ECN 6578, Cours 6

William McCausland

2019-10-09

Lemme de Fatou

- Lemme de Fatou : pour une suite $X_n \geq 0$ de v.a.

$$E[\liminf_{n\to\infty} X_n] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n].$$

- Notes :
  1. Hypothèse très faible concernant X_n.
  2. Résultat pour $X_n \geq C > -\infty$ suit immédiatement.
  3. Les deux cotés peuvent être infinis.
- Construction d'une séquence convergente : $Y_n \equiv \inf_{k\geq n} X_k$.
  1. $0 \leq Y_n \leq X_n$.
  2. $Y_n \leq Y_{n+1}$ ($\{k \geq n\}$ décroissant).
  3. $Y_n \nearrow Y \equiv \liminf_{n\to\infty} X_n$.
- Preuve :

$$\liminf_n E[X_n] \geq \liminf_n E[Y_n] = \lim_n E[Y_n] = E[Y] = E[\liminf_n X_n]$$

Lemme de Fatou pour $X_n \leq C < \infty$

- Si $X_n \leq C < \infty$, $-X_n \geq -C > -\infty$ et par le lemme de Fatou,

$$\liminf_n E[-X_n] \geq E[\liminf_n -X_n],$$

$$\liminf_n -E[X_n] \geq E[-\limsup_n X_n],$$

$$-\limsup_n E[X_n] \geq -E[\limsup_n X_n],$$

$$\limsup_n E[X_n] \leq E[\limsup_n X_n].$$

Théorème de convergence dominée

- Pour une séquence X_n de variables aléatoires, X et Y v.a. telles que $P(X_n \to X) = 1$, $|X_n| \leq Y$ et $E[Y] < \infty$.
$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X].$$
- Notes :
  1. La condition avec Y (dominance) plus faible que $|X_n|$ uniformement bornés ($Y = c$); le résultat est donc plus fort.
  2. Même v.a. dominante Y pour tous les n.
- Preuve :
$$E[Y] + E[X] = E[Y + X] = E[Y + \lim_n X_n] = E[Y + \liminf_n X_n]$$
$$E[Y + \liminf_n X_n] \leq \liminf_n E[Y + X_n] = E[Y] + \liminf_n E[X_n]$$
$$E[Y] - E[X] = \ldots \leq \ldots = E[Y] - \limsup_n E[X_n].$$
$$\limsup_n E[X_n] \leq E[X] \leq \liminf_n E[X_n].$$
$$\lim_n E[X_n] = E[X].$$

Remarque sur les ensembles non-dénombrables de variables aléatoires

- Soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$, un ensemble non-dénombrable de variables aléatoires.
- Exemples :
  - e^{sX}, dont l'espérance est $M_X(s)$, une fonction de s réel.
  - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ et σ^2 inconnus. $E[f(X)]$ est une fonction de μ, σ^2.
- Supposons que
  - $\lim_{t \downarrow 0} X_t(\omega) = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$,
  - il exist une v.a. Y telle que $|X_t| < Y$ et $E[Y] < \infty$.
- Alors pour toute suite $t_n \downarrow 0$,

$$E[X_{t_n}] \to E[X_0].$$

- Alors

$$\lim_{t \downarrow 0} E[X_t] = E[X_0].$$

La dérivée de l'espérance

- Soit $\{F_t\}_{a<t<b}$ un ensemble de variables aléatoires.
- Conditions suffisantes pour $\frac{dE[F_t]}{dt} = E[F_t']$:
  1. Pour tout $t \in (a,b)$: $-\infty < E[F_t] < \infty$.
  2. Il existe une v.a. Y telle que $E[Y] < \infty$ et pour tous $t \in (a,b)$ et $\omega \in \Omega$, $F_t'(\omega)$ existe et $|F_t'(\omega)| \leq Y(\omega)$.
- Preuve : fixez $t \in (a,b)$. Alors
  1. $F_t' = \lim_{n\to\infty} n(F_{t+1/n} - F_t)$, la limite d'une séquence de variables aléatoires, est une variable alétoire.
  2. Pour tous $t \in (a,b)$, $h \geq 0$, (théorème des accroissements finis, mean value theorem)

$$\left| \frac{F_{t+h} - F_t}{h} \right| \leq Y$$

  3. Alors

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{E[F_{t+h}] - E[F_t]}{h} = \lim_{h\downarrow 0} E\left[\frac{F_{t+h} - F_t}{h}\right] = E\left[\lim_{h\downarrow 0} \frac{F_{t+h} - F_t}{h}\right]$$

$$\frac{dE[F_t]}{dt} = E[F_t'] \leq E[Y] < \infty.$$

Fonction génératrice des moments

- Définition : pour une v.a. X, $M_X(s) = E[e^{sX}]$, $s \in R$.
- Notes
  - M_X n'existe pas toujours, même si $E[X] < \infty$.
  - $M_{X+Y}(s) = M_X(s)M_Y(s)$ pour v.a. indépendentes X, Y.
  - il y a des tableaux avec plusieurs v.a. standardes
  - la fonction caractéristique est souvent plus utile

