

Metodi Matematici della Fisica II

- Appunti tratti dalle lezioni del prof. L. Bracci -

A. Di Canto

a.a. 2005-06

Indice

1	Introduzione all'analisi complessa	1
1.1	Il piano complesso \mathbb{C}	1
1.2	Funzioni di variabile complessa. Analiticità.	2
1.3	Integrazione delle funzioni di variabile complessa. Teoremi di Cauchy	9
1.4	Proprietà delle funzioni analitiche	15
1.5	Sviluppi in serie di Taylor–Laurent	17
1.6	Prolungamento analitico e zeri di funzioni analitiche	20
1.7	Singolarità isolate, removibili ed essenziali	25
1.8	Calcolo dei residui	28
1.9	Comportamento all'infinito	30
1.9.1	Residuo all'infinito	32
1.10	Applicazioni del teorema dei residui	33
1.10.1	Calcolo di integrali sulla retta reale. Il lemma di Jordan	33
1.10.2	Indicatura logaritmica	35
1.10.3	Altra conseguenza	38
2	Funzioni armoniche e problemi di potenziale	41
2.1	Trasformazioni conformi, trasformazioni bilineari	42
2.2	La funzione di Green ed il suo uso per la soluzione di problemi omogenei e non	48
3	Sistemi lineari e indipendenti dal tempo	57
3.1	Funzione di Green per problemi lineari	59
3.1.1	Funzione di Green per un problema con condizioni iniziali date	59
3.1.2	Funzione di Green per un problema con condizioni al contorno date	63
3.2	Analisi in frequenza. Relazione fra proprietà di un segnale e proprietà dello spettro	69
3.3	Proprietà della funzione di Green nel dominio delle frequenze	73
3.4	Risposta alla $\theta(t)$	74
4	Elementi di teoria delle distribuzioni	79
4.1	Distribuzioni in \mathcal{D}'	81
4.2	Distribuzioni in \mathcal{S}'	83
4.3	Struttura locale delle distribuzioni	83
4.4	Trasformata di Fourier in \mathcal{S}'	86

4.4.1	Trasformate di Fourier utili	88
4.5	Derivata di una distribuzione	90
4.6	Successioni convergenti alla $\delta(x)$	91
4.6.1	Definizioni di $\delta(f(x))$	92
4.7	Serie convergenti nel senso delle distribuzioni	93
4.8	Moltiplicazione di una distribuzione per una funzione	96
4.8.1	Soluzioni di $xT = 0$	97
4.8.2	Soluzioni di $x^n T = 0$	98
4.8.3	Soluzioni di $f(x)T = 0$	98
4.9	Equazioni differenziali per le distribuzioni	99
4.9.1	Soluzione di $D^n T = 0$	99
4.9.2	Soluzione di $DT = V$	100
4.9.3	Soluzione di $DT = a(x)T + V$	101
4.9.4	Soluzione di un'equazione di ordine n	101
4.10	Distribuzioni a supporto puntiforme	102
4.11	Convoluzione	103
4.11.1	Prodotto di due distribuzioni	105
4.11.2	Convoluzione in \mathcal{D}'	108
4.11.3	Convoluzione in \mathcal{S}' e trasformata di Fourier di una convoluzione	108
5	Sistemi causali e relazioni di dispersione	111

Licenza d'uso ed altre avvertenze. Questo documento viene rilasciato secondo la licenza GNU *General Public License* (GPL o copyleft). Chiunque è autorizzato a distribuire copie elettroniche o cartacee del presente documento, allegarlo a raccolte, CD-ROM o programmi, a patto di citare la fonte da cui è stato tratto. Inoltre il presente documento può essere liberamente modificato in ogni sua parte purché venga rilasciato secondo la medesima licenza.

1 Introduzione all'analisi complessa

1.1 Il piano complesso \mathbb{C} .

Consideriamo l'insieme \mathbb{C} delle coppie ordinate di reali $z = (x, y)$ o, ciò che è equivalente, dei vettori del piano. I vettori $z = (x, y)$ e $\bar{z} = (x, -y)$ che sono rappresentati da dei punti simmetrici rispetto all'asse x sono detti coniugati. Identifichiamo il vettore $(x, 0)$ al reale x ; designiamo con \mathbb{R} l'insieme di tutti i reali (l'asse x). I reali ed essi soli sono tali che $z = \bar{z}$.

Dotiamo l'insieme \mathbb{C} di una struttura di corpo. Introducendo la somma vettoriale

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

possiamo allora rappresentare ogni elemento $z \in \mathbb{C}$ nella forma

$$z = 1 \cdot x + i \cdot y = x + iy \quad (1.1)$$

dove $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$ indicano rispettivamente i vettori unitari dell'asse x e dell'asse y . Definiamo il prodotto su \mathbb{C} ponendo

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

si ha allora che $i^2 = -1$ e che l'inverso moltiplicativo di $z \neq 0$ vale

$$z^{-1} = \bar{z}|z|^{-2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

Diamo per noto il fatto che queste operazioni conferiscono all'insieme \mathbb{C} una struttura di corpo, chiamato corpo dei numeri complessi; dunque un numero complesso $z = (x, y)$ è una coppia di reali x e y chiamati rispettivamente parte reale e parte immaginaria di z e vengono indicati con

$$x = \Re z \quad \text{e} \quad y = \Im z$$

I numeri tali che $\Re z = 0$ sono detti immaginari puri.

La rappresentazione cartesiana (1.1) si presta bene alla somma, ma per la moltiplicazione (così come per l'esponenziazione e per l'estrazione di radice) è più vantaggioso rappresentare un numero complesso nella sua forma polare

$$z = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

dove si è introdotti il raggio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e l'angolo polare φ , che è l'angolo fra l'asse positivo x ed il vettore z . Queste coordinate si chiamano rispettivamente modulo e argomento di z e si indicano con

$$r = |z| \quad \text{e} \quad \varphi = \arg z$$

Il modulo è definito in modo unico e l'argomento a meno di $2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Servendosi di formule elementari di trigonometria e della definizione del prodotto si ottiene la relazione

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

mentre

$$z^{-1} = r^{-1} e^{-i\varphi} \quad (\text{in particolare } |z^{-1}| = |z|^{-1})$$

Notiamo infine che \mathbb{C} è uno spazio metrico con la distanza euclidea

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Valgono allora le seguenti proprietà:

$$(i) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$(ii) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$(iii) \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Si dirà quindi che una successione $z_n \rightarrow z$ se $|z_n - z| \rightarrow 0$; notare che questo è equivalente a $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ perché $|x_n - x| \leq |z_n - z|$ (idem per $|y_n - y|$) e

$$|z_n - z| = |(x_n - x) - i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

1.2 Funzioni di variabile complessa. Analiticità.

Consideriamo in questa sezione funzioni complesse di una variabile complessa, cioè le corrispondenze fra il piano complesso e se stesso (o fra suoi sottoinsiemi)

$$f(z) : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Se si separa in f ed in z la parte reale ed immaginaria scrivendo $f = u + iv$ e $z = x + iy$ l'assegnazione di $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ equivale a quella dell'applicazione vettoriale

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

di $A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se $f \neq 0$ e si scrive $f(z) = \rho e^{i\phi}$, si può rappresentare l'applicazione f con le due relazioni

$$\rho = \rho(z) \quad \text{e} \quad \phi = \phi(z) + 2k\pi$$

Nei punti in cui la funzione f è nulla lo è anche ρ , mentre ϕ non è definita.

Sia f una funzione definita in un aperto A del piano complesso e $z_0 \in A$, f è continua in z_0 se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ovvero se u, v sono continue in z_0 .

La funzione f è invece derivabile in $z_0 \in A$ se esiste

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \equiv f'(z_0)$$

È chiaro che se la derivata $f'(z)$ esiste essa è uguale a $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Osservazione: La derivabilità implica la continuità, infatti

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| |z - z_0|$$

dove il primo termine è limitato mentre il secondo tende a zero.

Teorema 1.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché f risulti derivabile in z è che esistano le derivate parziali prime continue di f in z e che si abbia*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad \left(o, \text{ analogamente, } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

Dimostrazione. Mostriamo la necessità: se f è derivabile vuol dire che il rapporto incrementale ha limite indipendentemente dalla direzione lungo cui esso viene eseguito, in particolare lungo gli assi si ha

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \begin{cases} \lim_{\Delta z = \Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \lim_{\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{i\Delta y} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Per dimostrare la sufficienza notiamo che l'esistenza delle derivate parziali prime (cioè la differenziabilità di f in senso reale) implica

$$f(z + \Delta z) = f(z) + f_x(z)\Delta x + f_y(z)\Delta y + o(|\Delta z|)$$

dove $o(|\Delta z|)$ è un infinitesimo di ordine superiore in $|\Delta z|$. Allora usando la condizione (1.2) si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x + i\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(z)\Delta x + f_y(z)\Delta y + o(|\Delta z|)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x + i\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\Delta x + i\Delta y)f_x(z) + o(|\Delta x + i\Delta y|)}{\Delta x + i\Delta y} = f_x(z) \end{aligned}$$

che prova la derivabilità di f in z . □

Le (1.2) sono dette **condizioni di Cauchy–Riemann**.

Poiché la derivata di una funzione di variabile complessa si definisce come in analisi reale, le operazioni elementari di derivazione (derivata di una somma, di un prodotto, di un quoziente, di una funzione composta e del reciproco) si generalizzano senza cambiamenti al caso complesso. Ad esempio:

- (i) $f(z) = z$ è derivabile e $df/dz = 1$;
- (ii) $f(z) = z^n$ è derivabile e $df/dz = nz^{n-1}$;
- (iii) I polinomi $P_n(z)$ di grado n sono derivabili, così come P_n/Q_m (ovviamente nei punti in cui $Q_m(z) \neq 0$);
- (iv) $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ è derivabile (dato che u, v sono differenziabili e obbediscono alle condizioni (1.2) di Cauchy-Riemann) e vale

$$\frac{d}{dz}(e^z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos x + i e^x \sin y = e^z$$

- (v) $\sin z$ e $\cos z$ sono derivabili (perché somma e composizione di funzioni derivabili) e vale

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z \quad \text{e} \quad \frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$$

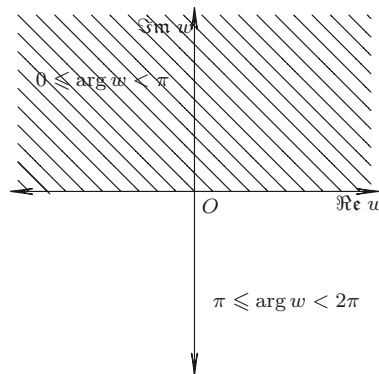
Occupiamoci ora, attraverso un esempio, della definizione della funzione inversa; consideriamo l'inversa della funzione $z = w^2$ cioè occupiamoci della funzione

$$f(z) = \sqrt{z}$$

Questa è una funzione a "due valori", cioè, fissato $z \neq 0$, esistono sempre due valori w_1, w_2 che elevati al quadrato danno z (ovviamente essi sono tali che $w_1 = \pm w_2$); dato che siamo interessati a funzioni ad un solo valore, potremmo allora definire

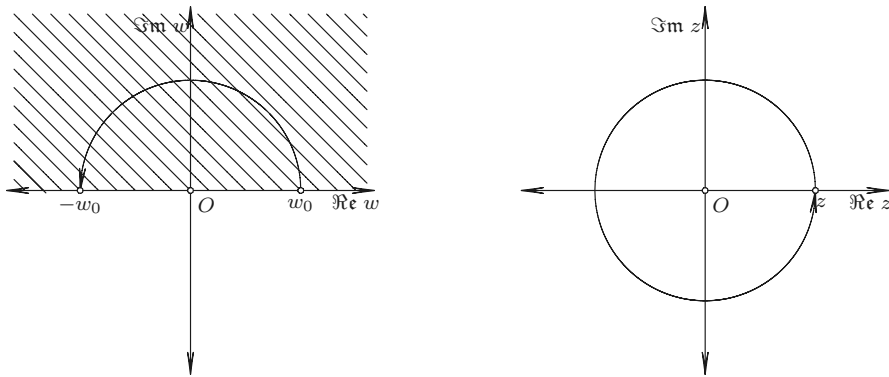
$$f(z) = f_+(z) \equiv \sqrt{|z|} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \left(\text{essendo } z = |z|e^{i\theta} \right)$$

dove il segno $+$ indica che bisogna prendere la radice quadrata reale positiva di $|z|$. Così facendo, però, la funzione $f(z)$ risulta non continua: notiamo infatti che la funzione $z = w^2$ stabilisce una corrispondenza biunivoca fra un semipiano, ad esempio quello per cui $0 \leq \arg w < \pi$, esclusa l'origine ed il piano complesso.



Si ha che se w compie un semicerchio, o comunque passa da un valore w_0 a $-w_0$ girando

nel semipiano superiore, corrispondentemente $z = w^2$ compie un giro completo; cioè mentre z torna al valore di partenza, $w = f_+(z)$ cambia di segno.



Se poi w passa nel semipiano inferiore i valori che trovo sono quelli relativi alla funzione $f_-(z)$, mentre z ripercorre il cammino precedente. Per rimediare si pensano i due piani z corrispondenti a w nel semipiano superiore e a w nel semipiano inferiore come due piani distinti tali che, quando z compie un giro completo intorno all'origine w passa da un piano (quello dove è definita $f_+(z)$) all'altro (dove è definita $f_-(z)$). Così facendo fare un giro completo a w (e quindi due giri a $z = w^2$) il valore di w torna a quello di partenza.

In altre parole si pensa $f(z) = \sqrt{z}$ definita ad un solo valore su una superficie a due piani o fogli (detta **superficie di Riemann**), tale che per passare da un foglio all'altro bisogna fare un giro intorno all'origine (vedi fig. 1.1); il primo foglio corrisponde a $0 \leq \arg w < \pi$, il secondo a $\pi \leq \arg w < 2\pi$ (la scelta di $0, \pi, 2\pi$ è arbitraria, $\alpha, \alpha+\pi, \alpha+2\pi$ va altrettanto bene).

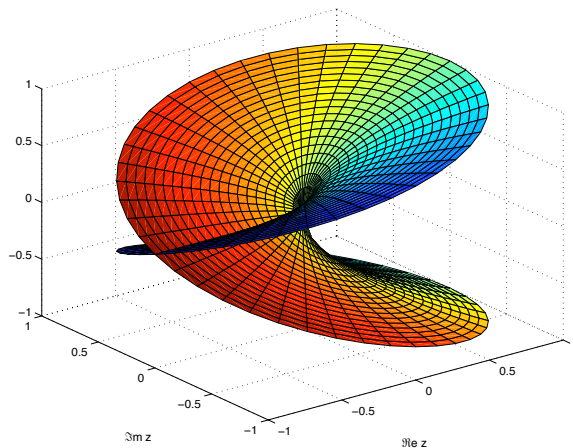


Figura 1.1: Superficie di Riemann della funzione \sqrt{z} .

Diremo che un punto z_0 (in questo caso $z_0 = 0$) si chiama **punto di diramazione** per

f se, comunque preso un intorno di z_0 esistono in tale intorno cammini chiusi lungo i quali la funzione cambia valore.

Osservazione: La funzione \sqrt{z} risulta derivabile e vale

$$\frac{d}{dz}(\sqrt{z}) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

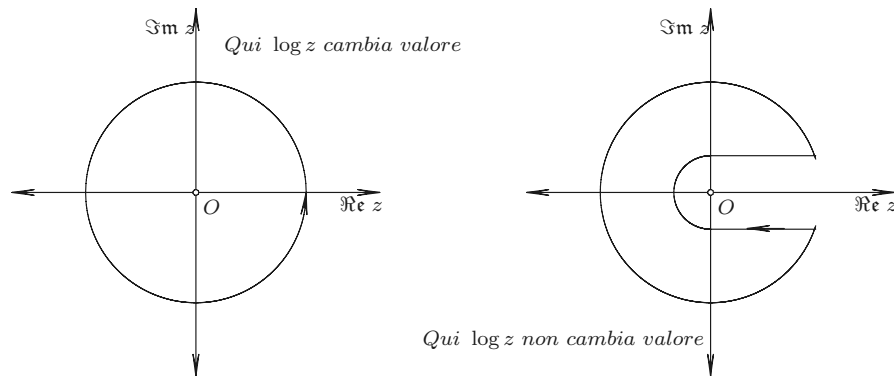
Discutiamo ora l'inversione della funzione $z = e^w = e^u e^{iv}$. Al variare di u si ha che $0 \leq e^u = |z| < \infty$; per $0 \leq v < 2\pi$ (o in generale $\alpha \leq v < \alpha + 2\pi$) l'argomento di z percorre un giro completo, cioè la striscia individuata dalle relazioni $-\infty < u < \infty$ e $0 \leq v < 2\pi$ è l'immagine del piano z esclusa l'origine (dato che $\nexists w$ tale che $e^w = 0$); ovvero ogni striscia orizzontale del piano w di ampiezza 2π è in corrispondenza biunivoca col piano z privato dell'origine. La funzione inversa di $z = e^w$, che in modo naturale è chiamata

$$f(z) = \log z$$

è quindi una funzione ad infiniti valori; per trattare $\log z$ come una funzione ad un solo valore la si immagina allora definita su una superficie ad infiniti fogli (e ogni volta che z compie un giro completo intorno all'origine si passa da un foglio al successivo). Esplicitando $z = e^u e^{iv}$ possiamo scrivere¹

$$\log z = \ln |z| + i \arg z$$

Ogni foglio è individuato fissando i limiti ad $\arg z$ (ad esempio $0 \leq \arg z < 2\pi$); si dice che fissare questi limiti introduce nel piano z un taglio (che nel nostro caso è individuato dal semiasse reale positivo), e che se si fa un percorso chiuso che attraversa il taglio la funzione cambia valore.



In generale si chiama **taglio** ogni linea che nel piano complesso congiunge due punti di diramazione (nel caso precedente l'altro punto di diramazione è il punto all'infinito, come vedremo in seguito).

¹Nel seguito useremo la convezione per cui $\log z$ indicherà la funzione logaritmo a valori complessi, mentre $\ln x$ quella a valori reali.

Osservazione: La funzione $\log z$ risulta derivabile e vale

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}$$

Tramite $\log z$ si definisce

$$z^\alpha \equiv e^{\alpha \log z} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C}$$

che è una funzione a più valori se α non è intero; infatti

$$e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\ln|z| + i \arg z)} = e^{\alpha \ln|z|} e^{i\alpha \arg z}$$

se $\arg z$ cresce di 2π si ha che

$$e^{i\alpha \arg z} \rightarrow e^{i\alpha(\arg z + 2\pi)} = e^{i\alpha \arg z} e^{2\pi i\alpha}$$

dove l'ultimo fattore è 1 se e solo se α è intero. Il caso $\alpha = 1/2$, discusso precedentemente, riduce gli infiniti fogli su cui $\log z$ è ad un solo valore a 2, perché dopo due giri $\arg z \rightarrow \arg z + 4\pi$ e $e^{2\pi i} = 1$. Un altro esempio è dato dalla funzione

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = e^{\frac{1}{2} \log(z^2 - 1)} = |z^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg(z^2 - 1)}$$

anche questa è a due valori dato che se $\arg(z^2 - 1)$ cresce di 4π il valore di $\sqrt{z^2 - 1}$ non cambia. È spesso utile sapere come si deve tagliare il piano z per avere una determinazione ad un solo valore di $f(z)$. La domanda da porsi è: quali percorsi chiusi nel piano z portano ad una variazione di $\pm 2\pi$ di $\arg(z^2 - 1)$? La risposta è data dalla seguente

Osservazione: Se $f = gh$ e γ è una curva chiusa, si ha che la variazione

$$\Delta_\gamma \arg f = \Delta_\gamma \arg g + \Delta_\gamma \arg h$$

Dimostrazione. Sia $\theta = \arg f$, ovvero

$$\Delta_\gamma \theta = \int_\gamma \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} dx + i \frac{\partial \theta}{\partial y} dy \right)$$

ora se $f = u + iv$ si ha che $\theta = \arctan \frac{v}{u}$ e che

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{v_x u - v u_x}{u^2 + v^2} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{v_y u - v u_y}{u^2 + v^2}$$

poste $g = a + ib$ e $h = p + iq$ sarà $u = ap - bq$ e $v = aq + bp$. Facendo un po' di conti si trova

$$\theta_{x,y} = \frac{b_{x,y}a - ba_{x,y}}{a^2 + b^2} + \frac{q_{x,y}p - qp_{x,y}}{q^2 + p^2}$$

per cui

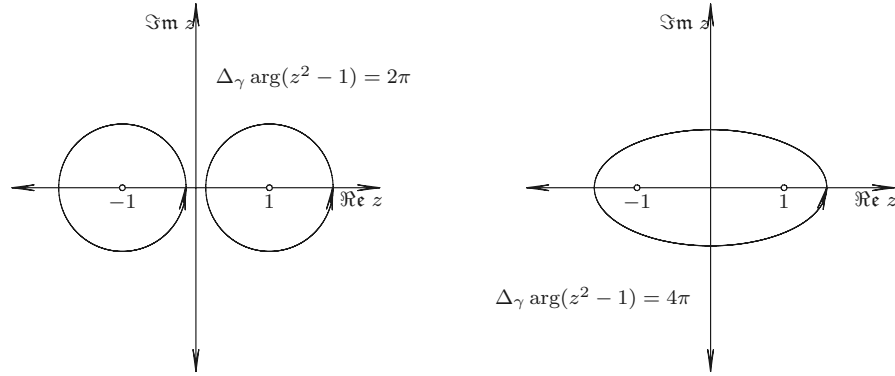
$$\begin{aligned} \Delta_\gamma \theta &= \int_\gamma \left(\frac{q_x p - q p_x}{q^2 + p^2} dx + \frac{q_y p - q p_y}{q^2 + p^2} dy \right) + \int_\gamma \left(\frac{b_x a - b a_x}{a^2 + b^2} dx + \frac{b_y a - b a_y}{a^2 + b^2} dy \right) \\ &= \Delta_\gamma \arg g + \Delta_\gamma \arg h \end{aligned}$$

□

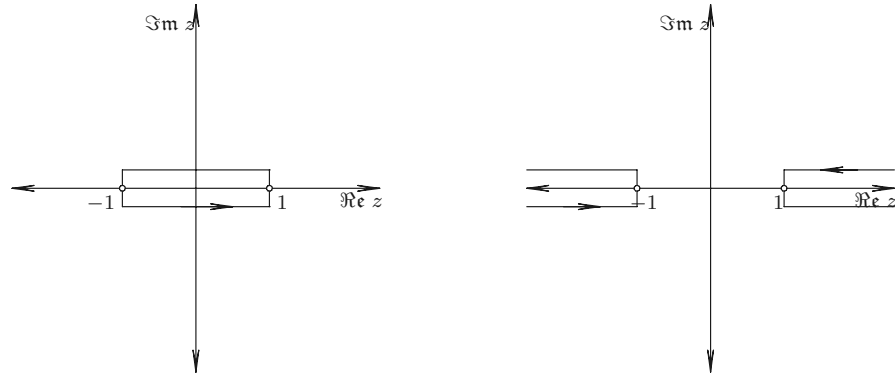
Tornando all'esempio in considerazione si ha

$$\Delta_\gamma \arg(z^2 - 1) = \Delta_\gamma \arg(z - 1) + \Delta_\gamma \arg(z + 1)$$

È chiaro che $\arg(z - 1)$ varia di 2π se z gira intorno ad 1, e $\arg(z + 1)$ se si gira intorno a -1 . Allora per tagliare il piano in modo che $\arg(z^2 - 1)$ non vari bisogna evitare i cammini chiusi che girano intorno ad uno di tali punti (ma non intorno ad entrambi perché in tal caso $\arg(z^2 - 1)$ cresce di 4π).



In questo caso possiamo dire che il taglio è individuato dal segmento di retta reale che unisce i punti -1 e 1 , quindi due semplici percorsi lungo i quali $\sqrt{z^2 - 1}$ non cambia sono, ad esempio, questi mostrati in figura:



La prima soluzione si ottiene prendendo $0 \leq \arg(z - 1) < 2\pi$ e $0 \leq \arg(z + 1) < 2\pi$; la seconda prendendo $0 \leq \arg(z - 1) < 2\pi$ e $-\pi \leq \arg(z + 1) < \pi$.

Osservazione: Allo stesso modo si vede che se $h \neq 0$ e $f = g/h$ vale

$$\Delta_\gamma \arg f = \Delta_\gamma \arg g - \Delta_\gamma \arg h$$

Si dice che una funzione f è **analitica** (o **olomorfa**) in un aperto A se è derivabile in A ; si dice che f è analitica in un punto $z \in \mathbb{C}$ se è derivabile in un intorno di questo

punto.

Consideriamo, ad esempio, la funzione $f(z) = z\bar{z}$; si ha

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z} = z\overline{\Delta z} + \bar{z}\Delta z$$

quindi il rapporto incrementale

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \bar{z} + \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$\overline{\Delta z}/\Delta z$ non ha limite per $\Delta z \rightarrow 0$ (ad esempio, se $\Delta z = \Delta x$ il rapporto è 1, mentre se $\Delta z = i\Delta y$ è -1). La derivata esiste solo se $z = 0$, ma $f(z) = z\bar{z}$ non è analitica in $z = 0$ perché non esiste un intorno in cui f sia derivabile.

La funzione $f(z) = (z - \bar{z})^2$, invece, è derivabile per z reale, infatti

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (\Delta z - \overline{\Delta z})^2 + 2(z - \bar{z})(\Delta z - \overline{\Delta z})$$

dove il secondo termine, diviso per Δz , contiene $(z - \bar{z})\overline{\Delta z}/\Delta z$ che, come prima, ha limite solo se $z - \bar{z} = 0$, cioè solo se z è reale. Neanche questa funzione allora è analitica in qualche punto, perché non esiste mai un intorno in cui sia derivabile.

1.3 Integrazione delle funzioni di variabile complessa. Teoremi di Cauchy

Se $\gamma(t)$, con $t \in [0, 1]$ è una curva regolare (vale a dire \mathcal{C}^1 a tratti) e $f(z)$ una funzione continua (non necessariamente analitica), si definisce l'integrale di f su γ come l'integrale lungo γ della forma differenziale in due variabili $f(x + iy)dx + if(x + iy)dy$, cioè

$$\int_{\gamma} f(z)dz \equiv \int_{\gamma} (u(x)dx - v(y)dy) + i \int_{\gamma} (u(x, y)dy + v(x, y)dx)$$

Valgono evidentemente le seguenti proprietà:

(i) se γ va da z_1 a z_2 si ha che

$$\int_{\gamma(z_1, z_2)} dz = z_2 - z_1$$

(ii) cambiando il senso di percorrenza della curva si inverte il segno dell'integrale, cioè

$$\int_{\gamma(z_1, z_2)} f(z)dz = - \int_{\gamma(z_2, z_1)} f(z)dz$$

(iii) linearità, cioè (dato $\lambda \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \lambda f(z)dz &= \lambda \int_{\gamma} f(z)dz \\ \int_{\gamma} (f(z) + g(z))dz &= \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\gamma} g(z)dz \end{aligned}$$

Notiamo che per le funzioni a valori complessi non vale il teorema della media integrale per cui

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

infatti $\forall \xi \in [0, 2\pi]$ si ha sempre

$$2\pi e^{i\xi} \neq \int_0^{2\pi} e^{iz} dz = 0$$

In compenso vale il seguente

Teorema 1.2 (di Darboux). *Posto $M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$ si ha*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M L(\gamma)$$

dove con $L(\gamma)$ si è indicata la lunghezza della curva γ .

Dimostrazione. Innanzitutto, dato che f è continua, cioè u, v sono continue, risulta che $|f|$ ha massimo su γ limitata e chiusa, quindi

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_0^1 |f| \left| \frac{dz}{dt} \right| dt \leq M \int_0^1 \left| \frac{dz}{dt} \right| dt = M L(\gamma)$$

□

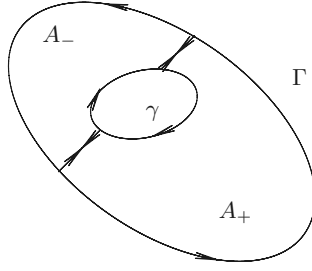
Teorema 1.3 (di Cauchy I). *Se A è un aperto semplicemente connesso e f è analitica su $\bar{A} = A \cup \partial A$ (o f è analitica in A e continua in \bar{A}) allora*

$$\oint_{\partial A} f(z) dz = 0$$

Dimostrazione. La tesi segue da un noto teorema per le forme differenziali in due variabili, osservando in particolare che le condizioni (1.2) di Cauchy–Riemann che esprimono l'analiticità coincidono con quelle di irrotazionalità della forma differenziale. □

Osservazione: Dal teorema appena enunciato seguono immediatamente i seguenti fatti:

- (i) Se A non è semplicemente connesso è facile vedere che vale ancora la tesi. Consideriamo, ad esempio, l'aperto $A = A_+ \cup A_-$ mostrato in figura:



Evidentemente si ha

$$\oint_{\partial A_{\pm}} f(z)dz = 0$$

Convenendo di percorrere la frontiera in modo da avere l'interno a sinistra, sommando otteniamo

$$\oint_{\partial A} f(z)dz = \oint_{\partial A_+} f(z)dz + \oint_{\partial A_-} f(z)dz = 0$$

dato che i tratti in comune sono percorsi due volte in senso opposto.

(ii) Dall'esempio appena fatto segue anche che

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma} f(z)dz$$

(iii) Siano γ_1, γ_2 due curve che portano da z a z' , se la regione compresa tra le due curve è di analiticità per f (bordo compreso) allora

$$\int_{\gamma_1(z, z')} f(z)dz = \int_{\gamma_2(z, z')} f(z)dz$$

La conseguenza più importante del teorema 1.3 di Cauchy I è il seguente

Teorema 1.4 (di Cauchy II). *Se f è analitica in z_0 per definizione è analitica in tutto un intorno di z_0 e, in tale intorno, si può trovare una curva chiusa γ che racchiude z_0 . Risulta*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Dimostrazione. Infatti, preso ε tale che $\gamma_{\varepsilon} = \{|z - z_0| = \varepsilon\}$ sia interna a γ , per il teorema 1.3 di Cauchy I si ha che

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Ma

$$\oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) \oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z - z_0}$$

Il secondo integrale si calcola: scritto $z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$ trovo $dz = i\varepsilon e^{i\theta}$ e quindi

$$\oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = 2\pi i$$

da cui

$$\oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) + \oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

Facendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ l'ultimo integrale si annulla in quanto l'integrando, ovvero il rapporto incrementale, è limitato (dato che f è derivabile in z_0) e $L(\gamma) = 2\pi\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Naturalmente anche il teorema 1.4 di Cauchy II continua a valere se f è continua su γ e analitica dentro.

Abbiamo già visto che se f è analitica allora è derivabile, mostriamo ora che la derivata di una funzione analitica è ancora analitica. Innanzitutto scriviamo il rapporto incrementale sottoforma di integrale grazie al teorema 1.4 di Cauchy II

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta + \Delta z) - f(\zeta)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{\Delta z} \left(\frac{1}{z - \zeta - \Delta z} - \frac{1}{z - \zeta} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \zeta - \Delta z)(z - \zeta)} dz \end{aligned}$$

dove γ è una curva chiusa interna al dominio di analiticità e Δz è tale che $\zeta + \Delta z$ sia ancora dentro γ . Facendo il limite per $\Delta z \rightarrow 0$ (l'operazione di limite si può portare sotto il segno di integrale) si trova

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} dz$$

Alternativamente, se $\zeta = x + iy$, dato che $1/(z - \zeta)$ è analitica in ζ (ovvero soddisfa le condizioni (1.2) di Cauchy–Riemann), per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ha

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\zeta} &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{z - \zeta} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{z - \zeta} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} dz \end{aligned}$$

Il punto importante è che questa ultima espressione si può ancora derivare rispetto a x , dato che $1/(z - \zeta)^2$ è ancora analitica in ζ ; ne segue allora che se f è analitica, è derivabile infinite volte e in generale vale la **formula integrale di Cauchy**

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz \quad (1.3)$$

Abbiamo già visto che se f è analitica in A aperto semplicemente connesso e $z_0, z \in A$ l'integrale lungo una curva γ che congiunge z_0 con z è indipendente dalla curva scelta purché γ sia interamente contenuta in A . È quindi ben definita

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \equiv \int_{\gamma(z_0, z)} f(\zeta) d\zeta$$

Teorema 1.5 (di Morera). *Risulta che la $F(z)$ appena definita è analitica e*

$$F'(z) = f(z)$$

Dimostrazione. Se Δz è tale che $z + \Delta z \in A$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) &= \frac{1}{\Delta z} \left(\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta - f(z) \int_z^{z+\Delta z} d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \end{aligned}$$

Dato ε , per la continuità di f se $|\Delta z|$ è piccolo ho che $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$, quindi

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} |\Delta z| \varepsilon = \varepsilon$$

cioè $\Delta F / \Delta z \rightarrow f$. □

Osservazione: Notiamo che:

- (i) Naturalmente anche $F(z) + a$ è analitica e $\frac{d}{dz}(F(z) + a) = f(z)$, nella discussione fatta abbiamo cioè tacitamente assunto $F(z_0) = 0$; in generale vale

$$F(z) - F(z_0) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

- (ii) L'analiticità di f ci è servita solo per definire $F(z)$ indipendentemente dal cammino percorso; per la dimostrazione del teorema è bastata la continuità in A . Allora, se f è continua in A e $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ non dipende dal cammino percorso, $F(z)$ è ancora ben definita, derivabile e vale $F'(z) = f(z)$.

