ECN 7060, cours 12

William McCausland

2018-11-28

Introduction, estimation par intervalle

- Estimateur par intervalle $[L(X), U(X)]$, estimation par intervalle $[L(x), U(x)]$.
- Les propriétés fréquentistes concernent la probabilité de couvrage
$$P_\theta(L(X) \leq \theta \leq U(X)).$$
  - souvent une fonction de θ, pas toujours (idéalement non)
  - restrictions sur le modèle pour obtenir cette non-dépendance
  - coefficient de confiance $\inf_\theta P_\theta(L(X) \leq \theta \leq U(X))$.
  - arbitrage : haute probabilité de couvrage v. intervalle court
- Les propriétés bayésiennes concernent la probabilité
$$P[L(x) \leq \theta \leq U(x)|x] \quad \text{ou} \quad P[l \leq \theta \leq u|x]$$
  - Stratégie symmétrique : $L(x)$ et $U(x)$ sont les quantiles $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$, $U(x) - L(x)$ pas forcément minimale
  - Intervalle de haute probabilité *a posteriori* : $U(x) - L(x)$ minimale sous la contrainte $P[L(x) \leq \theta \leq U(x)|x] = 1 - \alpha$.

Estimation par ensemble

- Estimateur par ensemble $C(X)$, estimation par ensemble $C(x)$.
- Probabilité d'intérêt fréquentiste : $P_\theta(\theta \in C(X))$.
- Probabilité d'intérêt bayésienne : $P(\theta \in C(x)|x)$.

Inversion d'une statistique test

- Résultat
  - Pour chaque θ_0, soit $A(\theta_0)$ la région de non-rejet pour un test de niveau α de l'hypothèse nulle $H_0 : \theta = \theta_0$.
  - Définez, pour chaque $x \in \mathcal{X}$, $C(x) = \{\theta : x \in A(\theta)\}$.
  - Notez que $x \in A(\theta) \Leftrightarrow \theta \in C(x)$.
  - Alors $C(X)$ est une région de confiance avec coefficient de confiance $(1 - \alpha)$.
- Preuve
  - Puisque le niveau du test est de α,

$$P_\theta[X \notin A(\theta)] \leq \alpha.$$

  - Alors

$$P_\theta[\theta \in C(X)] = P_\theta[X \in A(\theta)] \geq (1 - \alpha).$$

Exemple gaussien, σ^2 connu

- Supposons que $X_1, \ldots, X_n \sim \text{iid } N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 connu.
- Statistique LRT pour $H_0\colon \mu = \mu_0$ contre $H_1\colon \mu \neq \mu_0$:

$$\lambda(x) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right]}$$

- Puisque $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2$,

$$\lambda(x) = \exp[-n(\bar{x} - \mu_0)^2/(2\sigma^2)].$$

- La loi de $\bar{X}$ est connue : $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
- Pour le test avec $A(\mu_0) = \{x\colon |\bar{x} - \mu_0| \leq z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\}$, la probabilité de rejet quand $\mu = \mu_0$ est de α.
- Conditions équivalentes à $x \in A(\mu_0)$:

$$\begin{aligned}|\bar{x} - \mu_0| \leq z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} &\Leftrightarrow -z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu_0 - \bar{x} \leq z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \\ &\Leftrightarrow \bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu_0 \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\end{aligned}$$

- Alors $P[\bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu_0 \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}] = 1 - \alpha$.

