

# Efficacité, Jeux, Équilibre

ECN 6013, automne 2019

William McCausland

2019-09-15

## Allocations et efficacité à la Pareto, un exemple

- ▶ Trois agents (acteurs économiques): 1, 2 et 3.
- ▶ Cinq allocations (résultats) faisables :  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$ .
- ▶ Exemples des allocations ou des résultats :
  - ▶ Parti politique au pouvoir ( $A$  est le PLC,  $B$  est le PCC, ...)
  - ▶ Politiques sur le cannabis ( $A$  est "légalité totale", ...,  $E$  est "interdiction sans exception")
  - ▶ Allocations parmi les agents de 10 pommes et 10 oranges.  $A$  est une allocation (5, 3, 2) des pommes, (2, 4, 4) des oranges;  $B$ , ...
- ▶ Préférences des agents :

Résultat	$U_1$	$U_2$	$U_3$
$A$	25	50	25
$B$	20	25	60
$C$	25	50	50
$D$	10	15	70
$E$	5	10	60

# Efficacité à la Pareto

- ▶ Une allocation (ou un résultat) est préférable à une autre allocation dans le sens de Pareto si tous les agents préfèrent le premier ou sont indifférents entre les deux.
- ▶ Si au moins un agent préfère strictement le premier, il est strictement préférable dans le sens de Pareto.
- ▶ Un résultat est efficace dans le sens de Pareto s'il n'y a pas de résultat alternatif faisable qui est strictement préférable dans le sens de Pareto.
- ▶ Notes:
  - ▶ L'efficacité est relative à l'ensemble des résultats faisables.
  - ▶ La préférence dans le sens de Pareto est transitive mais incomplète: il n'y a pas toujours un ordre.
  - ▶ Un résultat peut être efficace mais très injuste.
  - ▶ On n'a pas parlé des actions des agents, de leur optimisation, de l'équilibre. On n'a pas besoin pour parler de l'efficacité.
  - ▶ Concepts dérivés : équilibre efficace? prix efficace? quantité de pollution efficace?

# Conditions suffisantes pour l'inefficacité, l'efficacité

Démontrer qu'un résultat est inefficace est souvent simple :

- Trouver un autre résultat qui le domine.

Deux conditions suffisantes pour l'efficacité d'un résultat :

1. Le résultat maximise une somme pondérée de l'utilité des agents, où tous les poids sont positifs.
2. Le résultat en question est strictement préféré à tous les autres résultats faisables par au moins un agent.

## Exemple, allocation d'un gâteau

- ▶ Trois agents : 1, 2 et 3.
- ▶ Le résultat est l'allocation d'un gâteau :  $(x_1, x_2, x_3)$  tel que  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ .
- ▶ L'utilité de  $i$  est une fonction seulement de  $x_i$ , et la fonction est croissante.
- ▶ Une proposition fausse : tous agents préfèrent toujours un résultat efficace à un résultat inefficace. Agents 1 et 2 préfèrent  $(0.4, 0.4, 0.1)$  à  $(0.3, 0.3, 0.4)$ .
- ▶ Une autre proposition fausse : un résultat  $x$  préférable au résultat  $y$  dans le sens de Pareto est efficace. Soit  $x = (0.3, 0.3, 0.3), y = (0.2, 0.2, 0.2)$ .

## Le dilemme des prisonniers

Un jeu de deux personnes (dilemme des prisonniers):

$(U_1, U_2)$	$C$	$D$
$C$	$(1, 1)$	$(-1, 3)$
$D$	$(2, -2)$	$(0, 0)$

Une interprétation où les agents sont un vendeur (1) et un acheteur (2) d'un objet :

- ▶ L'objet vaut 1 au vendeur, 3 à l'acheteur.
- ▶ Ils négocient un prix de 2.
- ▶ Pour le vendeur,  $C$  (coopérer, cooperate) veut dire envoyer l'objet par la poste,  $D$  (défecter, defect) veut dire le garder.
- ▶ Pour l'acheteur,  $C$  veut dire envoyer les 2 dollars;  $D$ , les garder.