Conseguenza del teorema 1.5 di Morera è il seguente

Lemma 1.6. *Siano A semplicemente connesso, $\{f_n\}$ una successione di funzioni analitiche in A tale che $f_n \rightarrow f$ uniformemente, allora f è analitica in A .*

Dimostrazione. Innanzitutto f è continua perché limite uniforme di funzioni continue (in quanto analitiche); per vedere che f è analitica basta verificare che, se γ è contenuta in A

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Ma, preso ε , per la convergenza uniforme ho che

$$\left| \oint_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \oint_{\gamma} (f(z) - f_n(z)) dz \right| \leq \oint_{\gamma} |f(z) - f_n(z)| |dz| \leq \varepsilon L(\gamma)$$

facendo tendere $\varepsilon \rightarrow 0$ ottengo la tesi. \square

Osservazione: Si ha immediatamente che $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ uniformemente.

Le considerazioni precedenti ci permettono di discutere la analiticità di funzioni definite tramite integrali, come ad esempio la trasformata di Fourier e la funzione Γ di Eulero:

$$\hat{f}(\omega) = \int f(t) e^{i\omega t} dt, \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Lemma 1.7. *Sia γ una curva regolare, fatta da un numero finito di pezzi tali che ciascuno è rappresentato da una $\zeta(t)$ (con $t \in [0, 1]$) continua con derivata prima continua (in tal modo γ ha lunghezza finita). Consideriamo la funzione*

$$f(z) = \int_{\gamma} g(z, \zeta) d\zeta$$

con $g(z, \zeta)$ analitica in z per $z \in A$ aperto, e continua in (z, ζ) per $z \in A$ e $\zeta \in \gamma$. Si ha che f è analitica in A .

Dimostrazione. Preso $z \in A$, considero un insieme chiuso $\overline{B} \subset A$ tale che $z \in \overline{B}$. La funzione g è uniformemente continua in $\overline{B} \times \gamma$ e quindi f è continua in $\overline{B} \times \gamma$:

$$\begin{aligned} |f(z_2) - f(z_1)| &= \left| \int_{\gamma} [g(z_2, \zeta) - g(z_1, \zeta)] d\zeta \right| \\ &\leq \int_{\gamma} |g(z_2, \zeta) - g(z_1, \zeta)| |d\zeta| \\ &\leq \varepsilon L(\gamma) \end{aligned}$$

se z_1 e z_2 sono abbastanza vicini, indipendentemente da ζ per la uniforme continuità. Per concludere che f è analitica resta da verificare che

$$\oint_{\gamma'} f(z) dz = 0$$

Se $z(p)$ con $p \in [0, 1]$ descrive la curva γ' si ha (supponendo per semplicità γ descritta da una sola $\zeta(t)$)

$$\oint_{\gamma'} f(z) dz = \int_0^1 dp \frac{dz}{dp} \int_0^1 dt \frac{d\zeta}{dt} g(z(p), \zeta(t))$$

essendo g continua, si può cambiare l'ordine di integrazione

$$\oint_{\gamma'} f(z) dz = \int_0^1 dt \frac{d\zeta}{dt} \int_0^1 dp \frac{dz}{dp} g(z(p), \zeta(t)) = 0$$

perché, per l'analiticità di g in z è $\oint_{\gamma'} g(z, \zeta) dz = 0$. Allora per il teorema 1.5 di Morera f è analitica. \square

Osservazione: La f si può derivare sotto il segno di integrale quante volte si vuole; ad esempio, se γ' è una curva chiusa attorno a z nella regione di analiticità

$$\begin{aligned}\frac{df}{dz}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 dp \frac{dw}{dp} \frac{1}{(w-z)^2} \int_0^1 dt \frac{d\zeta}{dt} g(w(p), \zeta(t))\end{aligned}$$

di nuovo si può scambiare l'ordine di integrazione e si trova

$$\frac{df}{dz}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 dt \frac{d\zeta}{dt} \int_0^1 dp \frac{dw}{dp} \frac{g(w(p), \zeta(t))}{(w-z)^2}$$

e per la formula integrale di Cauchy (1.3) applicata all'integrale interno

$$\frac{df}{dz}(z) = \oint_{\gamma'} \frac{dg}{dz}(z, \zeta) d\zeta = \frac{d}{dz} \oint_{\gamma'} g(z, \zeta) d\zeta$$

Se γ ha lunghezza infinita, come è per $\Gamma(z)$ ad esempio, $\zeta(t)$ non può essere definita su di un intervallo limitato. Supponiamo che $\zeta(t)$ sia definita su tutta la retta, le funzioni

$$f_n(z) = \int_{-n}^n dt \frac{d\zeta}{dt} g(z, \zeta(t))$$

sono allora analitiche. Se esse convergono uniformemente a

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{d\zeta}{dt} g(z, \zeta(t))$$

allora anche f è analitica e, come già visto, si ha

$$f'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{dg}{dz}(z, \zeta(t)) \frac{d\zeta}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg}{dz}(z, \zeta(t)) \frac{d\zeta}{dt} dt$$

Allo stesso modo se l'integrale che definisce $f(z)$ esiste come integrale improprio su $[0, a]$, si può definire

$$f_n(z) = \int_{1/n}^a dt \frac{d\zeta}{dt} g(z, \zeta(t))$$

e vale quanto già detto.

1.4 Proprietà delle funzioni analitiche

Una funzione analitica in tutto il piano complesso è detta **intera**.

Teorema 1.8 (di Liouville). *Se f è intera e $|f| < M$ allora f è costante.*

Dimostrazione . Fissato z_0 , per qualsiasi R vale

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

dato che f è intera. Ma allora, essendo

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} M \frac{2\pi R}{R} = \frac{M}{R}$$

per qualsiasi z_0 , deve essere f costante. \square

Ne segue il

Teorema 1.9 (fondamentale dell'algebra). *Se $P_n(z)$ è un polinomio di grado $n \geq 1$, allora P_n ha almeno una radice nel piano \mathbb{C} .*

Dimostrazione . Se fosse $P_n(z) \neq 0 \forall z$, la funzione $f = 1/P_n$ sarebbe intera e limitata (perché $|P_n(z)| \rightarrow \infty$ per $|z| \rightarrow \infty$) e quindi, per il teorema 1.8 di Liouville, costante. Allora anche P_n sarebbe costante, ma questo è assurdo perché, per ipotesi, $n \geq 1$. \square

Un'altra proprietà che riguarda il modulo di una funzione analitica è il seguente

Teorema 1.10 (Principio del massimo per funzioni analitiche). *Se f è analitica in un aperto A e f non è costante allora $|f|$ non può avere massimo in A .*

Dimostrazione . Procediamo per passi:

- (i) Se f è analitica in A aperto e $|f|$ è costante, allora f è costante.
Infatti, se $|f| = 0$ è $f = 0$; mentre se $|f|^2 = u^2 + v^2 = M \neq 0$, derivando ottengo

$$uu_x + vv_x = 0 \quad \text{e} \quad uu_y + vv_y = 0$$

esprimendo v_x, v_y tramite le condizioni (1.2) di Cauchy-Riemann trovo

$$uu_x - vv_y = 0 \quad \text{e} \quad vu_x + uu_y = 0$$

ho così un sistema di due equazioni omogeneo in u_x, u_y , il determinante della matrice dei coefficienti vale $\Delta = u^2 + v^2 \neq 0$ e quindi $u_x = u_y = 0$, cioè $df/dz = 0$ e f è costante.

- (ii) Se $z_0 \in A$ e $\{|z - z_0| \leq r\} \subset A$, allora

$$|f(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

Infatti, per il teorema 1.4 di Cauchy I si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

ovvero il valore nel centro è la media dei valori sulla circonferenza². Prendendo il modulo:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta = M$$

dove M è il massimo di $|f|$ sulla circonferenza (se in z' si ha $|f| < M$, per continuità lo è in tutto un arco e allora vale il minore stretto).

(iii) Se $f(z)$ non è costante, $|f|$ non può essere costante. Supponiamo che $|f|$ abbia massimo in A , considero l'insieme $B = \{z \in A \mid |f(z)| = \max |f| = M\}$. Si ha che B è chiuso, dato che $|f|$ è continua, e che $B \neq A$ se $|f|$ non è costante. Se $\zeta \in \partial B$ allora $|f(\zeta)| = M$, ma in un intorno di ζ esistono punti in cui $|f| < M$. Se prendo una circonferenza di centro ζ e raggio tale che passi per una di questi punti, ho ancora

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta + re^{i\theta}) d\theta$$

Se per θ_0 è $|f(\zeta + re^{i\theta_0})| < M$, per continuità in tutto un intervallo attorno a θ_0 continua a valere il minore stretto, e allora, se I è tale intervallo

$$\begin{aligned} M = |f(\zeta)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_I f(\zeta + re^{i\theta}) d\theta + \int_{[0, 2\pi] \setminus I} f(\zeta + re^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\left| \int_I f(\zeta + re^{i\theta}) d\theta \right| + \left| \int_{[0, 2\pi] \setminus I} f(\zeta + re^{i\theta}) d\theta \right| \right) \\ &< \frac{1}{2\pi} \left(\int_I M d\theta + \int_{[0, 2\pi] \setminus I} M d\theta \right) = M \end{aligned}$$

che è assurdo.

□

1.5 Sviluppi in serie di Taylor–Laurent

Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Esattamente come per le serie reali si può definire un numero positivo r (eventualmente uguale a zero o a infinito), detto raggio di convergenza, tale che la serie converge in tutti i punti z interni al cerchio $|z - z_0| < r$ (e anzi converge uniformemente in ogni cerchio chiuso $|z - z_0| \leq \rho < r$), mentre non converge al di fuori.

²Prendendo parte reale e immaginaria si trova che questa proprietà vale separatamente per u e v .

Si verifica subito, inoltre che all'interno del cerchio di convergenza la serie di potenze è analitica, infatti la convergenza uniforme ci permette di passare l'operazione di derivata sotto il segno di somma e trovare che sono soddisfatte le condizioni (1.2) di Cauchy–Riemann.

Altro esempio importante è dato dalle cosiddette **serie bilatere**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(z-z_0)^{-k}$$

La seconda serie (quella a potenze negative) converge per $|z-z_0| > r_1$, la prima (quella a potenze positive) come visto per $|z-z_0| < r_2$; pertanto la serie bilatera converge nella corona circolare centrata in z_0 di raggio interno r_1 e raggio esterno r_2 . Ovviamente se $r_1 > r_2$ non ci sono punti di convergenza, mentre se r_1, r_2 sono infiniti il dominio di convergenza è tutto il piano complesso escluso z_0 .

Naturalmente, all'interno del dominio di convergenza la serie bilatera è analitica.

Teorema 1.11 (Serie di Taylor–Laurent). *Se f è analitica in un aperto A , allora in ogni corona circolare $C_{1,2} = \{r_1 \leq |z-z_0| \leq r_2\}$ interamente contenuta in A la f può essere sviluppata in serie di potenze (bilatera)*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad (1.4)$$

e vale

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \quad (1.5)$$

dove γ è una qualsiasi curva chiusa contenente z_0 al suo interno e contenuta in A .

Dimostrazione. Dato che la corona chiusa $C_{1,2}$ è inclusa in A aperto, esiste una corona aperta C_{R_1, R_2} di raggi R_1 e R_2 centrata in z_0 con $R_1 < r_1$ e $R_2 > r_2$, tale che f è analitica anche in C_{R_1, R_2} . Per $z \in C_{1,2}$ si può scrivere

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial C_{1,2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=R_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (1.6)$$

(sempre convenendo di percorrere le curve in modo da avere l'interno a sinistra). Consideriamo dapprima il secondo integrale della (1.6): notiamo che

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{\zeta-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

per $|\zeta-z_0| = R_2$ e $z \in C_{1,2}$ si ha

$$\left| \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right| \leq \frac{r_2}{R_2} < 1$$

allora

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^k$$

con la serie che converge uniformemente in $|z - z_0| \leq r_2$, perché per M, N abbastanza grandi

$$\left| \sum_{k=M+1}^N N \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z} \right)^k \right| \leq \sum_{k=M+1}^N \left| \frac{z-z_0}{\zeta-z} \right|^k < \sum_{k=M+1}^N \left(\frac{r_2}{R_2} \right)^k < \varepsilon$$

sostituendo nell'integrale si trova

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=R_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=R_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^k d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{|\zeta-z_0|=R_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^k d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-z_0)^k \end{aligned}$$

con

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=R_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta$$

Consideriamo ora il primo integrale della (1.6) procedendo come appena fatto troviamo, percorrendo la curva in senso antiorario (intorno a destra)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=R_1} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (z-z_0)^{-k}$$

con

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=R_1} f(\zeta) (\zeta-z_0)^{k-1} d\zeta$$

Nella corona la funzione $f(\zeta)/(\zeta-z_0)^{k+1}$ è analitica per ogni k (maggiore o minore di zero), per cui l'integrale sulle circonferenze di raggi R_1 e R_2 possono essere sostituiti con gli integrali su γ ; notando infine che $\alpha_k = \beta_{-k}$ si ottiene la tesi. \square

Il punto z_0 è detto centro di sviluppo della serie.

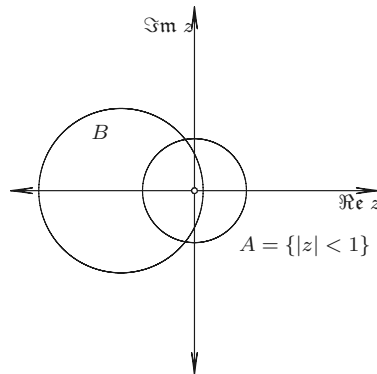
Osservazione: Se f è analitica in z_0 allora in ogni cerchio aperto di centro z_0 contenuto in A la funzione può essere sviluppata in una serie "puramente di Taylor" (cioè con solo potenze positive); in questo caso risulta

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$$

Infatti, dalla (1.5) segue $a_k = 0$ per ogni $k < 0$, mentre per $k > 0$ si ottiene la formula (1.3) integrale di Cauchy.

1.6 Prolungamento analitico e zeri di funzioni analitiche

Ci sono funzioni (ad esempio $1/(1-z)$) la cui serie di Taylor converge in un cerchio finito ($|z| < 1$ se si sviluppa attorno a zero), ma che sono analitiche in una regione più grande.



La funzione

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

è analitica in $A = \{|z| < 1\}$ (è lo sviluppo in serie di $1/(1-z)$), inoltre

$$g(z) = \frac{1}{1-z}$$

è analitica in B e nell'intersezione dei due aperti è $f = g$. Si dice allora che g è il **prolungamento analitico** di f da A a $A \cup B$ (o f è il prolungamento analitico di g da B a $A \cup B$).

In generale date f , analitica nell'aperto A , e g analitica nell'aperto B , se $f = g$ in $A \cap B$, si dice che g prolunga analiticamente f da A a $A \cup B$.

La proprietà essenziale del prolungamento analitico è che esso è unico; infatti se g_1, g_2 sono due funzioni analitiche in B , uguali ad f in $A \cap B$, allora la loro differenza, che è uguale alla funzione nulla in $A \cap B$, è nulla in tutto B . Vale infatti il seguente teorema sugli zeri delle funzioni analitiche:

Teorema 1.12. *Sia f analitica in A aperto connesso. L'insieme degli zeri di f non ha punti di accumulazione in A (fatta eccezione per la funzione identicamente nulla).*

Dimostrazione. Ricordiamo che l'ipotesi di connessione significa che A non è unione di due aperti disgiunti non vuoti.

Siano $B = \{z \in A \mid z \text{ è punto di accumulazione di zeri di } f\}$ e C il complementare di B rispetto ad A . Se si fa vedere che B e C sono entrambi aperti si conclude che uno dei due deve essere l'insieme vuoto e quindi si prova la tesi.

Se $z_0 \in B$ e $f(z_0) = 0$, l'analiticità di f implica allora che in un intorno di z_0 la funzione f è rappresentata dalla sua serie di Taylor

$$f(z) = (z - z_0)[a_1 + a_2(z - z_0) + \dots]$$

Dico che $a_1 = f'(z_0) = 0$; infatti se fosse $a_1 \neq 0$ in tutto un intorno di z_0 dovrebbe essere

$$a_1 + a_2(z - z_0) + \dots \neq 0$$

il che è assurdo perché $z_0 \in B$. Iterando trovo che $a_i = 0 \forall i$, allora in un intorno di z_0 f è identicamente nulla, cioè B è aperto.

Se $z_0 \in C$ allora esiste un intorno di z_0 in cui $f \neq 0$, cioè C è aperto. \square

Ad esempio, $f(z) = \sin 2z - 2 \sin z \cos z$ è intera e nulla sull'asse reale, allora $f(z)$ è identicamente nulla.

Il teorema 1.12 dice che una funzione analitica può avere un punto di accumulazioni di zeri a patto che tale punto non appartenga al dominio di analiticità. Ad esempio, la funzione $f(z) = \sin(1/z)$ è nulla per $1/z = n\pi$, ma il punto di accumulazione (l'origine) non è di analiticità per f .

Il punto z_0 è uno **zero di ordine n** per f se

$$f(z_0), f'(z_0), \dots, f^{(n-1)}(z_0) \neq 0 \quad \text{mentre} \quad f^{(n)}(z_0) = 0$$

Osservazione: Per il teorema 1.12 si ha che ogni zero è di ordine finito. Infatti se in z_0 fosse $f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n$, la serie di Taylor di f sarebbe identicamente nulla, ma f è uguale alla sua serie di Taylor nel massimo cerchio aperto incluso in A e quindi f dovrebbe essere nulla in tale cerchio, così che z_0 sarebbe uno zero non isolato.

Se f è analitica in un cerchio C , un punto $z_0 \in \partial C$ si dice regolare se esistono un cerchio C_0 di centro z_0 e una funzione g analitica in C_0 tale che $g = f$ in $C \cap C_0$. Se questo non accade z_0 è detto **punto singolare**.

Teorema 1.13. *Se il raggio di convergenza della serie di Taylor di f è finito, allora sulla circonferenza del cerchio di convergenza esiste almeno un punto singolare.*

Dimostrazione. Si vede per assurdo: se non fosse così, ogni ζ sulla circonferenza sarebbe il centro di un cerchio C_ζ tale che esiste il prolungamento analitico g_ζ di f dal cerchio C di convergenza a $C \cup C_\zeta$. Estraggo una copertura finita della circonferenza, cioè una famiglia $\{C_i\}_{i=1, \dots, n}$ di cerchi associati ai prolungamenti $\{g_i\}_{i=1, \dots, n}$. La funzione

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in C \\ g_i(z) & \text{se } z \in C_i \end{cases}$$

è allora ben definita, perché nei punti di $C \cap C_i$ è $g_i = f$ per ipotesi, e nei punti di $C_i \cap C_j$ è $g_i = g_j$ (infatti, dato che $C \cap C_i \cap C_j \neq \emptyset$ e in tale insieme $g_i = g_j = f$, si ha che $g_i = g_j$ in tutto l'aperto connesso $C_i \cap C_j$). Quindi $h(z)$ è analitica in $C \cup (\bigcup_{i=1}^n C_i)$; questa regione contiene evidentemente un cerchio di raggio maggiore di quello di C . La serie di Taylor di h è allora convergente in questo cerchio, ma tale serie è proprio quella di f (dato che $f = h$ in C , le derivate, cioè i coefficienti della serie, delle due funzioni sono uguali). Si ha allora un assurdo, perché per ipotesi f converge solo in C . \square

Un criterio comodo per vedere se un punto $z_0 \in \partial C$ è singolare: se non esiste il limite

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \gamma}} f(z)$$

con γ curva regolare che porta dal centro del cerchio a z_0 , allora z_0 è singolare.

Infatti se z_0 fosse regolare avremmo che esiste g analitica in un cerchio C' centrato in z_0 tale che $g = f$ in $C \cap C'$; allora, poiché la parte finale di γ è contenuta in $C \cap C'$ si avrebbe

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \gamma}} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \gamma}} g(z)$$

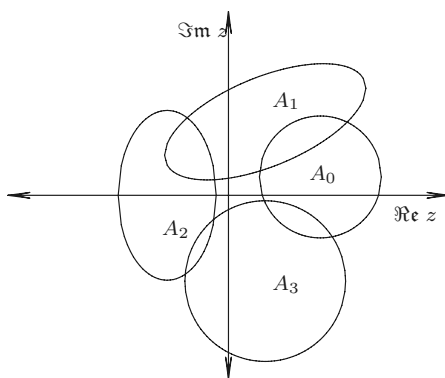
e tale limite deve esistere, per l'analiticità di g , contro l'ipotesi.

Con questo criterio si può vedere che funzioni come

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \quad \text{o} \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

hanno punti singolari densi sulla circonferenza $\{|z| = 1\}$, è allora evidente che tali funzioni non sono prolungabili analiticamente oltre tale circonferenza.

Il prolungamento analitico si compie attraverso una catena di aperti A_i che si sovrappongono ($A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$) in modo se f_i è analitica in A_i , in $A_i \cap A_{i+1}$ sia $f_i = f_{i+1}$. Se capita che A_n torni su A_0 , cioè se $A_n \cap A_0 \neq \emptyset$, può capitare che sia $f_n \neq f_0$. Ad esempio considero la funzione \sqrt{z} e la catena di aperti

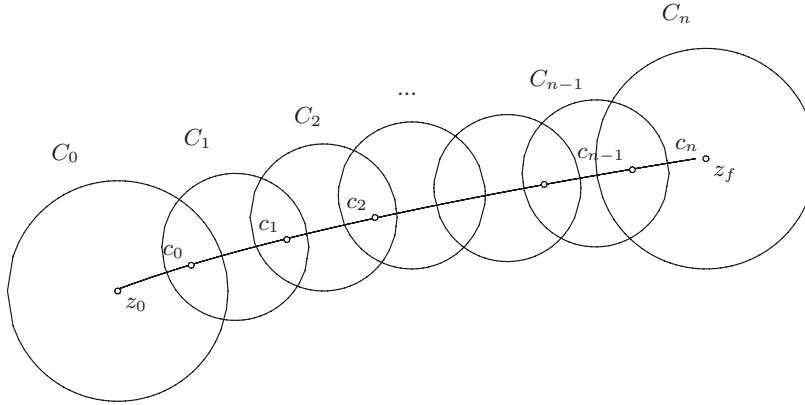


È chiaro che, se in A_0 \sqrt{z} è definita con $-\pi \leq \arg \sqrt{z} < \pi$, in $A_0 \cap A_3$ è $\arg \sqrt{z} < -\pi$ e la radice ha cambiato di segno.

La relazione " g_B prolunga f_A ", dove A e B sono gli aperti in cui f e g sono analitiche, è simmetrica, riflessiva ma non transitiva. Se però g_B prolunga f_A , h_C prolunga g_B e $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ allora in $A \cap C$ è anche $h_C = f_A$.

Discutiamo ora il **prolungamento analitico lungo una curva**. Se f è analitica in un intorno C_0 di z_0 , si può riuscire a prolungarla in un intorno di z_f con il seguente procedimento: sia γ una curva regolare che porta da z_0 a z_f , e sia $\{C_i\}_{i=0, \dots, n}$ una successione di cerchi concatenata con γ , cioè tale che γ è l'unione di curve c_i interne ai C_i

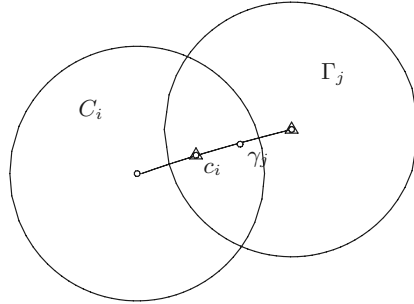
con estremi in $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$, con C_0 centrato in z_0 , C_n centrato in z_n



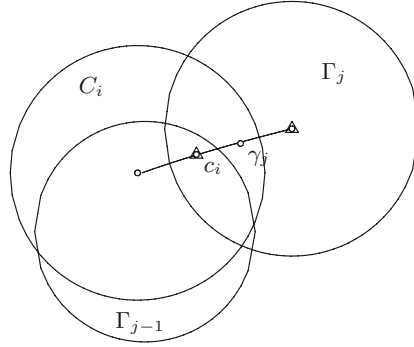
Se esiste una famiglia f_i di funzioni analitiche in C_i tale che $f_0 = f$ e $f_i = f_{i+1}$ in $C_i \cap C_{i+1}$, si dice che f è prolungata da un intorno di z_0 ad un intorno di z_f lungo la curva γ .

Il punto essenziale è che, fissata γ , il prolungamento così trovato non dipende dalla famiglia di cerchi che si sceglie.

Per vederlo, supponiamo che esista un'altra famiglia di cerchi $\{\Gamma_j\}_{j=0,\dots,m}$ concatenata con γ , Γ_0 centrato in z_0 , Γ_m centrato in z_f , con $g_0 = f$ e $g_j = g_{j+1}$ in $\Gamma_j \cap \Gamma_{j+1}$, e mostriamo che vale $f_n = g_m$. Chiamiamo γ_j gli analoghi dei c_i per la catena Γ_j e supponiamo per assurdo $f_n \neq g_m$. Considero i valori di $k = i + j$ per i quali accade questo: $c_i \cap \gamma_j \neq \emptyset$ (e quindi $C_i \cap \Gamma_j \neq \emptyset$) e in $C_i \cap \Gamma_j$ è $f_i \neq g_j$. Detto K l'insieme di tali k si ha che $k = m + n \in K$, e che se $k \in K$ allora $k - 1 \notin K$, altrimenti se così fosse da $k = m + n$ arriverei a $k = 0$, ma per ipotesi è $f_0 = g_0 = f$. Supponiamo, per fissare le idee, che $k = i + j \in K$ e che γ_j cominci a destra dell'estremo sinistro di c_i , come mostrato in figura (la curva c_i è quella compresa tra i cerchi, mentre γ_j è la curva compresa tra i triangoli):



Poiché l'estremo sinistro di γ_j deve essere in Γ_{j-1} , Γ_{j-1} interseca sia Γ_j sia C_i (quindi $C_i \cap \Gamma_{j-1} \cap \Gamma_j \neq \emptyset$); la situazione è



Questo implica che anche in $C_i \cap \Gamma_{j-1}$ è $f_i \neq g_{j-1}$; infatti se fossero uguali, nella tripla intersezione sarebbe $g_j = g_{j-1}$ e quindi $f_i = g_j$. Questo è assurdo perché, per quanto già detto $k-1 = i+j-1 \notin K$.

Vale inoltre il seguente

Lemma 1.14. *Se γ_0 e γ_1 sono due curve omotope che portano da z_0 a z_f , allora in un intorno di z_f danno luogo allo stesso prolungamento.*

Dimostrazione. L'ipotesi di omotopia tra le curve significa che esiste un'applicazione continua $\gamma(p, t) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\gamma(0, t) = \gamma_0$, $\gamma(1, t) = \gamma_1$, $\gamma(p, 0) = z_0$ e $\gamma(p, 1) = z_f$.

Fissato p , dire che il prolungamento lungo γ_p significa che esiste una catena, etc... Sia ε minore della distanza di γ_p dalla frontiera dell'unione dei cerchi della catena, considero il $\delta(p)$ tale che, per l'uniforme continuità, è $|\gamma_p(t) - \gamma_{p'}(t)| < \varepsilon$ per $|p - p'| < \delta(p)$. Allora per $|p - p'| < \delta(p)$ la catena di cerchi scelta per γ_p è concatenata anche con $\gamma_{p'}$. Quindi il valore del prolungamento nell'intorno di z_f ottenuto con $\gamma_{p'}$ è uguale a quello ottenuto con γ_p . Dato che il ragionamento fatto è valido per ogni p , estraendo una ricopertura finita dalle famiglie di cerchi concludo che γ_0 e γ_1 portano allo stesso prolungamento in z_f . \square

Questo permette di enunciare il seguente

Teorema 1.15 (di monodromia). *Se A è un aperto semplicemente connesso, C è un cerchio incluso in A e f è analitica in C , se f può essere prolungata lungo una curva contenuta in A , allora la funzione $g(z)$, prolungamento analitico di f da $z_0 \in C$ ad un intorno di $z \in A$, non dipende dalla curva scelta ed è ancora una funzione ad un solo valore in A .*

Si possono rivedere cose già viste in termini delle considerazioni fatte:

- (i) Consideriamo la funzione $\log z$. Se è dato $z_0 \neq 0$ e il valore di $\arg z$ è vicino al valore di $\arg z_0$ per z vicino a z_0 , $\log z$ è derivabile. Nel dominio semplicemente connesso ottenuto tagliando il piano lungo la semiretta reale che va da 0 ad ∞ , la funzione

$$f(z) = \ln |z| + i[\arg z_0 + \Delta_\gamma \arg z]$$

con γ che va da z_0 a z nel piano tagliato, rappresenta il prolungamento analitico di $\log z$ da un intorno di z_0 ad un intorno di z lungo γ . La funzione ottenuta è analitica e ad un sol valore. La scelta di $\arg z_0$ fissa la determinazione di $\log z$.

- (ii) In A semplicemente connesso considero f analitica non nulla. Se in un intorno di z_0 fisso il valore di $\arg f(z)$ vicino al valore di $\arg f(z_0)$, la funzione $\log f(z)$ è analitica. Allora la funzione

$$F(z) = \log f(z) = \ln |z| + i[\arg f(z_0) + \Delta_\gamma \arg f(z)]$$

è il prolungamento analitico da un intorno di z_0 ad un intorno di z lungo la curva γ in A ; tale funzione è analitica e ad un sol valore in A .

- (iii) In A semplicemente connesso siano f, g analitiche e non nulle, come prima le funzioni $F = \log f$, $G = \log g$, $H = \log fg$ sono analitiche e ad un solo valore in A . Se in z_0 ho che $\arg fg(z_0) = \arg f(z_0) + \arg g(z_0)$ e in un intorno di z_0 prendo $\arg fg(z)$ vicino al valore di $\arg fg(z_0)$, allora in tale intorno vale $H = F + G$. Il prolungamento da z_0 a $z \in A$ della funzione $H - G - F$ è dato da

$$\begin{aligned} H - G - F &= \ln |fg| + i[\arg fg(z_0) + \Delta_\gamma \arg fg] + \\ &\quad - \ln |f| - i[\arg f(z_0) + \Delta_\gamma \arg f] - \ln |g| - i[\arg g(z_0) + \Delta_\gamma \arg g] \\ &= i[\Delta_\gamma \arg fg - \Delta_\gamma \arg f - \Delta_\gamma \arg g] = 0 \end{aligned}$$

perché nell'intorno di z_0 era $H - G - F = 0$. Si ritrova allora

$$\Delta_\gamma \arg fg = \Delta_\gamma \arg f + \Delta_\gamma \arg g$$

Il discorso fatto vale anche per f/g con f, g non nulle, per cui

$$\Delta_\gamma \arg \frac{f}{g} = \Delta_\gamma \arg f - \Delta_\gamma \arg g$$

- (iv) Se si ha una f tale che per ogni $z_0 \in A$ non semplicemente connesso, f risulta derivabile in un intorno di z_0 allora la funzione ottenuta prolungando la f definita in un intorno di z_0 lungo qualsiasi curva chiusa γ in A è ad un sol valore purché risulti

$$\Delta_\gamma f = 0$$

Questo è il caso, ad esempio, della funzione $\sqrt{z^2 - 1}$ che risulta derivabile in ogni z_0 nel piano tagliato del segmento di asse reale che va da -1 ad 1 , e che per ogni curva γ chiusa nel piano tagliato soddisfa $\Delta_\gamma \sqrt{z^2 - 1} = 0$.

1.7 Singolarità isolate, removibili ed essenziali

Si dice che z_0 è per f un **punto singolare isolato** se esiste un intorno I di z_0 tale che $f(z)$ è analitica e ad un sol valore per $z \in I \setminus \{z_0\}$.

Esempi: per le funzioni $\sin z/z$, $\sin z/z^2$, $e^{1/z}$, $z = 0$ è un punto singolare isolato. Per \sqrt{z} il punto $z = 0$ non è singolare isolato, perché non esiste un intorno in cui la funzione è ad un solo valore.

Se z_0 è un punto singolare isolato, per quanto visto in precedenza, nella corona circolare $\{0 < |z - z_0| \leq R\}$ inclusa in I per R opportuno, vale

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Ci sono allora due possibili casi:

(i) La serie ha solo potenze positive, allora la funzione

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

è analitica anche in z_0 e vale

$$g(z_0) = a_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

quindi f è prolungabile analiticamente in z_0 ; in tal caso il punto z_0 si chiama **singularità removibile**. Esempio:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$$

Il fatto che f abbia limite per $z \rightarrow z_0$ implica che f è limitata in un intorno di z_0 . È importante che: se f ha in z_0 un punto singolare isolato e è $|f| < M$ in un intorno di z_0 allora z_0 è una singolarità removibile. Infatti, i coefficienti per i coefficienti della serie con potenze negative vale

$$|\beta_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|z-z_0|=r} f(z)(z-z_0)^{k-1} dz \right| \leq \frac{M}{2\pi} r^{n-1} 2\pi r = Mr^n$$

che è piccolo a piacere, quindi $\beta_k = 0$.

Notiamo infine che, a differenza del caso di variabile reale, dire che f è limitata in un intorno di z_0 implica necessariamente l'esistenza del limite.

(ii) La serie ha almeno una potenza negativa. In questo caso non esiste il prolungamento analitico in z_0 e z_0 è detta singolarità non removibile.

Notiamo anche che per quanto già detto nell'intorno di una singolarità non removibile $|f|$ non può essere limitato.

Per le singolarità non removibili distinguiamo altri due casi:

(a) Il numero dei coefficienti delle potenze negative diversi da zero è finito; si dice allora che f ha in z_0 un **polo di ordine** n , dove n è la massima potenza negativa che compare nella serie. Esempi:

$$\frac{\sin z}{z^2}, \quad \frac{\sin z}{z^3}, \quad \frac{1}{z^2} - z$$

(b) La parte della serie con potenze negative ha infiniti coefficienti diversi da zero; si dice allora che z_0 è una **singolarità essenziale**. Esempi:

$$e^{\frac{1}{z}}, \quad z^3 e^{\frac{1}{z^2}}, \quad \sin \frac{1}{z}$$

È necessario saper riconoscere i due casi; iniziamo con i poli:

(i) f ha un polo di ordine n in z_0 se e solo se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = l \neq 0$$

Per ipotesi di polo

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + a_0 + \dots \quad \text{con } a_{-n} \neq 0$$

quindi

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [a_{-n} + a_0(z - z_0) + \dots] = a_{-n} \neq 0$$

Viceversa se $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ ha limite l , allora $g(z)$ ha in z_0 una singolarità removibile, cioè

$$g(z) = l + a_0(z - z_0) + \dots \implies f(z) = \frac{l}{(z - z_0)^n} + \dots$$

ed essendo $l \neq 0$ si ha che f ha un polo di ordine n .

