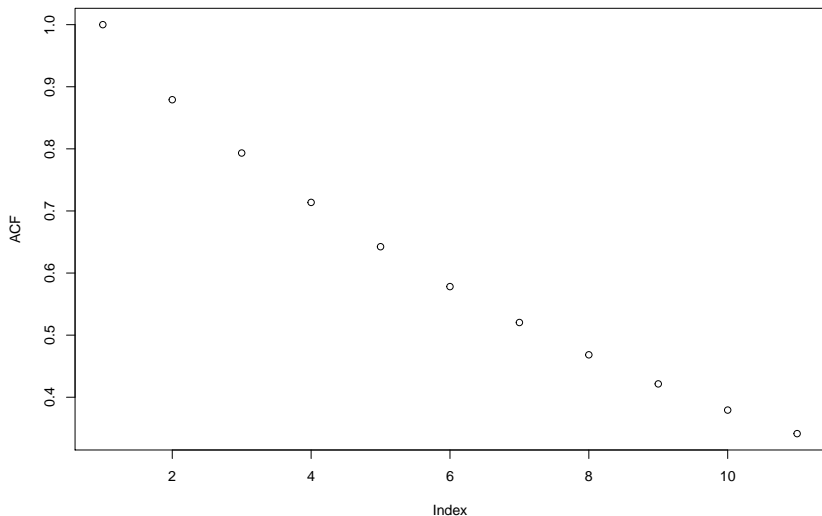
## ACF pour $\omega_1 = \omega_2 = 0.4$

```
ACF = ARMAacf(ar = c(0.8, -0.16), lag.max=10)  
plot(ACF)
```



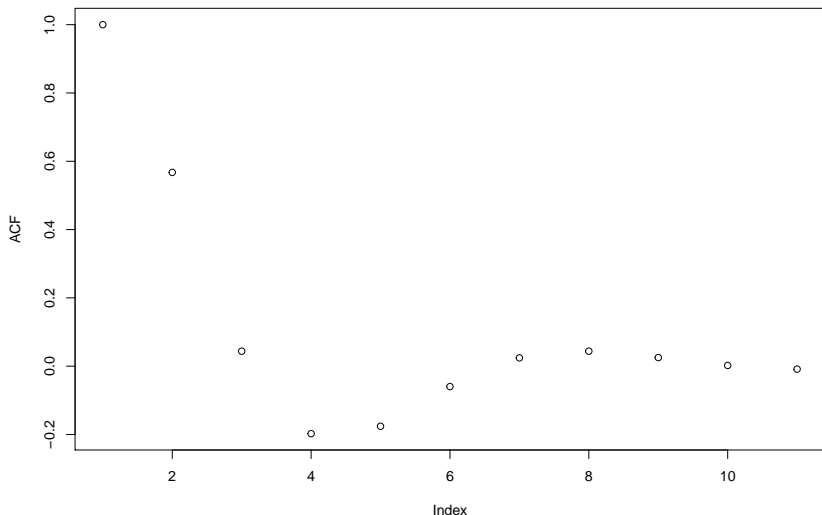
ACF pour  $\omega_1 = -0.1$ ,  $\omega_2 = 0.9$

```
ACF = ARMAacf(ar = c(0.8, 0.09), lag.max=10)  
plot(ACF)
```



ACF pour  $\omega_1 = 0.4 + 0.5i$ ,  $\omega_2 = 0.4 - 0.5i$

```
ACF = ARMAacf(ar = c(0.8, -0.41), lag.max=10)  
plot(ACF)
```





## Extensions aux AR(p)

- ▶ Même approche pour trouver la fonction d'autocovariance :
  - ▶  $(p + 1)$  équations linéaires Yule-Walker pour calculer les  $(p + 1)$  variables inconnues  $\sigma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$  à partir de  $\sigma_a^2$  et  $\phi_1, \dots, \phi_p$ .
  - ▶ Une récursion donne  $\gamma_k$  en termes de  $\gamma_{k-1}, \dots, \gamma_{k-p}$ ,  $k > p$ .
- ▶ Si  $\omega_1^{-1}, \dots, \omega_p^{-1}$  sont les racines de  $(1 - \phi_1 x - \dots - \phi_p x^p)$ ,

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) = (1 - \omega_1 B) \cdots (1 - \omega_p B),$$

- ▶ La stationnarité implique  $|\omega_i^{-1}| > 1$  (ou  $|\omega_i| < 1$ ),  $i = 1, \dots, p$ .
- ▶ La fonction d'autocovariance vérifie, pour  $k > p$ , si les  $\omega_i$  sont distincts.

$$\gamma_k = c_1 \omega_1^k + \dots + c_p \omega_p^k$$

et  $\gamma_0, \dots, \gamma_p$  détermine  $c_1, \dots, c_p$ .

