

ECN 7060, Cours 7

William McCausland

2017-10-17

Fonction caractéristique d'une loi $U(a, b)$

$$\phi(t) = E[e^{itX}] = E[\cos tX + i \sin tX] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \cos tx + i \sin tx \, dx$$

$$\phi(t) = \frac{1}{t(b-a)} [\sin tx - i \cos tx]_a^b = \frac{1}{it(b-a)} [\cos tx + i \sin tx]_a^b$$

$$\phi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

► Cas spécial, $a = -1$, $b = 1$:

$$\phi(t) = \frac{\sin t}{t} \equiv \text{sinc}(t).$$

Fonction caractéristique d'une loi $N(0, 1)$

- Puisque $\sin(tx)$ est impair, $e^{-x^2/2}$ est pair,

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \cdot e^{-x^2/2} dx$$

$$\phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\sin tx \cdot x e^{-x^2/2} dx$$

- Intégration par parties, $u = -\sin tx$, $dv = x e^{-x^2/2} dx$,
 $du = -t \cos tx$, $v = -e^{-x^2/2}$, donne

$$\phi'(t) = [uv]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cos tx \cdot e^{-x^2/2} dx = -t\phi(t).$$

- La solution de l'équation différentielle $\log \phi(0) = 0$,
 $\frac{d \log \phi(t)}{dt} = -t$ est $\log \phi(t) = \int_0^t -s ds = -t^2/2$.
- Alors $\phi(t) = e^{-t^2/2}$.

Continuité de la fonction caractéristique

$$|\phi_x(t+h) - \phi_x(t)| = \left| \int (e^{i(t+h)x} - e^{itx}) \mu(dx) \right| \leq \int |e^{i(t+h)x} - e^{itx}| \mu(dx)$$

- ▶ Deux bornes qui ne dépend pas de t

$$|e^{i(t+h)x} - e^{itx}| \leq h|x|, \quad |e^{i(t+h)x} - e^{itx}| \leq 2.$$

- ▶ Selon la deuxième, (convergence dominée)

$$\lim_{h \downarrow 0} E \left[|e^{i(t+h)x} - e^{itx}| \right] = E \left[\lim_{h \downarrow 0} |e^{i(t+h)x} - e^{itx}| \right]$$

- ▶ Selon la première,

$$E \left[\lim_{h \downarrow 0} |e^{i(t+h)x} - e^{itx}| \right] \rightarrow 0.$$

Dérivée de la fonction caractéristique

- ▶ Soit X une variables aléatoire, $\phi(t)$ sa fonction caractéristique.
- ▶ Si $E[|X|^k] < \infty$, alors pour $0 \leq j \leq k$, $\phi^{(j)}(t) = E[(iX)^j e^{itX}]$.
- ▶ Preuve :
 - ▶ $E[(iX)^0 e^{itX}] = E[e^{itX}] = \phi(t) = \phi^{(0)}(t)$, alors vrai pour $j = 0$.
 - ▶ Supposez que $\phi^{(j-1)} = E[(iX)^{j-1} e^{itX}]$.
 - ▶ $|(iX)^j e^{itX}| = |i|^j |X|^j |e^{itX}| = |X|^j$
 - ▶ $E[|X|^k] < \infty \Rightarrow E[|X|^j] < \infty$
 - ▶ $\phi^{(j)} = E \left[\frac{d}{dt} (iX)^{j-1} e^{itX} \right] = E[(iX)^j e^{itX}]$
- ▶ Génération des moments :

$$\phi^{(j)}(0) = i^j E[X^j]$$

La fonction $(\sin \theta t)/t = \theta \text{sinc}(\theta t)$

1. Pour $\theta = 0$, $(\sin \theta t)/t \equiv 0$.
2. Pour $\theta \neq 0$, $t = k\pi/\theta$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\frac{\sin \theta t}{t} = 0.$$

