

# Cálculos Tesis

Gerardo Suárez

29 de enero de 2020

## 1. Resultados Zurika

Nos basamos en el trabajo previo realizado por Zurika [1] .sean  $\alpha'$  y  $\beta'$  los coeficientes de absorción y emisión del objeto semitransparente, entonces:

$$|\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1 \text{ y en forma polar } \alpha' = \alpha e^{i\theta} ; \beta' = \beta e^{i\gamma}$$

Usamos la siguiente Base:

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Inicialmente el fotón llega por el camino 1 y el objeto semitransparente está en el camino 2, el primer elemento óptico que se encuentra el fotón es un beam splitter cuya acción esta modelada por el operador:

$$BS_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & i \sin(\theta_1) \\ i \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} .$$

Al actuar este operador sobre el camino 1 y el camino 2 se obtiene

$$|1\rangle \xrightarrow{BS_1} \cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) |2\rangle .$$

$$|2\rangle \xrightarrow{BS_1} \cos(\theta_1) |2\rangle + i \sin(\theta_1) |1\rangle .$$

Luego pasa por el objeto semitransparente, el fotón puede ser transmitido o absorbido con probabilidad  $|\beta'|^2$  y  $|\alpha'|^2$ , respectivamente, es decir al pasar por el objeto el estado se convierte en:

$$|2\rangle \xrightarrow[\text{Semitransparente}]{\text{Objeto}} \alpha' |abs\rangle + \beta' |2\rangle$$

es decir:

$$\cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) |2\rangle \xrightarrow[\text{Semitransparente}]{\text{Objeto}} \cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) (\alpha' |abs\rangle + \beta' |2\rangle).$$

Lo siguiente que se encuentra el fotón es un espejo ya sea que venga por el camino 1 o el camino 2, la forma más general de representar un espejo es mediante el operador:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & e^{iz} \\ e^{iz} & 0 \end{pmatrix}.$$

Con  $z = \pi/2$  se reduce a :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Actuamos el espejo sobre el interferómetro(en realidad espejos distintos sobre cada camino) y nos queda:

$$M |1\rangle = i |2\rangle . \quad M |2\rangle = i |1\rangle .$$

Entonces el estado pasa a ser :

$$\cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) (\alpha' |abs\rangle + \beta' |2\rangle) \xrightarrow{\text{Espejos}} i \cos(\theta_1) |2\rangle + i \sin(\theta_1) \alpha' |abs\rangle - \sin(\theta_1) \beta' |1\rangle.$$

Al aplicar un segundo beam splitter (solo cambia  $\theta_1$  por  $\theta_2$  en la matriz

BS) obtenemos que :

$$i \cos(\theta_1) |2\rangle + i \sin(\theta_1) \alpha' |abs\rangle - \sin(\theta_1) \beta' |2\rangle \xrightarrow{\text{BS2}} -(\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \beta' \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)) |1\rangle + i \alpha' \sin(\theta_1) |abs\rangle + i(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \beta') |2\rangle.$$

Entonces las probabilidades obtenidas son:

$$P_{2D1} = |\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \beta' \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)|^2.$$

$$P_{2D2} = |\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \beta' \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)|^2.$$

$$P_{2Abs} = |\alpha' \sin(\theta_1)|^2.$$

Si consideramos exactamente el mismo procedimiento pero esta vez colocando el objeto semitransparente en el otro brazo del interferómetro las probabilidades que obtenemos son:

$$P_{1D1} = |\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \beta' + \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)|^2.$$

$$P_{1D2} = |\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - \beta' \cos(\theta_1) \cos(\theta_2)|^2.$$

$$P_{1Abs} = |\alpha' \cos(\theta_1)|^2.$$

Ahora bien veamos cual es la diferencia entre colocar el objeto en un brazo del interferómetro u otro, restemos las probabilidades:

$$P_{1D1} - P_{1D2} = (1 - \beta^2) \left( \frac{\cos(2\theta_1) - \cos(2\theta_2)}{2} \right).$$

$$P_{2D1} - P_{2D2} = (1 - \beta^2) \left( \frac{\cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2)}{2} \right).$$

Solo sucede que las probabilidades son las mismas cuando:

a)  $\beta = 1$  es decir transmitancia total.

b)  $\cos(2\theta_2) = 0$  es decir  $\theta_2 = \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi$ .

También se da una expresión para uno de los ángulos en términos de las probabilidades:

$$\theta_2 = \frac{1}{2}(\arccos((P_{1D2} - P_{1D1}) - (P_{1D1} - P_{2D1}))).$$

## 2. Avances

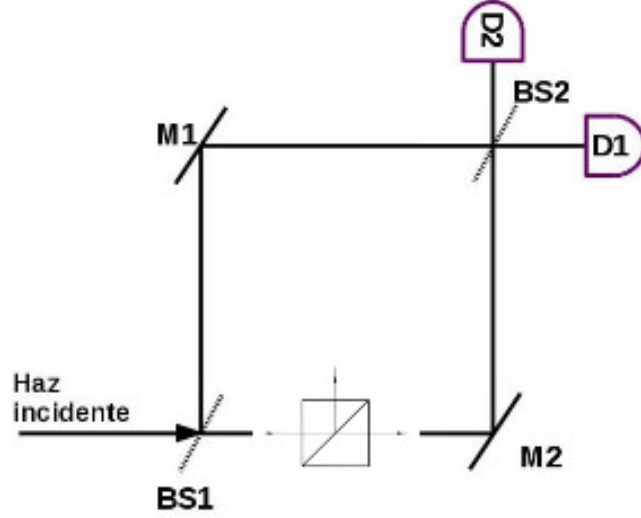


Figura 1: Mach Zehnder con BS como objeto semitransparente

Partimos de un fotón que va por el camino uno, luego de interactuar con el primer BS tenemos que:

$$|1\rangle \xrightarrow{\text{BS1}} \cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) |2\rangle.$$

Tenemos el objeto semitransparente (BS) en el brazo 2, anteriormente ya vimos como actúa un beam splitter sobre cada estado, considerando que el fotón reflejado se “pierde”

$$\cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) |2\rangle \xrightarrow{\text{BS}} \cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) (\cos(\theta_o) |2\rangle + i \sin(\theta_o) |abs\rangle).$$

