Enchères

ECN 6013, automne 2019

William McCausland

2019-09-29

Préliminaires mathématiques

Fonction de répartition pour le maximum de variables aléatoires indépendantes :

- Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes.
- Soit $Z = \max(X, Y)$.
- Soit F_x, F_y et F_z les fonctions de répartitions.
- Soit f_x, f_y et f_z les densités.
- Alors
$$\begin{aligned} F_z(z) &= \Pr[Z \leq z] \\ &= \Pr[X \leq z \text{ et } Y \leq z] \\ &= \Pr[X \leq z] \Pr[Y \leq z] \\ &= F_x(z) F_y(z). \end{aligned}$$
  et
$$f_z(z) = f_x(z) F_y(z) + F_x(z) f_y(z).$$

Exemples

- Soit $U_i \sim \mathrm{iid}\,\mathrm{U}(0,1)$, $i = 1, \ldots, n$.
- Soit $X_2 = \max(U_1, U_2)$, $X_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$.
- La fonction de répartition pour U_i est

$$F(u_i) = \begin{cases} 0 & u_i < 0, \\ u_i & 0 \le u_i \le 1, \\ 1 & u_i > 1. \end{cases}$$

- Celle pour X_2 est

$$F(x_2) = \begin{cases} 0 & x_2 < 0, \\ x_2^2 & 0 \le x_2 \le 1, \\ 1 & x_2 > 1. \end{cases}$$

- La densité pour X_2 est $f(x_2) = 2x_2$ pour $0 \le x_2 \le 1$.

Exemples (cont.)

- La fonction de répartition pour X_n est

$$F(x_n) = \begin{cases} 0 & x_n < 0, \\ x_n^n & 0 \leq x_n \leq 1, \\ 1 & x_n > 1. \end{cases}$$

- La densité pour X_n est $f(x_n) = n x_n^{n-1}$ pour $0 \leq x_n \leq 1$.

Enchères: l'environnement

- Un nombre n d'enchérisseurs ou joueurs.
- Un seul objet indivisible à vendre.
- Joueur i à une valeur de réservation v_i, le montant maximal que il paierait pour l'objet.
- Le résultat d'une vente aux enchères est le transfert (ou non) à un joueur (le gagnant) de l'objet et des paiements, souvent un seul paiement du gagnant au vendeur.
- L'action est souvent une enchère ou une séquence d'enchères.
- Le résultat est efficace si et seulement si l'objet finit par appartenir à l'agent (joueur ou vendeur) avec la valeur maximale, peut importe le paiement.
- *Ex post*, un résultat efficace ne domine pas forcément l'allocation initiale.
- On verra cinq jeux (ou enchères) différents.

Valeurs communes et valeurs privées

- Enchères aux valeurs privées :
  - Pour enchérisseur i, v_i est connu et fixe.
  - Savoir v_j ne change pas v_i (mais peut changer b_i).
  - Exemples plausibles : enchère sur eBay d'un jouet de valeur sentimentale, enchère de poisson (Tokyo, Sydney).
- Enchères aux valeurs communes :
  - Il y a une valeur objective de l'objet.
  - Les joueurs ne savent pas combien vaut l'objet.
  - Chacun observe un signal de valeur, une information pertinente.
  - Exemple plausible : droits miniers sur un terrain, toutes les firmes ont le même coût d'exploitation, une firme peut avoir une information que les autres n'ont pas.
- Il y a des cas intermédiaires entre ces cas extrêmes.
- Sauf pour les diapos « malédiction du gagnant » on suppose que les valeurs sont privées.

L'enchère anglaise (ou ascendante)

- Participation asynchrone.
- Les joueurs peuvent à tout moment déclarer publiquement une surenchère, une enchère plus grande que la plus récente.
- Le gagnant est le joueur avec la dernière enchère.
- Il paie un montant égale à sa dernière enchère.
- S'il n'y a pas d'enchère, l'objet revient au vendeur.
- Des fois, il y a un prix minimum.
- Associée aux maisons de vente aux enchères Sotheby's et Christie's de Londres.

La vente aux enchères hollandaise (ou descendante)

- Il y a un cadran avec des valeurs de zéro jusqu'à une valeur très élevée.
- La valeur affichée sur le cadran décroit jusqu'à ce qu'un joueur arrête le cadran.
- Ce joueur est le gagnant, il est obligé à payer le montant au cadran.
- Si le prix minimum est atteint, l'objet revient au vendeur.
- Associée avec la vente des tulipes en hollande.