Quantités pivotales

- Une fonction $Q(X, \theta)$ est pivotale si sa distribution ne dépend pas de θ.
- Famille $f(x|\mu) = f_0(x-\mu)$: $Q(X, \theta) = \bar{X} - \mu$ est pivotale.
- Preuve :
  - Soit $Z_i \sim f_0(z)$. Sa distribution ne dépend pas de μ.
  - Si $X_i \sim f(x|\mu) = f_0(x-\mu)$,

$$(X_1, \ldots, X_n) \sim (Z_1 + \mu, \ldots, Z_n + \mu)$$

$$\bar{X} - \mu \sim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Z_i + \mu) - \mu = \bar{Z}$$

  - La loi de $\bar{Z}$ (et de $Q(X, \theta) = \bar{X} - \mu$) ne dépend pas de μ.
- Famille $f(x|\sigma) = \frac{1}{\sigma} f(x/\sigma)$: $Q(X, \sigma^2) = \bar{X}/\sigma$ est pivotale.
- Famille $f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma} f_0((x-\mu)/\sigma)$: $Q_1(X, \theta) = (\bar{X} - \mu)/\sigma$, $Q_2(X, \theta) = (\bar{X} - \mu)/S$, $Q_3(X, \theta) = S/\sigma$ sont pivotales.

Utiliser une quantité pivotale pour construire un ensemble de confiance

- $C(X) = \{\theta \colon Q(X, \theta) \in \mathcal{A}\}$ est un estimateur par ensemble de θ dont la probabilité $P_\theta(C(X))$ ne dépend pas de θ.
- Stratégie : trouver une quantité pivotale $Q(X, \theta)$ et un ensemble $\mathcal{A}$ avec de bonnes propriétés ($C(X)$ petit, $P_\theta(C(X))$ grand).

Exemples gaussiens I

- Supposons que $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{iid}\, N(\mu, \sigma^2)$.
- Quantités pivotales :
  - $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$,
  - $T_{n-1} = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S \sim t(n-1)$.
  - $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$.
- Cas où σ^2 est connu :

$$1 - \alpha = P_\theta(-z_{\alpha/2} \leq -Z \leq z_{\alpha/2}) = P_\theta(C(X))$$

où $C(X)$ est l'estimateur par ensemble suivant

$$C(X) = \{\mu \colon \bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\}.$$

Exemples gaussiens II

- Cas où σ^2 n'est pas connu, intervalle pour μ :

$$1-\alpha = P_\theta(-t_{n-1,\alpha/2} \leq -T_{n-1} \leq t_{n-1,\alpha/2}) = P_\theta(C(X)),$$

où

$$C(X) = \{\mu \colon \bar{X} - t_{n-1,\alpha/2} S/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2} S/\sqrt{n}\}.$$

- Cas où σ^2 n'est pas connu, intervalle pour σ^2 :

$$1-\alpha = P_\theta(\chi_{n-1,1-\alpha/2} \leq (n-1)S^2/\sigma^2 \chi^2_{n-1} \leq \chi_{n-1,\alpha/2}) = P_\theta(C(X))$$

où

$$C(X) = \left\{\sigma^2 \colon \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1,\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1,1-\alpha/2}}\right\}.$$

Pivot de la fonction de répartition

- Soit T une statistique avec fonction de répartition $F_T(t|\theta)$.
- Supposons que T est stochastiquement croissante en θ.
- C'est à dire que $F_T(t, \theta)$ est décroissante en θ.
- Pour t donné, soit $\theta_L(t)$ et $\theta_U(t)$ les solutions de

$$F_T(t|\theta_U(t)) = \alpha_1 \quad F_T(\theta_L(t)) = 1 - \alpha_2.$$

- Pour tous t, θ,

$$\theta > \theta_U(t) \Leftrightarrow F_T(t, \theta) < \alpha_1$$

$$\theta < \theta_L(t) \Leftrightarrow F_T(t, \theta) > 1 - \alpha_2$$

- Alors

$$\{t \colon \theta_L(t) \leq \theta \leq \theta_U(t)\} = \{t \colon \alpha_1 \leq F_T(t|\theta) \leq 1 - \alpha_2\},$$

$$P_\theta[\theta_L(T) \leq \theta \leq \theta_U(T)] = P_\theta[\alpha_1 \leq F_T(T|\theta) \leq 1 - \alpha_2] = 1 - \alpha_1 - \alpha_2.$$