# Équilibre en stratégies dominantes

- ▶ Une *stratégie dominante* d'un joueur est une stratégie qui maximise l'utilité du joueur, pour chaque stratégie de l'autre.
- ▶ Dans le dilemme des prisonniers,
  - ▶ la stratégie  $S_1^* = D$  est dominante pour le joueur ligne,
  - ▶  $S_2^* = D$  est dominante pour le joueur colonne.
- ▶ Un *équilibre en stratégies dominantes* est un profil de stratégies où la stratégie de chaque joueur est dominante.
- ▶ Ici,  $S^* = (S_1^*, S_2^*) = (D, D)$  est l'équilibre unique en stratégies dominantes.
- ▶ Il est remarquable que le résultat  $(0, 0)$  en équilibre n'est pas efficace.
- ▶ Remarquez le rôle des externalités.

# Équilibre de Nash

- Un jeu de coordination:

$(U_1, U_2)$	$L$	$R$
$U$	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$D$	$(0, 0)$	$(1, 1)$

- Pas d'équilibre en stratégies dominantes.
- Les conditions pour un équilibre de Nash sont moins contraignantes.
- La stratégie  $S_1$  est une *meilleure réponse* à la stratégie  $S_2$  si elle donne l'utilité optimale quand joueur 2 joue  $S_2$ .
- Un profil  $S^* = (S_1^*, S_2^*)$  est un *équilibre de Nash* si  $S_1^*$  est la meilleure réponse à  $S_2^*$  et  $S_2^*$  est la meilleure réponse à  $S_1^*$ .
- Ici,  $(U, L)$  et  $(D, R)$  sont des équilibres de Nash.
- Un équilibre en stratégies dominantes est-il toujours un équilibre de Nash?



## Plus sur le jeu de coordination

Exemples de coordination à plusieurs joueurs:

- ▶ Conduire à droite (ou à gauche)
- ▶ Rues sens uniques
- ▶ Pistes cyclables
- ▶ Adoption d'un standard, l'internet des objets.

Un jeu « Bach ou Stravinsky » :

$(U_1, U_2)$	$L$	$R$
$U$	$(1, 2)$	$(0, 0)$
$D$	$(0, 0)$	$(2, 1)$

- ▶ Encore,  $(U, L)$  et  $(D, R)$  sont des équilibres de Nash, mais les deux joueurs ne sont pas indifférents entre les deux.

## Le jeu Faucon-Colombe (Hawk-Dove, Chicken)

$(U_1, U_2)$	$L$	$R$
$U$	$(0, 0)$	$(-1, 1)$
$D$	$(1, -1)$	$(-10, -10)$

- Conflit sur une ressource
- Développer une nouvelle technologie
- Jeu de Chicken

## Une façon d'éviter un dilemme des prisonniers

- ▶ Mettons qu'on peut s'engager à collaborer dans ce jeu.
- ▶ Par exemple, écrire un contrat enforceé par une tierce partie qui oblige un joueur à payer 5 dollars à l'autre s'il joue  $D$ .
- ▶ Le jeu devient

$(U_1, U_2)$	$C$	$D$
$C$	$(1, 1)$	$(4, -2)$
$D$	$(-3, 3)$	$(0, 0)$

- ▶ On a un équilibre en stratégies dominantes,  $(C, C)$ , un meilleur résultat pour les deux prisonniers.
- ▶ Un changement d'utilité à  $(C, D)$  et à  $(D, C)$  entraîne un changement d'équilibre, même si on n'observe pas ces profils en équilibre des deux jeux.

# Le dilemme des prisonniers avec $n$ joueurs

- ▶ Un jeu avec  $n \geq 2$  joueurs est un dilemme des prisonniers si chaque joueur a une seule stratégie dominante et l'équilibre en stratégies dominantes est inefficace.
- ▶ Catégories d'exemples :
  - ▶ cartels
  - ▶ tragédie des biens communs
    - ▶ Le coût social de l'action dominante est plus grand que le coût individuel.
    - ▶ Le niveau de la consommation ou de l'exploitation est plus élevé que le niveau efficace.
  - ▶ biens publiques
    - ▶ Le bénéfice social des actions qui mènent à un résultat efficace est plus grand que le bénéfice individuel.
    - ▶ Le niveau de production est moins élevé que le niveau efficace.
- ▶ Il y a des cas semblables où il n'y a pas de stratégies dominantes mais un équilibre de Nash unique est inefficace.