- ▶ Conséquence : la fonction d'autocorrélation d'un AR(p) diminue de taux exponentiel.
- ▶ Il peut y avoir des paires  $(\omega_i, \omega_j) = a \pm bi$ , mais les  $\gamma_k$  sont toujours réels.

## ARMA(p,q) : 3 représentations

### 1. Représentation ARMA(p,q)

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) r_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t.$$

$$\phi(B) r_t = \theta(B) a_t$$

### 2. Représentation MA infinie

$$\frac{\theta(B)}{\phi(B)} = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots \equiv \psi(B)$$

$$r_t = \psi(B) a_t$$

### 3. Représentation AR infinie (si le processus est invertible)

$$\frac{\phi(B)}{\theta(B)} = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots \equiv \pi(B)$$

$$\pi(B) r_t = a_t$$

# Calcul de la fonction d'autocovariance d'un ARMA(p,q)

- ▶ L'équation ARMA:

$$r_t = \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_p r_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

- ▶ Multiplie par  $r_{t-h}$  et prenez l'espérance:

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} - \dots - \phi_p \gamma_{h-p} - \theta_h E[a_{t-h} r_{t-h}] - \dots - \theta_q E[a_{t-q} r_{t-h}]$$

- ▶ En utilisant la représentation MA infinie,

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} - \dots - \phi_p \gamma_{h-p} - \theta_h \psi_0 \sigma_a^2 - \dots - \theta_q \psi_{q-h} \sigma_a^2$$

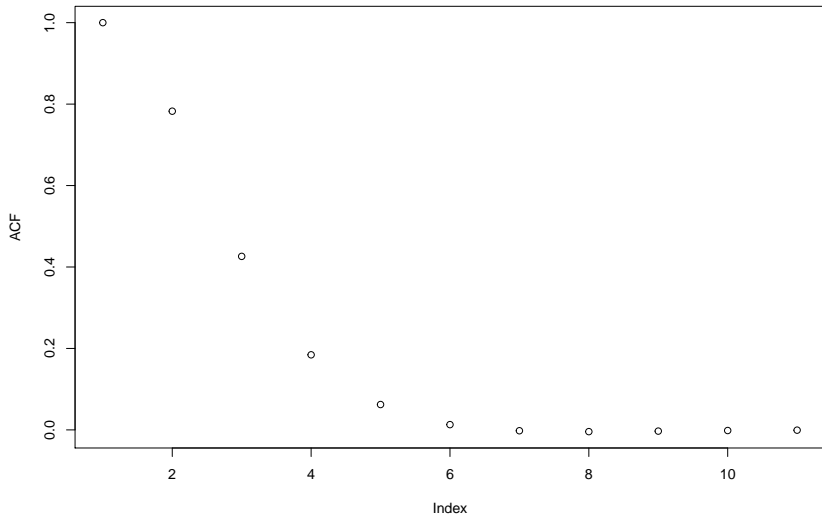
- ▶ Les équations pour  $h = 0, 1, \dots, p$  donnent  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$ .
- ▶ Pour  $h > \max(p, q)$ , c'est comme un AR(p) :

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} - \dots - \phi_p \gamma_{h-p},$$

alors les racines du polynome caracteristique déterminent le taux de diminution de la ACF.

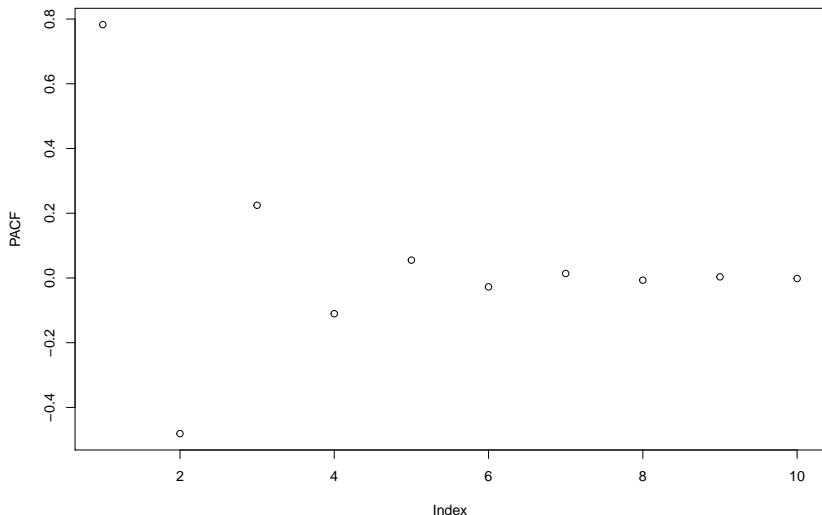
## Exemple : ACF d'un processus ARMA(p,q)

```
ACF = ARMAacf(ar = c(0.8, -0.2), ma = c(0.5), 10)  
plot(ACF)
```



