$\mathcal{J}$, une semi-algèbre

$\phi, \Omega \in \mathcal{J}$

lemme 2.3.15 $A_1, A_2 \in \mathcal{J} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{J}$

$\cap|$ $A \in \mathcal{J} \Rightarrow A^c$ est une réunion finie d'éléments de $\mathcal{J}$

$P : \mathcal{J} \to [0,1]$

$P(A) = P^*(A)$ $A \in \mathcal{J}$

lemme 2.3.5.

$P(\phi) = 0$, $P(\Omega) = 1$

$A_1, \dots, A_K \in \mathcal{J}$, disjoint, $A = \cup A_i \in \mathcal{J}$

$\Rightarrow P(A) \geq \sum P(A_i)$

superadd fini

$A, A_1, \dots, A_K \in \mathcal{J}$, $A \subseteq \cup A_i$

$\Rightarrow P(A) \leq \sum P(A_i)$

mono dén

$\mathcal{M}$ définition éqn 2.3.7 tous les A tels que

$$P^*(A \cap E) + P^*(A^c \cap E) = P^*(E) \quad \forall E \in 2^\Omega$$

algèbre lemme 2.3.10

stabilité par les réunions dénombrable disjointes 2.3.13

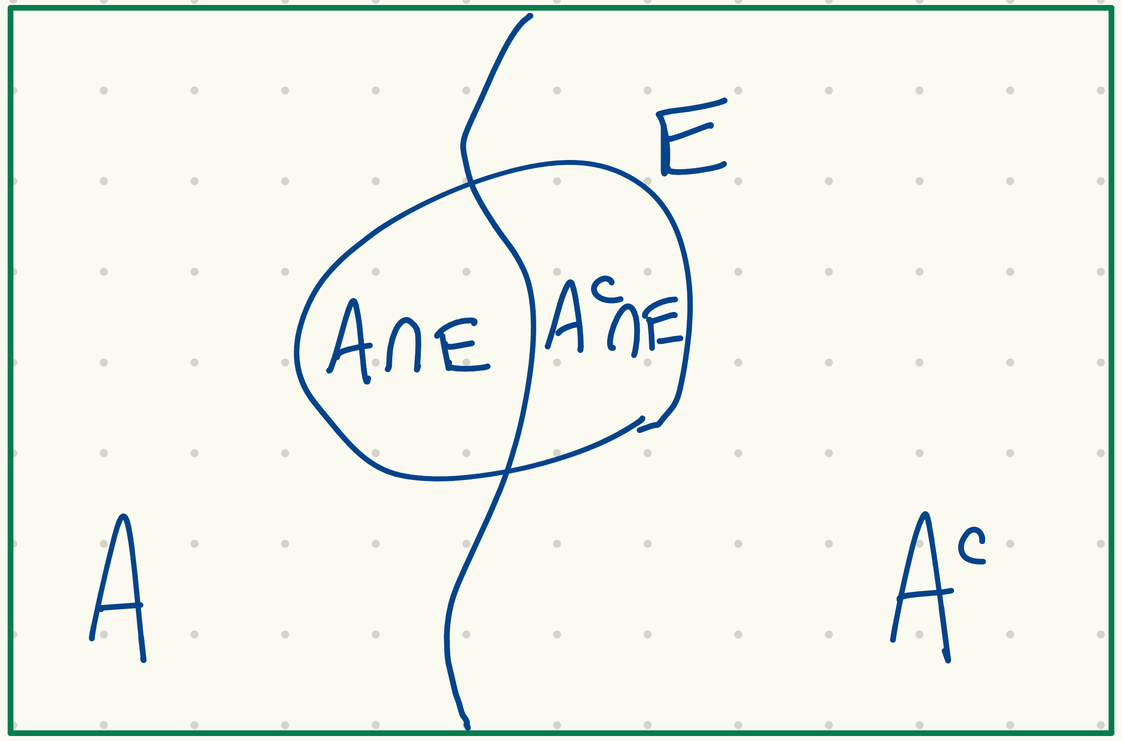
σ-algèbre tribu lemme 2.3.14

$P^* : \mathcal{M} \to [0,1]$ (restriction) additivité dénombrable lemme 2.3.9

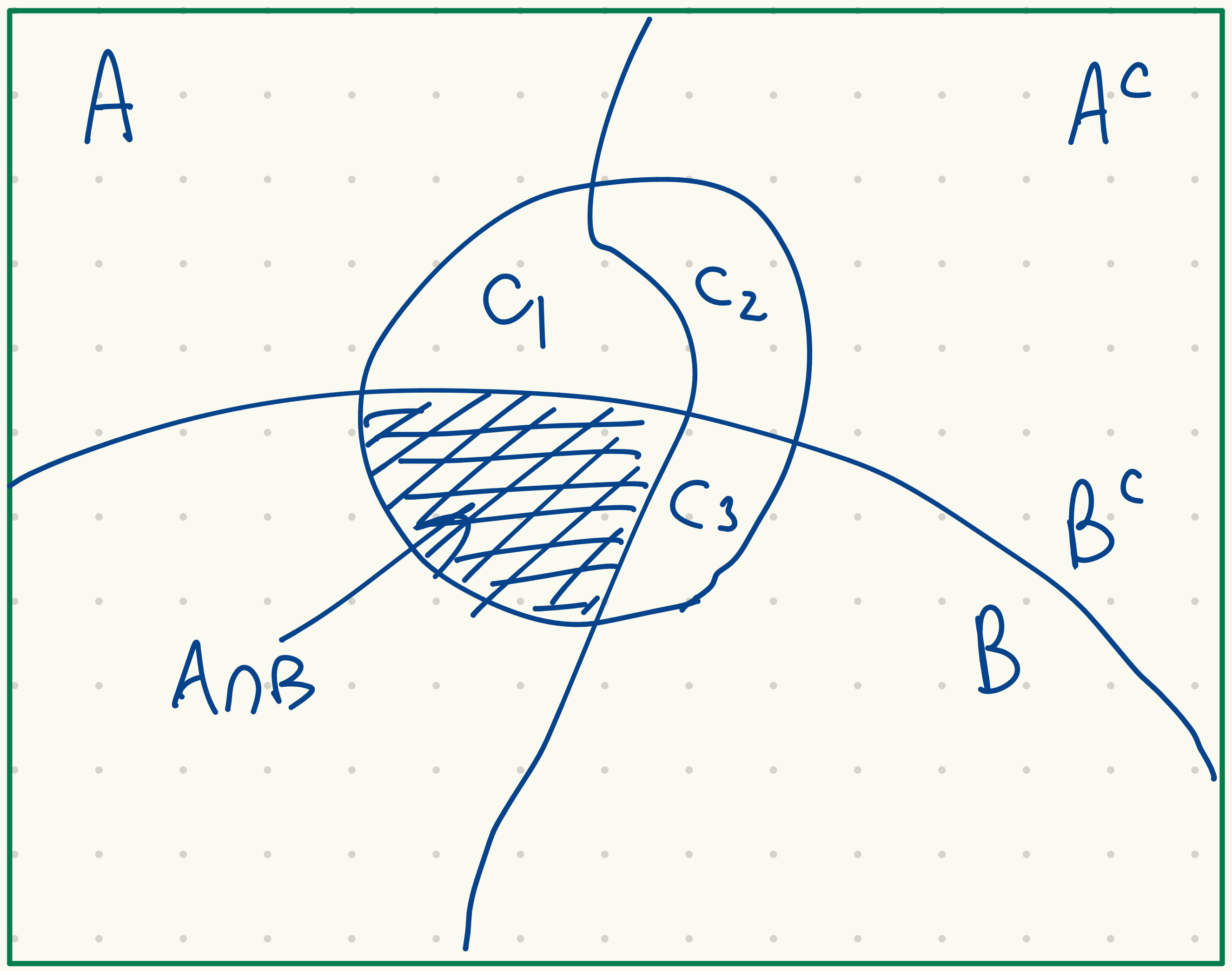
2^Ω

$P^* : 2^\Omega \to [0,1]$ défn 2.3.4

$$P^*(A) = \inf_{\substack{A_1, A_2, \dots \in \mathcal{J} \\ A \subseteq \cup_i A_i}} \sum_i P(A_i)$$