Luego el haz pasa por los espejos esta vez tratemos los espejos en su versión más general:

$$M1 = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\gamma_1} \\ e^{i\gamma_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\gamma_2} \\ e^{i\gamma_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pero el espejo 1 solo esta en el camino 1 y el espejo 2 en el camino 2 de forma que:

$$\cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1)(\cos(\theta_o) |2\rangle + i \sin(\theta_o) |abs\rangle) \xrightarrow{\text{Espejos}} \cos(\theta_1)e^{i\gamma_1} |2\rangle + i \sin(\theta_1) \cos(\theta_o)e^{i\gamma_2} |1\rangle - \sin(\theta_1) \sin(\theta_o) |abs\rangle.$$

Luego el haz pasa por el segundo BS, ya sabemos como actúa sobre los estados:

$$\cos(\theta_1)e^{i\gamma_1} |2\rangle + i \sin(\theta_1) \cos(\theta_o)e^{i\gamma_2} |1\rangle - \sin(\theta_1) \sin(\theta_o) |abs\rangle \xrightarrow{\text{BS2}} \cos(\theta_1)e^{i\gamma_1} (\cos(\theta_2) |2\rangle + i \sin(\theta_2) |1\rangle) + i \sin(\theta_1) \cos(\theta_o)e^{i\gamma_2} (\cos(\theta_2) |1\rangle + i \sin(\theta_2) |2\rangle) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_o) |abs\rangle.$$

Reacomodando los términos obtenemos que el estado final es:

$$(\cos(\theta_1)e^{i\gamma_1} \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_o)e^{i\gamma_2}) |2\rangle - \sin(\theta_1) \sin(\theta_o) |abs\rangle + (i \cos(\theta_1) \sin(\theta_2)e^{i\gamma_1} + i \sin(\theta_1) \cos(\theta_o) \cos(\theta_2)e^{i\gamma_2}) |1\rangle.$$

y las probabilidades están dadas por:

$$P_{2D1} = |ie^{i\gamma_1} \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + ie^{i\gamma_2} \cos(\theta_o) \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)|^2.$$

$$P_{2D2} = |\cos(\theta_1) \cos(\theta_2)e^{i\gamma_1} - e^{i\gamma_2} \cos(\theta_o) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)|^2.$$

$$P_{2Abs} = |\sin(\theta_o) \sin(\theta_1)|^2.$$

De forma Totalmente análoga al considerar el BS en el otro brazo del interferómetro obtenemos las siguientes probabilidades:

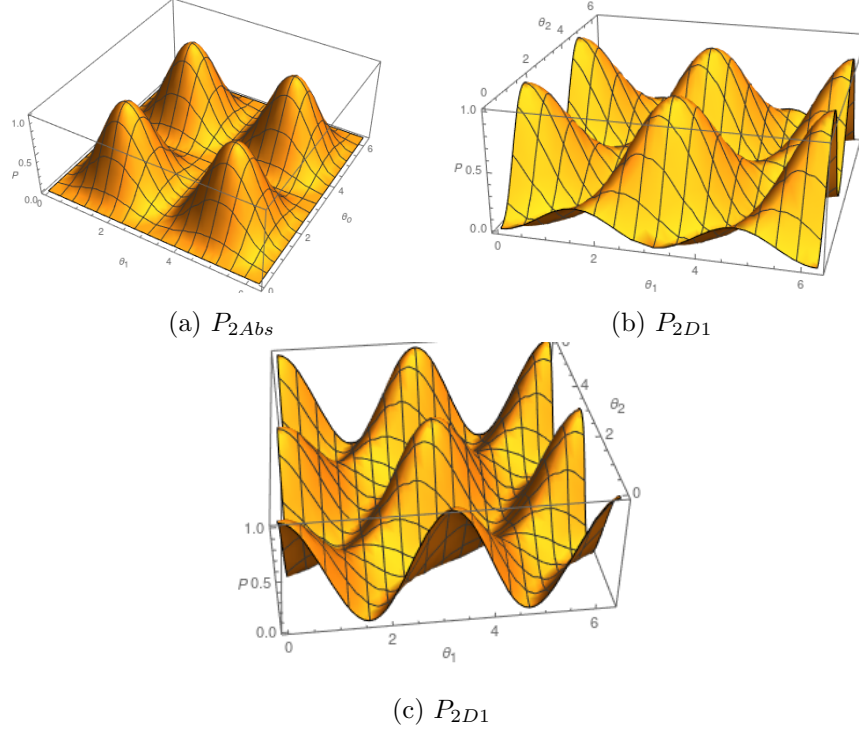


Figura 2: Distribuciones de probabilidad en el camino 2 para  $\theta_o = \frac{\pi}{3}$  y  $\gamma_2 - \gamma_1 = \pi$

$$P_{1D1} = |ie^{i\gamma_1} \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_o) + ie^{i\gamma_2} \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)|^2.$$

$$P_{1D2} = |\cos(\theta_1) \cos(\theta_o) \cos(\theta_2) e^{i\gamma_1} - e^{i\gamma_2} \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)|^2.$$

$$P_{1Abs} = |\sin(\theta_o) \cos(\theta_1)|^2.$$

Una vez realizado todo esto, nos damos cuenta que esto es totalmente consistente con el resultado publicado en la tesis de Zurika , ya que al hacer  $\beta' = \cos(\theta_o)$  y  $\alpha' = \sin(\theta_o)$  se obtiene exactamente el mismo resultado

