

# ECN 7060, Cours 2

William McCausland

2020-09-08

## Plan de route, Chapitre 2

- ▶ 2.1 Définition d'un espace de probabilité
- ▶ 2.2 Construction de  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  pour  $\Omega$  indénombrable, une spécification suffisante (un semi-algèbre  $\mathcal{J}$  et un  $P: \mathcal{J} \rightarrow [0, 1]$  avec superadditivité plus monotonie dénombrable) pour  $\Omega = [0, 1]$
- ▶ 2.3 Théorème d'extension : un outil pour construire  $\mathcal{F}, P$
- ▶ 2.4 Application du théorème pour  $\Omega = [0, 1]$ .
- ▶ 2.5 Variations du théorème (conditions alternatives)
- ▶ 2.6 Application du théorème pour d'autres  $\Omega$

# Théorème d'extension

Application : spécifier  $\Omega$ , semi-algèbre  $\mathcal{J}$ ,  $P: \mathcal{J} \rightarrow [0, 1]$ , obtenir  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Conditions sur  $\Omega$ ,  $\mathcal{J}$  et  $P: \mathcal{J} \rightarrow [0, 1]$  :

1.  $\mathcal{J}$  est une semi-algèbre sur  $\Omega$ , c'est à dire
  - a.  $\emptyset \in \mathcal{J}$ ,  $\Omega \in \mathcal{J}$ ,
  - b.  $\mathcal{J}$  est stable pour les intersections finies,
  - c. Si  $A \in \mathcal{J}$ ,  $A^c$  est une réunion disjointe finie des éléments de  $\mathcal{J}$ .
2.  $P$  est finiment superadditive.
3.  $P$  est dénombrablement monotone.

Conclusion : il y a une tribu  $\mathcal{M}$  sur  $\Omega$  et une probabilité  $P^*$  sur  $\mathcal{M}$  telles que

1.  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{M}$ ,
2.  $P^*(A) = P(A)$  pour chaque  $A \in \mathcal{J}$ .

## Deux tribus pour $\Omega = \mathbb{R}$ (Exercise 2.4.5)

- ▶ Un intervalle de  $\mathbb{R}$  est n'importe  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  ou  $(a, b)$ , où  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ . (Si  $a > b$ , l'intervalle est vide.)
- ▶ Soit  $\mathcal{A}_2 = \{\text{tous intervalles de } \mathbb{R}\}$ .
  - ▶  $\mathcal{A}_2$  est-elle une semi-algèbre?
  - ▶  $\mathcal{A}_2$  plus toutes les réunions dénombrables n'est pas une tribu.
  - ▶ La spécification de  $P: \mathcal{A}_2 \rightarrow [0, 1]$  est toujours difficile.
- ▶ Soit  $\mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A}_2)$ , la tribu la plus petite qui contient  $\mathcal{A}_2$ .
- ▶ Soit  $\mathcal{A}_1 = \{(-\infty, x]: x \in \mathbb{R}\}$ .
  - ▶  $\mathcal{A}_1$  est-elle une semi-algèbre?
  - ▶ Pourquoi  $\mathcal{A}_1$  est-elle utile?
- ▶ Prochaine diapos : montrez que  $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B}$ .

## Démonstration de $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A}_2)$

- ▶  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$  alors  $\sigma(\mathcal{A}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_2)$ .
- ▶ L'autre direction,  $\sigma(\mathcal{A}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$  :
  - ▶ Les intervalles suivants doivent être des éléments de  $\sigma(\mathcal{A}_1)$  :

$$(a, \infty) = (-\infty, a]^c,$$

$$(-\infty, b) = \cup_n (-\infty, b - 1/n],$$

$$[a, \infty) = (-\infty, a]^c.$$

- ▶ Alors
  - ▶  $(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, \infty) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$ ,
  - ▶  $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$ ,
  - ▶  $[a, b] = (-\infty, b] \cap [a, \infty) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$ ,
  - ▶  $[a, b) = (-\infty, b) \cap [a, \infty) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$ .
- ▶ Alors  $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A}_2)$ .

## Un semi-algèbre pour $\Omega = \{(r_1, r_2, \dots) : r_i \in \{0, 1\}\}$

- ▶  $\Omega$  est l'ensemble de suites infinies des 'pile ou face'.
- ▶ Soit  $A_{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv \{(r_1, r_2, \dots) \in \Omega : r_i = a_i, 1 \leq i \leq n\} \subseteq \Omega$ .
- ▶  $A_{a_1 a_2 \dots a_n}$  est l'ensemble de suites infinies avec l'histoire initial  $a_1 a_2 \dots a_n$ .
- ▶  $\mathcal{J} \equiv \{A_{a_1 a_2 \dots a_n} : n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$ .
- ▶  $A_{a_1 a_2 \dots a_n}$  comme un interval de  $[0, 1)$ .
- ▶  $A_{01011} \cap A_{0110000} = ?$ ,  $A_{01} \cap A_{01101} = ?$ ,  $A_{a_1 a_2 \dots a_n} \cap A_{b_1 b_2 \dots b_{n'}} = ?$
- ▶  $A_{010}^c = ?$ ,  $A_{a_1 a_2 \dots a_n}^c = ?$
- ▶  $\mathcal{J}$  est-il un semi-algèbre?