(ii) f ha un polo di ordine n in $z_0 \iff |f| \rightarrow \infty$ per $z \rightarrow z_0$.

Se f ha un polo

$$|f(z)| = |(z - z_0)^n f(z)| \frac{1}{|z - z_0|} \longrightarrow \infty \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

dato che per quanto appena detto il primo fattore ha limite finito diverso da zero. Viceversa, se $|f| \rightarrow \infty$ allora esiste un intorno I di z_0 in cui funzione f è non nulla. La funzione $g = 1/f$ è analitica in $I \setminus \{z_0\}$, $|g| \rightarrow 0$ e quindi g ha una singolarità removibile in z_0 , che è uno zero di ordine n :

$$g(z) = a_n(z - z_0)^n + \dots \implies \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} = a_n \neq 0$$

cioè $f \rightarrow 1/a_n$, il che implica che f ha in z_0 un polo di ordine n .

Possiamo quindi dire che se f ha in z_0 un polo di ordine n , vicino a z_0 f si comporta come $1/(z - z_0)^n$.

(iii) Quanto appena visto ci permette di osservare che: f ha un polo di ordine n in z_0 equivale a dire che $1/f$ ha uno zero di ordine n in z_0 .

Per le singolarità essenziali (ad esempio $z = 0$ per $e^{1/z}$) f non è limitata ($e^{1/x} \rightarrow \infty$ per $x > 0$), ma non tende ad ∞ ($e^{1/iy}$ ha modulo 1); ovvero non esiste il limite né finito né infinito. Vale il seguente

Lemma 1.16. *Se f ha in z_0 una singolarità essenziale, per $w \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$ qualunque, in ogni intorno di z_0 esistono infiniti z tali che $|f(z) - w| < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Se, per assurdo, il lemma non fosse vero dovrebbero esistere un w e un intorno I di z_0 tali che in tutto $I \setminus \{z_0\}$ dovrebbe essere $|f(z) - w| > \varepsilon$. Allora la funzione $g = 1/(f(z) - w)$ è analitica in $I \setminus \{z_0\}$ ed z_0 è per g un punto singolare isolato. Dato che $|f(z) - w| > \varepsilon$, possiamo dire che $|g|$ è limitato, quindi z_0 è per g una singolarità removibile. Se il prolungamento di g in z_0 è non nullo, $f - w = 1/g$ è analitica in tutto I e quindi lo è anche f . Se g ha in z_0 uno zero di ordine n , f ha un polo di ordine n e questo è assurdo perché per ipotesi z_0 è una singolarità essenziale per f . \square

Questo significa che: se z_0 è una singolarità essenziale, dato w esiste una successione $\{z_n\}$ tale che

$$f(z_n) \longrightarrow w \quad \text{per } z_n \rightarrow z_0$$

Notiamo che per $f = e^{1/z}$ è immediato vedere che per $w \neq 0$, l'equazione $e^{1/z} = w$ ha soluzione in ogni intorno dell'origine:

$$\frac{1}{z} = \log w = \ln |w| + i \arg w + 2n\pi i$$

Al crescere di n , z si trova vicino a zero quanto si vuole. Però non è mai $f = 0$. In generale vale il

Teorema 1.17 (di Picard). *Se f ha in z_0 una singolarità essenziale, allora comunque si scelga $w \in \mathbb{C}$ (escluso al più un valore eccezionale) in ogni intorno di z_0 esistono infiniti punti in cui $f(z) = w$.*

Come visto per $e^{1/z}$ il valore eccezionale è $w = 0$, mentre per $\sin(1/z)$ non c'è il valore eccezionale.

1.8 Calcolo dei residui

Se f ha in z_0 un punto singolare isolato, si chiama **residuo** di f in z_0 il coefficiente a_{-1} dello sviluppo in serie di Taylor–Laurent della f in un intorno di z_0 , ovvero il residuo è il valore di

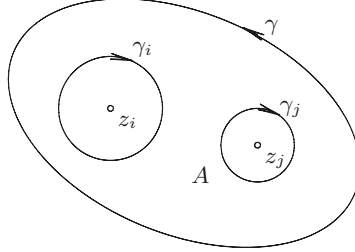
$$\mathcal{R}_f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$$

su una curva γ che abbia al suo interno solo z_0 come punto di non analiticità. Si capisce allora che è utile conoscere il residuo per il calcolo di integrali.

Teorema 1.18 (dei residui interni). *Sia f analitica su una curva γ e dentro a parte punti singolari isolati z_1, \dots, z_n ³, allora*

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \mathcal{R}_f(z_j)$$

Dimostrazione . Consideriamo per ogni z_j una curva γ_j che al suo interno contenga solo z_j come punto singolare isolato:



Nella regione bucata A , la cui frontiera è costituita dalle curve $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, f è analitica, per il teorema 1.3 di Cauchy I si ha

$$0 = \oint_{\partial A} f(z)dz = \oint_{\gamma} f(z)dz - \sum_{j=1}^n \oint_{\gamma_j} f(z)dz$$

(dove tutte le curve γ e γ_j sono percorse in senso antiorario), quindi

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^n \oint_{\gamma_j} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \mathcal{R}_f(z_j)$$

□

Se z_0 è un polo del primo ordine posso scrivere

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + \dots$$

da cui trovo subito che

$$\mathcal{R}_f(z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

Un caso particolare è rappresentato da $f = g/h$ con g, h analitiche in z_0 , $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$. Si ha che f ha un polo del primo ordine in z_0 perché

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)/h(z)}{z - z_0} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \neq 0$$

³I punti singolari dentro γ sono in numero finito, perché se fossero infiniti dovrebbero avere un punto di accumulazione che quindi sarebbe un punto singolare non isolato.

e il residuo vale proprio

$$\mathcal{R}_f(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Ad esempio la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^n + 1}$$

ha come punti singolari isolati i punti per cui $z^n = -1$, ovvero $z_k = e^{(2k+1)\pi i/n}$ per k intero, e i residui valgono

$$\mathcal{R}_f(z_k) = \frac{1}{nz_k^{n-1}}$$

Allo stesso modo vedo che, se z_0 è un polo di ordine n

$$\mathcal{R}_f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1}[(z-z_0)^n f(z)] \Big|_{z=z_0}$$

1.9 Comportamento all'infinito

Si parla di piano complesso esteso quando si considera il piano complesso con il suo punto all'infinito. Il piano esteso può essere messo in corrispondenza biunivoca con la superficie di una sfera. A questo scopo consideriamo uno spazio euclideo dotato di un sistema di coordinate rettangolari ξ, η, ζ i cui assi ξ ed η coincidono rispettivamente con gli assi x e y del piano complesso e consideriamo la sfera unitaria

$$S = \{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\} \quad (1.7)$$

A ciascun punto $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ associamo il punto $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ di intersezione di S con il segmento che congiunge il "polo Nord" $N = (0, 0, 1)$ di S al punto z (vedi figura 1.2).

La corrispondenza $z \rightarrow Z$ si chiama **proiezione stereografica**. Inserendo le equazioni

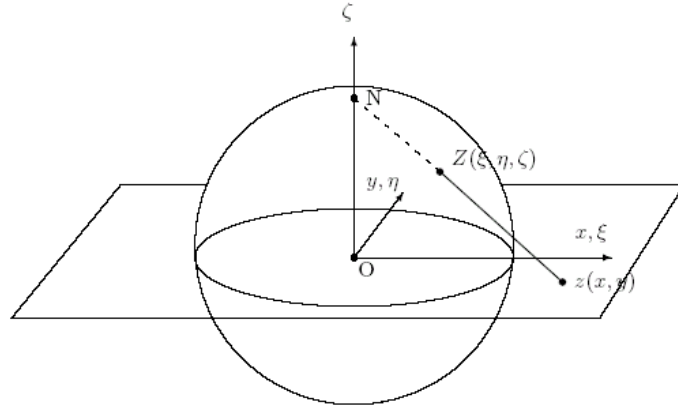


Figura 1.2: Proiezione stereografica.

$\xi = tx$, $\eta = ty$ e $\zeta = 1 - t$ del segmento Nz nell'equazione (1.7) che definisce la sfera, si trova che $t(1 + |z|^2) = 2$ al punto Z e le equazioni della proiezione stereografica sono

$$\xi = \frac{2x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{2y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \quad (1.8)$$

Dall'ultima equazione si deduce che $2/(1 + |z|^2) = 1 - \zeta$ e dalle due prime le formule dell'applicazione inversa

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \quad (1.9)$$

Si vede dalle (1.8) e (1.9) che la proiezione stereografica $z \rightarrow Z$ stabilisce una corrispondenza biunivoca fra \mathbb{C} e $S \setminus \{N\}$ (è evidente che il punto N non è immagine di alcun punto z); si conviene allora che N è l'immagine del punto all'infinito, così facendo si stabilisce la corrispondenza biunivoca annunciata fra il piano esteso e la sfera S (detta **sfera dei numeri complessi** o **sfera di Riemann**).

Gli intorno dell'infinito $I_\infty \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ corrispondono ad intorno di N , gli intorno di un punto al finito ad intorno sulla sfera della loro proiezione.

Il piano esteso è compatto e semplicemente connesso; quindi, viste sulla superficie della sfera le varie possibilità di aggirare i tagli per funzioni come $\sqrt{z^2 - 1}$ appaiono ottenute l'una dall'altra attraverso deformazioni continue.

Si dice che il punto all'infinito è per f un punto isolato se f è analitica in un intorno dell'infinito I_∞ ; in questo caso, per $z \in I_\infty$ è

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k \quad \text{con} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz$$

con γ contenuta in I_∞ .

Si dice che il punto all'infinito è per f una

- (i) una singolarità removibile, se lo sviluppo in serie di f ha solo potenze negative; ad esempio

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{1}{z^2 + 1}, \quad \frac{z}{z^2 + 1}$$

- (ii) un polo di ordine n , se un numero finito di a_k con $k > 0$ è diverso da zero e n è il massimo k per cui ciò accade; ad esempio

$$\frac{z^3}{z^2 + 1}, \quad P_n(z) \text{ (polinomio di grado } n)$$

- (iii) una singolarità essenziale, se infiniti a_k con $k > 0$ sono diversi da zero; ad esempio

$$e^z, \quad \frac{e^z}{z}, \quad \sin z$$

Le definizioni date equivalgono alla seguente. Se f è analitica in I_∞ , $g(z) = f(1/z)$ è analitica in un intorno I_0 dell'origine; se g ha in $z = 0$ una singolarità removibile (rispettivamente un polo, una singolarità essenziale) allora f ha nel punto all'infinito una singolarità removibile (rispettivamente un polo, una singolarità essenziale).

Per riconoscere il comportamento all'infinito valgono criteri analoghi a quelli visti per i punti al finito:

- (i) Se $|f|$ è limitato in I_∞ , $|g|$ lo è in I_0 e questo implica che g è analitica in tutto I_0 , cioè

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \forall z \in I_0$$

ne segue allora che

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \quad \forall z \in I_\infty$$

allora il punto all'infinito è una singolarità removibile.

- (ii) Se all'infinito $|f| \rightarrow \infty$, $|g| \rightarrow 0$ in zero, cioè g ha un polo nell'origine e quindi f ha un polo all'infinito. In particolare

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|f(z)|}{|z^n|} = l \neq 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} |g(z)| |z^n| = l \neq 0$$

cioè il polo di g , e quindi quello di f , è dell' n -esimo ordine.

- (iii) Per le singolarità essenziali, infine, vale anche all'infinito il teorema 1.17 di Picard, dato che vale per g in $z = 0$.

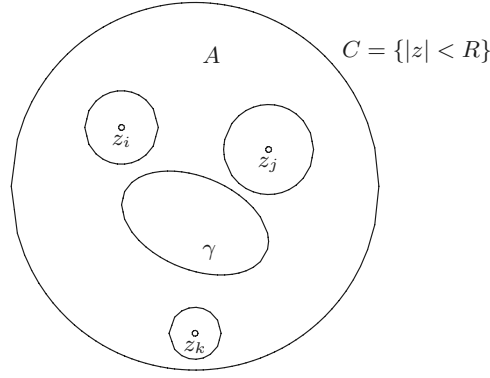
1.9.1 Residuo all'infinito

Il residuo della funzione f nel punto all'infinito è dato da $\mathcal{R}_f(\infty) = -a_{-1}$, cioè il coefficiente, cambiato di segno, di del termine $1/z$ dello sviluppo in serie.

Teorema 1.19 (dei residui esterni). *Sia $f(z)$ analitica sulla curva γ e fuori, a parte punti singolari isolati (compreso il punto all'infinito), allora*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_{\substack{z_j \\ \text{esterni}}} \mathcal{R}_f(z_j) - 2\pi i \mathcal{R}_f(\infty)$$

Dimostrazione. Dato che le singolarità esterne sono in numero finito (vale la stessa argomentazione usata nella nota 3), esiste R tale che tutte le singolarità esterne, escluso il punto all'infinito, sono dentro il cerchio $C = \{|z| < R\}$. Se A è la ciambella ottenuta



si ha, per il teorema 1.18 dei residui interni e per il teorema 1.3 di Cauchy I, che

$$0 = \oint_{\partial A} f(z)dz = \oint_{\partial C} f(z)dz - \oint_{\gamma} f(z)dz - 2\pi i \sum_{\substack{z_j \\ \text{esterni}}} \mathcal{R}_f(z_j)$$

Si ottiene allora la tesi notando che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial C} f(z)dz = a_{-1}(\infty) = -\mathcal{R}_f(\infty)$$

□

Notiamo che, se f ha punti singolari isolati allora

$$\sum_{\text{tutti}} \mathcal{R}_f = 0$$

dato che se γ è una curva chiusa

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z)dz = \sum_{\text{interni}} \mathcal{R}_f = - \sum_{\text{esterni}} \mathcal{R}_f$$

1.10 Applicazioni del teorema dei residui

1.10.1 Calcolo di integrali sulla retta reale. Il lemma di Jordan

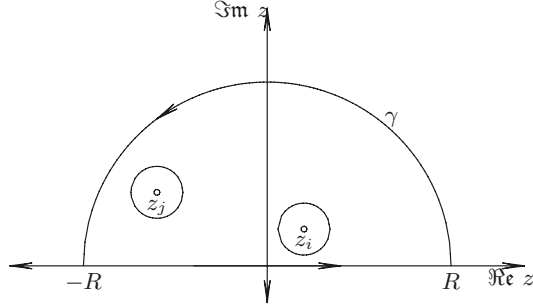
Consideriamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad (1.10)$$

dove la f è una funzione della variabile reale x (il caso tipico a cui è possibile applicare le considerazioni che seguono è quello in cui f sia una funzione razionale, cioè un rapporto di polinomi $P_n(x)/Q_m(x)$). Se è noto a priori che l'integrale esiste finito (nel caso della funzione razionale basta che il denominatore $Q_m(x)$ non abbia radici reali e che

$n \leq m - 2$) possiamo estendere la definizione della funzione $f(x)$ in modo da ottenere una funzione $f(z)$ analitica in tutto il semipiano complesso superiore, cioè quello in cui $\Im m z > 0$, escluso al più un numero finito di punti singolari (tale condizione è senz'altro verificata se f è razionale semplicemente sostituendo x con z).

In queste ipotesi consideriamo la semicirconferenza di centro nell'origine e raggio R :



Sia R abbastanza grande da contenere tutti i punti singolari z_1, \dots, z_n di f posti nel semipiano superiore. Grazie al teorema (1.18) dei residui interni si ha

$$\int_{-R}^R f(z) dz + \oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \mathcal{R}_f(z_j)$$

Prendendo il limite per $R \rightarrow \infty$ e aggiungendo l'ulteriore condizione (automaticamente verificata se f è razionale)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \max_{z \in \gamma} |f(z)| = 0$$

si ha che

$$\left| \oint_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \pi R \max_{z \in \gamma} |f(z)| \rightarrow 0$$

mentre l'integrale sulla retta reale tende proprio all'integrale cercato (1.10), per cui

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \mathcal{R}_f(z_j)$$

Una generalizzazione di tale risultato è data dal seguente

Lemma 1.20 (di Jordan). *Si consideri l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

e si supponga che $f(z)$ sia analitica in tutto il piano complesso tranne che per un numero finito di punti. Sia $\omega > 0$, allora se γ è una semicirconferenza di raggio R centrata nell'origine posta nel semipiano superiore e se è soddisfatta la condizione

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\max_{z \in \gamma} |f(z)| \right) = 0$$

allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \mathcal{R}_F(z_j) \quad (1.11)$$

dove si è indicato $F = fe^{i\omega z}$.

Si noti che, nel caso in cui tutti i punti singolari siano poli del primo ordine, la (1.11) può scriversi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \mathcal{R}_f(z_j)e^{i\omega z_j}$$

Se $\omega < 0$ si considera la semicirconferenza nel semipiano inferiore e la (1.11) diventa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x} dx = -2\pi i \sum_{\Im z_j < 0} \mathcal{R}_F(z_j)$$

Il lemma 1.20 di Jordan trova ampia applicazione nel calcolo della trasformata e dell'antitrasformata di Fourier.

1.10.2 Indicatura logaritmica

Sia f analitica su γ e dentro, $f \neq 0$ su γ , ne segue che anche $g = f'/f$ è analitica su γ e dentro (a parte i punti interni in cui $f = 0$). Se z_0 è uno zero di ordine n , in un intorno di z_0 si ha

$$f(z) = (z - z_0)^n [a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \dots] = (z - z_0)^n \varphi(z)$$

con φ analitica e $\varphi(z_0) \neq 0$. La g può essere allora scritta come

$$g = \frac{f'}{f} = \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{n}{z - z_0}$$

essendo $f' = n(z - z_0)^{n-1}\varphi + (z - z_0)^n\varphi'$. La funzione φ'/φ è analitica in z_0 e, in un intorno di z_0 , può essere sviluppata in serie puramente di Taylor

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

quindi f'/f ha in z_0 un polo del primo ordine con residuo $\mathcal{R}_{f'/f}(z_0) = n$. Allora

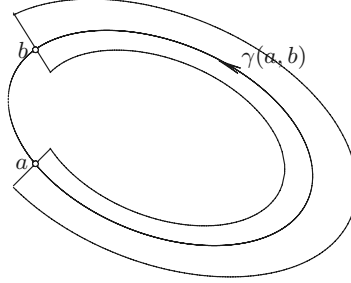
$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N_z} n_j = 2\pi i N_z$$

dove n_j è l'ordine dello zero in z_j e N_z è il numero totale di zeri, contati ciascuno con il proprio ordine. Ma

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} (\log f(z))$$

($w = f(z)$ è analitica su γ , $\log w$ è analitica per $w \neq 0$, e poiché su γ $f(z) \neq 0$, $\log f(z)$ è analitica in ogni punto di γ e vale per la derivata quanto appena scritto). In ogni regione semplicemente connessa contenente γ (o parte di essa) in cui è $f \neq 0$ vale

$$\int_{\gamma(a,b)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \log f(z) \Big|_a^b = \log f(b) - \log f(a)$$



quando la curva si chiude

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \Delta_{\gamma} \log f(a \equiv b) = \Delta_{\gamma} \ln |f| + i \Delta_{\gamma} \arg f$$

dato che $\ln |f|$ non cambia deve allora valere

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f = N_z$$

Ne segue il

Teorema 1.21 (di Rouché). *Siano f, g analitiche su γ e dentro, se su γ $f \neq 0$ e $|g| < |f|$ allora entro γ le funzioni f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri.*

Dimostrazione . Infatti

$$N_z(f) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f \quad \text{e} \quad N_z(f + g) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg(f + g)$$

Essendo $f \neq 0$ su γ si può scrivere $\arg(f + g) = \arg[f(1 + g/f)]$ da cui

$$\Delta_{\gamma} \arg(f + g) = \Delta_{\gamma} \arg \left[f \left(1 + \frac{g}{f} \right) \right] = \Delta_{\gamma} \arg f + \Delta_{\gamma} \arg \left(1 + \frac{g}{f} \right)$$

Per ipotesi si ha che su γ $|g/f| < 1$, questo implica che al muoversi di z su γ la funzione $1 + g(z)/f(z)$ si muove in un intorno di 1 senza girare intorno all'origine e quindi

$$\Delta_{\gamma} \arg \left(1 + \frac{g}{f} \right) = 0$$

e la tesi è dimostrata. □

Esempio: dato un polinomio di grado n

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

per $|z| > 1$ è

$$|a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| \leq |a_{n-1}| |z^{n-1}| + \dots + |a_0| \leq (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|) |z^{n-1}| = a |z|^{n-1}$$

mentre per $|z| > a$ è

$$|z|^n > a |z|^{n-1} \quad (1.12)$$

Allora dentro il cerchio di raggio a , sul cui bordo $z^n \neq 0$, il polinomio P_n ha, per il teorema 1.21 di Rouché ($f = z^n$, $g = P_n - z^n$), n zeri, cioè tanti quanti ne ha z^n . Aumentando il raggio di tale cerchio la disuguaglianza (1.12) necessaria per l'applicazione del teorema resta valida; si può allora concludere dicendo che P_n ha n radici nel piano complesso.

Se dentro γ f ha anche poli ($f \neq 0$ su γ), allora f'/f ha singolarità anche nei poli. Se z_0 è un polo di ordine n in un intorno di z_0

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} [a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \dots] = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}$$

con φ analitica e $\varphi(z_0) = a_{-n} \neq 0$. Si trova allora

$$\frac{f'}{f} + \frac{n}{z - z_0} = \frac{\varphi'}{\varphi}$$

lo sviluppo in z_0 di φ'/φ ha solo potenze positive e quindi f'/f ha in z_0 un polo del primo ordine di residuo $\mathcal{R}_{f'/f}(z_0) = -n$. Allora

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N_z - N_p)$$

dove N_p è il numero di poli, o anche

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f = N_z - N_p$$

Questo mostra che, se f ha solo zeri o poli, $\log f$ può cambiare valore solo se si gira su una curva per cui $N_z - N_p \neq 0$.

Esempio: l'equazione $\tan w = z$ ha come soluzione

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz} \implies w = -\frac{i}{2} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

e la funzione $f = (1 + iz)/(1 - iz)$ ha zero in i , polo in $-i$. I punti di diramazione sono $\pm i$ (quindi $\Delta_{\gamma} \arg f \neq 0$ se γ gira attorno ad i senza includere $-i$, e viceversa), ma il punto all'infinito non è un punto di diramazione (cioè se si gira intorno sia ad i che a $-i$ $\Delta_{\gamma} \arg f = 0$).

1.10.3 Altra conseguenza

Siano A aperto semplicemente connesso, f analitica e $f \neq 0$ in A . Notiamo innanzitutto che in A non ci sono punti di diramazione perché $\Delta_\gamma \arg f = 2\pi N_z$ ed il numero di zeri di f dentro γ è per ipotesi $N_z = 0$. Scelto $z_0 \in A$, assegno ad $f(z_0)$ una delle sue possibili fasi, ho allora che la funzione $g(z) = \log f(z)$ ottenuta assegnando a $f(z)$ la fase che si ha a partire da quella di $f(z_0)$ lungo una curva γ che va da z a z_0 entro A non dipende da γ . Ho allora che per ogni f analitica e diversa da zero in A semplicemente connesso è

$$f(z) = e^{\log f(z)} = e^{g(z)}$$

con g analitica in A .

Lemma 1.22. *Se f è analitica in un aperto A e non è costante allora $f(A)$ è aperto.*

Dimostrazione. Sia $w_0 = f(z_0)$ con $z_0 \in A$. Deve esistere un intorno di z_0 in cui $f(z) \neq w_0$, a parte $z = z_0$ (se z_0 fosse un punto di accumulazione di z_n tali per cui $f(z_n) = w_0$, sarebbe $f(z) \equiv w_0$). Considero un cerchio chiuso \overline{C} di centro z_0 così piccolo da essere in A e tale da contenere $z \neq z_0$ per cui $f(z) = w_0$. Lo sviluppo di Taylor di f in C è

$$f(z) = w_0 + a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots \quad \text{con } a_m \neq 0$$

dove m è l'ordine dello zero di $f(z) - w_0$.

Su ∂C , essendo $f(z) - w_0 \neq 0$, $|f(z) - w_0|$ avrà un minimo maggiore di zero, per cui $|f(z) - w| > \delta$. Prendo nel piano w il cerchio $|w - w_0| \leq \delta$. Sia \tilde{w} in tale cerchio, si ha

$$\begin{array}{ll} \text{per } z \in C & f(z) - \tilde{w} = f(z) - w_0 + (w_0 - \tilde{w}) \\ \text{per } z \in \partial C & |f(z) - w_0| > \delta \\ \text{mentre è} & |w_0 - \tilde{w}| < \delta \end{array}$$

per cui $f(z) - w_0$ e $f(z) - \tilde{w}$ hanno in C , per il teorema 1.21 di Rouché, lo stesso numero di zeri che è m (dato che si è preso C in modo tale che solo in z_0 sia $f(z) = w_0$).

In conclusione, per \tilde{w} tale che $|\tilde{w} - w_0| < \delta$ esistono (sono m , ma alcune potrebbero essere radici multiple, però almeno uno c'è) $z \in C$ tali che $f(z) = \tilde{w}$, quindi l'immagine di A sotto f se contiene w_0 contiene tutto $|w - w_0| < \delta$, cioè $f(A)$ è aperto.⁴ \square

⁴Osserviamo che nel caso $m = 1$, ricordando le proprietà delle applicazioni differenziabili da \mathbb{R}^2 ad \mathbb{R}^2 , si ha che $u(x, y), v(x, y), (u + iv)(x_0, y_0) = w_0$, è invertibile in un intorno di w_0 , infatti è

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0$$

Ricordando anche che lo jacobiano dell'applicazione inversa è \mathcal{J}^{-1} si ha

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{vmatrix}$$

da cui si vede che

$$x_u - y_v = \frac{1}{\mathcal{J}}(v_y - u_x) = 0$$

per le condizioni (1.2) di Cauchy–Riemann, e così anche per l'altra condizione. Quindi l'inversa è analitica.

Per quanto visto, se

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m [a_m + \dots] = (z - z_0)^m h(z) \quad \text{con } m > 1$$

si ha $h(z_0) = a_m \neq 0$ cioè esiste un intorno di z_0 in cui è $h \neq 0$ e quindi si può scrivere

$$h(z) = e^{g(z)} = \left(e^{g(z)/m} \right)^m$$

da cui

$$f(z) - w_0 = \left[(z - z_0) e^{g(z)/m} \right]^m$$

La funzione $p(z) = (z - z_0) e^{g(z)/m}$ (esistono m determinazioni di p che dipendono dall'argomento assegnato a $g = \log h$) è tale che $p(z_0) = 0$, $p'(z_0) = e^{g/m} \neq 0$ e quindi per un intorno appropriato $|p| < r$ esiste un intorno di z_0 tale che c'è corrispondenza biunivoca tra $p(z)$ e z in tali intorni. Ma i p tali che $p^m + w_0 = w = f(z)$ sono m (le radici m -esime di $w - w_0$) e per ognuna di esse esiste uno z in un intorno di z_0 tale che $|p(z)| < r$.

2 Funzioni armoniche e problemi di potenziale

Se $f = u + iv$ è una funzione analitica nell'aperto A allora le due funzioni u e v sono funzioni **armoniche** in A , ovvero vale

$$\nabla^2 u(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 v(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y) = 0$$

Questo risultato può essere ottenuto immediatamente derivando le condizioni (1.2) di Cauchy–Riemann (dato che, come visto, l'analiticità di f ci assicura la possibilità di eseguire derivazioni successive). Viceversa, se A è aperto semplicemente connesso e $u(x, y)$ è armonica in A , allora esiste $v(x, y)$ armonica (detta **armonica coniugata**) tale che $f(z) = u + iv$ è analitica in A ; a tale scopo basta imporre alla funzione v di soddisfare alle condizioni (1.2) di Cauchy–Riemann, le quali la determinano univocamente a meno di una costante additiva.

Se A non è semplicemente connesso l'armonica coniugata può esistere solo localmente.

Lemma 2.1. *Se $f = u + iv$ è una funzione analitica, le curve su cui u è costante sono perpendicolari alle curve su cui v è costante.*

Dimostrazione. Presa una curva $u = \text{cost}$ il vettore $\nabla u = (u_x, u_y)$ è ortogonale alla curva e analogamente ∇v è ortogonale alla curva $v = \text{cost}$. Ci basta allora mostrare l'ortogonalità dei gradienti, si ha

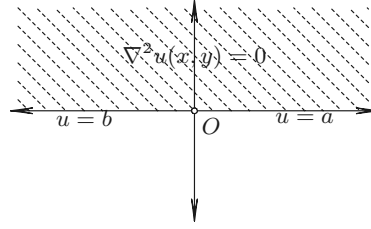
$$\nabla u \cdot \nabla v = u_x v_x + u_y v_y = 0$$

per le condizioni (1.2) di Cauchy–Riemann. □

Questo significa che se $u = \text{cost}$ sono le equipotenziali di un campo di forza, le $v = \text{cost}$ sono le linee di forza. Ad esempio, se $f = \ln r + i\theta$, le circonferenze di raggio r (per cui $\ln r = \text{cost}$) sono le equipotenziali del campo di una carica puntiforme in un piano (di un filo nello spazio), le linee di forza sono allora quelle per $\theta = \text{cost}$.

Cercare di risolvere un problema di potenziale in una regione con una data condizione al contorno equivale a cercare quella funzione analitica f la cui parte reale ha il valore dato al contorno.

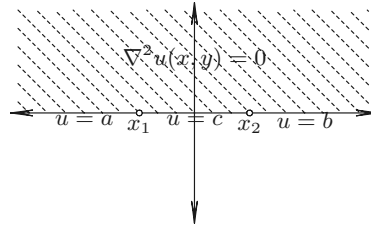
Consideriamo, ad esempio, il seguente problema



con u limitata¹ Notando che $\arg z$ è costante su una semiretta che parte dall'origine, si ha che

$$u = a + \frac{b-a}{\pi} \arg z$$

è la soluzione. Se invece fosse



con u limitata, la soluzione sarebbe

$$u = c_1 \arg(z - x_1) + c_2 \arg(z - x_2) + c_3$$

con c_i determinati dalle condizioni al contorno.

2.1 Trasformazioni conformi, trasformazioni bilineari

In generale, dato $\nabla^2 u$ in A e $u = a(x, y)$ su ∂A , la geometria di A non è così semplice da permettere di trovare a vista la funzione analitica la cui parte reale ha il valore al contorno giusto. Si può cercare allora una trasformazione di variabile $\xi(x, y), \eta(x, y)$ che in modo univoco trasformi A in un'altra regione B .

In generale, se $\varphi(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ (e $u(x, y) = \varphi(\xi(x, y), \eta(x, y))$), l'equazione per ottenere φ si ricava da $\nabla^2 u = 0$ scrivendo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} |\nabla \xi|^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} |\nabla \eta|^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} (\nabla \xi \cdot \nabla \eta) + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \nabla^2 \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \nabla^2 \eta = 0 \quad (2.1)$$

Se $f(z) = \xi + i\eta$ è una funzione analitica, $\nabla^2 \xi = \nabla^2 \eta = 0$, $\nabla \xi \cdot \nabla \eta = 0$ (per le condizioni (1.2) di Cauchy–Riemann), $|\nabla \xi|^2 = |\nabla \eta|^2 = |f'(z)|^2$ (sempre per le condizioni (1.2) di

¹La condizione di limitatezza è necessaria per l'unicità della soluzione; senza tale condizione ad una soluzione si può sempre aggiungere una soluzione di $\nabla^2 u = 0$ con $u = 0$ per $y = 0$ (per esempio y, xy).

Cauchy–Riemann); quindi la (2.1) diventa

$$|f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) = 0$$

Ricordando che la condizione di invertibilità implica $f' \neq 0$ ne segue che φ è una funzione armonica. Su ∂A deve essere inoltre verificata la condizione $u(x, y) = a(x, y)$ e quindi per φ deve valere su ∂B

$$\varphi(\xi, \eta) = a(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

Se invece il problema avesse come condizione al contorno $\partial u / \partial n = a$, allora per φ dovrà essere

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_w}(\xi, \eta) = a(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \left| \frac{dz}{dw} \right|$$

dove con w si è indicata la variabile complessa nel piano trasformato.

Le trasformazioni biunivoche da A a B realizzate con ξ ed η tali che $f(z) = \xi + i\eta$ sia una funzione analitica si chiamano **trasformazioni conformi**. La ragione di tale nome sta nel fatto che se due curve si incontrano in z formando un angolo α , le curve trasformate si incontrano in $w(z)$ formando lo stesso angolo. Per vederlo osserviamo che, se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ è una certa curva, la direzione della tangente in z a tale curva è quella di (\dot{x}, \dot{y}) . Se $\gamma'(t) = (\xi(x(t), y(t)), \eta(x(t), y(t)))$ è la curva trasformata la direzione della tangente a γ' in $w(z)$ è quella di

$$(\dot{\xi}, \dot{\eta}) = (\xi_x \dot{x} + \xi_y \dot{y}, \eta_x \dot{x} + \eta_y \dot{y})$$

usando le condizioni (1.2) di Cauchy–Riemann

$$\begin{aligned} (\dot{\xi}, \dot{\eta}) &= (\xi_x \dot{x} - \eta_x \dot{y}, \eta_x \dot{x} - \xi_x \dot{y}) \\ &= (\xi_x + i\eta_x)(\dot{x} + i\dot{y}) = f'(z)(\dot{x}, \dot{y}) \end{aligned}$$

ovvero la tangente a γ' è quella in γ ruotata di un angolo uguale a $\arg f'(z)$ che non dipende dalla curva; per cui due curve γ_1 e γ_2 che si incrociano in z sono ruotate dello stesso angolo e sono così trasformate in due curve γ'_1 e γ'_2 che in $w(z)$ formano lo stesso angolo che γ_1 e γ_2 formavano in z .

