

ECN 7060, Cours 5

William McCausland

2022-10-04

Inégalité de Markov

- ▶ Soit $X \geq 0$ une variable aléatoire, soit $\alpha \in (0, \infty)$.
- ▶ Inégalité de Markov :

$$E[X] \geq \alpha P(X \geq \alpha)$$

- ▶ Preuve :
 - ▶ Soit

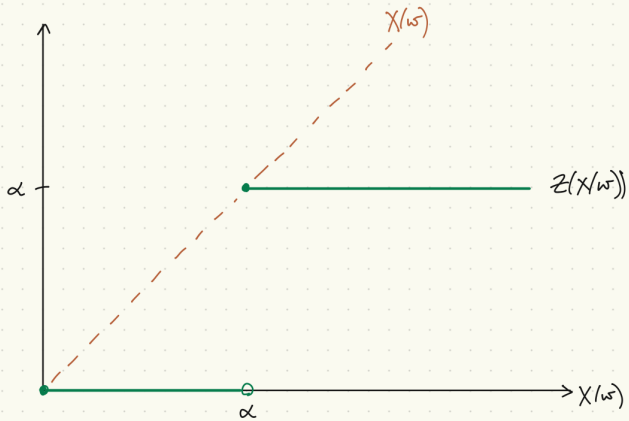
$$Z(\omega) \equiv \begin{cases} 0 & X(\omega) < \alpha, \\ \alpha & X(\omega) \geq \alpha. \end{cases}$$

- ▶ $Z \leq X$ alors par monotonie,

$$E[Z] = \alpha P(X \geq \alpha) \leq E[X].$$

- ▶ Questions :
 1. Pour α donné, décrivez une v.a. $X \geq 0$ qui vérifie l'inégalité en égalité.
 2. Donnez des conditions nécessaires et suffisantes sur α et $X \geq 0$ pour une égalité.

Inégalité de Markov



Inégalité de Chebychev

- ▶ Soit Y une variable aléatoire ou $\mu_Y = E[Y]$ existe et est finie.
- ▶ Soit $\epsilon > 0$.
- ▶ Inégalité de Chebychev :

$$P(|Y - \mu_Y| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \text{Var}[Y].$$

- ▶ Preuve :
 - ▶ Soit $X = (Y - \mu_Y)^2$, $\alpha = \epsilon^2$.
 - ▶ Alors par l'inégalité de Markov,

$$P(|Y - \mu_Y| \geq \epsilon) = P(X \geq \epsilon^2) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \text{Var}[Y].$$

- ▶ Notes :
 - ▶ $\text{Var}[Y] = \infty$ est possible, auquel cas l'inégalité ne contraint pas.
 - ▶ ϵ^{-2} peut être très grand, mais c'est fini.
 - ▶ Application : $Y = X_n$, où X_n est une suite de v.a. telle que $\text{Var}[X_n] \rightarrow 0$. On veut pouvoir choisir n après ϵ .

Définitions de trois modes de convergence

Soit Z_1, Z_2, \dots une suite de v.a., Z une v.a.

1. Convergence ponctuelle de Z_n à Z : pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega) = Z(\omega).$$

2. Convergence de Z_n à Z presque sûre, $Z_n \xrightarrow{p.s.} Z$:

$$P(\{Z_n \rightarrow Z\}) = 1, \text{ ou } P(Z_n \rightarrow Z) = 1.$$

3. Convergence de Z_n à Z en probabilité, $Z_n \xrightarrow{P} Z$: pour tout $\epsilon > 0$,

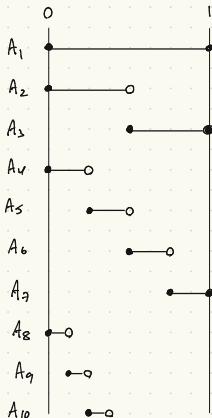
$$P(\{|Z_n - Z| \geq \epsilon\}) \rightarrow 0, \text{ ou } P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) \rightarrow 0.$$

Souvent en pratique, Z est une constante, ou 0 ou la valeur d'un paramètre.

Convergence en probabilité mais pas convergence p.s.

