ECN 7060, Cours 4

William McCausland

2018-09-26

Intégration riemannienne

$$L\int_a^b X = \sup\left\{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} X(t) \colon a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\right\}$$

$$U\int_a^b X = \inf\left\{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} X(t) \colon a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\right\}$$

Notes:

- L'existence et la valeur de l'intégral.
- Extensions:

$$\int_0^\infty X(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} X(t)\,dt \qquad \int_a^b X(t)\,dt = \lim_{c\downarrow a}\lim_{d\uparrow b}\int_c^d X(t)\,dt.$$

Problèmes pour l'intégration riemannienne

- $L \int_0^1 1_Q(t)$ et $U \int_0^1 1_Q(t)$
- Soit Q_n l'ensemble des n premiers rationnels dans $[0, 1]$.
- $U \int_0^1 1_{Q_n}(t)$.
- Notez que
  - $1_{Q_n}(t) \leq 1_{Q_{n+1}}(t)$ pour tous t
  - $\lim_{n\to\infty} 1_{Q_n}(t) = 1_Q(t)$ pour tous t
  - $\lim_{n\to\infty} U \int_0^1 1_{Q_n}(t) \neq U \int_0^1 1_Q(t)$

Une variable aléatoire simple sur la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$

- Trois façons d'écrire la même variable aléatoire :
  1. $X(\omega) = 2 \cdot 1_{[0,1/4)\cap(1/2,1]}(\omega) + 3 \cdot 1_{[1/4,1/2]}(\omega)$
  2. $X(\omega) = 2 \cdot 1_{[0,1/4)}(\omega) + 2 \cdot 1_{(1/2,1]}(\omega) + 3 \cdot 1_{[1/4,1/2]}(\omega)$
  3. $X(\omega) = 2 \cdot 1_{\Omega}(\omega) + 1 \cdot 1_{[1/4,1/2]}(\omega)$
- L'image de X est $\{x_1, x_2\} = \{2, 3\}$.
- Dans 1, X est dans la forme canonique

$$X(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot 1_{\{X^{-1}(\{x\})\}}(\omega).$$

- Dans 2, X n'est pas dans cette forme, mais $[0,1/4)$, $[1/4,1/2]$ et $(1/2,1]$ forme une partition de $[0,1]$.
- Dans 3, $[0,1]$ et $[1/4,1/2]$ ne forme pas une partition de $[0,1]$.

L'espérance d'une variable aléatoire

- Pour une variable aléatoire simple ($X(\Omega)$ est fini):

$$E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X^{-1}(\{x\})).$$

- Pour une variable aléatoire non-négative :

$$E[X] = \sup\{E[Y]\colon\ Y \leq X,\ Y \text{ simple}\}.$$

- Pour une variable aléatoire générale :

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-].$$

- Notes :
  - Quand l'expression de X n'est pas de forme canonique.
  - Cohérence des trois définitions.
  - Valeurs possibles; quand la troisième n'est pas bien définie.

Espérances et les intégrals impropres

1. Notez l'asymétrie dans $E[X] = \sup\{E[Y] \colon Y \leq X,\ Y \text{ simple}\}$
2. Notez la restriction $X \geq 0$.
3. Exemple: $X(\omega) = 1/\sqrt{\omega}$, mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
4. Exemple: $X(\omega) = 1/\omega$, mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
5. Exemple: $X(\omega) = e^{\omega}$, densité gaussienne sur $\mathbb{R}$.
6. Example: $X(\omega) = e^{\omega}$, densité t de Student sur $\mathbb{R}$.

Convergence monotone de X_n simple à X non-négative

- Fonctions $\Psi_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\Psi_n(x) = \min(n, 2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor).$$

- Propriétés de $\Psi_n(x)$:
  - $0 \leq \Psi_n(x) \leq x$, $x \geq 0$.
  - $\Psi_n(x) \nearrow x$
  - $\Psi_n(\mathbb{R})$ est fini
- Construction $X_n(\omega) = \Psi_n(X(\omega))$.
- Propriétés de X_n
  - X_n est simple
  - $X_n \leq X_{n+1} \leq X$
  - $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$.
  - $E[X_n] \leq E[X]$ (définition de $E[X]$)
  - $\lim_{n\to\infty} E[X_n(\omega)] \leq E[X]$

Théorème de convergence monotone

- Supposez que $X_1, X_2, \ldots$ sont des variables aléatoires avec $X_n \nearrow X$. Alors X est une variable aléatoire et $E[X] = \lim_{n\to\infty} E[X_n]$.
- Remarque : les X_n ne sont pas forcément simples.
- Selon monotonicité, $E[X_1] \leq E[X_2] \leq \ldots \leq E[X]$.
- Immédiatement, $\lim_{n\to\infty} E[X_n] \leq E[X]$
- Preuve de $\lim_{n\to\infty} E[X_n] \geq E[X]$:
  - Soit Y simple, $Y \leq X$ (alors $E[Y] \leq E[X]$)
  - Alors $Y = \sum_i v_i 1_{A_i}$ où $\{A_1\}$ est une partition de Ω, et $v_i \leq X(\omega)$ pour $\omega \in A_i$.

Remarques

- On peut affaiblir la condition $X_n(\omega) \nearrow X(\omega)$ en
$$P(\{X_n(\omega) \nearrow X(\omega)\}) = 1.$$
- On peut choisir une suite de variables aléatoires simples.
- Autrement dit, $X_n \nearrow X$ presque surement.
- Importance de monotonicité, positivité
- Échec de convergence monotone pour l'intégration riemannienne.
- Linéarité de $E[\cdot]$ pour variables aléatoires positives : soit $X_n = \Psi_n(X),\ Y_n = \Psi_n(Y),\ a, b \geq 0.$
$$E[aX+bY] = \lim_n E[aX_n+bY_n] = \lim_n aE[X_n]+bE[Y_n] = aE[X]+bE[$$

Aperçu des chapitres 5 et 6

- Chapitre 5
  - Inégalités de Markov, Chebychev, Cauchy-Schwarz, Jensen
  - Convergence presque sur, en probabilité
  - Lois de grand nombres
- Chapitre 6
  - Distributions, fonctions de distribution, de densité

Devoirs et lectures

Devoirs, Rosenthal (matière du cours 4)

1. Exercise 4.5.1
2. Exercise 4.5.2
3. Exercise 4.5.3
4. Exercise 4.5.4
5. Exercise 4.5.13 (considérez les fonctions ω^{-1}, $\omega^{-1/2}$, $(1-\omega)^{-1}$ et $(1-\omega)^{-1/2}$ sur Ω et leurs combinaisons linéaires).

Lectures, Rosenthal (matière du cours 5)

1. Chapitres 5, 6