ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers, Hiver 2021

Cours 2

William McCausland

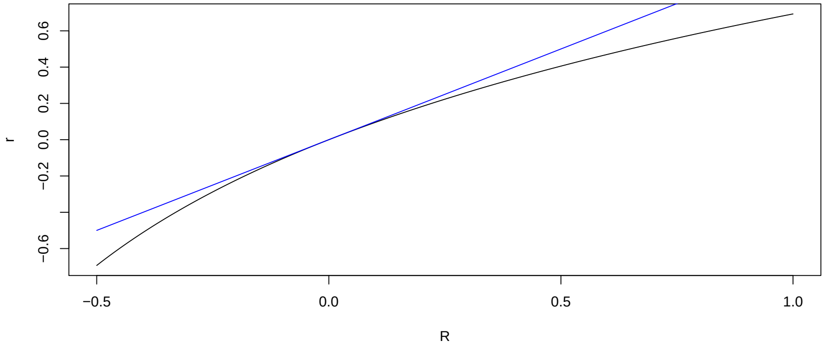
2022-01-16

Plan

La relation entre le log-rendement r et le rendement R

- Rappelons que $r_t \equiv \log(1 + R_t)$.
- La fonction $r = \log(1 + R)$ est concave et $r \leq R$

```
R = seq(-0.5, 1.0, by=0.01)
plot(R, log(1+R), xlab="R", ylab="r", type='l')
lines(R, R, col='blue')
```



Rendements multipériodes

- Rendements multipériodes : (k périodes, net, bruts, log)

$$R_t[k] \equiv \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}, \quad 1+R_t[k] \equiv \frac{P_t}{P_{t-k}}, \quad r_t[k] \equiv \log(1+R_t[k])$$

- Notez que

$$1 + R_t[k] = \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \cdots \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \frac{P_t}{P_{t-1}} = \prod_{\tau=t-k+1}^{t} (1 + R_\tau)$$

$$r_t[k] = (p_{t-k+1} - p_{t-k}) + \ldots + (p_{t-1} - p_{t-2}) + (p_t - p_{t-1}) = \sum_{\tau=t-k+1}^{t} r_\tau$$

- Avantage aux log-rendements pour l'analyse intertemporelle

Intuition pour le rendement continument composé

- Rendement composé : divisez une période en n sous-périodes,
  - soit r/n le rendement net à chaque sous-période,
  - soit R le rendement net pour la période entière.
- Alors
$$(1+R) = (1+r/n)^n.$$
- $1+R$ est croissant en n grace au rendements composés ...
- ... mais il y a une limite : (rendement continument composé)
$$(1+R) = \lim_{n\to\infty}(1+r/n)^n = e^r.$$
- En logs (Séries Mercator) :
$$\lim_{n\to\infty} n\log(1+r/n) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{r}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{n}\right)^3 - \dots\right] = r.$$
- Pour un log-rendement constant r et une valeur initial V_0 à t_0,
$$V_t = e^{r(t-t_0)}.$$

Annualisation

- Mettons que l'unité de temps est l'année.
- Question : Quelle rendement net annuel constant R pendant k ans donne-t-il un rendement net après k périodes de $R_t[k]$?
- C'est à dire quelle valeur de R vérifie $1 + R_t[k] = (1 + R)^k$?
- L'annualisation d'un rendement multipériode :

$$(1 + R) = (1 + R_t[k])^{1/k}, \quad R = (1 + R_t[k])^{1/k} - 1.$$

- En logarithmes :

$$r = \frac{1}{k} \log(1 + R_t[k]) = r_t[k]/k.$$

- Remarquez encore la linéarité des log rendements avec l'aggrégation temporelle.