$$P^*(A\cap E)+P^*(A^c\cap E)=P^*(E)$$



$$P^*[(A\cap B)\cap E]+P^*[(A\cap B)^c\cap E] \leftarrow$$

$$=P^*[(A\cap B)\cap E]+P^*[C_1\cup C_2\cup C_3]$$

$$\leq P^*[(A\cap B)\cap E]+P^*[C_1]+P^*[C_2]+P^*(C_3)$$

$$=P^*(B\cap E)+P^*(B^c\cap E)$$

$A\in\mathcal{M}$, $B\cap E$ pour E, $B^c\cap E$ pour E, $B\in\mathcal{M}$

$$=\underline{P^*(E)}$$

$\geq$ par sous-additivité (lemme 2.3.6.)

Une semi-algèbre pour $\Omega = \{(r_1, r_2, \dots) : r_i \in \{0,1\}\}$

$$\mathcal{J} = \{A_{a_1,\dots,a_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\phi, \Omega\}$$

$$A_{01011} \cap A_{011100} = \emptyset$$

$$A_{01} \cap A_{01101} = A_{01101}$$

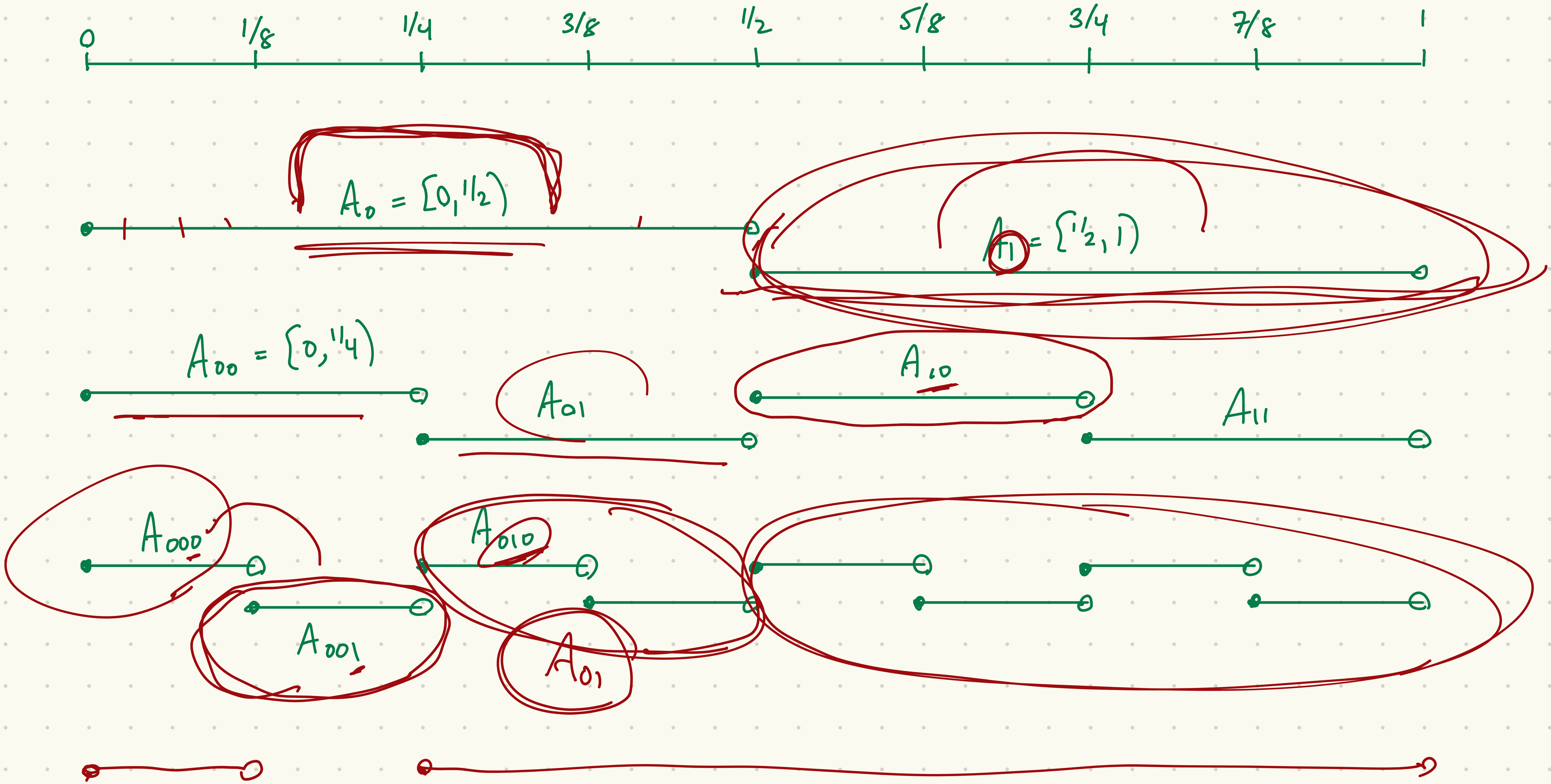
$$A_{a_1,\dots,a_n} \cap A_{b_1,\dots,b_{n'}} = \begin{cases} A_{a_1,\dots,a_n} & n' \leq n \quad a_1 = b_1 \; a_2 = b_2, \dots a_{n'} = b_{n'} \\ A_{b_1,\dots,b_n} & n \leq n' \quad a_1 = b_1, \dots \; a_n = b_n \\ \emptyset & \end{cases}$$

