

# ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers, Hiver 2021

## Cours 1

William McCausland

2021-01-18

# Plan

1. Introduction au cours
2. Les éléments de la note finale
3. Notation pour les rendements
4. Mélanges versus fonctions linéaires de variables aléatoires
5. La loi des espérances itérées
6. L'inégalité de Jensen
7. Démonstration de RStudio, si le temps le permet

# Introduction

## Marchés financiers

- ▶ Deux éléments très importants : le temps et l'incertitude
- ▶ Actifs : actions, obligations, options, contrats à terme, contrats d'assurance, prêts.
- ▶ Participants :
  - ▶ Ménages (épargne, dette—immobilier, éducation, etc.)
  - ▶ Firms non-financières (financement des projets, gérance du risque)
  - ▶ Gouvernements (financement des dépenses et des transferts)
  - ▶ Firms financières (création des contrats de nature financière, fourniture des marchés liquides)

## Économétrie (sens large) des marchés financiers

- ▶ Modèles stochastiques (théoriques ou non) des prix, des rendements, des comptes et des durées.
- ▶ Inférence (tests, estimation, prévision)
- ▶ Valorisation par simulation

## Les éléments de la note finale

1. Examen intra, le lundi 22 février : 35%
2. Un nombre aléatoire de quiz, en forme de devoir StudiUM : 15%
  - a. quiz certain : le 25 janvier
  - b. quiz aléatoires : les 8 dates possibles sont les 1, 8, 15 février; les 8, 15, 22, 29 mars; le 12 avril. La probabilité d'un quiz est de 0,5.
  - c. 8h30 - 8h45. La semaine prochaine, vendredi le 22 à 8h30 lundi.
3. Deux travaux pratiques de computation en R
  - a. premier à remettre vendredi le 26 février avant minuit : 10%
  - b. deuxième à remettre vendredi le 15 avril avant minuit : 5%
4. Examen final, date à déterminer : 35%

## Notes

- ▶ Les deux examens sont théoriques.
- ▶ Les travaux pratiques en R sont complémentaires des examens.
- ▶ Le premier travail consiste en les exercices pratiques données jusqu'au 15 février (inclusif) ; le deuxième, les exercices pratiques données jusqu'au 29 mars (inclusif).

# Documents au site web

## Documents

1. Lectures et exercices théorique (organisé par cours)
  - a. lectures préparatoires à faire avant le cours
  - b. lectures associées aux cours
  - c. exercices théoriques
2. Exercices pratiques en R (organisé par cours)
3. Plan de cours
4. Diapos en pdf

## Notes

- ▶ Chaque semaine, avant le cours, je mettrai à jour les deux premiers documents et ajouterai les diapos du cours actuel.
- ▶ Les lectures et les questions théoriques servent à préparer les examens.
- ▶ [Le site web du cours](#)

# Plus sur les travaux pratiques en R

- ▶ Remettez les travaux pratiques en équipes de 1, 2 ou 3.
- ▶ Écrivez tous les noms sur la première page.
- ▶ Envoyez une copie en PDF (un seul fichier) avant minuit à la date de l'échéance.
- ▶ Envoyez-la par courriel, avec sujet 'Travail pratique', à [william.j.mccausland@umontreal.ca](mailto:william.j.mccausland@umontreal.ca)
- ▶ Téléchargement de R, RStudio
  - ▶ R : <https://www.r-project.org>
  - ▶ R Studio : <https://www.rstudio.com>
- ▶ Utilisez **R Markdown** pour créer
  - ▶ un fichier HTML que vous convertissez ensuite en PDF, ou
  - ▶ un fichier PDF directement (il faut installer  $\text{\LaTeX}$ ).
- ▶ Regardez la documentation de **R Markdown** pour voir comment
  - ▶ inclure du code R dans les documents,
  - ▶ inclure les résultats de R (y compris des tableaux et des graphiques) dans les documents.

# Attentes

1. Faites les lectures préparatoires avant le cours.
2. Essayez les exercices seuls, puis discutez-en parmi vous, puis demandez de l'aide.
3. Le contenu du cours comprend les lectures.