## Exemple, cartel

- ▶ Trois producteurs d'un bien : 1, 2, 3
- ▶ Le niveau de production est haut ( $y_i = 200$ ) ou bas ( $y_i = 100$ ) pour chacun et le coût est zéro pour les trois.
- ▶ Fonction de demande inverse :  $p(Y) = 8 - \frac{1}{100} Y$ , où  $Y = y_1 + y_2 + y_3$ .
- ▶ Jeu simultané, pas répété
- ▶ Résultats:

$y_1$	$y_2$	$y_3$	$Y$	$p(Y)$	$y_1 p(Y)$	$y_2 p(Y)$	$y_3 p(Y)$
100	100	100	300	5	500	500	500
100	100	200	400	4	400	400	800
100	200	200	500	3	300	600	600
200	200	200	600	2	400	400	400

# Une classification utile

Bien privé, excluable et rival

- ▶ voiture, vêtements, nourriture

Bien club, excluable et non-rival

- ▶ cinéma, parcs privés, télévision par satellite

Bien commun, non-excluable et rival

- ▶ morue, eau souterraine

Bien publique, non-excluable et non-rival

- ▶ défense nationale

# Tragédie des biens communs

Exemples des tragédies des biens communs :

- ▶ Deux enfants : 2 tasses, 1 paille vs. 1 tasse, 2 pailles
- ▶ Surexploitation des océans : la morue au Québec
- ▶ Pétrol ou eau souterraine : Irak et Koweït
- ▶ Pollution de l'air, de l'eau
- ▶ Congestion routière
- ▶ Antibiotiques

Comment éviter ou réduire les tragédies des biens communs

- ▶ Clôtures barbelées
- ▶ Normes locales (homard, nouvelle angleterre)
- ▶ Attribution ou ventes des droits d'exploitation: spectrum électromagnétique, plafonnement et échange (cap and trade)
- ▶ Taxes pigoviennes, e.g. taxe de carbone
- ▶ Règlements (nationaux, internationaux)

# Biens publics

Biens publics (non-excluable, non-rival)

- ▶ Exemples: phares, éclairage des rues, connaissance scientifique
- ▶ Problème de passager clandestin (free rider problem)

Une expérience :

- ▶  $n > 2$  participants, dotation de 1 (dollar).
- ▶ Chaque participant  $i$  contribue  $x_i$ , garde  $1 - x_i$ .
- ▶ Tous gagnent  $0.5 \sum_i x_i$ , 0.50\$ pour chaque \$ contribué.
- ▶ Bénéfice marginal privé de contribuer un dollar : 0.5.
- ▶ Bénéfice marginal sociale:  $0.5n$ .

Comment encourager la production des biens publics :

- ▶ Normes
- ▶ Technologie d'exclusion (télévision par satellite)
- ▶ Provision ou subvention par un gouvernement (l'armée)
- ▶ Exclusion imposée par un gouvernement (droits d'auteur)
- ▶ **Contrat** pour s'engager à contribuer si un quorum a lieu



# Un modèle de biens publics : spécification

- ▶ Le modèle est décrit dans le chapitre 8 de ML.
- ▶ Un parc donne une valeur  $S^b n^{-a}$  (en dollars) à chacun des  $n$  ménages dans une communauté.
- ▶  $S = s_1 + s_2 + \dots + s_n$  est la contribution totale en dollars.
- ▶  $s_i$  est la contribution du ménage  $i$ .
- ▶  $0 < a < b < 1$ , qui implique
  - ▶ le parc est un bien, pas un mal ( $b > 0$ ),
  - ▶ une valeur marginal décroissante ( $b < 1$ ),
  - ▶ un coût de congestion ( $a > 0$ ),
  - ▶ un grand parc pour  $n$  est meilleur que  $n$  petits privés ( $b > a$ ).

# Un modèle de biens publics : optimalité individuelle

- ▶ Rappel : la valeur à chaque ménage est de  $S^b n^{-a}$ .
- ▶ Un ménage  $i$  choisit  $s_i \geq 0$  pour maximiser sa valeur privée :

$$(S_{-i} + s_i)^b n^{-a} - s_i.$$

- ▶ La valeur marginale privée de la contribution  $s_i$  est de  $b(S_{-i} + s_i)^{b-1} n^{-a} - 1$ , qui est positive ssi  $S_{-i} + s_i < (bn^{-a})^{1/(1-b)}$ .
- ▶ Alors si  $S_{-i} < (bn^{-a})^{1/(1-b)}$ , la meilleur réponse est de contribuer la différence :  $s_i^* = (bn^{-a})^{1/(1-b)} - S_{-i}$ .
- ▶ la valeur marginale sociale est de  $b(S_{-i} + s_i)^{b-1} n^{1-a} - 1$ , qui est plus grande.

