ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers, Hiver 2020

Cours 1

William McCausland

2020-01-04

Plan

1. Introduction
2. Les éléments de la note finale
3. Notation pour les rendements
4. Mélanges versus fonctions linéaires de variables aléatoires
5. La loi des espérances itérées
6. L'inégalité de Jensen
7. Démonstration de RStudio, si le temps le permet

Introduction

Survol des marchés financiers

- Deux éléments très importants : le temps et le risque
- Participants
  - Ménages (épargne, dette—immobilier, éducation, etc.)
  - Firmes non-financières (financement des projets, gérance du risque)
  - Gouvernements (financement des dépenses et des transferts)
  - Firmes financières (création des contrats de nature financière, fourniture des marchés liquides)
- Actifs : actions, obligations, options, contrats à terme, contrats d'assurance, prêts.

Économétrie (sens large) des marchés financiers

- Modèles stochastiques (théoriques ou non) des prix, des rendements, des comptes et des durées.
- Inférence (tests, estimation, prévision)
- Valorisation par simulation

Les éléments de la note finale :

1. Examen intra, le lundi 17 février : 40%
2. Deux travaux pratiques de computation en R, à remettre le 24 février avant minuit et le 8 avril avant minuit : 10% + 10%
3. Examen final, date à déterminer : 40%

Notes

- Les deux examens sont théoriques.
- Les travaux pratiques en R constituent un travail largement complémentaire des examens.
- Chaque semaine, je donnerai des lectures, des exercices en R (pour les travaux pratiques) et des questions théoriques pour préparer les examens.
- Le premier travail consiste en les exercises pratiques données jusqu'au 10 février (inclusif) ; le deuxième, les exercices pratiques données jusqu'au 30 mars (inclusif).

Plus sur les travaux pratiques en R

- Remettez les travaux pratiques en équipes de 1, 2 ou 3.
- Écrivez tous les noms sur la première page.
- Envoyez une copie en PDF (un seul fichier) avant minuit à la date de l'échéance.
- Envoyez-la par courriel, avec sujet 'Travail pratique', à william.j.mccausland@umontreal.ca
- Téléchargement de R, RStudio
  - R : https://www.r-project.org
  - R Studio : https://www.rstudio.com
- Utilisez R Markdown pour créer
  - un fichier HTML que vous convertissez ensuite en PDF, ou
  - un fichier PDF directement (il faut installer LaTeX).
- Regardez la documentation de R Markdown pour voir comment
  - inclure du code R dans les documents,
  - inclure les résultats de R (y compris des tableaux et des graphiques) dans les documents.

Attentes

1. Faites les lectures avant le cours.
2. Essayez les questions seuls, puis discutez-en parmi vous, puis demandez de l'aide.
3. Le contenu du cours comprend les lectures.

Notation pour les rendements en temps discret

- Soit P_t le prix d'un actif à t, $t = 1, \ldots, T$.
- Soit $p_t = \log P_t$.
- Unités habituelles : P_t en dollars, t en jours, mois ou ans
- Rendements simples nets et bruts, log rendements :

$$R_t \equiv \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad 1{+}R_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}, \quad r_t \equiv \log(1{+}R_t) = p_t{-}p_{t-1}.$$

- Notes :
  - Les trois rendements ne dépendent pas de l'unité de valeur.
  - Ils dépendent de l'unité du temps.
  - L'indice t indique souvent le moment où la quantité est connue.
  - Les rendements sont plus “stationnaires” que les prix et plus comparables.

Rendements des portfeuilles

- Les prix de n actifs à t : $P_{1t}, \ldots, P_{nt}$
- Un portefeuille à $t-1$ comprend ω_i dollars (ou $\omega_i / P_{i,t-1}$ unités) de l'actif i.
- Normalisation : $\sum_i \omega_i = 1$.
- Prix du portfeuille à $t-1$:

$$P_{p,t-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{P_{i,t-1}} P_{i,t-1} = 1$$

- Prix (et rendement brut) du portfeuille à t :

$$1+R_{pt} = \frac{P_{pt}}{P_{p,t-1}} = P_{pt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i P_{it}}{P_{i,t-1}} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (1+R_{it}) = 1+\sum_{i=1}^{n} \omega_i R_{it}.$$

- Rendement net: $R_{pt} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_{it}$.
- La linéarité des rendements simples (et non des log rendements) donne l'avantage à ceux-là.

