# ECN 7060, Cours 7

William McCausland

2019-10-10

# Fonction caractéristique d'une loi $U(a, b)$

$$\phi(t) = E[e^{itX}] = E[\cos tX + i \sin tX] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \cos tx + i \sin tx \, dx$$

$$\phi(t) = \frac{1}{t(b-a)} \left[\sin tx - i \cos tx\right]_a^b = \frac{1}{it(b-a)} \left[\cos tx + i \sin tx\right]_a^b$$

$$\phi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

- Cas spécial, $a = -1$, $b = 1$ :

$$\phi(t) = \frac{\sin t}{t} \equiv \operatorname{sinc}(t).$$

# Fonction caractéristique d'une loi $N(0,1)$

- Puisque $\sin(tx)$ est impair, $e^{-x^2/2}$ est pair,

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \cdot e^{-x^2/2}\, dx$$

$$\phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\sin tx \cdot xe^{-x^2/2}\, dx$$

- Intégration par parties, $u = -\sin tx$, $dv = xe^{-x^2/2}\, dx$, $du = -t\cos tx$, $v = -e^{-x^2/2}$, donne

$$\phi'(t) = [uv]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t\cos tx \cdot e^{-x^2/2}\, dx = -t\phi(t).$$

- La solution de l'équation différentielle $\log\phi(0) = 0$, $\frac{d\log\phi(t)}{dt} = -t$ est $\log\phi(t) = \int_0^t -s\, ds = -t^2/2$.
- Alors $\phi(t) = e^{-t^2/2}$.

# Continuité de la fonction caractéristique

$$
\begin{aligned}
|\phi_x(t+h) - \phi_x(t)| &= \left| \int (e^{i(t+h)x} - e^{itx}) \mu(dx) \right| \\
&\leq \int \left| e^{i(t+h)x} - e^{itx} \right| \mu(dx).
\end{aligned}
$$

- Deux bornes qui ne dépend pas de $t$

$$
\left| e^{i(t+h)x} - e^{itx} \right| \leq h|x|, \qquad \left| e^{i(t+h)x} - e^{itx} \right| \leq 2.
$$

- Selon la deuxième, (convergence dominée)

$$
\lim_{h \downarrow 0} E\left[ \left| e^{i(t+h)x} - e^{itx} \right| \right] = E\left[ \lim_{h \downarrow 0} \left| e^{i(t+h)x} - e^{itx} \right| \right]
$$

- Selon la première,

$$
E\left[ \lim_{h \downarrow 0} \left| e^{i(t+h)x} - e^{itx} \right| \right] \to 0.
$$

# Dérivée de la fonction caractéristique

- Soit $X$ une variables aléatoire, $\phi(t)$ sa fonction caractéristique.
- Si $E[|X|^k] < \infty$, alors pour $0 \leq j \leq k$, $\phi^{(j)}(t) = E[(iX)^j e^{itX}]$.
- Preuve par induction :
  - $E[(iX)^0 e^{itX}] = E[e^{itX}] = \phi(t) = \phi^{(0)}(t)$, alors vrai pour $j = 0$.
  - Supposez que $\phi^{(j-1)} = E[(iX)^{j-1} e^{itX}]$.
  - $|(iX)^j e^{itX}| = |i|^j |X|^j |e^{itX}| = |X|^j$
  - $E[|X|^k] < \infty \Rightarrow E[|X|^j] < \infty$
  - $\phi^{(j)} = E\left[\frac{d}{dt}(iX)^{j-1} e^{itX}\right] = E[(iX)^j e^{itX}]$
- Génération des moments :

$$\phi^{(j)}(0) = i^j E[X^j]$$

# Propriétés de la fonction $(\sin\theta t)/t = \theta\mathrm{sinc}(\theta t)$

1. Pour $\theta = 0$, $(\sin\theta t)/t \equiv 0$.
2. Pour $\theta \neq 0$, $t = k\pi/\theta$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$,
$$\frac{\sin\theta t}{t} = 0.$$
3. Pour $\theta \neq 0$,
$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin\theta t}{t} = \frac{\lim_{t\to 0} \theta\cos\theta t}{\lim_{t\to 0} 1} = \theta$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sin\theta t}{t} = 0.$$
4. Pour $\theta \neq 0$, la fonction est paire :
$$\frac{\sin\theta(-t)}{-t} = \frac{\sin\theta t}{t}$$
5. Selon le livre,
$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\sin\theta t}{t}\, dt = \begin{cases} \pi & \theta > 0 \\ 0 & \theta = 0 \\ -\pi & \theta < 0 \end{cases}$$

# Théroème d'inversion I

- Soit $\mu$ une mesure borélienne, $\phi(t)$ sa fonction caractéristique. Alors si $a < b$ et $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$,

$$\mu([a,b]) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t)\, dt$$

- Puisque

$$\left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right| = \left| \int_a^b e^{itr}\, dr \right| < \infty$$

  l'intégral entre $-T$ et $T$ est fini.
- Par Fubini,

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mu(dx)\, dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it}\, dt\, \mu(dx).$$

# Théorème d'inversion II

La partie imaginaire de l'intégrand est impair, l'intégral est réel,

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t(x-a)}{t}-\frac{\sin t(x-b)}{t}\,dt\,\mu($$

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sign}(x-a)-\operatorname{sign}(x-b)\,\mu(dx).$$

- La valeur de l'intégral est

$$\frac{1}{2}(\mu(\{a\})+\mu(\{b\})+\mu((a,b)).$$

# Unicité de la fonction caractéristique

- Théorème d'unicité $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) \Leftrightarrow \phi_X(t) = \phi_Y(t)$
- $\Rightarrow$ de la définition de la fonction caractéristique en termes de $\mu$
- $\Leftarrow$ du théorème d'inversion.

# Théorème de continuité

- Soit $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ des mesures boréliennes, $\phi, \phi_1, \phi_2, \ldots,$ leurs fonctions caractéristiques. Alors $\mu_n$ converge en loi à $\mu$ ssi $\phi_n(t) \to \phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- Par la définition de convergence en loi et la continuité des fonctions $\cos xt$ et $\sin xt$ en $x$ pour $t$ donné, si $\mu_n$ converge en loi à $\mu$, $\phi_n(t) \to \phi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
- L'autre direction est plus difficile.

# Théorème centrale limite I

- Supposez que $X_1, X_2, \ldots,$ sont iid, avec moyenne 0, variance 1.
- Soit $Y_n = \sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. La fonction caractéristique de $Y_n$ est

$$\phi_n(t) = \phi_X^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[1 + \frac{it}{\sqrt{n}}E[X_1] + \frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^2 E[X_1^2] + o(n^{-1})\right]^n$$

- Avec $E[X_1] = 0$, $E[X_1^2] = 1$,

$$\phi_n(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right)^n.$$

$$\log \phi_n(t) = n \log\left(1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right) = n\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right)$$

$$\log \phi_n(t) \to -\frac{t^2}{2}$$

$$\phi_n(t) \to e^{-t^2/2}.$$

# Théorème centrale limite II

- Si $Y$ est une variable aléatoire $N(0,1)$, sa fonction caractéristique est $\phi(t) = e^{-t^2/2}$.
- Puisque $\phi_n(t) \to \phi(t)$, $\mathcal{L}(Y_n) \Rightarrow \mathcal{L}(Y)$.