# Un modèle de biens publics : équilibre

- ▶ Il y a plusieurs équilibres avec contributions facultatives.
- ▶ En équilibre,
  - ▶  $S = S_{eq} \equiv (bn^{-a})^{1/(1-b)}$ ,
  - ▶ la valeur au ménage  $i$  est de

$$(bn^{-a})^{b/(1-b)} n^{-a} - s_i^* = b^{b/(1-b)} n^{-a/(1-b)} - s_i^*.$$

- ▶ la valeur totale est de

$$\begin{aligned} V_{eq} &= b^{b/(1-b)} n^{1-a/(1-b)} - (bn^{-a})^{1/(1-b)} \\ &= b^{b/(1-b)} n^{-a/(1-b)} (n - b). \end{aligned}$$

# Un modèle de biens publics : valeur agrégée optimale

- ▶ La valeur agrégée comme fonction de  $S$  :

$$S^b n^{-a} \cdot n - S = S^b n^{1-a} - S.$$

- ▶ On considère ici le problème du planificateur social, pour trouver une allocation efficace.
- ▶ Condition nécessaire de 1<sup>ère</sup> ordre pour un max intérieure:

$$bS^{b-1}n^{1-a} - 1 = 0.$$

- ▶ La valeur est concave, on maximise la valeur agrégée avec

$$S_o \equiv (bn^{1-a})^{1/(1-b)} > S_{eq} = (bn^{-a})^{1/(1-b)}.$$

- ▶ La valeur agrégée maximale est de

$$\begin{aligned} V_o &= (bn^{1-a})^{b/(1-b)} n^{1-a} - (bn^{1-a})^{1/(1-b)} \\ &= b^{b/(1-b)} n^{(1-a)/(1-b)} (1-b). \end{aligned}$$

# Comparaison

Contribution totale plus élevée dans les allocations optimales:

$$S_o = (bn^{1-a})^{1/(1-b)} > (bn^{-a})^{1/(1-b)} = S_e.$$

Valeur totale plus élevée dans les allocations optimales:

$$\frac{V_o}{V_e} = \frac{n^{(1-a)/(1-b)}(1-b)}{n^{-a/(1-b)}(n-b)} = \frac{1-b}{n-b} n^{1/(1-b)} > 1.$$

## Notes

- ▶ L'allocation optimale symétrique supérieure (dans le sens de Pareto) que l'allocation optimale en équilibre symétrique.
- ▶ Comment démontrer que d'autres équilibres sont inefficaces dans le sens de Pareto?

# Collectivisation agricole: un contrat à Xiaogang

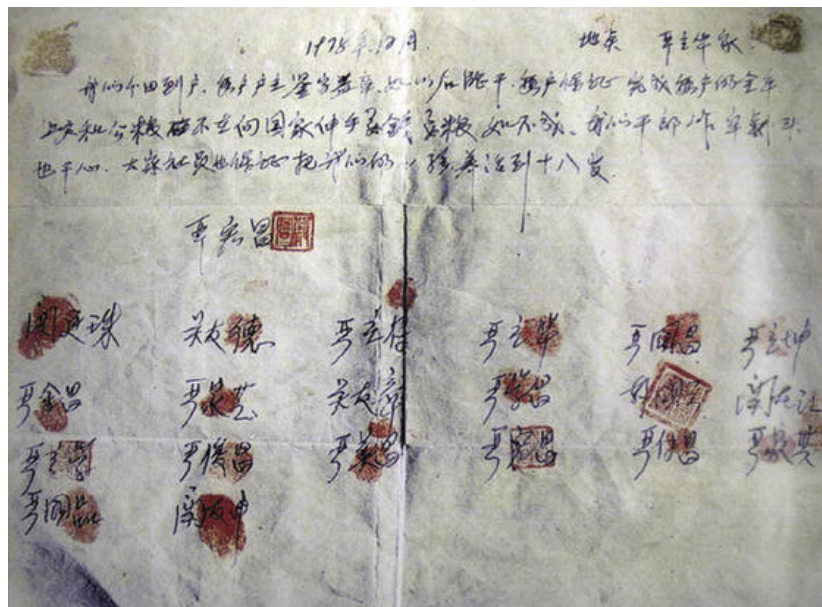
- ▶ « Grand bond en avant » : Chine, 1958-1960
- ▶ Collectivisation agricole : quotas; terrain, outils et bétail communs; partage de l'excédent, coercition
- ▶ Grande famine de Chine : 1958-1962, 15-38 millions de morts
- ▶ Contrat de 18 villageois de Xiaogang
  - ▶ terrains individuels
  - ▶ sa part du quota rendue au gouvernement
  - ▶ sa production excédentaire gardée par chaque agriculteur
  - ▶ adoption des enfants en cas d'exécution ou de prison
  - ▶ production de grain : 15000 kg en 1978, 90000 kg en 1979
  - ▶ contrat illégal, condamné et ensuite toléré par le gouvernement chinois

