

# Signaux

ECN 6013, automne 2019

William McCausland

2019-12-02

# Signaux - éléments et exemples

Les éléments :

- ▶ information asymétrique, indication de valeur ou productivité
- ▶ Les agents à information favorable veulent la révéler.
- ▶ La transmission crédible de l'information doit être coûteuse.
- ▶ Ce coût doit être moins élevé quand la valeur est plus élevée.

Exemples :

- ▶ jeunes, productivité comme travailleurs, éducation
- ▶ avocats, productivité, vêtements et bureaux de luxe
- ▶ firmes, qualité des produits, garanties
- ▶ banques, solvabilité, édifices bancaires
- ▶ firmes (intro en bourse), perspectives de profit, parts retenues
- ▶ paons, aptitude biologique, queue (sélection sexuelle)

# Signaux et Indices

Un signal :

- ▶ observable
- ▶ choisi
- ▶ peut avoir un effet sur la valeur ou la productivité ou non
- ▶ exemples : éducation, etc.

Un indice :

- ▶ observable
- ▶ non choisi
- ▶ peut avoir un effet sur la valeur ou la productivité ou non
- ▶ exemples : âge, sexe, race

Signaux et criblage (signalling and screening)

## You might be signalling - du blogue de Bryan Caplan

- ▶ If you bothered to enroll in school or pay tuition, you might be signaling.
- ▶ If you worry about failing the final exam, but not subsequently forgetting what you learned, you might be signaling.
- ▶ If you don't think cheating is "only cheating yourself," you might be signaling.
- ▶ If you seek out "easy A's," you might be signaling.
- ▶ If you rejoice when teachers cancel class, you might be signaling.
- ▶ If you ask "will this be in the test?", you might be signalling.

## Les Signaux dans le New York Times

XINZHENG, China, June 21 - Shengda College in central China

Liu Jin/Agence France-Presse

Campus security officers stood guard Tuesday at the gate to Shengda College, where a riot erupted on Friday. But many students paid the college's rich tuition — at \$2,500 a year one of the highest in China — primarily because Shengda promised that their diplomas would bear the name of its parent, Zhengzhou University, a more prestigious national-level institution, and not mention Shengda at all.

So when the graduating class of 2006 received diplomas that read "Zhengzhou University Shengda Economic, Trade and Management College," students erupted last Friday, ransacking classrooms and administrative offices, shattering car windows, scuffling with the police and staging one of the most prolonged student protests since the 1989 pro-democracy uprising that filled Tiananmen Square [...].

## Signaux - sommaire

- ▶ Le papier de Spence introduit formellement le concept.
- ▶ Il y a des travailleurs et des firmes.
- ▶ Travailleurs :
  - ▶ Deux types de productivité :  $H$  et  $B$ , en proportions  $q_H$ ,  $q_B$
  - ▶ Ils choisissent un niveau d'éducation et de participer ou non.
  - ▶ Ils ont des préférences pour leur salaire et leur niveau d'éducation.
  - ▶ Ces préférences dépendent de leur type.
  - ▶ Leur productivité peut dépendre de leur niveau d'éducation.
- ▶ Firmes :
  - ▶ Elles embauchent les travailleurs.
  - ▶ Elles offrent un salaire qui dépend du niveau d'éducation.
  - ▶ Elles n'observent pas le type de travailleur directement.
  - ▶ Elles observent le niveau d'éducation, qui peut révéler le type en équilibre.
  - ▶ Le marché pour le travail de chaque niveau d'éducation est concurrentiel.

## Signaux - travailleurs

- ▶ Deux types :  $H$  (haute productivité) et  $B$  (basse).
- ▶ Les proportions sont  $q_H$  et  $q_B = 1 - q_H$ .
- ▶ Utilité  $W(y) - C_i(y)$ ,  $i = H, B$ , où
  - ▶  $y$  est le niveau d'éducation,
  - ▶  $W(y)$  est le salaire offert à un travailleur avec éducation  $y$ ,
  - ▶  $C_i(y)$  est le coût d'opportunité de l'éducation du type  $i$ .
- ▶ La productivité est de  $m_i(y)$ ,  $i = H, B$ .
  - ▶ La dépendance de  $i$  est essentielle pour un modèle de signaux.
  - ▶ La dépendance de  $y$  (accumulation de capital humain) n'est pas essentielle dans le modèle.

