ECN 7060, cours 10

William McCausland

2019-11-13

Fonction de risque, risque de Bayes

- Pour une fonction de perte $L(\theta, a)$ donnée et un estimateur $\delta(X)$ donné, la fonction de risque (une fonction de θ) est, dans la notation de Casella et Berger :

$$R(\theta, \delta) = E_\theta[L(\theta, \delta(X))].$$

- L'espérance est par rapport à la loi de X pour θ donné.
- Pour un bayésien, θ est aléatoire et on peut écrire

$$R(\theta, \delta) = E[L(\theta, \delta(X))|\theta].$$

- Le risque de Bayes, pour une densité *a priori* $\pi(\theta)$ donnée, est

$$\begin{aligned} r(\pi, \delta) &\equiv \int \pi(\theta) E[L(\theta, \delta(X))|\theta]\, d\theta = E[E[L(\theta, \delta(X))|\theta]] \\ &= E[L(\theta, \delta(X))] \end{aligned}$$

- En même temps,

$$r(\pi, \delta) = E[E[L(\theta, \delta(X))|X]].$$

Règles (de décision) de Bayes

- Rappel : $r(\pi, \delta) = E[E[L(\theta, \delta(X))|X]]$.
- Une *règle de Bayes* est une fonction de décision δ^* qui minimise $r(\pi, \delta)$ pour π et $L(\theta, a)$ donné.
- Difficultés possibles
  - non-unicité de δ
  - absence d'une solution parce que $R(\theta, \delta) = \infty$ pour tous δ
- Même si $r(\pi, \delta)$ est toujours infini, on peut souvent trouver, pour x donné, $\delta(x)$ qui minimise la perte *a posteriori* espérée $E[L(\theta, \delta(X))|X]$ à $\{X = x\}$.
  - C'est une règle de Bayes *généralisée*.
  - En pratique, on le fait pour x observée seulement; $\delta(x)$ a souvent la même dimension que θ.
  - Pour la perte quadratique, $\delta(x)$ est la moyenne *a posteriori*.
  - Pour la perte valeur absolue, $\delta(x)$ est la médiane *a posteriori*.
  - Pour une autre perte, on peut approximer $\delta(x)$ par simulation.

Dominance et admissibilité

- La fonction de décision δ^* *domine* la fonction de décision δ par rapport à la fonction de perte $L(\theta, a)$ si $R(\theta, \delta^*) \leq R(\theta, \delta)$, avec une inégalité stricte pour au moins une valeur de θ.
- Une fonction de décision est admissible s'il n'y a pas d'autre fonction de décision qui la domine.
- Supposons que $\delta(x)$ minimise $r(\pi, \delta) = \int R(\theta, \delta)\pi(\theta)\, d\theta$, pour une fonction $\pi \colon \Theta \to \mathbb{R}_+$.
  - Si $\delta(x)$ est inadmissible, il existe une $\delta^*(x)$ qui la domine : il y a un ensemble $\bar{\Theta}$ où $R(\theta, \delta) > R(\theta, \delta)$. Il faut que $\pi(\bar{\Theta}) = 0$. Sinon, $\delta(x)$ ne minimise $r(\pi, \delta)$.
- À quelques conditions techniques près, un estimateur admissible est une règle de Bayes généralisée (avec possiblement une loi *a priori* impropre).

Biais, EMQ

- Notation, définitions
  - W est un estimateur de θ ou plus généralement de $\tau(\theta)$
  - Le biais de W est $E_\theta[W] - \theta$ ou $E_\theta[W] - \tau(\theta)$
  - L'espérance moyenne quadratique est $E_\theta[(W-\theta)(W-\theta)^\top] = \mathrm{Var}_\theta[W] + \mathrm{biais}_\theta[W]\mathrm{biais}_\theta[W]^\top$.
- L'importance du biais et l'EMQ est largement due à la solubilité des problèmes.
- La perte quadratique est seulement un choix possible parmi plusieurs. Quelques problèmes :
  - paramètres d'échelle toujours positifs,
  - impossibilité de la perte asymétrique,
  - non-existance de la moyenne ou la variance d'un estimateur.
- Le non-biais n'est pas un principe fiable, si on considère l'exemple suivant.

Un estimateur non-biaisé ridicule (RUBE)

- $X_i \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, $n = 1$.
- On veut estimer $\tau(\lambda) = e^{-3\lambda}$.
- Considérons la statistique $T(X) = (-2)^X$.
- Vraiment ridicule :
  - Pour $x = 9, 10, 11$, $T(x) = -512, 1024, -2048$
  - Pour $\lambda = 10$, $e^{-3\lambda} \approx 9.357623 \times 10^{-14}$.
- Mais non-biaisé :

$$E[T] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\lambda)^x}{x!} = e^{-3\lambda}.$$

- Par complétion de la famille de loi Poisson, T est l'estimateur unique non-biaisé de $\tau(\lambda)$.
  - Si $E_\theta[g(X)] = 0$ pour tous θ, $P(\{g(X) = 0\}) = 1$.
  - Soit $g(x) = T(x) - T'(x)$ la différence entre deux candidats pour un estimateur non-biaisé.

Statistiques suffisantes dans un modèle gaussien

- Modèle : $X_i \sim \mathrm{iid}\, N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$
- Densité des données :

$$
\begin{aligned}
f(x|\theta) &= \sum_{i=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right] \\
&= (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] \\
&= (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}((n-1)S^2 + n(\bar{x}-\mu)^2)\right]
\end{aligned}
,
$$

où $S^2 \equiv \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

- Une statistique suffisante minimale pour (μ, σ^2) : $(\bar{x}, S^2)$.