- ▶ Prenez l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) où $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, P la mesure de Lebesgue.
- ▶ Soit $A_1 = \Omega = [0, 1]$, $A_2 = [0, 1/2)$, $A_3 = [1/2, 1]$,
 $A_4 = [0, 1/4)$, $A_5 = [1/4, 1/2)$, $A_6 = [1/2, 3/4)$, $A_7 = [3/4, 1]$,
 $A_8 = [0, 1/8)$, ... (prochaine diapo).
- ▶ Soit $X = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = 1_{A_n}(\omega)$.
- ▶ Convergence presque sûre?
 - ▶ Pour tous ω , $\liminf_n X_n(\omega) = 0$, $\limsup_n X_n(\omega) = 1$.
 - ▶ Échec de convergence pour tout $\omega \in \Omega$!
 - ▶ Alors $P(X_n \rightarrow X) = 0$.
- ▶ Convergence en probabilité?
 - ▶ $P(X_n = X) \geq 1 - 1/n \rightarrow 1$.
 - ▶ Alors pour tout $\epsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \epsilon) \rightarrow 0$.

Convergence en probabilité mais pas presque sûre.



$$\Omega = [0, 1]$$

$$\limsup_n A_n = [0, 1]$$

$$\liminf_n A_n = \emptyset$$

$$\limsup 1_{A_n}(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\liminf 1_{A_n}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$1_{A_n}(\omega) \not\rightarrow 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

mais $\underbrace{P(1_{A_n}(\omega) > 0)}_{\leq \frac{1}{n}, = \frac{1}{n} \text{ quand } \log_2 n \text{ est entier}} \rightarrow 0$

Une condition suffisante pour convergence p.s.

La condition : pour tout $\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) < \infty$.

Preuve de suffisance :

- Supposez que la condition soit vraie. Soit $\epsilon > 0$.
- Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) < \infty,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{\infty} P(|Z_k - Z| \geq \epsilon) = 0.$$

- Pour m fixe,

$$\begin{aligned} P(|Z_k - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) &\equiv P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} |Z_k - Z| \geq \epsilon) \\ &\leq P(\cup_{k=m}^{\infty} |Z_k - Z| \geq \epsilon) \\ &\leq \sum_{k=m}^{\infty} P(|Z_k - Z| \geq \epsilon). \end{aligned}$$

- Puisque m est arbitraire, $P(|Z_n - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) = 0$.

Preuve, continuée

Rappel : la condition (dite suffisante) de l'avant-dernière diapo entraîne $P(|Z_n - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) = 0$.

Alors (nous utilisons ce résultat à la dernière équation)

$$\begin{aligned} P(\exists \epsilon > 0, |Z_n - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) &= P(\exists \epsilon' > 0, \epsilon' \in \mathbb{Q}, |Z_n - Z| \geq \epsilon' \text{ i.o.}) \\ &= P(\cup_{\epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0} |Z_n - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) \\ &\leq \sum_{\epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0} P(|Z_n - Z| \geq \epsilon \text{ i.o.}) = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$P(\forall \epsilon > 0, |Z_n - Z| < \epsilon \text{ a.a.}) = 1,$$

$$P(Z_n \rightarrow Z) = 1.$$

Infiniment souvent et presque toujours

		$\omega \in A_c$	
	finiment souvent	infiniment souvent pas presque toujours	presque toujours
	finiment souvent		✓
$\omega \in A_n$	infiniment souvent pas presque toujours	✓	
	presque toujours	✓	

Convergence presque sûre \rightarrow convergence en probabilité

Preuve :

- ▶ Supposez que $P(Z_n \rightarrow Z) = 1$ (convergence p.s.).
- ▶ Soit $\epsilon > 0$.
- ▶ Soit $A_n = \{\exists m \geq n, |Z_m - Z| \geq \epsilon\}$.
- ▶ Alors

$$A_n \searrow \cap_n A_n \subseteq \{Z_n \not\rightarrow Z\}.$$

$$P(A_n) \rightarrow P(\cap_n A_n) \leq P(Z_n \not\rightarrow Z) = 0.$$

$$P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) \leq P(A_n) \rightarrow 0.$$

- ▶ Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire, pour tout $\epsilon > 0$,
 $P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) \rightarrow 0$ (convergence en probabilité).