3. Pour $\theta \neq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \theta t}{t} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \theta \cos \theta t}{\lim_{t \rightarrow 0} 1} = \theta$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta t}{t} = 0.$$

4. Pour $\theta \neq 0$, la fonction est paire :

$$\frac{\sin \theta(-t)}{-t} = \frac{\sin \theta t}{t}$$

5. Selon le livre,

$$\lim \int^T \frac{\sin \theta t}{t} dt = \begin{cases} \pi & \theta > 0 \\ 0 & \theta = 0 \end{cases}$$

Théorème d'inversion I

- Soit μ une mesure borélienne, $\phi(t)$ sa fonction caractéristique. Alors si $a < b$ et $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$,

$$\mu([a, b]) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt$$

- Puisque

$$\left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right| = \left| \int_a^b e^{itr} dr \right| < \infty$$

l'intégral entre $-T$ et T est fini.

- Par Fubini,

$$\int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mu(dx) dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^T \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt \mu(dx)$$

Théorème d'inversion II

La partie imaginaire de l'intégrand est impair, l'intégral est réel,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t(x-a)}{t} - \frac{\sin t(x-b)}{t} dt \mu(x)$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x-a) - \text{sign}(x-b) \mu(dx).$$

► La valeur de l'intégral est

$$\frac{1}{2}(\mu(\{a\}) + \mu(\{b\}) + \mu((a, b))).$$

Unicité de la fonction caractéristique

- ▶ Théorème d'unicité $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) \Leftrightarrow \phi_X(t) = \phi_Y(t)$
- ▶ \Rightarrow de la définition de la fonction caractéristique en termes de μ
- ▶ \Leftarrow du théorème d'inversion.

Théorème de continuité

- ▶ Soit μ, μ_1, μ_2, \dots des mesures boréliennes, $\phi, \phi_1, \phi_2, \dots$, leurs fonctions caractéristiques. Alors μ_n converge en loi à μ ssi $\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- ▶ Par la définition de convergence en loi et la continuité des fonctions $\cos xt$ et $\sin xt$ en x pour t donné, si μ_n converge en loi à μ , $\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
- ▶ L'autre direction est plus difficile.

Théorème centrale limite I

- Supposez que X_1, X_2, \dots , sont iid, avec moyenne 0, variance 1.
- Soit $Y_n = \sqrt{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. La fonction caractéristique de Y_n est

$$\phi_n(t) = \phi_X^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[1 + \frac{it}{\sqrt{n}}E[X_1] + \frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^2 E[X_1^2] + o(n^{-1})\right]^n$$

- Avec $E[X_1] = 0$, $E[X_1^2] = 1$,

$$\phi_n(t) = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right)^n.$$

$$\log \phi_n(t) = n \log \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right) = n \left(-\frac{1}{2} \frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right)$$

$$\log \phi_n(t) \rightarrow -\frac{t^2}{2}$$

$$\phi_n(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Théorème centrale limite II

- ▶ Si Y est une variable aléatoire $N(0, 1)$, sa fonction caractéristique est $\phi(t) = e^{-t^2/2}$.
- ▶ Puisque $\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$, $\mathcal{L}(Y_n) \Rightarrow \mathcal{L}(Y)$.

Devoirs et lectures

Devoirs, Rosenthal (matière du cours 7)

1. Exercise 11.5.7
2. Exercise 11.5.11
3. Exercise 11.5.15 (ajouter la distribution $\text{Ga}(\alpha, \beta)$, utilisez les fonctions caractéristiques et non le « hint »)
4. Exercise 11.5.16
5. Exercise 11.5.18

Préparation pour le cours 8

1. Lisez le chapitre 13 de Rosenthal
2. Exercices 13.4.1, 13.4.2, 13.4.5
3. Généralisez le théorème de variance totale (théorème 13.3.1) à un théorème de covariance totale (aléas X et Y , sous-tribu \mathcal{G})