EMQ de $\hat{\sigma}^2$ et S^2 dans le modèle $X_i \sim \mathrm{iid}\, N(\mu, \sigma^2)$

- Rappel: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.
- L'estimateur EMV de (μ, σ^2) est $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = (\bar{x}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2)$.
- S^2 est non-biaisé ; $\hat{\sigma}^2$ est biaisé mais sa EMQ est moins grande, peu importe la valeur de σ^2. (exemples 7.3.3, 7.3.4)

Analyse bayésienne avec une loi *a priori* conjugée

- Soit $\omega = \sigma^{-2}$, $\theta = (\mu, \omega)$.
- Densité des données, en termes de ω :

$$f(x|\theta) \propto \omega^{n/2} \exp\left[-\frac{\omega}{2}((n-1)S^2 + n(\bar{x}-\mu)^2)\right]$$

- La famille des lois *a priori* conjugée est Normal-gamma, où
  - $\omega \sim \mathrm{Ga}(\alpha_0, \beta_0)$
  - $\mu|\omega \sim N(\mu_0, (\omega\lambda_0)^{-1})$
- Après des manipulations, on découvre que

$$\omega|x \sim \mathrm{Ga}\left(\alpha_0 + n/2, \beta_0 + \frac{1}{2}\left((n-1)S + \frac{\lambda_0 n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\lambda_0 + n}\right)\right),$$

$$\mu|\omega, x \sim N\left(\frac{\lambda_0\mu_0 + n\bar{x}}{\lambda_0 + n}, (\lambda_0 + n)^{-1}\right).$$

- Détails à https://en.wikipedia.org/wiki/Normal-gamma_distribution, section "Posterior distribution of the parameters"

La fonction de score

- Soit $L(\theta; x)$ une vraisemblance, $f(x|\theta)$ la densité des données.
- La fonction de score est le gradient :

$$V(\theta, x) = \frac{\partial \log L(\theta; x)}{\partial \theta^\top} = \frac{1}{L(\theta; x)} \frac{\partial L(\theta; x)}{\partial \theta}.$$

- Si on peut changer l'ordre de l'intégrale et la dérivée,

$$E\left[\frac{\partial \log L(\theta; x)}{\partial \theta^\top}\right] = \int \frac{f(x|\theta)}{f(x|\theta)} \frac{\partial f(x|\theta)}{\partial \theta^\top}\, dx = \frac{\partial \int f(x|\theta)\, dx}{\partial \theta^\top} = 0.$$

- Conditions suffisantes pour pouvoir changer l'ordre de l'intégrale et la dérivée
  1. La densité $f(x|\theta)$ a un support borné et ce support ne dépend pas de θ.
  2. La densité $f(x|\theta)$ a un support infini et est continument différentiable en θ ; l'intégral converge uniformement sur Θ.

Inégalité Cramér-Rao

- Échantillon $X_1, \ldots, X_n$, pas nécessairement iid, densité $f(x|\theta)$.
- Supposons que $E[V(\theta, X)] = 0$, $\mathrm{Var}_\theta[W(X)] < \infty$,
$$\frac{d}{d\theta} E_\theta[W(X)] = \int \frac{\partial}{\partial\theta}[W(x) f(x|\theta)]\, dx.$$
- Alors
$$\mathrm{Var}_\theta[W(X)] \geq \frac{\left(\frac{d}{d\theta} E_\theta[W(X)]\right)^2}{E_\theta\left[V(\theta, X)^2\right]}.$$
- Preuve I :
$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} E_\theta[W(X)] &= \int W(x) \left[\frac{\partial}{\partial\theta} f(x|\theta)\right] dx \\ &= E_\theta\left[W(X) V(\theta, X)\right] = \mathrm{Cov}_\theta[W(X), V(\theta, X)] \end{aligned}$$
$$\mathrm{Var}_\theta[V(\theta, X)] = E_\theta[V(\theta, X)^2]$$
- Preuve, II : le reste par l'inégalité de covariance $\mathrm{Var}_\theta[W(X)]\mathrm{Var}_\theta[V(\theta, X)] \geq \mathrm{Cov}_\theta[W(X), V(\theta, X)]^2$

Remarques, inégalité Cramér-Rao

- Le dénominateur est l'information Fisher, qui dépend du modèle et non l'estimateur.
- L'inégalité est très utile dans le cas où $W(X)$ est non-biaisé pour θ : $E_\theta[W(X)] = \theta$, numérateur $= 1$, la variance a une borne qui ne dépend pas de l'estimateur.
- Toujours une fonction de θ, par contre.
- Un estimateur qui atteint la borne est dit "efficace".
- Attention :
  - un estimateur biaisé peut avoir une EMQ en dessous de cette borne.
  - le critère de non-biais et la fonction de perte quadratique ne sont pas sans difficultés.

Théorème Rao-Blackwell

- Soit W un estimateur non-biaisé de $\tau(\theta)$, T une statistique suffisante pour θ. Alors $\phi(T) = E[W|T]$ est un estimateur de $\tau(\theta)$ qui est non-biaisé et uniformement meilleur en termes de variance.
- Preuve: $\phi(T)$ est une fonction de T et alors une fonction de l'échantillon seulement.
- Non-biais :

$$E_\theta[\phi(T)] = E_\theta[E[W|T]] = E_\theta[W] = \tau(\theta).$$

- Uniformement meilleur en termes de variance :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\theta[W] &= \mathrm{Var}_\theta[E[W|T]] + E_\theta[\mathrm{Var[W|T]}] \\ &= \mathrm{Var}_\theta[\phi(T)] + E_\theta[\mathrm{Var[W|T]}]\end{aligned}$$