ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers, Hiver 2023

Cours 1

William McCausland

2023-01-07

Plan

1. Introduction au cours
2. Les éléments de la note finale
3. Notation pour les rendements
4. Mélanges versus fonctions linéaires de variables aléatoires
5. La loi des espérances itérées
6. L'inégalité de Jensen
7. Démonstration de RStudio, si le temps le permet

Introduction

Marchés financiers

- Deux éléments très importants : le temps et l'incertitude
- Actifs : actions, obligations, options, contrats à terme, contrats d'assurance, prêts.
- Participants :
  - Ménages (épargne, dette—immobilier, éducation, etc.)
  - Firmes non-financières (financement des projets, gérance du risque)
  - Gouvernements (financement des dépenses et des transferts)
  - Firmes financières (création des contrats de nature financière, fourniture des marchés liquides)

Économétrie (sens large) des marchés financiers

- Modèles stochastiques (théoriques ou non) des prix, des rendements, des comptes et des durées.
- Inférence (tests, estimation, prévision)
- Valorisation par simulation

Les éléments de la note finale

1. Examen intra, le lundi 20 février : 40%
2. Quiz : 15% total
   a. Il y aura un nombre aléatoire de quiz. La probabilité d'un quiz est de 0.5, à chacune des dates suivantes.
   b. Dates avant l'examen intra : les 16, 23, 30 janvier; les 6, 13 février
   c. Dates après l'examen intra : les 6, 13, 20, 27 mars; le 3 avril.
3. Examen final, le lundi 24 avril : 45%

Documents au site web

Documents

1. Lectures et exercices, organisées par cours
   a. lectures préparatoires à faire avant le cours
   b. lectures associées aux cours
   c. exercices théoriques
2. Plan de cours
3. Diapos en pdf
4. Examens des années 2017, 2019, 2020, 2021, 2022.

Notes

- Chaque semaine, avant le cours, je mettrai à jour les deux premiers documents et ajouterai les diapos du cours actuel.
- Les lectures, les questions théoriques et les examens servent à préparer les examens.
- Le site web du cours

Attentes

1. Faites les lectures préparatoires avant le cours.
2. Essayez les exercices seuls, puis discutez-en parmi vous, puis demandez de l'aide.
3. Le contenu du cours comprend les lectures.

Notation pour les rendements en temps discret

- Soit P_t le prix d'un actif à t, $t = 1, \ldots, T$.
- Soit $p_t = \log P_t$. (logarithme naturel)
- Unités habituelles : P_t en dollars, t en jours, mois ou ans
- Rendements simples nets et bruts, log rendements :

$$R_t \equiv \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad 1{+}R_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}, \quad r_t \equiv \log(1{+}R_t) = p_t{-}p_{t-1}.$$

- Notes :
  - Les trois rendements ne dépendent pas de l'unité de valeur.
  - L'unité de mesure d'un rendement annuel (par exemple) est $1/a$.
  - L'indice t indique souvent le moment où la quantité est connue.
  - Les rendements sont plus “stationnaires” que les prix et plus comparables.

Rendements des portfeuilles

- Les prix de n actifs à t : $P_{1t}, \ldots, P_{nt}$
- Un portefeuille à $t-1$ comprend ω_i dollars (ou $\omega_i/P_{i,t-1}$ unités) de l'actif i.
- Normalisation : $\sum_i \omega_i = 1$.
- Prix du portfeuille à $t-1$:

$$P_{p,t-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{P_{i,t-1}} P_{i,t-1} = 1$$

- Prix (et rendement brut) du portfeuille à t :

$$1+R_{pt} = \frac{P_{pt}}{P_{p,t-1}} = P_{pt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i P_{it}}{P_{i,t-1}} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(1+R_{it}) = 1+\sum_{i=1}^{n} \omega_i R_{it}.$$

- Rendement net : $R_{pt} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_{it}$.
- La linéarité des rendements simples (et non des log rendements) donne l'avantage à ceux-là.