## Exemple : PACF d'un processus ARMA(p,q)

```
PACF = ARMAacf(ar = c(0.8, -0.2), ma = c(0.5), 10, pacf=TRUE)  
plot(PACF)
```



# Estimation des paramètres des modèles ARMA(p,q)

- ▶ Pour  $p$  et  $q$  donné, on veut
  - ▶ trouver les estimateurs  $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}_a^2$  de  $\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p)$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$  et  $\sigma_a^2$ , pour un échantillon donné,
  - ▶ trouver la loi asymptotique des estimateurs.
- ▶ La méthode la plus courante : maximum de vraisemblance (MV) pour une vraisemblance gaussienne.
- ▶ Même si un ARMA(p,q) n'est pas gaussien, la loi asymptotique des estimateurs MV est pareille. (Un exemple de l'approche pseudo-maximum de vraisemblance)
- ▶ La théorie des lois asymptotiques des estimateurs MV et pseudo-MV est bien connue.
- ▶ En pratique, il faut, de façon efficace :
  - ▶ évaluer la fonction de vraisemblance,
  - ▶ maximiser cette fonction en se servant des évaluations.
- ▶ Les logiciels font tous le travail, mais il vaut la peine de comprendre ce qu'ils font.

# Évaluation de la vraisemblance gaussienne I

- ▶ Attention: voici une façon directe mais *très* inefficace.
- ▶ Soit  $r = (r_1, \dots, r_T)$ , un vecteur colonne.
- ▶ Si  $r$  est stationnaire et gaussien, sa densité est

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^{T/2}} |\Gamma|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (r - \mu)^\top \Gamma^{-1} (r - \mu) \right],$$

où  $\mu = E[r_t]$ ,

$$\iota = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{T-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{T-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{T-1} & \gamma_{T-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}.$$

- ▶ Pour évaluer la vraisemblance à  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma_a^2$  :
  - ▶ trouvez  $\mu, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{T-1}$  en fonction des coefficients, puis
  - ▶ évaluer l'expression  $f(r)$  ci-haut.

## Évaluation de la vraisemblance gaussienne II

- ▶ En pratique, cette façon directe d'évaluer la vraisemblance est très inefficace.
- ▶ Il y a des algorithmes pour évaluer la vraisemblance des ARMA(p,q) gaussiens.
- ▶ Remarquez par exemple que la vraisemblance d'un AR(1) est plus rapide à évaluer si on décompose la densité comme

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(1-\phi^2)^{-1}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(r_1 - \mu)^2}{\sigma_a^2(1-\phi^2)^{-1}} \right] \\ \times \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(r_t - \phi r_{t-1} - (1-\phi)\mu)^2}{\sigma_a^2} \right]$$

- ▶ Le coût de computation ici est linéaire en  $T$ .
- ▶ Le coût de l'évaluation directe est quadratique en  $T$ .



## Exemple en R de l'estimation des paramètres ARMA

```
t=read.table('m-ibm3dx2608.txt', header=T)
arima(t$vwrttn, order=c(3,0,1))
```

```
##
```

```
## Call:
```

```
## arima(x = t$vwrttn, order = c(3, 0, 1))
```

```
##
```

```
## Coefficients:
```

```
##          ar1          ar2          ar3          ma1  intercept
```

```
##      -0.0073  -0.0040  -0.1091   0.1245      0.0089
```

```
## s.e.    0.1860    0.0382    0.0319   0.1855      0.0017
```

```
##
```

```
## sigma^2 estimated as 0.002874:  log likelihood = 1501.07
```

## Sélection des ordres $p$ et $q$ d'un processus ARMA

- ▶ La vraisemblance maximale croît avec l'ajout d'un paramètre.
- ▶ On veut éviter le problème de surapprentissage (overfitting).
- ▶ Une façon de le faire est l'imposition d'un coût.
- ▶ Le critère AIC (Akaike Information Criterion) est

$$AIC(p, q) = -\frac{2}{T} \ln f(r; \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}_a^2) + \frac{2(p + q + 1)}{T}.$$

- ▶ Le critère BIC (Bayesian Information Criterion) est

$$BIC(p, q) = -\frac{2}{T} \ln f(r; \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}_a^2) + \frac{(p + q + 1) \ln T}{T}$$

- ▶ On choisit les ordres  $p$  et  $q$  qui minimisent AIC ou BIC.
- ▶ Si l'ARMA( $p, q$ ) est gaussien,

$$\hat{\sigma}_a^2 = -\frac{2}{T} \ln f(r; \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}_a^2).$$

alors augmenter la vraisemblance, c'est réduire la variance estimée de l'innovation.

# Cours 4, la semaine prochaine

## Plan préliminaire

1. Prédiction avec un ARMA( $p,q$ )
2. Modèles d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive
3. Introduction à l'inférence bayésienne
4. Modèles de volatilité stochastique