METODI 2

- FORMULARIO -

- Condizione di Cauchy – Riemann

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + iy$ C-R: $f_x(z) + i f_y(z) = 0$

C-R soddisfatta $\iff$ f derivabile in z

Considerando $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$:

$$\boxed{f_x + i f_y} \rightsquigarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \rightsquigarrow \text{in coordinate polari } \begin{cases} u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\varphi \\ \frac{1}{\rho} u_\varphi = -v_\rho \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} f_\rho + i \frac{1}{\rho} f_\varphi = \underbrace{(f_x + i f_y)}_{2 f_{z^*}} e^{-i\varphi} \\ f_\rho - i \frac{1}{\rho} f_\varphi = \underbrace{(f_x - i f_y)}_{2 f_z} e^{i\varphi} \end{cases}$$

si definiscono $f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y)$, $f_{z^*} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$

$$\boxed{f_\rho + \frac{i}{\rho} f_\varphi = 0}$$

- Funzioni analitiche

$f(z)$ analitica in D se $\forall z \in D$, $f(z)$ è differenziabile e $f'(z)$ continua

Se funzione è analitica, allora $f'(z) = \partial_z f(z)$

- Integrale di funzioni complesse:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\, z'(t)\, dt$$

non ho voglia di fare seghe topologiche

Γ percorso, Γ^{-1} percorso inverso

Proprietà:

1) $\int_\Gamma f(z)\, dz = -\int_{\Gamma^{-1}} f(z)\, dz$

2) $\int_\Gamma f(z) dz = \left[\int_{\Gamma_1} dz + \int_{\Gamma_2} dz\right] (f(z))$ con $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

3) $\left[\int_\Gamma dz\right] (\alpha f(z) + \beta g(z)) = \alpha \int_\Gamma dz\, f(z) + \beta \int_\Gamma g(z)$

4) Lemma di Darboux: $\left| \int_\Gamma f(z) dz \right| \le \int_\Gamma |f(z)|\, ds$ $ds = |dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

f continua, $\exists M : f(z) \le M \ \forall z \in \Gamma \Rightarrow \left| \int_\Gamma f(z)\, dz \right| \le M\, \ell(\Gamma)$

- Formula di Green (reali)

$$A, B \in C^1(D) \Rightarrow \int_{\partial D} A(x,y)\, dx + \int_{\partial D} B(x,y)\, dy = \iint_D dx\, dy\, (\partial_x B - \partial_y A)$$

- 1° teorema di Cauchy

$f(z)$ analitica in D $\Rightarrow$ $\boxed{\int_{\partial D} f(z)\, dz = 0}$

- 2° teorema di Cauchy

$f(z)$ analitica in D semplicemente connesso e continua in ∂D

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

$\Gamma \in D$ chiuso

Applicazioni:

1) Formula del valor medio

$\Gamma^+ \rightsquigarrow z_0 + R e^{i\varphi} \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\varphi}) \, d\varphi$

2) Principio del massimo modulo:

$f(z)$ analitica in D semplicemente connesso e continua in $\partial D \Rightarrow |f(z)|$ non ha massimi interni

Se $|f| \neq 0$, allora $\left|\frac{1}{f}\right|$ non ha massimi interni $\Rightarrow |f(z)|$ non ha minimi interni

Posso in questo modo definire:

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\eta)}{\eta - z} \, d\eta \Rightarrow f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \partial_z^{(n)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} \, d\eta$

- Teorema di Morera

$f(z)$ continua in D semplicemente connesso: $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall \Gamma \in D$ chiuso $\Rightarrow f(z)$ analitica

- Teorema di Liouville

$f(z)$ intera [analitica in $\mathbb{C}$], $|f(z)| < M \Rightarrow f$ costante

- Teorema fondamentale dell'algebra

$P(z) = \sum_n^N a_n z^n$, $N \geq 1 \Rightarrow P(z)$ ha almeno una radice in $\mathbb{C} \Rightarrow P(z)$ ha N radici

- Serie di funzioni analitiche:

$\sum_{n=0}^N u_n(z) = S_N(z)$

- Convergenza puntuale

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu(\varepsilon, z) : |f(z) - S_N(z)| < \varepsilon \quad \forall N \geq \nu \Rightarrow S_N \xrightarrow{P} f$ puntualmente

- Convergenza uniforme in D:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu(\varepsilon) : |f(z) - S_N(z)| < \varepsilon \quad \forall N \geq \nu, \forall z \in D \Rightarrow S_N \xrightarrow{U} f$ uniformemente in D

