ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers, Hiver 2020

Cours 6

William McCausland

2021-04-16

Plan

1. Un modèle de volatilité stochastique
2. Inférence bayésienne : un peu de théorie
3. Inférence bayésienne : un peu de computation

Un modèle de volatilité stochastique

- Un modèle de volatilité stochastique simple

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t}\epsilon_t,$$

$$\log h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \log h_{t-1} + v_t.$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_t \\ v_t \end{bmatrix} \sim N\left(0, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix}\right).$$

- La volatilité n'est pas une fonction déterministe de rendements passés, comme dans les modèles (G)ARCH.
- Évaluer la vraisemblance est difficile :

$$f(r|\mu,\alpha_0,\alpha_1,\sigma_v^2) = \int f(h|\mu,\alpha_0,\alpha_1,\sigma_v^2) f(r|h,\mu,\alpha_0,\alpha_1,\sigma_v^2)\, dh,$$

  où $r \equiv (r_1, \ldots, r_T)$, $h \equiv (h_1, \ldots, h_T)$.
- On peut introduire une corrélation négative entre ϵ_t et v_t pour capturer l'effet de levier.

Motivation des méthodes bayésiennes

- Analyse simple et élégante des modèles avec variables latentes : on peut le faire avec seulement des évaluations de $f(h, r|\mu, \alpha_0, \alpha_1, \sigma_v^2)$. On n'a pas besoin d'évaluer la vraisemblance $f(r|\mu, \alpha_0, \alpha_1, \sigma_v^2)$.
- En faisant des prévisions, on tient compte de l'incertitude sur
  - les paramètres,
  - les variables latentes,
  - les ordres (p et q par exemple) et
  - les modèles.
- Il n'y a pas de recours aux résultats asymptotiques en T.

Éléments de l'analyse bayésienne (modèle sans variables latentes)

- Quantités pertinentes :
  - θ, un vecteur de paramètres inconnus,
  - $y = (y_1, \ldots, y_T)$, un vecteur aléatoire des variables observables, et
  - y°, le vecteur observé.
- Densités pertinentes :
  - $f(y|\theta)$, la densité conditionnelle des données (modèle),
  - $\mathcal{L}(\theta; y^\circ) = f(y^\circ|\theta)$, la vraisemblance,
  - $f(\theta)$, la densité *a priori*,
  - $f(\theta, y)$, la densité conjointe,
  - $f(\theta|y)$, la densité *a posteriori*,
  - $f(y)$, la densité marginale des données,
  - $f(y^\circ)$, la vraisemblance marginale (un nombre).

Éléments de l'analyse bayésenne (modèle avec variables latentes)

- Quantités pertinentes :
  - θ, un vecteur de paramètres inconnus,
  - $h = (h_1, \ldots, h_T)$, un vecteur aléatoire des variables d'état,
  - $y = (y_1, \ldots, y_T)$, un vecteur aléatoire des variables observables, et
  - y°, le vecteur observé.
- Densités pertinentes :
  - $f(h|\theta)$, la densité des variables d'état
  - $f(y|\theta, h)$, la densité conditionnelle des données (modèle),
  - $\mathcal{L}(\theta; y^\circ) = f(y^\circ|\theta)$, la vraisemblance,
  - $f(\theta)$, la densité *a priori*,
  - $f(\theta, h, y)$, la densité conjointe,
  - $f(\theta, h|y)$, la densité *a posteriori*,
  - $f(\theta|h, y)$ et $f(h|\theta, y)$ des densités *a posteriori* conditionnelles,
  - $f(y)$, la densité marginale des données,
  - $f(y^\circ)$, la vraisemblance marginale (un nombre).

Inférence bayésienne

- Par la règle de Bayes,

$$f(\theta|y^\circ) = \frac{f(\theta, y^\circ)}{f(y^\circ)} = \frac{f(\theta)f(y^\circ|\theta)}{f(y^\circ)} \propto f(\theta)f(y^\circ|\theta).$$

- $f(\theta)$ représente notre incertitude sur θ avant l'observation de y.
- $f(\theta|y^\circ)$ ressprésente notre incertitude sur θ après qu'observe $y = y^\circ$.
- Un point important à retenir : $f(\theta|y^\circ) \propto f(\theta, y^\circ)$.

