# Lectures et exercices

ECN 6578, Hiver 2021

*William McCausland*

*2021-01-25*

## Cours 1, le 18 janvier

### Sujets

1. Notation pour les rendements des actifs et des portfeuilles
2. Fonctions linéaires des variables aléatoires, mélanges des lois.
3. La loi des espérances itérées, avec applications
4. L'inégalité de Jensen, avec applications

### Exercices théoriques

1. Pour les deux placements décrits à la diapo "Fonctions linéaires vs mélanges, un exemple", calculez la moyenne et la variance du rendement.

2. Étudiez la preuve du théorème de variance totale et prouvez le théorème de covariance totale : pour variables aléatoires $X$, $Y$ et $Z$ telles que les moments suivants existent,

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = E[\mathrm{Cov}[X, Y|Z]] + \mathrm{Cov}[E[X|Z], E[Y|Z]].$$

3. Soit $Z$ une variable aléatoire qui prend la valeur 1 avec probabilité 1/2 et la valeur -1 avec probabilité 1/2. Soit $(X, Y)$ un vecteur aléatoire avec la loi conditionnelle sachant $Z$ suivante: $(X, Y)|Z \sim N((Z, -Z), I)$, où $I$ est la matrice identitaire $2 \times 2$. Trouvez $\mathrm{Cov}[X, Y]$.

4. Trouvez l'aplatissement du mélange suivant de deux lois gaussiennes, chacune avec probabilité 0.5 : $N(0, 0.9)$ et $N(0, 1.1)$.

### Exercices avec R

(Travail préliminaire, pas à remettre)

1. Téléchargez R et R Studio.
2. Créez un fichier HTML à partir du gabarit R Markdown.

## Cours 2, le 25 janvier

### Sujets

1. Log rendements, rendements multi-période, annualisation
2. Asymmétrie et aplatissement, non-normalité des rendements
3. Stationnarité et covariance-stationnarité
4. Non-corrélation versus indépendence.
5. Autocorrélation
6. Faits empiriques

### Lectures préparatoire (à faire avant le cours)

Dans le livre de Tsay, 3e édition

1. Dans la section 1.1, "Asset Returns"
   a. Multiperiod simple returns
   b. Continuous compounding
   c. Continuously compounded returns
2. Dans la section 1.2, "Distributional properties of returns"
   a. Moments of a random variable (jusqu'à la fin de la page 9)
3. Dans la section 2.2, "Correlation and Autocorrelation"
   a. Introduction (sans nom)
   b. Autocorrelation

### Autres lectures

1. L'article de Cont (2001) que j'ai mis sur StudiUM.
2. Tsay, 3e édition :
   a. 1.2.1 (lois statistiques et leurs moments)
   b. 1.2.2 (la loi des rendements)
   c. 1.2.3 (rendements multivariés)
   d. 1.2.5 (propriétés empiriques des rendements)
   e. 2.1 (stationnarité)
   f. 2.2 (corrélation et la fonction d'autocorrélation)
   g. 2.3 (le bruit blanc et les séries temporelles linéaires)

### Exercices

1. La v.a. $X$ suit une loi qui est un mélange de deux lois gaussiennes, chacune avec probabilité 0.5 : $N(\mu, \sigma^2)$ et $N(-\mu, \sigma^2)$. Calculez l'aplatissement $K_x$ et $\lim_{\sigma^2 \downarrow 0} K_x$.

2. Trouvez l'asymétrie et l'aplatissement d'un mélange général de deux v.a. gaussiennes. Le site suivant donne les quatres premiers moments non centraux d'une v.a. $N(\mu, \sigma^2)$ : https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale#Moments.

3. Le prix d'un actif le 4 janvier est de 14.50 dollars. Le prix de l'actif le 15 fevrier est de 13.15. Quel est le rendement simple annualisé et le log rendement annualisé?

4. On observe un échantillon $X_1, \ldots, X_T$, où $X_t \sim \text{iid}\, N(\mu, \sigma^2)$. Si on fait les tests 1 et 2 de la diapo "Attention : tests multiples!" quelle est la probabilité d'au moins un rejet, comme fonction de $\alpha$?

### Exercices avec R

Travail, cours du 25 janvier

1. Téléchargez le fichier des données `d-3m7008.txt` et faites la graphique des rendements journaliers de l'action 3M avec la commande `plot`, option 'l' (L minuscule).
2. Faites un test de l'hypothèse que les rendements sont iid gaussiens, avec la statistique test Jarque-Bera. Calculez les valeurs critiques en utilisant la fonction de quantile (comme `qnorm` ou `qchisq`) de la loi asymptotique de la statistique test sous l'hypothèse nulle.
3. Faites un test de l'hypothèse que les rendements sont iid avec variance finie, avec la statistique test Box-Pierce. Utilisez la commande `acf` pour obtenir la fonction d'autocorrélation et calculez la statistique test à partir de cette fonction. Utilisez $m = 10$ retards. Confirmez ensuite votre réponse en utilisant la commande `Box.test`.

## Cours 3, le 1 février

### Sujets

1. Le bruit blanc et des séries temporelles linéaires
2. Le modèle AR(p)
3. Le modèle MA(p)
4. Le modèle ARMA(p,q)

### Lectures préparatoire

1. Tsay, 3e édition :
   a. 2.3
   b. 2.4 Intro (avant 2.4.1)
   c. 2.5 Intro (avant 2.5.1)
   d. 2.6 Intro (avant 2.6.1)

### Autres lectures

1. Tsay, 3e édition :
   a. 2.4 (modèles AR)
   b. 2.5 (modèles MA)
   c. 2.6 (modèles ARMA)
   d. 2.8.1 et 2.8.2 (pour faire l'exercise 2.4)

### Exercices

1. Ecrivez les équations Yule-Walker pour un process AR(3) et pour un processus ARMA(1,1).
2. Trouvez la fonction d'autocorrélation pour un processus MA(3).
3. Considérez le process AR(3) suivant :

$$r_t = 1.9r_{t-1} - 1.4r_{t-2} + 0.45r_{t-3} + a_t.$$

   a. Trouvez les racines du polynome caracteristique du processus.
   b. Est-ce que la condition de stationnarité tient?

4. Trouvez $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ de la représentation MA infinie pour un ARMA(1,2) général.

### Exercices en R

Travail, cours du 20 janvier

1. Considérez le process ARMA(3,1) suivant :

$$r_t = 1.9r_{t-1} - 1.4r_{t-2} + 0.45r_{t-3} + a_t - 0.3a_{t-1}.$$

   a. Simulez le séries pour $T = 500$ observations.
   b. Faites la graphique de la fonction d'autocorrélation $\rho_k$ de la population, pour $k = 1, \ldots, 25$
   c. Faites la graphique de la fonction d'autocorrélation $\hat{\rho}_k$ de l'échantillon, pour $k = 1, \ldots, 25$.
   d. Estimez les paramètres d'un modèle ARMA(3,1) en vous servant de l'échantillon que vous avez tiré. Donnez des estimations ponctuelles avec leurs écarts-types.
2. Tsay, Exercice 2.4. Lisez les sections 2.8.1 et 2.8.2 sur la saisonnalité.