Cours 8

William McCausland

2019-10-30

Un peu de Chapitre 12

- μ, ν, λ des mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$, λ Lebesgue.
- μ est absolument continue s'il existe f mesurable telle que $\mu(A) = \int_A f(x)\lambda(dx)$, A mesurable.
- μ est absolument continue par rapport à ν s'il existe f, ν-mesurable, telle que $\mu(A) = \int_A f(x)\nu(dx)$, $A \in \mathcal{B}$.
- μ est discret si $\sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\}) = \mu(\mathbb{R})$.
- $\mu \ll \nu$ signifie $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.
- Théorème Radon-Nikodym : $\mu \ll \nu \Leftrightarrow$
  il existe f, ν-mesurable, telle que $\mu(A) = \int_A f(x)\nu(dx)$, A mesurable.
- $f = \frac{d\mu}{d\nu}$ est la dérivée Radon-Nikodym de μ par rapport à ν.
- $\mu(A) = \int_A \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) d\nu$.

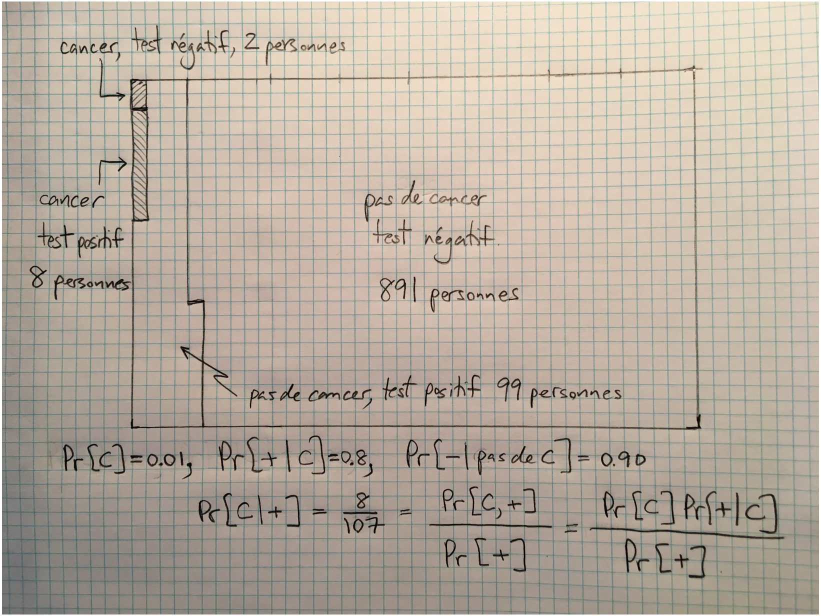
Un peu plus sur la mesurabilité

- Supposez que X est $\mathcal{G}$-mesurable.
- $\{X \leq c\} \in \mathcal{G}$, tout c
- $\{X = c\} = \{X \leq c\} \setminus \cap_n \{X \leq c - 1/n\} \in \mathcal{G}$.
- Si on sait assez pour répondre à la question suivante pour tous c, on connait la valeur de $X(\omega)$.

  Est-ce que $\omega \in \{X \leq c\}$*?*

- Si une variable aléatoire est $\sigma(X)$-mesurable, c'est une fonction seulement de X—elle dépend de ω seulement à travers $X(\omega)$.
- Supposons que $Z(\omega)$ est $\sigma(X)$-mesurable.
- Pour tous $z \in \mathbb{R}$, il existe $B_z \in \mathcal{B}$ tel que $\{Z = z\} = \{X \in B_z\}$. Alors $Z = f(X)$, où $f(x) = z$ pour tous $x \in B_z$.

Théorème de Bayes, événements de probabilité positive



Probabilités conditionnelles de l'événement $\Lambda \in \Omega$

- Par rapport à la sous-tribu $\mathcal{G}_1$:

$$P(\Lambda|\mathcal{G}_1) = \begin{cases} p_{13}/P(A_1) & \omega \in A_1 \\ (p_{21}+p_{22})/P(A_2) & \omega \in A_2 \\ p_{32}/P(A_3) & \omega \in A_3 \end{cases}$$

- Par rapport à la variable aléatoire X

$$P(\Lambda|X) = P(\Lambda|\sigma(X)) = \begin{cases} \frac{p_{13}+p_{21}+p_{22}}{P(A_1 \cup A_2)} & \omega \in A_1 \cup A_2 = \{X=1\} \\ p_{32}/P(A_3) & \omega \in A_3 = \{X=2\} \end{cases}$$

- Par rapport à la sous-tribu minimale $\{\emptyset, \Omega\}$:

$$P(\Lambda|\{\emptyset,\Omega\}) = P(\Lambda) = p_{13}+p_{21}+p_{22}+p_{32}, \text{ tous } \omega \in \Omega$$