Una famiglia di trasformazioni conformi è data dalle **trasformazioni bilineari**:

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0$$

Questa è una trasformazione del piano esteso in sé. Per $w \in \mathbb{C}$ si può risolvere per z (e $z(w)$ è bilineare in w), il punto $w = \infty$ è l'immagine del punto z per cui, se $c \neq 0$, si annulla il denominatore o, se $c = 0$, è l'immagine di $z = \infty$. La trasformazione $w(z)$ è analitica in z fatta eccezione per i punti che annullano il denominatore e

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

fatta ancora eccezione per gli z che annullano il denominatore.

Le trasformazioni bilineari sono composizione di trasformazioni lineari e dell'inversione $w = 1/z$; infatti, se $c = 0$ la trasformazione è lineare, mentre se $c \neq 0$ è

$$w = \frac{a}{c} \frac{z + b/a}{z + d/c}$$

momentaneamente sia $a \neq 0$

$$\begin{aligned} w &= \frac{a}{c} \frac{z + d/c + (b/a - d/c)}{z + d/c} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \frac{bc - ad}{ac} \frac{1}{z + d/c} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{cz + d} \end{aligned}$$

che è valida anche per $a = 0$. Si ha allora che w è la composizione di

$$z \longrightarrow z' = cz + d \longrightarrow z'' = \frac{1}{z'} \longrightarrow w = pz'' + q$$

Si deduce allora che ogni proprietà valida per le trasformazioni lineari e per l'inversione è valida anche per le trasformazioni bilineari. In particolare:

Lemma 2.2. *Le trasformazioni bilineari mandano l'insieme delle rette e dei cerchi del piano complesso in se stesso.*

Dimostrazione. Si può pensare alle rette come cerchi di raggio infinito o, riferendoci alla sfera di Riemann, come cerchi per il punto all'infinito. L'equazione più generale per un cerchio o retta è

$$pz\bar{z} + qz + \bar{q}z + r = 0 \quad \text{con } p, r \in \mathbb{R}, \text{ e } |q|^2 > rp$$

infatti per $p = 0$ è evidentemente una retta, mentre per $p \neq 0$ con un po' di conti ottengo

$$\left| z + \frac{\bar{q}}{p} \right|^2 = \frac{|q|^2}{p^2} - \frac{r}{p}$$

che è evidentemente un cerchio di centro $z_0 = -\bar{q}/p$ e raggio dato da $R^2 = (|q|^2 - rp)/p^2$. È allora chiaro che l'applicazione lineare $w = az + b$ trasforma l'ultima equazione in

$$|w - (az_0 + b)|^2 = |a|^2 R^2$$

quanto all'inversione $w = 1/z$ l'equazione in w diventa

$$\frac{p}{|w|^2} + \frac{q}{w} + \frac{\bar{q}}{\bar{w}} + r = 0 \quad \text{cioè} \quad r|w|^2 + \bar{q}w + q\bar{w} + p = 0$$

che è della forma da cui siamo partiti. □

Osservazione: Se è $r = 0$, nel piano w la figura di arrivo è una retta; $r = 0$, d'altra parte, significa che $z = 0$ appartiene alla curva di equazione $p|z|^2 + qz + \bar{q}\bar{z} = 0$, e $z = 0$ è il punto che sotto l'inversione va all'infinito. Questo è il criterio che distingue se la curva di arrivo è un cerchio o una retta: se il punto che va all'infinito (quello che annulla il denominatore) appartiene alla figura di partenza, la figura di arrivo passa per il punto all'infinito e quindi è una retta, altrimenti è un cerchio.

In una trasformazione bilineare sono importanti solo i rapporti tra le costanti a, b, c, d , infatti se si moltiplicano numeratore e denominatore per una costante la trasformazione non cambia. In effetti la trasformazione è fissata se si richiede per tre punti

$$z_1 \longrightarrow w_1, \quad z_2 \longrightarrow w_2, \quad z_3 \longrightarrow w_3$$

Basta infatti osservare che l'inversa di una trasformazione bilineare è ancora bilineare e che il prodotto di trasformazioni bilineari è anch'essa bilineare. Se a w si associa la matrice dei coefficienti

$$w \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la trasformazione prodotto ha come matrice associata il prodotto delle matrici e la trasformazione inversa la matrice inversa (a meno di un fattore che moltiplica numeratore e denominatore). Ora se $t(z)$ è la trasformazione che manda

$$z_1 \longrightarrow 0, \quad z_2 \longrightarrow 1, \quad z_3 \longrightarrow \infty$$

e $t(w)$ quella che manda

$$w_1 \longrightarrow 0, \quad w_2 \longrightarrow 1, \quad w_3 \longrightarrow \infty$$

allora $w(t(z))$ manda

$$z_1 \longrightarrow w_1, \quad z_2 \longrightarrow w_2, \quad z_3 \longrightarrow w_3$$

La trasformazione $t(z)$ è data da

$$t(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_1}$$

e analogamente per $t(w)$, quindi $w(t(z))$ è data implicitamente da

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_1}$$

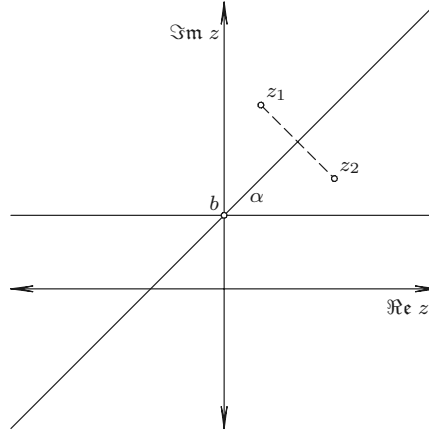
Per determinare la trasformazione che manda una certa curva (cerchio o retta) in un'altra è utile una proprietà valida per le trasformazioni lineari e per l'inversione che si esprime in termini di **punti simmetrici**, che sono definiti come segue:

(i) I punti z_1 e z_2 sono simmetrici rispetto ad un cerchio di centro z_0 e raggio R se

$$(z_1 - z_0)(\bar{z}_2 - \bar{z}_0) = R^2 \quad \text{e} \quad \arg(z_1 - z_0) - \arg(z_2 - z_0) = \arg R^2 = 0$$

(la seconda relazione significa che i punti z_0, z_1, z_2 sono allineati).

- (ii) I punti z_1 e z_2 sono simmetrici rispetto ad una retta se tale retta è l'asse del segmento che li unisce. L'espressione algebrica di tale proprietà può essere trovata notando che se la retta è l'asse reale due punti sono simmetrici se sono coniugati, e che una generica retta del piano complesso può ottenersi ruotando l'asse reale attorno all'origine e traslandolo lungo l'asse immaginario:



Quindi z_1 e z_2 sono simmetrici rispetto alla retta $(z - b)e^{-i\alpha}$ se

$$(z_1 - b)e^{-i\alpha} - (\bar{z}_2 - \bar{b})e^{i\alpha} = 0$$

La proprietà anticipata, di cui omettiamo la facile dimostrazione, è la seguente

Lemma 2.3. *Le trasformazioni bilineari mandano punti simmetrici in punti simmetrici.*

Osservazione: Se la trasformazione ha un denominatore che si annulla per uno z (cioè non è lineare), abbiamo che un certo z_1 viene mandato all'infinito. Dato un cerchio, se z_1 è sul cerchio il suo simmetrico è z_1 stesso e quindi il cerchio viene mandato in una retta; se z_1 non è sul cerchio, avrà un simmetrico z_2 , e il cerchio è trasformato in un altro cerchio. Analogamente se si ragiona con una retta. Si ha inoltre che il centro del cerchio e $z = \infty$ sono simmetrici nel senso che i loro trasformati sono simmetrici rispetto alla figura di arrivo, o provengono da punti che sono simmetrici rispetto alla figura di partenza.

Esempio: trasformiamo $|z| = R$ in sé in modo tale che il punto z_0 interno al cerchio venga mandato in $w(z_0) = 0$. L'equazione del cerchio può scriversi come $z\bar{z} = R^2$, il simmetrico di z_0 è

$$z_0^s = \frac{R^2}{\bar{z}_0}$$

Dato che $z_0 \rightarrow 0$ dovrà essere $z_0^s \rightarrow \infty$ e quindi

$$w(z) = \alpha \frac{z - z_0}{z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}}$$

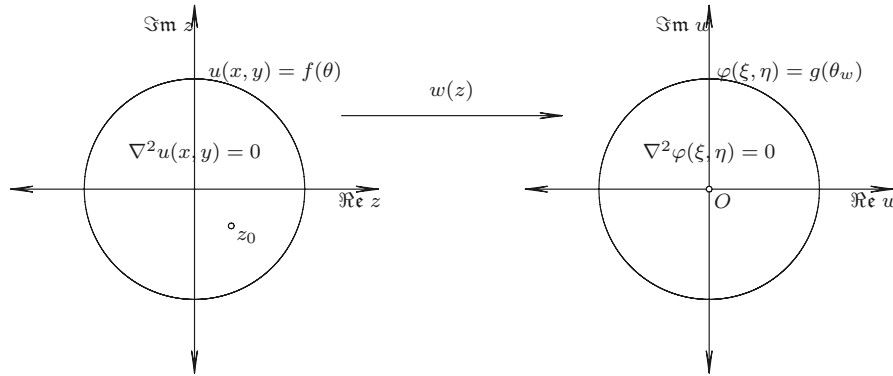
con α che deve essere scelto in modo da soddisfare $|w| = R$; scrivendo $z = Re^{i\theta}$ deve essere

$$\left| \alpha \frac{Re^{i\theta} - z_0}{Re^{i\theta} - \frac{R^2}{\bar{z}_0}} \right| = \left| \frac{\alpha \bar{z}_0}{R} \frac{Re^{i\theta} - z_0}{\bar{z}_0 e^{i\theta} - R} \right| = \left| \frac{\alpha \bar{z}_0}{R} \frac{Re^{i\theta} - z_0}{\bar{z}_0 - Re^{-i\theta}} \right| = \left| \frac{\alpha \bar{z}_0}{R} \right| = R$$

cioè $\alpha = R^2/\bar{z}_0$ (a meno di un fattore di fase) e quindi

$$w(z) = \frac{R^2}{\bar{z}_0} \frac{z - z_0}{z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}}$$

Si può usare questa trasformazione per ritrovare la formula di Poisson. Basta ricordare che il valore di una funzione armonica in un cerchio è la media dei valori sulla circonferenza. Se



si ha

$$u(x_0, y_0) = \varphi(\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0)) = \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta_w) d\theta_w$$

Se esprimiamo θ_w in termini di θ , $g(\theta_w(\theta))$ diventa $f(\theta)$ e si può calcolare $u(x_0, y_0)$. Notiamo che, essendo $w = Re^{i\theta_w}$, $z = Re^{i\theta}$ e $z_0 = re^{i\varphi}$ è

$$\frac{dw}{w} = id\theta_w = \frac{dz}{z - z_0} - \frac{dz}{z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}} = id\theta Re^{i\theta} \left(\frac{1}{Re^{i\theta} - re^{i\varphi}} - \frac{1}{Re^{i\theta} - \frac{R^2}{r} e^{i\varphi}} \right)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta_w}{d\theta} &= \frac{Re^{i\theta} \left(re^{i\varphi} - \frac{R^2}{r} e^{i\varphi} \right)}{R(Re^{i\theta} - re^{i\varphi}) \left(e^{i\theta} - \frac{R^2}{r} e^{i\varphi} \right)} \\
 &= \frac{e^{i\varphi}(r^2 - R^2)e^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - re^{i\varphi})(re^{i\theta} - Re^{i\varphi})} \\
 &= \frac{R^2 - r^2}{(Re^{i\theta} - re^{i\varphi})(Re^{-i\theta} - re^{-i\varphi})} \\
 &= \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)}
 \end{aligned}$$

in conclusione si ottiene la **formula di Poisson**

$$u(r, \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta) d\theta}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)}$$

che risolve il problema di Laplace con condizioni ai limiti sulla circonferenza.

2.2 La funzione di Green ed il suo uso per la soluzione di problemi omogenei e non

Partiamo ricordando un risultato noto, siano $A \subset \mathbb{R}^3$ un aperto e $a, b \in \mathcal{C}^2(A) \cap \mathcal{C}^1(\overline{A})$, dalla relazione

$$a \nabla^2 b - b \nabla^2 a = \nabla \cdot (a \nabla b - b \nabla a)$$

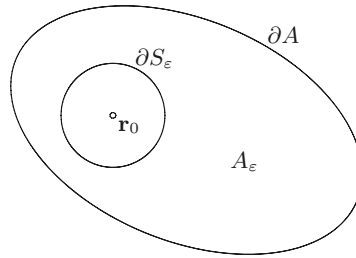
integrando ed usando il teorema di Gauss si trova la **formula di Green**

$$\int_A (a \nabla^2 b - b \nabla^2 a) dV = \int_{\partial A} \left(a \frac{\partial b}{\partial n} - b \frac{\partial a}{\partial n} \right) dS \quad (2.2)$$

Se $u \in \mathcal{C}^2(A) \cap \mathcal{C}^1(\overline{A})$ possiamo adoperare la formula di Green per u ; sia $\mathbf{r}_0 \in A$, detto

$$G_0 = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

il potenziale della carica puntiforme si ha che G_0 è singolare in \mathbf{r}_0 , consideriamo allora una sfera S_ε di raggio ε e centro \mathbf{r}_0 e poniamo $A_\varepsilon = A \setminus S_\varepsilon$:



2.2 La funzione di Green ed il suo uso per la soluzione di problemi omogenei e non

Usando la formula (2.2) di Green, poiché in A_ε si ha $\nabla^2 G_0 = 0$, si trova

$$\int_{A_\varepsilon} G_0 \nabla^2 u \, dV = \int_{\partial A} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_0}{\partial n} \right) dS + \int_{\partial S_\varepsilon} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_0}{\partial n} \right) dS$$

facendo tendere $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha:

(i) al primo membro, poiché è $|\nabla^2 u| < M$ e $G_0 \in L^1(A)$, per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue si ha

$$\int_{A_\varepsilon} G_0 \nabla^2 u \, dV = \int_A \chi_{A_\varepsilon} G_0 \nabla^2 u \, dV \longrightarrow \int_A G_0 \nabla^2 u \, dV$$

dove χ_{A_ε} è la funzione caratteristica che vale 1 su A_ε ed è nulla altrove;

(ii) al secondo membro, posto $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ si ha $G_0 = 1/\rho$ e $dS = \rho^2 d\Omega$, con $\rho = \varepsilon$ su ∂S_ε , per cui

$$\int_{\partial S_\varepsilon} G_0 \frac{\partial u}{\partial n} dS = \varepsilon \int \frac{\partial u}{\partial n}(\varepsilon, \Omega) d\Omega \longrightarrow 0$$

e inoltre, essendo $\partial/\partial n = -\partial/\partial \rho$, cioè $\partial G_0/\partial n = 1/\rho^2$, si ha che

$$\int_{\partial S_\varepsilon} u \frac{\partial G_0}{\partial n} dS = \int u(\varepsilon, \Omega) d\Omega = 4\pi u(\varepsilon, \tilde{\Omega}) \longrightarrow u(\mathbf{r}_0)$$

In conclusione otteniamo

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial A} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_0}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_A G_0 \nabla^2 u \, dV \quad (2.3)$$

In due dimensioni si ottiene lo stesso risultato con

$$G_0 = -2 \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$$

In un problema di potenziale tipicamente al contorno è assegnata la u o la $\partial u/\partial n$, mentre nella (2.3) compaiono entrambe. Non è quindi possibile usare direttamente la (2.3) per esprimere la soluzione di un problema.

Quando la funzione u è armonica, ossia quando $\nabla^2 u = 0$, la (2.3) diventa

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial A} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_0}{\partial n} \right) dS$$

Da quest'ultima si possono ottenere le seguenti interessanti informazioni sulle funzioni armoniche.

Teorema 2.4 (della media). *Se $\mathbf{r}_0 \in A$ e S_R è una sfera di centro \mathbf{r}_0 e raggio R interamente contenuta in A , allora*

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S_R} u(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{n}) d\Omega$$

Dimostrazione . Su S_R , poiché $\nabla^2 u = 0$ si ha

$$G_0 = \frac{1}{R} \int_{\partial S_R} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\partial S_R} \nabla u \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_R} \nabla^2 u \, dV = 0$$

Inoltre su ∂S_R è $\partial G_0 / \partial n = \partial / \partial \rho (1/\rho)$, si ha allora

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S_R} u \frac{1}{\rho^2} \Big|_{\rho=R} R^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S_R} u \, d\Omega$$

□

Teorema 2.5 (Principio del massimo e del minimo per funzioni armoniche).

Una funzione armonica non può avere massimi o minimi all'interno del dominio di armonicità.

Dimostrazione . Se non fosse così si entrerebbe in contrasto con il teorema 2.4 della media se si pensa ad una superficie sferica di centro nel presunto massimo \mathbf{r}_{max} e passante per un punto in cui $u < u(\mathbf{r}_{max})$. Analogamente per il minimo. □

Osservazione: Immediate conseguenze del principio 2.5 del massimo e del minimo per funzioni armoniche sono le seguenti:

- (i) Se A è connesso e u armonica in A ha massimo interno ad A allora u è costante.
- (ii) Se a, b sono armoniche in A , continue in \bar{A} e $a - b \geq 0$ su ∂A allora $a - b \geq 0$ su tutto A .
- (iii) Se u è armonica in A e $|u| \leq M$ su ∂A allora $|u| \leq M$ su tutto A (in particolare $|u| \leq \max_{\partial A} |u|$).

Teorema 2.6 (del prolungamento armonico). *Sia I un intorno dello zero, se u è armonica in $I \setminus \{0\}$ e $ru \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0^2$, allora esiste una funzione v armonica in tutto I tale che sia $u = v$ in $I \setminus \{0\}$.*

Dimostrazione . Sia $\mathbf{r}_0 \in I \setminus \{0\}$. Esistono $\varepsilon, R > 0$, con $\varepsilon < |\mathbf{r}_0| < R$, tali che la sfera S_R di raggio R e centro in zero sia in I . Dalla (2.3) (ricordando che $\nabla^2 u = 0$) si ha che

$$4\pi u(\mathbf{r}_0) = \int_{\partial S_R} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_0}{\partial n} \right) dS + \int_{\partial S_\varepsilon} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_0}{\partial n} \right) dS$$

²Questo è l'enunciato in tre dimensioni; in due dimensioni basta che sia u limitata in I ; più in generale, detto $V_p(r)$ il potenziale della carica puntiforme deve essere

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(r)}{V_p(r)} = 0$$

2.2 La funzione di Green ed il suo uso per la soluzione di problemi omogenei e non

La funzione di \mathbf{r}_0 definita dal primo integrale è armonica in tutto I , perché $\mathbf{r} \in S_R$. Mandando $\varepsilon \rightarrow 0$ il termine

$$\int_{\partial S_\varepsilon} u \frac{\partial G_0}{\partial n} dS = \int u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \varepsilon \mathbf{n}|} \right) \varepsilon^2 d\Omega \longrightarrow 0$$

perché $\varepsilon^2 u \rightarrow 0$, dato che per ipotesi $\varepsilon u \rightarrow 0$, e $\partial/\partial n(1/|\mathbf{r} - \varepsilon \mathbf{n}|)$ è limitato. D'altra parte il termine

$$\int_{\partial S_\varepsilon} G_0 \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \varepsilon \mathbf{n}|} \frac{\partial u}{\partial n} \varepsilon^2 d\Omega$$

e per il teorema 2.4 della media

$$\int \frac{1}{|\mathbf{r} - \varepsilon \mathbf{n}|} \frac{\partial u}{\partial n} \varepsilon^2 d\Omega = \frac{4\pi \varepsilon^2}{|\mathbf{r} - \varepsilon [\mathbf{n}]|} \frac{\partial u}{\partial n}(\varepsilon, [\mathbf{n}]) \longrightarrow \frac{C}{|\mathbf{r}_0|}$$

con C costante. Quindi

$$4\pi |\mathbf{r}_0| u(\mathbf{r}_0) = |\mathbf{r}_0| \int_{\partial S_R} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_0}{\partial n} \right) dS + A$$

Per $\mathbf{r}_0 \rightarrow 0$, al secondo membro il primo termine tende a zero, e poiché per ipotesi $ru(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ si trova anche $C = 0$. In conclusione

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S_R} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_0}{\partial n} \right) dS$$

e il secondo membro è armonico anche il zero.

Analogamente si procede in due dimensioni. □

Affrontiamo un **problema di Dirichlet**: abbiamo $\nabla^2 u = f$ in A e $u = g$ su ∂A . Come già anticipato la relazione (2.3) l'incognita $\partial u/\partial n$ su ∂A , quindi non può essere usata per la risoluzione diretta del problema. Notiamo che la (2.3) continua a valere se sostituiamo

$$G_0(\mathbf{r}) \longrightarrow G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = G_0 + h(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$$

con h armonica in A . Infatti, per ricavare la (2.3) si è usato il fatto che per $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ era $\nabla^2 G_0 = 0$ e che G_0 è L^1 in un intorno di \mathbf{r}_0 , cose che restano valide anche per G . Allora per un problema di Dirichlet si può scrivere

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial A} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_A G \nabla^2 u \, dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial A} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - g \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_A G f \, dV \end{aligned}$$

Se la h è scelta in modo tale che per $\mathbf{r} \in \partial A$ sia $G = 0$, cioè in modo tale che

$$h(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = 0 \quad \text{per } \mathbf{r} \in \partial A$$

la $u(\mathbf{r}_0)$ resta espressa in termini di quantità note:

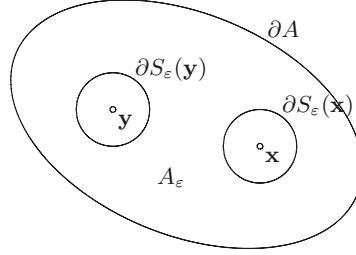
$$u(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial A} g \frac{\partial G}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_A G f dV$$

La funzione $G = G_0 + h$, con $\nabla^2 h = 0$ in A e $h + G_0 = 0$ su ∂A , è detta **funzione di Green** della regione A .

Prima di discutere il significato fisico di G dimostriamo il seguente

Lemma 2.7. *La funzione di Green, $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$, è simmetrica nei due argomenti.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, considero



Per $\mathbf{z} \in A_\varepsilon$ le funzioni $G(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, $G(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ sono armoniche. La formula (2.2) di Green implica

$$\int_{\partial A_\varepsilon} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right] dS = 0$$

la frontiera di A_ε è fatta da ∂A , dove $G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$, e da $\partial S_\varepsilon(\mathbf{x})$ e $\partial S_\varepsilon(\mathbf{y})$, quindi

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\partial S_\varepsilon(\mathbf{x})} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right] dS + \\ & + \int_{\partial S_\varepsilon(\mathbf{y})} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right] dS \end{aligned}$$

Mandando $\varepsilon \rightarrow 0$, su $\partial S_\varepsilon(\mathbf{x})$ la $G(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ diverge come $1/\varepsilon$, mentre dS va come ε^2 , quindi il limite è zero. D'altra parte

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial n} h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad (2.4)$$

il contributo di $\partial h / \partial n$ in (2.4) è limitato perché h è armonica, infatti

$$\int_{\partial S_\varepsilon(\mathbf{x})} G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \frac{\partial h}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int G(\mathbf{y}, \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}) \frac{\partial h}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varepsilon^2 d\Omega \longrightarrow 0$$

perché anche $G(\mathbf{y}, \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n})$ è limitata. Invece il primo termine della (2.4), per il teorema 2.4 della media, diventa

$$-\int_{\partial S_\varepsilon(\mathbf{x})} G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \frac{1}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 d\Omega = -4\pi G(\mathbf{y}, \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}) \longrightarrow -4\pi G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Discorso analogo per l'integrale su $\partial S_\varepsilon(\mathbf{y})$, per cui si trova

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

e il teorema è dimostrato. \square

Quindi $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$, che nasce come potenziale in \mathbf{r} quando una carica unitaria è in \mathbf{r}_0 con condizione al contorno $G = 0$, è anche il potenziale in \mathbf{r}_0 generato da una carica puntiforme in \mathbf{r} (che tende a zero quando \mathbf{r}_0 si avvicina alla frontiera).

La soluzione dell'equazione di Poisson $\nabla^2 u = -4\pi\rho$ con $u = 0$ al contorno, che è

$$u(\mathbf{r}_0) = \int_A G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV$$

è allora interpretabile come la somma dei contributi al potenziale delle cariche $\rho(\mathbf{r})dV$, e poiché la condizione al contorno è omogenea, se $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})\rho(\mathbf{r})dV = 0$ al contorno anche la somma (integrale) è nulla al contorno.

Lemma 2.8. *La funzione di Green soddisfa queste tre condizioni:*

(a) è armonica in $A \setminus \{\mathbf{r}_0\}$

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = 0 \quad \text{per } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$$

(b) l'andamento in \mathbf{r}_0 è tale che

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \frac{G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})} = 1$$

(c) ed è nulla al contorno:

$$G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = 0 \quad \text{su } \partial A$$

e queste tre condizioni definiscono univocamente una funzione G come funzione di Green.

Dimostrazione. Infatti la (a) dice che il potenziale di una distribuzione di carica è non nullo solo in \mathbf{r}_0 , (c) dice che si annulla al contorno e (b) precisa che la distribuzione è quella di una carica puntiforme (e non ad esempio di un dipolo, che in \mathbf{r}_0 è più singolare). \square

Consideriamo ora un **problema di Neumann** (che assegna sul bordo il valore di $\partial u / \partial n$): si potrebbe pensare di partire da

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial A} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_A G \nabla^2 u dV$$

con $G = G_0 + h$, h armonica tale per cui $\partial G / \partial n = 0$ su ∂A , in modo da eliminare il termine incognito dipendente dal valore di u su ∂A . Ma ciò è impossibile. Infatti, integrando $\partial G / \partial n$ sulla frontiera si ha

$$0 = \int_{\partial A} \frac{\partial G}{\partial n} dS = \int_{\partial A} \frac{\partial G_0}{\partial n} dS + \int_{\partial A} \frac{\partial h}{\partial n} dS$$

per il teorema di Gauss (il flusso del campo attraverso ∂A è uguale alla carica contenuta in A) che il primo termine è uguale a -4π , mentre il secondo è 0. Si ha quindi un assurdo.

Possiamo però richiedere che $\partial G/\partial n$ sia uguale ad una appropriata costante su ∂A , così facendo infatti risulta

$$\int_{\partial A} u \frac{\partial G}{\partial n} dS = \text{cost}$$

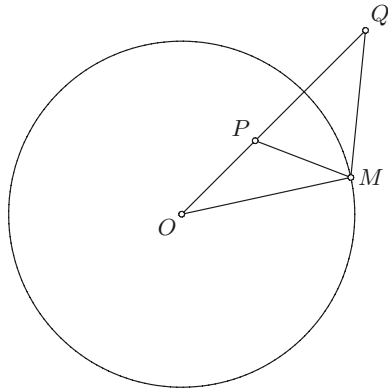
e il problema di Neumann è definito a meno di una costante. La costante appropriata è individuata dall'equazione

$$\int_{\partial A} \frac{\partial G}{\partial n} dS = K \mu(\partial A) = \int_{\partial A} \left(\frac{\partial G_0}{\partial n} + \frac{\partial h}{\partial n} \right) dS = -4\pi$$

dove $\mu(\partial A)$ rappresenta la misura della frontiera, cioè

$$K = -\frac{4\pi}{\mu(\partial A)}$$

Funzione di Green per una sfera e per una circonferenza di raggio R : usiamo il metodo delle immagini, sfruttando la seguente costruzione



dove Q (allineato con P e O) è tale che

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = R^2$$

Per un generico punto M sulla sfera si ha che

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OQ}}$$

questo implica che i triangoli OPM e OQM sono simili. Allora è anche

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{MQ}}$$

cioè

$$\frac{1}{\overline{PM}} = \frac{1}{\overline{QM}} \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}}$$

Per il problema tridimensionale della sfera questo ci dice che, se $\mathbf{r} \equiv M$ ed in $\mathbf{r}_0 \equiv P$ è presente una carica unitaria, la funzione

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{R}{r_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|}$$

è armonica in tutta la sfera a parte il punto \mathbf{r}_0 ed obbedisce alle condizioni (a), (b), (c), richieste per la funzione di Green. Poiché è

$$\mathbf{r}_Q = \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 \mathbf{r}_0$$

la funzione di Green vale

$$G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{R}{r_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|}$$

Per il problema bidimensionale della circonferenza, prendendo $G_0 = -2 \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ si ha

$$G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = -2 \ln \left(\frac{R}{r_0} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|} \right)$$

Nei problemi a due dimensioni la funzione di Green si può trovare se si sa trasformare in modo conforme la regione considerata in un'altra in cui la funzione di Green è già nota. Infatti si è visto che se $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ sono tali che $w(z) = \xi + i\eta$ è analitica e se $\varphi(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ si trova che

$$\nabla_z^2 u(x, y) = \nabla_w^2 \varphi(\xi, \eta) |\nabla \xi|^2 \quad (2.5)$$

in cui, tenendo conto delle condizioni (1.2) di Cauchy–Riemann, si ha

$$|\nabla \xi|^2 = \mathcal{J}_{w(z)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

Se integro in una certa regione S_z il primo ed il secondo membro di (2.5) si trova

$$\int_{S_z} \nabla_z^2 u \, dx dy = -4\pi Q_{S_z} = \int_{S_z} \nabla_w^2 \varphi \, \mathcal{J}_{w(z)} \, dx dy$$

passando alle variabili ξ, η nel secondo integrale, detta S_w la regione trasformata, si ha

$$-4\pi Q_{S_z} = \int_{S_w} \nabla_w^2 \varphi \, \mathcal{J}_{w(z)} \, \mathcal{J}_{z(w)} \, d\xi d\eta = \int_{S_w} \nabla_w^2 \varphi \, d\xi d\eta$$

dato che i due jacobiani sono uno l'inverso dell'altro, da cui

$$Q_{S_z} = Q_{S_w}$$

cioè il potenziale φ proviene da una distribuzione di carica tale che la regione trasformata S_w contiene la stessa della regione di partenza S_z .

In particolare, se consideriamo la funzione di Green $u(x, y) = G(z_0, z)$ (potenziale di carica unitaria in z_0 e nulla altrove), si ha il seguente

Lemma 2.9. *Se $G_A(z_0, z)$ è la funzione di Green di una certa regione A del piano z e $w(z)$ trasforma in modo conforme A in B , allora la funzione di Green della regione B è data da*

$$G_B(w_0, w) = G_A(z(w_0), z(w))$$

Dimostrazione . Sono infatti soddisfatte le tre condizioni del lemma 2.8:

(a) G_B è il potenziale di una carica unitaria in $w_0 = w(z_0)$ e nulla altrove;

(b) nell'intorno di $w_0 = w(z_0)$ è

$$w(z) - w_0 = (z - z_0) [a + (z - z_0) + \dots] = (z - z_0)g(z) \quad \text{con } g(z_0) = a = \frac{dw}{dz}(z_0) \neq 0$$

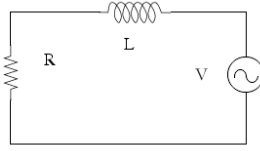
dato che la trasformazione è invertibile, per cui

$$\begin{aligned} -\frac{G_B(w_0, w)}{2 \ln |w - w_0|} &= -\frac{G_A(z_0, z)}{2 \ln |z - z_0| - 2 \ln |g(z)|} \\ &= -\frac{G_A(z_0, z)}{2 \ln |z - z_0|} \frac{1}{1 - g(z)/(2 \ln |z - z_0|)} \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

(c) ed infine, se G_A si annulla per $z \rightarrow \partial A$, allora anche G_B si annulla per $w \rightarrow \partial B$, dato che $w \rightarrow \partial B \iff z \rightarrow \partial A$.

□

3 Sistemi lineari e indipendenti dal tempo



Consideriamo un circuito RL , detta $V(t)$ la tensione prodotta dal generatore, l'equazione del circuito è

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V(t)$$

La soluzione è data da

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \int_a^t e^{-\frac{R}{L}(t-x)} V(x) dx \quad (3.1)$$

Supponiamo che V sia nulla prima di un certo istante t_0 :

$$V(t) = \tilde{V}(t)\theta(t - t_0)$$

In questo caso si può porre $a = -\infty$ e la (3.1) diventa

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \int_{-\infty}^t e^{-\frac{R}{L}(t-x)} \tilde{V}(x)\theta(x - t_0) dx \quad (3.2)$$

Cerco quella soluzione i_V che è nulla per $t < t_0$, cioè quella soluzione che è dovuta unicamente alla presenza di $V(t)$. Per $t < t_0$ il secondo termine della (3.2) è nullo perché è $\theta(x - t_0) = 0$, allora, affinché i sia nulla, deve essere $i_0 = 0$. La soluzione cercata è quindi

$$i_V(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\frac{R}{L}(t-x)} V(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{R}{L}(t-x)} \theta(t - x) V(x) dx$$

La relazione trovata tra i_V e V è evidentemente lineare: se si pone $i_V = L(V)$ è

$$L(V_1 + V_2) = L(V_1) + L(V_2) \quad \text{e} \quad L(\alpha V) = \alpha L(V)$$

Il sistema è inoltre invariante per traslazioni temporali, il che significa che

$$i(t) = L[V(t)] \implies L[V(t - T)] = i(t - T)$$

3 Sistemi lineari e indipendenti dal tempo

Naturalmente la linearità e l'indipendenza dal tempo del sistema sono una conseguenza della linearità dell'equazione e del fatto che i coefficienti dell'equazione sono indipendenti dal tempo.