Enchère sous pli cacheté au premier prix

- Une seule offre de chaque joueur : b_i, $i = 1, \ldots, n$.
- Offres « simultanées » dans le sens que les joueurs ignorent les offres des autres.
- L'assistance des joueurs n'est pas nécessaire.
- Le joueur i avec l'enchère b_i la plus grande est le gagnant.
- Il paie b_i pour l'objet.
- Parfois, toutes les offres sont révélées après l'enchère, parfois seulement l'offre gagnante, parfois aucune offre.

Enchère sous pli cacheté au second prix

- Une seule offre de chaque joueur : b_i, $i = 1, \ldots, n$.
- Offres « simultanées », l'assistance des joueurs n'est pas nécessaire.
- Soit b_i l'offre la plus élevée et b_j la seconde.
- Le joueur i avec l'enchère b_i est le gagnant.
- Il paie b_j pour l'objet.
- L'assistance des joueurs n'est pas nécessaire.
- Nommé aussi l'enchère de Vickrey.

Enchère all-pay

- Une seule offre de chaque joueur : b_i, $i = 1, \ldots, n$
- Offres « simultanées »
- Soit b_i l'offre la plus élevée.
- Le joueur i avec l'enchère b_i est le gagnant.
- Chaque joueur j paie b_j, gagnant ou non.
- Phénomènes semblables : élections, recherche et développement, sports, lobbying, lézards.
- Une variation, la guerre d'attrition : deux joueurs, le gagnant et le perdant paie l'offre la moins élevée.

L'équivalence (en terme de résultat) des enchères

- Deux enchères sont équivalentes si les résultats (qui gagne, quels paiements) en équilibre sont pareils.
- Dans un sens, l'enchère anglaise est équivalente à l'enchère au second prix:
  - b_i est l'enchère la plus élevée que joueur i est prêt à faire.
- Dans un sens, l'enchère hollandaise est équivalente à l'enchère au premier prix.
  - b_i est la valeur pour laquelle joueur i arrêterait le cadran si personne ne l'avait déjà fait.
- Ces analyses fonctionnent bien pour les valeurs privées, moins bien pour les valeurs communes.

Équilibre de l'enchère à deuxième prix

- n joueurs, joueur i a une valeur privée de v_i.
- Pas besoin de spécifier la distribution des valeurs.
- Déclarer une valeur $b_i = v_i$ est une stratégie dominante!
  - Stratégie facile à comprendre, calculer.
  - Pas besoin des informations sur les autres joueurs.
- Celui qui valorise l'objet le plus gagne en équilibre.
- Faire révéler les valeurs coûte au vendeur : une partie du surplus (la différence entre les deux premières valeurs) va au gagnant.
- $b_i > v_i$: courir le risque de gagner et payer plus cher que sa valeur.
- $b_i < v_i$: courir le risque de perdre, sans avantage.

Une enchère inversée : réduction de la pollution

- Il y a plusieurs émetteurs du SO_2 dans un pays.
- Le gouvernement veut réduire les émissions par 10^6 tonnes à coût minimal.
- Chaque émetteur i peut réaliser la réduction à un coût de c_i.
- Mécanisme naïf : demander aux émetteurs leur coûts et obliger l'émetteur à coût *signalé* minimal de réduire ses émissions.
- Mécanisme de Vickrey : même chose, mais récompenser le pollueur à coût signalé minimal un montant égal au coût en deuxième place.
- Le résultat :
  - Tous les pollueurs ont l'incitation de signaler leur vrai coût.
  - La réduction des émissions se produit au coût minimal.
  - Le gouvernement paie plus que le coût minimal.
- Attention : le jeux dans un contexte plus large.

