

# Devoirs et Lectures, 2019

*William McCausland*

*2019-10-15*

## Cours 1, le 4 septembre

### Devoirs, Rosenthal (matière du cours 1)

1. Exercice 1.3.1
2. Exercice 1.3.2
3. Exercice 1.3.3
4. Exercice 1.3.4
5. Exercice 1.3.5

### Lectures, Rosenthal (matière du cours 2)

1. Chapitre 1
2. Chapitre 2

Définitions importantes : espace de probabilité; espace d'état; algèbre; tribu; additivité (finie ou dénombrable); stabilité par complémentation, pour les réunions ou intersections (finies ou dénombrables); semi-algèbre.

### Questions sur les lectures

1. Soit  $\Omega = [0, 1]$ . Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des parties de  $\Omega$  qui sont finies ou de complémentaire fini.
  - a. Est-ce que  $\mathcal{F}$  est une algèbre? Appuyez votre réponse.
  - b. Est-ce que  $\mathcal{F}$  est une tribu (ou  $\sigma$ -algèbre)? Appuyez votre réponse.
2. Soit  $\Omega = \{1, 2, 3\}$  et  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ . Trouvez une mesure de probabilité additive  $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  telle que  $P(\{1, 2\}) = 3/4$  et  $P(\{2, 3\}) = 1/2$ .
3. Soit  $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \{1, \dots, n\}\}$ . Soit  $\Omega = \{1, \dots, n\}$ . Montrez que
  - a.  $\mathcal{J}$  est stable pour les intersections finies,
  - b.  $\emptyset \in \mathcal{J}$  et  $\Omega \in \mathcal{J}$ ,
  - c. tous les éléments de  $\mathcal{J}$  ont un complément par rapport à  $\Omega$  qui égale une réunion disjointe finie des éléments de  $\mathcal{J}$ ,
  - d.  $\mathcal{J}$  est une semi-algèbre de parties de  $\Omega$ .

## Cours 2, le 11 septembre

### Devoirs, Rosenthal (matière du cours 2)

1. Exercice 2.7.4
2. Exercice 2.7.8
3. Exercice 2.7.14
4. Exercice 2.7.20
5. Exercice 2.7.22

## Lectures, Rosenthal (matière du cours 3)

### 1. Chapitre 3

Définitions importantes : variable aléatoire,  $\searrow$ ,  $\nearrow$ ,  $\liminf_n$  et  $\limsup_n$  pour une suite d'ensembles  $A_n$ , indépendance d'événements.

### Questions sur les lectures

1. Trouver  $\Lambda_1$  tel que  $[-1/n, 1/n) \searrow \Lambda_1$ .
2. Trouver  $\Lambda_2$  tel que  $[-1 + 1/n, 1 - 1/n) \nearrow \Lambda_2$ .
3. Soit  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3\}$ . Soit  $D_n$  la séquence où  $D_n = A$  pour  $n$  pair et  $D_n = B$  pour  $n$  impair.
  - a. Trouvez l'algèbre (sur  $\Omega$ ) le plus petit qui contient  $A$  et  $B$ .
  - b. Trouvez  $\limsup_{n \rightarrow \infty} D_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k$  et  $\liminf_{n \rightarrow \infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} D_k$ .
  - c. Soit  $P: 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $(\Omega, 2^\Omega, P)$  est un espace de probabilité. Prouver que si  $A$  et  $B$  sont indépendants,  $A$  et  $B^c$  le sont aussi.
4. Soit  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\}$ 
  - a. Donnez une fonction  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .
  - b. Donnez une fonction  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui n'est pas une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

## Cours 3, le 18 septembre

### Devoirs, Rosenthal (matière du cours 3)

1. Exercice 3.6.2
2. Exercice 3.6.6
3. Exercice 3.6.10
4. Exercice 3.6.12

## Lectures, Rosenthal (matière du cours 4)

### 1. Chapitre 4

Définitions importantes : espérance, variance d'une variable aléatoire simple, covariance, corrélation entre deux variables aléatoires simples.

### Questions sur les lectures

1. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  la mesure de probabilité où  $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$  et  $P$  est la probabilité où  $P(\{\omega\}) = 2^{-\omega}$ ,  $\omega \in \mathbb{N}$ . Soit  $X(\omega) = 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 2^n & \omega = n \\ 0 & \omega \neq n. \end{cases}$$

Trouver  $E[X]$  et  $E[X_n]$ . Est-ce que  $E[X_n] \rightarrow E[X]$ ?

2. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  la mesure de probabilité où  $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$  et  $P$  est la probabilité où  $P(\{n\}) = 2^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Soit

$$X(\omega) = \begin{cases} 2, & \omega = 2, 3 \\ 1, & \omega = 4 \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Trouver  $E[X]$ .

3. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  la mesure de Lebesgue sur  $\Omega = [0, 1]$ . Soit

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \text{ irrationnel, } \omega < 1/2 \\ 3, & \omega = 1/2 \\ 5, & 1/2 < \omega \leq 1 \\ 7, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Trouver  $E[Y]$ .

## Cours 4, le 25 septembre

### Devoirs, Rosenthal (matière du cours 4)

1. Exercice 4.5.1
2. Exercice 4.5.2
3. Exercice 4.5.3
4. Exercice 4.5.4
5. Exercice 4.5.13 (considérez les fonctions  $\omega^{-1}$ ,  $\omega^{-1/2}$ ,  $(1-\omega)^{-1}$  et  $(1-\omega)^{-1/2}$  sur  $\Omega$  et leurs combinaisons linéaires).