## Des villageois



Figure 1: Des villageois de Xiaogang

# Le contrat





## Un jeu où les actions ne sont pas simultanées

Voici une description d'un jeu en forme extensive, une arborescence qui représente les histoires de jeu possibles.

- ▶ Joueur  $A$  commence avec un choix entre  $L$  et  $R$ .
- ▶ Si  $A$  choisit  $L$ , le jeu se termine et le résultat est  $(1, 5)$  : 1 pour  $A$  et 5 pour  $B$ .
- ▶ Si  $A$  choisit  $R$ , joueur  $B$  choisit entre  $U$  et  $D$ :
  - ▶ si  $B$  choisit  $U$ , le résultat est  $(3, 3)$ , et
  - ▶ si  $B$  choisit  $D$ , le résultat est  $(0, 2)$ .

## Le jeu en forme normale

- ▶ Voici le même jeu en forme normale, où les stratégies sont en matrice non-structurée:

$(U_A, U_B)$	$(R \rightarrow U)$	$(R \rightarrow D)$
$L$	$(1, 5)$	$(1, 5)$
$R$	$(3, 3)$	$(0, 2)$

- ▶  $(R \rightarrow U)$  veut dire  $U$  en cas de  $R$ ,  $(R \rightarrow D)$  veut dire  $D$  en cas de  $R$ .
- ▶ Il y a deux équilibres de Nash:  $(L, R \rightarrow D)$  et  $(R, R \rightarrow U)$ .
- ▶ L'équilibre  $(L, R \rightarrow D)$  est implausible – rendu au noeud où il a un choix, il choisirait  $U$ , pas  $D$ .
- ▶ Une « menace » de « punir »  $A$ , à travers l'action  $D$ , n'est pas crédible.

# Équilibre de Nash parfait en sous-jeux

- ▶ Il y a 5 sous-jeux du jeu en forme extensive:
  - ▶ 3 pour les noeuds finaux,
    - ▶ 1 pour pour le jeu lui-même,
    - ▶ 1 qui se réalise au cas où  $A$  choisit  $R$ .
- ▶ Un équilibre de Nash est parfait en sous-jeux si les stratégies sont Nash à chaque sous-jeu.
- ▶ L'équilibre  $(L, R \rightarrow D)$  n'est pas parfait en sous-jeux mais l'équilibre  $(R, R \rightarrow U)$  l'est.

## Le dilemme des prisonniers répété avec date terminal

A et B jouent ensemble le dilemme des prisonniers  $T$  fois:

$(U_A, U_B)$	$C$	$D$
$C$	$(c, c)$	$(l, h)$
$D$	$(h, l)$	$(d, d)$

- ▶  $l, d, c, h$  sont tels que  $(C, C)$  est un équilibre en stratégies dominantes du jeu à une période, mais inefficace (exercice).
- ▶ L'utilité pour la suite des jeux est  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_T u_T$ .
- ▶ Par induction à l'envers, le seul équilibre parfait en sous-jeux est celui où les deux font  $D$  toujours, peu importe l'histoire.
- ▶ La stratégie donnant-donnant (oeuil pour oeil, tit-for-tat) est la stratégie où on commence par collaborer et joue l'action précédente de l'autre ensuite.
- ▶ Pour  $T = 2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $c = 20$ ,  $d = 5$ ,  $l = 1$ ,  $h = 30$ , les meilleures réponses à donnant-donnant produisent  $C$  puis  $D$ .
- ▶ Conclusion: il n'y a pas de stratégie dominante.