Asymétrie et aplatissement

- Définitions : pour la variable aléatoire $X \sim (\mu, \sigma^2)$, l'asymétrie S et l'aplatissment K de la population sont

$$S = E[(X-\mu)^3]/\sigma^3, \quad K = E[(X-\mu)^4]/\sigma^4.$$

- Pour l'asymétrie et l'aplatissement de l'échantillon, on utilise les moments de l'échantillon.
- Asymétrie et aplatissement dans le tableau 1.2 de Tsay.
    - Asymétrie (skewness) souvent négative—actions et indices.
    - Aplatissement (kurtosis) toujours plus grand que 3—actions et indices.
    - S et K plus sévères pour r_t que pour R_t.
    - S et K moins sévères (mais pas toujours) pour r_t mensuels que pour r_t journaliers. (Comme si un théorème central limite s'applique)

Aspects non-gaussiens du rendement IBM I

```r
# Données IBM, r_t journalier, 1970-2008
da = read.table('d-ibm3dx7008.txt', header=T)
r = da$rtn
mu = mean(r); sigma = sd(r)

S_ch = mean((r-mu)^3)/sigma^3;
cat(sprintf('Asymétrie, Sch=%f', S_ch))
```

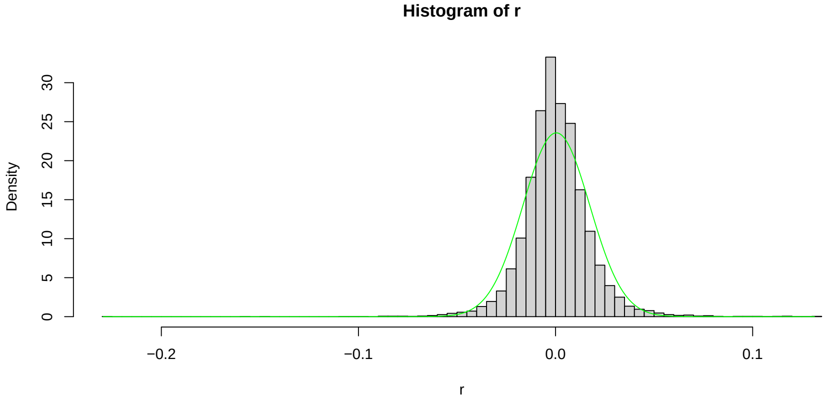
Asymétrie, Sch=0.061399

```r
K_ch = mean((r-mu)^4)/sigma^4;
cat(sprintf('Aplatissement, Kch=%f', K_ch))
```

Aplatissement, Kch=12.916359

Aspects non-gaussiens du rendement IBM II

```r
hist(r, breaks=100, freq=FALSE)
x = seq(min(r), max(r), by=0.0005)
lines(x, dnorm(x, mu, sigma), col='green')
```



Tests de normalité basés sur S et K

- L'hypothèse nulle ici : $H_0 : r_t \sim \mathrm{iid}\, N(\mu, \sigma^2)$, $t = 1, \ldots, T$.
- Loi asymptotique de l'assymétrie de l'échantillon sous H_0:
$$z_S = \frac{\hat{S}}{\sqrt{6/T}} \sim N(0,1).$$
- Loi asymptotique de l'aplatissement de l'échantillon sous H_0:
$$z_K = \frac{\hat{K} - 3}{\sqrt{24/T}} \sim N(0,1).$$
- Il s'avère que z_S et z_K sont asymtotiquement indépendents.
- Si un nombre ν de v.a. $N(0,1)$ sont indépendentes, la somme de leurs carrées à une loi $\chi^2(\nu)$.
- Loi asymptotique de la statistique Jarque-Bera sous H_0:
$$\mathrm{JB} = \frac{\hat{S}^2}{6/T} + \frac{(\hat{K} - 3)^2}{24/T} \sim \chi^2(2).$$

Tests statistiques unilatéraux et bilatéraux

- Un test avec la statistique $\hat{S}$ est souvent bilatéral—l'hypothèse alternative est $S \neq 0$. On peut défendre aussi un test unilatéral avec une hypothèse alternative $S < 0$.
- Un test avec la statistique $\hat{K}$ peut être unilatéral, auquel cas l'hypothèse alternative devrait être $K > 3$, ou bilatéral, auquel cas l'hypothèse alterative est $K \neq 3$.
- Un test avec la statistique JB est toujours unilatéral. On ne rejette pas la normalité si l'aplatissement et l'asymétrie sont plus près de 3 et 0 que d'habitude sous l'hypothèse nulle.