# Une proto-probabilité pour $\Omega = \{(r_1, r_2, \dots) : r_i \in \{0, 1\}\}$

Une 'proto-probabilité'  $P: \mathcal{J} \cup \{\emptyset, \Omega\} \rightarrow [0, 1]$ :

$$P(A_{a_1 a_2 \dots a_n}) = 1/2^n, \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1.$$

- ▶ Soit  $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{J}$  tel que  $D \equiv \cup_{i=1}^n D_i \in \mathcal{J}$ .
- ▶ Vérification d'additivité fini de  $P: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- ▶ Il y a un  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $D = A_{a_1 a_2 \dots a_k}$  et  $P(D) = 2^{-k}$ .
- ▶  $P(A_{a_1 a_2 \dots a_n}) = 2^{-n} = P(A_{a_1 a_2 \dots a_n 0}) + P(A_{a_1 a_2 \dots a_n 1}) = 2 \cdot 2^{-n-1}$
- ▶ Traversez l'arborescence de bas en haut.
- ▶ Pourquoi le cas d'additivité dénombrable n'est pas trivial?

## Un semialgèbre pour $\Omega_1 \times \Omega_2$

- ▶ Soit  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  deux espaces de probabilité.
- ▶ Nous voulons construire un semi-algèbre pour  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ .
- ▶ Soit  $\mathcal{J} \equiv \{A \times B: A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}$ .
- ▶  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{J}$ ?
- ▶  $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = ?$
- ▶  $(A \times B)^c = ?$



## Une proto-probabilité pour $\mathcal{J} = \Omega_1 \times \Omega_2$

Une 'proto-probabilité'  $P: \mathcal{J} \rightarrow [0, 1] : P(A \times B) \equiv P_1(A)P_2(B)$ .

Vérification d'additivité *finie* (dénombrable plus tard) :

- ▶ Si  $\cup_{i=1}^n (A_i \times B_i) \in \mathcal{J}$  alors il existe  $\{\alpha_i: i \in J\} \subseteq \mathcal{F}_1$  et  $\{\beta_k: k \in K\} \subseteq \mathcal{F}_2$  tels que

$$\cup_{i=1}^n (A_i \times B_i) = (\cup_{j \in J} \alpha_j) \times (\cup_{k \in K} \beta_k) \equiv A \times B.$$

- ▶  $P(A \times B) = P_1(A)P_2(B) = \left(\sum_{j \in J} P_1(\alpha_j)\right) \left(\sum_{k \in K} P_2(\beta_k)\right),$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P(A_i \times B_i) &= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} P(\alpha_j \times \beta_k) \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} P_1(\alpha_j) P_2(\beta_k) \\ &= \left(\sum_{j \in J} P_1(\alpha_j)\right) \left(\sum_{k \in K} P_2(\beta_k)\right) = P(A \times B). \end{aligned}$$

## Aperçu du Chapitre 3, partie I

- ▶ Définition d'une variable aléatoire :  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$  pour chaque  $x \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Quelques fonctions sur  $\Omega$  qui sont des variables aléatoires :
  - ▶ les indicateurs  $1_A(\omega)$ , où  $A \in \mathcal{F}$ ,
  - ▶ la somme de deux variables aléatoires, les multiples scalaires des variables aléatoires,
  - ▶ les limites des variables aléatoires:  $(Z(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega) \text{ pour } \omega \in \Omega)$ .
- ▶ Indépendance
  - ▶ d'événements (du même espace de probabilité)
  - ▶ de collections d'événements
  - ▶ de variables aléatoires

## Aperçu du Chapitre 3, partie II

Convergence monotone d'événements (exemples) :

- ▶ Pour  $A_n \equiv [0, 1/n]$ ,  $A_n \searrow \cap_n [0, 1/n] = \{0\}$ .
- ▶ Pour  $A_n \equiv [0, 1 - 1/n]$ ,  $A_n \nearrow \cup_n [0, 1 - 1/n] = [0, 1)$ .

Par convergence de probabilités (un théorème),

- ▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} P([0, 1/n]) = P(\{0\})$ ,
- ▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} P([0, 1 - 1/n]) = P([0, 1))$ ,

## Aperçu du Chapitre 3, partie III

Pour les séquences réels,

- ▶  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{m \geq n} x_m)$
- ▶  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} x_m)$

Exemple :  $A_n \equiv (-1)^n(1 + 1/n) = 2, -3/2, 4/3, -5/3, \dots$

Pour les suites d'événements, pas forcément monotone,

- ▶  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$
- ▶  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

Exemple :  $H_n \equiv \{(r_1, r_2, \dots) \in \Omega : r_n = 1\}$ .  $\liminf_n H_n$  ( $H_n$  presque toujours) et  $\limsup_n H_n$  ( $H_n$  infiniment souvent).