Fonctions linéaires vs mélanges, un exemple

Éléments communs

- Il y a 3 actifs, avec rendements nets $R_t \equiv (R_{1t}, R_{2t}, R_{3t})$.
- Mettons que $R_t \sim N(\mu_t, \Sigma_t)$, où

$$\mu_t = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_t = \begin{bmatrix} (0.10)^2 & 0.012 & 0 \\ 0.012 & (0.15)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (0.05)^2 \end{bmatrix}.$$

Deux placements

1. Placer 100 \$ en proportions $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0.5, 0.2, 0.3)$
   - C.-à-d. placer 50 \$ en l'actif 1, 20 \$ en l'actif 2, etc.
   - Le rendement est une v.a. qui est une fonction linéaire de 3 v.a.
2. Placer 100 \$ en actif 1, 2 ou 3 avec probabilités 0.5, 0.2, 0.3.
   - C.-à-d. placer 100 \$ en l'actif 1 avec probabilité 0.5, 100 \$ en l'actif 2 avec probabilité 0.2, etc.
   - Le rendement a une loi qui est un mélange discret de trois lois.

Fonctions linéaires de variables aléatoires

Mettons que

- $R_t = (R_{1t}, \ldots, R_{nt})$, un vecteur de rendements,
- $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, un vecteur de poids de portefeuille,
- $R_t \sim (\mu_t, \Sigma_t)$ et
- ω n'est pas aléatoire.

Alors

- $R_{pt} = \omega^\top R_t$ est le rendement du portfeuille.
- $E[R_{pt}] = \omega^\top \mu_t$ et $\mathrm{Var}[R_{pt}] = \omega^\top \Sigma_t \omega$.
- Si R_t est gaussien multivarié, $R_{pt} \sim N(\omega^\top \mu_t, \omega^\top \Sigma_t \omega)$.

Mélanges de variables aléatoires

Exemple : mélange de deux v.a. gaussiennes

- Mettons que (μ, σ^2) égale (μ_1, σ_1^2) avec probabilité π et (μ_2, σ_2^2) avec probabilité $(1 - \pi)$.
- (μ, σ) est aléatoire, (μ_1, σ_1), (μ_2, σ_2) et π ne le sont pas.
- Mettons que $R|(\mu, \sigma) \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- La loi marginale de R est un mélange de deux lois gaussiennes.
- La densité de R est

$$f(x) = \pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] + (1-\pi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right.$$

Cas général

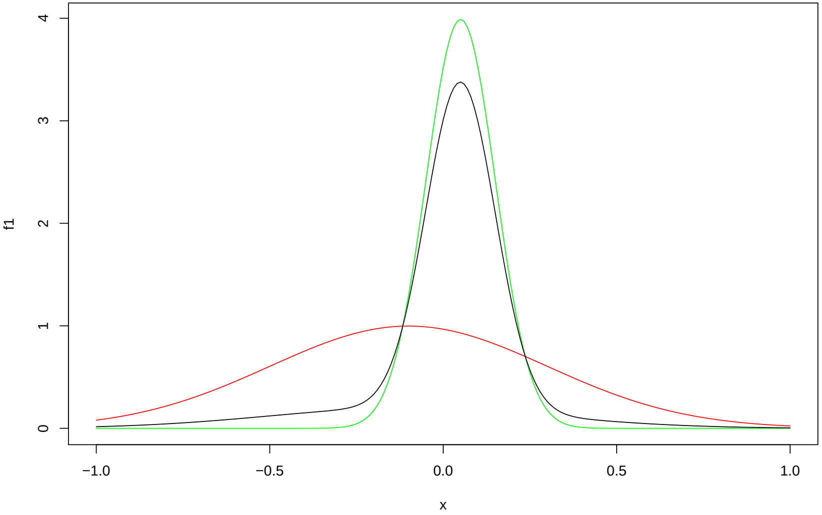
- Si la densité conditionnelle de X sachant θ est $f(x|\theta)$ et la densité de θ est $f(\theta)$, alors la densité marginale de X, $f(x) = \int f(x|\theta) f(\theta)\, d\theta$, est un mélange.

