ECN 7060, Cours 6

William McCausland

2022-10-07

Lemme de Fatou

- Lemme de Fatou : pour une suite $X_n \geq 0$ de v.a.

$$E[\liminf_{n\to\infty} X_n] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n].$$

- Notes :

  1. Hypothèse très faible concernant X_n.
  2. Le résultat pour $X_n \geq C > -\infty$ suit immédiatement.
  3. Le membre de droite ou les deux membres peuvent être infinis.

- La construction $Y_n \equiv \inf_{k\geq n} X_k$ satisfait

  1. $0 \leq Y_n \leq X_n$.
  2. $Y_n \leq Y_{n+1}$ ($\{n, n+1, \ldots\}$ décroissant en n).
  3. $Y_n \nearrow Y \equiv \liminf_{n\to\infty} X_n$.

- Preuve :

$$\liminf_n E[X_n] \geq \liminf_n E[Y_n] = \lim_n E[Y_n] = E[Y] = E[\liminf_n X_n]$$

Lemme de Fatou pour $X_n \leq C < \infty$

- Si $X_n \leq C < \infty$, $-X_n \geq -C > -\infty$ et par le lemme de Fatou,

$$\liminf_n E[-X_n] \geq E[\liminf_n -X_n],$$

$$\liminf_n -E[X_n] \geq E[-\limsup_n X_n],$$

$$-\limsup_n E[X_n] \geq -E[\limsup_n X_n],$$

$$\limsup_n E[X_n] \leq E[\limsup_n X_n].$$

- Si $|X_n| \leq C < \infty$, on peut mettre les deux ensemble :

$$E[\liminf_n X_n] \leq \liminf_n E[X_n] \leq \limsup_n E[X_n] \leq E[\limsup_n X_n].$$

- Alors si $|X_n| \leq C < \infty$ et $X_n \overset{p.s.}{\to} X$, $\lim E[X_n] = E[X]$.
- Mais on peut faire mieux...

Théorème de convergence dominée

- Pour une séquence X_n de variables aléatoires, X et Y v.a. telles que $P(X_n \to X) = 1$, $|X_n| \leq Y$ et $E[Y] < \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X].$$

- Notes :

  1. La dominance par une Y avec $E[Y] < \infty$ est plus faible que la dominance uniforme ($Y = C$); le résultat est donc plus fort.
  2. Attention : même v.a. dominante Y pour tous les n.

- Preuve :

$$E[Y] + E[X] = E[Y + X] = E[Y + \lim_n X_n] = E[Y + \liminf_n X_n]$$

$$E[Y + \liminf_n X_n] \leq \liminf_n E[Y + X_n] = E[Y] + \liminf_n E[X_n]$$

$$E[Y] - E[X] = \ldots \leq \ldots = E[Y] - \limsup_n E[X_n].$$

$$\limsup_n E[X_n] \leq E[X] \leq \liminf_n E[X_n].$$

$$\lim_n E[X_n] = E[X].$$

Sur les ensembles non-dénombrables de variables aléatoires

- Soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$, un ensemble non-dénombrable de variables aléatoires.
- Exemples :
  - $X_s = e^{sX}$, dont l'espérance est $M_X(s)$, une fonction de s réel.
  - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ et σ^2 inconnus. $E[f(X)]$ est une fonction de μ, σ^2.
  - X_t est un processus aléatoire en temps continu.
- Supposons que
  - $\lim_{t \downarrow 0} X_t(\omega) = X_0(\omega)$, $\omega \in \Omega$, et
  - il exist une v.a. Y telle que $|X_t| < Y$ et $E[Y] < \infty$.
- Alors pour toute suite $t_n \downarrow 0$,

