ECN 7060, Cours 3

William McCausland

2021-09-15

Plan

1. Variables aléatoires
2. Indépendance
3. Continuité de probabilité

Variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

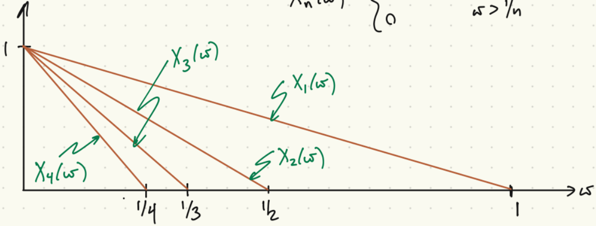
- Une fonction $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si

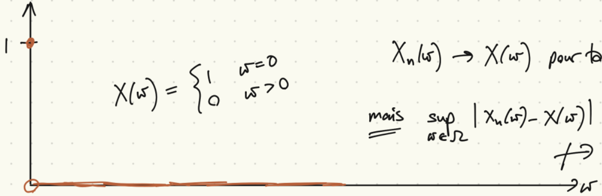
$$\{X \leq x\} \equiv \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}.$$

- Soit X, Y, $Z_1, Z_2, \ldots$ des variables aléatoires, $c > 0$.
- Les fonctions suivantes sont-elles des variables aléatoires?
  1. $1_A(\omega)$ où $A \in \mathcal{F}$
  2. $W(\omega) = cX(\omega)$
  3. $W = \min(X, Y)$, $W = \max(X, Y)$
  4. $W = \inf_n Z_n$, $W = \sup_n Z_n$
  5. $W = X + Y$
- Supposez que $\lim_{n\to\infty} Z_n(\omega)$ existe et égale $Z(\omega)$ pour chaque $\omega \in \Omega$. $Z(\omega)$ est-elle une variable aléatoire?
  - Notez le mode de convergence : ponctuel, pas uniforme

Convergence ponctuelle, pas uniforme

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 - n\omega & \omega \le 1/n \\ 0 & \omega > 1/n \end{cases}$$





$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = 0 \\ 0 & \omega > 0 \end{cases}$$

$X_n(\omega) \to X(\omega)$ pour tous $\omega \in [0, \infty)$

<u>mais</u> $\sup_{\omega \in \Omega} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 1$ pour tous n

$\not\to 0$

Fonctions indicatrices

Notation pour une fonction indicatrice sur Ω, où $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité :

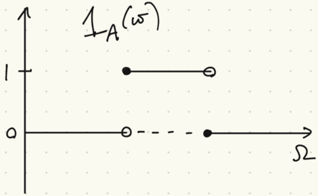
$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \subseteq \Omega, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Si $A \in \mathcal{F}$,

$$\{\omega \in \Omega : 1_A(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \Omega & x \geq 1, \\ A^c & 0 \leq x < 1, \\ \emptyset & x < 0, \end{cases}$$

et $\emptyset, A^c, \Omega \in \mathcal{F}$. Alors $1_A(\omega)$ est une variable aléatoire.

Pré-images par une fonction indicatrice



$\{\omega \in \Omega : \mathbb{1}_A(\omega) \leq x\}$

Multiplication scalaire

Soit $X(\omega)$ une variable aléatoire, $c > 0$ et $W(\omega) \equiv cX(\omega)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega \colon W(\omega) \leq x\} &= \{\omega \in \Omega \colon cX(\omega) \leq x\} \\ &= \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \leq x/c\} \\ &\in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

En notation plus simple :

$$\{W \leq x\} = \{cX \leq x\} = \{X \leq x/c\} \in \mathcal{F}.$$

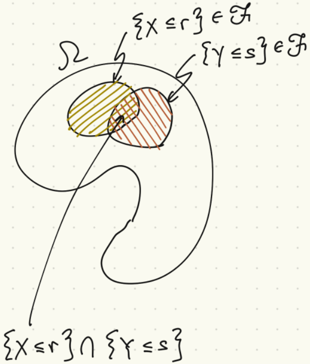
Notes :

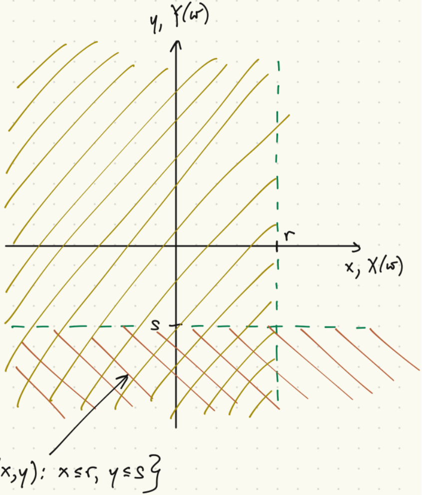
- pour le cas $c < 0$ il faut utiliser

$$\{W \leq x\} = \{X \geq x/c\} = \left(\cup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x/c - 1/n\}\right)^c \in \mathcal{F}.$$

- pour $c = 0$, $W = 0$ est trivialement une variable aléatoire.