Deux exemples

Soit $Y = Z = 0$, Y_n, Z_n des suites de v.a. sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) telles que

- ▶ $\Pr[Y_n = 0] = 1 - 1/n^2, \Pr[Y_n = 1] = 1/n^2.$
- ▶ $\Pr[Z_n = 0] = 1 - 1/n, \Pr[Z_n = 1] = 1/n.$

Par exemple, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$, où $P((a, b]) = \min(b, 1) - \max(a, 0)$ pour $b \geq a$,

- ▶ $Y_n = 1_{[0, 1/n^2]}$
- ▶ $Z_n = 1_{[0, 1/n]}$

Deux exemples, suite

Pour la suite Y_n :

- ▶ $\Pr[Y_n \neq Y] = 1/n^2 \rightarrow 0$ alors $Y_n \xrightarrow{P} Y$.
- ▶ $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr[Y_n \neq Y] = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6 < \infty$ alors $Y_n \xrightarrow{a.s.} Y$.

Pour la suite Z_n :

- ▶ $\Pr[Z_n \neq Z] = 1/n \rightarrow 0$ alors $Z_n \xrightarrow{P} Z$.
- ▶ Mais $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr[|Z_n - Z| \geq 1] = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$.
- ▶ Si $Z_n = 1_{[0,1/n]}$ et P est la mesure de Lebesgue sur $\Omega = [0, 1]$,
(comme dans l'exemple de la diapo précédente)
 $P(Z_n \rightarrow Z) = 1$ (la condition est suffisante, pas nécessaire).
- ▶ Par contre, si les Z_n sont indépendants, par Borel-Cantelli (ii)

$$P(|Z_n - Z| = 1 \text{ i.o.}) = 1, \quad P(Z_n \rightarrow Z) = 0.$$

Une faible loi de grands nombres

- ▶ Une faible loi de grands nombres :
 - ▶ Soit X_1, X_2, \dots des v.a. indépendents, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
 - ▶ Supposez que pour tous n , $E[X_n] = m < \infty$ et $\text{Var}[X_n] < v < \infty$.
 - ▶ Alors $S_n \xrightarrow{P} m$.
- ▶ Preuve :
 - ▶ Pour tous n , $E[S_n] = m$ et $\text{Var}[S_n] \leq v/n$.
 - ▶ Par l'inégalité de Chebyshev, $P(|S_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{v}{n} \frac{1}{\epsilon^2} \rightarrow 0$.

Une forte loi de grands nombres

- ▶ Une forte loi de grands nombres
 - ▶ Soit X_1, X_2, \dots des v.a. indépendents, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
 - ▶ Supposez que pour tous n , $E[X_n] = m < \infty$,
 $E[(X_n - m)^4] \leq a < \infty$.
 - ▶ Alors $P(S_n \rightarrow m) = 1$.

Preuve, forte loi de grands nombres

- Notez que $(X_i(\omega) - m)^2 \leq (X_i(\omega) - m)^4 + 1$ pour tout $\omega \in \Omega$.
- Alors $v \equiv E[(X_i - m)^2] \leq a + 1 < \infty$.
- Supposez que $m = 0$, sans perte de généralité.
- Remarquez que $S_n^4 = \frac{1}{n^4} \sum_{i,j,k,l} X_i X_j X_k X_l$.
- Alors

$$\begin{aligned} E[S_n^4] &= \frac{1}{n^4} \sum_{i,j,k,l} E[X_i X_j X_k X_l] \\ &= \frac{1}{n^4} \left[\sum_i E[X_i^4] + \binom{4}{2} \sum_i \sum_{j>i} E[X_i^2 X_j^2] \right] \\ &\leq \frac{1}{n^4} (na + 3n(n-1)v^2). \end{aligned}$$

- Alors

$$P(|S_n| \geq \epsilon) = P(|S_n|^4 \geq \epsilon^4) \leq \frac{a + 3v^2}{n^2 \epsilon^4}$$

et la somme suivante converge : $\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \geq \epsilon) < \infty$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