Reprise et extension de l'exemple Bernoulli

- Si y_i est Bernoulli avec probabilité θ, $f(y|\theta) = \theta^{n_1}(1-\theta)^{n_0}$.
- Mettons qu'on choisit la loi *a priori* $\theta \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ sur $[0, 1]$:

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}.$$

- La densité conjointe est

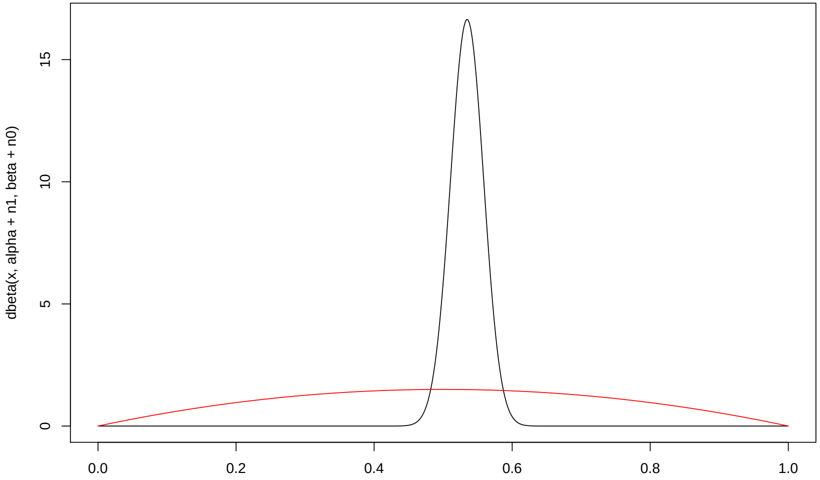
$$f(\theta, y) = f(\theta)f(y|\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha+n_1-1}(1-\theta)^{\beta+n_0-1}.$$

- La loi *a posteriori* doit être $\theta \sim \mathrm{Beta}(\alpha+n_1, \beta+n_0)$.
- La vraisemblance marginale est $f(\theta, y)/f(\theta|y)$:

$$f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+n_1)\Gamma(\beta+n_0)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)}.$$

Graphique pour l'exemple Bernoulli

```
n0 = 200; n1 = 230; alpha=2; beta=2
x = seq(0, 1, by=0.002)
plot(x, dbeta(x, alpha+n1, beta+n0), type='l')
lines(x, dbeta(x, alpha, beta), col='red')
```



Exemple gaussien I

- Considérez les modèle $y_t \sim \mathrm{iid}\, N(\mu, h^{-1})$.
- Le vecteur de paramètres est $\theta = (\mu, h)$.
- Le vecteur d'observables est $y = (y_1, \ldots, y_T)$.
- La densité des données est

$$
\begin{aligned}
f(y|\theta) &= \prod_{t=1}^{T} \sqrt{\frac{h}{2\pi}} \exp\left[-\frac{h}{2}(y_t - \mu)^2\right] \\
&= \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{T/2} \exp\left[-\frac{h}{2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \mu)^2\right].
\end{aligned}
$$

Exemple gaussien II

- Mettons qu'on choisit une loi *a priori* où h et μ sont indépendents, avec

$$\mu \sim N(\bar{\mu}, \bar{\omega}^{-1}), \quad \bar{s}^2 h \sim \chi^2(\bar{\nu}),$$

où $\bar{\mu}$, $\bar{\omega}$, $\bar{s}$ et $\bar{\nu}$ sont des hyperparamètres constants choisis par l'investigateur.
- La densité *a priori* est

$$f(\theta) \propto \exp\left[-\frac{\bar{\omega}}{2}(\mu - \bar{\mu})^2\right] \cdot h^{(\bar{\nu}-2)/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\bar{s}^2 h\right].$$

- La densité conjointe est

$$f(\theta, y) \propto h^{(\bar{\nu}+T-2)/2} \exp\left[-\frac{\bar{\omega}}{2}(\mu - \bar{\mu})^2 - \frac{h}{2}\left(\bar{s}^2 + \sum_{t=1}^{T}(y_t - \mu)^2\right)\right].$$

L'intégration et les objectifs de l'analyse bayésienne

- Plusieurs problèmes d'inférence bayésienne ont, comme solution, une intégrale par rapport à la densité *a posteriori*.
- Exemple 1, estimation ponctuelle de θ_k sous perte quadratique:

$$\hat{\theta}_k = E[\theta_k|y^\circ] = \int \theta_k f(\theta|y^\circ)\, d\theta.$$

- Exemple 2, quantification de l'incertitude sur θ_k :

$$\mathrm{Var}[\theta|y^\circ] = E[(\theta_k - E[\theta_k|y^\circ])^2|y^\circ].$$