Fonctions linéaires des v.a. vs mélanges, exemple 1

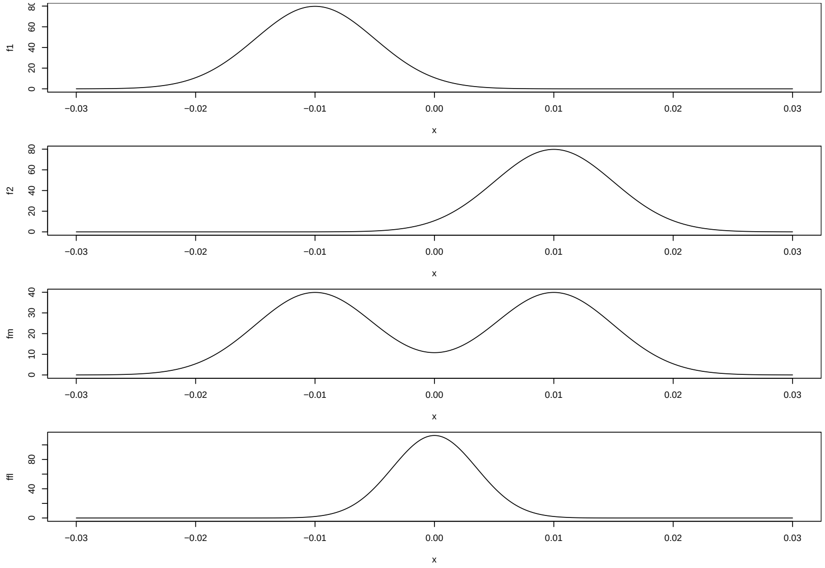
```
# Valeurs de x sur une grille
x = seq(-0.03, 0.03, length.out=1000)

# Densité de la variable aléatoire X_1 sur la grille
f1 = dnorm(x, -0.01, 0.005)
# Densité de la variable aléatoire X_2
f2 = dnorm(x,  0.01, 0.005)

# Densité du mélange avec poids 1/2, 1/2
fm = 0.5 * f1 + 0.5 * f2

# Densité de (X_1 + X_2)/2
ffl = dnorm(x, 0, sqrt(0.5*0.005^2))
```

Graphiques, exemple 1



Fonctions linéaires des v.a. vs mélanges, exemple 2

Éléments communs

- Il y a 3 actifs, avec rendements nets $R_t \equiv (R_{1t}, R_{2t}, R_{3t})$.
- Mettons que $R_t \sim N(\mu_t, \Sigma_t)$, où

$$\mu_t = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_t = \begin{bmatrix} (0.10)^2 & 0.012 & 0 \\ 0.012 & (0.15)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (0.05)^2 \end{bmatrix}.$$

Deux placements (seul le premier est réaliste)

1. Placer 100 \$ en proportions $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0.5, 0.2, 0.3)$
   - C.-à-d. placer 50 \$ en l'actif 1, 20 \$ en l'actif 2, etc.
   - Le rendement est une v.a. qui est une fonction linéaire de 3 v.a.
2. Placer 100 \$ en actif 1, 2 ou 3 avec probabilités 0.5, 0.2, 0.3.
   - C.-à-d. placer 100 \$ en l'actif 1 avec probabilité 0.5, 100 \$ en l'actif 2 avec probabilité 0.2, etc.
   - Le rendement a une loi qui est un mélange discret de trois lois.

Fonctions linéaires de variables aléatoires

Mettons que

- $R_t = (R_{1t}, \ldots, R_{nt})$, un vecteur de rendements,
- $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, un vecteur de poids de portefeuille,
- $R_t \sim (\mu_t, \Sigma_t)$ et
- ω n'est pas aléatoire.

Alors

- $R_{pt} = \omega^\top R_t$ est le rendement du portfeuille.
- $E[R_{pt}] = \omega^\top \mu_t$ et $\mathrm{Var}[R_{pt}] = \omega^\top \Sigma_t \omega$.
- Si R_t est gaussien multivarié, $R_{pt} \sim N(\omega^\top \mu_t, \omega^\top \Sigma_t \omega)$.