## Signaux - firmes

- ▶ Beaucoup de firmes identiques et concurrentielles.
- ▶ La technologie est linéaire, même si  $m_i(y)$  ne l'est pas nécessairement.
- ▶ Une firme offre un paie  $W(y)$ , à un travailleur d'éducation  $y$ .
- ▶ En équilibre,  $W(y)$  est le produit marginal espéré d'un travailleur avec éducation  $y$ .
- ▶ L'incertitude n'est pas spécifiée — comme les prix, elle est déterminée en équilibre.
- ▶ Pour chaque  $y$ , la firme croit que la proportion des travailleurs du type  $H$  parmi ceux à éducation  $y$  est  $\pi(y)$ .
- ▶  $\pi(y)$  n'égale pas nécessairement  $q_H$ .

# Signaux - équilibre

Un équilibre est

- ▶ une fonction de salaire  $W(y)$ ,
- ▶ une fonction de probabilité  $\pi(y)$ ,
- ▶ des niveaux d'éducation  $y_B$  et  $y_H$ , tels que
- ▶  $y_i$  maximise  $W(y) - C_i(y)$  pour  $i = H, B$ ,
- ▶  $W(y) = \pi(y)m_H(y) + (1 - \pi(y))m_B(y)$ ,
- ▶  $\pi(y)$  correspond à la vraie proportion (endogène), pour chaque niveau d'éducation  $y$ .

Deux types d'équilibre :

- ▶ Si  $y_B = y_H$ , c'est un équilibre « mélangeant » (pooling).
- ▶ Si  $y_B \neq y_H$ , c'est un équilibre « séparant » (separating) — les types sont révélées en équilibre.

## Équilibre si les types étaient observables

L'analyse est triviale si le type est observé.

- ▶ Pas besoin de  $\pi(y)$
- ▶ Les firmes peuvent payer  $W_H(y)$  et  $W_B(y)$  de façon indépendante.
- ▶ En équilibre,  $W'_i(y_i) - C'_i(y_i) = 0$ ,  $i = H, B$ .
  - ▶ La solution est  $W_i(y_i) = C_i(y_i) + c$ .
  - ▶ La constante  $c$  est déterminée par la contrainte de participation.
- ▶  $y_H \neq y_B$  est possible, mais ne révèle pas d'information cachée.

## Un exemple où l'éducation n'est pas productive

- ▶ Maintenant, le type n'est pas observé.
- ▶ Supposons que  $m_i(y) = m_i$ , la productivité ne dépend pas de l'éducation.
- ▶ Spécifiquement,  $m_B = m$  et  $m_H = 2m$ .
- ▶ Soit  $C_H(y) = y^2/2$ ,  $C_B(y) = 3y^2/4$ .
- ▶ Aparté : si les firmes observaient le type directement, l'équilibre est trivial :
  - ▶  $W_H(y) = 2m$ ,  $W_B(y) = m$ ,  $y_H = y_B = 0$ .