- Criterio di Weierstrass:

$|u_K(z)| \leq |a_K| \quad \forall z \in D \Rightarrow [\sum |a_K| < \infty \Rightarrow \sum u_K$ converge uniformemente in $D]$

- u_K continue, $\sum u_K \xrightarrow{U} f \Rightarrow f$ continua $\wedge \int_c f(z)\,dz = \sum_K \int_c u_K(z)\,dz \qquad c$ in D regolare a tratti

- Teorema di Weierstrass

$u_K(z)$ analitiche $\wedge \sum_K u_K \xrightarrow{U} f \Rightarrow \begin{cases} 1) \ f \text{ analitica in } D \\ 2) \ \forall n \ \exists f^{(n)} = \sum_K u_K^{(n)} \\ 3) \ \sum_K u_K^{(n)} \xrightarrow{U} f \text{ in ogni } \bar{G} \subset D \end{cases}$

- Teorema di Abel

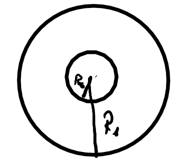
$\sum_{n=1}^N c_n (z - z_0)^n$ converge per $z = z_1 \neq z_0 \Rightarrow$ converge assolutamente $\forall z : |z - z_0| < |z_1 - z_0|$ e uniformemente $\forall \bar{B}(z_0, \rho)$, $\rho < |z_1 - z_0|$

- se analitica in $|z - z_0| < \rho \Rightarrow c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

- Teorema di Taylor

$f(z)$ analitica in $|z - z_0| < \rho \Rightarrow f(z) = \sum_n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

- Le radici di $f(z)$ analitica in D e non identicamente nulla sono punti isolati e gli eventuali punti di accumulazione delle radici sono punti di non analicità
- Serie di Laurent



$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = f_1(z) + f_2(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

f_1 analitica in $D_{R_1}(z_0) = \{ z : |z-z_0| < R_1 \}$

se $\eta := (z-z_0)^{-1}$, $f_2(z) \rightsquigarrow f_2(\eta) := \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \eta^n$ analitica in $D_{R_2}(0) = \{ \eta : |\eta| < R_3 \}$

$\Rightarrow R_2 = \frac{1}{R_3} < |z-z_0| < R_1$ per analicità

$$\Rightarrow \boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}} d\eta} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

se f analitica anche per $|z-z_0| < R_2$, $c_n = 0 \ \forall n < 0$

- Punti singolari isolati

z_0 radice isolata di $f(z) \Rightarrow$ posso sviluppare $f(z)$ in serie di Laurent

1) $c_n = 0 \quad \forall n < 0 \Rightarrow z_0$ punto singolare eliminabile, $\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0$

   $f(z)$ analitica per $|z-z_0| < R$ e limitata $\Rightarrow z_0$ punto singolare eliminabile

2) Lo sviluppo di $f(z)$ presenta un n° finito di c_n con $n < 0$: $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

   $\Rightarrow z_0$ è polo di ordine m $\left(f^{(m)}(z_0) \neq 0 \right)$

3) $f(z)$ contiene n° infinito di $c_n, n < 0 \Rightarrow z_0$ punto singolare essenziale

- Teorema di Casorati - Weierstrass

z_0 singolarità essenziale, $\forall \varepsilon > 0, \forall B(z_0, \rho), \forall s \in B \quad \exists z_1 : |f(z_1) - s| < \varepsilon$

- Teorema di Picard

1) $f(z)$ intera $\Rightarrow f(z)$ assume tutti i valori del piano complesso, tranne al massimo un punto

2) z_0 singolarità essenziale, $\forall B(z_0, \rho)$, $f(z)$ assume tutti i valori del piano complesso, tranne al massimo un punto, infinite volte $\left(\nexists \lim_{z \to z_0} f(z) \right)$

- Punto singolare a $z = \infty$ $\left(\exists R : f(z) \text{ analitica per } |z| < R \right)$; $f(z) = \sum c_n z^n$

1) $c_n = 0 \quad \forall n > 0 \Rightarrow$ singolarità eliminabile

2) $c_n = 0 \quad \forall n > m \geq 1 \Rightarrow z = \infty$ polo di ordine m

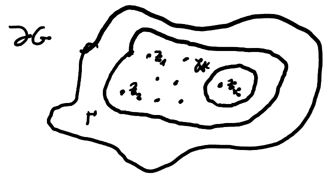
3) $c_n \neq 0 \quad \forall n > 0 \Rightarrow$ singolarità essenziale