Équilibre de l'enchère à premier prix - définition

- On commence avec un cas simple:
  - Deux joueurs, $i = 1, 2$.
  - $v_i \sim \mathrm{iid}\,\mathrm{U}(0, 1)$ (valeurs certaines et privées).
- Un équilibre est une fonction $b_1(v_1)$ et une fonction $b_2(v_2)$ telles que pour chaque $v_1 \in [0, 1]$, $b_1(v_1)$ maximise

$$\Pr[b_1 > b_2(v_2)](v_1 - b_1)$$

  et pour chaque $v_2 \in [0, 1]$, $b_2(v_2)$ maximise

$$\Pr[b_2 > b_1(v_1)](v_2 - b_2).$$

- Si on change la distribution des v_i, la définition ne change pas (mais la probabilité, oui).
- En cas de plusieurs joueurs, $b_2(v_2)$ et $b_1(v_1)$ sont remplacés par l'enchère maximale des autres joueurs.

Équilibre pour l'enchère au premier prix - solution

- Trouver une solution est difficile; vérifier, plus facile.
- Proposons $b_2(v_2) = \lambda v_2$, pour un $\lambda \in [0, 1]$.
- Si $b_2(v_2) = \lambda v_2$ est la stratégie de joueur deux, joueur un n'offre jamais plus que $b_1 = \lambda$.
- Sa meilleure réponse, comme fonction de v_1, est

$$b_1(v_1) = \arg\max_{b_1} \Pr[b_1 > \lambda v_2](v_1 - b_1).$$

- Si $b_1 \leq \lambda$,

$$\Pr[b_1 > \lambda v_2] = \Pr[v_2 < b_1/\lambda] = b_1/\lambda.$$

- Pourvu que $b_1 \leq \lambda$, $b_1(v_1)$ maximise

$$\frac{b_1}{\lambda}(v_1 - b_1),$$

  et la solution est $b_1 = v_1/2$, qui est de la forme $b_1 = \lambda v_1$.
- $b_i = v_i/2$, $i = 1, 2$ est un équilibre — $b_i(v_i)$ n'est jamais plus grand que $\lambda = 1/2$.

Revenu au vendeur - enchère au premier prix

- Soit π le revenu moyen au vendeur dans le cas $v_i \sim U(0,1)$, $i = 1, 2$.
- Pour l'enchère à premier prix, $\pi = E[\max(v_1/2, v_2/2)]$:

$$
\begin{aligned}
\pi &= \int_0^1 \int_0^1 \max(v_1/2, v_2/2)\, dv_2\, dv_1 \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{v_1} \frac{v_1}{2}\, dv_2 + \int_{v_1}^1 \frac{v_2}{2}\, dv_2 \right] dv_1 \\
&= \int_0^1 \frac{v_1}{2} [v_2]_0^{v_1} + \left[\frac{1}{4} v_2^2 \right]_{v_1}^1 dv_1 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} v_1^2 + \frac{1}{4} \right) dv_1 \\
&= \left[\frac{1}{12} v_1^3 + \frac{1}{4} v_1 \right]_0^1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Revenu au vendeur - enchère du deuxième prix

- Pour l'enchère à deuxième prix, $\pi = E[\min(v_1, v_2)]$:

$$\begin{aligned}
\pi &= \int_0^1 \int_0^1 \min(v_1, v_2)\, dv_2\, dv_1 \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{v_1} v_2\, dv_2 + \int_{v_1}^1 v_1\, dv_2 \right] dv_1 \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} v_1^2 + v_1(1 - v_1) \right] dv_1 \\
&= \left[\frac{1}{2} v_1^2 - \frac{1}{6} v_1^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

- Même valeur en moyen, mais remarquez que les revenus diffèrent de cas en cas: si $v_1 = 0.2$ et $v_2 = 0.7$, les revenus sont $v_1 = 0.2$ et $v_2/2 = 0.35$.

Équivalence en termes de revenu

- Le résultat sur l'égalité de revenu espéré se généralise.
- Voici quelques hypothèses sur le jeu et les joueurs:
  1. Les joueurs sont neutres pour le risque.
  2. Les valeurs (ou signales) v_i sont iid, avec $v_i \in [\underline{v}, \overline{v}]$.
  3. $F(v)$ continue, strictement croissante sur $[\underline{v}, \overline{v}]$
  4. Si $v_i = \underline{v}$, joueur i a un gain espéré de zéro.
  5. En équilibre, celui qui valorise l'objet le plus gagne l'objet.
- Notez:
  - Il y a très peu de structure sur les actions des joueurs : par exemple, plusieurs étapes sont possibles.
  - Les jeux où les perdants paient sont possibles : par exemple, la vente all-pay.
  - Il peut y avoir plusieurs objets (avec modifications).
  - Plus de flexibilité que le cas $v_i \sim U(0, 1)$.
  - Les deux dernières hypothèses tiennent pour les cinq enchères ci-haut et d'autres.