# Le dilemme des prisonniers répété infiniment

- ▶ On considère maintenant un nombre infini de périodes.
- ▶ L'utilité est  $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_t$ , où  $\delta$  est un paramètre de patience.
- ▶ Autre interprétation : utilité espérée,  $(1 - \delta)$  est la probabilité que le jeu se termine à chaque période.
- ▶ Une autre stratégie: gâchette sévère (grim trigger), où on collabore jusqu'à ce que l'autre défecte et on défecte à chaque période après.
- ▶ Si les deux joueurs jouent la stratégie gâchette, leur utilité est

$$c \sum_{\tau=0}^{\infty} \delta^{\tau} = \frac{c}{1 - \delta}.$$

## Des équilibres en stratégies gâchette

- ▶ La réponse à la stratégie gâchette où on collabore jusqu'à la période  $t - 1$  et on défecte après donne l'utilité

$$U = c \sum_{\tau=0}^{t-1} \delta^{\tau} + h\delta^t + d \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \delta^{\tau}.$$

- ▶  $U > \frac{c}{1-\delta}$  veut dire que les meilleurs réponses sont celles qui produisent la défection à chaque période.
- ▶  $U < \frac{c}{1-\delta}$  veut dire que les meilleures réponses sont celles qui produisent la collaboration à chaque période, comme gâchette.
- ▶ Si  $\delta$  assez grand,  $h$  et  $d$  assez petit, gâchette-gâchette est un équilibre. Exercice: pour quelles valeurs de  $c$ ,  $d$ ,  $h$  et  $\delta$  gâchette-gâchette est-il un équilibre?
- ▶ Gâchette impose la pire « punition » pour une défection.
- ▶ Donnant-donnant plus « clément », plus « robuste ».
- ▶ Par contre : il se peut que D-D versus D-D ne soit pas un équilibre même si gâchette contre gâchette l'est.
- ▶ « C toujours » vs « C toujours » n'est jamais un équilibre.

## Plus sur le dilemme de prisonniers répété infiniment

- ▶ Le profil où les deux joueurs emploient la stratégie « D toujours » est un équilibre de Nash parfait en sous-jeux.
- ▶ Exercice: pour quelles valeurs de  $c$ ,  $h$ ,  $d$  et  $\delta$  est-ce que le profil où les deux joueurs jouent donnant-donnant est une équilibre de Nash?
- ▶ Si les joueurs sont suffisamment patients, il y a beaucoup d'équilibres où ils collaborent à chaque période.

## Epilogue sur l'efficacité

- ▶ Une politique qui mène à une amélioration dans le sens de Pareto est rarissime.
- ▶ Juger une politique est difficile: quel est le bon standard pour ponderer un genre de coût contre un autre genre de bénéfice?
- ▶ La philosophie morale est difficile.
- ▶ Exemple: Jack gagne 10K, paie 1K (10%); Jill gagne 100K, paie 5K (5%) pour entretenir un puits commun dont ils tirent un montant égal d'eau. Est-ce juste?
- ▶ Efficacité Kaldor-Hicks et l'analyse coût-bénéfice.
- ▶ Utilité pas comparable, l'argent (volonté de payer) oui.
- ▶ Préférence révélée, surplus des consommateurs et des producteurs.
- ▶ Difficultés : justesse, l'utilité marginale de l'argent varie.



## Plus sur le jeu Faucon-Colombe (Hawk-Dove, Chicken)

Version étroite de Faucon-Colombe :

$(U_1, U_2)$	$L$	$R$
$U$	$(a, a)$	$(b, c)$
$D$	$(c, b)$	$(d, d)$

où  $c > a \geq b > d$ .

Variations moins étroites :  $c > b > a > d$ , asymétrie, plusieurs joueurs.

# Plus sur le jeu de coordination

## Version étroite du jeu de coordination

- ▶ Chaque joueur a le même ensemble d'actions faisable
- ▶  $(a, a)$  est un équilibre de Nash, pour chaque action  $a$
- ▶ Choix simultanés

L'existence de plusieurs équilibres de Nash purs ne suffit pas : le jeu de F-C a deux équilibres de Nash.