

ECN 7060, Cours 3

William McCausland

2018-09-19

Variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{F}, P)

- ▶ Une fonction $X(\omega)$ est une variable aléatoire si pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\{X \leq x\} \equiv \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

- ▶ Soit X, Y, Z_1, Z_2, \dots des variables aléatoires, $c > 0$.
- ▶ Les fonctions suivantes sont-elles des variables aléatoires?
 1. $1_A(\omega)$ où $A \in \mathcal{F}$
 2. $W(\omega) = cX(\omega)$
 3. $W = X + Y$
 4. $W = \min(X, Y), W = \max(X, Y)$
 5. $W = \inf_n Z_n, W = \sup_n Z_n$
- ▶ Supposez que $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega)$ existe et égale $Z(\omega)$ pour chaque $\omega \in \Omega$. $Z(\omega)$ est-elle une variable aléatoire?
 - ▶ Notez le mode de convergence : ponctuel, pas uniforme

Fonctions indicatrices

Notation pour une fonction indicatrice sur Ω , où (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace de probabilité :

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \subseteq \Omega, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Si $A \in \mathcal{F}$,

$$\{\omega \in \Omega : 1_A(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \Omega & x \geq 1, \\ A^c & 0 \leq x < 1, \\ \emptyset & x < 0, \end{cases}$$

et $\emptyset, A^c, \Omega \in \mathcal{F}$. Alors $1_A(x)$ est une variable aléatoire.

Multiplication scalaire

Soit $X(\omega)$ une variable aléatoire et $W(\omega) \equiv cX(\omega)$.

Pour $c = 0$ le résultat est évident, alors supposez que $c \neq 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega: W(\omega) \leq x\} &= \{\omega \in \Omega: cX(\omega) \leq x\} \\ &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x/c\} \\ &\in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Avec une notation plus simple :

$$\{W \leq x\} = \{cX \leq x\} = \{X \leq x/c\} \in \mathcal{F}.$$

Addition

Soit $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ deux variables aléatoires sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . Soit $W(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Pour tout $w \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\{W > w\} &= \cup_{q \in \mathbb{Q}} (\{X > q\} \cap \{Y > w - q\}) \\ &= \cup_{q \in \mathbb{Q}} (\{X \leq q\}^c \cap \{Y \leq w - q\}^c) \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

Alors $\{W \leq w\} = \{W > w\}^c \in \mathcal{F}$.

Notes pour la première équation :

- ▶ Pour inclure le point $(x, w - x + \epsilon)$ arbitraire qui vérifie $x + y > w$, choisit $q \in (x - \epsilon, x)$.
- ▶ Entre deux nombres réels, il y a toujours un nombre rationnel (la densité des rationnels dans les réels).

Discussion : minimum, maximum, infimum

Rappel : X, Y, Z_1, Z_2, \dots sont des variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{F}, P) .

1. $W = \min(X, Y)$
2. $W = \max(X, Y)$
3. $W = \inf_n Z_n$

Limites ponctuelles

Supposez que $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $Z(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Alors

$$\begin{aligned}\{Z \leq x\} &= \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} Z_k \leq x \right\} = \{ \forall \epsilon > 0, \exists n, \forall k > n, Z_k \leq x + \epsilon \} \\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{Z_k \leq x + 1/m\} \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Notes :

1. Fonctions sur $\Omega = \mathbb{R}$ avec un ensemble dénombrable de discontinuités.
2. Avec des limites et des sommes finies, on a des sommes infinies convergentes.

Indépendance de deux événements sur (Ω, \mathcal{F}, P)

- ▶ $A, B \in \mathcal{F}$ sont indépendants (dénnoté $A \perp B$) si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- ▶ Résultat : $A \perp B \Rightarrow A \perp B^c, A^c \perp B, A^c \perp B^c$.
- ▶ Deux faits :
 - ▶ $P(A \cap B) + P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c) = 1$
 - ▶ $(P(A) + P(A^c))(P(B) + P(B^c)) = P(A)P(B) + P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) + P(A^c)P(B^c) = 1$.
- ▶ $P(A \cap B^c) + P(A \cap B) = P(A)$ par additivité. Si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$,
 $P(A \cap B^c) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$.

Indépendance de trois événements

- ▶ $A, B, C \in \mathcal{F}$ sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ et $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
- ▶ Importance de $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$:
 - ▶ $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(\{i\}) = 0.25$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.
 - ▶ Soit $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3\}$.
 - ▶ $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.25$, $P(A \cap C) = P(A)P(C) = 0.25$, $P(B \cap C) = P(B)P(C) = 0.25$.
 - ▶ Mais $P(A \cap B \cap C) = 0$ et $P(A)P(B)P(C) = 0.125$.
 - ▶ Intuition: si $\omega \in C$, $\omega \in A \cap B$ est impossible, tandis que si $\omega \notin C$, c'est possible.