Quelques définitions

Pour chaque v, s :

- $S_i(v)$ est le gain espéré de joueur i *en équilibre*, quand sa valeur est de v.
- $P_i(v)$ est la probabilité que joueur i gagne, en équilibre, comme fonction de v.
- $E_i(v)$ est le paiement espéré, en équilibre, de joueur i, comme fonction de v.
- $S_i(v|s)$ est le gain espéré de joueur i, s'il dévie en faisant semblant être un joueur à valeur s, quand les autres joueurs agissent comme dans l'équilibre.

Notes :

- On conditionne ci-haut à $v_i = v$, mais les valeurs des autres joueurs sont aléatoires.
- Exemple : pour l'enchère à premier prix $E_i(v) = P_i(v)b_i(v)$.

Dérivation de l'équivalence I

- Quelques résultats (hypothèse 1) :

$$S_i(v) = vP_i(v) - E_i(v),$$
$$S_i(s) = sP_i(s) - E_i(s),$$
$$S_i(v|s) = vP_i(s) - E_i(s).$$

- La substitution de $E_i(s) = sP_i(s) - S_i(s)$ dans $S_i(v|s) = vP_i(s) - E_i(s)$ donne

$$S_i(v|s) = vP_i(s) - sP_i(s) + S_i(s) = S_i(s) + (v - s)P_i(s).$$

- La dérivée par rapport à s donne (hypothèses 2, 3 pour l'existence de la dérivée)

$$\frac{\partial S_i(v|s)}{\partial s} = S_i'(s) + (v - s)P_i'(s) - P_i(s).$$

- Condition de première ordre : cette dérivée doit être nulle pour $s = v$ et donc

$$S_i'(v) = P_i(v).$$

Dérivation de l'équivalence II

- On vient de dériver $S_i'(v) = P_i(v)$, qui donne l'intégral définie

$$\int_{\underline{v}}^{v} P_i(s)\, ds = S_i(v) - S_i(\underline{v}).$$

- Par hypothèse 4, $S_i(\underline{v}) = 0$, alors

$$S_i(v) = \int_{\underline{v}}^{v} P_i(s)\, ds.$$

- Maintenant on utilise l'hypothèse 5 (efficacité) :
  - La fonction de probabilité $P_i(v)$ est pareille dans toutes les enchères qui vérifient les hypothèses.
  - Même chose pour la fonction de valeur $S_i(v)$.
  - Même chose pour la fonction $E_i(v) = vP_i(v) - S_i(v)$.
  - Le revenu espéré du vendeur est $E[\sum_{i=1}^{n} E_i(v_i)]$.
- Conclusion: le revenu espéré du vendeur est pareille pour toutes les enchères qui vérifient les hypothèses.

Aversion pour le risque et collusion

Aversion pour le risque, Klemperer (1999), Section 5 :

- Comment changent les enchères à 1er et à 2ième prix si les joueurs sont averses pour le risque?
- Paiements plus élevés versus plus certains.
- Si le vendeur est averse pour le risque et non les joueurs?

Collusion :

- Que ferait les enchérisseurs pour faire de la collusion dans la vente à deuxième prix?
- Premier prix?
- Quelles sont les tentations pour dévier du plan de la collusion?

La malédiction du gagnant I

- Rappel : quand les valeurs sont privées, l'utilité espérée associée à une enchère de b_i, quand la valeur est v_i, et

$$\Pr[b_i > \max_{j \neq i}(b_j)](v_i - b_i)$$

- Pour une loi donnée de $\max_{j \neq i}(b_j)$, on peut maximiser cette utilité comme fonction de v_i.
- Passons maintenant au cas des valeurs communes : la valeur v de l'objet est incertaine.
- $E_i[v] \neq E_i[v|E_j[v]]$ est possible : un joueur apprend quelque chose sur v en découvrant l'information d'un autre joueur.
- Une loi pertinente de probabilité :

$$E[X] = \Pr[A]E[X|A] + (1 - \Pr[A])E[X|A^c],$$

où A est une événement; A^c, son complément et X, une variable aléatoire.

