

# ECN 7060, Cours 3

William McCausland

2021-09-15

# Plan

1. Variables aléatoires
2. Indépendance
3. Continuité de probabilité

## Variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

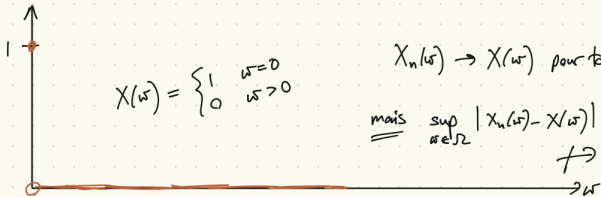
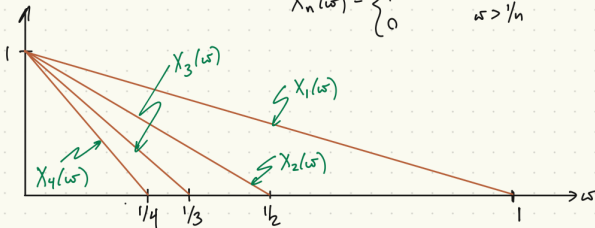
- ▶ Une fonction  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si

$$\{X \leq x\} \equiv \{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Soit  $X, Y, Z_1, Z_2, \dots$  des variables aléatoires,  $c > 0$ .
- ▶ Les fonctions suivantes sont-elles des variables aléatoires?
  1.  $1_A(\omega)$  où  $A \in \mathcal{F}$
  2.  $W(\omega) = cX(\omega)$
  3.  $W = \min(X, Y), W = \max(X, Y)$
  4.  $W = \inf_n Z_n, W = \sup_n Z_n$
  5.  $W = X + Y$
- ▶ Supposez que  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega)$  existe et égale  $Z(\omega)$  pour chaque  $\omega \in \Omega$ .  $Z(\omega)$  est-elle une variable aléatoire?
  - ▶ Notez le mode de convergence : ponctuel, pas uniforme

Convergence ponctuelle, pas uniforme

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 - n\omega & \omega \leq 1/n \\ 0 & \omega > 1/n \end{cases}$$



$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = 0 \\ 0 & \omega > 0 \end{cases}$$

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \text{ pour tous } \omega \in [0, \infty)$$

$$\text{mais } \sup_{\omega \in \Omega} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 1 \text{ pour tous } n \not\rightarrow 0$$

## Fonctions indicatrices

Notation pour une fonction indicatrice sur  $\Omega$ , où  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est un espace de probabilité :

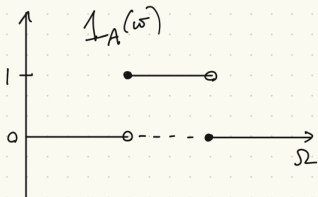
$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \subseteq \Omega, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Si  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\{\omega \in \Omega : 1_A(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \Omega & x \geq 1, \\ A^c & 0 \leq x < 1, \\ \emptyset & x < 0, \end{cases}$$

et  $\emptyset, A^c, \Omega \in \mathcal{F}$ . Alors  $1_A(\omega)$  est une variable aléatoire.

pré-images par une fonction indicatrice



$$\{ \omega \in \Omega : 1_A(\omega) \leq x \}$$

?

?

?

## Multiplication scalaire

Soit  $X(\omega)$  une variable aléatoire,  $c > 0$  et  $W(\omega) \equiv cX(\omega)$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega: W(\omega) \leq x\} &= \{\omega \in \Omega: cX(\omega) \leq x\} \\ &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x/c\} \\ &\in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