Mélanges de variables aléatoires

Exemple : mélange de deux v.a. gaussiennes

- Mettons que (μ, σ^2) égale (μ_1, σ_1^2) avec probabilité π et (μ_2, σ_2^2) avec probabilité $(1 - \pi)$.
- (μ, σ) est aléatoire, (μ_1, σ_1), (μ_2, σ_2) et π ne le sont pas.
- Mettons que $R|(\mu, \sigma) \sim N(\mu, \sigma^2)$. (Une loi *conditionnelle*.)
- La loi *marginale* de R est un mélange de deux lois gaussiennes.
- La densité de R est

$$f(x) = \pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] + (1-\pi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right.$$

Un mélange plus général

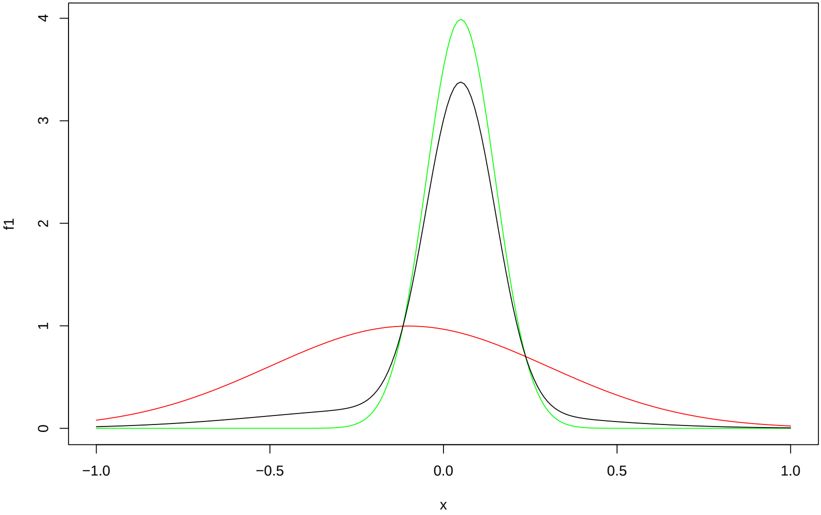
- Si la densité conditionnelle de X sachant θ est $f(x|\theta)$ et la densité de θ est $f(\theta)$, alors la densité marginale de X, $f(x) = \int f(x|\theta) f(\theta)\, d\theta$, est un mélange.

Code R pour un mélange de deux v.a. gaussiennes

```
mu1 = 0.05; sigma1 = 0.1
mu2 = -0.10; sigma2 = 0.4
pi = 0.8
x = seq(-1, 1, by=0.01)
f1 = dnorm(x, mu1, sigma1)
f2 = dnorm(x, mu2, sigma2)
fmelange = pi * f1 + (1-pi) * f2
```

Code R pour afficher les densités

```
plot(x, f1, col='green', 'l')
lines(x, f2, col='red')
lines(x, fmelange, col='black')
```



La loi des espérances itérées

Deux versions de la loi des espérances itérées

- Version inconditionnelle : pour variables aléatoires X et Y,

$$E[Y] = E[E[Y|X]].$$

- Version conditionnelle : pour variables aléatoires X, Y et Z,

$$E[Y|Z] = E[E[Y|X, Z]|Z].$$

Un exemple temporel

$$E[R_{t+2}|R_t] = E[E[R_{t+2}|R_{t+1}, R_t]|R_t].$$

Application I: théorème de la variance total

- Le théorème de la variance totale : pour v.a. X et Y,

$$\mathrm{Var}[Y] = E[\mathrm{Var}[Y|X]] + \mathrm{Var}[E[Y|X]]$$

- Preuve
- Exemple 1 : Y est le rendement d'une action, X indique l'industrie ($X = 1$ pour la construction, $X = 2$ pour le tourisme, $X = 3$ pour les mines, ...).
- Exemple 2 : Y est le rendement d'un actif, X est une mesure observable de la volatilité de l'actif.
  - Conditionner réduit la variance en moyenne car le deuxième terme à droite est non-négatif.
  - Attention : il peut y avoir des valeurs de X telles que $\mathrm{Var}[Y] < \mathrm{Var}[Y|X]$.