$$A_{010}^c = A_{011} \cup A_{00} \cup A_1$$

$$A^c_{a_1,\dots,a_n} =$$

$$A_{a_1,\dots,a_{n-1}(1-a_n)} \cup A_{a_1,\dots,a_{n-2}(1-a_{n-1})} \cup \dots \cup A_{(1-a_1)}$$

$\Omega = \{(r_1, r_2, \dots) : r_i \in \{0,1\}\}$ et $\Omega = [0,1)$



Une protoprobabilité pour $\Omega = \{(r_1, r_2, \dots), r_i \in \{0,1\}\}$

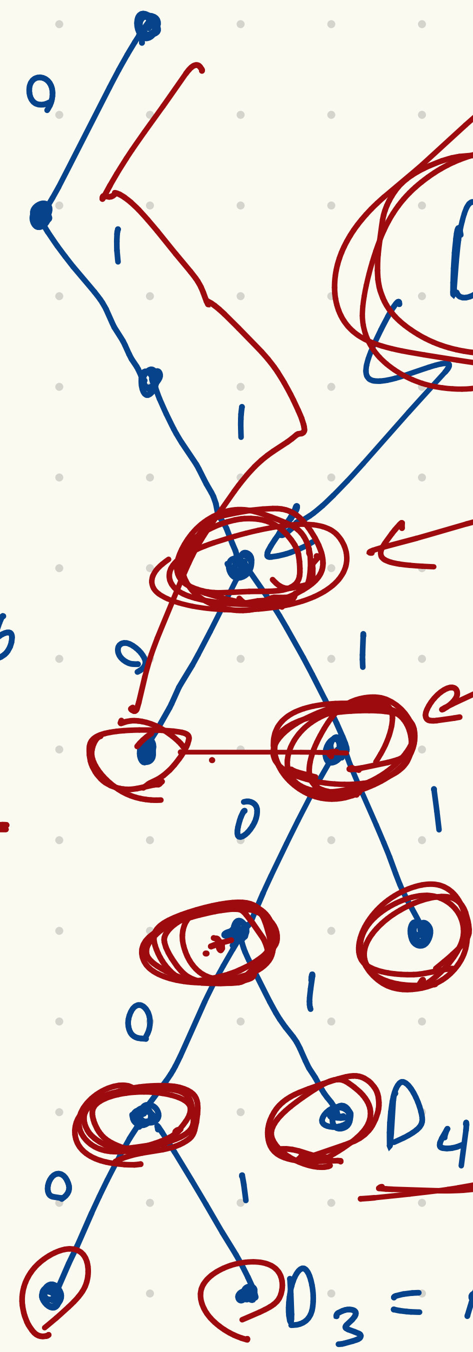