# Éducation non productive, équilibres mélangeants

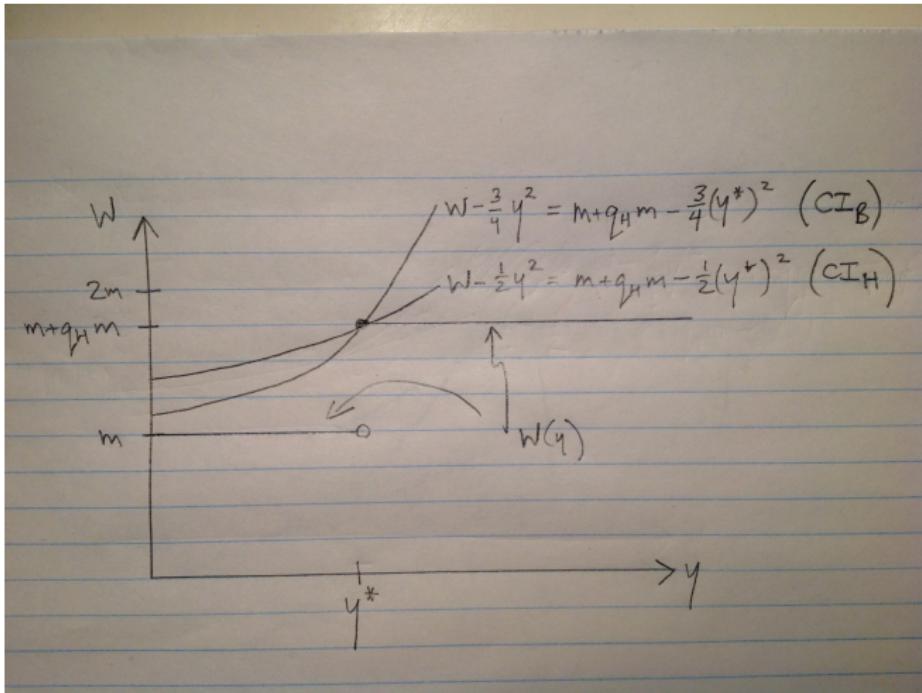


Figure 1:  $W(y)$  pour l'équilibre mélangeant

## Éducation non productive, équilibres mélangeants

- ▶ Dans un équilibre mélangeant, il y a un seuil  $y^*$  tel que

$$y_B = y_H = y^*,$$

$$W(y) = \begin{cases} m & y < y^*, \\ (q_H + 1)m & y \geq y^*, \end{cases} \quad \pi(y) = \begin{cases} 0 & y < y^*, \\ q_H & y \geq y^*. \end{cases}$$

- ▶ Vérification d'un équilibre :
  - ▶ les contraintes de participation tiennent, ( $W(y) > 0$ ).
  - ▶ pour que les travailleurs du type  $H$  choisissent  $y = y^*$ ,

$$mq_H + m - (y^*)^2/2 \geq m,$$

- ▶ pour que les travailleurs du type  $B$  choisissent  $y = y^*$ ,

$$mq_H + m - 3(y^*)^2/4 \geq m.$$

- ▶ Remarquons que  $mq_H + m - (y^*)^2/2 \geq m$  est redondante.
- ▶ Équilibres multiples : pour chaque  $y^* \leq 2\sqrt{mq_H/3}$ .