- Residuo di $f(z)$ in un punto isolato z_0

$f(z) = \sum_n c_n (z-z_0)^n \Rightarrow \text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}$

- Se z_0 polo di ordine 1, $\quad c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$
- Se z_0 polo di ordine m, $\quad c_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right]$
- $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ $\quad \varphi \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0) g(z)}$ $\quad g(z_0) \neq 0 \quad c_{-1} = \varphi(z_0) / \psi'(z_0)$

- Teorema fondamentale dei residui (interno)



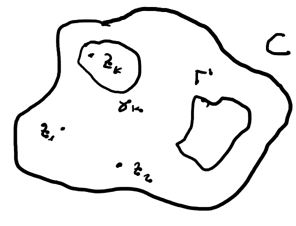
$f(z)$ analitica in $\bar{G}$ tranne in m punti singolari $\{z_k\} \in \bar{G}$

$\Rightarrow \int_{\Gamma^+} f(\eta)\, d\eta = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[f(z), z_k]$

- Residuo per $z_0 = \infty$

$\mathrm{Res}[f(z), z=\infty] = -c_{-1}$ $\qquad$ $\mathrm{Res}[f(z), z=\infty] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(\eta)\, d\eta$

- Teorema fondamentale dei residui (esterno)



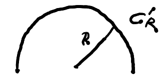
$f(z)$ analitica all'esterno di Γ tranne in $\{z_k\}$ isolati $\in \bar{G}$, $\partial G = C$

$z=\infty$ singolare $\notin \{z_k\}$

$\int_{\Gamma^+} f(\eta)\, d\eta = -\frac{1}{2\pi i}\left(\sum_k \mathrm{Res}[f(z), z_k] + \mathrm{Res}[f(z), \infty]\right)$

Se Γ' non comprende punti singolari $\sum_k \mathrm{Res}[f(z), z_k] + \mathrm{Res}[f(z), \infty] = 0$

- $f(z)$ analitica in $\mathrm{Im}(z) > 0$ tranne in m punti singolari isolati e $\max_{z \in C'_R} R|f(z)| \to 0$



$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{C'_R} d\eta\, f(\eta) = 0 \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) + \int_{C'_R} d\eta\, f(\eta) \to \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) = \sum_k \mathrm{Res}[f(z), z_k]$

- Integrali del tipo $\int d\theta \; R(\cos\theta, \sin\theta)$ dove $R = P/Q$, P e Q polinomi

$z = e^{i\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, $\frac{dz}{iz} = d\theta$

$\int d\theta \; R(\cos\theta, \sin\theta) = \oint_{|z|=1} \frac{\tilde{R}(z)}{iz}\, dz = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \mathrm{Res}[\tilde{R}(z), z_k]$

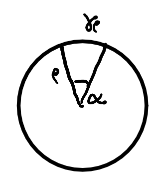
- Lemma di Jordan

$f(z)$ analitica in $\mathrm{Im}(z) > 0$ tranne m punti singolari isolati e tale che $\max_{z \in C'_R} |f(z)| = \mu_R \to 0$

$\Rightarrow \alpha > 0$, $\lim_{R\to+\infty} \int_{C'_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz = 0$ $\qquad$ [posso prendere $\mathrm{Im}(z) < 0$, $\alpha < 0$] $\Rightarrow$ l'integrale sulla semicirconferenza inferiore va a 0

- Se f soddisfa le ipotesi del lemma di Jordan e $\mathrm{Re}[f]$ non ha singolarità:

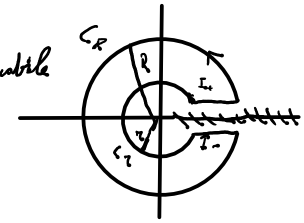
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_k) > 0} \mathrm{Res}[f(z) e^{i\alpha z}, z_k]$



- $F(z)$ ha polo di ordine 1 in z_0

$\Rightarrow \int_{\gamma_\rho} F(z)\, dz \xrightarrow{\rho \to 0} i\alpha\, \mathrm{Res}[F(z), z_0]$

- Integrali del tipo $\int_0^{+\infty} x^{\alpha - 1} f(x)\, dx$ con $0 < \alpha < 1$, $z=0$ singolare eliminabile



$f(z)$ analitica in $\mathbb{C}$ tranne in punti singolari isolati $z_k \notin \{z : \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) = 0\}$

$z^{\alpha-1} = |z|^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\varphi}$ (determinazione principale)