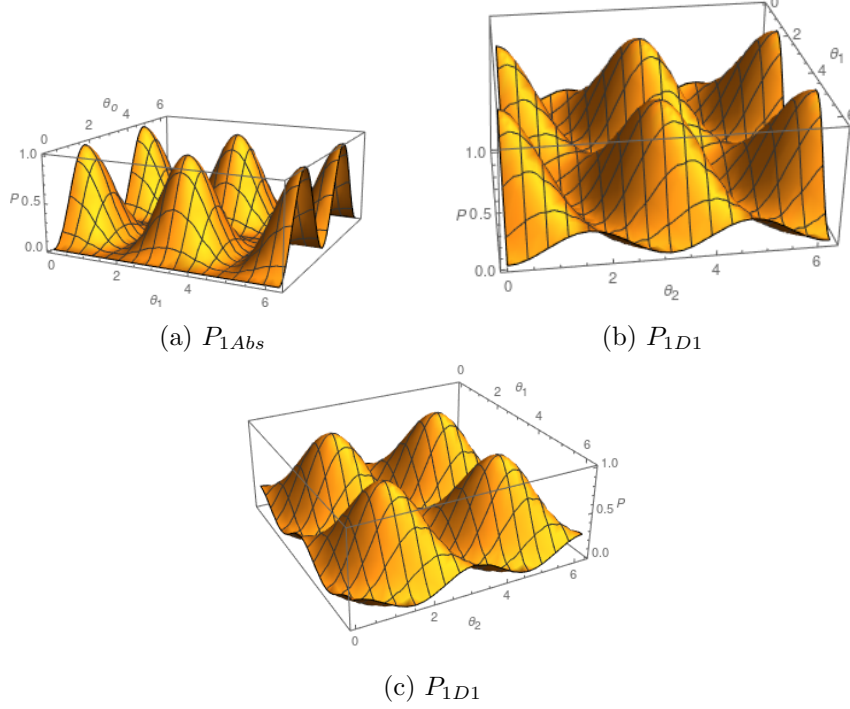


Figura 3: Distribuciones de Probabilidad en el camino 1 para  $\theta_o = \frac{\pi}{3}$  y  $\gamma_2 - \gamma_1 = \pi$

### 3. Chopper Óptico

Consideremos modelar el chopper mediante una onda cuadrada descrita por  $f(t) = \frac{\text{sgn}(\sin(\omega t)) + 1}{2}$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular mecánica del chopper dividida entre el número de pares de 'hueco-material' que asumimos del mismo tamaño (en caso de que sean de distinto tamaño esto puede ajustarse mediante la convolución de este tipo de señales)

La acción del chopper puede verse entonces como un operador diagonal de la forma (Diagonal porque suponemos que el lado con material del chopper es totalmente absorbente):

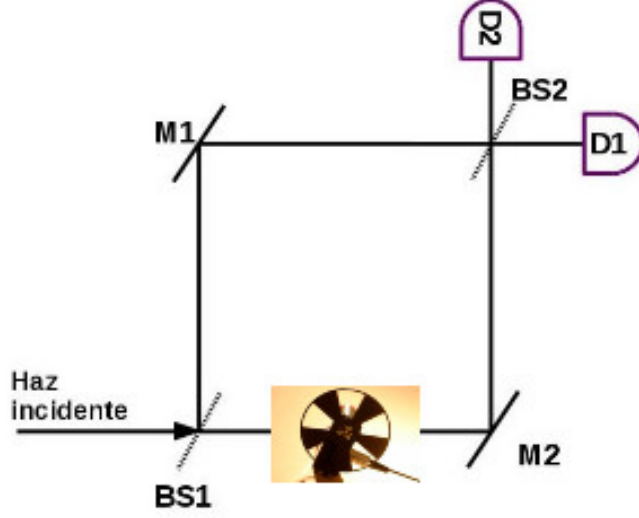


Figura 4: Mach Zehnder con chopper como objeto semitransparente

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\text{sgn}(\sin(wt))+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\text{sgn}(\sin(wt))+1}{2} \end{pmatrix}.$$

Verifiquemos que esta matriz es de hecho una operación unitaria, como es diagonal solo tenemos que verificar que el modulo al cuadrado de  $f$  es igual a 1, esto probándose que  $C^2$  es la identidad

$$|f|^2 = \frac{(\text{sgn}(\sin(wt))+1)^2}{4}.$$

La función signo al cuadrado es siempre 1 de forma que

$$|f|^2 = \frac{2(1+\text{sgn}(\sin(wt)))}{4}.$$

$$|f|^2 = f.$$

Vemos que esta es unitaria cuando estamos en el ciclo positivo del seno y nula cuando estamos en el ciclo negativo, es decir en el ciclo negativo tenemos absorción total, la probabilidad de absorción esta dada por:

$$a = 1 - f.$$



$$a = \frac{1 - \text{sgn}(\sin(wt))}{2}.$$

$$|a|^2 = \frac{2(1 - \text{sgn}(\sin(wt)))}{4}.$$

$$|a|^2 = a.$$

Con comportamiento contrario al de  $f$ , una vez planteado nuestro primer modelo juguete de un chopper podemos analizar que sucede si usamos este como objeto en un interferómetro de Mach-Zehnder :

Partimos de que el chopper está en el camino 2 y nuestro fotón entra por el camino 1, nuestro estado inicial es entonces el  $|1\rangle$ :

Al pasar por un BS este pasa a ser:

$$|1\rangle \xrightarrow{\text{BS1}} \cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) |2\rangle.$$

Luego, el efecto de la matriz del chopper es fácil de observar ya que esta es diagonal (añadimos también lo que sucede si es absorbido)

$$\cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) |2\rangle \xrightarrow{\text{Chopper}} \cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) f |2\rangle + i \sin(\theta_1) a |abs\rangle.$$

Al pasar por los espejos (los mismos operadores del caso anterior)

$$\cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) f |2\rangle + i \sin(\theta_1) a |abs\rangle \xrightarrow{\text{Espejos}} \cos(\theta_1) e^{i\gamma_1} |2\rangle + i \sin(\theta_1) f e^{i\gamma_2} |1\rangle + i \sin(\theta_1) a |abs\rangle.$$

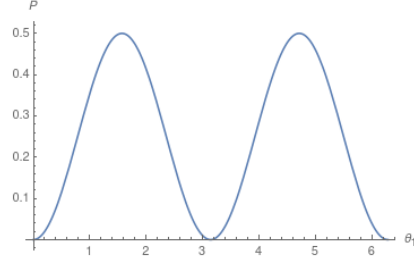
Y ahora pasamos por un segundo BS, y nuestro estado se convierte en

$$\cos(\theta_1) e^{i\gamma_1} |2\rangle + i \sin(\theta_1) f e^{i\gamma_2} |1\rangle + i \sin(\theta_1) a |abs\rangle \xrightarrow{\text{BS2}} \cos(\theta_1) e^{i\gamma_1} (\cos(\theta_2) |2\rangle + i \sin(\theta_2) |1\rangle) + i \sin(\theta_1) e^{i\gamma_2} f (\cos(\theta_2) |1\rangle + i \sin(\theta_2) |2\rangle) + i \sin(\theta_1) a |abs\rangle.$$