Exemple 1: test de l'hypothèse H_0 contre $H_1 : S \neq 0$ à un niveau de 5% (rendement IBM)

```
T = length(r)               # Taille de l'échantillon
alpha = 0.05                # Niveau du test
z_S = S_ch/sqrt(6/T)        # Statistique test
c_1 = qnorm(alpha/2)        # Valeurs critiques
c_2 = qnorm(1-alpha/2)
cat(sprintf('Statistique test : %f', z_S))
```

Statistique test : 2.487093

```
cat(sprintf('Région de non rejet : [%f, %f]', c_1, c_2))
```

Région de non rejet : [-1.959964, 1.959964]

Exemple 2: test de l'hypothèse H_0 contre $H_1 : K > 3$ à un niveau de 1% (rendement IBM)

```r
alpha = 0.01                   # Niveau du test
z_K = (K_ch-3)/sqrt(24/T) # Statistique test
c = qnorm(1-alpha)           # Valeur critique
cat(sprintf('Statistique test : %f', z_K))
```

Statistique test : 200.841983

```r
cat(sprintf('Région de non rejet : [-inf, %f]', c))
```

Région de non rejet : [-inf, 2.326348]

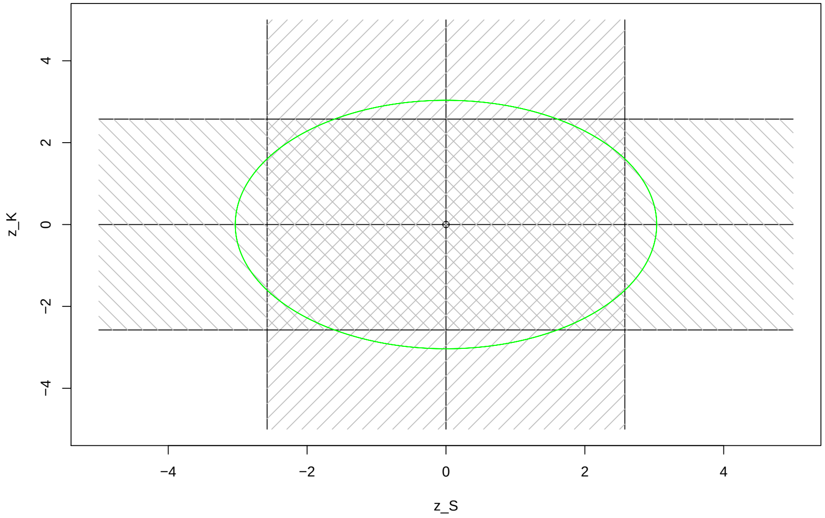
Attention : tests multiples!

Trois tests asymptotiques de l'hypothèse H_0 de normalité:

1. Test avec la statistique z_S, H_0 contre $H_1 : S \neq 0$. La région de non-rejet est
$$q_{N,\alpha/2} < z_S < q_{N,1-\alpha/2}.$$
où α est le niveau du test; $q_{N,p}$, la quantile p d'une loi $N(0,1)$.
2. Test avec la statistique test z_K, H_0 contre $H_1 : K \neq 3$. La région de non-rejet est
$$q_{N,\alpha/2} < z_K < q_{N,1-\alpha/2}.$$
3. Test avec la statistique test JB, H_0 contre $H_1 : S \neq 0 \,\text{ou}\, K \neq 3$. La région de non-rejet est
$$JB = z_S^2 + z_K^2 < q_{\chi^2(2),1-\alpha},$$
où $q_{\chi^2(2),p}$ est la quantile p d'une loi $\chi^2(2)$.

