

# EXAMEN FINAL

Jeudi 14 avril 2022, de 8h30 à 11h15

ECN 6578A

ÉCONOMÉTRIE DES MARCHÉS FINANCIERS

HIVER 2022

Professeur : William MCCAUSLAND  
Directives pédagogiques : Documentation **non permise**, calculatrice non programmable **permise**.  
Pondération : Cet examen compte pour 35% de la note finale.

1. (30 points) Considérez un environnement avec deux périodes. La valeur  $s \in \{1, 2\}$  d'un état du monde est inconnue à la première période et connue à la deuxième période. À la première période, la probabilité de l'état  $s$  est de  $\pi_s$ ,  $s = 1, 2$ . Il y a  $N = 2$  actifs. L'actif  $i$  coûte  $q_i$  à la première période et paie  $X_{si}$  à la deuxième,  $i = 1, 2$  et  $s = 1, 2$ . La matrice des paiements  $X$ , le vecteur des prix des actifs  $q$  et le vecteur des probabilités des deux états sont

$$X = \begin{bmatrix} 500 & 400 \\ 600 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 515 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des paramètres.

- (a) (20 points) Supposons que  $\alpha_1 = 700$  et  $\alpha_2 = 500$ .
  - i. Donnez le vecteur des prix d'états.
  - ii. Donnez le facteur d'actualisation stochastique.
  - iii. Quel serait le prix d'un actif qui paie 500\$ dans l'état 1 et 550\$ dans l'état 2?
  - iv. Est-ce que le marché est complet? Est-ce qu'il y a une possibilité d'arbitrage?
- (b) (5 points) Pour quelles valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  est-il vrai et que le marché est incomplet et qu'il n'y a pas d'arbitrage?
- (c) (5 points) Si  $\alpha_2 = 500$ , pour quelles valeurs de  $\alpha_1$  est-ce qu'il n'y a pas d'arbitrage?
2. (10 points) Considérez une économie stochastique avec deux périodes. La première période est déterministe et dans la deuxième période il y a deux états du monde possibles, avec probabilités  $\pi = 0.1$  et  $1 - \pi = 0.9$ . Il y a un consommateur représentatif avec fonction d'utilité

$$U(C_t) + \delta E[U(C_{t+1})] = \delta [\pi U(C_{t+1,1}) + (1 - \pi)U(C_{t+1,2})],$$

où  $C_t$  est la consommation dans la première période et  $C_{t+1}$  est la consommation aléatoire dans la deuxième période :  $C_{t+1,i}$  est la consommation dans la deuxième période si l'état  $i$  se produit,  $i = 1, 2$ . Soit  $U(C) = \log C$  et  $\delta = 0.97$ . Supposez que le marché est complet. En équilibre où le consommateur maximise son utilité sous les contraintes imposées par les prix d'actifs et sa richesse, la consommation est de  $C_t = 100$ ,  $C_{t+1,1} = 80$ ,  $C_{t+1,2} = 102$ .

- (a) (5 points) Donnez le facteur d'actualisation à la première période qu'on peut utiliser pour valoriser des paiements aléatoires de la seconde période.
- (b) (5 points) Quel est le prix à la première période d'un actif qui paie un dollar dans la seconde période, peu importe l'état du monde réalisé?

3. (5 points) Considérez la condition de moment suivante pour estimer les paramètres  $\delta$  et  $\gamma$  du modèle CCAPM avec utilité isoélastique :

$$E[(1 + R_{i,t+1})\delta(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma} - 1)Z_t] = 0.$$

Pourquoi est-ce important que  $Z_t$  soit une variable connue par le consommateur à  $t$  ?

4. (15 points) Supposez que les rendements journaliers d'un actif suivent un modèle GARCH(1,1)  $t$  de Student avec  $\alpha_0 = 3.9 \times 10^{-6}$ ,  $\alpha_1 = 0.11$ ,  $\beta_1 = 0.86$ . La valeur du paramètre  $t$  de Student est de  $\nu = 12$ . La moyenne conditionnelle du rendement est constante :  $\mu_t = 0.00025$ . Selon les données observées,  $\sigma_n = 0.012$  et  $r_n = -0.0070$ . Quelle est la valeur à risque pendant une période d'un jour d'un montant de cet actif qui vaut 10000 dollars à  $t = n$  ? Utilisez une probabilité de perte  $p = 0.01$ .
5. (20 points) CAPM.
- (a) (10 points) Dans le contexte du modèle CAPM, on a vu qu'il existe des vecteurs  $g$  et  $h$  tels que le vecteur  $\omega = g + \mu_p h$  est la solution unique du problème

$$\min_{\omega} \omega' \Omega \omega \text{ tel que } \omega' \mu = \mu_p, \omega' \iota = 1,$$

où la moyenne  $\mu$  et la variance  $\Omega$  d'un vecteur de rendements simples sont données. Indiquez dans vos réponses où vous utilisez l'existence et l'unicité de la solution  $g + \mu_p h$ .

- i. Montrez que pour tous portefeuilles  $p$  (vecteur de poids  $\omega_p$ ) et  $q$  (vecteur de poids  $\omega_q$ ) sur la frontière minimum variance, et tout  $\lambda$  réel, le portefeuille avec vecteur de poids  $\lambda \omega_p + (1 - \lambda) \omega_q$  s'y trouve lui aussi.
- ii. Prouvez que pour tous portefeuilles distincts  $p$  (vecteur de poids  $\omega_p$ ),  $q$  (vecteur de poids  $\omega_q$ ) et  $r$  (vecteur de poids  $\omega_r$ ) sur la frontière minimum variance, il existe un  $\lambda$  réel tel que  $\omega_r = \lambda \omega_p + (1 - \lambda) \omega_q$ .
- (b) (5 points) Quelle est la frontière efficace ? Pourquoi, selon le CAPM, le portefeuille de chaque individu et le portefeuille du marché se trouvent-ils sur la frontière efficace ?
- (c) (5 points) Identifiez l'effet de taille ; expliquez pourquoi il soulève un doute contre le modèle CAPM et expliquez comment un biais de sélection pourrait exagérer l'effet de taille.
6. (5 points) Dans un monde à temps discret sans arbitrage, supposez que le log facteur d'actualisation stochastique est i.i.d.  $N(\mu, \sigma^2)$ . Donnez le prix à  $t$  d'une obligation qui paie 1 dollar à  $t + n$ . (Si  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $E[e^X] = e^{\mu + \sigma^2/2}$ .)
7. (15 points) Considérez le tableau suivant des prix  $P_{nt}$  d'obligation.  $P_{nt}$  est le prix à  $t$  d'une obligation qui paie un dollar à  $t + n$ .

$n \backslash t$	0	1	2
1	0.990	0.985	0.990
2	0.980	0.975	
3	0.960		

- (a) (5 points) Trouvez les valeurs  $Y_{20}$  et  $y_{20}$  du rendement net simple à l'échéance et du log rendement à l'échéance, à  $t = 0$ , d'une obligation qui paie un dollar à  $t = 2$ .
- (b) (5 points) Trouvez le rendement  $R_{31}$  réalisé lorsqu'on détient, entre  $t = 0$  et  $t = 1$ , l'obligation qui paie un dollar à  $t = 3$ . À quelle période ce rendement est-il observé ?
- (c) (5 points) Trouvez la valeur du cours à terme  $F_{20}$ . À quelle période est-il observé ?