$\max |f(z)| 2\pi R^{\alpha} \to 0$ (condizione convergenza integrale)

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x)\, dx = \left(1 - e^{i2\pi(\alpha-1)}\right)^{-1} 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[z^{\alpha-1} f(z), z_k]}$$

Per z^α cambia la condizione di convergenza: $|f(z)|\, 2\pi R^{\alpha+1} \to 0$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)\,dx = (1-e^{i2\pi\alpha})^{-1}\, 2\pi i \sum_k \text{Res}\,[z^\alpha f(z), z_k]}$$

- Integrali del tipo $\int_0^{+\infty} \log(x) f(x)\,dx$ (taglio $x \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$)

Integrando sul percorso di prima: $\left[\int_{I^+} dz + \int_{I^-} dz\right](\log z\, f(z)) = 2\pi i \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_k \text{Res}\,[\log(z) f(z), z_k] - \left[\int_{C_R^+} dz + \int_{C_r^-} dz\right](\log z\, f(z))$$

Nel caso di $\log^2(z)\, f(z)$, supponendo che gli integrali sui cerchi vadano a 0, si ha

$$2\pi \int_0^{+\infty} f(x) - 2i \int_0^{+\infty} \log(x) f(x) = i \sum_k \text{Res}\,[\log^2(z) f(z), z_k]$$

- Funzioni analitiche e armoniche

$f_x + i f_y = 0 \Rightarrow f_{xx} + f_{yy} = 0 \Rightarrow \nabla^2 f = 0, \; \nabla^2 u = 0, \; \nabla^2 v = 0$

Se $u(x,y)$ è armonica, so che è la parte reale di una funzione analitica ($v_x = -u_y$, $v_y = u_x$)

u costante è linea equipotenziale, v costante linea di forza: $\langle \vec\nabla u, \vec\nabla v \rangle = u_x v_x + u_y v_y \overset{\text{C-R}}{=} 0 \Rightarrow \vec\nabla u$ linee di forza

- Teorema del valor medio

u armonica $\Rightarrow u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\; u(x_0 + R\cos\varphi,\, y_0 + R\sin\varphi)$

quindi u in un dominio limitato e connesso $\bar D$ assume estremi in ∂D

- Trasformazioni conformi

$z \mapsto w = f(z)$ analitica; $z_0 \mapsto w_0 \wedge f'(z_0) \neq 0 \iff \exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = k e^{i\alpha}$

- Funzione razionale lineare

$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ analitica in $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ $\quad a, c \neq 0$

$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \Leftarrow ad \neq bc$

- Problema di Dirichlet per un cerchio di raggio a

$z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ $\quad r_0 < a$; porto a ad 1 e r_0 a 0

$z \mapsto f(z) = \frac{a}{r_0} \frac{z - z_0}{z - a^2/z_0^*}$ $\quad f(z_0) = 0$ $\quad |f(a e^{i\varphi})| = 1$

Scrivi $u(x,y) = u(x(r', \varphi'), y(r', \varphi')) = U(r', \varphi')$ ..

- Funzione di Green $\tau = t - t'$

$b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau)\, a(t-\tau)\, d\tau = [G * a](t)$ se causale $b(t) = \int_0^{+\infty} G(\tau)\, a(t-\tau)\, d\tau$

- Trasformata di Fourier

$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \tilde f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} f(t)$ $\quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde f(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} \tilde f(\omega)$

- Legge di dispersione

$\tilde b(\omega) = \tilde G(\omega)\, \tilde a(\omega)$

Prendo $a(t) = E(t)$, $b(t) = P(t)$ reali $\Rightarrow G(t)$ reale, $\chi(\omega) = \tilde G(\omega)$

$\tilde P(\omega) = \chi(\omega)\, \tilde E(\omega)$

$\chi(\omega) = \chi_1(\omega) + i\,\chi_2(\omega)$ $\qquad$ χ_1 pari, χ_2 dispari

$\chi(\omega)$ analitica per $Im(\omega) > 0$ con $G(t) \in L^2$

- Relazioni di Kramers-Kronig (dispersione)

$$\begin{cases} \chi_1(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\nu - \omega} \chi_2(\nu)\, d\nu \\ \chi_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\nu-\omega} \chi_1(\nu)\, d\nu \end{cases} \Rightarrow \quad i\pi\,\chi(\omega) = P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\nu)}{\nu-\omega}\, d\nu$$