# Notation pour les rendements en temps discret

- ▶ Soit  $P_t$  le prix d'un actif à  $t$ ,  $t = 1, \dots, T$ .
- ▶ Soit  $p_t = \log P_t$ .
- ▶ Unités habituelles :  $P_t$  en dollars,  $t$  en jours, mois ou ans
- ▶ Rendements simples nets et bruts, log rendements :

$$R_t \equiv \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad 1 + R_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}, \quad r_t \equiv \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}.$$

- ▶ Notes :
  - ▶ Les trois rendements ne dépendent pas de l'unité de valeur.
  - ▶ L'unité de mesure d'un rendement annuel (par exemple) est  $1/a$ .
  - ▶ L'indice  $t$  indique souvent le moment où la quantité est connue.
  - ▶ Les rendements sont plus "stationnaires" que les prix et plus comparables.



# Rendements des portefeuilles

- ▶ Les prix de  $n$  actifs à  $t$  :  $P_{1t}, \dots, P_{nt}$
- ▶ Un portefeuille à  $t - 1$  comprend  $\omega_i$  dollars (ou  $\omega_i/P_{i,t-1}$  unités) de l'actif  $i$ .
- ▶ Normalisation :  $\sum_i \omega_i = 1$ .
- ▶ Prix du portefeuille à  $t - 1$  :

$$P_{p,t-1} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{P_{i,t-1}} P_{i,t-1} = 1$$

- ▶ Prix (et rendement brut) du portefeuille à  $t$  :

$$1 + R_{pt} = \frac{P_{pt}}{P_{p,t-1}} = P_{pt} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i P_{it}}{P_{i,t-1}} = \sum_{i=1}^n \omega_i (1 + R_{it}) = 1 + \sum_{i=1}^n \omega_i R_{it}.$$

- ▶ Rendement net :  $R_{pt} = \sum_{i=1}^n \omega_i R_{it}$ .
- ▶ La linéarité des rendements simples (et non des log rendements) donne l'avantage à ceux-là.

# Fonctions linéaires des v.a. vs mélanges, un exemple

## Éléments communs

- ▶ Il y a 3 actifs, avec rendements nets  $R_t \equiv (R_{1t}, R_{2t}, R_{3t})$ .
- ▶ Mettons que  $R_t \sim N(\mu_t, \Sigma_t)$ , où

$$\mu_t = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_t = \begin{bmatrix} (0.10)^2 & 0.012 & 0 \\ 0.012 & (0.15)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (0.05)^2 \end{bmatrix}.$$

## Deux placements (seul le premier est réaliste)

1. Placer 100 \$ en proportions  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0.5, 0.2, 0.3)$ 
  - ▶ C.-à-d. placer 50 \$ en l'actif 1, 20 \$ en l'actif 2, etc.
  - ▶ Le rendement est une v.a. qui est une fonction linéaire de 3 v.a.
2. Placer 100 \$ en actif 1, 2 ou 3 avec probabilités 0.5, 0.2, 0.3.
  - ▶ C.-à-d. placer 100 \$ en l'actif 1 avec probabilité 0.5, 100 \$ en l'actif 2 avec probabilité 0.2, etc.
  - ▶ Le rendement a une loi qui est un mélange discret de trois lois.

# Fonctions linéaires de variables aléatoires

Mettons que

- ▶  $R_t = (R_{1t}, \dots, R_{nt})$ , un vecteur de rendements,
- ▶  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , un vecteur de poids de portefeuille,
- ▶  $R_t \sim (\mu_t, \Sigma_t)$  et
- ▶  $\omega$  n'est pas aléatoire.

Alors

- ▶  $R_{pt} = \omega^\top R_t$  est le rendement du portefeuille.
- ▶  $E[R_{pt}] = \omega^\top \mu_t$  et  $\text{Var}[R_{pt}] = \omega^\top \Sigma_t \omega$ .
- ▶ Si  $R_t$  est gaussien multivarié,  $R_{pt} \sim N(\omega^\top \mu_t, \omega^\top \Sigma_t \omega)$ .