$$E[X_{t_n}] \to E[X_0]$$

par le théorème de convergence dominée, et alors

$$\lim_{t \downarrow 0} E[X_t] = E[X_0].$$

La dérivée de l'espérance

- Soit $\{F_t\}_{a<t<b}$ un ensemble de variables aléatoires.
- Conditions suffisantes pour $\frac{dE[F_t]}{dt} = E[F_t']$, où $F_t' = \frac{dF_t}{dt}$:
  1. Pour tout $t \in (a, b)$: $-\infty < E[F_t] < \infty$.
  2. Il existe une v.a. Y telle que $E[Y] < \infty$ et pour tout $t \in (a, b)$ et $\omega \in \Omega$, $F_t'(\omega)$ existe et $|F_t'(\omega)| \leq Y(\omega)$.
- Preuve : fixez $t \in (a, b)$. Alors
  1. $F_t' = \lim_{n\to\infty} n(F_{t+1/n} - F_t)$, la limite d'une séquence de variables aléatoires, est une variable alétoire.
  2. Pour tout h, $0 < h < b - t$, (théorème des accroissements finis, mean value theorem)

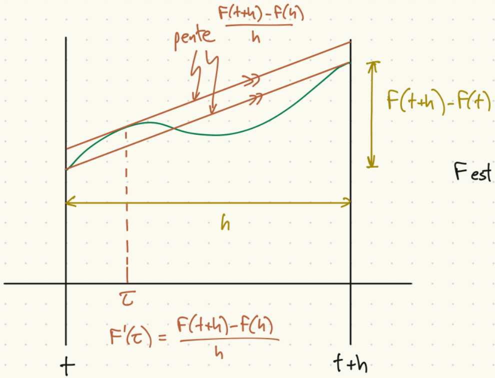
$$\left| \frac{F_{t+h} - F_t}{h} \right| \leq Y.$$

  3. Alors

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{E[F_{t+h}] - E[F_t]}{h} = \lim_{h\downarrow 0} E\left[\frac{F_{t+h} - F_t}{h}\right] = E\left[\lim_{h\downarrow 0} \frac{F_{t+h} - F_t}{h}\right]$$

$$\frac{dE[F_t]}{dt} = E[F_t'] \leq E[Y] < \infty.$$

Théorème des accroissements finis



F est différentiable sur $(t, t+h)$
continue sur $[t, t+h]$

Fonction génératrice des moments

- Définition : pour une v.a. X, $M_X(s) = E[e^{sX}]$, $s \in R$.
- Notes
  - M_X n'existe pas toujours, même si $E[X] < \infty$.
  - $M_{X+Y}(s) = M_X(s)M_Y(s)$ pour v.a. indépendentes X, Y.
  - Il y a des tableaux avec plusieurs v.a. standardes
  - La fonction caractéristique est semblable et souvent plus utile

Résultat sur $M_X(s)$

- Supposons que X est une v.a. et qu'il existe $s_0 > 0$ tel que $M_X(s) < \infty$ pour $|s| < s_0$.
- Alors $E[|X^n|] < \infty$ pour tout n et

$$M_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} E[X^n]s^n/n!.$$

- Preuve :
  1. Soit $Z_n = \sum_{k=0}^{n}(sX)^k/k!$.
  2. $Z_n \to e^{sX}$ (définition de somme infinie, expansion de la fonction exponentielle)
  3. Fixez s, $|s| < s_0$

$$|Z_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |sX|^k/k! \leq e^{sX} + e^{-sX} \equiv Y,$$

$$E[Y] = M_X(s) + M_X(-s) < \infty.$$

  4. Par convergence dominée, $E[e^{sX}] = \lim_{n\to\infty} E[Z_n] = \sum_{n=0}^{\infty} E[X^n]s^n/n!$.

Signification de « génératrice des moments »

- Rappel $M_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} E[X^n]\frac{s^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} E[X^n]\frac{s^n}{n!}$.
- Première dérivée:

$$
\begin{aligned}
M'_X(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} E[X^n]\frac{ns^{n-1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E[X^n]\frac{s^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[X^{n+1}]\frac{s^n}{n!}
\end{aligned}
$$

- m-ième dérivée :

$$
M_X^{(m)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} E[X^{n+m}]\frac{s^n}{n!}
$$

- $M_X(0) = 1$, $M'_X(0) = E[X]$, $M_X^{(m)}(0) = E[X^m]$.