Code R pour un mélange de deux v.a. gaussiennes

```
mu1 = 0.05; sigma1 = 0.1
mu2 = -0.10; sigma2 = 0.4
pi = 0.8
x = seq(-1,1,by=0.01)
f1 = dnorm(x, mu1, sigma1)
f2 = dnorm(x, mu2,  sigma2)
fmelange = pi * f1 + (1-pi) * f2
```

Code R pour afficher les densités

```
plot(x, f1, col='green', 'l')
lines(x, f2, col='red')
lines(x, fmelange, col='black')
```



La loi des espérances itérées

Deux versions de la loi des espérances itérées

- Version inconditionnelle : pour variables aléatoires X et Y,

$$E[Y] = E[E[Y|X]]$$

- Version conditionnelle : pour variables aléatoires X, Y et Z,

$$E[Y|Z] = E[E[Y|X,Z]|Z]$$

Un exemple temporel

$$E[R_{t+2}|R_t] = E[E[R_{t+2}|R_{t+1}]|R_t].$$

Application I: théorème de la variance total

- Le théorème de la variance totale : pour v.a. X et Y,

$$\mathrm{Var}[Y] = E[\mathrm{Var}[Y|X]] + \mathrm{Var}[E[Y|X]]$$

- Preuve
- Exemple 1 : Y est le rendement d'une action, X indique l'industrie ($X = 1$ pour la construction, $X = 2$ pour le tourisme, $X = 3$ pour les mines, ...).
- Exemple 2 : Y est le rendement d'un actif, X est une mesure observable de la volatilité de l'actif.
  - Conditionner réduit la variance en moyenne car le deuxième terme à droite est non-négatif.
  - Attention : il peut y avoir des valeurs de X telles que $\mathrm{Var}[Y] < \mathrm{Var}[Y|X]$.

Application II: mélange de deux aléas gaussiens

Description du mélange (rappel)

- (μ, σ^2) égale (μ_1, σ_1^2) avec probabilité π et (μ_2, σ_2^2) avec probabilité $(1 - \pi)$.
- $R|(\mu, \sigma) \sim N(\mu, \sigma^2)$

Calcul de quelques moments

$$E[R] = E[E[R|\mu, \sigma^2]] = \pi\mu_1 + (1 - \pi)\mu_2$$

$$E[R^2] = E[E[R^2|\mu, \sigma^2]] = \pi(\mu_1^2 + \sigma_1^2) + (1 - \pi)(\mu_2^2 + \sigma_2^2)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[R] &= E[Var[R|\mu, \sigma^2]] + \mathrm{Var}[E[R|\mu, \sigma^2]] \\ &= \pi\sigma_1^2 + (1 - \pi)\sigma_2^2 + \mathrm{Var}[\mu] \end{aligned}$$

L'inégalité de Jensen

- Soit $\varphi(x)$ une fonction convexe, X une variable aléatoire.
- L'inégalité de Jensen : $\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$
- Application 1 : aversion pour le risque
  - $\varphi(x) = -u(x)$, où $u(x)$ est une fonction d'utilité concave
  - Soit W la richesse (connue) en période t.
  - Soit $(1 + R_{t+1})$ le rendement brut (inconnu) d'un actif en période $t + 1$.
  - Alors $X = W(1 + R_{t+1})$ et la richesse après une période si toute la richesse est placée en l'actif.
  - Conséquence de l'inégalité de Jensen : $u(E[W(1 + R_{t+1})]) \geq E[u(W(1 + R_{t+1}))]$
  - Cela implique une préférence pour la valeur sure $E[W(1 + R_{t+1})]$ à la richesse aléatoire $W(1 + R_{t+1})$.

L'inégalité de Jensen, cont.

- Application 2 : aplatissement K_z d'une v.a. $Z \sim (\mu, \sigma^2)$
  - K_z mesure l'épaisseur des ailes de la densité de Z.
  - $K_z \equiv E[(Z-\mu)^4]/E[(Z-\mu)^2]^2 = E[(Z-\mu)^4]/\sigma^4$.
  - $\varphi(x) = x^2$, $X = (Z-\mu)^2$ donne $E[(Z-\mu)^4] \geq E[(Z-\mu)^2]^2$, $K_z \geq 1$.
  - Si Z est gaussienne, $K_z = 3$.
  - Supposons que $Z = \sigma\epsilon$, où $\epsilon \sim N(0,1)$, σ et ϵ indépendents.
  - Par la loi des espérances itérées, $E[Z^4] = E[E[Z^4|\sigma^2]] = E[3\sigma^4]$.
  - $\varphi(x) = x^2$, $X = \sigma^2$ donne $E[\sigma^4] \geq E[\sigma^2]^2$ et alors $K_z \geq 3$.

Cours 2, la semaine prochaine

Plan préliminaire

1. Log rendements et rendements multi-période
2. Asymétrie et aplatissement
3. Autocorrélation
4. Faits empiriques
5. Modèles ARMA(p,q) de base

Lectures

- Dans Tsay, 3e édition :
  - 1.1, 1.2.2, 1.2.5
  - 2.1, 2.2, 2.3