- Teorema di Titchmarsh: le seguenti affermazioni sono equivalenti

(i) $G(t) = 0$ per $t < 0$ e $G(t) \in L^2$

(ii) $\chi(\omega') \in L^2$, $\omega' \in \mathbb{R}$ $\wedge$ $\chi(\omega') = \lim_{\omega'' \to 0} \chi_1(\omega' + i\omega'')$, χ_1 analitica in $\omega'' > 0$ $\wedge$ $\exists \sup_{\omega''>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_1(\omega' + i\omega'')|^2 d\omega' < +\infty$

(iii) $\chi_1(\omega)$ e $\chi_2(\omega)$ sono legate dalle relazioni di dispersione

- Distribuzioni

Una distribuzione T è un funzionale lineare continuo

$T : \mathfrak{J} \mapsto \mathbb{C}$, con $\mathfrak{J}$ spazio delle funzioni "test" $\varphi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$[T](\varphi(x))(z) := \langle T, \varphi \rangle$

- linearità $\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T, \varphi_2 \rangle$
- continuità $\varphi_n \to \varphi \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$

- Spazio delle distribuzioni è $\mathfrak{J}'$ duale di $\mathfrak{J}$

- $\mathfrak{J} = C^\infty := E \Rightarrow \mathfrak{J}' := E'$ sono distribuzioni a supporto compatto

$\varphi_n \xrightarrow{E} 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $\varphi_n^{(k)} \to 0$ uniformemente $\forall B$ compatto $\subset \mathbb{R}$

- $\mathfrak{J} = \{\varphi : \varphi \in C^\infty \wedge \sup |x^h \varphi^{(k)}(x)| < +\infty \quad \forall h, k \in \mathbb{N}\} : S$

$\mathfrak{J}' := S'$ distribuzioni temperate

$\varphi_n \xrightarrow{S} 0 \Leftrightarrow \forall h, k \in \mathbb{N}$ $x^h \varphi_n^{(k)} \to 0$ uniformemente in $\mathbb{R}$

- $\mathfrak{J} = C_0^\infty = \{$ funzioni a supporto compatto $\in C^\infty \} := D$

$\mathfrak{J}' := D'$ distribuzioni di Schwartz

$\varphi_n \xrightarrow{D} 0 \Leftrightarrow \exists K$ compatto : $[$supporto $\varphi_n] \subset K$ $\forall n$ $\wedge$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi_n^{(k)} \to 0$ uniformemente in K

$D \subset S \subset E$, $E' \subset S' \subset D'$ $\qquad$ $\varphi_n \xrightarrow{D} 0 \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{S} 0$ $\wedge$ $\varphi_n \xrightarrow{S} 0 \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{E} 0$

- Delta di Dirac $\quad \delta(x - a) \in E'$

$\delta(x-a) = \delta_a$, $\quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$

- Esistono distribuzioni T_u associate a funzioni $u(x)$

$\langle T_u, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,\varphi(x)\, dx$

- Distribuzioni T_u di Schwartz, $u \in L^1$ localmente
- Distribuzioni T_u temperate, convergenze
  - $|u(x)| \leq M$, $\varphi_n \to 0 \Rightarrow \langle T_u, \varphi_n \rangle \to 0$
  - anche per $u \in L^1$, $u \in L^2$, $u \in P_n[x]$
- Supporto di una distribuzione
  se $\langle T, \varphi \rangle = 0$, $\text{supp}\, T = \Omega_i$: insieme nullo; $\forall \varphi$ $\text{supp}\, \varphi \subset \Omega_i$: aperto
  $\Omega := \bigcup_i \Omega_i$, $\text{supp}\, T = \overline{\Omega}$ (chiusura)
  se $T = T_u$, $\text{supp}\, T = \text{supp}\, u$
- Convergenza debole per distribuzioni
  $T_n \xrightarrow{S'} T$ se $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in S$ $\quad |u_n(x)| \leq M \Rightarrow T_{u_n} \xrightarrow{S'} T_u$
  $\langle T_{u_n}, \varphi \rangle = \int u_n(x) \varphi(x)\, dx$ posso usare convergenza dominata: $|u_n||\varphi| \leq M|\varphi|$
  - $u_n(x) \in L^2$, $u_n \xrightarrow{L^2} u$ o in convergenza debole $\Rightarrow T_{u_n} \xrightarrow{S'} T_u$
  - $u_n(x) \in L^1$, $u_n \to u$ puntualmente, $|u_n| \leq F \in L^1 \Rightarrow T_{u_n} \xrightarrow{S'} T_u$
- Derivata delle distribuzioni
  $T = T_u$, u derivabile $\Rightarrow T' := T_{u'}$; $\langle T_{u'}, \varphi \rangle = -\langle T_u, \varphi' \rangle$
  Per una T qualsiasi, $\langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle$ $\forall \varphi \in S$
  $\Rightarrow \langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle$
- Derivata $\theta(x)$, $\theta \in S'$
  $\langle D\theta, \varphi \rangle = -\langle \theta, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$
- $u(x)$ derivabile ovunque tranne che in x_0, punto di discontinuità
  $\sigma = \lim_{x \to x_0^+} u(x) - \lim_{x \to x_0^-} u(x)$
  $$\boxed{D\, T_u = \sigma \delta(x - x_0) + T_{u'}}$$
- Derivata $\delta(x - x_0)$
  $$\boxed{\langle D^{(n)} \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(x_0)}$$
- Trasformata di Fourier di funzioni S'
  $\langle \mathcal{F} T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F} \varphi \rangle$; $\langle \mathcal{F}^{-1} T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1} \varphi \rangle$
  $\mathcal{F}(D^n T) = (-i\omega)^n \mathcal{F}(T)$ $\qquad \mathcal{F}((ix)^n T) = D^n \mathcal{F}(T)$
  $\mathcal{F}(\delta^{(n)}(x)) = (-i\omega)^n$ $\qquad \mathcal{F}(x^n) = (-i)^n 2\pi \delta^{(n)}(\omega)$