A_{011011}

$A_{1101101111}$ 0

$D = A_{011}$ $P(D) = 2^{-3}$

$D_1, D_2, \dots, D_5 \in \mathcal{J}$

$D = \bigcup_{i=1}^{5} D_i$



$P(D_1) = 2^{-4} = 1/16$

$D_1 = A_{0110}$

$P(D_1) = 2^{-4} = 1/16$

$D_5 = A_{01111}$ $P(D_5) = 2^{-5} = 1/32$

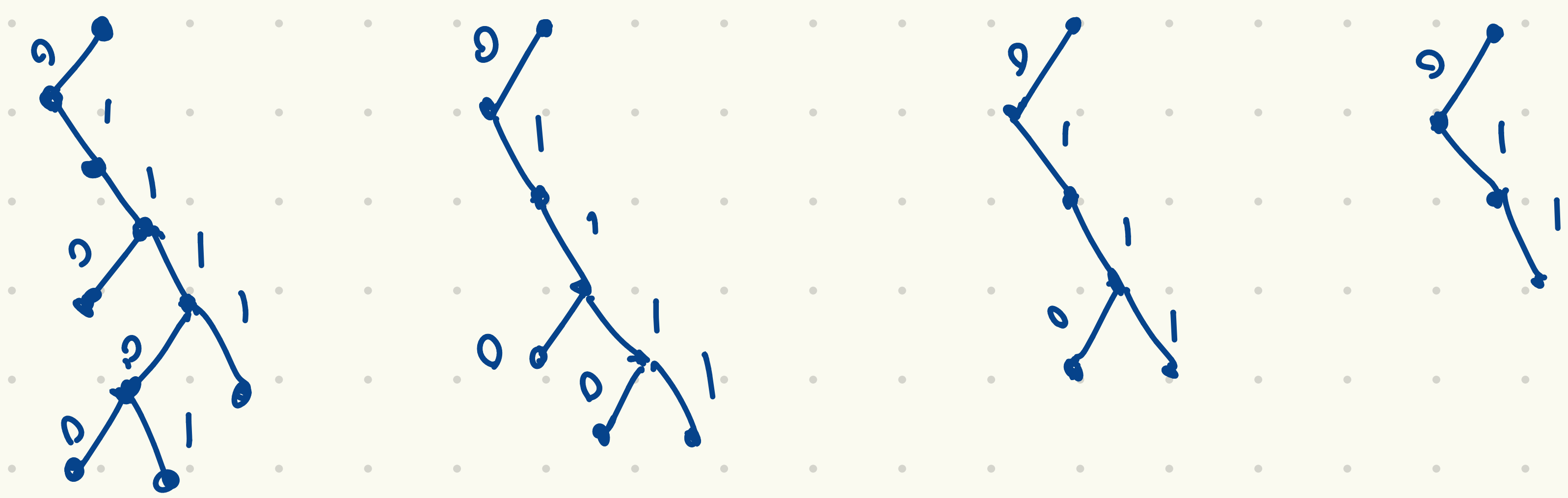
D_4

$D_2 = A_{0111000}$

$P(D_2) = 2^{-7} = \frac{1}{128}$