In generale, si dice **sistema lineare e indipendente dal tempo** ogni sistema per cui tra l'ingresso $f(t)$ e l'uscita $g(t) = L[f(t)]$ valgono le relazioni

$$(i) \quad L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2);$$

$$(ii) \quad L(\alpha f) = \alpha L(f);$$

$$(iii) \quad L[f(t - T)] = L[f(t)](t - T).$$

È un fatto generale che

Lemma 3.1. *Per un sistema lineare e indipendente dal tempo, la relazione tra uscita g ed ingresso f è data da*

$$g(t) = \int G(t - x)f(x)dx \quad (3.3)$$

dove la G si chiama **funzione di Green** del sistema.

Dimostrazione. La più generale dipendenza lineare fra g ed f è rappresentabile come

$$g(t) = \int G(t, x)f(x)dx$$

l'indipendenza dal tempo significa che se $g_T(t)$ è la risposta a $f(t - T)$, deve essere $g_T(t) = g(t - T)$, cioè posto $z = x - T$

$$g_T(t) = \int G(t, x)f(x - T)dx = \int G(t, z + T)f(z)dz = g(t - T) = \int G(t - T, x)f(x)dx$$

e, poiché questa relazione deve valere per ogni f , deve essere

$$G(t, x + T) = G(t - T, x)$$

ovvero, posto $y = t - T$

$$G(y, x) = G(y + T, x + T) \quad (3.4)$$

Ogni funzione di x, y può essere pensata anche come una funzione \tilde{G} di $d = y - x$ e $s = y + x$, la (3.4) dice allora

$$\tilde{G}(d, s) = \tilde{G}(d, s + 2T)$$

e poiché T è qualunque si ha che \tilde{G} non dipende da s , ma solo da d . \square

Osservazione: Vedremo meglio nel seguito che l'integrale nella (3.3) si deve intendere come qualcosa di più generale, come l'effetto di una distribuzione su f (convoluzione). Per esempio, se il sistema è tale che $g = L(f) = f$ si ha $G(t - x) = \delta(t - x)$. Sempre operando con la δ di Dirac, si vede che se $f(t) = \delta(t)$ allora $g(t) = G(t)$, ovvero la funzione di Green è la risposta alla δ di Dirac. La situazione è, sotto questo punto di vista, simile a quella che si è incontrata nei problemi di potenziale dove la $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ è il potenziale per la distribuzione di carica $\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$.

Si è incontrato un caso di relazione $g = L(f)$ con L lineare e indipendente dal tempo quando, risolvendo il problema

$$\begin{cases} \square u(x, t) = F(x, t) \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \end{cases}$$

separando le variabili $u(x, t) = \sum X_n(x)T_n(t)$, ci siamo trovati a risolvere l'equazione

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = a(t) \quad \text{con} \quad T(0) = T'(0) = 0 \quad (3.5)$$

dove $a(t)$ è il coefficiente di Fourier della forza esterna $F(x, t)$. La soluzione era

$$T(t) = \int_0^t \frac{\sin \omega(t - \tau)}{\omega} a(\tau) d\tau$$

Dato che la forza esterna agisce a partire da $t = 0$, è $a(t) = 0$ per $t < 0$ e quindi

$$T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega(t - \tau)}{\omega} \theta(t - \tau) a(\tau) d\tau$$

la funzione di Green vale allora

$$G(t - \tau) = \frac{\sin \omega(t - \tau)}{\omega} \theta(t - \tau)$$

La dipendenza della funzione di Green da $t - \tau$ esprime l'indipendenza dal tempo, che è dovuta al fatto che la (3.5) è un'equazione differenziale a coefficienti costanti.

3.1 Funzione di Green per problemi lineari

3.1.1 Funzione di Green per un problema con condizioni iniziali date

Se dobbiamo risolvere un problema con coefficienti non costanti e con **condizioni iniziali omogenee**

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = f(x) \quad \text{con} \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad (3.6)$$

la funzione di Green $G(x, z)$ tale che

$$y(x) = \int_0^x G(x, z) f(z) dz$$

non è più funzione solo di $x - z$. Per esprimere la soluzione del problema così è comodo moltiplicare ambo i membri della (3.6) per $M(x) = e^{\int^x a(z) dz}$; si trova un'equazione del tipo

$$Ly \equiv \frac{d}{dx} [M(x)y'(x)] + P(x)y(x) = F(x) \quad \text{con} \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad (3.7)$$

3 Sistemi lineari e indipendenti dal tempo

Risolviamo la (3.7) col metodo della variazione delle costanti. Consideriamo le soluzioni u, v dei problemi omogenei

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} Lv = 0 \\ v(0) = 1 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

Tali soluzioni sono evidentemente linearmente indipendenti. Notiamo che è

$$uLv - vLu = u \frac{d}{dx}(Mv') - v \frac{d}{dx}(Mu') = 0 = \frac{d}{dx}(uMv' - vMu')$$

da cui

$$uMv' - vMu' = -M(0) \neq 0$$

dato che $M > 0$. Sia

$$y = au + bv \implies y' = [a'u + b'v] + au' + bv'$$

Imponendo $a'u + b'v = 0$ e sostituendo tale y nella (3.7) si trova

$$\begin{aligned} Ly &= \frac{d}{dx}[aMu' + bMv'] + P(au + bv) \\ &= a'Mu' + b'Mv' + aLu + bLv \\ &= a'Mu' + b'Mv' = F \end{aligned}$$

deve essere allora

$$\begin{cases} a'u + b'v = 0 \\ a'Mu' + b'Mv' = F \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti vale

$$\begin{vmatrix} u & v \\ Mu' & Mv' \end{vmatrix} = uMv' - vMu' = -M(0)$$

per cui

$$a' = -\frac{1}{M(0)} \begin{vmatrix} 0 & v \\ F & Mv' \end{vmatrix} = \frac{vF}{M(0)} \quad \text{e} \quad b' = -\frac{1}{M(0)} \begin{vmatrix} u & 0 \\ Mu' & F \end{vmatrix} = -\frac{uF}{M(0)}$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova

$$\begin{aligned} y(0) &= a(0)u(0) + b(0)v(0) = 0 \implies b(0) = 0 \\ y'(0) &= a(0)u'(0) + b(0)v'(0) = 0 \implies a(0) = 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$a(x) = \int_0^x \frac{v(z)F(z)}{M(0)} dz \quad \text{e} \quad b(x) = -\int_0^x \frac{u(z)F(z)}{M(0)} dz$$

Per la y si ha allora

$$y(x) = \int_0^x \frac{u(x)v(z) - v(x)u(z)}{M(0)} F(z) dz$$

da cui si trova la funzione di Green

$$G(x, z) = \frac{u(x)v(z) - v(x)u(z)}{M(0)} \quad (3.8)$$

Notiamo che evidentemente la G obbedisce alle equazione $L_x G(x, z) = 0$ (e anche a $L_z G(x, z) = 0$), è antisimmetrica, vale quindi $G(x, x) = 0$, mentre

$$\frac{\partial G}{\partial x}(z, z) = \frac{u'(z)v(z) - v'(z)u(z)}{M(0)} = \frac{vMu' - uMv'}{M(0)} \frac{1}{M(z)} = \frac{1}{M(z)}$$

e, per l'antisimmetria,

$$\frac{\partial G}{\partial z}(x, x) = -\frac{1}{M(x)}$$

Lemma 3.2. *Le condizioni*

$$(a) \quad L_x G(x, z) = 0$$

$$(b) \quad G(x, x) = 0$$

$$(c) \quad \frac{\partial}{\partial x} G(z, z) = \frac{1}{M(z)}$$

determinano univocamente la funzione di Green.

Dimostrazione . Vediamo che se G soddisfa le (a), (b), (c) allora

$$y(x) = \int_0^x G(x, z) F(z) dz$$

è soluzione di (3.7). È evidentemente $y(0) = 0$, vale

$$y'(x) = G(x, x)F(x) + \int_0^x \frac{\partial G}{\partial x}(x, z)F(z) dz = \int_0^x \frac{\partial G}{\partial x}(x, z)F(z) dz$$

che mostra $y'(0) = 0$, ed infine

$$\begin{aligned} Ly &= \frac{d}{dx}(My') + Py \\ &= M(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x, x)F(x) + \int_0^x \frac{d}{dx} \left[M \frac{\partial G}{\partial x}(x, z) \right] F(z) dz + \int_0^x P(x)G(x, z)F(z) dz \\ &= F(x) + \int_0^x L_x G(x, z)F(z) dz = F(x) \end{aligned}$$

□

3 Sistemi lineari e indipendenti dal tempo

Se $F(x)$ è estesa al valore nullo per $x < 0$, la soluzione di (3.7) diventa

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, z) F(x, z) dz \quad \text{con} \quad H(x, z) = \theta(x - z) G(x, z)$$

La H evidentemente obbedisce a $L_x H(x, z) = 0$ per $x \geq z$, ed è continua in $x = z$ perché $G(x, x) = 0$. La sua derivata è però discontinua in $x = z$ ed ha discontinuità

$$\frac{\partial H}{\partial x}(z^+, z) - \frac{\partial H}{\partial x}(z^-, z) = \frac{\partial G}{\partial x}(z^+, z) = \frac{1}{M(z)}$$

dato che $H(x, z) = 0$ per $x < z$. Quanto detto su H si riassume scrivendo

$$L_x H(x, z) = \delta(x - z) \quad (3.9)$$

Notiamo che la derivata parziale di H compare in $L_x H$ nel termine $\frac{\partial}{\partial x} (M \frac{\partial H}{\partial x})$, la discontinuità della derivata parziale è allora tale che $M \frac{\partial H}{\partial x}$ ha in $x = z$ discontinuità 1. La funzione di Green può di fatto essere ricavata risolvendo la (3.9) con la condizione che sia $H(x, z) < \theta(x - z)$ (cioè nulla per $x < z$). Infatti si tratta di risolvere

$$\begin{cases} L_x H(x, z) = 0 & \text{per } x > z \\ H(x, x) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x}(z^+, z) = \frac{1}{M(z)} \end{cases}$$

È chiaro che se si cerca la H per $x > z$ come

$$H(x, z) = a(z)u(x) + b(z)v(x)$$

si trovano per a e b le condizioni

$$\begin{cases} a(x)u(x) + b(x)v(x) = 0 \\ a(x)u'(x) + b(x)v'(x) = \frac{1}{M(x)} \end{cases}$$

che risolte danno

$$a(x) = \frac{v(x)}{M(0)} \quad \text{e} \quad b(x) = -\frac{u(x)}{M(0)}$$

da cui, sostituendo in H per $x > z$, ricavo la (3.8).

Osservazione: Si può trovare direttamente la funzione di Green $H(x, z)$ anche senza trasformare la (3.6). Basta risolvere

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, z) + a(z) \frac{\partial H}{\partial x}(x, z) + b(z)H(x, z) = \frac{\delta(x - z)}{M(z)}$$

Infatti dalla (3.6), posto $H_1(x, z) = H(x, z)M(z)$, si vede che

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, z) f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_1(x, z)}{M(z)} M(z) f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, z) F(z) dz$$

Se si risolve

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2}(x, z) + a(z) \frac{\partial H_1}{\partial x}(x, z) + b(z)H_1(x, z) = \delta(x - z)$$

cercando la soluzione per $x > z$ in termini di u e v (cioè $H_1(x, z) = a(z)u(x) + b(z)v(x)$), si trova, imponendo in $x = z$ la continuità di H_1 e la discontinuità 1 della derivata,

$$H_1(x, z) = \frac{u(x)v(z) - v(x)u(z)}{v(z)u'(z) - v'(z)u(z)} = H(z)M(z)$$

dove, stavolta, il denominatore non è costante. È allora vero che

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \frac{u(x)v(z) - v(x)u(z)}{v(z)u'(z) - v'(z)u(z)} f(z) dz \\ &= \int_0^x \frac{u(x)v(z) - v(x)u(z)}{M(z)[v(z)u'(z) - v'(z)u(z)]} M(z)f(z) dz \\ &= \int_0^x \frac{u(x)v(z) - v(x)u(z)}{M(0)} F(z) dz \\ &= \int_0^x H(x, z) F(z) dz \end{aligned}$$

Se il problema ha **condizioni iniziali non omogenee** la soluzione è data da

$$y(x) = \int_0^x G(x, z)F(z)dz + \alpha u(x) + \beta v(x)$$

se deve essere $y(0) = \alpha$ e $y'(0) = \beta$.

C'è da notare che le soluzioni dell'omogenea si ricavano direttamente da $G(x, z)$. infatti $G(x, 0)$ è soluzione dell'omogenea e si annulla in $x = 0$, mentre $\frac{\partial}{\partial x}G(x, 0)$ vale $-1/M(0)$ in $x = 0$ e $\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}G(0, 0) = 0$.¹

3.1.2 Funzione di Green per un problema con condizioni al contorno date

Affrontiamo ora il problema, simile a quello trattato, con **condizioni al bordo omogenee**

$$Ly \equiv \frac{d}{dx} [M(x)y'(x)] + P(x)y(x) = F(x) \quad \text{con} \quad y(0) = y(1) = 0 \quad (3.10)$$

¹Nota che la soluzione di (3.7) si vede subito da

$$0 = y(z)L_z G(x, z) - G(x, z)Ly = \frac{d}{dx} \left[yM \frac{\partial G}{\partial z}(x, z) - G(x, z)My'(z) \right]$$

integrando tra 0 e x in dz .

3 Sistemi lineari e indipendenti dal tempo

Cerchiamo la G tale che sia

$$y(x) = \int_0^1 G(x, z) F(z) dz$$

Si costruisce la soluzione col solito metodo: siano u_0 e u_1 tali che

$$\begin{cases} Lu_0(x) = 0 \\ u_0(0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} Lu_1(x) = 0 \\ u_1(1) = 0 \end{cases}$$

Supponiamo per il momento u_0 e u_1 **linearmente indipendenti**². Si cerca

$$y = au_0 + bu_1 \implies y' = [a'u_0 + b'u_1] + au'_0 + bu'_1$$

Imponendo $a'u_0 + b'u_1 = 0$ la (3.10) diventa

$$a'Mu'_0 + b'Mu'_1 = F$$

abbiamo il solito sistema

$$\begin{cases} a'u_0 + b'u_1 = 0 \\ a'Mu'_0 + b'Mu'_1 = F \end{cases}$$

il cui determinante dei coefficienti

$$\Delta = u_0Mu'_1 - u_1Mu'_0 \neq 0$$

e costante poiché, per ipotesi fatta, u_0, u_1 sono linearmente indipendenti. Si trova allora

$$a' = -\frac{u_1F}{\Delta} \quad \text{e} \quad b' = \frac{u_0F}{\Delta}$$

Imponendo le condizioni al bordo si trova

$$y(0) = b(0)u_1(0) = 0 \implies b(0) = 0$$

$$y(1) = a(1)u_0(1) = 0 \implies a(1) = 0$$

Allora

$$a(x) = \int_x^1 \frac{u_1(z)F(z)}{\Delta} dz \quad \text{e} \quad b(x) = \int_0^x \frac{u_0(z)F(z)}{\Delta} dz$$

sostituendo in $y = au_0 + bu_1$ si ricava la funzione di Green

$$G(x, z) = \begin{cases} \frac{u_0(z)u_1(x)}{\Delta} & \text{per } z < x \\ \frac{u_0(x)u_1(z)}{\Delta} & \text{per } z > x \end{cases} \quad (3.11)$$

La (3.11) è simmetrica, si annulla in $x = 0$ ed in $x = 1$, è continua in $x = z$, mentre per la derivata si ha una discontinuità

$$\frac{\partial G}{\partial x}(z^+, z) - \frac{\partial G}{\partial x}(z^-, z) = \frac{u'_1(z)u_0(z)}{\Delta} - \frac{u'_0(z) - u_1(z)}{\Delta} = \frac{1}{M(z)}$$

e, per simmetria, condizioni analoghe valgono per $\frac{\partial}{\partial z}G$.

²Non è sempre così, per esempio per $y'' + \pi^2 y = 0$ la soluzione $y = \sin \pi x$ è tale che $y(0) = y(1) = 0$. Questo caso verrà trattato a pag. 67

Lemma 3.3. *Le condizioni*

(a) $L_x G(x, z) = 0$ per $x \neq z$

(b) $G(0, z) = G(1, z) = 0$

(c) G continua in $x = z$

(d) $\frac{\partial}{\partial x} G(z^+, z) - \frac{\partial}{\partial x} G(z^-, z) = \frac{1}{M(z)}$

sono sufficienti a determinare la funzione di Green.

Dimostrazione. La (a) fa sì che siano soddisfatte le condizioni al contorno. Per calcolare Ly spezziamo l'integrale

$$\int_0^1 G(x, z) F(z) dz = \int_0^x G(x, z) F(z) dz + \int_x^1 G(x, z) F(z) dz$$

a causa della discontinuità della derivata prima di G . Si ha

$$\begin{aligned} My' &= M \frac{d}{dx} \int_0^x G(x, z) F(z) dz + M \frac{d}{dx} \int_x^1 G(x, z) F(z) dz \\ &= \cancel{M(x) G(x, x) F(x)} + M(x) \int_0^x \frac{\partial G}{\partial x}(x, z) F(z) dz + \\ &\quad - \cancel{M(x) G(x, x) F(x)} + M(x) \int_x^1 \frac{\partial G}{\partial x}(x, z) F(z) dz \\ &= M(x) \int_0^x \frac{\partial G}{\partial x}(x, z) F(z) dz + M(x) \int_x^1 \frac{\partial G}{\partial x}(x, z) F(z) dz \end{aligned}$$

derivando rispetto ad x

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(My') &= M(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x, x^-) F(x) + \int_0^x \frac{d}{dx} \left[M \frac{\partial G}{\partial x}(x, z) \right] F(z) dz + \\ &\quad - M(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x, x^+) F(x) + \int_x^1 \frac{d}{dx} \left[M \frac{\partial G}{\partial x}(x, z) \right] F(z) dz \\ &= F(x) + \left(\int_0^x + \int_x^1 \right) \frac{d}{dx} \left[M \frac{\partial G}{\partial x}(x, z) \right] F(z) dz \end{aligned}$$

Aggiungendo $P(x)y(x)$ si ottiene infine

$$Ly = F(x) + \left(\int_0^x + \int_x^1 \right) L_x G(x, z) F(z) dz = F(z)$$

e la tesi è dimostrata. □

Osservazione: La simmetria di G è una conseguenza delle condizioni (a), (b), (c), (d).

3 Sistemi lineari e indipendenti dal tempo

Dimostrazione . Se consideriamo $G(x, t)$ e $G(x, z)$, poiché sono soluzioni dell'omogenea, si ha

$$\frac{d}{dx} \left[G(x, t)M(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x, z) - G(x, z)M(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) \right] = 0$$

Integrando su $[0, z]$, $[z, t]$ e $[t, 1]$ si trova

$$\begin{aligned} 0 = & G(z, t)M(z) \frac{\partial G}{\partial x}(z^-, z) - \cancel{G(z, z)M(z) \frac{\partial G}{\partial x}(z, t)} - G(0, t)M(0) \frac{\partial G}{\partial x}(0, z) + \\ & + G(0, z)M(0) \frac{\partial G}{\partial x}(0, t) + \cancel{G(t, t)M(t) \frac{\partial G}{\partial x}(t, z)} - G(t, z)M(z) \frac{\partial G}{\partial x}(t^-, t) + \\ & - G(z, t)M(z) \frac{\partial G}{\partial x}(z^+, z) + \cancel{G(z, z)M(z) \frac{\partial G}{\partial x}(z, t)} + G(1, t)M(1) \frac{\partial G}{\partial x}(1, z) + \\ & - G(1, z)M(1) \frac{\partial G}{\partial x}(1, t) - \cancel{G(t, t)M(t) \frac{\partial G}{\partial x}(t, z)} + G(t, z)M(t) \frac{\partial G}{\partial x}(t^+, t) \end{aligned}$$

Tenuto conto della (b) e della (d) si ricava $G(t, z) = G(z, t)$. \square

Se abbiamo **condizioni al bordo non omogenee** si deve aggiungere una soluzione dell'omogenea che soddisfi le condizioni richieste

$$Ly = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = \alpha \text{ e } y(1) = \beta \quad (3.12)$$

Una soluzione di tale problema si ricava direttamente dalla G : sfruttando la simmetria di G , e quindi il fatto che per $x \neq 0$ è $L_z G(x, z) = 0$, la soluzione cercata si trova partendo dalla relazione

$$y(z)L_z G(x, z) - G(x, z)L_z y(z) = 0 \quad (\text{per } x \neq 0, 1)$$

che si riscrive come

$$\frac{d}{dz} \left[y(z)M \frac{\partial G}{\partial z}(x, z) - G(x, z)M y'(z) \right] = 0$$

da cui, integrando fra 0 ed x e fra x e 1

$$\begin{aligned} 0 = & \left(\int_0^x + \int_x^1 \right) \frac{d}{dz} \left[y(z)M \frac{\partial G}{\partial z}(x, z) - G(x, z)M y'(z) \right] dz \\ = & y(x)M(x) \frac{\partial G}{\partial z}(x, x^-) - \cancel{G(x, x)M(x)y'(x)} - y(0)M(0) \frac{\partial G}{\partial z}(x, 0) + \\ & + y(1)M(1) \frac{\partial G}{\partial z}(x, 1) - G(x, 1)M(1)y'(1) - y(x)M(x) \frac{\partial G}{\partial z}(x, x^+) + \\ & + \cancel{G(x, x)M(x)y'(x)} \end{aligned}$$

tenuto conto che $M(x) \left[\frac{\partial}{\partial z} G(x, x^+) - \frac{\partial}{\partial z} G(x, x^-) \right] = 1$ si ha

$$y(x) = y(1)M(1) \frac{\partial G}{\partial z}(x, 1) - y(0)M(0) \frac{\partial G}{\partial z}(x, 0)$$

ed infine (ricordando le condizioni al bordo)

$$y(x) = \beta M(1) \frac{\partial G}{\partial z} G(x, 1) - \alpha M(0) \frac{\partial G}{\partial z} (x, 0)$$

Si verifica immediatamente che quest'ultima è soluzione del problema (3.12).

Ora vediamo il caso, precedentemente scartato, in cui esiste una soluzione non identicamente nulla dell'omogenea con **condizioni al bordo omogenee**

$$Lu = 0 \quad \text{con} \quad u(0) = u(1) = 0$$

In tale ipotesi u_0 ed u_1 sono **linearmente dipendenti**. D'altra parte, la soluzione di (3.10) esiste solo per F tale che

$$\int_0^1 u(z) F(z) dz = 0 \quad (3.13)$$

Infatti è

$$uF = uLy - yLu = \frac{d}{dx} [uMy' - yMu']$$

integrando tra 0 e 1

$$\int_0^1 uF dx = [uMy' - yMu'] \Big|_0^1 = 0$$

perché sia u che y si annullano in 0 e in 1.

Supponiamo allora valida la (3.13), sia $v(x)$ soluzione di

$$Lv = 0 \quad \text{con} \quad v(1) = 0$$

Certamente è $v(0) \neq 0$ (altrimenti sarebbe $v = \lambda u$ e ciò non è possibile perché $v(1) \neq 0$). Cerchiamo l'unica³ soluzione ortogonale a u e cerchiamo la funzione di Green G_\perp tale che

$$y_\perp(x) = \int G_\perp(x, z) F(z) dz$$

sia la soluzione ortogonale a u . Partiamo da y nella forma

$$y = au + bv$$

col solito metodo si trova $\Delta = uMv' - u'Mv = \text{cost} \neq 0$ e

$$a' = -\frac{vF}{\Delta} \quad \text{e} \quad b' = \frac{uF}{\Delta}$$

imponendo le condizioni al bordo si trova

$$a(x) = \int_x^1 \frac{v(z)F(z)}{\Delta} dz + \lambda \quad \text{e} \quad b(x) = \int_0^x \frac{u(z)F(z)}{\Delta} dz$$

³La soluzione è unica perché se y_1, y_2 sono soluzioni allora $y_1 - y_2 = \lambda u$.

3 Sistemi lineari e indipendenti dal tempo

con λ costante, e quindi

$$y(x) = \int G(x, z)F(z)dz + \lambda u \quad \text{con} \quad G(x, z) = \begin{cases} \frac{u(x)v(z)}{\Delta} & \text{per } x < z \\ \frac{u(z)v(x)}{\Delta} & \text{per } x > z \end{cases}$$

Tale G è simmetrica, continua in $x = z$, la $\frac{\partial}{\partial x}G$ ha discontinuità $1/M$ in $x = z$, $G(0, z) = 0$ e $G(1, z) = v(1)u(z)/\Delta \neq 0$. Il fatto che sia $L_x G(x, z) = \delta(x - z)$ assicura che per ogni $F(x)$ la funzione $\int G(x, z)F(z)dz$ sia tale che $L_x \int G(x, z)F(z)dz = F(x)$. Tale funzione inoltre è nulla in $x = 0$, ma non in $x = 1$ se non è soddisfatta la (3.13). Per trovare y_\perp , e la funzione di Green che la produce, prendiamo u normalizzata ad 1, cioè

$$\int u^2 dx = 1$$

e prendiamo

$$y_\perp(x) = y - u(x) \int u(t)g(t)dt$$

che vogliamo esprimere tramite una funzione di Green applicata alla F . È allora

$$\begin{aligned} y_\perp(x) &= \int G(x, z)F(z)dz - u(x) \int u(t)dt \int G(t, z)F(z)dz \\ &= \int F(z)dz \left[G(x, z) - u(x) \int u(t)G(t, z)dt \right] \\ &= \int F(z)dz \left[G(x, z) - u(x) \int u(t)G(z, t)dt \right] \end{aligned}$$

La funzione tra le parentesi [...] non è l'unica a produrre y_\perp , ci si può sempre sommare $Au(z)$, con A costante. La funzione [...] non è ancora quella cercata, infatti è sì ortogonale ad u , cioè $\int u(x)[...]dz = 0$, si annulla in $x = 0$, ma non in $x = 1$ ed inoltre non è simmetrica. Prendiamo allora

$$G_\perp(x, z) = G(x, z) - u(x) \int u(t)G(z, t)dt - u(z) \int u(t)G(x, t)dt - \lambda u(x)u(z)$$

Questa funzione è chiaramente simmetrica, si annulla in $x = 0$ ed in $x = 1$ ed inoltre, se λ è scelto in modo tale che sia

$$\int u(t)dt \int u(x)G(x, t)dx + \lambda = 0$$

G_\perp continua ad essere ortogonale ad u .

In definitiva otteniamo il seguente

Lemma 3.4. *La soluzione del problema (3.10) ortogonale alla u è univocamente determinata dalla funzione $G_\perp(x, z)$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

$$(i) \quad L_x G_\perp(x, z) = \delta(x - z) - u(x)u(z)$$

3.2 Analisi in frequenza. Relazione fra proprietà di un segnale e proprietà dello spettro

$$(ii) \quad G_{\perp}(0, z) = G_{\perp}(1, z) = 0$$

(iii) G_{\perp} è ortogonale ad u , cioè

$$\int u(x)G_{\perp}(x, z)dx = 0$$

Il problema con **condizioni al bordo non omogenee**

$$Ly = F \quad \text{con} \quad y(0) = \alpha \text{ e } y(1) = \beta$$

non sempre ha soluzioni. In modo analogo a quanto già fatto, se è soddisfatta la (3.13), per mezzo di G_{\perp} si può ottenere la soluzione ortogonale da aggiungere ad u , si ha

$$y_{\perp}(x) = \beta M(1) \frac{\partial G_{\perp}}{\partial z}(x, 1) - \alpha M(0) \frac{\partial G_{\perp}}{\partial z}(x, 0) + \int_0^1 G_{\perp}(x, z)F(z)$$

3.2 Analisi in frequenza. Relazione fra proprietà di un segnale e proprietà dello spettro

Si è visto che per un sistema lineare e indipendente dal tempo la relazione fra ingresso $f(t)$ e uscita $g(t)$ è data da

$$g(t) = \int G(t - z)f(z)dz = G * f(t)$$

(dove $*$ indica il prodotto di convoluzione) e questa relazione richiama la trasformata di Fourier \mathfrak{F} per la quale vale

$$\mathfrak{F}(f_1 * f_2) = \mathfrak{F}f_1 \cdot \mathfrak{F}f_2$$

Vale il seguente

Lemma 3.5. *Un sistema lineare e indipendente dal tempo ha la proprietà di trasformare un segnale di ingresso monocromatico in un suo multiplo, cioè*

$$f(t) = e^{-i\omega t} \implies g(t) = L(f(t)) = H(\omega)e^{i\omega t}$$

Dimostrazione . Per la linearità e per l'indipendenza da tempo vale

$$\begin{aligned} g(t - T) &= L\left(e^{-i\omega(t-T)}\right) \\ &= L\left(e^{i\omega T}e^{-i\omega t}\right) \\ &= e^{i\omega T}L\left(e^{-i\omega t}\right) \\ &= e^{i\omega T}g(t) \end{aligned}$$

in particolare per $t = 0$ deve valere

$$g(-T) = e^{i\omega T}g(0)$$

che, essendo valida per ogni T , mostra la tesi. □

3 Sistemi lineari e indipendenti dal tempo

Questo fa sì che, nota H sia nota la risposta a tutti i segnali rappresentabili come sovrapposizioni di $e^{-i\omega t}$, ovvero tutti quei segnali sviluppabili in serie o integrale di Fourier⁴; infatti se è

$$f(t) = \int f(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

per la linearità si ha

$$g(t) = L(f(t)) = \int f(\omega) L(e^{-i\omega t}) \frac{d\omega}{2\pi} = \int f(\omega) H(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Nel caso in cui è possibile applicare i teoremi sulla trasformata di Fourier, si vede che $H(\omega) = \widehat{G}(t)$.

Ricordiamo alcune proprietà della trasformata di Fourier che ci saranno utili nel seguito:

(i) Se $f, tf, \dots, t^n f \in L^1$ allora $\widehat{f} \in C^n$ e inoltre

$$\mathfrak{F}(t^n f) = (-i)^n \frac{d^n \widehat{f}}{d\omega^n}$$

(ii) Se $f \in C^n$ e $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1$ allora per $k \leq n$ si ha

$$\mathfrak{F}\left(\frac{d^k f}{dt^k}\right) = (-i\omega)^k \widehat{f}$$

(iii) Se $f, g \in L^2$ vale l'uguaglianza di Parseval

$$(f, g) = 2\pi(\widehat{f}, \widehat{g}) \quad \text{dove} \quad (f, g) = \int f^*(t)g(t)dt \quad (3.14)$$

(iv) Se $f \in L^1$ e $g \in L^p$ allora $f * g \in L^p$ e

$$\mathfrak{F}(f * g) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

(v) Se $f, g \in L^2$ allora

$$f * g = \int \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

La trasformata di Fourier stabilisce alcune relazioni fra le proprietà di un segnale $f(t)$ e quelle del suo spettro $\widehat{f}(\omega)$. Esaminiamo, ad esempio, il seguente caso: sia

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } |t| < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

come appare evidente dal grafico in figura 3.1 la funzione

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-T}^T e^{i\omega t} dt = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}$$

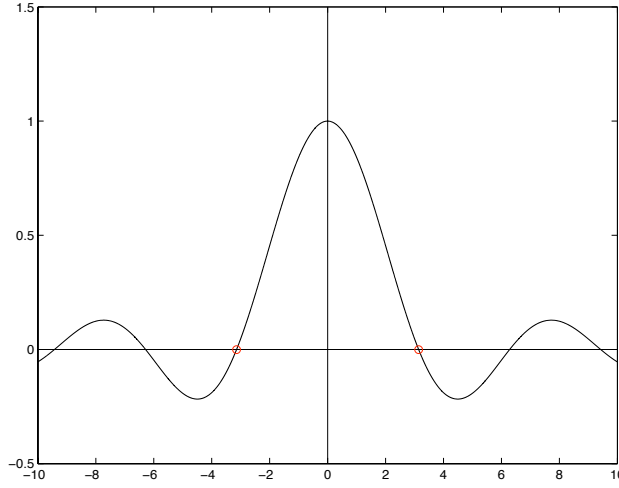


Figura 3.1: Funzione $\sin z/z$.

è significativamente diversa da zero per $|\omega T| < \pi$, cioè in un intervallo di ω che va come $1/T$. Più precisamente, osservando che $\|f\|^2$ cresce come T , anche $\|\hat{f}\|^2$ cresce come T , e allora la percentuale della norma compresa tra $-\omega_0$ e ω_0 , al variare di T , va come

$$\frac{1}{T} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{\sin^2 \omega T}{\omega^2} d\omega = \int_{-\omega_0 T}^{\omega_0 T} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz$$

che è costante per $\omega_0 T = \text{cost}$, e quindi al crescere di T la stessa parte dell'energia si trova in un intervallo di frequenze più stretto.

Per rendere quantitativa la valutazione e mostrare che il fenomeno è generale, definiamo, per segnali f normalizzati ad 1, le seguenti valori medi

$$\bar{t} = \int t |f(t)|^2 dt \quad \text{e} \quad \bar{\omega} = \int \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

e i seguenti scarti

$$D_t = \int (t - \bar{t})^2 |f(t)|^2 dt \quad \text{e} \quad D_\omega = \int (\omega - \bar{\omega})^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Definiamo allora **larghezza temporale** la quantità

$$\Delta t = \sqrt{D_t}$$

e **ampiezza spettrale**

$$\Delta \omega = \sqrt{D_\omega}$$

⁴Ma, come vedremo in seguito, anche quelli per cui la trasformata, e l'antitrasformata, di Fourier esiste in un senso più ampio (trasformata nel senso delle distribuzioni).