Application II: mélange de deux aléas gaussiens

Description du mélange (rappel)

- (μ, σ^2) égale (μ_1, σ_1^2) avec probabilité π et (μ_2, σ_2^2) avec probabilité $(1 - \pi)$.
- $R|(\mu, \sigma) \sim N(\mu, \sigma^2)$

Calcul de quelques moments

$$E[R] = E[E[R|\mu, \sigma^2]] = \pi\mu_1 + (1 - \pi)\mu_2$$

$$E[R^2] = E[E[R^2|\mu, \sigma^2]] = \pi(\mu_1^2 + \sigma_1^2) + (1 - \pi)(\mu_2^2 + \sigma_2^2)$$

$$\mathrm{Var}[R] = E[R^2] - E[R]^2$$

ou

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[R] &= E[Var[R|\mu, \sigma^2]] + \mathrm{Var}[E[R|\mu, \sigma^2]] \\ &= [\pi\sigma_1^2 + (1 - \pi)\sigma_2^2] + [\pi\mu_1^2 + (1 - \pi)\mu_2^2 - (\pi\mu_1 + (1 - \pi)\mu_2)^2]\end{aligned}$$

L'inégalité de Jensen

- Soit $\varphi(x)$ une fonction convexe, X une variable aléatoire.
- L'inégalité de Jensen : $\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$
- Application 1 : aversion pour le risque
  - $\varphi(x) = -u(x)$, où $u(x)$ est une fonction d'utilité concave
  - Soit W la richesse (connue) en période t.
  - Soit $(1 + R_{t+1})$ le rendement brut (inconnu) d'un actif en période $t + 1$.
  - Alors $X = W(1 + R_{t+1})$ et la richesse après une période si toute la richesse est placée en l'actif.
  - Une conséquence de l'inégalité de Jensen :

$$u(E[W(1 + R_{t+1})]) \geq E[u(W(1 + R_{t+1}))].$$

  - Cela implique une préférence pour la valeur sure $E[W(1 + R_{t+1})]$ à la richesse aléatoire $W(1 + R_{t+1})$.

L'inégalité de Jensen, cont.

- Application 2 : aplatissement K_z d'une v.a. $Z \sim (\mu, \sigma^2)$
  - K_z mesure l'épaisseur des ailes de la densité de Z.
  - $K_z \equiv E[(Z-\mu)^4]/E[(Z-\mu)^2]^2 = E[(Z-\mu)^4]/\sigma^4$.
  - $\varphi(x) = x^2$, $X = (Z-\mu)^2$ donne $E[(Z-\mu)^4] \geq E[(Z-\mu)^2]^2$, $K_z \geq 1$.
  - Si Z est gaussienne, $K_z = 3$.
- Application 3 : aplatissement d'un mélange-échelle de v.a. gaussiennes
  - Supposons que $Z = \sigma\epsilon$, où $\epsilon \sim N(0,1)$ et σ et ϵ sont aléatoires et indépendents.
  - Par la loi des espérances itérées,

$$E[Z^4] = E[E[Z^4|\sigma^2]] = E[3\sigma^4] = 3E[\sigma^4].$$

  - $\varphi(x) = x^2$, $X = \sigma^2$ donne $E[\sigma^4] \geq E[\sigma^2]^2$ et alors $K_z \geq 3$.

Cours 2, la semaine prochaine

Plan préliminaire

1. Log rendements et rendements multi-période
2. Asymétrie et aplatissement
3. Autocorrélation
4. Faits empiriques
5. Modèles ARMA(p,q) de base