En notation plus simple :

$$\{W \leq x\} = \{cX \leq x\} = \{X \leq x/c\} \in \mathcal{F}.$$

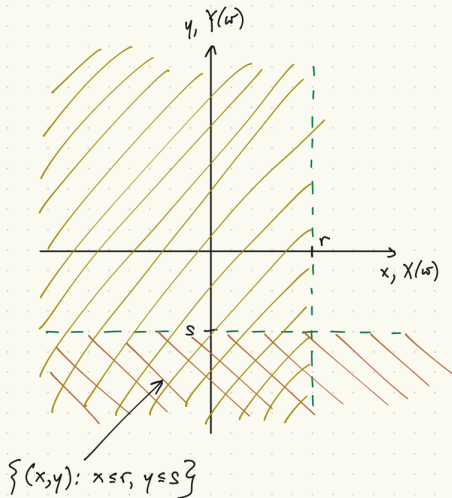
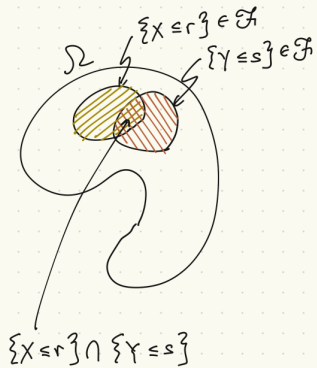
Notes :

- pour le cas  $c < 0$  il faut utiliser

$$\{W \leq x\} = \{X \geq x/c\} = (\cup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x/c - 1/n\})^c \in \mathcal{F}.$$

- pour  $c = 0$ ,  $W = 0$  est trivialement une variable aléatoire.

Deux variables aléatoires





## Discussion : minimum, maximum, infimum

Rappel :  $X, Y, Z_1, Z_2, \dots$  sont des variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

1.  $W = \min(X, Y)$
2.  $W = \max(X, Y)$
3.  $W = \inf_n Z_n$

## Addition

Soit  $X(\omega)$  et  $Y(\omega)$  deux variables aléatoires sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Soit  $W(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ .

Pour tout  $w \in \mathbb{R}$ ,

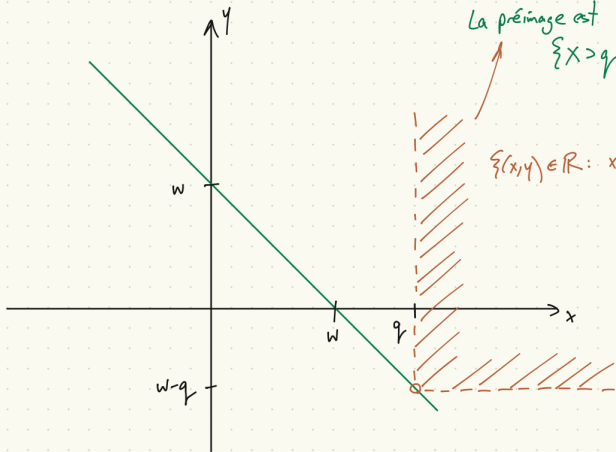
$$\begin{aligned}\{W > w\} &= \cup_{q \in \mathbb{Q}} (\{X > q\} \cap \{Y > w - q\}) \\ &= \cup_{q \in \mathbb{Q}} (\{X \leq q\}^c \cap \{Y \leq w - q\}^c) \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

Alors  $\{W \leq w\} = \{W > w\}^c \in \mathcal{F}$ .

Notes pour la première équation :

- ▶ Pour inclure le point  $(x, w - x + \epsilon)$  arbitraire qui vérifie  $x + y > w$ , choisit  $q \in (x - \epsilon, x)$ .
- ▶ Entre deux nombres réels, il y a toujours un nombre rationnel (la densité des rationnels dans les réels).

La somme  $X(w) + Y(w)$



La préimage est  
 $\{X > q\} \cap \{Y > w-q\}$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > q \text{ et } y > w-q\}$

## Limites ponctuelles

Supposez que  $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Z(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .

Alors

$$\begin{aligned}\{Z \leq x\} &= \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} Z_k \leq x \right\} = \left\{ \forall \epsilon > 0, \exists n, \forall k > n, Z_k \leq x + \epsilon \right\} \\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{Z_k \leq x + 1/m\} \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

# Notes sur les limites ponctuelles

1. Fonctions sur  $\Omega = \mathbb{R}$  avec un ensemble dénombrable de discontinuités.
2. Comme les limites ponctuelles et les sommes finies de v.a. sont des variables aléatoires, les sommes infinies convergentes sont des variables aléatoires.