# Le jugement de Salomon de Pierre Paul Rubens



Figure 2: Le jugement de Salomon

## Éducation non productive, équilibres séparants

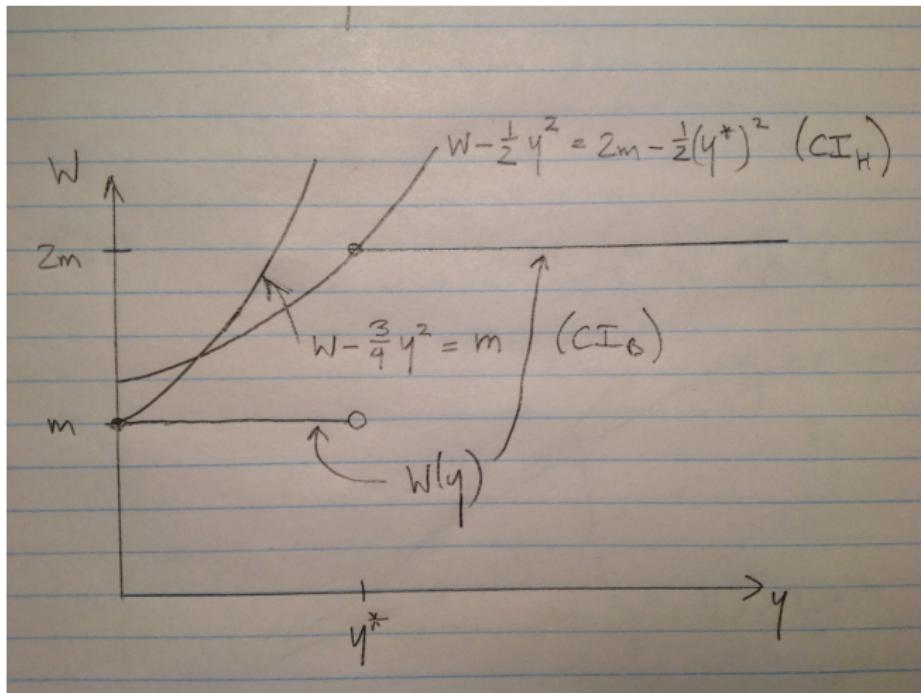


Figure 3:  $W(y)$  pour l'équilibre séparant

## Éducation non productive, équilibre séparant

- ▶ Dans un équilibre séparant, il y a un seuil  $y^*$  tel que

$$y_B = 0, \quad y_H = y^*,$$

$$W(y) = \begin{cases} m & y < y^*, \\ 2m & y \geq y^*, \end{cases} \quad \pi(y) = \begin{cases} 0 & y < y^*, \\ 1 & y \geq y^*. \end{cases}$$

- ▶ Vérification d'un équilibre :
  - ▶ les contraintes de participation tiennent, ( $W(y) > 0$ ).
  - ▶ contrainte de sélection pour les types  $H$ :

$$2m - (y^*)^2/2 \geq m$$

- ▶ contrainte de sélection pour les types  $B$ :

$$m \geq 2m - 3(y^*)^2/4$$

- ▶ ensembles :  $3(y^*)^2/4 \geq m \geq (y^*)^2/2$ .

## Un exemple où l'éducation est productive

- ▶ Supposons maintenant que  $m_H(y) = 6y$  et  $m_B(y) = 3y$ .
- ▶ Comme avant,  $C_H(y) = y^2/2$  et  $C_B(y) = 3y^2/4$ .
- ▶ Soit  $q_H = 1/3$  (fraction de travailleurs de type  $H$ )
- ▶ Si les firmes observaient les types, ils paieraient  $W(y) = m_i(y)$  pour  $i = H, B$  :
  - ▶  $H$  maximise  $W_H(y) - C_H(y) = 6y - y^2/2$  au choix  $y = 6$ .
  - ▶  $B$  maximise  $W_B(y) - C_B(y) = 3y - 3y^2/4$  au choix  $y = 2$ .

