

# Une note sur des nombres, des fonctions et des ensembles

24/10/2020

Dans ce document, je veux clarifier des concepts reliés à des nombres, des fonctions et des ensembles ainsi que les opérations  $\liminf$ ,  $\limsup$  et  $\lim$ . Les opérations  $\liminf$ ,  $\limsup$  et  $\lim$  ont des définitions différentes pour les nombres, les fonctions et les ensembles. Ainsi,

- le  $\liminf$  d'une suite de nombres réels est un nombre réel,
- le  $\liminf$  d'une suite de fonctions est une fonction,
- le  $\liminf$  d'une suite d'ensembles est un ensemble.

Même chose pour les opérations  $\liminf$  et  $\lim$ . La signification de « croissant » et « décroissant » dépend de l'objet qualifié. Dans la graphique, les flèches indiquent le genre d'objet qui est le résultat de l'opération indiquée. Une flèche pointillée indique que le résultat n'est pas toujours bien défini.

Voici des notes qui correspondent aux chiffres encadrés dans la graphique.

1. Cette limite n'existe pas toujours. Si elle existe, c'est le même nombre que le  $\liminf$  et le  $\limsup$ .
2. Cette limite n'existe pas toujours. Si elle existe, c'est la même fonction que le  $\liminf$  et le  $\limsup$ .
3. L'espérance existe seulement quand  $X$  est une variable aléatoire.
4. La probabilité existe seulement quand  $A$  est un événement.
5. Toujours bien définie; cependant, le résultat est une variable aléatoire ssi  $A$  est un événement.
6. Toujours bien définie. Le résultat est un événement si  $B$  est un ensemble borélien et  $X$  est une variable aléatoire.

	Suites	Unités
nombres $x_n$ ⑦	<div> <div>croissantes</div> <div><math>\inf_{m \geq n}</math></div> <div>décroissantes</div> <div><math>\sup_{m \geq n}</math></div> </div>	<div> <div><math>\lim_n</math></div> <div><math>\liminf_n, \limsup_n</math></div> <div><math>\lim_n</math> ①</div> <div><math>\lim_n</math></div> <div><math>x(s)</math></div> <div><math>E[X]</math></div> <div><math>+,-,f(\cdot),x</math></div> <div><math>x \in \mathbb{R}</math></div> <div>④</div> </div>
fonctions cas spécial variables aléatoires $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$	<div> <div>croissantes en n pour tous <math>\omega \in \Omega</math></div> <div><math>\inf_{m \geq n}</math></div> <div>décroissantes en n pour tous <math>\omega \in \Omega</math></div> <div><math>\sup_{m \geq n}</math></div> </div>	<div> <div><math>\lim_n</math></div> <div><math>\liminf_n, \limsup_n</math></div> <div><math>\lim_n</math> ②</div> <div><math>\lim_n</math></div> <div><math>\mathbb{1}_A</math> ⑤</div> <div><math>X^{-1}(B)</math></div> <div><math>+,-,f(\cdot),x</math></div> <div><math>X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}</math></div> <div>③</div> </div>
ensembles cas spécial événements $A_n \subseteq \Omega$	<div> <div>croissantes</div> <div><math>\bigcap_{m \geq n}</math></div> <div>décroissantes</div> <div><math>\bigcup_{m \geq n}</math></div> </div>	<div> <div><math>\bigcup_n</math></div> <div><math>\liminf_n = \bigcap_n \bigcup_{m \geq n}</math></div> <div><math>\limsup_n = \bigcap_n \bigcup_{m \geq n}</math></div> <div><math>\bigcap_n</math></div> <div><math>P(A)</math></div> <div><math>A \subseteq \Omega</math></div> <div><math>A \cap B</math> <math>A \cup B</math> <math>A^c</math></div> <div>⑥</div> </div>