Indépendance d'un ensemble I d'événements

- ▶ L'ensemble I peut être indénombrable (processus stochastique en temps continu)
- ▶ $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sont indépendants si pour chaque $j \in \mathbb{N}$ et chaque $\alpha_1, \dots, \alpha_j$,

$$P(A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \cap \dots \cap A_{\alpha_j}) = P(A_{\alpha_1})P(A_{\alpha_2}) \cdots P(A_{\alpha_j})$$

- ▶ Si les $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sont indépendants et $a \in I$, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I \setminus \{a\}} \cup \{A_a^c\}$ le sont aussi. (On peut remplacer un événement arbitraire par son complément.)

Indépendance des variables aléatoires

- ▶ Indépendance de deux variables aléatoires : X et Y sont indépendants si pour tous ensembles boréliens S_1 et S_2 , $X^{-1}(S_1)$ et $X^{-1}(S_2)$ sont indépendants.
- ▶ Indépendance par paire : pour toutes paires (X, Y) dans une collection de variables aléatoires, X et Y sont indépendants.
- ▶ Indépendance : une collection $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ de variables aléatoires est indépendante si pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in I$, S_1, \dots, S_j boréliens,

$$P(X_{\alpha_1} \in S_1, \dots, X_{\alpha_j} \in S_j) = P(X_{\alpha_1} \in S_1) \cdots P(X_{\alpha_j} \in S_j)$$

- ▶ Indépendance de $f(X)$ et $g(Y)$ pour X, Y indépendant, f et g réelles et mesurables
- ▶ Suffisance de $F(x, y) = F(x)F(y)$ pour indépendance.

Continuité de probabilité (résultat)

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité.

Résultat (continuité de probabilité)

- ▶ Si $A_n \nearrow A$, $A_n \in \mathcal{F}$, $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.
- ▶ Si $A_n \searrow A$, $A_n \in \mathcal{F}$, $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

Attention :

- ▶ $[0, 1 - 1/n] \nearrow [0, 1)$.
- ▶ On peut avoir $P([0, 1 - 1/n]) \rightarrow P([0, 1)) = 0.5$ et $P([0, 1]) = 1$ en même temps.
- ▶ Plus généralement, la fonction de répartition n'est pas forcément continue. Mais la continuité de probabilité implique qu'elle est continue à droite.

Continuité de probabilité (preuve)

- ▶ Soit $A_n \nearrow A$, $A_n \in \mathcal{F}$.
- ▶ On construit une suite d'anneaux disjoints :

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \cap A_1^c, \dots, B_n = A_n \cap A_{n-1}^c, \dots$$

- ▶ Notez que $B_n \in \mathcal{F}$, $A_n = \cup_{m=1}^n B_m$ et $A = \cup_{m=1}^{\infty} B_m$.
- ▶ Alors

$$P(A) = P(\cup_{m=1}^{\infty} B_m) = \sum_{m=1}^{\infty} P(B_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n P(B_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

- ▶ Si $A_n \searrow A$ et $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n^c \nearrow A^c$ puis $P(A^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n^c)$,
 $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

Convergence : suites d'événements A_n non-monotones

- ▶ $C_n = \cap_{k=n}^{\infty} A_k \nearrow C \equiv \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$ (A_n presque toujours, $\liminf_n A_n$).
- ▶ $D_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k \searrow D \equiv \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$ (A_n infiniment souvent, $\limsup_n A_n$).
- ▶ Les ensembles “infiniment souvent”, “presque toujours” existe toujours.
- ▶ (Proposition 3.4.1, preuve)

$$\begin{aligned} P(\liminf_n A_n) &= P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\cap_{k=n}^{\infty} A_k) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} P(\cap_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n), \end{aligned}$$

$$P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n) \leq \limsup_n P(A_n) \leq P(\limsup_n A_n).$$

- ▶ Si $P(\liminf_n A_n) = P(\limsup_n A_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ existe.

Aperçu du Chapitre 4, Espérance

1. Pour les variables aléatoires simples $X(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i 1_{A_i}(\omega)$,

$$E[X(\omega)] = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i).$$

- ▶ linéarité
- ▶ $E[XY] = E[X]E[Y]$ pour X, Y indépendant

2. Des variables aléatoires non-négatives

$$E[X] = \sup\{E[Y] : Y \text{ simple}, Y \leq X\}.$$

3. Des variables aléatoires générales.
4. Espérance comme une généralisation de l'intégration riemannienne.