- Exemple 3, densité prédictive (valeurs de y_{T+1} sur une grille) :

$$f(y_{T+1}|y^\circ) = E[f(y_{T+1}|\theta, y^\circ)|y^\circ].$$

Preuve de l'exemple 3

$$\begin{aligned}
&E[f(y_{T+1}|y_1,\ldots,y_T,\theta)|y_1,\ldots,y_T] \\
&\qquad = \int f(y_{T+1}|y_1,\ldots,y_T,\theta)f(\theta|y_1,\ldots,y_T)\,d\theta \\
&\qquad = \int f(y_{T+1},\theta|y_1,\ldots,y_T)\,d\theta \\
&\qquad = f(y_{T+1}|y_1,\ldots,y_T)
\end{aligned}$$

Méthodes pour trouver $E[g(\theta)|y^\circ]$

- Calcul analytique : élégant, exacte, presque toujours insoluble.
- Simulation Monte Carlo indépendante :
  - Si on peut simuler $\theta^m \sim \mathrm{iid}\, \theta|y^\circ$,
$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g(\theta^m) \to_p E[g(\theta)|y^\circ].$$
  - Cependant, cette simulation est rarement faisable.
- Simulation Monte Carlo chaîne de markov (MCMC) :
  - On choisit un processus markovien avec densité de transition $f(\theta^m|\theta^{m-1})$ telle que la loi *a posteriori* $\theta|y^\circ$ est la loi stationnaire du processus. C'est à dire :
$$\theta^{m-1} \sim f(\theta|y^\circ) \Rightarrow \theta^m \sim f(\theta|y^\circ).$$
  - Sous quelques conditions techniques, la loi de θ^m converge à la loi *a posteriori* et
$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g(\theta^m) \to_p E[g(\theta)|y^\circ].$$

Exemple, densité de prévision

- L'objectif est la densité $f(y_{T+1}|y_1, \ldots, y_T)$ sur une grille.
- Fixez une valeur y_{T+1} arbitraire sur une grille.
- On a vu (dans un modèle sans variables latentes)

$$f(y_{T+1}|y_1, \ldots, y_T) = E[f(y_{T+1}|y_1, \ldots, y_T, \theta)|y_1, \ldots, y_T].$$

- Ici, $g(\theta) = f(y_{T+1}|y_1, \ldots, y_T, \theta)$. Notez que les données observées $y_1, \ldots, y_T$ et le point de grille y_{T+1} sont fixes.
- Avec l'échantillon θ^m, $m = 1, \ldots, M$, on calcule la quantité à gauche, qui converge à la quantité voulue à droite :

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} f(y_{T+1}|y_1, \ldots, y_T, \theta^m) \to_p f(y_{T+1}|y_1, \ldots, y_T).$$

- Répétez pour chaque point sur la grille.
- À notez : asymptotique en M et non en T.

MCMC 1 : marche aléatoire metropolis-hastings

- Pour tirer $\theta^m|\theta^{m-1}$:
  1. Tirer $\theta^* \sim N(\theta^{m-1}, \Sigma)$
  2. Calculer le ratio de Hastings :

$$H = \frac{f(\theta^*|y^\circ)}{f(\theta^{m-1}|y^\circ)}.$$

  3. Accepter θ^* avec probabilité $\min(1, H)$.
- Accepter θ^* veut dire $\theta^m = \theta^*$; si on n'accepte pas, $\theta^m = \theta^{m-1}$.
- On peut utiliser $f(\theta, y^\circ)$ au lieu de $f(\theta|y^\circ)$ parce que les constantes $f(y^\circ)$ s'annulent.
- La convergence tient pour n'importe quelle Σ, mais il y a des choix qui sont meilleurs que d'autres.

Initialisation

```
# Vraies valeurs des paramètres
vrai.mu = 6
vrai.h = 0.04
vrai.sigma = 1/sqrt(vrai.h)

# Données simulées, statistiques suffisantes
n = 10; set.seed(12345)
y = rnorm(n, vrai.mu, vrai.sigma)
y.bar = mean(y)
y2.bar = mean(y^2)

# Hyper-paramètres
mu.bar = 10
omega.bar = 0.01
nu.bar = 4
s2.bar = 0.01
```