Résultat sur $M_X(s)$

- Supposons que X est une v.a. et qu'il existe $s_0 > 0$ tel que $M_X(s) < \infty$ pour $|s| < s_0$.
- Alors
$$E[|X^n|] < \infty, \; M_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} E[X^n] s^n / n!.$$
- Preuve :
  1. Soit $Z_n = \sum_{k=0}^{n} (sX)^k / k!$.
  2. $Z_n \to e^{sX}$ (définition de somme infinie)
  3. Fixez s, $|s| < s_0$
$$|Z_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |sX|^k / k! \leq e^{sX} + e^{-sX} \equiv Y,$$
$$E[Y] = M_X(s) + M_X(-s) < \infty.$$
  4. Par convergence dominée,
  $E[e^{sX}] = \lim_{n\to\infty} E[Z_n] = \sum_{n=0}^{\infty} E[X^n] s^n / n!$.

Signification de « génératrice des moments »

- Rappel $M_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} E[X^n] s^n / n!$
- $M'_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} E[X^{n+1}] s^n / n!$
- $M_X^{(m)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} E[X^{n+m}] s^n / n!$
- $M_X(0) = 1$, $M'_X(0) = E[X]$, $M_X^{(m)}(0) = E[X^m]$.

Mesures associées aux variables aléatoires

- Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ est une mesure de probabilité elle aussi, où

$$\mu = \mathcal{L}(X) = PX^{-1}.$$

- Si $B \in \mathcal{B}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ et $\mu(B) = P(X^{-1}(B)) = (PX^{-1})(B)$.
- Pour $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$,
  - $[a, b] \subset \mathbb{R}$,
  - $[a, b] \in \mathcal{B}$,
  - $\mu([a, b]) = P(\{X \in [a, b]\})$,
  - $\{X \in [a, b]\} \subset \Omega$,
  - $\{X \in [a, b]\} \in \mathcal{F}$.

Convergence en distribution

- Soit μ_n une séquence de mesures de probabilité boreliennes, μ une mesure de probabilité borelienne.
- $\mu_n \Rightarrow \mu$ (μ_n converge en distribution à μ) si pour chaque fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et bornée,

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu.$$

- Une condition équivalente: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mu(\{x\}) = 0 \Rightarrow F_n(x) \to F(x).$$

- μ_n est une suite de mesures, pas une suite de variables aléatoires.
- Cependant, si X_n est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{L}_n = PX_n^{-1}$ est une suite de mesures.

Convergence en probabilité et en distribution

- Si $X_n \to X$ en probabilité, $\mu_n \equiv \mathcal{L}(X_n) \Rightarrow \mathcal{L}(X) \equiv \mu$.
- Résultat équivalent : Si pour tout $\epsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0$,

$$\mu(\{x\}) = 0 \Rightarrow F_n(x) \to F(x).$$

- Preuve : fixez $x \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Alors pour tout $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$,

$$X > x + \epsilon \text{ et } |X_n - X| < \epsilon \Rightarrow X_n > x,$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{X_n \leq x\} \subseteq \{X \leq x + \epsilon\} \cup \{|X_n - X| \geq \epsilon\}$$

$$F_n(x) \leq F(x + \epsilon) + P(|X_n - X| \geq \epsilon).$$

Puisque $\sup_n F_n(x) \leq F(x + \epsilon)$,

$$\limsup_n F_n(x) \leq F(x + \epsilon) + 0,$$

et puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire,

$$\limsup_n F_n(x) \leq F(x).$$

Preuve, continuée

- même $x \in \mathbb{R}$, fixez $\epsilon > 0$. Pour tout $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n > x \text{ et } |X_n - X| < \epsilon \Rightarrow X > x - \epsilon,$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{X \leq x - \epsilon\} \subseteq \{X_n \leq x\} + \{|X_n - X| \geq \epsilon\},$$

alors

$$F(x - \epsilon) \leq \liminf_n F_n(x) + \liminf_n P(|X_n - X| \geq \epsilon)$$

$$F(x - \epsilon) \leq \liminf_n F_n(x)$$

- ϵ arbitraire, alors

$$F(x) - P(\{x\}) \leq \liminf_n F_n(x)$$

- Maintenant si $P(\{x\}) = 0$,

$$\liminf_n F_n(x) = \limsup_n F_n(x) = \lim_n F_n(x) = F(x)$$