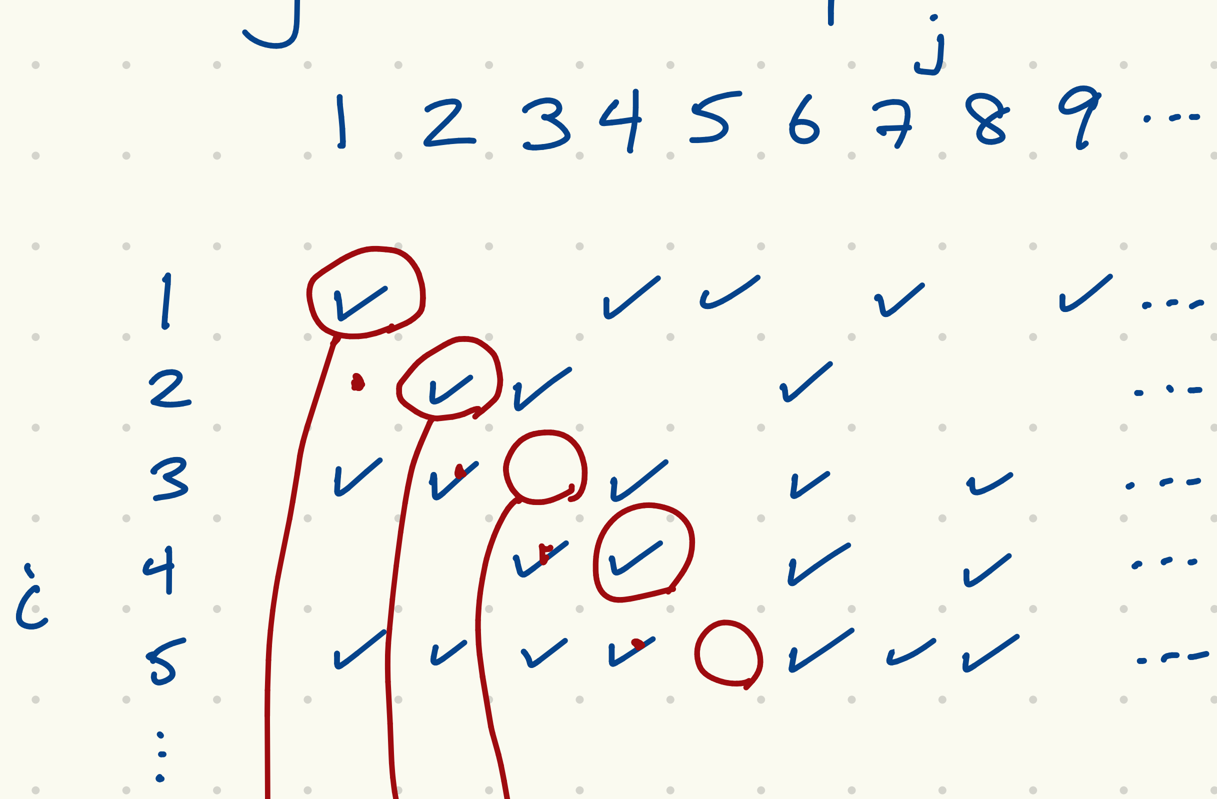
# Diagonalisation - parties de $\mathbb{N}$




liste présumée des parties de $\mathbb{N}$

~~① permutations~~

→ ② $[0,1)$ $\left( x_i = \sum_{j \in S_i} 2^{-j} \right)$

→ ③ fonctions $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$

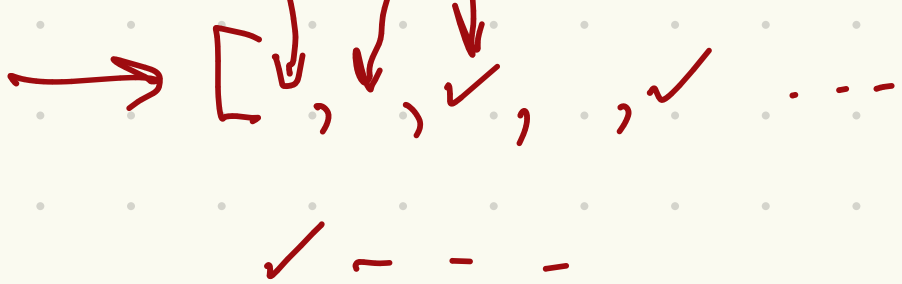
→ ④ Suites infinies de tirages de P ou F.