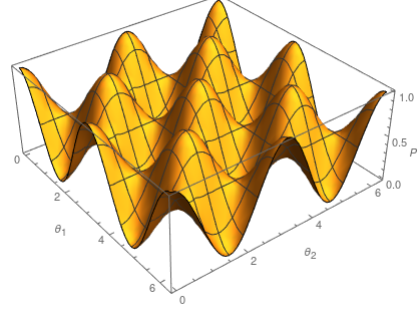
Al agrupar los términos, obtenemos que el estado final es:

$$i(e^{i\gamma_1} \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + f e^{i\gamma_2} \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)) |1\rangle + (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) e^{i\gamma_1} - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) f e^{i\gamma_2}) |2\rangle + i \sin(\theta_1) a |abs\rangle.$$

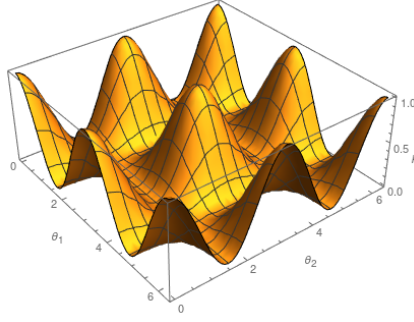
Por lo que las probabilidades de detección están dadas por :



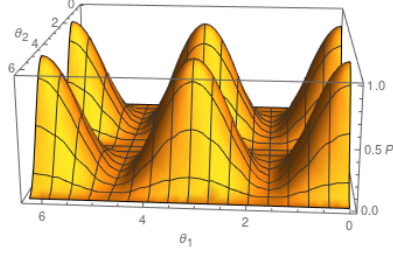
(a)  $P_{1Abs}$



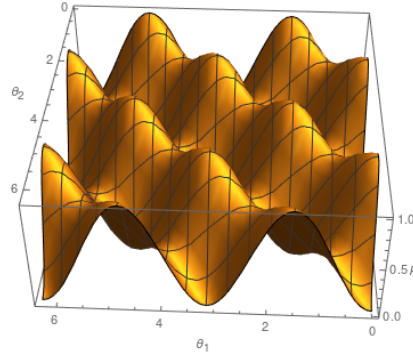
(b)  $P_{2D1}$  en su primer estado



(c)  $P_{2D1}$  en su segundo estado



(d)  $P_{1D1}$  en su primer estado



(e)  $P_{1D1}$  en su segundo estado

Figura 5: Distribuciones de probabilidad en el camino 2 para  $\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{\pi}{2}$

$$P_{2D1} = |e^{i\gamma_1} \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + f e^{i\gamma_2} \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)|^2.$$

$$P_{2D2} = |\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) e^{i\gamma_1} - f \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) e^{i\gamma_2}|^2.$$

$$P_{2Abs} = |a \sin(\theta_1)|^2.$$

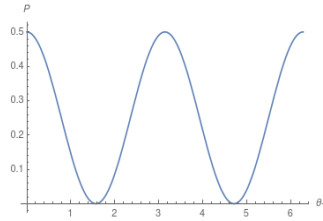
Desarrollando un poco más:

$$P_{2D1} = \cos^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) + f^2 \sin^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) + \frac{f \sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2) \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{2}.$$

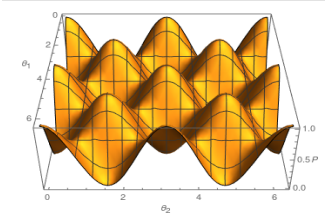
$$P_{2D2} = \cos^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) - f^2 \sin^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) - \frac{f \sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2) \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{2}.$$

$$P_{2Abs} = a^2 \sin^2(\theta_1).$$

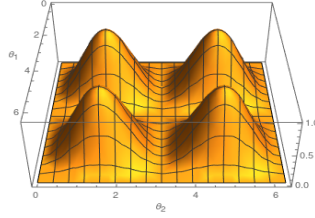
Realizando exactamente el mismo procedimiento esta vez colocando el chopper en el otro brazo del interferómetro se llega a que las probabilidades están dadas por:



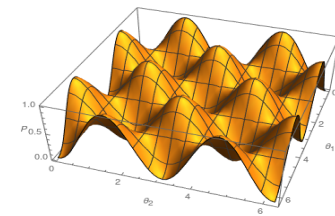
(a)  $P_{1Abs}$



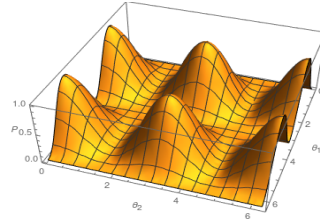
(b)  $P_{2D1}$  en su primer estado



(c)  $P_{2D1}$  en su segundo estado



(d)  $P_{1D1}$  en su primer estado



(e)  $P_{1D1}$  en su segundo estado

Figura 6: Distribuciones de probabilidad en el camino 1 para  $\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
P_{1D1} &= \cos^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) f^2 + \sin^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) + \frac{f \sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2) \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{2}. \\
P_{1D2} &= \cos^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) f^2 - \sin^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) - \frac{f \sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2) \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{2}. \\
P_{2Abs} &= a^2 \cos^2(\theta_1).
\end{aligned}$$

Algo notable es que, ya que  $f$  es una onda cuadrada  $f^2 = f$  haciendo uso de esto y restando las probabilidades en ambos brazos obtenemos que:

$$\begin{aligned}
P_{1D1} - P_{1D2} &= (1 - f) \left( \frac{\cos(2\theta_1) - \cos(2\theta_2)}{2} \right). \\
P_{2D1} - P_{2D2} &= (1 - f) \left( \frac{\cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2)}{2} \right).
\end{aligned}$$

Recordemos que  $1 - f = a$

$$\begin{aligned}
P_{1D1} - P_{1D2} &= (a) \left( \frac{\cos(2\theta_1) - \cos(2\theta_2)}{2} \right). \\
P_{2D1} - P_{2D2} &= (a) \left( \frac{\cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2)}{2} \right).
\end{aligned}$$