Si on fait les deux tests 1 et 2, la probabilité d'au moins un rejet sous H_0 excède α.

Régions de non-rejet pour les trois tests, $\alpha = 0.01$



Stationnarité

- Une séries r_t est stationnaire ssi pour chaque k, $t_1, \ldots, t_k$ et τ, les deux distributions suivantes sont identiques :

$$(r_{t_1}, r_{t_2}, \ldots, r_{t_k}), \quad (r_{t_1-\tau}, r_{t_2-\tau}, \ldots, r_{t_k-\tau}).$$

- Une séries r_t est covariance-stationnaire ssi $E[r_t] \equiv \mu$ et $\gamma_k \equiv \mathrm{Cov}[r_t, r_{t-k}]$ ne dépend pas de t.
- Pertinence des deux types de stationnarité
  - Des hypothèses que le futur ressemble, dans un sens, au passé.
- Pertinence de covariance-stationnarité
  - Sauf pour l'existence des moment, elle est moins forte.
  - Les variances et covariances des fonctions linéaires des v.a. dépendent seulement des variances et covariances de ces v.a.
  - Les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle sont bien définies.
  - Conditions de covariance-stationnarité en termes des coefficients ARMA(p,q)

Non-corrélation versus indépendance I

- Tirer un parametre d'échelle commun $\omega \sim \chi^2(\nu)$.
- Sachant ω, tirer X_1 et X_2, conditionnellement iid et gaussiens :

$$X_1, X_2 | \omega \sim \mathrm{iid}\, N(0, \nu/\omega).$$

- X_1 et X_2 ont chacune une loi marginale t de Student:

$$X_i \sim t(\nu),\ i = 1, 2.$$

- X_1 et X_2 sont non-corrélés :

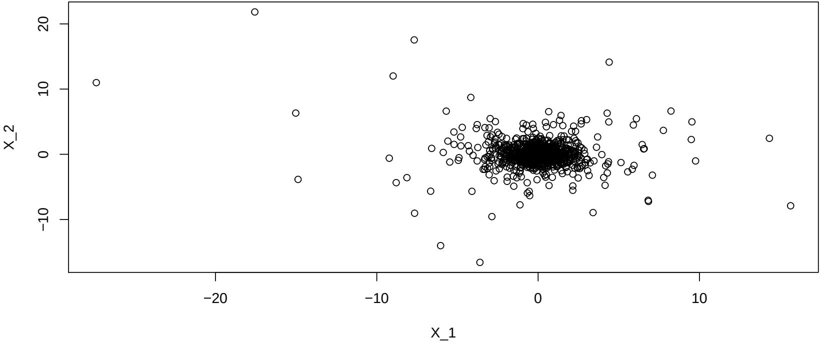
$$\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = E[\mathrm{Cov}[X_1, X_2|\omega]] + \mathrm{Cov}[E[X_1|\omega], E[X_2|\omega]] = 0$$

- X_1 et X_2 ne sont pas indépendents :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X_1^2, X_2^2] &= E[\mathrm{Cov}[X_1^2, X_2^2|\omega]] + \mathrm{Cov}[E[X_1^2|\omega], E[X_2^2|\omega]] \\ &= 0 + \mathrm{Var}[\nu/\omega] \neq 0.\end{aligned}$$

Non-corrélation versus indépendance II

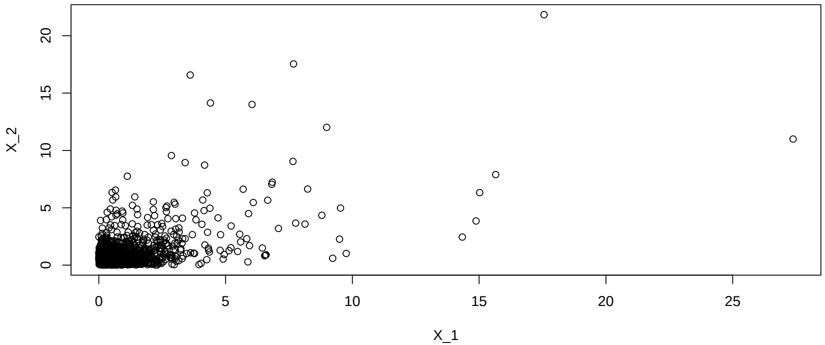
```
nu = 2
T = 1000; set.seed(12345)
omega = rchisq(T, nu)
X1 = rnorm(T, 0, sqrt(nu/omega))
X2 = rnorm(T, 0, sqrt(nu/omega))
plot(X1, X2, xlab='X_1', ylab='X_2')
```