✓ à $(i,j)$ ssi $j \in S_i$

$S_i$ est la i-ième partie de la liste

Construction d'une partie de $\mathbb{N}$ qui ne figure pas dans la liste

etc.



Une liste de parties de $\mathbb{N}$    ✓ $\Leftrightarrow$ appartenance

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | |
| 1 | ✓ | | | | | | | | | |
| 2 | | ✓ | | | | | | | | |
| 3 | ✓ | ✓ | | | | | | | | |
| 4 | | | ✓ | | | | | | | |
| 5 | ✓ | | ✓ | | | | | | | |
| 6 | | ✓ | ✓ | | | | | | | |
| 7 | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | | |
| 8 | | | | ✓ | | | | | | |
| 9 | ✓ | | | ✓ | | | | | | |
| 10 | | ✓ | | ✓ | | | | | | |
| 11 | ✓ | ✓ | | ✓ | | | | | | |
| 12 | | | ✓ | ✓ | | | | | | |
| 13 | ✓ | | ✓ | ✓ | | | | | | |
| 14 | | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | |
| 15 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | |
| 16 | | | | | ✓ | | | | | |
| | ✓ | | | | ✓ | | | | | |

} parties de $\{1\}$

} parties de $\{1,2\}$

} parties de $\{1,2,3\}$

# Propriétés bizarre de $\mathbb{Q}$

(selon $U(0,1)$, $Pr([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$, $Pr([0,1]) = 1$)

## 1) Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

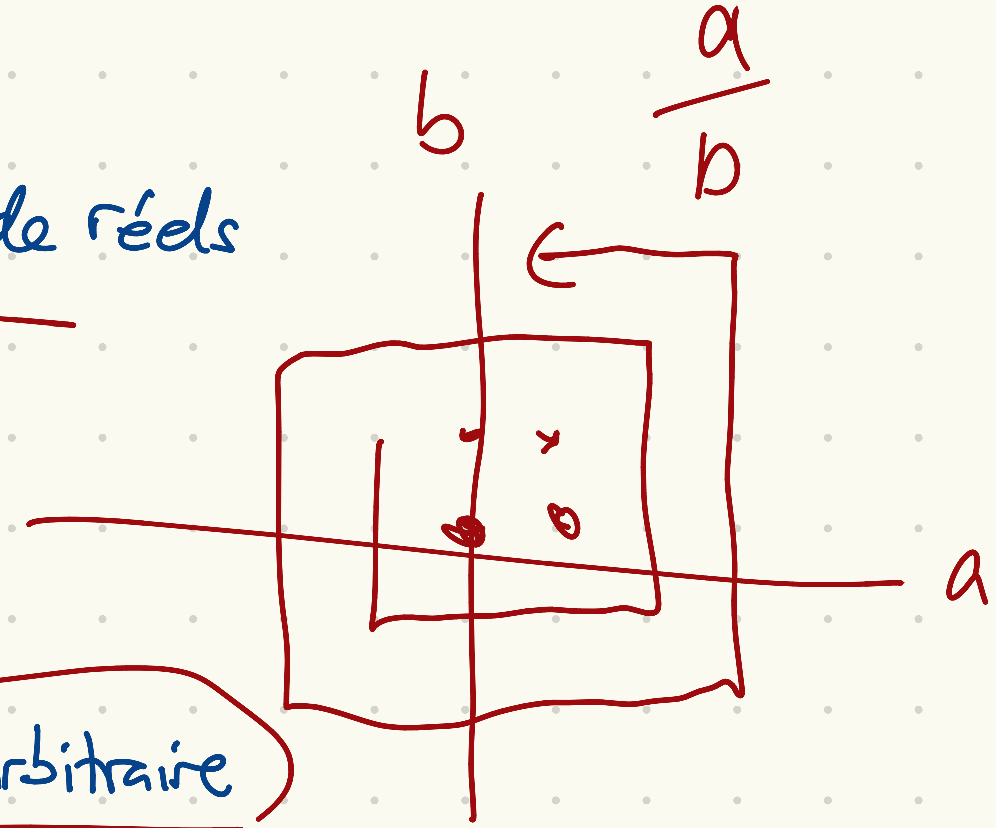
$0.3\,5\,1\,4\,6\,3\,6\,1\,4\,4\,1\,5\,1\,6\,5\,3\,5$ $\quad r_1 \in [0,1)$

$0.3\,5\,1\,4\,6\,3\,6\,1\,4\,4\,2\,1\,2\,9\,7\,8\,3$ $\quad r_2 \in [0,1)$

$0.3\,5\,1\,4\,6\,3\,6\,1\,4\,4\,1\,7$ $\quad q \in (r_1, r_2)$

→ Entre $r_1$ et $r_2$, un nombre dénombrable de rationnels.