Fonctions pour calculer des densités

```
# Densité a priori de mu
lnp.mu = function(mu) {
    lnp = dnorm(mu,mu.bar,1/sqrt(omega.bar),log=TRUE)
}

# Densité a priori de h
lnp.h = function(h) {
    lnp = log(s2.bar) + dchisq(h*s2.bar,nu.bar,log=TRUE)
}

# Densité des données
lnp.y..mu.h = function(mu, h) {
    lnp = (n/2)*log(h) - (n/2)*log(2*pi)
    lnp = lnp - 0.5*h*n * (y2.bar - 2*y.bar*mu + mu^2)
}
```

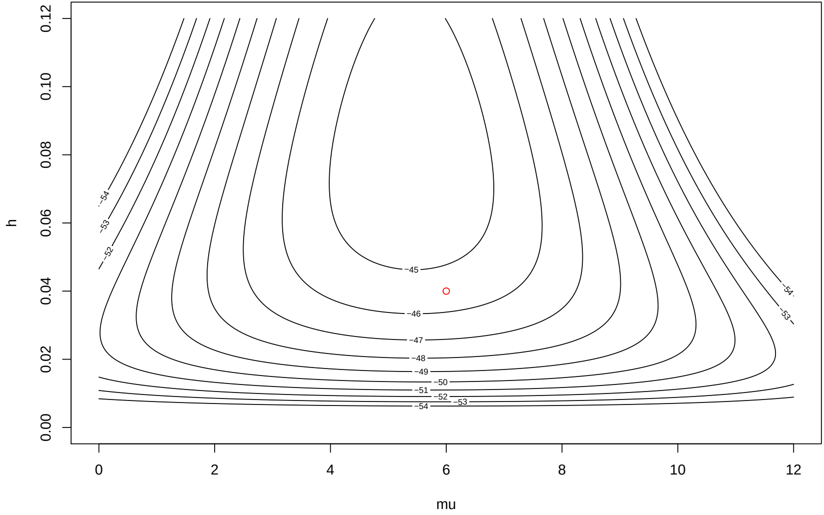
La densité conjointe

```
# Densité a posteriori de mu and h, pas normalisée
lnp.mu.h..y = function(mu,h) {
    lnp = lnp.mu(mu) + lnp.h(h) + lnp.y..mu.h(mu,h)
}

# Fonction pour faire un graphique de la densité a posteri
do.plot = function() {
    mu = seq(0, 12, by=0.01)
    h = seq(0, 0.12, by=0.0001)
    p = outer(mu, h, FUN=lnp.mu.h..y)
    levels = seq(ceiling(max(p)), ceiling(max(p))-10, by=-
    contour(mu, h, p, xlab='mu', ylab='h', levels=levels)
    points(vrai.mu, vrai.h, col='red')
}
```

Graphique de la densité conjointe

```
do.plot()
```

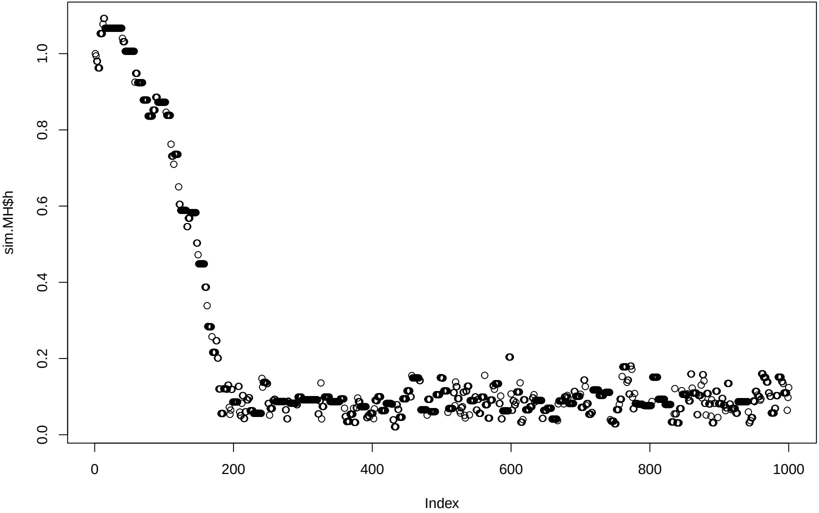


Code pour l'algorithme Metropolis Hastings

```
Metro.sim = function(M) {
  mu = vector('numeric', M); h = vector('numeric', M)
  mu[1] = 0; h[1] = 1
  lnp = lnp.mu.h..y(mu[1], h[1])
  for( m in seq(2, M) ) {
    h.et=rnorm(1,h[m-1],0.05); mu.et=rnorm(1,mu[m-1],2.0)
    if( h.et > 0.0 ) {
      lnp.et = lnp.mu.h..y(mu.et, h.et)
    } else lnp.et = -Inf
    H = exp(lnp.et - lnp)
    if( runif(1) < H ) {
      h[m] = h.et; mu[m] = mu.et; lnp = lnp.et
    } else {
      h[m] = h[m-1]; mu[m] = mu[m-1]
    }
  }
  list(mu=mu, h=h)
}
```