# Mélanges de variables aléatoires

## Exemple : mélange de deux v.a. gaussiennes

- ▶ Mettons que  $(\mu, \sigma^2)$  égale  $(\mu_1, \sigma_1^2)$  avec probabilité  $\pi$  et  $(\mu_2, \sigma_2^2)$  avec probabilité  $(1 - \pi)$ .
- ▶  $(\mu, \sigma)$  est aléatoire,  $(\mu_1, \sigma_1)$ ,  $(\mu_2, \sigma_2)$  et  $\pi$  ne le sont pas.
- ▶ Mettons que  $R | (\mu, \sigma) \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Une loi *conditionnelle*
- ▶ La loi *marginale* de  $R$  est un mélange de deux lois gaussiennes.
- ▶ La densité de  $R$  est

$$f(x) = \pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left[ -\frac{(x - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] + (1 - \pi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left[ -\frac{(x - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right]$$

## Un mélange plus général

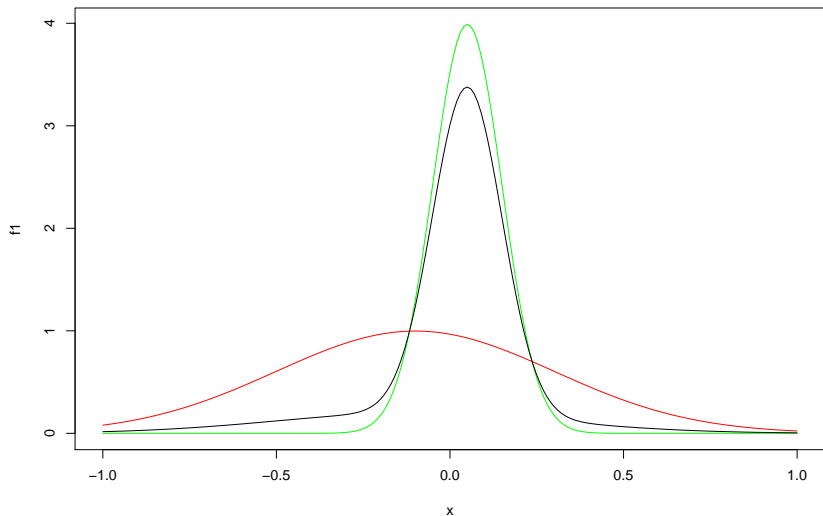
- ▶ Si la densité conditionnelle de  $X$  sachant  $\theta$  est  $f(x|\theta)$  et la densité de  $\theta$  est  $f(\theta)$ , alors la densité marginale de  $X$ ,  $f(x) = \int f(x|\theta)f(\theta) d\theta$ , est un mélange.

## Code R pour un mélange de deux v.a. gaussiennes

```
mu1 = 0.05; sigma1 = 0.1
mu2 = -0.10; sigma2 = 0.4
pi = 0.8
x = seq(-1, 1, by=0.01)
f1 = dnorm(x, mu1, sigma1)
f2 = dnorm(x, mu2, sigma2)
fmelange = pi * f1 + (1-pi) * f2
```

## Code R pour afficher les densités

```
plot(x, f1, col='green', 'l')  
lines(x, f2, col='red')  
lines(x, fmelange, col='black')
```



# La loi des espérances itérées

## Deux versions de la loi des espérances itérées

- Version inconditionnelle : pour variables aléatoires  $X$  et  $Y$ ,

$$E[Y] = E[E[Y|X]].$$

- Version conditionnelle : pour variables aléatoires  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ ,

$$E[Y|Z] = E[E[Y|X, Z]|Z].$$

## Un exemple temporel

$$E[R_{t+2}|R_t] = E[E[R_{t+2}|R_{t+1}]|R_t].$$

## Application I: théorème de la variance total

- ▶ Le théorème de la variance totale : pour v.a.  $X$  et  $Y$ ,

$$\text{Var}[Y] = E[\text{Var}[Y|X]] + \text{Var}[E[Y|X]]$$

- ▶ **Preuve**
- ▶ Exemple 1 :  $Y$  est le rendement d'une action,  $X$  indique l'industrie ( $X = 1$  pour la construction,  $X = 2$  pour le tourisme,  $X = 3$  pour les mines, ...).
- ▶ Exemple 2 :  $Y$  est le rendement d'un actif,  $X$  est une mesure observable de la volatilité de l'actif.
  - ▶ Conditionner réduit la variance en moyenne car le deuxième terme à droite est non-négatif.
  - ▶ Attention : il peut y avoir des valeurs de  $X$  telles que  $\text{Var}[Y] < \text{Var}[Y|X]$ .