Mesures associées aux variables aléatoires

- Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace de probabilité elle aussi, où

  $$\mu = \mathcal{L}(X) = PX^{-1}$$

  est la *distribution* ou la *loi* de X.
- Si $B \in \mathcal{B}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ et $\mu(B) = P(X^{-1}(B)) = (PX^{-1})(B)$.
- Pour $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$,
  - $[a, b] \subset \mathbb{R}$,
  - $[a, b] \in \mathcal{B}$,
  - $\mu([a, b]) = P(\{X \in [a, b]\})$,
  - $\{X \in [a, b]\} \subset \Omega$,
  - $\{X \in [a, b]\} \in \mathcal{F}$.

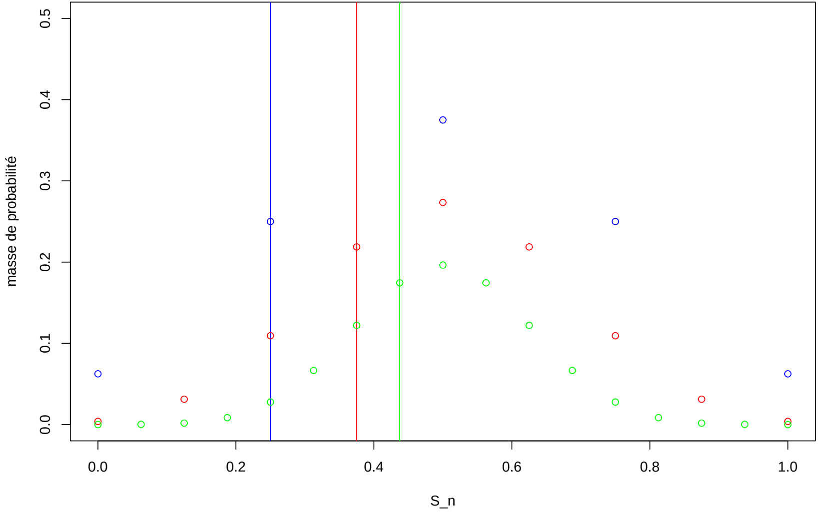
Exemple, suites de tirages au pile ou face, partie I

- Soit $\Omega = \{(r_1, r_2, \ldots) \colon r_i \in \{\text{pile}, \text{face}\}\}$.
- Soit $\mathcal{F}$, P les extension de $\mathcal{J}$ et P de Rosenthal, 2.6.
- Rappel: la probabilité de l'histoire $A_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ est 2^{-n}.
- Soit $X_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & r_n = \text{face}, \\ 0 & r_n = \text{pile}. \end{cases}$$

- On peut calculer $E[X_n] = 1/2$, $\mathrm{Var}[X_n] = 1/4$.
- Soit $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$.
- Soit $z_n = \sqrt{n}(S_n - \frac{1}{2})/(1/2)$.
- Soit $\omega^* = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, \ldots)$. Alors
  - $S_4(\omega^*) = 1/4$,
  - $S_8(\omega^*) = 3/8$,
  - $S_{16}(\omega^*) = 7/16$.

Exemple, partie II, $n = 4$, $n = 8$, $n = 16$



Exemple, partie III, la loi $N(0, 1)$

- Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ l'espace de probabilité avec

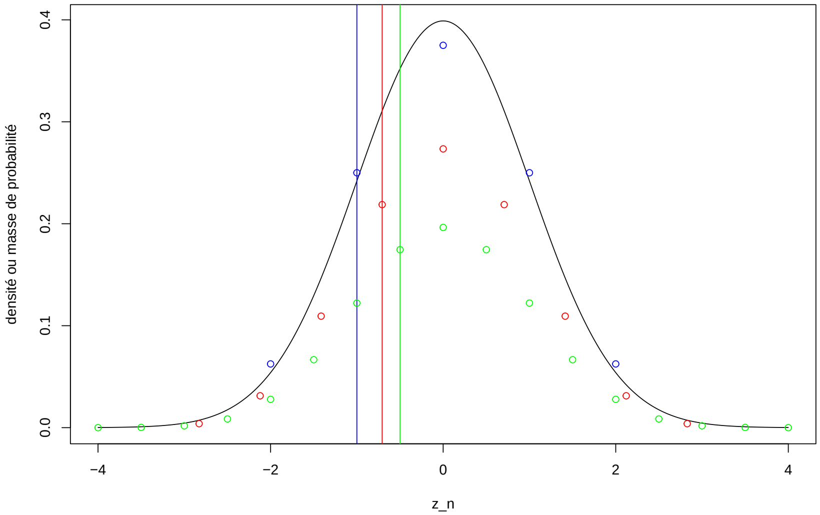
$$P(B) = \int_B f \, d\lambda, \quad B \in \mathcal{B},$$