→ Entre $q_1$ et $q_2$ $\quad q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ $\quad q_1 \neq q_2$, un nombre indénombrable de réels




## 2) On ne peut pas mettre les rationnels en ordre

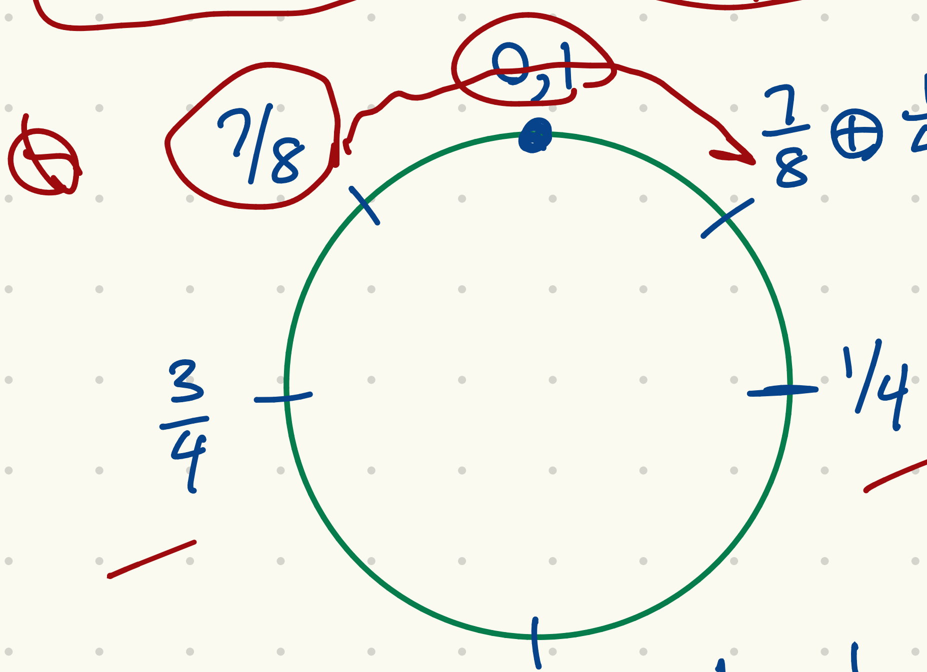
Importance de $\mathbb{Q}$ : suites de nombres qui converge vers un nombre réel arbitraire

Échec d'une preuve fausse que $\mathbb{Q}$ est indénombrable

| | |
|---|---|
| 1 | $0.1\,2\,3$ |
| 2 | $0.3\,5\,5\,3\,5\,5\,3\,5\,5 \ldots$ |
| 3 | $0.2\,4\,6\,0\,0 \ldots$ |
| 4 | $0.1\,9\,1\,9\,1\,9 \ldots$ |

Construction : $0.2670\ldots$

Signification de $x \oplus y$




$\frac{7}{8} \oplus \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \frac{7}{8} + \frac{1}{4} - 1$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \oplus \frac{1}{4}$

→ Pourquoi pas une loi uniforme $[0,\infty) = \mathbb{R}_+$ ? $\to \Omega$.

$$\mathbb{R}_+ = \bigcup_{i=0}^{\infty} [i, i+1)$$

besoin de $P([i,i+1)) = P([j,j+1))$ $i,j = 0,1,\dots$

et $\sum_{i=0}^{\infty} P([i,i+1)) = 1.$

Pourquoi pas une loi uniforme $[0,1)$ avec $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ ?

partionner $[0,1)$ en un nombre dénombrable de parties équivalentes

Preuve: 4

→ 1 $\bigcup_{r \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} H \oplus r \subseteq [0,1)$