# Éducation productive, pleine information

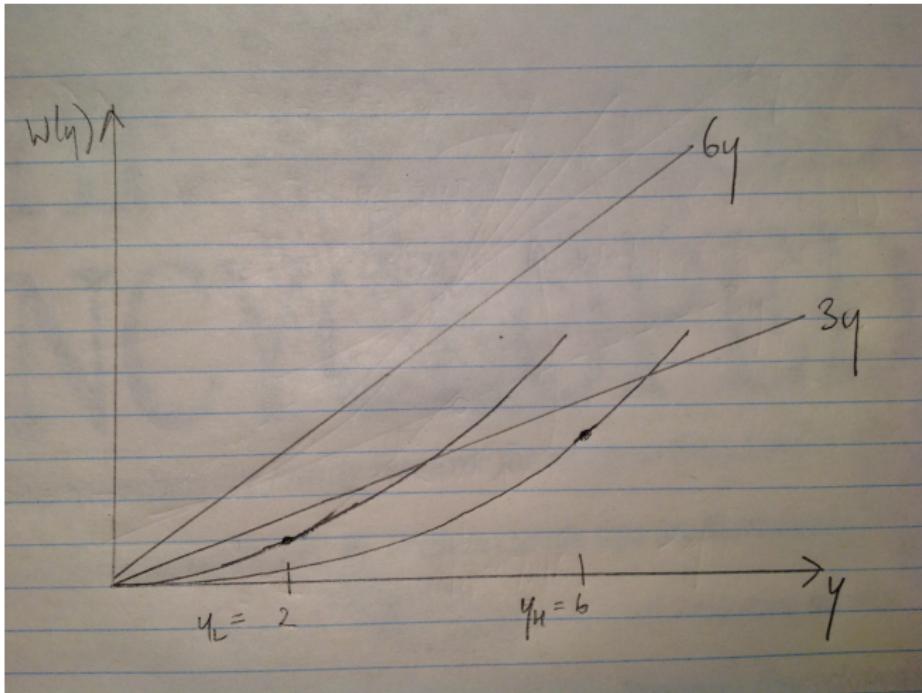


Figure 4: Efficacité dans le cas de pleine information

# Éducation productive, équilibres mélangeants

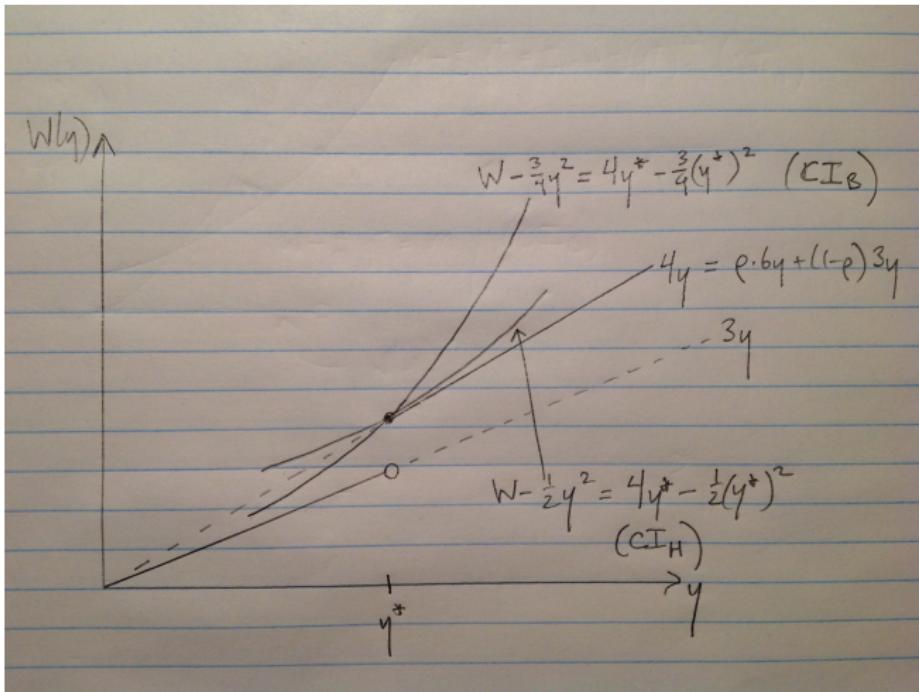


Figure 5:  $W(y)$  pour l'équilibre mélangeant

## Éducation productive, équilibre mélangeant I

- ▶ Si  $B$  et  $H$  choisissent le même  $y = y^*$ , la productivité moyenne est

$$q_H m_H(y^*) + (1 - q_H) m_B(y^*) = (1/3)(6y^*) + (2/3)(3y^*) = 4y^*.$$

- ▶ Dans un équilibre mélangeant, il y a une valeur  $y^*$  telle que

$$y_B = y_H = y^*,$$

$$W(y) = \begin{cases} 3y & y < y^*, \\ 4y^* & y \geq y^*, \end{cases} \quad \pi(y) = \begin{cases} 0 & y < y^*, \\ q_H & y \geq y^* \end{cases}$$

et  $y^*$  est optimal et pour les  $H$  et pour les  $B$ .

