

# Lectures et exercices théoriques

*William McCausland*

*2020-02-02*

## Avant l'intra

### Cours 1

#### Lectures

1. Tsay, 3e édition :
  - a. 1.1 rendements

#### Exercices

1. Pour les deux placements décrits à la diapo “Fonctions linéaires vs mélanges, un exemple”, calculez la moyenne et la variance du rendement.
2. Étudiez la preuve du théorème de variance totale et prouvez le théorème de covariance totale : pour variables aléatoires  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  telles que les moments suivants existent,

$$\text{Cov}[X, Y] = E[\text{Cov}[X, Y|Z]] + \text{Cov}[E[X|Z], E[Y|Z]].$$

3. Trouvez  $\text{Var}[\mu]$  dans l'Application II de la loi des espérances itérées. Il y a deux façons. Vous pouvez confirmer que les deux façons donnent le même résultat. Les deux façons :
  - a. Trouvez  $\text{Var}[\mu]$  directement comme  $E[\mu^2] - E[\mu]^2$
  - b. Trouvez  $\text{Var}[\mu]$  indirectement avec les expressions de  $E[R]$ ,  $E[R^2]$  et  $\text{Var}[R]$  sous “Calcul de quelques moments”.

### Cours 2

#### Lectures avant le cours

1. Tsay, 3e édition :
  - a. 1.2.2 la loi des rendements
  - b. 1.2.3 rendements multivariés
  - c. 1.2.5 propriétés empiriques des rendements
  - d. 2.1 stationnarité
  - e. 2.2 corrélation et la fonction d'autocorrélation
  - f. 2.3 le bruit blanc et les séries temporelles linéaires

#### Autres lectures

1. L'article de Cont (2001) que j'ai mis sur StudiUM.
2. Tsay, 3e édition :
  - a. 1.2.1 lois statistiques et leurs moments

## Exercices

1. La v.a.  $X$  suit une loi qui est un mélange de deux lois gaussiennes, chacune avec probabilité 0.5 :  $N(\mu, \sigma^2)$  et  $N(-\mu, \sigma^2)$ . Calculez l'aplatissement  $K_x$  et  $\lim_{\sigma^2 \downarrow 0} K_x$ .
2. Trouvez l'asymétrie et l'aplatissement d'un mélange général de deux v.a. gaussiennes. Le site suivant donne les quatre premiers moments non centraux d'une v.a.  $N(\mu, \sigma^2)$  : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi\\_normale#Moments](https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale#Moments).
3. Le prix d'un actif le 4 janvier est de 14.50 dollars. Le prix de l'actif le 15 février est de 13.15. Quel est le rendement simple annualisé et le log rendement annualisé?
4. On observe un échantillon  $X_1, \dots, X_T$ , où  $X_t \sim \text{iid } N(\mu, \sigma^2)$ . Si on fait les tests 1 et 2 de la diapo "Attention : tests multiples!" quelle est la probabilité d'au moins un rejet, comme fonction de  $\alpha$ ?

## Cours 3

### Lectures avant le cours

1. Tsay, 3e édition :
  - a. 2.4 Intro (avant 2.4.1)
  - b. 2.5 Intro (avant 2.5.1)
  - c. 2.6 Intro (avant 2.6.1)

### Autres lectures

1. Tsay, 3e édition :
  - a. 2.4 (modèles AR)
  - b. 2.5 (modèles MA)
  - c. 2.6 (modèles ARMA)
  - d. 2.8.1 et 2.8.2 (pour faire l'exercice 2.4)

## Exercices

1. Ecrivez les équations Yule-Walker pour un processus AR(3) et pour un processus ARMA(1,1).
2. Trouvez la fonction d'autocorrélation pour un processus MA(3).
3. Considérez le processus AR(3) suivant :

$$r_t = 1.9r_{t-1} - 1.4r_{t-2} + 0.45r_{t-3} + a_t.$$

- a. Trouvez les racines du polynôme caractéristique du processus.
  - b. Est-ce que la condition de stationnarité tient?
4. Trouvez  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  de la représentation MA infinie pour un ARMA(1,2) général.

## Cours 4

### Lectures avant le cours

1. Tsay, 3e édition :
  - a. Chapitre 3 jusqu'à l'introduction de 3.4 (avant 3.4.1)

## Autres lectures

1. Tsay 3e édition :
  - a. Sections 1.2.2 (Distributions des rendements)
  - b. Sections 1.2.4 (Fonction de vraisemblance des rendements)
  - c. Section 3.4.1 (Propriétés des modèles ARCH)
  - d. Section 3.4.2 (Faiblesses des modèles ARCH)

## Exercices

1. Mettons que  $r_t$  suit un modèle ARMA(1,3) avec moyenne zéro. Au moment  $t$ , trouvez les prévisions de  $r_{t+1}$  et de  $r_{t+2}$  qui minimisent l'erreur moyenne carrée. Trouvez la variance de l'erreur de prévision dans les deux cas.
2. Mettons que  $r_t$  suit un GARCH(1,1) gaussien avec moyenne zéro. Calculez la variance, l'asymétrie et l'aplatissement de  $r_t$ . Vous pouvez vérifier la variance et l'aplatissement en comparant vos résultats aux résultats à la page 132 de Tsay.

## Cours 5

### Lectures avant le cours

1. Dans Tsay, 3e édition :
  - a. 3.5 intro (avant 3.5.1) (Modèle GARCH)
  - b. 3.8 intro, 3.8.1 (Modèle EGARCH)
2. Au site web suivant : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Maximum\\_de\\_vraisemblance](https://fr.wikipedia.org/wiki/Maximum_de_vraisemblance)
  - a. Sections Exemple, Principe, Définitions, Propriétés, Exemples

## Autres lectures

## Exercices

1. Trouvez la moyenne et la variance de  $\ln \sigma_t^2$  pour un modèle EGARCH(1,1)
2. Faites des prévision du rendement  $r_{T+1}$  pour une modèle AR(1)-GARCH(1,1). Quelle est la variance conditionnelle des erreurs de prévision? Exprime le résultat en termes des paramètres, de  $r_T$  et de  $\sigma_T^2$ .

## Cours 6

### Lectures avant le cours

1. Dans Tsay, 3e édition :
  - a. 3.12 (Modèle de volatilité stochastique)
  - b. 12.3 intro, 12.3.1 (inférence bayésienne, lois postérieures)

## Autres lectures

## Exercices