Deux variables aléatoires





Discussion : minimum, maximum, infimum

Rappel : $X, Y, Z_1, Z_2, \ldots$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. $W = \min(X, Y)$
2. $W = \max(X, Y)$
3. $W = \inf_n Z_n$

Addition

Soit $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ deux variables aléatoires sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit $W(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Pour tout $w \in \mathbb{R}$,

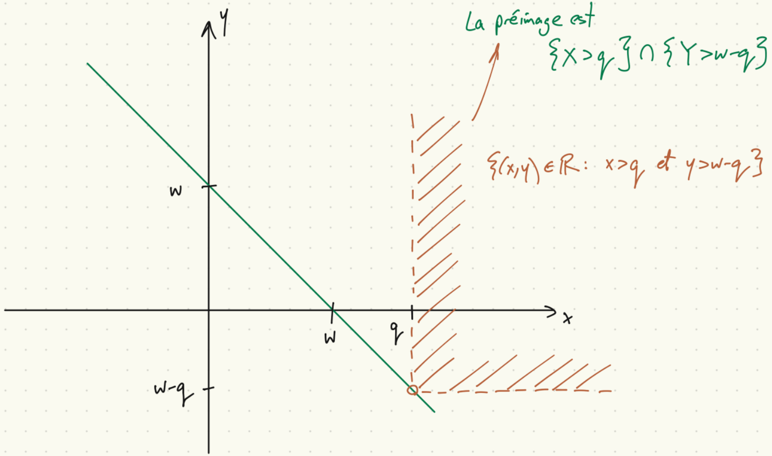
$$\begin{aligned}\{W > w\} &= \cup_{q\in\mathbb{Q}}(\{X > q\} \cap \{Y > w - q\}) \\ &= \cup_{q\in\mathbb{Q}}(\{X \leq q\}^c \cap \{Y \leq w - q\}^c) \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

Alors $\{W \leq w\} = \{W > w\}^c \in \mathcal{F}$.

Notes pour la première équation :

- Pour inclure le point $(x, w - x + \epsilon)$ arbitraire qui vérifie $x + y > w$, choisit $q \in (x - \epsilon, x)$.
- Entre deux nombres réels, il y a toujours un nombre rationnel (la densité des rationnels dans les réels).

La somme $X(\omega)+Y(\omega)$



Limites ponctuelles

Supposez que $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $Z(\omega) = \lim_{n\to\infty} Z_n(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Alors

$$\begin{aligned}\{Z \le x\} &= \{\lim_{k\to\infty} Z_k \le x\} = \{\forall\epsilon > 0,\ \exists n,\ \forall k > n,\ Z_k \le x + \epsilon\}\\ &= \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} \{Z_k \le x + 1/m\} \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Notes sur les limites ponctuelles

1. Fonctions sur $\Omega = \mathbb{R}$ avec un ensemble dénombrable de discontinuités, à travers la construction des suites de combinaisons linéaires de fonctions indicatrices.
2. Comme les limites ponctuelles et les sommes finies de v.a. sont des variables aléatoires, les sommes infinies convergentes sont des variables aléatoires.

Indépendance de deux événements sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

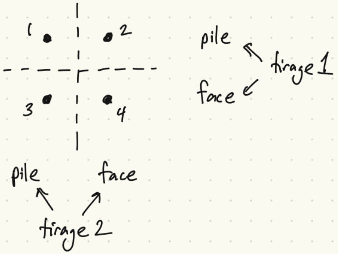
- $A, B \in \mathcal{F}$ sont indépendants (dénoté $A \perp B$) si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Résultat : $A \perp B \Rightarrow A \perp B^c$, $A^c \perp B$, $A^c \perp B^c$.
- Deux faits :
  - $P(A \cap B) + P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c) = 1$
  - $(P(A) + P(A^c))(P(B) + P(B^c)) =$
    $P(A)P(B) + P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) + P(A^c)P(B^c) = 1.$
- $P(A \cap B^c) + P(A \cap B) = P(A)$ par additivité. Si
  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$,
  $P(A \cap B^c) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$.

Indépendance de trois événements

- $A, B, C \in \mathcal{F}$ sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ et $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
- Importance de $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$:
  - $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.
  - Soit $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3\}$.
  - $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{4}$, $P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{1}{4}$.
  - Mais $P(A \cap B \cap C) = 0$ et $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$.
  - Intuition: si $\omega \in C$, $\omega \in A \cap B$ est impossible, tandis que si $\omega \notin C$, c'est possible.

Indépendance par pair vs indépendance

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$



Indépendance d'un ensemble I d'événements

- L'ensemble I peut être indénombrable (Exemple : processus stochastique $X_t(\omega)$ en temps continu, $t \in \mathbb{R}$)
- $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sont indépendants si pour chaque $j \in \mathbb{N}$ et chaque $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$,

$$P(A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \cap \ldots \cap A_{\alpha_j}) = P(A_{\alpha_1})P(A_{\alpha_2}) \cdots P(A_{\alpha_j})$$

- Si les $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sont indépendants et $a \in I$, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I \setminus \{a\}} \cup \{A_a^c\}$ le sont aussi. (On peut remplacer un évènement arbitraire par son complément.)