D_2 $D_3 = A_{0111001}$

$\sum_{i=1}^{n} P(D_i)$ est pareille pour

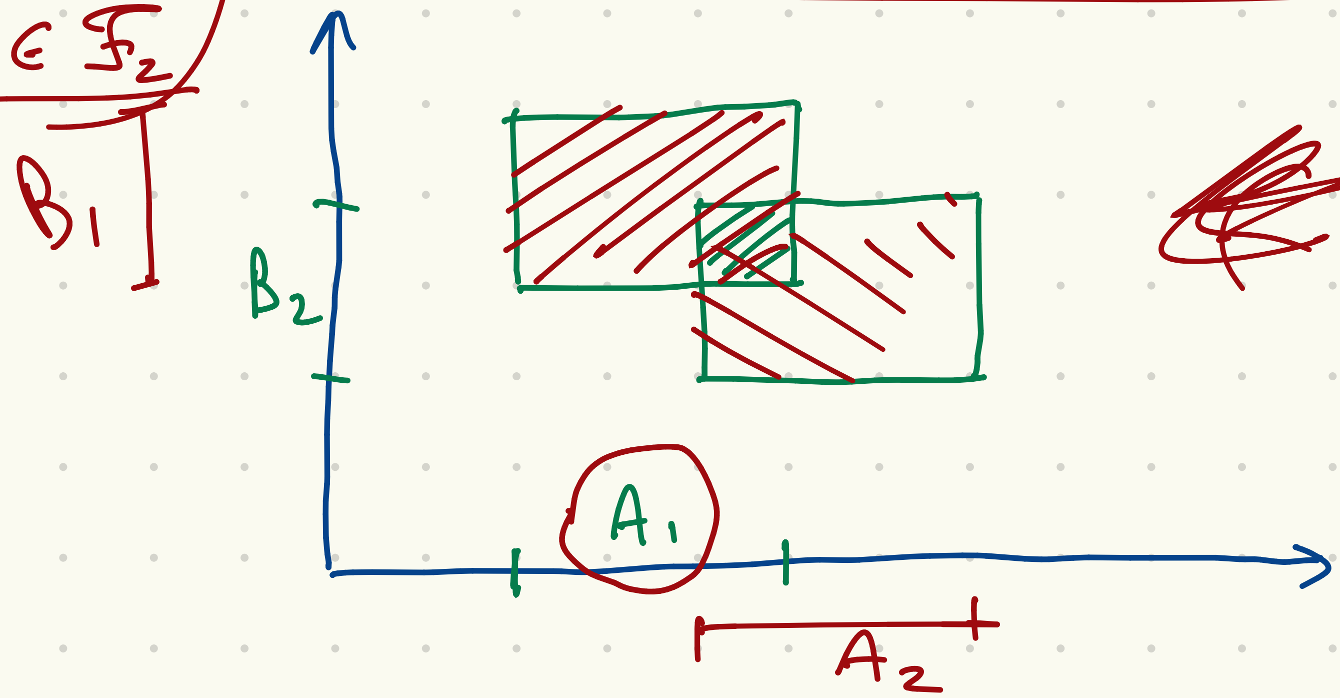


Une semi-algèbre pour $\Omega_1 \times \Omega_2 \equiv \Omega$

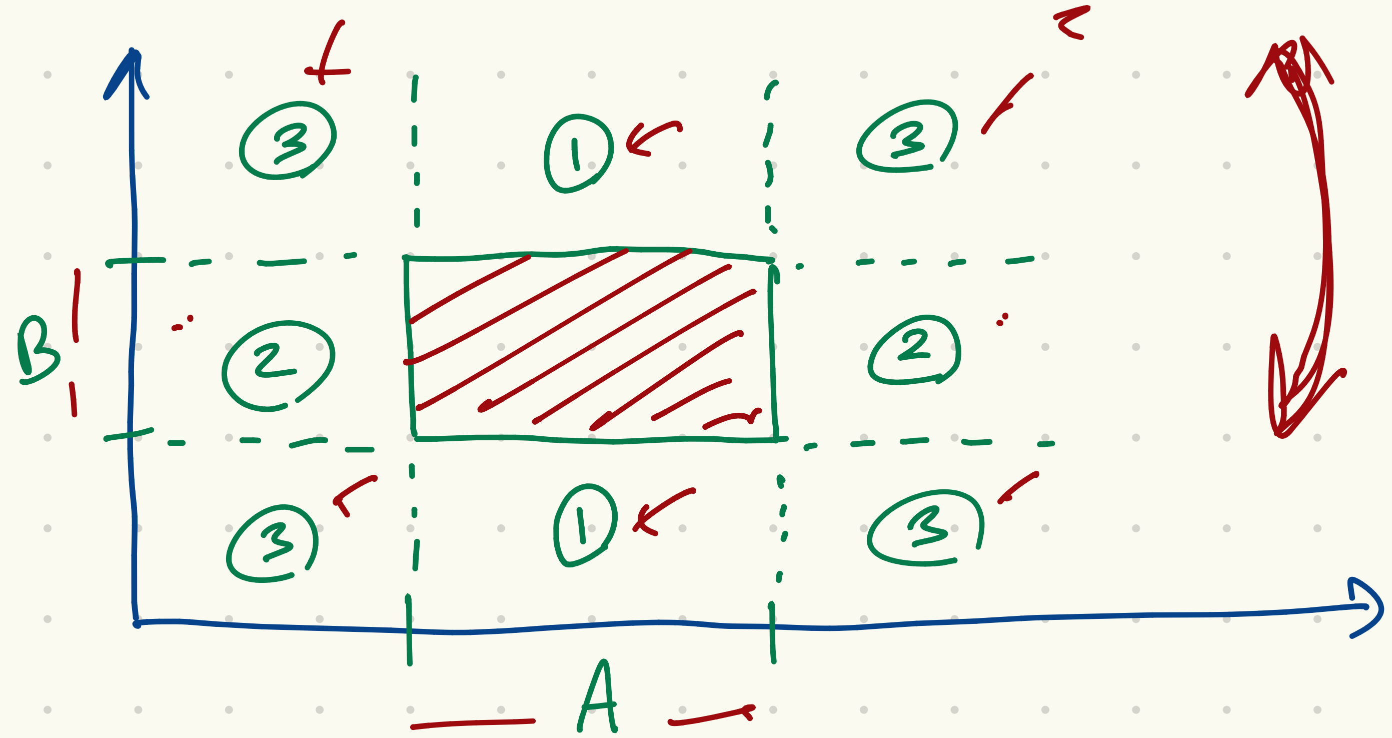
$\emptyset = \emptyset \times \emptyset \qquad \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \qquad$ alors $\emptyset, \Omega \in \mathcal{J}$