3 Sistemi lineari e indipendenti dal tempo

Per f abbastanza regolare e decrescente ad infinito abbastanza rapidamente si ha che, sia $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int \left| \lambda(t - \bar{t})f + \frac{df}{dt} + i\bar{\omega}f \right|^2 dt \\ &= \lambda^2 \int (t - \bar{t})^2 |f|^2 dt + \int \left| \frac{df}{dt} + i\bar{\omega}f \right|^2 dt + 2\lambda \Re \int (t - \bar{t})f \left(\frac{df}{dt} - i\bar{\omega}f \right)^* dt \end{aligned}$$

Il primo termine è $\lambda^2 D_t$. Per il secondo, usando l'identità (3.14) di Parseval si ha

$$\int \left| \frac{df}{dt} + i\bar{\omega}f \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int |\mathfrak{F}(f') + i\bar{\omega}\mathfrak{F}(f)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int (\omega - \bar{\omega})^2 |\hat{f}|^2 d\omega = D_\omega$$

Nel terzo termine

$$\int (t - t)(ff'^* + f^*f')dt = \int (t - t)\frac{d}{dt}|f|^2 = - \int |f|^2 dt = -1$$

integrando per parti e assumendo $|f|^2, t|f|^2 \rightarrow 0$ all'infinito. Invece

$$\int (t - t)ff^* = \bar{t} - \bar{t} = 0$$

Alla fine si ottiene

$$0 \leq \lambda^2 D_t + D_\omega - \lambda \quad (3.15)$$

poiché questa relazione deve valere per ogni λ , deve essere

$$1 - 4D_t D_\omega \leq 0$$

cioè si ha il **principio di indeterminazione**

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

Per trovare quando nella (3.16) vale l'uguaglianza, risolvendo la (3.15) con l'uguale si trova

$$\lambda = \frac{1}{2D_t}$$

per tale valore si ha

$$\frac{df}{dt} = \left[-\frac{t - \bar{t}}{2D_t} - i\bar{\omega} \right] f$$

La cui soluzione è

$$f(t) = A e^{-i\bar{\omega}t} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{4D_t}}$$

con A tale che f risulti normalizzata ad 1.

Un altro aspetto interessante è il seguente

Teorema 3.6 (Sampling Theorem). *Se un segnale $f(t)$ ha spettro limitato tra $-\omega_0$ e ω_0 allora esso è completamente noto se sono noti i valori $f_n = f(n\pi/\omega_0)$.*

Dimostrazione. In generale è

$$f(t) = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Nell'intervallo $[-\omega_0, \omega_0]$ un insieme completo è dato da

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} e^{i\frac{n\pi}{\omega_0}\omega}$$

da cui

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\omega_0} \sum_n e^{i\frac{n\pi}{\omega_0}\omega} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-i\frac{n\pi}{\omega_0}\omega} d\omega = \frac{\pi}{\omega_0} \sum_n e^{i\frac{n\pi}{\omega_0}\omega} f\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right)$$

Allora, sostituendo nella trasformazione inversa, si trova

$$f(t) = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sum_n f\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) e^{i\frac{n\pi}{\omega_0}\omega} e^{-i\omega t} d\omega = \sum_n f\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \frac{\sin(n\pi - \omega_0 t)}{n\pi - \omega_0 t}$$

□

3.3 Proprietà della funzione di Green nel dominio delle frequenze

Studiamo la risposta di un sistema lineare e indipendente dal tempo alla funzione di Heaviside $\theta(t)$. È immediata la soluzione se consideriamo

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x)\theta(x)dx = \int_0^{\infty} G(t-x)dx = \int_{-\infty}^t G(z)dz$$

Da qui si ricavano

$$G(t) = \frac{dg}{dt}, \quad g(-\infty) = 0, \quad g(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z)dz = \hat{G}(0)$$

Se si definisce il **tempo di salita** t_s con

$$t_s \left. \frac{dg}{dt} \right|_{\max} = g(\infty) - g(-\infty)$$

si ha

$$t_s G_{\max} = \hat{G}(0)$$

3 Sistemi lineari e indipendenti dal tempo

Per un passa basso ideale, che filtra le frequenze lasciando passare solo $|\omega| < \omega_t$, che non introduce distorsioni

$$\widehat{G}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{per } |\omega| > \omega_t \\ A_0 e^{i\omega t_0} & \text{per } |\omega| \leq \omega_t \end{cases}$$

Se

$$\widehat{f} = \widehat{f}\chi_{[-\omega_t, \omega_t]} + \widehat{f}\chi_{\{|\omega| > \omega_t\}}$$

la risposta è

$$\widehat{g} = \widehat{f}\chi_{[-\omega_t, \omega_t]} A_0 e^{i\omega t_0}$$

da cui, detta p la trasformata inversa di $\widehat{f}\chi_{[-\omega_t, \omega_t]}$

$$g(t) = A_0 p(t - t_0)$$

Se lo spettro di f è tutto in $|\omega| < \omega_t$, l'uscita non è distorta, solo attenuata ($A_0 < 1$) e ritardata. Per questo sistema ideale

$$\widehat{G}(0) = A_0, \quad G(t) = \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\omega_t}^{\omega_t} e^{-i\omega t} e^{i\omega t_0} d\omega, \quad G_{\max} = G(t_0) = A_0 \frac{\omega_t}{\pi}$$

da cui trovo che il tempo di salita vale

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_t}$$

Quindi più è stretto il taglio, più grande è il tempo di salita. In generale se un sistema non ha distorsione di fase

$$\widehat{G} = A(\omega) e^{i\omega t_0} \quad \text{con } A \geq 0$$

è sempre $G_{\max} = G(t_0)$, perché

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int A(\omega) e^{-i\omega t} e^{i\omega t_0} d\omega$$

e allora

$$t_s = 2\pi \frac{A(0)}{\int A(\omega) d\omega}$$

Più è larga la banda passante, più piccolo è t_s .

3.4 Risposta alla $\theta(t)$

Se si cerca la risposta alla $\theta(t)$ tramite $\widehat{g} = \widehat{G} \cdot \widehat{f}$ si presenta un problema perché θ non è trasformabile. Si può però approssimare θ con una successione di funzioni $f_n \rightarrow \theta$ e, se $g_n = L(f_n)$, cercare il limite delle g_n . Vedremo che il risultato è lo stesso per successioni diverse, e questo ci indurrà a cercare di definire una nozione di $\mathfrak{F}(\theta)$ che renda ragione

di questo comportamento.

Sia

$$f_T(t) = \chi_{[0,T]} = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Chiaramente si ha $f_T \rightarrow \theta$ per $T \rightarrow \infty$. Vale

$$\hat{f}_T(\omega) = \frac{e^{i\omega T} - 1}{i\omega} \quad \text{e} \quad \hat{g}_T(\omega) = \hat{G}(\omega) \frac{e^{i\omega T} - 1}{i\omega}$$

quindi

$$g_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{G}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{e^{i\omega T} - 1}{i\omega} d\omega = \int \hat{p}(\omega) \frac{e^{i\omega T} - 1}{i\omega} d\omega \quad \text{con} \quad \hat{p}(\omega) = \frac{\hat{G}(\omega) e^{-i\omega t}}{2\pi}$$

Assumiamo che \hat{p} sia C^1 e che ad infinito vada a zero abbastanza rapidamente. Il risultato interessante sarà: sebbene $(e^{i\omega T} - 1)(i\omega)$ non ha limite per $T \rightarrow \infty$, l'integrale scritto ha limite. Infatti

$$g_T(t) = \int \hat{p}(\omega) \frac{\cos \omega T - 1}{i\omega} d\omega + \int \hat{p}(\omega) \frac{\sin \omega T}{\omega} d\omega$$

per il secondo integrale si ha

$$\begin{aligned} \int \hat{p}(\omega) \frac{\sin \omega T}{\omega} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\omega) \frac{d\omega}{2} \int_{-T}^T \cos \omega \lambda d\lambda \\ &= \int_{-T}^T \frac{d\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\omega) \cos \omega \lambda d\omega \\ &= \int_{-T}^T \frac{d\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_p(\omega) \cos \omega \lambda d\omega \end{aligned}$$

(notiamo che $\hat{p} \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi $\hat{p} \cos \omega \lambda \in L^1(\mathbb{R} \times [-T, T])$) dove il pedice indica la parte pari, allora

$$\begin{aligned} \int \hat{p}(\omega) \frac{\sin \omega T}{\omega} d\omega &= \int_{-T}^T \frac{d\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_p(\omega) e^{i\omega \lambda} d\omega \\ &= \pi \int_{-T}^T p_p(\lambda) d\lambda \longrightarrow \pi \int_{-\infty}^{\infty} p_p(\lambda) d\lambda = \pi \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda) d\lambda = \pi \hat{p}(0) \end{aligned}$$

mentre per il primo

$$\int \hat{p}(\omega) \frac{\cos \omega T - 1}{i\omega} d\omega = i \int \frac{\hat{p}_d(\omega)}{\omega} d\omega - i \int \frac{\hat{p}_d(\omega)}{\omega} \cos \omega T d\omega \longrightarrow i \mathcal{P} \int \frac{\hat{p}(\omega)}{\omega} d\omega$$

dato che per il lemma di Riemann–Lebesgue ($\hat{p}_d \in L^1$) il secondo integrale tende a zero, e dove si è introdotto il **valore principale di Cauchy** definito come

$$\mathcal{P} \int = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{-R}^{x_0 - \varepsilon} + \int_{x_0 + \varepsilon}^R \right)$$

3 Sistemi lineari e indipendenti dal tempo

dove x_0 è un punto di divergenza. In definitiva

$$g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t) = \pi \hat{p}(0) + i \mathcal{P} \int \frac{\hat{p}(\omega)}{\omega} d\omega$$

È facile verificare, ricordando la definizione di \hat{p} , che si ritrova il risultato precedente

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2} \hat{G}(0) + \frac{i}{2\pi} \mathcal{P} \int \frac{\hat{G}(\omega)}{\omega} e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) dx + \frac{i}{2\pi} \mathcal{P} \int \frac{d\omega}{\omega} \int G(x) e^{i\omega(x-t)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) dx - \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int \frac{d\omega}{\omega} \int G(x) \sin \omega(x-t) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) dx - \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int \frac{d\omega}{\omega} \int G(z+t) \sin \omega z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) dx - \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int \frac{d\eta}{\eta} \int dz \operatorname{sgn}(z) G(z+t) \sin \eta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(z) G(z+t) dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(x) dx - \int_0^{\infty} G(z+t) dz + \int_{-\infty}^0 G(z+t) dz \right) = \int_{-\infty}^t G(z) dz \end{aligned}$$

È importante ricordare le due relazioni trovate

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int \hat{p}(\omega) \frac{\sin \omega T}{\omega} d\omega = \pi \hat{p}(0) \quad \text{e} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{P} \int \hat{p}(\omega) \frac{\cos \omega T}{\omega} d\omega = 0$$

Verifichiamo che con un altro modo di approssimare la $\theta(t)$ si ottiene lo stesso risultato. Prendiamo

$$\theta_\varepsilon(t) = \theta(t) e^{-\varepsilon t} \quad \text{con} \quad \varepsilon > 0$$

in modo evidente si ha che $\theta_\varepsilon \rightarrow \theta$ per $\varepsilon \rightarrow 0$. Vale

$$\hat{\theta}_\varepsilon(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} e^{-\varepsilon t} dt = \int \hat{p}(\omega) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} + \frac{i\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} \right) d\omega$$

Il primo termine vale

$$\int \hat{p}(\omega) \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} d\omega = \int \frac{\hat{p}(\varepsilon z)}{1 + z^2} dz$$

per $\varepsilon \rightarrow 0$ l'integrando tende a $\hat{p}(0)/(1 + z^2)$ ed è maggiorato da $M/(1 + z^2) \in L^1$, si può passare il limite sotto il segno di integrale, si ha allora

$$\int \hat{p}(\omega) \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} d\omega \longrightarrow \pi \hat{p}(0)$$

Il secondo termine vale

$$i \int \frac{\hat{p}(\omega)\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} d\omega = i \int \frac{\hat{p}_d(\omega)\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} d\omega$$

l'integrando tende a \widehat{p}_d/ω ed è maggiorato da $|\widehat{p}_d/\omega| \in L^1$, si può passare il limite sotto il segno di integrale e si trova

$$i \int \frac{\widehat{p}(\omega)\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} d\omega \longrightarrow i \mathcal{P} \int \frac{\widehat{p}(\omega)}{\omega} d\omega$$

Si trova così il risultato precedente. Sono da ricordare

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \widehat{p}(\omega) \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} d\omega = \pi \widehat{p}(0) \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{\widehat{p}(\omega)\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} d\omega = \mathcal{P} \int \frac{\widehat{p}(\omega)}{\omega} d\omega$$

Ricapitolando, si è visto questo. La funzione θ non ha trasformata di Fourier, ma è limite di f_n che hanno trasformata di Fourier \widehat{f}_n . La successione \widehat{f}_n non ha limite nel senso delle convergenze studiate fin ora, ma la successione di funzionali definiti da

$$\int \widehat{f}_n \widehat{p} d\omega \longrightarrow \pi \widehat{p}(0) + i \mathcal{P} \int \frac{\widehat{p}}{\omega} d\omega$$

si può pensare come l'effetto su $\widehat{p}_n = \widehat{f}_n \widehat{p}$ di un funzionale

$$T : \langle T, \widehat{p} \rangle = \pi \widehat{p}(0) + i \mathcal{P} \int \frac{\widehat{p}}{\omega} d\omega$$

Ciò ci induce a definire come $\mathfrak{F}(\theta)$ "nel senso delle distribuzioni" il funzionale (la distribuzione) T sopra definita. Per rendere rigoroso questo procedimento occorre:

- (i) definire il tipo di funzionali di cui si parla, ed in particolare la classe di funzioni, dette funzioni test, su cui agiscono;
- (ii) definire la nozione di convergenza di una successione di funzionali;
- (iii) dare una definizione autonoma di trasformata di Fourier, che generalizzi quella usata sin ora.

4 Elementi di teoria delle distribuzioni

Una **distribuzione** T è un funzionale lineare e continuo su uno spazio vettoriale di funzioni test. Se si indica con $\langle T, \varphi \rangle$ l'effetto di T su φ , lineare significa naturalmente

$$\langle T, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle + \beta \langle T, \psi \rangle$$

Per continuità si intende: definita la nozione di convergenza $\varphi_n \rightarrow \varphi$ nello spazio delle funzioni test (basta dire, per la linearità, cosa significa $\varphi_n \rightarrow 0$), T è continua se

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \implies \langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

Ogni classe di distribuzioni è definita dalla classe di **funzioni test** su cui agisce e dalla nozione di convergenza in tale classe.

(i) **Distribuzioni di Schwartz**: l'insieme delle funzioni test è

$$\mathcal{D} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{C}^\infty \text{ e } \varphi \text{ a supporto compatto}\}$$

$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ significa: esiste un compatto $K \supset K_n$, dove K_n è il supporto di φ_n , in cui $\varphi_n^{(k)} \rightarrow 0$ uniformemente per ogni k . L'insieme delle distribuzioni su \mathcal{D} si indica con \mathcal{D}' (duale di \mathcal{D}).

(ii) **Distribuzioni temperate**: l'insieme delle funzioni test è

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{C}^\infty \text{ e } |x^n \varphi^{(m)}| < A_{nm} \right\}$$

$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ significa: $x^p \varphi_n^{(q)} \rightarrow 0$ uniformemente per ogni p, q fissati. L'insieme delle distribuzioni su \mathcal{S} si indica con \mathcal{S}' . È in \mathcal{S}' che si definisce la trasformata di Fourier.

(iii) **Distribuzioni su funzioni infinitamente derivabili**: l'insieme delle funzioni test è

$$\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty$$

$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$ significa: su ogni compatto $\varphi_n^{(k)} \rightarrow 0$ uniformemente per ogni k . L'insieme delle distribuzioni su \mathcal{E} si indica con \mathcal{E}' .

Inoltre $T_n \rightarrow T$ in \mathcal{D}' (rispettivamente \mathcal{S}' o \mathcal{E}') significa: $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ (rispettivamente \mathcal{S}' o \mathcal{E}') è $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

Si può dimostrare che vale in un certo senso il viceversa, cioè che questi spazi di distribuzioni sono completi: se per ogni funzione test è $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow a(\varphi)$, il funzionale (ovviamente lineare) definito da

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle$$

è anche continuo, nel senso che se $\varphi_j \rightarrow 0$ allora anche $\langle T, \varphi_j \rangle \rightarrow 0$. Cioè le distribuzioni sono un insieme completo.

Gli spazi \mathcal{D}' , \mathcal{S}' e \mathcal{E}' sono spazi vettoriali se si definiscono, in modo ovvio, αT e $T + T'$:

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle \quad \text{e} \quad \langle T + T', \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle T', \varphi \rangle$$

È evidente che αT e $T + T'$ oltre che lineari sono continui.

Vediamo ora in che relazione sono \mathcal{D}' , \mathcal{S}' e \mathcal{E}' . È chiaro che $\mathcal{E} \supset \mathcal{S} \supset \mathcal{D}$; questo significa che ogni funzionale definito su \mathcal{E} è definito anche su \mathcal{S} e, che se è definito su \mathcal{S} , è definito anche su \mathcal{D} . Per affermare che allora è

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

occorre però verificare (la linearità è assunta per ipotesi) che $T \in \mathcal{E}'$ è continuo anche nel senso di \mathcal{S}' , cioè che se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ è anche $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$; discorso analogo per dimostrare che $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. In effetti: $\mathcal{S} \ni \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ significa che $x^p \varphi_n^{(k)} \rightarrow 0$ uniformemente su \mathbb{R} , e cioè $\varphi_n^{(k)} \rightarrow 0$ uniformemente su ogni compatto, il che significa $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$. Analogamente $\mathcal{D} \ni \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ significa $\varphi_n^{(k)} \rightarrow 0$ uniformemente su un appropriato compatto K , questo implica che $x^p \varphi_n^{(k)} \rightarrow 0$ uniformemente su K e quindi (dato che tutte le φ_0 sono nulle al di fuori di K) anche su \mathbb{R} , cioè $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$.

Osservazione: \mathcal{D} è denso in \mathcal{S} e in \mathcal{E} nel senso seguente: data $\varphi \in \mathcal{S}$, esiste una successione $\varphi_n \in \mathcal{D}$ tale che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, stesso discorso per \mathcal{E} .

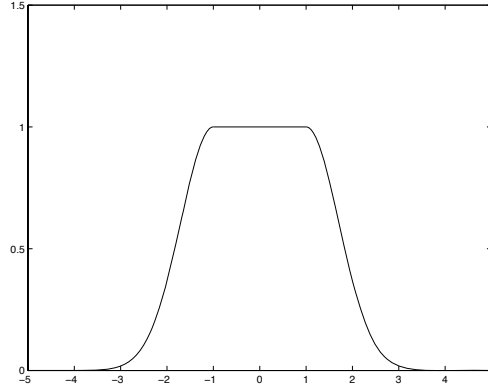


Figura 4.1: Funzione $\eta(x)$.

Dimostrazione. Se consideriamo la funzione $\eta(x)$ rappresentata in figura 4.1, si ha che $\varphi_n(x) = \varphi(x)\eta(x/n) \in \mathcal{D}$ e $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$. Infatti

$$\varphi(x) - \varphi_n(x) = \varphi(x) \left[1 - \eta\left(\frac{x}{n}\right) \right] = 0 \quad \text{per} \quad |x| < n$$

mentre per le proprietà di \mathcal{S}

$$\varphi(x) - \varphi_n(x) = \varphi(x) \left[1 - \eta\left(\frac{x}{n}\right) \right] \leq |\varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{per} \quad |x| \geq n$$

se n è abbastanza grande. Analogamente per $|x^p(\varphi - \varphi_n)|$. Per le derivate

$$\varphi'(x) - \varphi'_n(x) = \varphi'(x) \left[1 - \eta\left(\frac{x}{n}\right) \right] - \frac{1}{n} \eta'\left(\frac{x}{n}\right) \varphi(x) \quad (4.1)$$

quindi

$$|\varphi'(x) - \varphi'_n(x)| \leq |\varphi'(x)| \left| 1 - \eta\left(\frac{x}{n}\right) \right| + \frac{1}{n} \max |\eta'| |\varphi(x)| \rightarrow 0$$

uniformemente, dato che $\max |\eta'|$ è indipendente da n e che $\varphi' \in \mathcal{S}$. Se moltiplico per x^p non cambia nulla. Cosa analoga per tutte le derivate.

Le stesse considerazioni mostrano che se $\varphi \in \mathcal{E}$ allora $\varphi_n(x) = \varphi(x) \eta(x/n) \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$. Infatti, dato un compatto K , $\varphi_n - \varphi = 0$ su K se n è abbastanza grande. Per le derivate, vedi (4.1), il primo termine è nullo su K , per n abbastanza grande, mentre per il secondo

$$\left| \eta'\left(\frac{x}{n}\right) \varphi(x) \right| \leq \max |\eta'| \max_K |\varphi| < \varepsilon$$

per n grande, e così per tutte le derivate. \square

L'osservazione è utile perché, date due distribuzioni A, B di \mathcal{S}' (o di \mathcal{E}'), se esse sono uguali su \mathcal{D} , saranno uguali anche su \mathcal{S} (o su \mathcal{E}): se $\varphi \in \mathcal{S}$ e $\mathcal{D} \ni \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ allora

$$\langle A, \varphi \rangle = \left\langle A, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A, \varphi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle B, \varphi_n \rangle = \left\langle B, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \right\rangle = \langle B, \varphi \rangle$$

dato che su \mathcal{D} è $A = B$.

4.1 Distribuzioni in \mathcal{D}'

Ogni funzione f localmente integrabile è una distribuzione in \mathcal{D}' . Infatti, per $\varphi \in \mathcal{D}$ esiste

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_K f(x) \varphi(x) dx$$

essendo K il supporto di φ . Inoltre il funzionale è continuo: se $\varphi \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ (i supporti di φ_n sono contenuti in K) allora $|\varphi_n| < \varepsilon$ per n grande, per cui

$$\left| \int_K f(x) \varphi_n(x) dx \right| \leq \varepsilon \int |f(x)| dx$$

cioè $\langle f, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$.

Osservazione: Due funzioni f, g localmente integrabili possono dare lo stesso risultato per $\varphi \in \mathcal{D}$ solo se $f = g$ quasi ovunque.

Dimostrazione . Presi a e b qualunque, la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)(b-x)}} & \text{per } a < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

è in \mathcal{D} , così come le funzioni $\varphi^{1/n}$. Se f, g danno lo stesso risultato applicate ad ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, sarà

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] \varphi^{1/n}(x) dx = 0$$

si può passare il limite sotto il segno di integrale dato che l'integrando è maggiorato da $|f - g| \in L^1$, e si trova

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = 0$$

Poiché quanto detto è valido per ogni a, b si ha che

$$h(x) = \int_a^x [f(t) - g(t)] dt = 0$$

e quindi $h' = f - g = 0$ quasi ovunque. □

In \mathcal{D}' è anche $\delta(x - x_0)$, essendo

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x_0)$$

è chiaro che se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ allora

$$|\varphi_n(x_0)| < \sup_K |\varphi_n(x)| < \varepsilon$$

Anche $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ è una distribuzione in \mathcal{D}' ,

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \mathcal{P} \int \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Infatti, sia il supporto di φ contenuto nell'intervallo $[-L, L]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \mathcal{P} \int_{-L}^L \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-L}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^L \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-L}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^L \right) \frac{\varphi_d(x)}{x} dx = \int_{-L}^L \frac{\varphi_d(x)}{x} dx \end{aligned}$$

e $\varphi_d/x \in L^1$ perché $\varphi_d(x) = x \varphi'_d(\xi)$. Inoltre $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ è continuo, perché se $\varphi \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ in particolare $\varphi'_n \rightarrow 0$ uniformemente in un compatto K che contiene i supporti di φ_n , quindi $|\varphi'_{n,d}| < \varepsilon$ e

$$\left| \int_{-L}^L \varphi'_{n,d}(\xi) dx \right| \leq 2L\varepsilon$$

4.2 Distribuzioni in \mathcal{S}'

Questa volta non basta che f sia localmente integrabile perché sia definito

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx$$

Ad esempio ciò accade per $f = e^{x^2}$ e $\varphi = e^{-x^2/2}$.

Occorre quindi che la crescita di f all'infinito sia "temperata". Precisamente se f , localmente integrabile, è tale che esiste m per cui $f/(1 + |x|^m) \in L^1$ allora $f \in \mathcal{S}'$. Infatti

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx = \int \frac{f(x)}{1 + |x|^m} (1 + |x|^m) \varphi(x) dx$$

e, essendo $|(1 + |x|^m) \varphi| < A$,

$$|fg| \leq A \frac{|f|}{1 + |x|^m} \in L^1$$

Il funzionale è continuo su \mathcal{S} , infatti se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ allora $(1 + |x|^m) |\varphi_n| < \varepsilon$ per n grande e quindi

$$|\langle f, \varphi_n \rangle| \leq \int \frac{|f|}{1 + |x|^m} (1 + |x|^m) |\varphi_n| dx < \varepsilon \int \frac{|f|}{1 + |x|^m} dx$$

Osservazione: In \mathcal{S}' ci sono anche funzioni che non sono maggiorate da un polinomio. Per esempio $e^x \cos(e^x) \in \mathcal{S}'$, infatti

$$\begin{aligned} \int e^x \cos(e^x) \varphi(x) dx &= \int \frac{d}{dx} \sin(e^x) \varphi(x) dx = \sin(e^x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \sin(e^x) \varphi'(x) dx \\ &= - \int \sin(e^x) \varphi'(x) dx \end{aligned}$$

Il funzionale è continuo perché se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ allora anche $\varphi'_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, cioè $(1 + x^2) |\varphi'_n| < \varepsilon$, onde

$$\left| \int e^x \cos(e^x) \varphi(x) dx \right| \leq \int |\varphi'_n| dx < \varepsilon \int \frac{dx}{1 + x^2}$$

Anche $\delta(x)$ e \mathcal{P}_x^1 sono in \mathcal{S}' . Per $\delta(x)$ è evidente; per \mathcal{P}_x^1 si ragiona come fatto per \mathcal{D}' .

4.3 Struttura locale delle distribuzioni

In generale non ha senso parlare di valore di una distribuzione in un punto. sembra però naturale dire, ad esempio, che $\delta(x) = 0$ per $x \neq 0$, e ciò è corretto ai sensi della definizione seguente: si dice che una distribuzione T è zero in un aperto A se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ è $\langle T, \varphi \rangle = 0$, avendo definito

$$\mathcal{D}(A) = \{\varphi \in \mathcal{D} \mid \text{il supporto di } \varphi \text{ è contenuto in } A\}$$

Si dice che T è zero in un punto se esiste un intorno di tale punto in cui $T = 0$.

L'insieme dei punti in cui $T = 0$ è evidentemente un aperto: se x_0 ha un intorno I tale che se $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ è $\langle T, \varphi \rangle = 0$, tutto un intorno di x_0 ha questa proprietà (addirittura tutti i punti di I).

Il complemento dell'insieme degli x su cui $T = 0$, che è chiuso, si chiama il **supporto** di T . Ad esempio, $\delta(x)$ ha supporto in $x = 0$.

È utile conoscere il seguente

Lemma 4.1. *Siano A un aperto e $K \subset A$ un compatto, se $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ con $A_i \subset A$ è una copertura finita di K , allora esistono funzioni $\varphi_i \in \mathcal{D}(A_i)$ tali che*

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \varphi_i \leq 1 \quad e \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i = 1 \text{ su } X$$

dove X è un aperto tale che $K \subset X \subset A$.

Questa proprietà permette di vedere il seguente

Lemma 4.2. *Se una distribuzione è zero in ogni punto di un aperto A essa è zero in A .*

Dimostrazione. Se φ ha supporto $K \subset A$, per ogni $x \in K$ considero l'intorno $I(x) \subset A$ tale che $\langle T, \varphi \rangle = 0$ se $\varphi \in \mathcal{D}(I(x))$. Estraggo una copertura finita $\{I_i\}_{i=1,\dots,n}$ di K ($A_i = I_i \cap A$), e considero le funzione φ_i con le proprietà dette prima (vedi lemma 4.1). Si ha allora

$$\langle T, \varphi \rangle = \left\langle T, \sum_{i=1}^n \varphi_i \varphi \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle T, \varphi_i \varphi \rangle = 0 \quad (4.2)$$

dato che $\varphi_i \varphi \in \mathcal{D}(A_i)$ e $A_i \subset I_i$. □

Quindi se due distribuzioni sono uguali in ogni punto di A esse sono uguali in A .

In questo modo si verifica anche il seguente naturale

Lemma 4.3. *Se il supporto della distribuzione T non ha punti in comune con il supporto della funzione φ allora $\langle T, \varphi \rangle = 0$.*

Dimostrazione. Per ipotesi si ha che $T = 0$ in ogni punto del supporto di φ , cioè ogni punto del supporto di φ ha un intorno in cui $T = 0$. Prendendo una ricopertura finita $\{I_i\}_{i=1,\dots,n}$ di tali intorni e le φ_i come prima (vedi lemma 4.1), si ha, in virtù della (4.2), che $\langle T, \varphi \rangle = 0$ dato che $\varphi_i \varphi$ ha supporto in I_i dove $T = 0$. □

Un'altra conseguenza è il seguente

Lemma 4.4. *Se T è a supporto compatto e $\eta \in \mathcal{D}$ è 1 su di un aperto che contiene il supporto di T , allora $T = \eta T$, nel senso che $\langle \eta T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.*

Dimostrazione. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha che $\varphi = (1 - \eta)\varphi + \eta\varphi$. Il supporto di $(1 - \eta)\varphi$ ha intersezione vuota con il supporto di T e quindi $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \eta\varphi \rangle = \langle \eta T, \varphi \rangle$ (per chiarimenti vedi avanti). □

Teorema 4.5. *Le distribuzioni di \mathcal{D}' a supporto compatto sono le distribuzioni di \mathcal{E}' .*

Dimostrazione. Se $T \in \mathcal{D}$ ha supporto compatto possiamo definire T su tutto \mathcal{E} , infatti se $\eta \in \mathcal{D}$ è una funzione che vale 1 su un aperto contenente il supporto di T il funzionale $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \eta\varphi \rangle$ è definito per $\varphi \in \mathcal{E}$ perché $\eta\varphi \in \mathcal{D}$. Tale funzionale è ben definito perché non dipende dalla scelta di η , infatti se η_1 e η_2 sono due funzioni con le proprietà richieste

$$\langle T, \eta_1\varphi \rangle - \langle T, \eta_2\varphi \rangle = \langle T, (\eta_1 - \eta_2)\varphi \rangle = 0$$

dato che il supporto di T ha intersezione nulla con il supporto di $(\eta_1 - \eta_2)\varphi$. Infine T così definito è continuo su \mathcal{E} , infatti, se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$, $\eta\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. Il supporto di $\eta\varphi_n$ è contenuto nel supporto di η e

$$D^k(\eta\varphi_n) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \eta^{(j)} \varphi_n^{(k-j)}$$

e se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, su ogni compatto (in particolare sul supporto di η) è $\varphi_n^{(k)} \rightarrow 0$ uniformemente e cioè $\langle T, \eta\varphi_n \rangle \rightarrow 0$.

Ora vediamo che se $T \in \mathcal{E}'$ allora T è a supporto compatto. Per assurdo se così non fosse per ogni n dovrebbe esistere una funzione $\varphi_n \in \mathcal{D}$, con supporto ad intersezione nulla con $[-n, n]$, tale che $\langle T, \varphi_n \rangle = \text{cost} \neq 0$. Si ha che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$, perché su ogni compatto, per n abbastanza grande, $\varphi_n \equiv 0$. Allora, poiché $T \in \mathcal{E}'$, $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$, si ha allora un assurdo perché $\langle T, \varphi_n \rangle = \text{cost} \neq 0$. \square

Per le distribuzioni $T \in \mathcal{D}'$ a supporto compatto

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \eta\varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle$$

con le ψ che hanno sempre supporto contenuto in un aperto A che include il supporto di η . Per tali distribuzioni, definite su $\psi \in \mathcal{D}(A)$, esistono sempre una costante M ed un intero $N \geq 0$ (M ed N sono indipendenti da ψ) tali che

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq M \sup_{k \leq N} |\psi^{(k)}| \quad (4.3)$$

Infatti, se per assurdo non fosse così, per ogni N il rapporto $|\langle T, \psi \rangle| / \sup_{k \leq N} |\psi^{(k)}|$ non sarebbe limitato, in particolare dovrebbe esistere una ψ_N tale che

$$|\langle T, \psi_N \rangle| \geq N \sup_{k \leq N} |\psi_N^{(k)}|$$

Considero allora la successione

$$\varphi_N = \frac{1}{N} \frac{\psi_N}{\sup_{k \leq N} |\psi_N^{(k)}|}$$

Per ogni ordine k di derivata è $k \leq N$, per cui

$$|\varphi_N^{(k)}| = \frac{1}{N} \frac{|\psi_N^{(k)}|}{\sup_{k \leq N} |\psi_N^{(k)}|} \leq \frac{1}{N}$$

Dato che i supporti delle ψ_N sono tutti inclusi nel supporto di η , questo significa che $\varphi_N \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, per cui $\langle T, \varphi_N \rangle$ deve tendere a zero, ma questo è in contraddizione con

$$|\langle T, \varphi_N \rangle| = \frac{1}{N} \frac{|\langle T, \psi_N \rangle|}{\sup_{k \leq N} |\psi_N^{(k)}|} \geq 1$$

È chiaro che una T che gode della proprietà (4.3) per $\psi \in \mathcal{D}(A)$ è continua. Infatti se $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ in particolare $|\psi_n^{(k)}| < \varepsilon$ e quindi $|\langle T, \psi_n \rangle| \rightarrow 0$.

Osservazione: La (4.3) non vale in generale per $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, vedremo un esempio.