Non-corrélation versus indépendence III

Remarquez la dépendance entre $|X_1|$ et $|X_2|$:

```
plot(abs(X1), abs(X2), xlab='X_1', ylab='X_2')
```



Fonctions d'autocorrélation, d'autocorrélations partielles

Fonction d'autocorrélation:

$$\rho_\tau = \mathrm{corr}[r_t, r_{t-\tau}] = \mathrm{Cov}[r_t, r_{t-\tau}]/\mathrm{Var}[\mathrm{r_t}].$$

Fonction d'autocorrélation partielle:

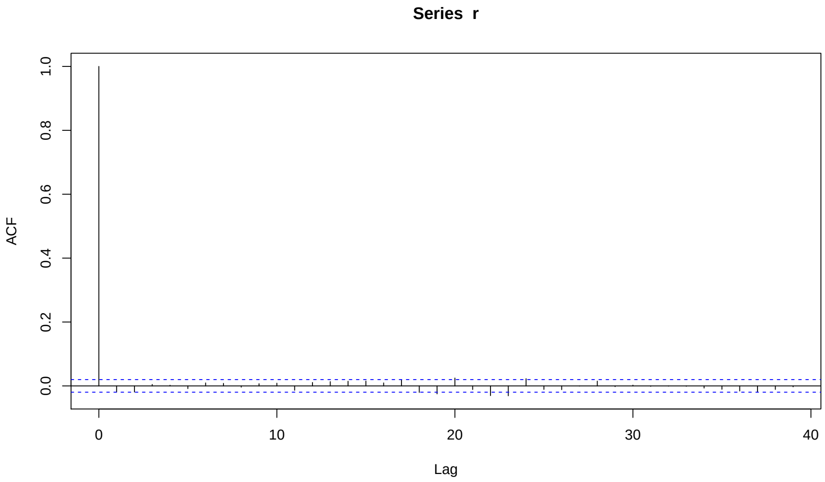
$$\phi_\tau = \mathrm{corr}[r_t, r_{t-\tau} | r_{t-1}, \ldots, r_{t-\tau+1}].$$

Quand r_t est covariance stationnaire, ϕ_τ est le coefficient $\phi_{\tau\tau}$ de $r_{t-\tau}$ dans la régression

$$r_t = \phi_{1\tau} r_{t-1} + \ldots + \phi_{\tau\tau} r_{t-\tau} + \epsilon_t, \quad E[\epsilon_t | r_{t-1}, \ldots, r_{t-\tau}] = 0.$$

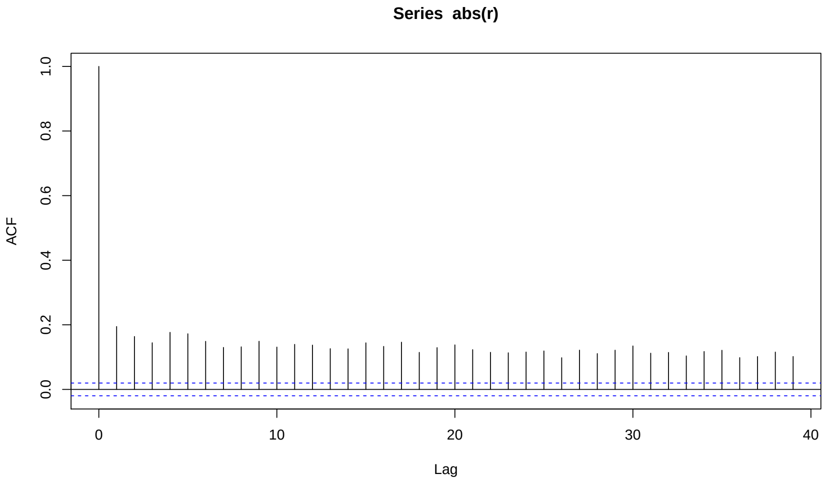
Fonction d'autocorrélation de r_t (rendement IBM)

```
acf(r)
```