## Éducation productive, équilibre mélangeant II

- ▶ Les conditions à vérifier sont
  1.  $y^*$  est meilleur pour les  $H$  que  $y < y^*$ :  
$$3y - y^2/2 \leq 4y^* - (y^*)^2/2$$
 pour chaque  $y \leq y^*$ ,
  2.  $y^*$  est meilleur pour les  $B$  que  $y < y^*$ :  
$$3y - 3y^2/4 \leq 4y^* - 3(y^*)^2/4$$
 pour chaque  $y \leq y^*$ .
  3.  $y^*$  est meilleur pour les  $H$  que  $y > y^*$ : la courbe d'indifférence des  $H$  qui passe par le point  $(y^*, 4y^*)$ ,  
 $w = y^2/2 + 4y^* - (y^*)^2/2$ , a une dérivée par rapport à  $y$  qui est inférieure à la dérivée de  $4y$  par rapport à  $y$  à  $y = y^*$ .
- ▶ Condition 2 est vraie pour  $y^* \leq 4.43$  : sinon, le maximum d'utilité dans l'intervalle  $[0, y^*]$  excède l'utilité à  $y^*$ .
- ▶ Étant donnée la condition 2, la condition 1 est redondante car les courbes d'indifférence des  $H$  sont toujours moins raides que celles des  $B$ .
- ▶ Condition 3 est vraie pour  $y^* \geq 4$ .
- ▶ Il y a un équilibre mélangeant pour  $4 \leq y^* \leq 4.43$ .

# Éducation productive, équilibres séparants

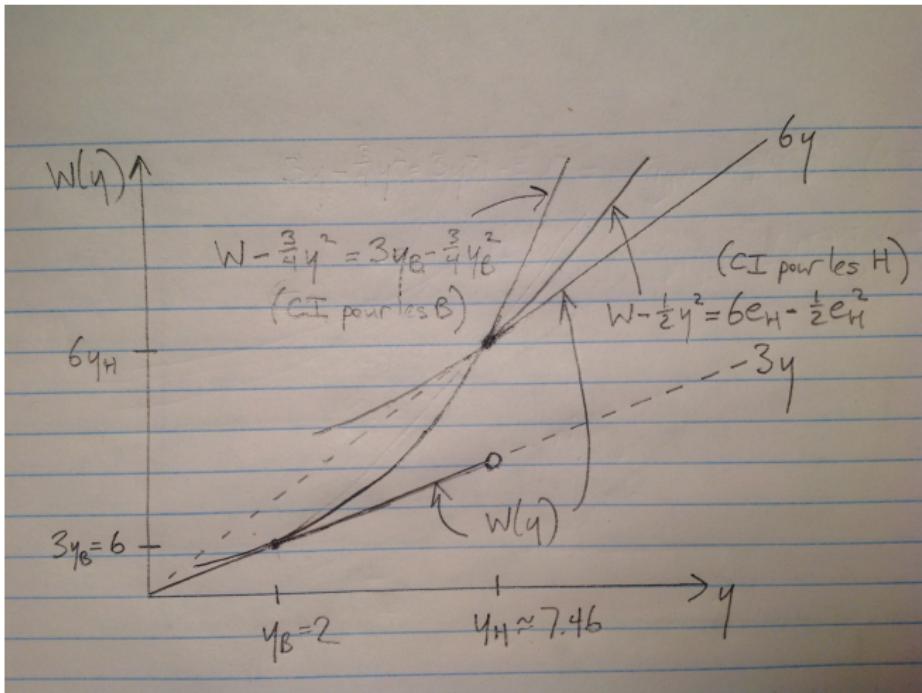


Figure 6:  $W(y)$  pour l'équilibre séparant

## Éducation productive, équilibre séparant

- ▶ Dans un équilibre séparant, il y a  $y_B$  et  $y_H$  tels que
  - ▶ les  $B$  choisissent  $y_B$  et reçoivent  $3y_B$  comme salaire,
  - ▶ les  $H$  choisissent  $y_H$  et reçoivent  $6y_H$  comme salaire.
- ▶ Les contraintes d'auto-sélection sont

$$6y_H - y_H^2/2 \geq 3y_B - y_B^2/2$$

pour les  $H$  et

$$3y_B - 3y_B^2/4 \geq 6y_H - 3y_H^2/4$$

pour les  $B$ .

- ▶ Les  $B$  n'ont rien à prouver, ils obtiennent seulement la quantité d'éducation efficace  $y_B = 2$ .
- ▶ Si la contrainte d'auto-sélection pour les  $B$  est saturée,  $y_H \approx 7.46$ . La quantité d'éducation efficace pour les  $H$  est de  $y_H = 6$  alors  $y_H = 7.46$  est inefficace. Il y a des équilibres où  $y_H > 7.46$ .