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{J}$$

$A_1, A_2 \in \mathcal{F}_1$
$B_1, B_2 \in \mathcal{F}_2$

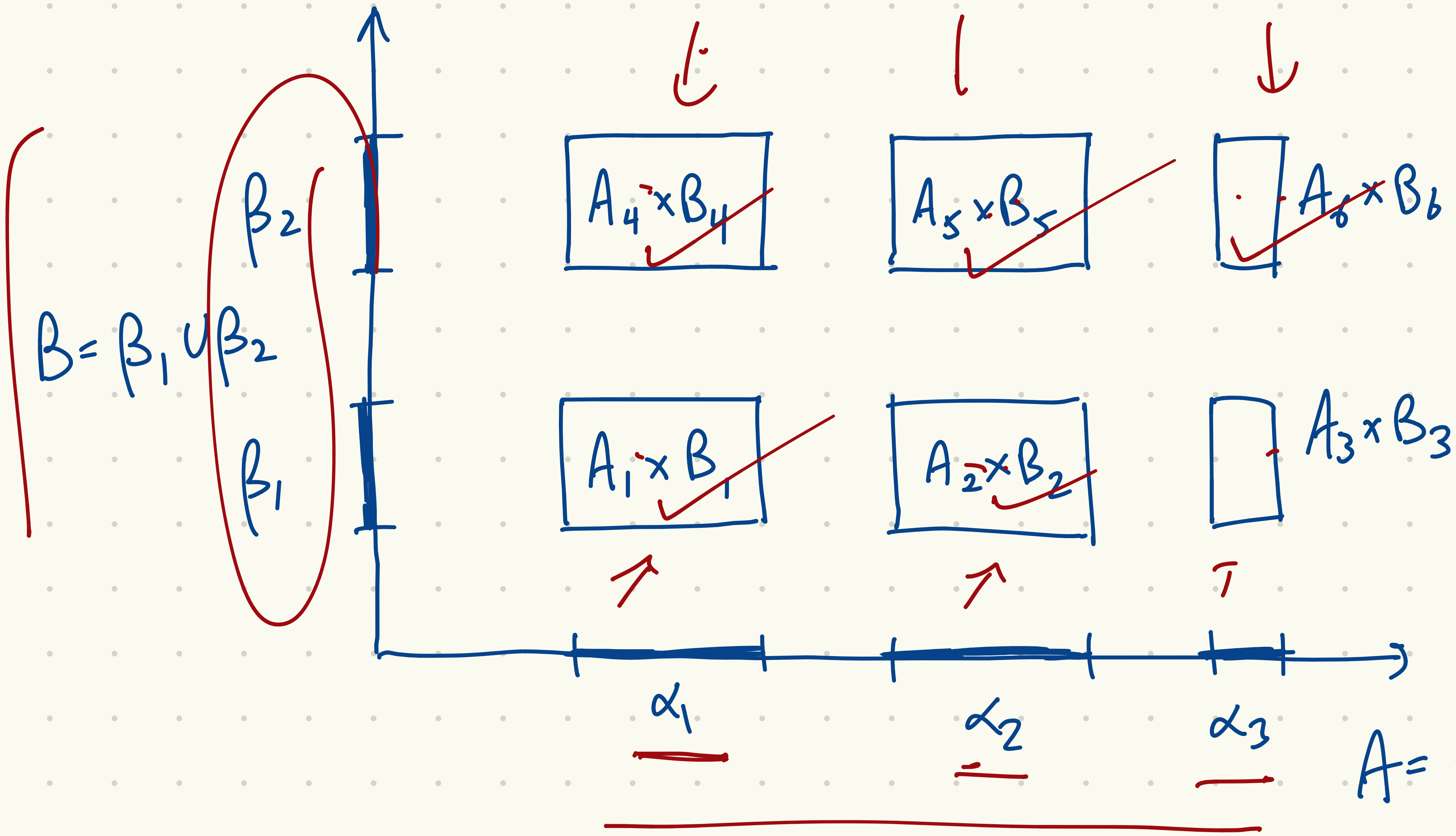


$$(A \times B)^c = \underbrace{(A \times B^c)}_{①} \cup \underbrace{(A^c \times B)}_{②} \cup \underbrace{(A^c \times B^c)}_{③}$$



Une protoprobabilité pour $\Omega_1 \times \Omega_2$

Un exemple avec $n=6$ $|J|=3$ $|K|=2$.



$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_4 = \alpha_1\\ A_2 &= A_5 = \alpha_2\\ A_3 &= A_6 = \alpha_3 \end{aligned}\right\}$$

$A=\alpha_1\cup\alpha_2\cup\alpha_3$

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= B_2 = B_3 = \beta_1\\ B_4 &= B_5 = B_6 = \beta_2 \end{aligned}\right\}$$

$\liminf_n$ et $\limsup_n$ pour une suite de nombres

x_n 0 0 1 0 1 1 0 1 0 ... (0 toujours) ← 1 finiment souvent

y_n $\underbrace{0\ 1}_{1}$ $\underbrace{0\ 0\ 1}_{2}$ $\underbrace{0\ 0\ 0\ 1}_{3}$ ... ← 1 infiniment souvent

z_n 1 0 1 0 0 1 1 0 1 ... (1 toujours) ← 1 presque toujours

$\limsup_n x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} x_m = 0$ $\qquad$ $\liminf_n x_n = \lim_n \inf_{m\geq n} x_m = 0$

$\limsup_n y_n = 1$ $\qquad$ $\liminf_n y_n = 0$

$\limsup_n z_n = 1$ $\qquad$ $\liminf_n z_n = 1$

$\liminf_n$ et $\limsup_n$ pour une suite d'ensembles (d'événements)

n	1	2	3	4	5	...
A_n	$\{0,1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	...
$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$	$\emptyset$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	
$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$	$\{0,1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$			

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{3\} \qquad \text{presque toujours} \qquad = \liminf_n A_n$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup_n A_n$$

$\{1,2,3\}$

Exemple, $\limsup_n$ et $\liminf_n$ d'une series de nombres.

$$x_n = (-1)^n (1 + 1/n)$$