De allí podemos obtener alguno de los ángulos bien sea  $\theta_1$  o  $\theta_2$  mediante la suma y la resta:

$$\begin{aligned}
P_{1D1} - P_{1D2} + P_{2D1} - P_{2D2} &= (a)(\cos(2\theta_1)). \\
P_{1D1} - P_{1D2} - P_{2D1} - P_{2D2} &= (-a)(\cos(2\theta_2)).
\end{aligned}$$

De allí que :

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{P_{1D1} - P_{1D2} + P_{2D1} - P_{2D2}}{a} \right). \\
\theta_2 &= \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{P_{1D1} - P_{1D2} - P_{2D1} - P_{2D2}}{a} \right).
\end{aligned}$$

## 4. Chopper Óptico Semitransparente

Anteriormente consideramos a nuestro chopper óptico como un objeto semitransparente, Ahora consideremos el chopper como un objeto semitransparente, esto se puede hacer de una manera muy directa considerando que:

$$\begin{aligned}
f_{hueco} &= \frac{1 + \text{sgn}(\sin(wt))}{2}. \\
f_{material} &= \left( \frac{1 - \text{sgn}(\sin(wt))}{2} \right) \beta. \\
f &= f_{material} + f_{hueco}.
\end{aligned}$$

Donde  $\beta$  es el coeficiente de transmisión de nuestro el chopper , el cual puede ser una función dependiente de  $\omega$  , la matriz C que describe nuestro chopper seria entonces:

$$C = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

Definimos:

$$a = \left( \frac{1 - \text{sgn}(\sin(\omega t))}{2} \right) \alpha.$$

Donde  $\alpha$  es el coeficiente de absorción del chopper , escrito de esta forma tenemos la misma notación que en el caso pasado, y podemos usar el mismo procedimiento con la excepción de que en este caso:

$$|a|^2 = a \alpha^2.$$

$$|f_{transmission}|^2 = f_{transmission} \beta^2.$$

Osea que podemos generalizar para obtener:

$$|a|^n = a \alpha^n.$$

$$|f_{transmission}|^n = f_{transmission} \beta^n.$$

Y entonces:

$$|f|^2 = \left( \frac{\alpha^2}{2} - \beta \right) \text{sgn}(\omega t) + 1 .$$

Al sustituir este factor en el ejercicio anterior,obtenemos los resultados para un chopper semitransparente:

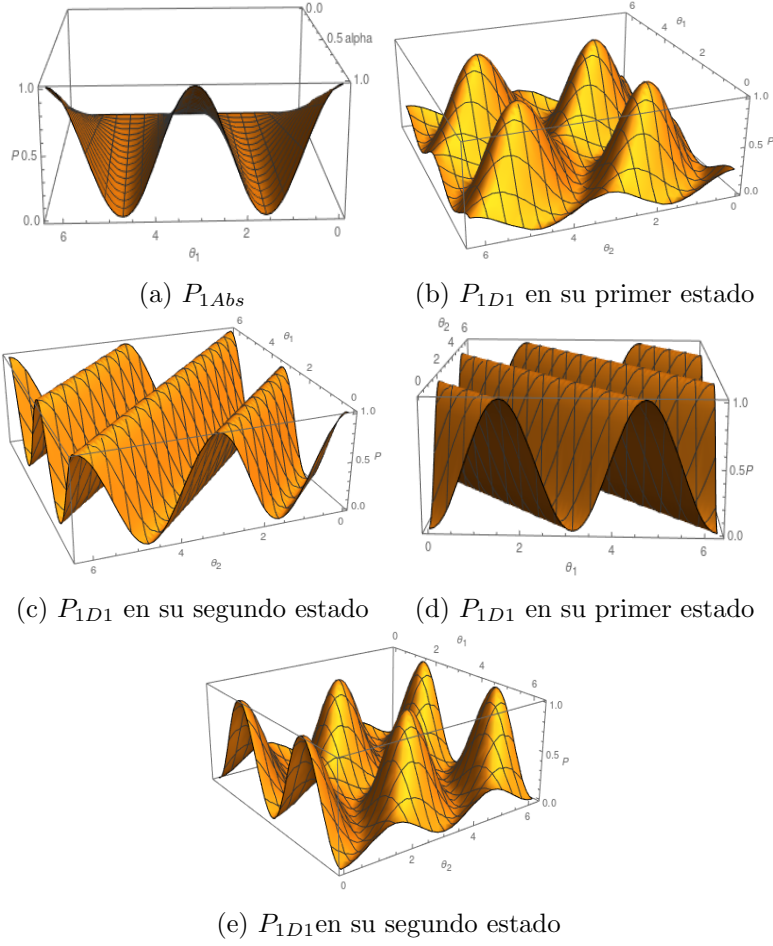


Figura 7: Distribuciones de probabilidad en el camino 1 para  $\gamma_2 - \gamma_1 = 0$  y  $\beta = 0,5$

$$\begin{aligned}
 P_{1D1} &= \cos^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) f^2 + \sin^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) + \frac{f \sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2) \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{2}, \\
 P_{1D2} &= \cos^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) f^2 - \sin^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) - \frac{f \sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2) \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{2}, \\
 P_{1Abs} &= a^2 \cos^2(\theta_1).
 \end{aligned}$$

En el otro Brazo del interferómetro:

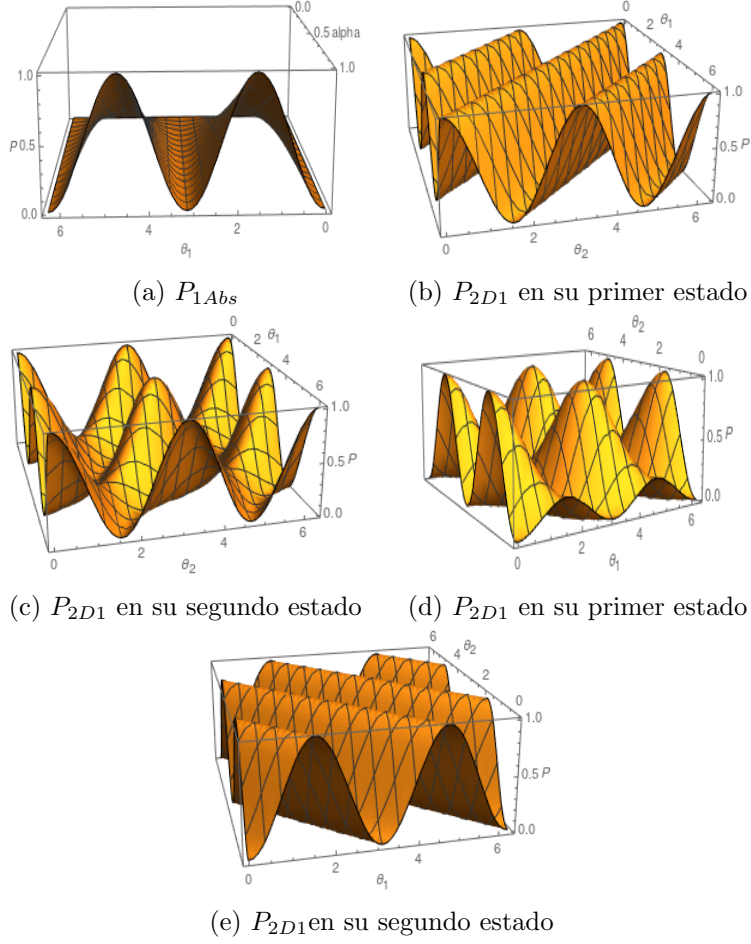


Figura 8: Distribuciones de probabilidad en el camino 2 para  $\gamma_2 - \gamma_1 = 0$  y  $\beta = 0,5$

$$\begin{aligned}
 P_{2D1} &= \cos^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) + f^2 \sin^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) + \frac{f \sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2) \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{2}, \\
 P_{2D2} &= \cos^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) - f^2 \sin^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) - \frac{f \sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2) \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{2}, \\
 P_{2Abs} &= a^2 \sin^2(\theta_1).
 \end{aligned}$$

## 5. Caso n Beam Splitters

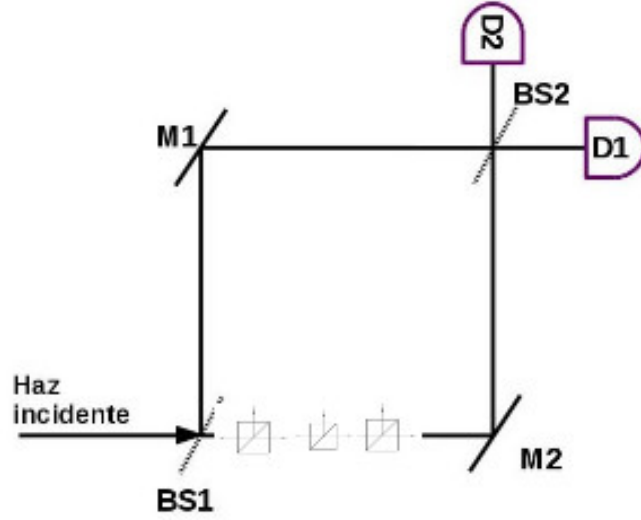


Figura 9: Mach Zehnder con n BS como objeto semitransparente

En el caso de tener Varios Beam Splitters como Objetos Semitransparentes lo que sucede es que , al pasar por el primer Beam Splitter tenemos los estados :

$$B_1 |1\rangle = \cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) |abs\rangle$$

$$B_1 |2\rangle = \cos(\theta_1) |2\rangle + i \sin(\theta_1) |abs\rangle$$

Donde consideramos que cuando el fotón es reflejado , este sale de nuestro interferómetro y por eso lo perdemos,por lo tanto un segundo Beam Splitter actúa solo sobre el estado que fue transmitido de forma que

$$B_2(\cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) |abs\rangle) = \cos(\theta_1) B_2 |1\rangle + i \sin(\theta_1) |abs\rangle$$

$$B_2(\cos(\theta_1) |2\rangle + i \sin(\theta_1) |abs\rangle) = \cos(\theta_1) B_2 |2\rangle + i \sin(\theta_1) |abs\rangle$$



el estado se convierte en

$$B_2 B_1 |1\rangle = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) |1\rangle + iA |abs\rangle$$

Veamos que sucede con un tercer Beam Splitter

$$B_3 B_2 B_1 |1\rangle = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) |1\rangle + iB |abs\rangle$$

Vemos entonces que el caso de n Beam splitters es fácil de generalizar :

$$B^n = B_n \dots B_3 B_2 B_1 |1\rangle = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \dots \cos(\theta_n) |1\rangle + iC |abs\rangle$$

Podemos encontrar C , Considerando que el operador debe ser unitario (esto por que consideramos que ninguno de los n beam splitters absorbe fotones )

$$B^n |1\rangle = \prod_{i=1}^n \cos(\theta_i) |1\rangle + iD |abs\rangle$$

De forma analoga podemos encontrar que :

$$B^n |2\rangle = \prod_{i=1}^n \cos(\theta_i) |2\rangle + iE |abs\rangle$$

Pasamos a Encontrar D y E mediante normalización obteniendo que:

$$E = D = \sqrt{1 - \prod_{i=1}^n \cos^2(\theta_i)}$$

De forma que la representación matricial de n Beam Splitters para nuestro caso seria :

$$B^n = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^n \cos(\theta_i) & i\sqrt{1 - \prod_{i=1}^n \cos^2(\theta_i)} \\ i\sqrt{1 - \prod_{i=1}^n \cos^2(\theta_i)} & \prod_{i=1}^n \cos(\theta_i) \end{pmatrix}.$$

Pasamos a usar este arreglo de BSs como un objeto semitransparente en el brazo 2:

$$\begin{aligned} |1\rangle &\xrightarrow{BS1} \cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) |2\rangle \xrightarrow{B^n} \cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) \prod_{i=3}^n \cos(\theta_i) |2\rangle - \\ &\sin(\theta_1) \sqrt{1 - \prod_{i=3}^n \cos^2(\theta_i)} |Abs\rangle \xrightarrow{Espejos} \cos(\theta_1) e^{i\gamma_1} |2\rangle + i \sin(\theta_1) \prod_{i=3}^n \cos(\theta_i) e^{i\gamma_2} |1\rangle - \\ &\sin(\theta_1) \sqrt{1 - \prod_{i=3}^n \cos^2(\theta_i)} |Abs\rangle \xrightarrow{BS2} (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) e^{i\gamma_1} - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) e^{i\gamma_2} \prod_{i=3}^n \cos(\theta_i)) |2\rangle + \\ &i(\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) e^{i\gamma_1} + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) e^{i\gamma_2} \prod_{i=3}^n \cos(\theta_i)) |1\rangle - \sin(\theta_1) \sqrt{1 - \prod_{i=3}^n \cos^2(\theta_i)} |Abs\rangle. \end{aligned}$$