La malédiction du gagnant II

- Dans le cas des valeurs communes, l'utilité espérée associée à une offre de b_i est

$$\begin{aligned} & \Pr[b_i > \max_{j \neq i}(b_j)] \cdot E[v - b_i | b_i > \max_{j \neq i}(b_j)] \\ +&(1 - \Pr[b_i > \max_{j \neq i}(b_j)]) \cdot 0 \\ &= \Pr[b_i > \max_{j \neq i}(b_j)] \cdot E[v - b_i | b_i > \max_{j \neq i}(b_j)]. \end{aligned}$$

- On valorise les conséquences de l'offre b_i comme si elle est l'offre gagnante.
- Si les signaux de valeur informent sur v,

$$E[v - b_i | b_i > \max_{j \neq i}(b_j)] < E[v - b_i].$$

- Un joueur sous la malédiction du gagnant ne conditionne pas et maximise $\Pr[b_i > \max_{j \neq i}(b_j)] E[v - b_i]$. Le fait de gagner est un signal négatif de valeur. Également, le fait de perdre est un signal positif de valeur.

Équilibre pour l'enchère de premier prix, n joueurs

- Maintenant, il y a n joueurs, $i = 1, \ldots, n$.
- $v_i \sim \mathrm{iid}\, U(0,1)$.
- Comme pour deux joueurs, on vérifie qu'il y a un équilibre avec $b_i = \lambda v_i$.
- Problème de joueur i : pour v_i donné, $b_i(v_i)$ maximise

$$\Pr[b_i > \max_{i \neq j} b_j](v_i - b_i).$$

- Si les autres jouent $b_j = \lambda v_j$ et si $b_i \leq \lambda$,

$$\begin{aligned}\Pr[b_i > \max_{i \neq j} b_j] &= \prod_{j \neq i} \Pr[b_i > b_j] \\ &= \prod_{j \neq i} \Pr[b_i > \lambda v_j] = \left(\frac{b_i}{\lambda}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Équilibre pour l'enchère de premier prix, n joueurs

- Si $b_i \leq \lambda$ et les autres joueurs jouent $b_j = \lambda v_j$, le profit pour une enchère b_i est de

$$\left(\frac{b_i}{\lambda}\right)^{n-1}(v_i - b_i).$$

- La valeur de b_i qui maximise ce profit est $b_i = \frac{n-1}{n} v_i$.
- Ce résultat suggère un équilibre où $\lambda = \frac{n-1}{n}$ et $b_i(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i$, $i = 1, \ldots, n$.
- Il faut confirmer que $b_i \leq \frac{n-1}{n}$ toujours.
- La valeur maximale de v_i est 1, ce qui le confirme.

Revenu espéré pour l'enchère de premier prix, n joueurs I

- Soit $R = \max_i b_i$ l'enchère maximale, qui égale au revenu.
- Sa fonction de répartition est

$$\begin{aligned}
F(r) &= \Pr[\max_i b_i \leq r] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \Pr[b_i \leq r] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \Pr[v_i \leq nr/(n-1)] \\
&= \begin{cases} 0 & r < 0 \\ \left(\frac{n}{n-1} r\right)^n & 0 \leq r \leq \frac{n-1}{n} \\ 1 & r > \frac{n-1}{n} \end{cases}
\end{aligned}$$

Revenu espéré pour l'enchère de premier prix, n joueurs II

- Sa densité est

$$f(r) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ \left(\frac{n}{n-1}\right)^n n r^{n-1} & 0 \leq r \leq \frac{n-1}{n} \\ 0 & r > \frac{n-1}{n} \end{cases}$$

- Sa valeur espérée est le revenu espéré de l'enchère:

$$\begin{aligned} E[r] &= \int_0^{(n-1)/n} f(r) r dr \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \int_0^{(n-1)/n} n r^n dr \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left[\frac{n}{n+1} r^{n+1}\right]_0^{(n-1)/n} \\ &= \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Enchères et discrimination par le prix au 3e degré

- Monopole, discriminant par le prix de 3e degré:
  - plusieurs segments, type observé (sexe, âge, statu étudiant)
  - prix différents, même revenus marginaux (égaux au coût marginal)
  - ventes aux individus avec les revenus marginaux les plus élevés.
- Lien entre le problème de l'enchère optimal (pour le vendeur) et celui du monopole, discriminant par le prix de 3e degré.
- Avec des joueurs symétriques et les enchères standards, le gagnant est celui avec le signal ou la valeur le plus élevé.
- Si un signal plus élevé implique un revenu marginal plus élevé, le gagnant a le revenu marginal le plus élevé.
- WJM Sous les hypothèses du théorème d'équivalence du revenu, tous les enchères standards sont optimaux si le prix de réservation égalise le revenu marginal et la valeur du vendeur.