- Parte principale

$$\mathcal{P}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[\int_a^{x_0-\varepsilon} dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b dx\right](f(x))\right) \quad \text{con } x_0 \text{ punto di discontinuità}$$

$$\mathcal{P}\int_{-a}^{a} \frac{1}{x}\,dx = 0$$ La distribuzione corrispondente $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in S'$ $\quad \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) = i\pi\,\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{sgn}(\omega))$

- Utili per il compito

1) $\delta_\pm(x) := \frac{1}{2}\delta(x) \pm \mathcal{P}\frac{1}{x}$ $\qquad \mathcal{F}(\delta_\pm) = \theta(\pm x)$

2) Funzioni che convergono a δ_0

$$u_n = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2} \qquad u_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\,e^{-x^2/\varepsilon} \qquad u_\ell = \theta(x)\,\frac{1}{\ell}\,x^{-\ell/\ell}$$

3) $\mathcal{F}(e^{-i\alpha x}) = 2\pi\,\delta(\omega-\alpha)$

4) $\mathcal{F}(\mathcal{P}\frac{1}{x}) = (\theta(x) - \theta(-x))\,i\pi$

5) Soluzione per $xT = 0$, $T = c\delta_0$ (fai funzione test)

6) $\qquad xT = aT \qquad T = c\,\delta_a$

7) $xT = 1 \qquad T = \underbrace{c\,\delta_0}_{\text{omogenea}} + \mathcal{P}\frac{1}{x}$

8) $x^2T = 1 \qquad T = c_1\delta_0 + c_2\delta_0' - D\,\mathcal{P}\frac{1}{x}$

9) $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\,\delta(x)$ $\qquad$ (RICORDA!)

10) $\mathcal{F}(f(t\pm a)) = e^{\mp i\omega a}\,\mathcal{F}(f(t)) \qquad \mathcal{F}^{-1}(f(\omega\pm a)) = e^{\pm ita}\,\mathcal{F}^{-1}(f(\omega))$

11) $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{P}\frac{1}{\omega}) = \frac{1}{2i}\,\mathrm{sgn}(t) \qquad \mathcal{F}^{-1}(\delta(\omega)) = \frac{1}{2\pi}$

12) $\mathcal{F}^{-1}(g_1 * g_2) = 2\pi\,\mathcal{F}^{-1}(g_1)\,\mathcal{F}^{-1}(g_2)$

13) $\mathcal{F}(\mathrm{sgn}(x)) = 2i\,\mathcal{P}\frac{1}{\omega} \qquad \mathcal{F}(\theta(\pm x)) = \pm i\,\mathcal{P}\frac{1}{\omega} + \pi\,\delta(\omega) = 2\pi\,\delta_\mp(\omega)$

$\quad \mathcal{F}(\theta(x)\,e^{i\alpha x}) = i\,\mathcal{P}\frac{1}{\omega+\alpha} + \pi\,\delta(\omega+a)$

14) Per trovare la funzione di Green generale per una equazione differenziale, metti input $= \delta(t)$