Por lo cual a la salida las probabilidades están dadas por:

$$P_{D1} = |\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) e^{i\gamma_1} + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) e^{i\gamma_2} \prod_{i=3}^n \cos(\theta_i)|^2.$$

$$P_{D2} = |\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) e^{i\gamma_1} - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) e^{i\gamma_2} \prod_{i=3}^n \cos(\theta_i)|^2.$$

$$P_{Abs} = \sin^2(\theta_1)(1 - \prod_{i=3}^n \cos^2(\theta_i)).$$

## 6. Análisis con retardador de fase

Podemos caracterizar des alineamiento en el interferómetro si consideramos un elemento retardador de fase en alguno de los brazos del interferómetro, para ello haremos uso de un elemento óptico llamado retardador de fase , básicamente este tan solo añade una fase al camino óptico su representación matricial es:

$$Retardador = \begin{pmatrix} e^{ic} & 0 \\ 0 & e^{ik} \end{pmatrix}.$$

Repitamos el análisis al colocar un elemento como este en ambos del interferómetro:

$$\begin{aligned} |1\rangle &\xrightarrow{\text{BS1}} \cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) |2\rangle \xrightarrow[\text{Semitransparente}]{\text{Objeto}} \cos(\theta_1) |1\rangle + i \sin(\theta_1) (\alpha' |abs\rangle + \\ &\beta' |2\rangle) \xrightarrow[\text{de fase}]{\text{Retardador}} \cos(\theta_1) e^{ic} |1\rangle + i \beta' \sin(\theta_1) e^{ik} |2\rangle + i \alpha' \sin(\theta_1) |abs\rangle \xrightarrow{\text{Espejos}} \\ &\cos(\theta_1) e^{i(\gamma'_1+c)} |2\rangle + i \sin(\theta_1) \alpha' |abs\rangle + i \sin(\theta_1) \beta' e^{i(\gamma'_2+k)} |1\rangle. \end{aligned}$$

Aquí podemos detenernos ya que si hacemos  $\gamma'_2 + k = \gamma_2$  y  $\gamma'_1 + c = \gamma_1$  la expresión se reduce a la expresión que teníamos para el BS como objeto semitransparente con  $\beta' = \cos(\theta_o)$  y  $\alpha' = i \sin(\theta_o)$  por lo que nuestro uso de la matriz mas general para los espejos en vez de modelar un espejo perfecto con la matriz  $M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$  ya nos permite modelar retardadores de fase , y por lo tanto también permite de cierta forma considerar desperfectos en el alineamiento del interferómetro.

## 7. Analisis de N Interferómetros

La notación utilizada en el resto de este texto no es la misma que se usa frecuentemente en la literatura para interferómetros anidados, para coincidir con la literatura tomamos la notación de Kwait et al. [2], donde tenemos un interferómetro de la siguiente forma:

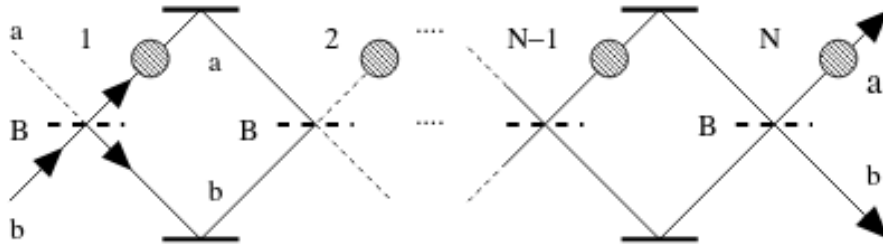


Figura 10: Mach Zehnders Anidados con objeto semitransparente

Nuestra base sigue siendo binaria pero en vez de ser Horizontal-Vertical, sera camino a-camino b, es decir abajo o arriba , denotaremos al camino b con el  $|2\rangle$  y al camino a con el  $|1\rangle$ , una de las grandes ventajas de esta base es que los espejos en esta son diagonales, ya que mantienen a nuestro fotón en el mismo camino, consideraremos todos los espejos iguales , por lo que incluso al inducir una fase esta sera global por lo que no afectara el sistema, Nuestro objeto semitransparente se modelara como una diagonal no unitaria tal como lo hizo Azuma [3] para un objeto semitransparente

Caso de Azuma:

$$A_{Azuma} = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Caso cuando el objeto semitransparente es un BS:

$$Retardador = \begin{pmatrix} \cos(n) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El estado final se obtiene al aplicar los operadores sobre el estado inicial en este caso denotado por  $|2\rangle$ , consideremos que el interferómetro esta libre , es decir que no hay objeto semitransparente ,entonces los únicos operadores que actúan en el interferómetro son los  $BS$ , veamos que sucede al aplicarlos:

$$BS_i \times BS_{i+1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & i \sin(\theta_i) \\ i \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{i+1}) & i \sin(\theta_{i+1}) \\ i \sin(\theta_{i+1}) & \cos(\theta_{i+1}) \end{pmatrix}$$

$$BS_i \times BS_{i+1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \cos(\theta_{i+1}) - \sin(\theta_i) \sin(\theta_{i+1}) & i(\cos(\theta_{i+1}) \sin(\theta_i) + \cos(\theta_i) \sin(\theta_{i+1})) \\ i(\cos(\theta_{i+1}) \sin(\theta_i) + \cos(\theta_i) \sin(\theta_{i+1})) & \cos(\theta_i) \cos(\theta_{i+1}) - \sin(\theta_i) \sin(\theta_{i+1}) \end{pmatrix}$$

Usando las identidades de suma de ángulos obtenemos que:

$$BS_i \times BS_{i+1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i + \theta_{i+1}) & i \sin(\theta_i + \theta_{i+1}) \\ i \sin(\theta_i + \theta_{i+1}) & \cos(\theta_i + \theta_{i+1}) \end{pmatrix}$$

Si suponemos N BS iguales entonces obtenemos:

$$BS^N = \begin{pmatrix} \cos(N\theta) & i \sin(N\theta) \\ i \sin(N\theta) & \cos(N\theta) \end{pmatrix}$$