Ragionando allo stesso modo si vede che se $T \in \mathcal{S}'$ esistono N, M tali che

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq M \sup_{j, k \leq N} |x^j \varphi^{(k)}| \quad (4.4)$$

L'intero N individuato dalle (4.3), (4.4) si chiama **ordine della distribuzione**. Si dice allora che le distribuzioni a supporto compatto hanno ordine finito.

4.4 Trasformata di Fourier in \mathcal{S}'

Si sa che $f \in L^1 \cup L^2$ è anche in \mathcal{S} . Per $f \in L^2$, poiché $\mathcal{S} \subset L^2$,

$$\langle f, \widehat{\varphi} \rangle = \int f(x) \widehat{\varphi}(x) dx = (\widehat{\varphi}^*, f) = \frac{1}{2\pi} (\mathfrak{F} \widehat{\varphi}^*, \widehat{f})$$

D'altra parte

$$\frac{1}{2\pi} \mathfrak{F} \widehat{\varphi}^* = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{\varphi}^*(x) e^{i\omega x} dx = \left(\frac{1}{2\pi} \int \widehat{\varphi}(x) e^{-i\omega x} dx \right)^* = \varphi^*$$

da cui

$$\langle f, \widehat{\varphi} \rangle = (\varphi^*, \widehat{f}) = \int \varphi(x) \widehat{f}(x) dx = \langle \widehat{f}, \varphi \rangle$$

Lo stesso accade per $f \in L^1$:

$$\begin{aligned} \langle f, \widehat{\varphi} \rangle &= \int f(x) \widehat{\varphi}(x) dx = \int dx f(x) \int d\omega \varphi(\omega) e^{i\omega x} \\ &= \int d\omega \varphi(\omega) \int dx f(x) e^{i\omega x} = \varphi(\omega) \widehat{f}(\omega) d\omega = \langle \widehat{f}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

È allora naturale definire la **trasformata di Fourier di una distribuzione** $T \in \mathcal{S}'$ come

$$\langle \mathfrak{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathfrak{F}\varphi \rangle$$

Il funzionale così definito è ovviamente lineare ed è anche continuo dato che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ se e solo se $\widehat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} 0$.

Osservazione: Non si può definire la trasformata di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ come $\langle \mathfrak{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathfrak{F}\varphi \rangle$, perché le funzioni su cui agisce $\mathfrak{F}T$ (ovvero le antitrasformate delle funzioni di \mathcal{D}) non sono funzioni di \mathcal{D} , ma di un altro spazio indicato con \mathcal{Z} . Cioè per $T \in \mathcal{D}'$ è in generale $\mathfrak{F}T \in \mathcal{Z}'$; solo nel caso in cui $T \in \mathcal{S}'$ è $\mathfrak{F}T \in \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Come in L^2 ed in \mathcal{S} , ogni $T \in \mathcal{S}'$ è tale che $T = \mathfrak{F}P$ con $P \in \mathcal{S}'$. Infatti la P cercata è definita da

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \mathfrak{F}P, \varphi \rangle = \langle P, \mathfrak{F}\varphi \rangle$$

La P definita da $\langle P, \psi \rangle = \langle T, \mathfrak{F}^{-1}\psi \rangle$ è evidentemente lineare e continua.

Lemma 4.6. *La trasformata di Fourier $\mathfrak{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ è continua.*

Dimostrazione. Se $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$ allora $\mathfrak{F}T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \mathfrak{F}T$, infatti

$$\langle \mathfrak{F}T_n, \varphi \rangle = \langle T_n, \mathfrak{F}\varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \mathfrak{F}\varphi \rangle = \langle \mathfrak{F}T, \varphi \rangle$$

□

Questo ci dice che il procedimento euristico usato in precedenza per trovare $\mathfrak{F}\theta$ è corretto. Infatti $f_T = \chi_{[0,T]} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \theta$ e allora $\mathfrak{F}f_T \rightarrow \mathfrak{F}\theta$; si è visto che su funzioni sufficientemente regolari, come sono quelle di \mathcal{S} , è

$$\langle \widehat{f_T}, \varphi \rangle \longrightarrow i \mathcal{P} \int \frac{\widehat{\varphi}(\omega)}{\omega} + \pi \widehat{\varphi}(0) = \left\langle i \mathcal{P} \frac{1}{\omega} + \pi \delta(\omega), \varphi \right\rangle$$

da cui

$$\mathfrak{F}\theta = i \mathcal{P} \frac{1}{\omega} + \pi \delta(\omega)$$

È utile definire la **parità di una distribuzione**. Data T definiamo $T(-x)$ (spesso indicata con \check{T}) come

$$\langle T(-x), \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi(-x) \rangle$$

È chiaro che se T è lineare e continua lo è anche $T(-x)$. Si dice che T è pari se $T = T(-x)$, cioè se $\langle T, \varphi(x) - \varphi(-x) \rangle = 0$, ovvero se T annichila le funzioni test dispari. Ovviamente vale il viceversa: se $\langle T, \varphi_d \rangle = 0$ allora T è pari, infatti

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_p \rangle = \left\langle T, \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{T + T(-x)}{2}, \varphi \right\rangle$$

Analogamente T è dispari se $T = -T(-x)$, ovvero se T annichila le funzioni pari. Vale il seguente

Lemma 4.7. *Se T_n è una successione di distribuzioni pari (dispari) e $T_n \rightarrow T$ allora T è pari (dispari).*

Dimostrazione . Devo far vedere che T annichila le funzioni test dispari:

$$\langle T, \varphi_d \rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} T_n, \varphi_d \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi_d \rangle = 0$$

Discorso analogo per il caso dispari. □

Per trovare $\mathfrak{F}\theta$ si era approssimata $\theta(x)$ anche con le funzioni $\theta_\varepsilon = e^{-\varepsilon x}\theta(x)$. Si era trovato che

$$\mathfrak{F}\theta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2}$$

La parte reale è pari, quella immaginaria è dispari. Poiché si sa che $\mathfrak{F}\theta_\varepsilon \rightarrow \mathfrak{F}\theta$ si ha che la parte pari (dispari) di $\mathfrak{F}\theta_\varepsilon$ tende alla parte pari (dispari) di $\mathfrak{F}\theta$, cioè

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} &\longrightarrow \pi\delta(\omega) \\ \frac{\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} &\longrightarrow \mathcal{P}\frac{1}{\omega} \end{aligned}$$

Osservazione: Il fatto che $\delta(x)$ e $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ siano limite di distribuzioni in \mathcal{D}' ci assicura (\mathcal{D}' è completo) che appartengono a \mathcal{D}' . Discorso analogo per \mathcal{S}' .

4.4.1 Trasformate di Fourier utili

Si sa che

$$\mathfrak{F}\theta = i\mathcal{P}\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Poiché $2\theta(x) = 1 + \text{sgn}(x)$, dato che la funzione 1 è pari e la funzione $\text{sgn}(x)$ è dispari si ha che

$$\mathfrak{F}(1) = 2\pi\delta(\omega) \quad \text{e} \quad \mathfrak{F}(\text{sgn}(x)) = 2i \mathcal{P}\frac{1}{\omega} \quad (4.5)$$

Ricaviamo questo risultato anche dalla definizione di trasformata: per la funzione 1 si ha

$$\langle \mathfrak{F}(1), \widehat{\varphi} \rangle = \langle 1, \mathfrak{F}\widehat{\varphi} \rangle = \langle 1, 2\pi\varphi(-x) \rangle = 2\pi \int \varphi(x)dx = 2\pi\widehat{\varphi}(0) = \langle 2\pi\delta(x), \widehat{\varphi} \rangle$$

per $\text{sgn}(x)$ il conto è più laborioso

$$\begin{aligned}
 \langle \mathfrak{F}(\text{sgn}(x)), \widehat{\varphi} \rangle &= \langle \text{sgn}(x), \mathfrak{F}\widehat{\varphi} \rangle = \langle \text{sgn}(x), 2\pi\varphi(-x) \rangle \\
 &= 2\pi \int \text{sgn}(x)\varphi(-x)dx = 2\pi \int \text{sgn}(-x)\varphi(x) \\
 &= -4\pi \int_0^\infty \varphi_d(x)dx = -4\pi \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \widehat{\varphi}_d(\omega) e^{-i\omega x} \\
 &= 2i \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \widehat{\varphi}_d(\omega) \sin \omega x \\
 &= 2i \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \widehat{\varphi}_d(\omega) \int_0^L dx \sin \omega x \\
 &= -2i \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty \widehat{\varphi}_d(\omega) \frac{\cos \omega L - 1}{\omega} d\omega = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}_d(\omega)}{\omega} d\omega \\
 &= 2i \mathcal{P} \int \frac{\widehat{\varphi}_d(\omega)}{\omega} d\omega = 2i \mathcal{P} \int \frac{\widehat{\varphi}(\omega)}{\omega} d\omega = \left\langle 2i \mathcal{P} \frac{1}{\omega}, \widehat{\varphi} \right\rangle
 \end{aligned}$$

(si è usato il fatto che $\widehat{\varphi}_d/\omega \in L^1$ ed il lemma di Riemann–Lebesgue). In modo analogo alle funzioni vale il seguente

Lemma 4.8. *Sia $T \in \mathcal{S}'$, vale $\mathfrak{F}\mathfrak{F}T = 2\pi T(-x)$.*

Dimostrazione. Infatti, eseguendo il conto

$$\langle \mathfrak{F}\mathfrak{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathfrak{F}\mathfrak{F}\varphi \rangle = \langle T, 2\pi\varphi(-x) \rangle = \langle 2\pi T(-x), \varphi \rangle$$

□

In virtù di questa proprietà, dalle (4.5) si ricavano le relazioni

$$\mathfrak{F}\delta(x) = 1 \quad \text{e} \quad \mathfrak{F}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = i\pi \text{sgn}(\omega)$$

Per calcolo diretto si trova che

$$\langle \mathfrak{F}\delta(x), \widehat{\varphi} \rangle = \langle \delta(x), \mathfrak{F}\widehat{\varphi} \rangle = \mathfrak{F}\widehat{\varphi}|_{x=0} = \int \widehat{\varphi}(\omega) d\omega = \langle 1, \widehat{\varphi} \rangle$$

Mentre per la seconda, approssimando $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ con

$$\chi_{\varepsilon, R} = \begin{cases} 1 & \text{per } \varepsilon < |x| < R \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

possiamo calcolare con la variabile complessa

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{e^{i\omega x}}{x} dx$$

4.5 Derivata di una distribuzione

La **derivata di una distribuzione** si definisce in modo tale che se T è rappresentata da una funzione f derivabile sia $DT = f'$. Per una tale f è

$$\int f'(x)\varphi(x)dx = \cancel{f(x)\varphi(x)}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int f(x)\varphi'(x)dx = - \int f(x)\varphi'(x)dx$$

perché $f\varphi \rightarrow 0$ a $\pm\infty$. Si definisce allora

$$\langle DT, \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$$

La definizione ha senso: se $\varphi \in \mathcal{D}$ (o in \mathcal{S}) allora $\varphi' \in \mathcal{D}$ (o in \mathcal{S}), il funzionale così definito è lineare e continuo (perché se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ anche $\varphi'_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, e analogamente in \mathcal{S}). Dato che $\varphi \in \mathcal{D}$ (o in \mathcal{S}) $\Rightarrow \varphi' \in \mathcal{D}$ (o in \mathcal{S}) si può definire la derivata di ogni ordine:

$$\langle D^k T, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle$$

Lemma 4.9. *La derivata di ordine k , $D^k : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$, è continua.*

Dimostrazione. Infatti se $T_n \rightarrow T$ allora $DT_n \rightarrow DT$, dato che

$$\langle DT_n, \varphi \rangle = - \langle T_n, \varphi' \rangle \longrightarrow - \langle T, \varphi' \rangle = \langle DT, \varphi \rangle$$

Analogamente per gli altri ordini di derivazione. □

Come per le funzioni

Lemma 4.10. *Se T è pari (dispari) allora DT è dispari (pari).*

Dimostrazione. Infatti, se φ è pari $\langle DT, \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle = 0$ dato che φ' è dispari e T è pari. Discorso analogo per il caso T dispari. □

Consideriamo ora una distribuzione rappresentata da una funzione f che sia \mathcal{C}^1 a tratti e tale che esistono finiti i limiti destro e sinistro nei punti di non derivabilità.

Supponiamo dapprima che ci sia un solo punto, x_0 , dove f non è derivabile:

$$\begin{aligned} \langle Df, \varphi \rangle &= - \langle f, \varphi' \rangle = - \left(\int_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_0}^{+\infty} \right) f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} - f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{+\infty} + \left(\int_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_0}^{+\infty} \right) f'(x)\varphi(x)dx \\ &= [-f(x_0^-) + f(x_0^+)]\varphi(x_0) + \left(\int_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_0}^{+\infty} \right) f'(x)\varphi(x)dx \\ &= \langle d(x_0)\delta(x - x_0), \varphi \rangle + \langle \{f'\}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

dove $d(x_0)$ è la discontinuità in x_0 e

$$\langle \{f'\}, \varphi \rangle = \left(\int_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_0}^{+\infty} \right) f'(x) \varphi(x) dx$$

cioè $\{f'\}$ è la distribuzione della derivata calcolata nei tratti in cui esiste. Ad esempio, in questo modo si trova che $D\theta(x) = \delta(x)$.

Se si ha più di un punto di discontinuità, spezzando l'integrale nei vari tratti si ha

$$Df = \sum_i d(x_i) \delta(x - x_i) + \{f'\}$$

Esempio: calcoliamo la derivata di $\theta(x)/\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} \left\langle D \frac{\theta(x)}{\sqrt{x}}, \varphi \right\rangle &= - \int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}} dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} \Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right] \end{aligned}$$

Separatamente entrambi i termini non hanno limite (il secondo perché $x^{-3/2}$ non è L^1 in un intorno dell'origine). Aggiungo e sottraggo $\varphi(0)$ nel secondo integrale e ottengo

$$\begin{aligned} \left\langle D \frac{\theta(x)}{\sqrt{x}}, \varphi \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\varepsilon}^{\infty} [\varphi(x) - \varphi(0)] \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \varphi(0) \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\varepsilon}^{\infty} [\varphi(x) - \varphi(0)] \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right] \\ &= \int_0^{\infty} [\varphi(x) - \varphi(0)] \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

e stavolta l'integrale esiste.

4.6 Successioni convergenti alla $\delta(x)$

Il fatto che sia $D\theta(x) = \delta(x)$ e che D sia continua ha come conseguenza che se $f_n(x) \rightarrow \theta(x)$, $g_n(x) = f'_n(x) \rightarrow \delta(x)$, e questo ci mostra un modo per trovare successioni di funzioni che tendono alla $\delta(x)$.

In particolare sia $g(x)$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1^1$$

¹Non è necessario che $g \in L^1$, basta che esista

$$\lim_{L, L' \rightarrow \infty} \int_{-L}^{+L'} g(x) dx$$

Ad esempio $g(x) = \sin x / \pi x$ va bene.

Sia ora

$$h_n(x) = n \int_{-\infty}^x g(nt) dt = \int_{-\infty}^{nx} g(t) dt$$

facendo tendere $n \rightarrow \infty$ puntualmente, per $x > 0$ si ha che $h_n \rightarrow 1$, mentre per $x < 0$ è $h_n \rightarrow 0$. Ne segue che $h_n - \theta \rightarrow 0$ nel senso delle distribuzioni. Infatti

$$\langle h_n - \theta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^0 h_n(x) \varphi(x) dx + \int_0^{+\infty} (h_n(x) - 1) \varphi(x) dx$$

$h_n(x)$ è limitata e continua e $|h_n|$ è maggiorabile con una costante indipendente da n , dato che

$$\left| \int_{-\infty}^{nx} g(t) dt \right| < A$$

perché $\int_{-\infty}^x g(t) dt$ tende a 0 a $-\infty$ ed a 1 a $+\infty$; ne segue che sia $h_n \varphi$ che $(h_n - 1) \varphi$ tendono a zero puntualmente e sono maggiorate da $A|\varphi|$ e $B|\varphi|$ che sono in L^1 , quindi si può passare il limite sotto il segno di integrale.

Dato che $h_n \rightarrow \theta$ si ha che

$$h'_n(x) = ng(nx) \longrightarrow \delta(x)$$

Ad esempio, per $g(x) = \sin x / \pi x$ si ha

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} \longrightarrow \delta(x)$$

oppure per $g(x) = 1/\pi(1+x^2)$ si ha

$$\frac{1}{n\pi} \frac{1}{\frac{1}{n^2} + x^2} \longrightarrow \delta(x)$$

Di fatto si può dimostrare addirittura che ogni distribuzione di \mathcal{D}' è il limite nel senso di \mathcal{D}' di una successione di funzioni di \mathcal{D} (pensate come distribuzioni di \mathcal{D}' , in quanto localmente integrabili).

4.6.1 Definizioni di $\delta(f(x))$

Ricordando che

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) \quad \text{con, ad esempio,} \quad \delta_n(x) = \frac{1}{n\pi} \frac{1}{\frac{1}{n^2} + x^2}$$

si definisce in modo ovvio $\delta(f(x))$. Vediamo per quali f esiste il limite. Supponiamo f continua, consideriamo l'intervallo chiuso I in cui $f \neq 0$, sarà $f^2 \geq m^2 > 0$, allora

$$\frac{1}{n} \frac{1}{\frac{1}{n^2} + f^2} < \frac{1}{n} \frac{1}{f^2} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{m^2}$$

per cui in I

$$\langle \delta_n(f), \varphi \rangle = \int_I \frac{1}{n\pi} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{n^2} + f^2(x)} dx \longrightarrow 0$$

Sia, invece, I così piccolo da contenere un solo zero, x_0 , di f e supponiamo che f sia monotona in I (il che esclude che $f'(x_0)$ possa essere zero), ad esempio $f' > 0$; si può fare il cambio di variabile $z = f(x)$ per cui

$$\int_I \frac{1}{n\pi} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{n^2} + f^2(x)} dx = \int_{-\alpha}^{+\beta} dz \left| \frac{dx}{dz} \right| \frac{1}{n\pi} \frac{\varphi(x(z))}{\frac{1}{n^2} + z^2} = \int_{-\alpha}^{+\beta} \frac{1}{n\pi} \frac{g(z)}{\frac{1}{n^2} + z^2} dz$$

con $\alpha, \beta > 0$ e $g(z)$ continua. Ponendo $\varepsilon = 1/n$ e facendo il cambio di variabile $z = \varepsilon t$ l'integrale diventa

$$\int_{-\alpha/\varepsilon}^{+\beta/\varepsilon} \frac{1}{\pi} \frac{g(\varepsilon t)}{1+t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{g(\varepsilon t)}{1+t^2} \chi_{[-\frac{\alpha}{\varepsilon}, \frac{\beta}{\varepsilon}]} dt$$

Il modulo dell'integrando è maggiorabile con una funzione di L^1

$$\left| \frac{1}{\pi} \frac{g(\varepsilon t)}{1+t^2} \chi_{[-\frac{\alpha}{\varepsilon}, \frac{\beta}{\varepsilon}]} \right| < \max_{[\alpha, \beta]} |g| \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

si può allora passare il limite sotto il segno di integrale e si trova

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{g(\varepsilon t)}{1+t^2} \chi_{[-\frac{\alpha}{\varepsilon}, \frac{\beta}{\varepsilon}]} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi} \frac{g(\varepsilon t)}{1+t^2} \chi_{[-\frac{\alpha}{\varepsilon}, \frac{\beta}{\varepsilon}]} \right) dt = g(0)$$

Cioè il contributo a $\langle \delta(f), \varphi \rangle$ dell'intervallo I è

$$\frac{\varphi(x_0)}{|f'(x_0)|} = \left\langle \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|}, \varphi \right\rangle$$

Poiché questo discorso si può ripetere per ogni zero x_i di f si ha

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=0}^n \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

Si capisce che deve essere, come si è assunto, $f'(x_i) \neq 0$ se $f(x_i) = 0$. Ad esempio

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)]$$

4.7 Serie convergenti nel senso delle distribuzioni

Iniziamo con le distribuzioni in \mathcal{D}' : siano f_n localmente integrabili (allora $f_n \in \mathcal{D}'$) e tali che

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

converge uniformemente su ogni compatto. Allora anche S è localmente integrabile in quanto, detta S_N la somma parziale N -esima,

$$|S| \leq |S - S_N| + |S_N| < \varepsilon + S_N$$

e N è indipendente dal compatto e S_N è localmente integrabile. Quindi anche S è in \mathcal{D}' e

$$S_N = \sum_{n=0}^N f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

infatti

$$|\langle S - S_N, \varphi \rangle| \leq \int |S - S_N| |\varphi| dx < \varepsilon \int |\varphi| dx$$

Allora S è derivabile quante volte si vuole e, per la continuità della derivata,

$$DS = D \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} DS_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N f'_n = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$$

Idem per derivata di qualunque ordine. Cioè anche se le f_n sono tali che la serie delle derivate non converge né puntualmente, né L^2 , né uniformemente, essa converge nel senso delle distribuzioni di \mathcal{D}' . Ad esempio, consideriamo

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} e^{inx} \quad \text{per } n \neq 0$$

È facile vedere che, in $[0, 2\pi]$, è

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} f_n(x) = \frac{x^2}{2} - \pi x + \frac{\pi^2}{3} \quad (4.6)$$

Infatti

$$D^2 \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} f_n(x) = - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{inx} = 1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} = 1 - 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - 2n\pi)$$

Questo dice che $f(x)$ è continua, $f'(x)$ ha discontinuità -2π in $x = 2n\pi$ e $\{f''\} = 1$, cioè

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + ax + b$$

imponendo la continuità (la discontinuità della derivata è una condizione equivalente) e

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$$

si trova la (4.6). Si trova anche che

$$\left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx}, \varphi \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n)$$

poiché per la decrescenza rapida di $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(n)| < \infty$$

non esiste problema di riordinamento della serie.

Occupiamoci ora di \mathcal{S}' : siano f_k localmente integrabili e tali che $f_k/(1 + |x|^{n_k}) \in L^1$ (allora $f_k \in \mathcal{S}'$) e sia

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

convergente uniformemente su \mathbb{R} . Allora, analogamente a quanto visto per le distribuzioni in \mathcal{D}' , esiste

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle$$

e, per la completezza di \mathcal{S}' , si ha che $S \in \mathcal{S}'$. Al solito, per la continuità di D , è

$$D \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k$$

Il caso più comune in cui queste considerazioni servono è con la serie di Fourier

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$$

Se esiste n tale che

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|a_k|}{|k|^n} < \infty$$

allora

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_k}{k^n} e^{ikx}$$

rappresenta una funzione continua, perché la serie converge uniformemente, è

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} a_k e^{ikx} = (-1)^n D^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_k}{k^n} e^{ikx}$$

Osservazione: Si può dimostrare che ogni distribuzione $T \in \mathcal{S}'$ è la derivata di ordine n nel senso delle distribuzioni di una funzione continua f di crescita al più polinomiale

$$T = D^n f$$

Ciò è localmente vero anche per $T \in \mathcal{D}'$, cioè, dato un intervallo I , per tutte le φ a supporto contenuto in I avviene che

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle f^{(n)}, \varphi \rangle$$

con f continua.

In particolare questo avviene per le distribuzioni a supporto compatto, perché se $\eta = 1$ in un aperto I che contiene il supporto di T , per il lemma 4.4 è $T = \eta T$, cioè

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \eta T, \varphi \rangle = \langle T, \eta \varphi \rangle$$

ed il supporto di $\eta \varphi$ è contenuto nel supporto di η . Allora, essendo $T = f^{(n)}$, si ha

$$\langle T, \eta \varphi \rangle = \langle f^{(n)}, \eta \varphi \rangle = (-1)^n \langle f, D^n(\eta \varphi) \rangle = (-1)^n \int f(x) D^n(\eta(x) \varphi(x)) dx$$

$D^n(\eta \varphi)$ è la somma di termini del tipo $\eta^k \varphi^{(n-k)}$ e

$$\int f(x) \eta^k(x) \varphi^{(n-k)}(x) dx = \int g_k \varphi^{(n-k)}(x) dx = (-1)^{n-k} D^{n-k} g_k(x)$$

dove si è posto $g_k = f \eta^{(k)}$. In conclusione risulta

$$T = \sum_{i=0}^n D^i g_i = D^n g$$

con g continua. Ad esempio: $D^2(x\theta(x)) = \delta(x)$.

4.8 Moltiplicazione di una distribuzione per una funzione

Se T è rappresentata da una funzione $f(x)$ e $g(x)$ è un'altra funzione, $f(x)g(x)$ può essere una distribuzione se essa è localmente integrabile (\mathcal{D}') e si comporta bene a $\pm\infty$ (\mathcal{S}'). Però ciò può accadere per una certa f e non per un'altra. Perché g possa moltiplicare ogni distribuzione deve accadere che

$$\langle gT, \varphi \rangle = \int g(x) f(x) \varphi(x) dx = \langle T, g\varphi \rangle$$

ovvero $g\varphi$ deve essere una funzione test per ogni φ e questo avviene se $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}')$ e, per ogni k , le $g^{(k)}$ crescono al più come potenze (\mathcal{S}').

Per distribuzioni particolari, il prodotto gT è definito anche per g più generali. Per esempio, se T è a supporto compatto, basta che g sia \mathcal{C}^∞ su un aperto che include il supporto di T . Anzi, ricordando che per T a supporto compatto vale la (4.3), si vede che T può essere esteso alle funzioni \mathcal{C}^N con supporto in un aperto A che include il supporto di T in modo che continui a valere

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq M \sup_{k \leq N} |\varphi_i^{(k)}|$$

Questo ci dice che il funzionale esteso è continuo su \mathcal{C}^N con la definizione che

$$\varphi_i \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad \sup_{k \leq N} |\varphi_i^{(k)}| \longrightarrow 0$$

Allora $\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$ è definito purché $g \in \mathcal{C}^N$.

Tornando al caso generale, per cui aT è definito per ogni T , vale per la derivata la solita regola

$$D(aT) = a'T + aDT$$

infatti

$$\langle D(aT), \varphi \rangle = -\langle T, a\varphi' \rangle = -\langle T, D(a\varphi) - a'\varphi \rangle = \langle DT, a\varphi \rangle + \langle T, a'\varphi \rangle = \langle aDT + a'T, \varphi \rangle$$

Stessa cosa per le derivate successive.

Osservazione: Si verifica facilmente per calcolo diretto che

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x) \quad \text{e che} \quad a(x)\delta'(x) = a(0)\delta'(x) + a'(0)\delta(x)$$

Si può ora verificare che per $T \in \mathcal{S}'$ valgono le stesse relazioni fra T e $\mathfrak{F}T$ che si hanno per le funzioni:

(i) $\mathfrak{F}(DT) = i\omega\mathfrak{F}T$, infatti

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}(DT), \widehat{\varphi} \rangle &= \langle DT, \mathfrak{F}\widehat{\varphi} \rangle = -\langle T, D(\mathfrak{F}\widehat{\varphi}) \rangle \\ &= -\langle T, \mathfrak{F}(i\omega\widehat{\varphi}) \rangle = -\langle \mathfrak{F}T, i\omega\widehat{\varphi} \rangle = \langle -i\omega\mathfrak{F}T, \widehat{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

(ii) $\mathfrak{F}(xT) = -iD(\mathfrak{F}T)$, infatti

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}(xT), \widehat{\varphi} \rangle &= \langle xT, \mathfrak{F}\widehat{\varphi} \rangle = \langle T, x\mathfrak{F}\widehat{\varphi} \rangle = x \int \widehat{\varphi}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \int \widehat{\varphi}(\omega) \left(-i \frac{d}{d\omega} e^{i\omega x} \right) d\omega = i \int (D\widehat{\varphi}) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \langle T, i\mathfrak{F}(D\widehat{\varphi}) \rangle = \langle i\mathfrak{F}T, D\widehat{\varphi} \rangle = \langle -D(\mathfrak{F}T), \widehat{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

(iii) $\mathfrak{F}(T(x-a)) = e^{i\omega a}\mathfrak{F}T$, infatti

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}(T(x-a)), \widehat{\varphi} \rangle &= \langle T(x-a), \mathfrak{F}\widehat{\varphi} \rangle = \langle T, (\mathfrak{F}\widehat{\varphi})(x+a) \rangle \\ &= \langle T, \mathfrak{F}(\widehat{\varphi}e^{i\omega a}) \rangle = \langle \mathfrak{F}T, \widehat{\varphi}e^{i\omega a} \rangle = \langle e^{i\omega a}\mathfrak{F}T, \widehat{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

essendo

$$(\mathfrak{F}\widehat{\varphi})(x+a) = \int e^{i\omega(x+a)} \widehat{\varphi}(\omega) d\omega = \mathfrak{F}(\widehat{\varphi}e^{i\omega a})$$

4.8.1 Soluzioni di $xT = 0$

Cerchiamo la distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ tale che $xT = 0$, questo significa che T deve essere tale che $\langle xT, \varphi \rangle = 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}$, cioè $\langle T, \psi \rangle = 0$ se $\psi = x\varphi$, ovvero $\psi/x \in \mathcal{D}$.

Una condizione necessaria è che sia $\psi(0) = 0$, tale condizione è anche sufficiente: infatti, se $\psi(0) = 0$ si ha che

$$\psi(x) = \int_0^x \psi'(t) dt = x \int_0^1 \psi'(xz) dz \quad \text{cioè} \quad \frac{\psi(x)}{x} = \int_0^1 \psi'(xz) dz \in \mathcal{C}^\infty$$

Ora se $\chi \in \mathcal{D}$ è tale che $\chi(0) = 1$, una generica $\alpha(x) \in \mathcal{D}$ si può scrivere come una combinazione di ψ e χ :

$$\alpha(x) = [\alpha(x) - \alpha(0)\chi(x)] + \alpha(0)\chi(x)$$

la quantità in parentesi è nulla in $x = 0$, quindi

$$\alpha(x) - \alpha(0)\chi(x) = \psi(x) = x\varphi(x)$$

per qualche φ , e

$$\langle T, \alpha(x) - \alpha(0)\chi(x) \rangle = \langle T, x\varphi(x) \rangle = \langle xT, \varphi(x) \rangle = 0$$

Ne segue che è

$$\langle T, \alpha(x) \rangle = \langle T, \alpha(0)\chi(x) \rangle = \alpha(0) \langle T, \chi(x) \rangle = \lambda\alpha(0) = \langle \lambda\delta(x), \alpha(x) \rangle$$

cioè $T = \lambda\delta(x)$. La $\delta(x)$ è l'unica distribuzione, a meno di costante moltiplicativa, in \mathcal{D}' (e quindi in \mathcal{S}') tale che $xT = 0$.

4.8.2 Soluzioni di $x^n T = 0$

Per quanto appena visto, essendo $x^n T = x(x^{n-1}T) = 0$, si deve avere $x^{n-1}T = \lambda\delta(x)$. Se V è soluzione di $xV = \lambda\delta(x)$ allora, ponendo $x^{n-2}T = V + W$, si può scrivere

$$x(V + W) = xV + xW = \lambda\delta(x) + xW \quad \text{con} \quad xW = 0$$

ovvero $W = \mu\delta(x)$. Ora tale V vale $V = -\lambda\delta'(x)$, infatti

$$\langle x\delta'(x), \varphi \rangle = \langle \delta'(x), x\varphi \rangle = -\langle \delta(x), D(x\varphi) \rangle = -\langle \delta(x), x\varphi' + \varphi \rangle = -\langle \delta(x), \varphi \rangle$$

Allora $x^{n-2}T = \lambda\delta'(x) + \mu\delta(x)$. Proseguendo così si ottiene la soluzione di $x^n T = 0$ che vale

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \delta^{(k)}(x)$$

4.8.3 Soluzioni di $f(x)T = 0$

Supponiamo $f \in \mathcal{C}^\infty$ e tale che in ogni compatto f ha un numero finito di zeri. Sia $\varphi \in \mathcal{D}$, detto K il supporto di φ , ho che K contiene x_1, \dots, x_n zeri di f . Copro K con un numero finito di aperti A_i tali che ogni A_i contiene solo lo zero x_i . Per il lemma 4.1 esistono le funzioni $\eta_i \in \mathcal{D}(A_i)$ tali che

$$\sum_{i=1}^n \eta_i = 1$$

su un aperto che contiene K e che degli zeri di f contiene solo quelli contenuti in K ; allora

$$\langle T, \varphi \rangle = \left\langle T, \sum_{i=1}^n \eta_i \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \eta_i T, \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n T_i, \varphi \right\rangle$$

con $T_i = \eta_i T$. Se il supporto di η_i non contiene uno zero di f , $\eta_i/f \in \mathcal{C}^\infty$ e quindi

$$T_i = \frac{\eta_i}{f} (fT) = 0$$

Se il supporto di η_i contiene uno zero di f di ordine k_i , $(x - x_i)^{k_i} \eta_i/f \in \mathcal{C}^\infty$ e quindi

$$(x - x_i)^{k_i} T_i = \frac{(x - x_i)^{k_i} \eta_i}{f} (fT) = 0 \implies T_i = \sum_{j=0}^{k_i-1} a_j \delta^{(j)}(x - x_i)$$

Ripetendo il ragionamento per tutti gli zeri, si ha allora che

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{k_i-1} a_{ij} \delta^{(j)}(x - x_i) \quad 2$$

4.9 Equazioni differenziali per le distribuzioni

4.9.1 Soluzione di $D^n T = 0$

Iniziamo vedendo che in \mathcal{D}' (e quindi anche in \mathcal{S}') l'equazione $DT = 0$ ha come soluzione $T = \text{cost.}$ Infatti deve essere $\langle DT, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, cioè $\langle T, \psi \rangle = 0$ se $\psi = \varphi'$. Se $\psi = \varphi'$ è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Questa condizione è anche sufficiente, perché è

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$$

e $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$ è \mathcal{C}^∞ ed è a supporto compatto se $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$.