L'approche revenu marginal

- Prenez un joueur quelconque, avec valeur $v_i \in [\underline{v}, \overline{v}]$
- Mettons que la fonction de répartition de v_i est $F_i(v)$.
- Considérer une offre à prendre ou à laisser à i :
  - Le vendeur offre l'objet au prix $\hat{v}$ à i.
  - i accepte si $\hat{v} < v_i$, un événement avec probabilité $1 - F_i(\hat{v})$.
  - Le revenu espéré est de $\hat{v}(1 - F_i(\hat{v}))$.
  - Interprétez $\hat{v}$ comme un prix, $q(\hat{v}) = 1 - F_i(\hat{v})$ comme une quantité.
  - Selon cette interprétation, $q(\hat{v})$ est une courbe de demande.
  - Revenu marginal :

$$MR_i(q(v)) = \frac{d}{dq} vq = v + q\frac{dv}{dq} = v + q/\left(\frac{dq}{dv}\right) = v - \frac{1 - F_i(v)}{f_i(v)}.$$

- On appelle $MR_i(v) = v - (1 - F_i(v))/f_i(v)$, comme fonction de la valeur aléatoire v, le revenu marginal du joueur i.

Une identité

Deux façons d'exprimer le revenu espéré d'un vendeur qui fait une offre à prendre ou à laisser:

$$R_i = q(\hat{v})\hat{v} = \int_0^{q(\hat{v})} MR_i(q)\, dq.$$

D'où vient l'identité (vrai pour n'importe quel i, $\hat{v}$)

$$\begin{aligned}
\hat{v} &= \frac{1}{q(\hat{v})} \int_0^{q(\hat{v})} MR_i(q)\, dq \\
&= \frac{1}{1 - F_i(\hat{v})} \int_{\hat{v}}^{\overline{v}} MR_i(q(v)) f_i(v)\, dv \\
&= E[MR_i(q(v_i)) | v_i > \hat{v}].
\end{aligned}$$

Deuxième équation ici : Klemperer (1999), Appendice B, note 126.

Le résultat

- Maintenant, on observe une enchère à deuxième prix et
  - i gagne,
  - il paie R.
- Alors
  - $v_i \geq R$,
  - le revenu réalisé est de R.
    - Prenez l'espérance conditionnelle des deux côtés de
      $$\hat{v} = E[MR_i(v_i)|v_i > \hat{v}],$$
      sachant l'événement $R = \hat{v}$
    - Le résultat est
      $$E[R] = E[MR_g(v_g)],$$
      où g est l'indice (aléatoire) du gagnant.
    - Le revenu espéré de l'enchère à 2ième prix est l'espérance du revenu marginal du gagnant.
    - Par équivalence de revenu, c'est le revenu espéré d'autres enchères.

Application du théorème d'équivalence du revenu

- Le paiement espéré d'un joueur de type v est pareil pour tous les enchères du théorème.
- Paiement espéré du joueur de type v, enchère du 2e prix :

$$\begin{aligned}
E_i(v) &= P_i(v) E[\max_{j \neq i} v_j | \max_{j \neq i} v_j < v] \\
&= P_i(v) \frac{\int_{x=\underline{v}}^{v} x(n-1) f(x) (F(x))^{n-2} dx}{\int_{x=\underline{v}}^{v} (n-1) f(x) (F(x))^{n-2} dx} \\
&= P_i(v) \left[v - \frac{\int_{x=\underline{v}}^{v} (F(x))^{n-1} dx}{(F(v))^{n-1}} \right].
\end{aligned}$$

- Le paiement espéré du joueur de type v dans l'enchère du premier prix est $P_i(v) b(v)$, ce qui donne

$$b(v) = v - \frac{\int_{x=\underline{v}}^{v} (F(x))^{n-1} dx}{(F(v))^{n-1}}.$$