Indépendance des variables aléatoires

- Indépendance de deux variables aléatoires : X et Y sont indépendants si pour tous ensembles boréliens S_1 et S_2, $X^{-1}(S_1)$ et $Y^{-1}(S_2)$ sont indépendants.
- Indépendance par paire : pour toutes paires (X, Y) dans une collection de variables aléatoires, X et Y sont indépendants.
- Indépendance : une collection $\{X_\alpha \colon \alpha \in I\}$ de variables aléatoires est indépendante si pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in I$, $S_1, \dots, S_j$ boréliens,

$$P(X_{\alpha_1} \in S_1, \dots, X_{\alpha_j} \in S_j) = P(X_{\alpha_1} \in S_1) \cdots P(X_{\alpha_j} \in S_j)$$

- Indépendance de $f(X)$ et $g(Y)$ pour X, Y indépendant, f et g réelles et mesurables
- Suffisance de $F(x, y) = F(x)F(y)$ pour indépendance.

Indépendance de $f(X)$ et $g(Y)$, f,g réelles et mesurable

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr] & & f(X) \\
\{X^{-1}(f^{-1}(S_1))\} \in \mathcal{F} & \in f^{-1}(S_1) & & \in S_1 \text{ Borélienne} \\
\Omega \arrow[uur, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
\{Y^{-1}(g^{-1}(S_2))\} \in \mathcal{F} & & & \\
 & Y \arrow[rr] & & g(Y) \\
 & \in f^{-1}(S_2) & & \in S_2 \text{ Borélienne.}
\end{tikzcd}
$$

Continuité de probabilité (résultat)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité.

Résultat (continuité de probabilité)

- Si $A_n \nearrow A$, $A_n \in \mathcal{F}$, $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
- Si $A_n \searrow A$, $A_n \in \mathcal{F}$, $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Attention :

- $[0, 1 - 1/n] \nearrow [0, 1)$.
- On peut avoir $P([0, 1 - 1/n]) \to P([0, 1)) = 0.5$ et $P([0, 1]) = 1$ en même temps.
- Plus généralement, la fonction de répartition n'est pas forcément continue. Mais la continuité de probabilité implique qu'elle est continue à droite.

Continuité de probabilité (preuve)

- Soit $A_n \nearrow A$, $A_n \in \mathcal{F}$.
- On construit une suite d'anneaux disjoints :

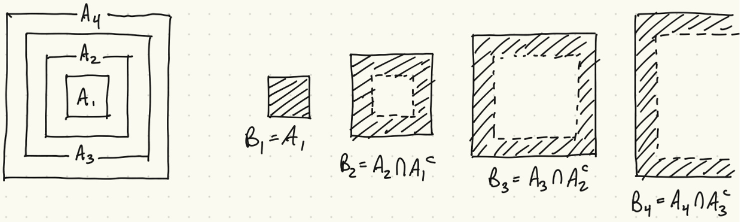
$$B_1 = A_1, \; B_2 = A_2 \cap A_1^c, \; \ldots, \; B_n = A_n \cap A_{n-1}^c, \; \ldots$$

- Notez que $B_n \in \mathcal{F}$, $A_n = \cup_{m=1}^{n} B_m$ et $A = \cup_{m=1}^{\infty} B_m$.
- Alors $A \in \mathcal{F}$ et

$$P(A) = P(\cup_{m=1}^{\infty} B_m) = \sum_{m=1}^{\infty} P(B_m) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

- Si $A_n \searrow A$ et $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n^c \nearrow A^c$ puis $P(A^c) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$, $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Construction des B_n



Convergence : suites d'événements A_n non-monotones

- $C_n = \cap_{k=n}^{\infty} A_k \nearrow C \equiv \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$ (A_n presque toujours, $\liminf_n A_n$).
- $D_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k \searrow D \equiv \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$ (A_n infiniment souvent, $\limsup_n A_n$).
- Les ensembles "infiniment souvent", "presque toujours" existe toujours.
- (Proposition 3.4.1, preuve)

$$
\begin{aligned}
P(\liminf_n A_n) &= P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\cap_{k=n}^{\infty} A_k) \\
&= \liminf_{n\to\infty} P(\cap_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n),
\end{aligned}
$$

$$
P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n) \leq \limsup_n P(A_n) \leq P(\limsup_n A_n).
$$

- Si $P(\liminf_n A_n) = P(\limsup_n A_n)$, $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ existe.

Aperçu du Chapitre 4, Espérance

1. Pour les variables aléatoires simples $X(\omega) = \sum_{i=1} x_i 1_{A_i}(\omega)$,

$$E[X(\omega)] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i).$$

   - linéarité
   - $E[XY] = E[X]E[Y]$ pour X, Y indépendant

2. Des variables aléatoires non-négatives

$$E[X] = \sup\{E[Y] \colon Y \, \text{simple}, \; Y \leq X\}.$$

3. Des variables aléatoires générales.
4. Espérance comme une généralisation de l'intégration riemannienne.