### Lectures, Rosenthal (matière du cours 5)

1. Chapitres 5, 6

Définitions importantes : convergence presque sur, convergence en probabilité.

### Question sur les lectures

1. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité avec  $\Omega = [0, 1]$  et  $P$ , la mesure de Lebesgue. Pour tous  $n > 0$ , soit  $A_n \equiv [0, 1/n]$ ,  $Z_n = 1_{A_n}$ ,  $Z = 0$ . Lesquelles des affirmations suivantes sont vraies? Expliquez. Pour  $Z_n = n1_{A_n}$ , est-ce que les réponses changent?
  - a.  $Z_n \rightarrow Z$ .
  - b.  $Z_n$  converge à  $Z$  presque sûrement.
  - c.  $Z_n$  converge à  $Z$  en probabilité.

## Cours 5, le 2 octobre

### Devoirs, Rosenthal (matière du cours 5)

1. Exercice 5.5.2
2. Exercice 5.5.10
3. Exercice 5.5.14
4. Exercice 6.3.2
5. Exercice 6.3.4

## Lectures, Rosenthal (matière du cours 6)

1. Chapitre 9, 10

Définitions importantes :  $\liminf$  d'une suite de nombres,  $\liminf$  d'une variable aléatoire, fonction génératrice des moments

### Question sur les lectures

1. Selon le lemme de Fatou, pour une séquence de variables aléatoires  $X_n \geq 0$ ,

$$E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n].$$

Supposez que  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est un espace de probabilité où  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$  et  $P(\{\omega\}) = 2^{-\omega}$ .

- a. Montrez que la séquence de variables aléatoires  $X_n = 2^n 1_{\{n\}}(\omega)$  vérifie

$$E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] < \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n].$$

- b. Donnez une séquence de variables aléatoires  $X_n \geq 0$  telle que

$$E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] = \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n].$$

- c. Donnez une séquence de variables aléatoires  $X_n \geq 0$  telle que  $E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] < \infty$  et  $\liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \infty$ .
  - d. Donnez une séquence de variables aléatoires  $X_n \geq 0$  telle que  $E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] = \infty$  et  $\liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \infty$ .
2. Donnez la fonction génératrice des moments pour une v.a. Bernoulli avec probabilité  $p$  de succès.

## Cours 6, le 9 octobre

### Devoirs, Rosenthal (matière du cours 6)

1. Exercice 9.5.4
2. Exercice 9.5.6
3. Exercice 9.5.8
4. Exercice 10.3.4
5. Exercice 10.3.6

## Lectures, Rosenthal (matière du cours 7)

1. Chapitre 11, accent sur l'Intro, 11.1, 11.2
2. (si nécessaire, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre\\_complexe](https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_complexe))

Définitions importantes : nombres complexes et les opérations de base (addition, multiplication, division, exponentiel, logarithme, magnitude, angle), fonction caractéristique.

### Questions sur les lectures

1. Exprimez les nombres complexes suivants sous la forme  $\alpha + i\beta$ , où  $a, b, c, d, r, \theta \in \mathbb{R}$ .
  - a.  $(a + ib)(c + id)$
  - b.  $(a + ib)/(c + id)$
  - c.  $re^{i\theta}$

- d.  $\log(a + ib)$
- 2. Exprimez les nombres complexes suivants sous la forme  $re^{i\theta}$ , où  $a, b, r, r_1, r_2, \theta \in \mathbb{R}$ .
  - a.  $(a + ib)$
  - b.  $r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2}$
  - c.  $re^{i\theta} \cdot i$
  - d.  $e^{a+ib}$
- 3. Les variables aléatoires indépendantes  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  suivent une loi  $\text{Be}(p)$  (Bernoulli) si  $P(X_k = 0) = (1 - p)$  et  $P(X_k = 1) = p$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .
  - a. Trouvez la fonction caractéristique  $\phi_X(t)$  de  $X_k$ .
  - b. La variable aléatoire  $Y = \sum_{k=1}^n X_k$  suit une loi  $\text{Bi}(n, p)$  (Binomial). Trouvez la fonction caractéristique  $\phi_Y(t)$  de  $Y$ .
  - c. Soit  $Z = \sqrt{n}(n^{-1}Y - p)$ . Trouvez la fonction caractéristique  $\phi_Z(t)$  de  $Z$ .

## Cours 7, le 16 octobre

### Devoirs, Rosenthal (matière du cours 7)

- 1. Exercice 11.5.7
- 2. Exercice 11.5.11
- 3. Exercice 11.5.15 (ajouter la distribution  $\text{Ga}(\alpha, \beta)$ , utilisez les fonctions caractéristiques et non le « hint »)
- 4. Exercice 11.5.16
- 5. Exercice 11.5.18

### Lectures, Rosenthal (matière du cours 8)

- 1. Chapitre 13 de Rosenthal

### Questions sur les lectures (pas de questionnaire, cours 8)

- 1. Exercices 13.4.1, 13.4.2, 13.4.5
- 2. Généralisez le théorème de variance totale (théorème 13.3.1) à un théorème de covariance totale (aléas  $X$  et  $Y$ , sous-tribu  $\mathcal{G}$ )