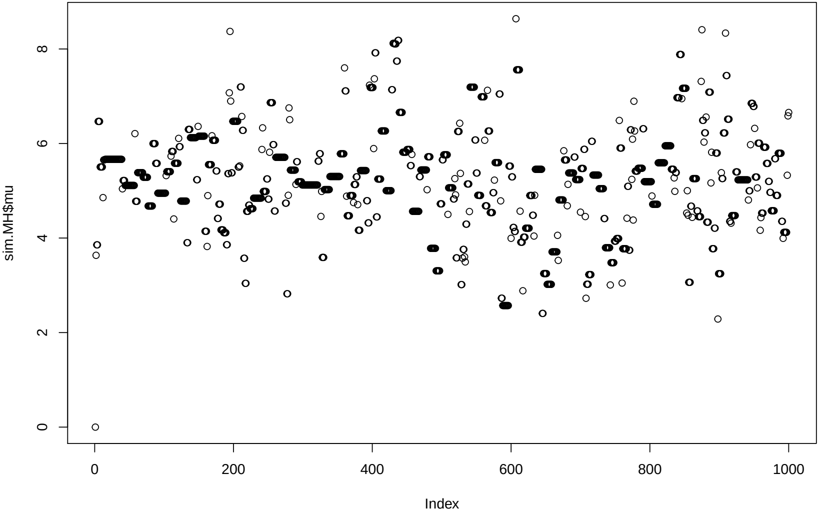
Trace de *h*

```r
sim.MH = Metro.sim(1000)
plot(sim.MH$h)
```



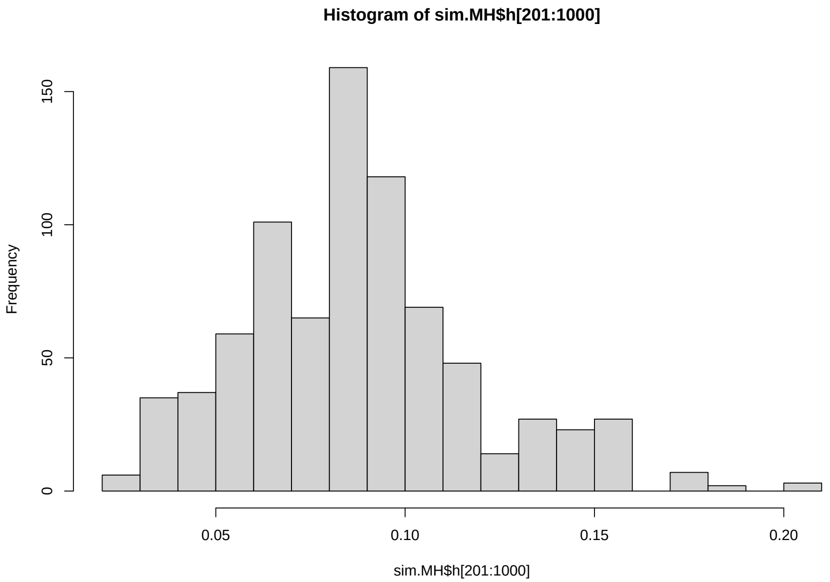
Trace de μ

```
plot(sim.MH$mu)
```



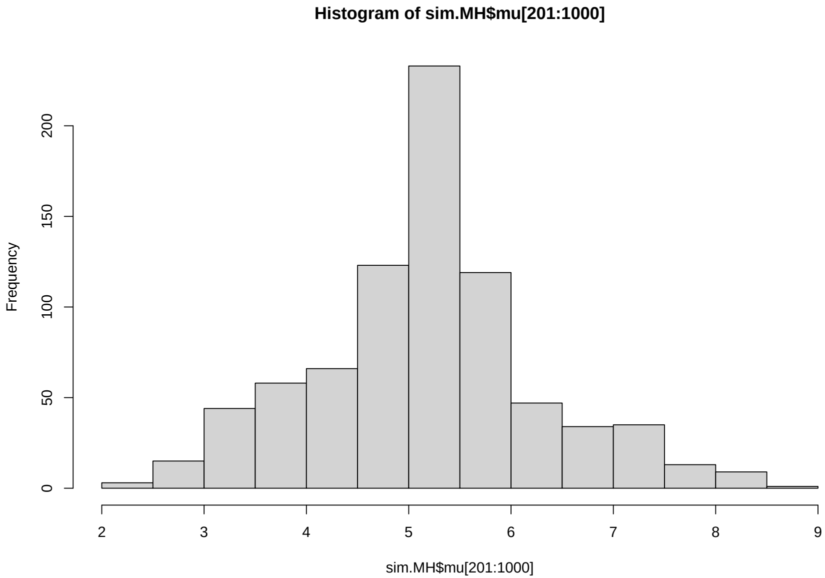
Histogramme de *h*

```
hist(sim.MH$h[201:1000], 20)
```