Ora, per una ψ generica si può sempre, fissata una $\omega \in \mathcal{D}$ normalizzata ad 1, decomporre

$$\psi(x) = \left[\psi(x) - \omega(x) \int \psi(t) dt \right] + \omega(x) \int \psi(t) dt \quad (4.7)$$

²Più brutalmente il risultato trovato si può spiegare nel modo seguente: $f(x)T = 0$ significa che in un intorno di x_0 , zero di f di ordine k (in tale intorno $f \sim (x - x_0)^k$) è $(x - x_0)^k T = 0$, ovvero in tale intorno

$$T = \sum_{j=0}^{k-1} a_j \delta^{(j)}(x - x_0)$$

la parentesi è ad integrale nullo (è cioè la derivata di una funzione) e $\langle T, [...] \rangle = 0$, allora

$$\langle T, \psi \rangle = \langle T, \omega \rangle \int \psi(t) dt = \text{cost} \int \psi(t) dt = \langle \text{cost}, \psi \rangle$$

cioè $T = \text{cost}$. Ne segue che $D^n T = 0$ ha come soluzione un polinomio di grado $n - 1$, infatti

$$D(D^{n-1}T) = 0 \implies D^{n-1}T = a_0 = D(a_0x)$$

cioè

$$D(D^{n-2}T - a_0x) = 0 \implies D^{n-2}T - a_0x = a_1$$

continuando così si trova $T = P_{n-1}(x)$.

4.9.2 Soluzione di $DT = V$

Troviamo ora la primitiva V di una distribuzione, ovvero risolviamo l'equazione $DT = V$. È chiaro che due primitive possono differire solo per una costante: se T_1 e T_2 risolvono si ha $D(T_1 - T_2) = 0$ e quindi $T_1 - T_2 = \text{cost}$. Verifichiamo che la primitiva esiste: $DT = V$ significa $\langle DT, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = \langle V, \varphi \rangle$ ovvero, sulle ψ tali che $\psi = -\varphi'$ la distribuzione T è definita da $\langle T, \psi \rangle = \langle V, \varphi \rangle$. De componendo ψ come in (4.7) si ha

$$\langle T, \psi \rangle = \langle T, -\varphi' \rangle + \langle T, \omega \rangle \int \psi(t) dt = \langle V, \varphi \rangle + \text{cost} \int \psi(t) dt = \langle V, \varphi \rangle + \langle \text{cost}, \psi \rangle$$

Il secondo termine è la costante di cui si sapeva già, il primo, in cui è

$$\varphi(x) = - \int_{-\infty}^x \left[\psi(t) - \omega(t) \int \psi(y) dy \right] dt$$

rappresenta una distribuzione di \mathcal{D}' , se V lo è. La linearità è evidente; per la continuità basta verificare che se $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ anche $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. La condizione sui supporti è verificata, dato che i supporti delle ψ_n sono tutti inclusi in un compatto K che posso prendere così grande da includere anche il supporto di ω . La convergenza uniforme delle derivate è evidente, infatti $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ implica che $\psi_n^{(k)} \rightarrow 0$ uniformemente, e

$$\left| \int \psi_n(t) dt \right| \leq \int_K |\psi_n| dt < \varepsilon \mu(K) \longrightarrow 0$$

($\mu(K)$ rappresenta la misura di K), ma anche $|\varphi_n| \rightarrow 0$ uniformemente perché

$$|\varphi_n(x)| \leq \int_K \left[|\psi_n| + |\omega| \int |\psi_n| dy \right] dt = \left(1 + \int |\omega| dt \right) \int |\psi_n| dt \longrightarrow 0$$

4.9.3 Soluzione di $DT = a(x)T + V$

Partiamo dall'equazione omogenea

$$DT = a(x)T \quad \text{con} \quad a \in \mathcal{C}^\infty$$

in \mathcal{D}' ha le soluzioni classiche. Infatti, se $u(x)$ è una soluzione classica non nulla (è cioè l'esponenziale), ponendo $T = uZ$ (cioè definendo $Z = u^{-1}T$), si ricava per Z

$$u'(x)Z + u(x)DZ = a(x)u(x)Z$$

da cui $DZ = 0$, cioè $Z = \text{cost}$, e quindi $T = \text{cost } u(x)$.

Osservazione: In \mathcal{S}' la soluzione non nulla può non esistere: ad esempio, l'equazione $DT - xT = 0$ ha in \mathcal{D}' la soluzione classica $u(x) = ce^{x^2/2} \notin \mathcal{S}'$, a meno che non sia $c = 0$.

Passando ora all'equazione non omogenea si trova

$$u'(x)Z + u(x)DZ = a(x)u(x)Z + V$$

cioè $DZ = u^{-1}(x)V$ e quest'ultima, come si è visto, ha soluzione in \mathcal{D}' .

4.9.4 Soluzione di un'equazione di ordine n

Consideriamo l'equazione

$$D^n T + a_{n-1}(x)D^{n-1}T + \dots + a_0(x)T = V \quad \text{con} \quad a_k \in \mathcal{C}^\infty \quad (4.8)$$

Ci si riporta, come nel caso classico, ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, per il quale si ragiona come prima. Si pone $Y_k = D^{k-1}T$ per cui

$$DY_k = Y_{k+1}(1 - \delta_{kn}) + \delta_{kn} \left(V - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)Y_{k+1} \right) \quad \text{per} \quad 1 \leq k \leq n$$

che ha la forma di un sistema lineare

$$DY + A(x)Y = B$$

con $B_k = 0$ se $V = 0$. Il caso omogeneo ha n soluzioni linearmente indipendenti, $u^{(i)}$, e l'indipendenza lineare dice che la matrice $U_{ri} = u_r^{(i)}$ ha determinante diverso da zero. Essa è tale che

$$DU_{ri} = Du_r^{(i)} = -A_{rs}u_s^{(i)} = -(AU)_{ri}$$

cioè

$$DU + AU = 0$$

L'equazione omogenea ha solo le soluzioni classiche, perché se $Y = UZ$ si ha

$$D(UZ) + (AU)Z = (DU)Z + UDZ + (AU)Z = UDZ = 0$$

da cui $DZ = 0$, ovvero $Z = \text{cost}$ e quindi $Y_k = (UZ)_k = u_k^{(r)} c_r$. Per l'equazione non omogenea, ponendo ancora $Y = UZ$, si ricava per Z l'equazione

$$UDZ = B \quad \text{cioè} \quad DZ = U^{-1}B$$

e quest'ultima ha soluzione determinata a meno di un vettore costante.

Considerazioni come le precedenti valgono per $\mathcal{D}'(A)$, A aperto.

Osservazione: Quanto detto vale se l'equazione è nella forma (4.8), se così non è, le conclusioni tratte possono essere false. Ad esempio, se consideriamo l'equazione $xDT = 0$ si ha $DT = a\delta(x) = aD\theta(x)$, cioè $T = a\theta(x) + b$. Si ha così una famiglia di soluzioni dipendente da due costanti.

4.10 Distribuzioni a supporto puntiforme

Abbiamo visto che le distribuzioni a supporto compatto sono le distribuzioni di \mathcal{E}' e che per tali distribuzioni esiste un intero N , detto ordine della distribuzione, per cui vale la (4.3). Vediamo ora che se T ha supporto in $x = 0$ allora

$$T = \sum_{k=0}^N c_k \delta^{(k)}(x)$$

Innanzitutto mostriamo la validità della seguente

Osservazione: Se T è a supporto in $x = 0$ e φ è tale che $\varphi^{(k)}(0) = 0$ per $k \leq N$, allora $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Dimostrazione . Consideriamo la solita funzione $\eta(x)$ che vale 1 in un aperto che contiene il supporto di T , ovvero in un intorno di $x = 0$. Per ogni ε , si ha allora

$$T = \eta(x)T = \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)T$$

Presa φ tale che $\varphi^{(k)}(0) = 0$ per $k \leq N$ è

$$\langle T, \varphi \rangle = \left\langle \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi \right\rangle$$

Ora usiamo la (4.3) per $\psi = \eta(x/\varepsilon)\varphi$, che è zero per $|x| > \varepsilon$. Avremo, per ogni k

$$D^k \left[\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x) \right] = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^j \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) D^{k-j} \varphi(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{1}{\varepsilon^j} \eta^{(j)}(x) \varphi^{(k-j)}(x)$$

Usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange si può scrivere

$$\varphi^{(k-j)} = \varphi^{(k-j)}(0) + x\varphi^{(k-j+1)}(0) + \dots + \frac{x^{N-k+j}}{(N-k+j)!} \varphi^{(N)}(0) + \frac{x^{N+1-k+j}}{(N+1-k+j)!} \varphi^{(N+1)}(\xi)$$

Sopravvive solo l'ultimo termine che sarà in modulo maggiorato da una costante per $\varepsilon^{N+1-k+j}$, in conclusione

$$\left| D^k \left[\eta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \varphi(x) \right] \right| \leq A \varepsilon^{N+1-k} \leq B \varepsilon$$

dato che al meglio $k = N$, e quindi

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq B \varepsilon$$

Dato che quanto detto vale per ogni ε e che B non dipende da ε si ha $\langle T, \varphi \rangle = 0$. \square

Per una φ generica, scriviamo

$$\varphi(x) = \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) + \dots - \frac{x^N}{N!} \varphi^{(N)}(0) \right] + \left[\varphi(0) + x\varphi'(0) + \dots + \frac{x^N}{N!} \varphi^{(N)}(0) \right]$$

La prima parentesi moltiplicata per $\eta(x)$ in $x = 0$ ha tutte le derivate di ordine $k \leq N$ nulle (dato che $\eta^{(k)}(0) = 0$), quindi

$$\begin{aligned} \langle \eta T, \varphi \rangle &= \langle T, \eta \varphi \rangle = \left\langle T, \eta(x) \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) \right\rangle = \sum_{k=0}^N \varphi^{(k)}(0) \left\langle T, \eta(x) \frac{x^k}{k!} \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^N c_k \varphi^{(k)}(0) = \left\langle \sum_{k=0}^N (-1)^k c_k \delta^{(k)}(x), \varphi(x) \right\rangle \end{aligned}$$

4.11 Convoluzione

Vogliamo ora introdurre un'operazione che abbia le proprietà della convoluzione fra funzioni ma che sia definita sulle distribuzioni. Ci aspettiamo che continuino a valere le seguenti proprietà:

$$(i) \quad f * g = g * f;$$

$$(ii) \quad \delta * f = f;$$

$$(iii) \quad \delta^{(n)} * f = f^{(n)};$$

$$(iv) \quad D(f * g) = f' * g = f * g'.$$

Se $f, g \in L^1$, $h = f * g \in L^1$, allora

$$\langle h, \varphi \rangle = \int f(x-y)g(y)\varphi(x)dx dy = \int f(z)g(y)\varphi(y+z)dy dz$$

questo suggerisce di definire

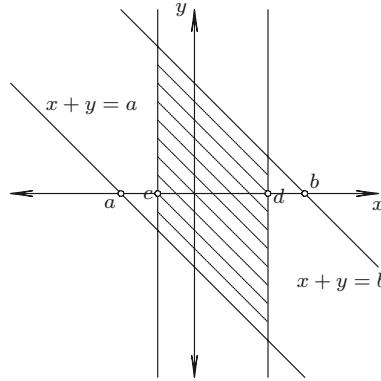
$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x)g(y), \varphi(x+y) \rangle \quad (4.9)$$

in cui $fg \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Però $\varphi(x+y)$ non è una funzione test in quanto in generale non è a supporto compatto.

Se f (o g) ha supporto compatto il problema non esiste, infatti in tal caso $f(x) = \eta(x)f(x)$ (con η la solita funzione che vale 1 su un aperto che contiene il supporto di f) e quindi

$$\langle \eta(x)f(x)g(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle f(x)g(y), \eta(x)\varphi(x+y) \rangle$$

e $\eta(x)\varphi(x+y)$ ha supporto compatto in \mathbb{R}^2 se φ lo ha in \mathbb{R} , come appare evidente in figura:



dove $[a, b]$ è il supporto di φ , $[c, d]$ contiene il supporto di η , e la zona tratteggiata è il supporto di $\eta(x)\varphi(x+y)$.

Osservazione: Se $\varphi \in \mathcal{S}$, $\eta(x)\varphi(x+y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Dimostrazione . Infatti, per certi a_{jk} ,

$$D_x^p D_y^q (\eta(x) \varphi(x+y)) = \sum_{j,k} a_{jk} \eta^{(j)}(x) \varphi^{(k)}(x+y)$$

e $|x^n y^m \eta^{(j)}(x) \varphi^{(k)}(x+y)|$ è limitato perché $|x^n \eta^{(j)}(x)|$ è limitato e

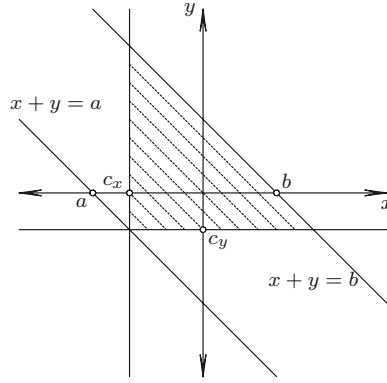
$$|\varphi^{(k)}(x+y)| \leq \frac{M}{1+|x+y|^{m+1}} \leq \begin{cases} \frac{M}{1+|y-a|^{m+1}} & \text{per } y > a \\ \frac{M}{1+|y+a|^{m+1}} & \text{per } y < -a \end{cases}$$

dove $[-a, a]$ è tale da contenere il supporto di η , per cui anche $|y^m \varphi^{(k)}|$ risulta limitato. \square

Osservazione: Si può verificare che la distribuzione definita da $\langle f(x)g(y), \eta(x)\varphi(x+y) \rangle$ è continua su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Un altro caso fisicamente significativo in cui è lecito definire il prodotto di convoluzione tramite la (4.9) è quando f e g hanno supporti limitati entrambi a sinistra (o a destra),

infatti in tal caso il supporto di $\varphi(x+y)$ risulta compatto. Le ragioni di ciò appaiono evidenti, ad esempio, dalla figura seguente:



in cui si è supposto f, g con supporti entrambi limitati a sinistra ($[a, b]$ è il supporto di φ , $[c_x, +\infty[$ il supporto di $f(x)$, $[c_y, +\infty[$ il supporto di $g(y)$ e la zona tratteggiata è il supporto di $\varphi(x+y)$).

Quanto visto suggerisce che per definire il prodotto di convoluzione tramite la (4.9) nel caso più generale si possa "a forza" rendere compatto il supporto della φ (o rendere la $\varphi \in \mathcal{S}$) moltiplicandola per $\eta_n(x, y)$ con la condizione che $\eta_n \rightarrow 1$ su ogni compatto, con derivata uniformemente limitata, e definire così

$$\langle f(x)g(y), \varphi(x+y) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x)g(y), \eta_n(x, y), \varphi(x+y) \rangle$$

tutte le volte che tale limite esiste indipendentemente dalla successione η_n scelta.

Per applicare questi concetti alle distribuzioni non descritte da funzione è necessario prima considerare il prodotto diretto di due distribuzioni $A \otimes B$.

4.11.1 Prodotto di due distribuzioni

L'idea è di definire sulle funzioni di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ o di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\langle A \otimes B, \varphi(x, y) \rangle = \langle A(x), \langle B(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle \quad (4.10)$$

La prima cosa è esaminare le proprietà di $\psi(y) = \langle T(x), \varphi(x, y) \rangle$ come funzione di y .

Lemma 4.11. *Per $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ risulta che $\psi \in \mathcal{D}$ e che*

$$D^k \psi = \left\langle T(x), \frac{\partial^k \varphi}{\partial y^k}(x, y) \right\rangle$$

Dimostrazione. La funzione ψ è a supporto compatto dato che $\varphi \in \mathcal{D}$ ed è continua:

$$\psi(y+h) - \psi(y) = \langle T(x), \varphi(x, y+h) - \varphi(x, y) \rangle$$

Se al posto di h penso ad una successione h_n si ha che

$$\zeta_n = \varphi(x, y + h_n) - \varphi(x, y) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$$

dato che $\frac{\partial}{\partial y} x^p \varphi(x, y)$ è uniformemente continua in x, y e quindi $|D_x^k \zeta_n| < \varepsilon$ per $|h_n|$ sufficientemente piccolo. Per mostrare la derivabilità considero

$$\frac{\psi(y + h_n) - \psi(y)}{h_n} - \left\langle T(x), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right\rangle = \left\langle T(x), \frac{\psi(y + h_n) - \psi(y)}{h_n} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right\rangle$$

Per Taylor la ζ_n su cui T agisce è $\frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, \tilde{y}_n) - \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y)$ (dove $|y_n| < h_n$) che per l'uniforme continuità è piccola uniformemente. Lo stesso vale per $D_x^k \zeta_n$, quindi il secondo membro tende a zero nel senso di \mathcal{D} per cui il limite del rapporto incrementale è proprio quello voluto. Allo stesso modo si ragiona per le derivate successive. \square

Allora la (4.10) definisce una distribuzione di $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. È chiaro che allo stesso modo si vede che

$$\langle B \otimes A, \varphi(x, y) \rangle = \langle B(y), \langle A(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle \quad (4.11)$$

definisce una distribuzione di $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Lemma 4.12. *Le due distribuzioni definite da (4.10) e da (4.11) sono uguali.*

Dimostrazione. È chiaro che esse danno lo stesso risultato se applicate ad una funzione test del tipo

$$\varphi(x, y) = \alpha(x)\beta(y) \quad \text{con} \quad \alpha, \beta \in \mathcal{D}$$

o ad una loro combinazione lineare, infatti

$$\begin{aligned} \langle A \otimes B, \alpha(x)\beta(y) \rangle &= \langle A(x), \langle B(y), \alpha(x)\beta(y) \rangle \rangle = \langle A(x), \alpha(x)\langle B(y), \beta(y) \rangle \rangle \\ &= \langle A, \alpha \rangle \langle B, \beta \rangle = \langle B(y), \beta(y)\langle A(x), \alpha(x) \rangle \rangle \\ &= \langle B(y), \langle A(x), \alpha(x)\beta(y) \rangle \rangle \end{aligned}$$

Per concludere basta osservare che

Osservazione: Ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ è tale che

$$\varphi(x, y) = \lim_{\mathcal{D}} \sum_{p,q}^N a_{pq} \alpha_p(x) \beta_q(y)$$

Allora per la continuità su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dei due modi di calcolare $A \otimes B$, i risultati coincidono. \square

Dimostrazione dell'osservazione. Basta far vedere che

$$\sum_{p,q}^N \alpha_p(x) \beta_q(y)$$

sono dense in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Supponiamo per semplicità di esposizione che $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ abbia supporto in $(0, \pi) \times (0, \pi)$. È

$$\varphi(x, y) = \sum_{p, q}^{\infty} a_{pq} e^{ipx} e^{iqy}$$

e la serie converge uniformemente a φ . La serie delle derivate è la serie della derivata di φ , e anche in questo caso c'è convergenza uniforme. Così per ogni derivata. Se η è la solita funzione che vale 1 in un intorno di $(0, \pi)$ allora

$$\sum_{p, q}^N a_{pq} \eta(x) e^{ipx} \eta(y) e^{iqy}$$

converge a φ in \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) - \eta(x)\eta(y) \sum_{p, q}^N a_{pq} e^{ipx} e^{iqy} &= \left[\varphi(x, y) - \sum_{p, q}^N a_{pq} e^{ipx} e^{iqy} \right] + \\ &+ [1 - \eta(x)\eta(y)] \sum_{p, q}^N a_{pq} e^{ipx} e^{iqy} \end{aligned}$$

il primo termine converge uniformemente a zero con tutte le derivate, il secondo anche perché è non nullo solo se $\varphi = 0$. \square

Vediamo alcune proprietà di questo prodotto:

(i) Esaminiamo il caso in cui $B(y) = 1$, si ha

$$\begin{aligned} \langle A \otimes 1, \varphi(x, y) \rangle &= \langle A(x), \langle 1(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \left\langle A(x), \int \varphi(x, y) dy \right\rangle \\ &= \langle 1(y), \langle A(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \int \langle A(x), \varphi(x, y) \rangle dy \end{aligned}$$

La relazione

$$\left\langle A(x), \int \varphi(x, y) dy \right\rangle = \int \langle A(x), \varphi(x, y) \rangle dy$$

è una sorta di scambio di ordine di integrazione come nel teorema di Fubini.

(ii) Per calcolo diretto si verifica che

$$D_x(A \otimes B) = (DA) \otimes B \quad \text{e che} \quad D_y(A \otimes B) = A \otimes (DB)$$

4.11.2 Convoluzione in \mathcal{D}'

Per quanto detto sulle funzioni, se A (o B) è a supporto compatto oppure se A e B hanno entrambe supporto limitato a sinistra (o a destra) è allora lecito definire

$$\langle A * B, \varphi \rangle = \langle A \otimes B, \varphi(x+y) \rangle$$

Verifichiamo che valgono ancora le proprietà valide per il prodotto di convoluzione di due funzioni:

(i) Il prodotto di convoluzione continua ad essere commutativo dato che $A \otimes B = B \otimes A$.

(ii) La $\delta(x)$ è a supporto compatto, vale

$$\langle \delta * B, \varphi \rangle = \langle B(y), \langle \delta(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle B(y), \varphi(y) \rangle$$

cioè

$$\delta * B = B$$

(iii) Per $\delta'(x)$ vale

$$\begin{aligned} \langle \delta' * B, \varphi \rangle &= \langle B(y), \langle \delta'(x), \eta(x)\varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle B(y), -\langle \delta(x), D_x(\eta(x)\varphi(x+y)) \rangle \rangle \\ &= -\langle B(y), \varphi'(y) \rangle = \langle DB(y), \varphi(y) \rangle \end{aligned}$$

cioè $\delta' * B = DB$ e analogamente per $\delta^{(n)}(x)$ vale

$$\delta^{(n)} * B = D^n B$$

(iv) Per la derivata, supponendo B a supporto compatto ($B = \eta B$),

$$\begin{aligned} \langle D(A * B), \varphi \rangle &= -\langle A * B, \varphi' \rangle = -\langle A(x), \langle B(y), \eta(y)\varphi'(x+y) \rangle \rangle \\ &= -\langle A(x), \langle B(y), D_x(\eta(y)\varphi(x+y)) \rangle \rangle \\ &= -\langle A(x), D_x \langle B(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle DA(x), \langle B(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle (DA) * B, \varphi \rangle \end{aligned}$$

e analogamente per A a supporto compatto, vale allora

$$D(A * B) = (DA) * B = A * (DB)$$

4.11.3 Convoluzione in \mathcal{S}' e trasformata di Fourier di una convoluzione

Poiché è $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ le considerazioni appena fatte continuano a valere. Interessiamoci ora di vedere se, o in quali casi, $A * B \in \mathcal{S}'$ e se, in tali casi, vale ancora che $\mathfrak{F}(A * B) = \mathfrak{F}A \cdot \mathfrak{F}B$. Il caso più semplice è quello di due funzioni:

(i) $f, g \in L^1$, si ha che $f * g \in L^1$ e quindi $f * g \in \mathcal{S}'$. Si ha allora che anche in \mathcal{S}' è $\mathfrak{F}(f * g) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$, infatti

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}(f * g), \widehat{\varphi} \rangle &= \langle f * g, \mathfrak{F}\widehat{\varphi} \rangle = \left\langle f * g, \int \widehat{\varphi}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \right\rangle \\ &= \int dx \int dy f(x-y) g(y) \int d\omega \widehat{\varphi}(\omega) e^{i\omega x} \\ &= \int d\omega \widehat{\varphi}(\omega) \int dx \int dy f(x-y) g(y) e^{i\omega(x-y)} e^{i\omega y} \\ &= \int d\omega \widehat{\varphi}(\omega) \int dz f(z) e^{i\omega z} \int dy g(y) e^{i\omega y} \\ &= \langle \widehat{f} \cdot \widehat{g}, \widehat{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

(ii) $f \in L^1, g \in L^2$. Se $g_L = g\chi_{[-L,L]} \in L^1$, è $g_L \xrightarrow{L^2} g$ e quindi

$$\mathfrak{F}(f * g_L) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}_L \xrightarrow{L^2} \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

Questo implica che $\widehat{f} \cdot \widehat{g}_L \xrightarrow{\mathcal{S}'} \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ perché $(f * g \in L^2 \subset \mathcal{S}')$

$$\left| \int \widehat{f}(\omega) [\widehat{g}(\omega) - \widehat{g}_L(\omega)] \widehat{\varphi}(\omega) d\omega \right| \leq \|\widehat{g} - \widehat{g}_L\| \|\widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}\| \longrightarrow 0$$

e questo significa che $\mathfrak{F}^{-1}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}) \xrightarrow{\mathcal{S}'} f * g$.

(iii) $f, g \in L^2$. In questo caso si sa che è

$$\int f(x-y) g(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

con $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1$ e quindi $f * g \in \mathcal{S}'$. Proviamo che nel senso di \mathcal{S}' è $\mathfrak{F}^{-1}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}) = f * g$: è chiaro che per ogni $T \in \mathcal{S}'$ è

$$\langle \mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{F} T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \mathfrak{F} \mathfrak{F}^{-1} \varphi \rangle = \langle \mathfrak{F} T, \mathfrak{F}^{-1} \varphi \rangle$$

allora

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}^{-1}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}), \varphi \rangle &= \langle \widehat{f} \cdot \widehat{g}, \mathfrak{F}^{-1} \varphi \rangle = \left\langle \widehat{f} \cdot \widehat{g}, \frac{1}{2\pi} \int \varphi(x) e^{-i\omega x} dx \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega) \int dx \varphi(x) e^{-i\omega x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dx \varphi(x) \int d\omega \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega) e^{-i\omega x} \\ &= \int dx \varphi(x) \int dy f(x-y) g(y) = \langle f * g, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Nel caso di due distribuzioni generiche $A, B \in \mathcal{S}'$ la convoluzione esiste se A (o B) è a supporto compatto; in questo caso si ha ancora che $\mathfrak{F}(A * B) = \mathfrak{F}A \cdot \mathfrak{F}B$.

5 Sistemi causali e relazioni di dispersione

Si definiscono **sistemi causali** quei sistemi lineari per i quali la risposta $g(t) = L(f(t))$ dipende dai valori di $f(x)$ per $x \leq t$. Poiché

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-x)f(x)dx$$

per un tale sistema deve essere $G(t) = 0$ per $t < 0$.

Per G causale e in L^1 (o in L^2), $\hat{G}(\omega_1 + i\omega_2)$ è definita e analitica per $\omega_2 > 0$; infatti

$$\int_0^n G(t)e^{i\omega_1 t}e^{-\omega_2 t}dt$$

è una funzione intera e l'integrale converge uniformemente a

$$\int_0^\infty G(t)e^{i\omega_1 t}e^{-\omega_2 t}dt \quad \text{per} \quad |\omega_2| > 0$$

dato che

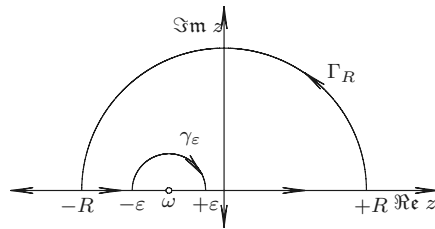
$$\left| \int_n^m G(t)e^{i\omega_1 t}e^{-\omega_2 t}dt \right| \leq \int_n^m |G|e^{-\omega_2 t} \leq \int_n^m |G|e^{-\alpha t}dt < \varepsilon \quad \text{per} \quad |\omega_2| \geq \alpha > 0$$

perché $Ge^{-\alpha t} \in L^1$ se $G \in L^1$ (o L^2).

Se si aggiunge l'ipotesi $\hat{G}(z)$ analitica anche per z reale, $\hat{G}(z) \rightarrow 0$ per $z \rightarrow \infty$ nel semipiano superiore, si ottiene una relazione fra $\Re \hat{G}$ e $\Im \hat{G}$. Se ω è reale, integrando la funzione

$$f(z) = \frac{\hat{G}(z)}{z - \omega}$$

sul cammino



si ha, per il teorema 1.3 di Cauchy I,

$$\left(\int_{-R}^{\omega-\varepsilon} + \int_{\omega+\varepsilon}^R \right) f(x)dx + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

Facendo i limiti

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = -i\pi \widehat{G}(\omega) \quad \text{e} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$$

si ottiene allora la **relazione di dispersione**

$$\mathcal{P} \int \frac{\widehat{G}(x)}{x - \omega} dx = i\pi \widehat{G}(\omega) \quad (5.1)$$

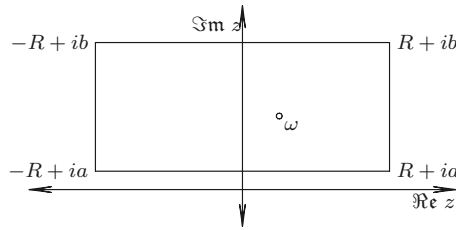
che equivalentemente si può scrivere con le due **formule di Kramers-Kronig**

$$\Re \widehat{G}(\omega) = \mathcal{P} \frac{1}{\pi} \int \frac{\Im \widehat{G}(x)}{x - \omega} dx \quad \text{e} \quad \Im \widehat{G}(\omega) = -\mathcal{P} \frac{1}{\pi} \int \frac{\Re \widehat{G}(x)}{x - \omega} dx \quad (5.2)$$

Le relazioni ora scritte si trovano anche a partire dall'ipotesi che \widehat{G} sia analitica nel semipiano superiore e che sia

$$\|\widehat{G}(\omega_1 + i\omega_2)\|^2 \leq \|\widehat{G}(\omega_1)\|^2 \quad (5.3)$$

Preso ω nel semipiano superiore, basta integrare sul cammino



e mandare $R \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ ed $a \rightarrow 0$.

La relazione (5.1) di dispersione implica a sua volta che $G(t) = 0$ per $t < 0$ ovvero G è causale. Infatti consideriamo l'operatore

$$\mathfrak{F}^{-1} T \widehat{f} = \mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int \frac{\widehat{f}(x)}{x - \omega} dx$$

se applicato a $\varphi \in \mathcal{S}$ si trova

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int \frac{\widehat{\varphi}(x)}{x - \omega} dx &= -\frac{1}{i\pi} \mathfrak{F}^{-1} \left(\mathcal{P} \frac{1}{x} * \widehat{\varphi} \right) \\ &= 2i \mathfrak{F}^{-1} \left(\mathcal{P} \frac{1}{x} \right) \mathfrak{F}^{-1}(\widehat{\varphi}) \\ &= 2i \left(\frac{1}{2i} \text{sgn}(t) \right) \varphi(t) = \text{sgn}(t) \varphi(t) \end{aligned}$$

Tale operatore è evidentemente limitato e può essere esteso a tutto L^2 , allora

$$G(t) = \mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{F} G(t) = \mathfrak{F}^{-1} T \mathfrak{F} G(t) = \text{sgn}(t) G(t)$$

Abbiamo così (parzialmente) dimostrato il

Teorema 5.1 (di Titchmarsh). *I seguenti fatti sono equivalenti:*

- (i) $G \in L^2$ e causale;
- (ii) $\widehat{G}(\omega_1 + i\omega_2)$ analitica per $\omega_2 > 0$ e $\|\widehat{G}(\omega_1 + i\omega_2)\|^2 \leq \|\widehat{G}(\omega_1)\|^2$;
- (iii) vale la relazione di dispersione (5.1).

Osservazione: Quando la funzione di Green non è in L^2 non si può usare il teorema 5.1. Se però \widehat{G} è analitica nel semipiano superiore (per semplicità assumiamo che sia analitica anche sull'asse reale) è $\widehat{G}(\omega)/\omega^n \rightarrow 0$ per $\omega \rightarrow \infty$, G è ancora causale.

Bibliografia

- [1] G. Cicogna, *Metodi Matematici per la Fisica* – SEU
- [2] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* – McGraw-Hill
- [3] H. F. Weinberger, *A first course in Partial Differential Equations* – Dover

Indice analitico

- ampiezza spettrale, 71
- analitica, 8
- armonica coniugata, 41
- armoniche, 41
- condizioni di Cauchy–Riemann, 3
- derivata di una distribuzione, 90
- distribuzione, 79
- distribuzioni
 - di Schwartz, 79
 - infinitamente derivabili, 79
 - temperate, 79
- formula di Green, 48
- formula di Poisson, 48
- formula integrale di Cauchy, 12
- formule di Kramers–Kronig, 112
- funzione di Green, 52, 58
- funzioni test, 79
- intera, 15
- larghezza temporale, 71
- olomorfa, 8
- ordine della distribuzione, 86
- parità di una distribuzione, 87
- polo di ordine, 26
- principio del massimo
 - per funzioni analitiche, 16
 - per funzioni armoniche, 50
- principio di indeterminazione, 72
- problema di Dirichlet, 51
- problema di Neumann, 53
- proiezione stereografica, 30
- prolungamento analitico, 20
- prolungamento analitico lungo una curva, 22
- prolungamento armonico, 50
- punti simmetrici, 45
- punto di diramazione, 5
- punto singolare, 21
- punto singolare isolato, 25
- relazione di dispersione, 112
- residuo, 28
- serie bilatere, 18
- sfera dei numeri complessi, 31
- sfera di Riemann, 31
- singolarità essenziale, 27
- singolarità removibile, 26
- sistema lineare e indipendente dal tempo, 58
- sistemi causali, 111
- superficie di Riemann, 5
- supporto di una distribuzione, 84
- taglio, 6
- tempo di salita, 73
- teorema
 - dei residui
 - esterni, 32
 - interni, 29
 - del campionamento (sampling theorem), 73
 - della media, 49
 - di Cauchy I, 10
 - di Cauchy II, 11

Indice analitico

di Liouville, 15
di monodromia, 24
di Morera, 13
di Picard, 28
di Rouché, 36
trasformata di Fourier di una distribu-
zione, 87
trasformazioni bilineari, 43
trasformazioni conformi, 43

valore principale di Cauchy, 75

zero di ordine, 21