## Application II: mélange de deux aléas gaussiens

### Description du mélange (rappel)

- ▶  $(\mu, \sigma^2)$  égale  $(\mu_1, \sigma_1^2)$  avec probabilité  $\pi$  et  $(\mu_2, \sigma_2^2)$  avec probabilité  $(1 - \pi)$ .
- ▶  $R | (\mu, \sigma) \sim N(\mu, \sigma^2)$

### Calcul de quelques moments

$$E[R] = E[E[R | \mu, \sigma^2]] = \pi\mu_1 + (1 - \pi)\mu_2$$

$$E[R^2] = E[E[R^2 | \mu, \sigma^2]] = \pi(\mu_1^2 + \sigma_1^2) + (1 - \pi)(\mu_2^2 + \sigma_2^2)$$

$$\text{Var}[R] = E[R^2] - E[R]^2$$

ou

$$\begin{aligned}\text{Var}[R] &= E[\text{Var}[R | \mu, \sigma^2]] + \text{Var}[E[R | \mu, \sigma^2]] \\ &= [\pi\sigma_1^2 + (1 - \pi)\sigma_2^2] + [\pi\mu_1^2 + (1 - \pi)\mu_2^2 - (\pi\mu_1 + (1 - \pi)\mu_2)^2]\end{aligned}$$

# L'inégalité de Jensen

- ▶ Soit  $\varphi(x)$  une fonction convexe,  $X$  une variable aléatoire.
- ▶ L'inégalité de Jensen :  $\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$
- ▶ Application 1 : aversion pour le risque
  - ▶  $\varphi(x) = -u(x)$ , où  $u(x)$  est une fonction d'utilité concave
  - ▶ Soit  $W$  la richesse (connue) en période  $t$ .
  - ▶ Soit  $(1 + R_{t+1})$  le rendement brut (inconnu) d'un actif en période  $t + 1$ .
  - ▶ Alors  $X = W(1 + R_{t+1})$  et la richesse après une période si toute la richesse est placée en l'actif.
  - ▶ Une conséquence de l'inégalité de Jensen :

$$u(E[W(1 + R_{t+1})]) \geq E[u(W(1 + R_{t+1}))].$$

- ▶ Cela implique une préférence pour la valeur sure  $E[W(1 + R_{t+1})]$  à la richesse aléatoire  $W(1 + R_{t+1})$ .

# L'inégalité de Jensen, cont.

- ▶ Application 2 : aplatissement  $K_Z$  d'une v.a.  $Z \sim (\mu, \sigma^2)$ 
  - ▶  $K_Z$  mesure l'épaisseur des ailes de la densité de  $Z$ .
  - ▶  $K_Z \equiv E[(Z - \mu)^4]/E[(Z - \mu)^2]^2 = E[(Z - \mu)^4]/\sigma^4$ .
  - ▶  $\varphi(x) = x^2$ ,  $X = (Z - \mu)^2$  donne  $E[(Z - \mu)^4] \geq E[(Z - \mu)^2]^2$ ,  $K_Z \geq 1$ .
  - ▶ Si  $Z$  est gaussienne,  $K_Z = 3$ .
- ▶ Application 3 : aplatissement d'un mélange-échelle de v.a. gaussiennes
  - ▶ Supposons que  $Z = \sigma\epsilon$ , où  $\epsilon \sim N(0, 1)$  et  $\sigma$  et  $\epsilon$  sont aléatoires et indépendants.
  - ▶ Par la loi des espérances itérées,

$$E[Z^4] = E[E[Z^4|\sigma^2]] = E[3\sigma^4] = 3E[\sigma^4].$$

- ▶  $\varphi(x) = x^2$ ,  $X = \sigma^2$  donne  $E[\sigma^4] \geq E[\sigma^2]^2$  et alors  $K_Z \geq 3$ .

# Cours 2, la semaine prochaine

## Plan préliminaire

1. Log rendements et rendements multi-période
2. Asymétrie et aplatissement
3. Autocorrélation
4. Faits empiriques
5. Modèles ARMA( $p,q$ ) de base