  où $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x^2/2}$$

  et $\lambda \colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ est la mesure de Lebesgue.
- f est la densité pour la loi P, $N(0, 1)$, $F(x) = P((-\infty, x])$ est la fonction de répartition.

Exemple, partie IV, $n = 4$, $n = 8$, $n = 16$



Convergence en loi

- Soit μ_n une suite de mesures de probabilité boreliennes, μ une mesure de probabilité borelienne.
- $\mu_n \Rightarrow \mu$ (μ_n converge en loi à μ) si pour chaque fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et bornée,

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu.$$

- Une condition équivalente: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mu(\{x\}) = 0 \Rightarrow F_n(x) \to F(x),$$

  où $F_n(x) \equiv \mu_n((-\infty, x])$, $F(x) \equiv \mu((-\infty, x])$.
- μ_n est une suite de mesures, pas une suite de variables aléatoires.
- Cependant, si X_n est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{L}_n = PX_n^{-1}$ est une suite de mesures.

Aparté

- Soit A, B, C des propositions sur ω.
- Par exemple, $X(\omega) < c$, $X_n(\omega) > d$.
- Si $A \,\text{et}\, B \Rightarrow C$,

$$\neg C \Rightarrow \neg A \,\text{ou}\, \neg B,$$

$$\{\neg C\} \subseteq \{\neg A\} \cup \{\neg B\}$$

Convergence en probabilité et en loi

- Si $X_n \xrightarrow{p} X$, $\mu_n \equiv \mathcal{L}(X_n) \Rightarrow \mathcal{L}(X) \equiv \mu$.
- Résultat équivalent : Si pour tout $\epsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0$,

$$\mu(\{x\}) = 0 \Rightarrow F_n(x) \to F(x).$$

- Preuve : fixez $x \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Alors pour tout $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$,

$$X(\omega) > x + \epsilon \text{ et } |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon \Rightarrow X_n(\omega) > x,$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{X_n \leq x\} \subseteq \{X \leq x + \epsilon\} \cup \{|X_n - X| \geq \epsilon\}$$

$$F_n(x) \leq F(x + \epsilon) + P(|X_n - X| \geq \epsilon)$$

$$\sup_n F_n(x) \leq F(x + \epsilon) + \sup_n P(|X_n - X| \geq \epsilon)$$

$$\limsup_n F_n(x) \leq F(x + \epsilon) + 0,$$

et puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire,

$$\limsup_n F_n(x) \leq F(x).$$

Preuve, continuée

- même $x \in \mathbb{R}$, fixez $\epsilon > 0$. Pour tout $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n > x \text{ et } |X_n - X| < \epsilon \Rightarrow X > x - \epsilon,$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{X \leq x - \epsilon\} \subseteq \{X_n \leq x\} \cup \{|X_n - X| \geq \epsilon\},$$

alors

$$F(x - \epsilon) \leq \liminf_n F_n(x) + \liminf_n P(|X_n - X| \geq \epsilon)$$

$$F(x - \epsilon) \leq \liminf_n F_n(x) + 0$$

- ϵ arbitraire, alors

$$F(x) - \mu(\{x\}) \leq \liminf_n F_n(x)$$

- Maintenant si $\mu(\{x\}) = 0$, (c-à-d $P(\{X = x\}) = 0$)

$$\liminf_n F_n(x) = \limsup_n F_n(x) = \lim_n F_n(x) = F(x).$$

Aperçu du cours 7

- Fonction caractéristique
- Théorème central limite