Histogramme de μ

```
hist(sim.MH$mu[201:1000], 20)
```



MCMC 2 : échantillonage de gibbs pour le modèle gaussien

- Considérez la densité de transition $f(\theta^m|\theta^{m-1})$ définie par
  1. $\mu^m \sim \mu|y = y^\circ, h = h^{m-1}$.
  2. $h^m \sim h|y = y^\circ, \mu = \mu^m$.
- Une preuve que $\theta|y^\circ$ est la loi stationnaire de cette loi de transition :
  - Mettons que la loi de $\theta^{m-1} = (\mu^{m-1}, h^{m-1})$ est la loi *a posteriori* $\theta|y = y^\circ$.
  - Alors la loi marginale de h^{m-1} est la loi $h|y = y^\circ$.
  - Après l'étape 1, la loi de (μ^m, h^{m-1}) est la loi *a posteriori*.
  - Alors la loi marginale de μ^m est la loi $\mu|y = y^\circ$.
  - Après l'étape 2, la loi de $\theta^m = (\mu^m, h^m)$ est la loi *a posteriori*.
- L'idée se généralise (diviser un problème en parties soluables)

Dérivation, loi *a posteriori* conditionnelle de $\mu|y = y^\circ, h$

- On peut écrire (c_1 et c_2 constants)

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\bar{\omega}}{2}(\mu - \bar{\mu})^2 - \frac{h}{2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \mu)^2 \\
&\quad = -\frac{\bar{\omega}}{2}(\mu - \bar{\mu})^2 - \frac{h}{2}\left[\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2 + T(\mu - \bar{y})^2\right] \\
&\quad = c_1 - \frac{\bar{\omega}}{2}(\mu - \bar{\mu})^2 - \frac{hT}{2}(\mu - \bar{y})^2 \\
&\quad = c_2 - \frac{\bar{\omega} + hT}{2}[\mu - (\bar{\omega}\bar{\mu} + hT\bar{y})/(\bar{\omega} + hT)]^2.
\end{aligned}
$$

- Dernière étape : complétion du carré
- Alors $f(\mu|y, h) \propto \exp\left[-\frac{\bar{\bar{\omega}}}{2}(\mu - \bar{\bar{\mu}})^2\right]$, où
  - $\bar{\bar{\mu}} = \frac{\bar{\omega}\bar{\mu} + hT\bar{y}}{\bar{\omega} + hT}$,
  - $\bar{\bar{\omega}} = \bar{\omega} + hT$.

MCMC 3 : échantillonage de gibbs pour le modèle SV

Faire M fois :

1. Tirer α_0 et α_1 de la loi *a posteriori* conditionnelle $(\alpha_0, \alpha_1)|y, \sigma_v, h_1, \ldots, h_T$.
2. Tirer $\omega_v = \sigma_v^{-2}$ de la loi *a posterior* conditionnelle $\omega_v|y, \alpha_0, \alpha_1, h_1, \ldots, h_T$
3. Tirer $h_1, \ldots, h_T$ de la loi *a posteriori* conditionnelle $h_1, \ldots, h_T|y, \alpha_0, \alpha_1, \omega_v$.

Notes :

- La loi $\alpha_0, \alpha_1|y, \omega_v, h_1, \ldots, h_T$ est presque gaussienne. On peut tirer une proposition (α_0^*, α_1^*) de l'approximation gaussienne. Une étape "accepter ou rejeter" "corrige" l'approximation.
- Si la loi *a priori* ω_v est khi-carré avec un paramètre d'échelle, la loi conditionelle *a posteriori* $\omega_v|y, \alpha_0, \alpha_1, h_1, \ldots, h_T$ l'est aussi. On peut tirer de cette loi directement.
- Il y a plusieurs façons de tirer h de façon efficace. Les détails sont trop avancés pour le cours.