- ▶ Soit X et Y des v.a. telles que $E[X^2] < \infty$ et $E[Y^2] < \infty$.
- ▶ Alors

$$E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}.$$

- ▶ Preuve : Soit $X_0 = |X|/\sqrt{E[X^2]}$, $Y_0 = |Y|/\sqrt{E[Y^2]}$.
 - ▶ $0 \leq E[(X_0 - Y_0)^2] = E[X_0^2 + Y_0^2 + 2X_0Y_0] = 2 - 2E[X_0Y_0]$
 - ▶ $E[X_0Y_0] \leq 1$
 - ▶ $E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$

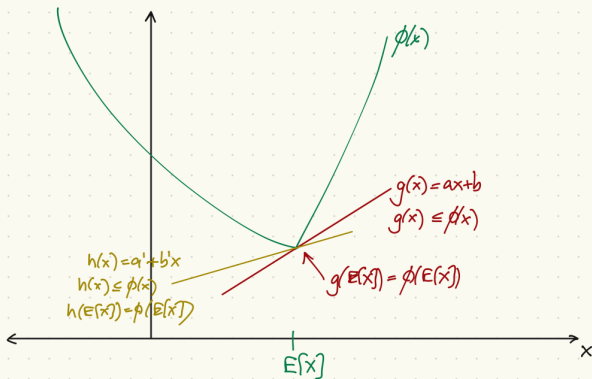
Inégalité de Jensen

- ▶ Soit $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.
- ▶ Soit X une v.a. avec $E[X]$ fini.
- ▶ Par la convexité de ϕ , il y a une fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que
 - ▶ $g(x) = ax + b$
 - ▶ $g(x) \leq \phi(x)$
 - ▶ $g(E[X]) = \phi(E[X])$
- ▶ Il est possible que ϕ n'ait pas de dérivée à $E[X]$, auquel cas g n'est pas unique.
- ▶ L'inégalité de Jensen :

$$E[\phi(X)] \geq E[g(X)] = aE[X] + b = \phi(E[X]).$$

- ▶ Note : Si g n'est pas unique, tous les choix donnent le même résultat.

Inégalité de Jensen



Applications de l'inégalité de Jensen

1. Kurtosis K , s'il existe, vérifie $K \geq 1$, où

$$K \equiv \frac{E[(Z - \mu)^4]}{E[(Z - \mu)^2]^2}.$$

Supposons que les quatre premiers moments existent et sont finis. Soit $Y = Z - \mu$. Prenez $\phi(x) = x^2$, $X = Y^2$.

2. Kurtosis d'un mélange-échelle Z de v.a. gaussiennes. Soit $Y = Z - \mu$, σ^2 la variance aléatoire.

$$E[Y^4] = E[E[Y^4|\sigma^2]] = E[3\sigma^4] \geq 3E[\sigma^2]^2,$$

$$E[Y^2] = E[E[Y^2|\sigma^2]] = E[\sigma^2],$$

$$K = E[Y^4]/(E[Y^2])^2 \geq 3.$$

Première équation : $X = \sigma^2$, $\phi(x) = x^2$.

3. La fonction d'utilité $u(x)$ concave, richesse X . ($\phi(x) = -u(x)$)

$$-E[u(X)] = E[-u(X)] \geq -u(E[X]), \quad u(E(X)) \geq E[u(X)].$$

Une note sur les fonctions de répartition

- ▶ La fonction de répartition : $F(x) \equiv P((-\infty, x])$.
- ▶ Monotonie de F par monotonie de probabilité.
- ▶ Continuité à droite :
 $x_n \searrow x, x_n > x \Rightarrow (-\infty, x_n] \searrow (-\infty, x] \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x)$,
par continuité de probabilité.
- ▶ Continuité à gauche? : $x_n \nearrow x, x_n < x \Rightarrow (-\infty, x_n] \nearrow (-\infty, x) \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x) - P(\{x\})$.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = P(\Omega) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = P(\emptyset) = 0$ par continuité de probabilité.

Aperçu des chapîtres 9 et 10

- ▶ Chapitre 9

- ▶ Lemme de Fatou
- ▶ Théorème de convergence dominée, une méthode plus flexible de démontrer $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]$.
- ▶ Deux applications : les dérivées des espérances, la fonction génératrice des moments.

- ▶ Chapitre 10

- ▶ Convergence faible, ou en loi