# ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers, Hiver 2022

## Cours 11

William McCausland

2022-04-03

# Obligations

- Un obligation est un contrat entre un *émetter* (pays, province, état, municipalité, entreprise) et un *détenteur*.
- Le détenteur peut vendre l'obligation dans un marché.
- L'émetteur verse un paiement, la *valeur nominale* (face value) au détenteur à l'*échance*.
- Habituellement l'émetteur verse des *coupons* réguliers au détenteur jusqu'à l'échéance (inclusif).
- Pour les obligations *zéro coupon* il n'y a pas de coupon.
- $P_{nt}$ est le prix à $t$ d'une obligation zéro coupon qui paie un dollar dans $n$ périodes et $p_{nt} \equiv \log(P_{nt})$.

# Rendements des obligations

- Le rendement à l'échéance (yield) $Y_{nt}$ de cette obligation vérifie

$$P_{nt} = \frac{1}{(1 + Y_{nt})^n}.$$

- Le log-rendement $y_{nt} = \log(1 + Y_{nt})$ vérifie

$$y_{nt} = -\frac{p_{nt}}{n}.$$

# Rendements “Holding Period”

- On peut calculer un *rendement pendant la période de détention* (holding period return) pour une obligation :

$$(1 + R_{n,t+1}) = \frac{P_{n-1,t+1}}{P_{nt}} = \frac{(1 + Y_{nt})^n}{(1 + Y_{n-1,t+1})^{n-1}}.$$

- En logarithmes,

$$r_{n,t+1} = p_{n-1,t+1} - p_{nt} = y_{nt} - (n-1)(y_{n-1,t+1} - y_{nt}).$$

- Le rendement à l’échéance (connu à $t$) est la moyenne de rendements à venir :

$$y_{nt} = -p_{nt}/n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_{n-i,t+1+i}.$$

- Attention : si les taux d’intérêt montent, le prix des obligations tombe.

# La structure à terme

- La *structure à terme* est l'ensemble de rendements à l'échéance pour des obligations zéro coupon de maturité différentes.
- La courbe de rendement (yield curve) est la graphique de $Y_{nt}$ ou $y_{nt}$ contre $n$.
- L'écart de rendement (yield spread) à $t$ est $S_{nt} \equiv Y_{nt} - Y_{1t}$ ou $s_{nt} \equiv y_{nt} - y_{1t}$.

# Cours à terme (forward rates)

- Voici une façon de garantir à $t$ un taux d'intérêt entre $t+n$ et $t+n+1$ (le taux étant déterminé par les prix marchands).
  - acheter une obligation qui paie un dollar à $t+n+1$
  - vendre assez de l'obligation qui paie un dollar à $t+n$ pour financer cet achat. (c.-à-d. vendre une quantité $P_{n+1,t}/P_{nt}$) de cette obligation)
- Le *cours à terme* (forward rate) est le taux garanti :

$$1 + F_{nt} = \frac{P_{nt}}{P_{n+1,t}}.$$

# Modèles de la structure à terme

- Rappel : $P_{nt}$ le prix à $t$ d'une obligation zéro coupon, qui paie 1 dollar à $t+n$.
- $P_{nt} = E_t[P_{n-1,t+1} M_{t+1}]$ où $M_{t+1}$ est le facteur d'actualisation stochastique.
- L'itération donne $P_{nt} = E_t[M_{t+1} M_{t+2} \cdots M_{t+n}]$.
- La log-normalité conjointe conditionnelle des $P_{1t}, P_{2t}, \ldots$ et $M_{t+1}$ donne l'équation de valorisation :

$$p_{nt} = E_t[m_{t+1} + p_{n-1,t+1}] + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t[m_{t+1} + p_{n-1,t+1}],$$

où

$$p_{nt} = \log(P_{nt}), \quad m_{t+1} = \log(M_{t+1}).$$

# Modèle de Vasicek (1977)

- Dans ce modèle, $m_{t+1}$ est homoscédastique.
- On peut toujours écrire

$$-m_{t+1} = x_t + \epsilon_{t+1},$$

  où $E_t[-m_{t+1}] = x_t$ et $E_t[\epsilon_{t+1}] = 0$.
- Selon le modèle, le facteur $x_t$ est AR(1) :

$$x_{t+1} = (1-\phi)\mu + \phi x_t + \xi_{t+1}.$$

- En général, $\epsilon_{t+1}$ et $\xi_{t+1}$ sont corrélés : $\epsilon_{t+1} = \beta\xi_{t+1} + \eta_{t+1}$.
- La partie de $\epsilon_{t+1}$ non-corrélée avec $\xi_{t+1}$ n'est pas importante et on l'élimine, alors

$$-m_{t+1} = x_t + \beta\xi_{t+1}.$$

- On a un seul choc dans le système : $\xi_t$. Soit $\sigma^2$ sa variance.

# Valorisation des obligations I : Le taux court

- Le log-prix d'une obligation à une période vérifie (parce que $p_{0,t+1} = \log P_{0,t+1} = \log 1 = 0$)

$$p_{1t} = E_t[m_{t+1}] + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t[m_{t+1}].$$

- Dans le modèle de Vasicek,

$$p_{1t} = -x_t + \beta^2\sigma^2/2.$$

- Rappelez que le rendement à l'échéance et

$$y_{1t} = -p_{1t} = x_t - \beta^2\sigma^2/2.$$

- Remarquez que $y_{1t}$ est affine en $x_t$.

## Valorisation des obligations II : d'autres échéances

- On devine (et vérifie plus tard) que dans le modèle de Vasicek, $p_{nt}$ (et alors $y_{nt} = -p_{nt}/n$) est aussi affine en $x_t$ :

$$-p_{nt} = A_n + B_n x_t$$

- On sait déjà que $A_0 = B_0 = 0$, $A_1 = -\beta^2\sigma^2/2$ et $B_1 = 1$.
- On vérifie que l'équation de prix affine est correcte et on obtient les coefficients avec

$$E_t[m_{t+1} + p_{n-1,t+1}] = -x_t - A_{n-1} - B_{n-1}(1-\phi)\mu - B_{n-1}\phi x_t$$

$$\mathrm{var}_t[m_{t+1} + p_{n-1,t+1}] = (\beta + B_{n-1})^2\sigma^2$$

- Après substitution dans l'équation de valorisation, on obtient

$$A_n + B_n x_t - x_t - A_{n-1} - B_{n-1}(1-\phi)\mu - B_{n-1}\phi x_t + (\beta + B_{n-1})^2\sigma^2/2 = 0$$

# D'autres échéances, continu

- Cette équation doit tenir pour chaque $x_t$, alors le coefficient de $x_t$ et le coefficient constant doivent égaler à zéro.
- Alors

$$B_n = 1 + \phi B_{n-1} = (1 - \phi^n)/(1 - \phi)$$

$$A_n = A_{n-1} + (1 - \phi)\mu B_{n-1} - (\beta + B_{n-1})^2 \sigma^2 / 2$$

- Une version discrète du modèle célèbre Cox, Ingersoll Ross (1985) est

$$-m_{t+1} = x_t + x_t^{1/2} \epsilon_{t+1}$$

$$x_{t+1} = (1 - \phi)\mu + \phi x_t + x_t^{1/2} \xi_{t+1}$$

- C'est aussi un modèle affine avec un facteur.
- Il y a aussi des modèles avec plusieurs facteurs et des modèles qui ne sont pas affines.