# Indépendance de deux événements sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

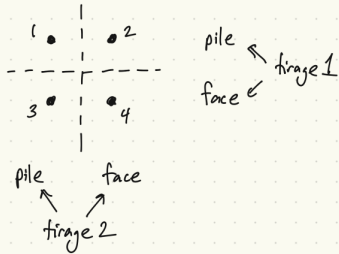
- ▶  $A, B \in \mathcal{F}$  sont indépendants (dénnoté  $A \perp B$ ) si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .
- ▶ Résultat :  $A \perp B \Rightarrow A \perp B^c, A^c \perp B, A^c \perp B^c$ .
- ▶ Deux faits :
  - ▶  $P(A \cap B) + P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c) = 1$
  - ▶  $(P(A) + P(A^c))(P(B) + P(B^c)) = P(A)P(B) + P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) + P(A^c)P(B^c) = 1$ .
- ▶  $P(A \cap B^c) + P(A \cap B) = P(A)$  par additivité. Si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ,  
 $P(A \cap B^c) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$ .

## Indépendance de trois événements

- ▶  $A, B, C \in \mathcal{F}$  sont indépendants si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ,  $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ ,  $P(A \cap C) = P(A)P(C)$  et  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ .
- ▶ Importance de  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$  :
  - ▶  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ .
  - ▶ Soit  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3\}$ ,  $C = \{2, 3\}$ .
  - ▶  $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$ ,  $P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{1}{4}$ .
  - ▶ Mais  $P(A \cap B \cap C) = 0$  et  $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$ .
  - ▶ Intuition: si  $\omega \in C$ ,  $\omega \in A \cap B$  est impossible, tandis que si  $\omega \notin C$ , c'est possible.

Indépendance par pair vs indépendance

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$





# Indépendance d'un ensemble $I$ d'événements

- ▶ L'ensemble  $I$  peut être indénombrable (Exemple : processus stochastique  $X_t(\omega)$  en temps continu,  $t \in \mathbb{R}$ )
- ▶  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  sont indépendants si pour chaque  $j \in \mathbb{N}$  et chaque  $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ ,

$$P(A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \cap \dots \cap A_{\alpha_j}) = P(A_{\alpha_1})P(A_{\alpha_2}) \cdots P(A_{\alpha_j})$$

- ▶ Si les  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  sont indépendants et  $a \in I$ ,  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I \setminus \{a\}} \cup \{A_a^c\}$  le sont aussi. (On peut remplacer un événement arbitraire par son complément.)

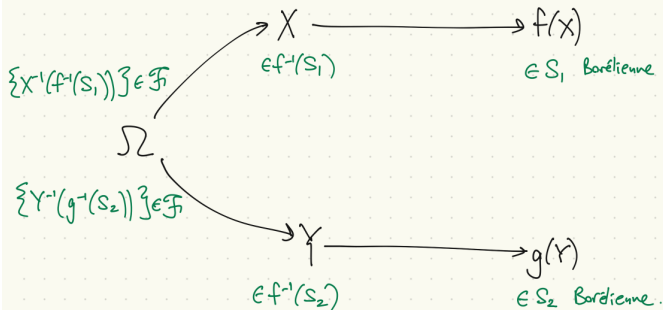
# Indépendance des variables aléatoires

- ▶ Indépendance de deux variables aléatoires :  $X$  et  $Y$  sont indépendants si pour tous ensembles boréliens  $S_1$  et  $S_2$ ,  $X^{-1}(S_1)$  et  $Y^{-1}(S_2)$  sont indépendants.
- ▶ Indépendance par paire : pour toutes paires  $(X, Y)$  dans une collection de variables aléatoires,  $X$  et  $Y$  sont indépendants.
- ▶ Indépendance : une collection  $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$  de variables aléatoires est indépendante si pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in I$ ,  $S_1, \dots, S_j$  boréliens,

$$P(X_{\alpha_1} \in S_1, \dots, X_{\alpha_j} \in S_j) = P(X_{\alpha_1} \in S_1) \cdots P(X_{\alpha_j} \in S_j)$$

- ▶ Indépendance de  $f(X)$  et  $g(Y)$  pour  $X, Y$  indépendant,  $f$  et  $g$  réelles et mesurables
- ▶ Suffisance de  $F(x, y) = F(x)F(y)$  pour indépendance.