- Par rapport à la sous-tribu maximal $\mathcal{F}$:

$$P(\Lambda|\mathcal{F}) = 1_\Lambda(\omega).$$

Vérification de $P(\Lambda|\mathcal{G}_1)$

- À vérifier : $E[P(\Lambda|\mathcal{G}_1)1_A] = P(\Lambda \cap A)$, $A \in \mathcal{G}_1$.

$$E[P(\Lambda|\mathcal{G}_1)1_{A_1}] = E\left[\frac{p_{13}}{P(A_1)}1_{A_1}\right] = \frac{p_{13}}{P(A_1)}E[1_{A_1}] = p_{13} = P(\Lambda \cap A_1)$$

$$\begin{aligned} E[P(\Lambda|\mathcal{G}_1)1_{A_2}] = E\left[\frac{p_{21}+p_{23}}{P(A_2)}1_{A_2}\right] &= \frac{p_{21}+p_{22}}{P(A_2)}E[1_{A_2}] \\ &= p_{21}+p_{22} = P(\Lambda \cap A_2) \end{aligned}$$

$$E[P(\Lambda|\mathcal{G}_1)1_{A_3}] = E\left[\frac{p_{32}}{P(A_3)}1_{A_3}\right] = \frac{p_{32}}{P(A_3)}E[1_{A_3}] = p_{32} = P(\Lambda \cap A_3)$$

- Le reste par linéarité de l'espérance, additivité de probabilité

Construction de $P(\Lambda|\mathcal{G}_1) = \frac{d\nu}{dP_0}$

- La mesure ν : $\nu(A) \equiv P(\Lambda \cap A)$, $A \in \mathcal{G}_1$

$$\nu(A_1) = P(\Lambda \cap A_1) = p_{13}$$

$$\nu(A_2) = P(\Lambda \cap A_2) = p_{21} + p_{22}$$

$$\nu(A_3) = P(\Lambda \cap A_2) = p_{32}$$

- La mesure P_0 : $P_0(A) \equiv P(A)$, $A \in \mathcal{G}_1$.

$$P_0(A_1) = p_{11} + p_{12} + p_{13}$$

$$P_0(A_2) = p_{21} + p_{22} + p_{23}$$

$$P_0(A_3) = p_{31} + p_{32} + p_{33}$$

- Notez que $P_0(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$, $A \in \mathcal{G}_1$: c-à-d $\nu \ll P_0$.
- $P(\Lambda|\mathcal{G}_1)(\omega) \equiv \nu(A)/P_0(A)$, $\omega \in A \in \mathcal{G}_1$.

Espérances conditionelles de Y

- Par rapport à la sous-tribu $\mathcal{G}_1$:

$$E[Y|\mathcal{G}_1] = \begin{cases} (4(p_{11}+p_{13})+5p_{12})/P(A_1) & \omega \in A_1 \\ (4(p_{21}+p_{23})+5p_{22})/P(A_2) & \omega \in A_2 \\ (4(p_{31}+p_{33})+5p_{32})/P(A_3) & \omega \in A_3 \end{cases}$$

- Par rapport à la variable aléatoire X

$$E[Y|X] = \begin{cases} \frac{4(p_{11}+p_{13}+p_{21}+p_{23})+5(p_{12}+p_{22})}{P(A_1 \cup A_2)} & \omega \in A_1 \cup A_2 = \{X=1\} \\ (4(p_{31}+p_{33})+5p_{32})/P(A_3) & \omega \in A_3 = \{X=2\} \end{cases}$$

- Par rapport à la sous-tribu minimale $\{\emptyset, \Omega\}$:

$$E[Y|\{\emptyset, \Omega\}] = E[Y]$$

- Par rapport à la sous-tribu maximal $\mathcal{F}$:

$$E[Y|\mathcal{F}] = Y(\omega)$$

Vérification de $E[Y|\mathcal{G}_1]$

- À vérifier : $E[E[Y|\mathcal{G}_1]1_A] = E[Y1_A]$, $A \in \mathcal{G}_1$:
- Pour $A = A_1$:

$$E[E[Y|\mathcal{G}_1]1_{A_1}] = \frac{4(p_{11}+p_{13})+5p_{12}}{P(A_1)}E[1_{A_1}] = 4(p_{11}+p_{13})+5p_{12}$$

$$E[Y1_{A_1}] = 4(p_{11}+p_{13})+5p_{12}$$

- $A = A_2$, $A = A_3$ semblables
- Le reste par linéarité de l'espérance

Construction de $E[Y|\mathcal{G}_1]$:

- En général, $E[Y|\mathcal{G}_1](\omega) = E[Y^+|\mathcal{G}_1](\omega) - E[Y^-|\mathcal{G}_1](\omega)$.
- Mêmes cas ∞, $-\infty$, fini, indéfini, événement par événement
- Ici, $Y = Y^+$, alors $E[Y^+|\mathcal{G}_1] = E[Y^+|\mathcal{G}_1] = \frac{d\rho^+}{dP_0}$, où

$$\rho^+(A) \equiv E[Y^+ 1_A], \quad P_0(A) \equiv P(A), \quad A \in \mathcal{G}_1,$$

  et notez que $\rho^+ \ll P_0$ alors $\rho^+(A) = \int_A E[Y|\mathcal{G}_1] P_0(dx)$.
- Pour $A = A_1$,
  - $\rho^+(A_1) = E[Y^+ 1_{A_1}] = 4(p_{11} + p_{13}) + 5p_{12}$
  - $P_0(A_1) = P(A_1) = p_{11} + p_{12} + p_{13}$
- Les cas $A = A_2$, $A = A_3$ sont semblables.
- Pour chaque $\omega \in A \in \mathcal{G}_1$, $E[Y^+|\mathcal{G}_1](\omega) = \rho^+(A)/P_0(A)$.
- Pour $\omega \in A_1$,

$$E[Y^+|\mathcal{G}_1](\omega) = \frac{4(p_{11} + p_{13}) + 5p_{12}}{p_{11} + p_{12} + p_{13}}.$$

Exercice 13.2.3

- $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont deux sous-tribus de $\mathcal{F}$.

(a) Si Z est $\mathcal{G}_1$-mesurable et $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, Z est $\mathcal{G}_2$ mesurable :
  - Pour tous $z \in \mathbb{R}$, $\{Z \leq z\} \in \mathcal{G}_1$ alors $\{Z \leq z\} \in \mathcal{G}_2$.

(b) Si Z est $\mathcal{G}_1$-mesurable et $\mathcal{G}_2$-mesurable, Z est $(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2)$-mesurable :
  - Pour tous $z \in \mathbb{R}$, $\{Z \leq z\} \in \mathcal{G}_1$ et $\{Z \leq z\} \in \mathcal{G}_2$, alors $\{Z \leq z\} \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$.

Proposition 13.2.6

- Définition de $E[X|\mathcal{G}]$: $E[E[X|\mathcal{G}]1_G] = E[X1_G]$, tous $G \in \mathcal{G}$.
- Soit X, Y des variables aléatoires, X est $\mathcal{G}$-mesurable, $E[Y] < \infty$, $E[XY] < \infty$.
- Proposition : $E[XY|\mathcal{G}] = XE[Y|\mathcal{G}]$ avec probabilité 1.
- Preuve :
  - Soit $G_0, G \in \mathcal{G}$, $X = 1_{G_0}$. Alors

$$E[XE[Y|\mathcal{G}]1_G] = E[E[Y|\mathcal{G}]1_{G\cap G_0}] = E[Y1_{G\cap G_0}] = E[XY1_G].$$

$$E[E[XY|\mathcal{G}]1_G] = E[XY1_G].$$

  - $XE[Y|\mathcal{G}] = E[XY|\mathcal{G}]$ avec probabilité 1.
  - Même chose pour X simple (linéarité), positive (convergence dominée), générale.

Proposition 13.2.7 (espérances itérées)

- Définition de $E[X|\mathcal{G}]$: $E[E[X|\mathcal{G}]1_G] = E[X1_G]$, tous $G \in \mathcal{G}$.
- Proposition : Si $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$, $E[E[Y|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = E[Y|\mathcal{G}_1]$.
- Preuve : fixez $G \in \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$,

$$E[\ E[E[Y|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]\ 1_G\ ] = E[E[Y|\mathcal{G}_2]1_G] = E[Y1_G]$$

$$E[E[Y|\mathcal{G}_1]1_G] = E[Y1_G]$$

  alors

$$E[E[Y|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = E[Y|\mathcal{G}_1] \text{ avec probabilité 1.}$$

- Cas spécial, espérance conditionnelle comme projection :

$$E[E[Y|\mathcal{G}]|\mathcal{G}] = E[Y|\mathcal{G}]$$

- Deux autres cas spéciaux :
  - $E[E[X|Y]] = E[X]$ pour $\mathcal{G}_1 = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{G}_2 = \sigma(Y)$.
  - $E[E[X|Y,Z]|Z] = E[X|Z]$ pour $\mathcal{G}_1 = \sigma(Z) \in \mathcal{G}_2 = \sigma(Y,Z)$

Apérçu du cours 9 (Casella et Berger)

- Statistiques exhaustives (sufficient), complètes, minimales, ancillaires (ou libres)
- Estimation ponctuelle, méthode des moments et maximum de vraisemblance
- L'approche bayésienne et les lois a priori, conjointe et a posteriori
- Estimation ponctuelle bayésienne