stabilité de $[0,1)$ par $\oplus$

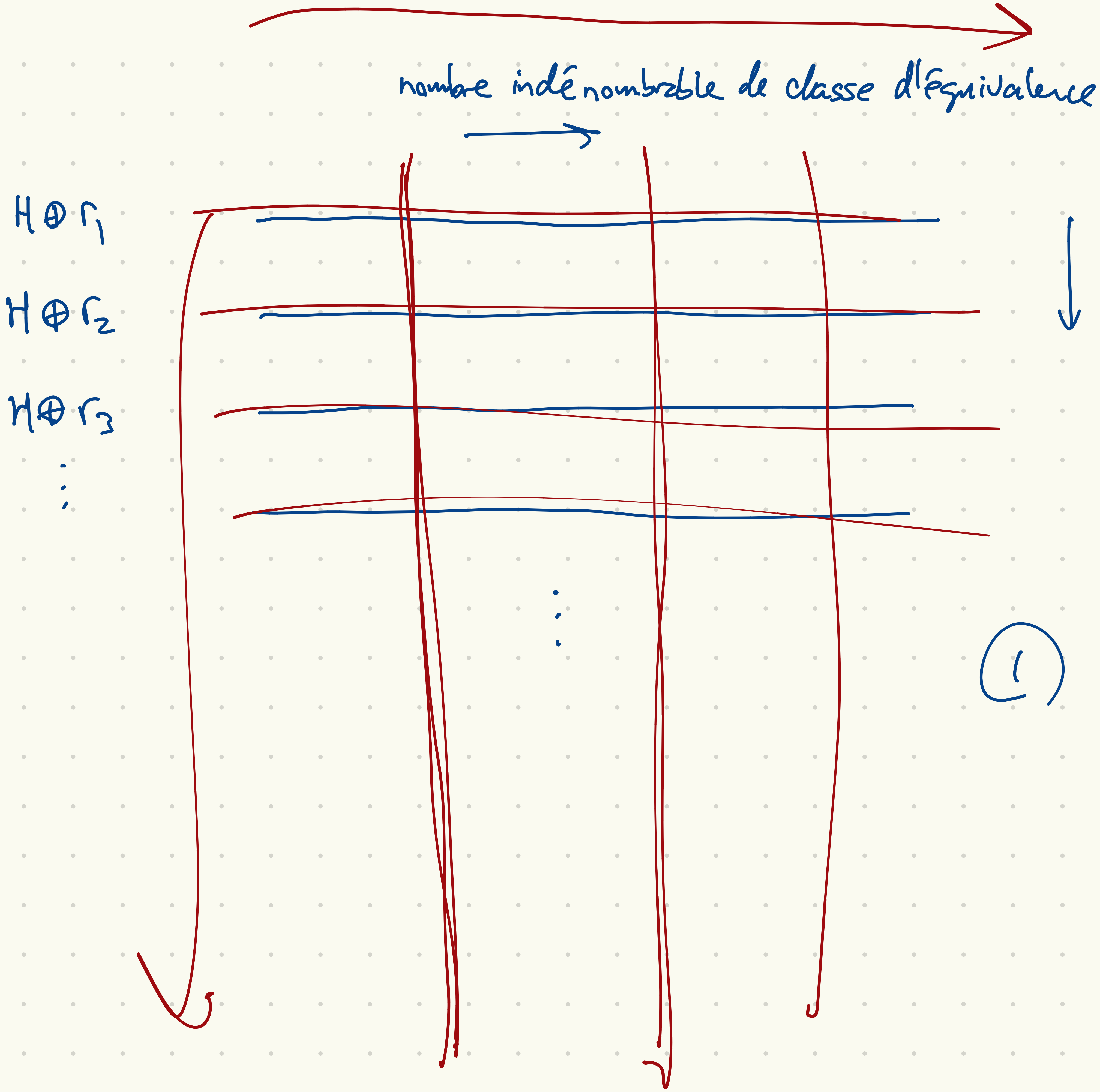
→ 2 $\omega \in [0,1) \Rightarrow \omega \in \bigcup_{r \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} H \oplus r$

→ H contient un élément "h" de la classe qui contient $\omega$

Il y a un $r \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ tel que $h \oplus q = \omega$

→ 3 $\omega \in H \oplus r_1$ et $\omega \in H \oplus r_2$ $r_1 \neq r_2$ est impossible

$\omega = h_1 \oplus r_1 = h_2 \oplus r_2 \Rightarrow h_1 \sim h_2,\ h_1 \neq h_2$




nombre dénombrable d'éléments dans chaque classe d'équivalence

(1) $H \subseteq [$

4 "probabilités" sur $(\Omega, 2^{\Omega})$

où $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | 0.2 | 0 | 0 | 0 |
| $\{\omega_1\}$ | 2.0 | 0.6 | 0.01 | 0.99 |
| $\{\omega_2\}$ | −1 | 0.5 | 0.99 | 0.01 |
| $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ | 0 | 1 | 1 | 1 |

jugements incohérents

pas une vraie probabilité

jugements incohérents (plus subtile)

pas une vraie probabilité.

Deux vraies probabilités (mais peu judicieuses pour l'application où $\{\omega_1\}$ est l'événement où le PLC gagne les prochaines élections fédérales)