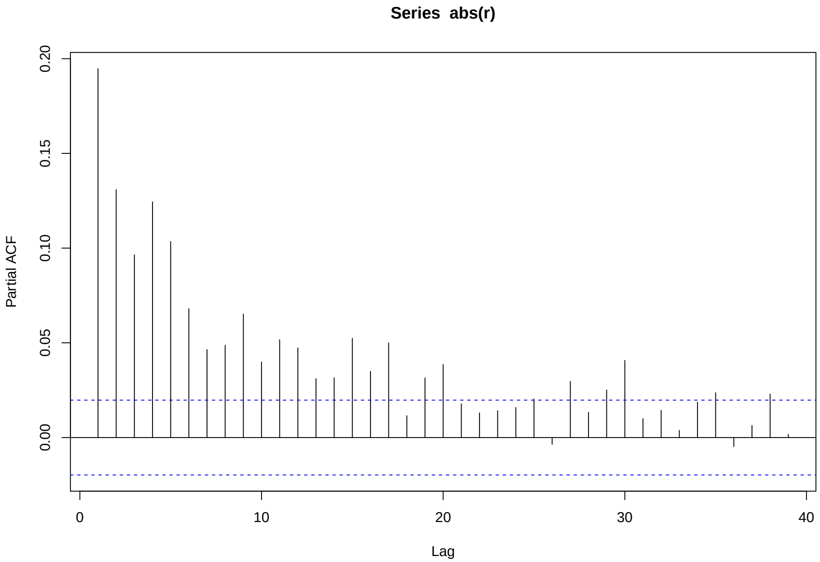
Fonction d'autocorrélation de $|r_t|$ (rendement IBM)

```
acf(abs(r))
```



Fonction d'autocorrélation partielle de $|r_t|$

```
pacf(abs(r))
```



Tests de non-autocorrélation

- Hypothèse H_0 : r_t est iid, de variance finie.
- Les lois ici sont asymtotiques, sous H_0.
- Test avec une autocorrélation isolée :

$$\hat{\rho}_k \sim N(0, T^{-1}).$$

- Test portmanteau (avec plusieurs autocorrélations) Box-Pierce :

$$T \sum_{l=1}^{m} \hat{\rho}_l^2 \sim \chi^2(m).$$

- Test portmanteau Ljung-Box (avec correction de biais)

$$T(T+2) \sum_{l=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_l^2}{T-l} \sim \chi^2(m).$$

Faits empiriques de Cont (2001)

1. Peu d'autocorrelation (r_t) sauf à une échelle de moins de 20 minutes.
2. Aplatissement inconditionnel plus grand que 3.
3. Asymmétrie négative pour les actifs et les indices.
4. Loi de r_t "plus gaussienne" à une échelle temporelle plus grande.
5. Variation de volatilité à toute échelle temporelle.
6. Persistence de volatilité.
7. Aplatissement conditionnel moins grand que l'aplatissement inconditionnel, mais toujours plus grand que 3.
8. La fonction d'autocorrélation de $|r_t|$ décroit selon une loi de puissance (plus lentement que de taux exponentiel). (Longue mémoire)
9. Effet de levier: changement de volatilité négativement corrélé avec le rendement actuel.
10. Corrélation positive entre volume et volatilité.

Cours 3, la semaine prochaine

Plan préliminaire

1. Modèles ARMA(p,q) de base