Indépendance de  $f(X)$  et  $g(Y)$ ,  $f, g$  réelles et mesurable



# Continuité de probabilité (résultat)

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité.

Résultat (continuité de probabilité)

- ▶ Si  $A_n \nearrow A$ ,  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ .
- ▶ Si  $A_n \searrow A$ ,  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ .

Attention :

- ▶  $[0, 1 - 1/n] \nearrow [0, 1)$ .
- ▶ On peut avoir  $P([0, 1 - 1/n]) \rightarrow P([0, 1)) = 0.5$  et  $P([0, 1]) = 1$  en même temps.
- ▶ Plus généralement, la fonction de répartition n'est pas forcément continue. Mais la continuité de probabilité implique qu'elle est continue à droite.

## Continuité de probabilité (preuve)

- ▶ Soit  $A_n \nearrow A$ ,  $A_n \in \mathcal{F}$ .
- ▶ On construit une suite d'anneaux disjoints :

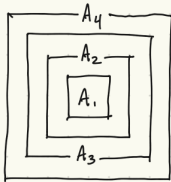
$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \cap A_1^c, \dots, B_n = A_n \cap A_{n-1}^c, \dots$$

- ▶ Notez que  $B_n \in \mathcal{F}$ ,  $A_n = \cup_{m=1}^n B_m$  et  $A = \cup_{m=1}^{\infty} B_m$ .
- ▶ Alors  $A \in \mathcal{F}$  et

$$P(A) = P(\cup_{m=1}^{\infty} B_m) = \sum_{m=1}^{\infty} P(B_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n P(B_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

- ▶ Si  $A_n \searrow A$  et  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $A_n^c \nearrow A^c$  puis  $P(A^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n^c)$ ,  
 $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ .

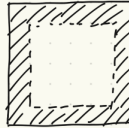
Construction des  $B_n$



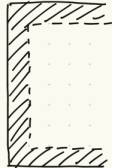
$$B_1 = A_1$$



$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$



$$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$



$$B_4 = A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

## Convergence : suites d'événements $A_n$ non-monotones

- ▶  $C_n = \cap_{k=n}^{\infty} A_k \nearrow C \equiv \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$  ( $A_n$  presque toujours,  $\liminf_n A_n$ ).
- ▶  $D_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k \searrow D \equiv \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$  ( $A_n$  infiniment souvent,  $\limsup_n A_n$ ).
- ▶ Les ensembles “infiniment souvent”, “presque toujours” existe toujours.
- ▶ (Proposition 3.4.1, preuve)

$$\begin{aligned} P(\liminf_n A_n) &= P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\cap_{k=n}^{\infty} A_k) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} P(\cap_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n), \end{aligned}$$

$$P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n) \leq \limsup_n P(A_n) \leq P(\limsup_n A_n).$$

- ▶ Si  $P(\liminf_n A_n) = P(\limsup_n A_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$  existe.

## Aperçu du Chapitre 4, Espérance

1. Pour les variables aléatoires simples  $X(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i 1_{A_i}(\omega)$ ,

$$E[X(\omega)] = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i).$$

- ▶ linéarité

- ▶  $E[XY] = E[X]E[Y]$  pour  $X, Y$  indépendant

2. Des variables aléatoires non-négatives

$$E[X] = \sup\{E[Y]: Y \text{ simple}, Y \leq X\}.$$

3. Des variables aléatoires générales.
4. Espérance comme une généralisation de l'intégration riemannienne.