Ahora supongamos  $\theta = \frac{\pi}{2N}$

$$BS^N = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que seguro detectaremos en el camino contrario al que se inicio, con esto en mente analicemos este arreglo de BS con un objeto semitransparente en el interferómetro, Primero pasamos por un BS , luego por el objeto y luego por otro BS , y así sucesivamente , tenemos N BS en total y N-1 objetos semitransparentes por lo que podemos ver fácilmente que el estado final del objeto esta dado por :

$$|2\rangle \xrightarrow[\text{Anidados}]{\text{Interferometros}} (B \times A)^{N-1} B |2\rangle$$

y las probabilidades de detección son entonces:

$$P_{D1} = |\langle 2 | (B \times A)^{N-1} B |2\rangle|^2.$$

$$P_{D2} = |\langle 1 | (B \times A)^{N-1} B |2\rangle|^2.$$

$$P_{Abs} = 1 - P_{D1} - P_{D2}.$$

Para obtener las probabilidades del sistema así como el comportamiento de ellas con respecto a  $N$ , utilizamos una computadora para el calculo obteniendo los siguientes resultados:

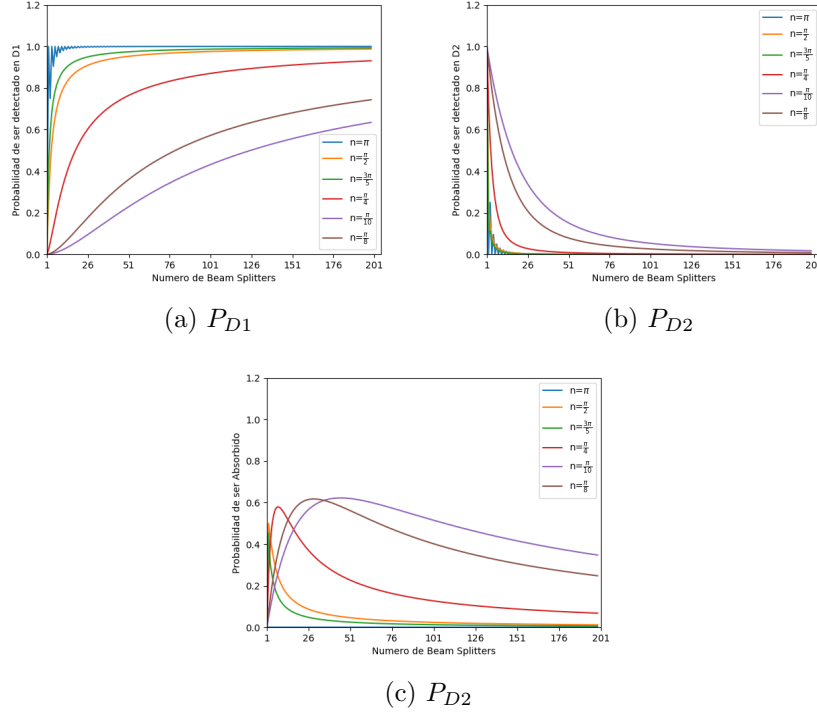
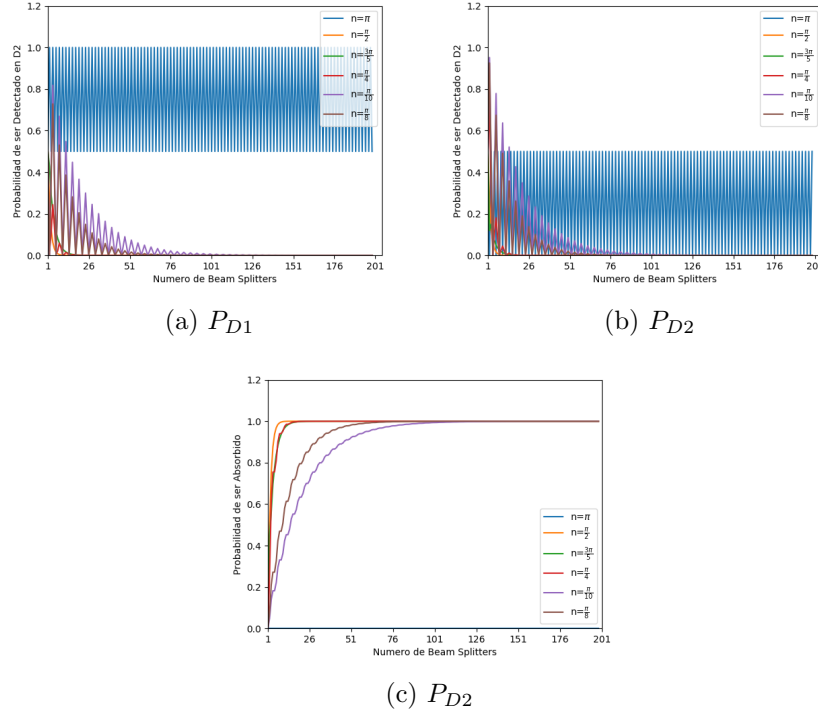


Figura 11: Comportamiento de las probabilidades cuando tenemos como objeto semitransparente  $BS(n)$  para distintos valores de  $n$ ,  $D1$  esta en el camino b, y  $D2$  en el camino a

Un caso de interés podría ser que pasa si tenemos un solo tipo de BS para toda  $N$ , uno podría pensar que los resultados podrían ser interesantes, y ampliar la probabilidad de detección, una vez realizado el análisis de la misma forma vemos que si es posible ampliar la probabilidad pero ciertamente el método no es tan efectivo como el caso anterior y para la mayoría de los valores la probabilidad de absorción tiende a 1 bastante rápido como

podemos observar a continuación:



Mientras que en el ciclo negativo la función signo vale -1 y entonces:

$$f_{negativo} = \beta.$$

Por conveniencia redefinimos  $\beta = \sqrt{T}$ , de tal forma que en el ciclo positivo tenemos el caso estudiado anteriormente del interferómetro anidado sin objeto (también correspondiente a  $\beta = 1$ ), pero en el ciclo negativo tenemos el caso de Azuma, podemos repetir el procedimiento anterior para este caso y nuestra probabilidad alternara entre el caso  $\beta = 1$  y alguno de los demás según cual sea la transmitancia de nuestro chopper:

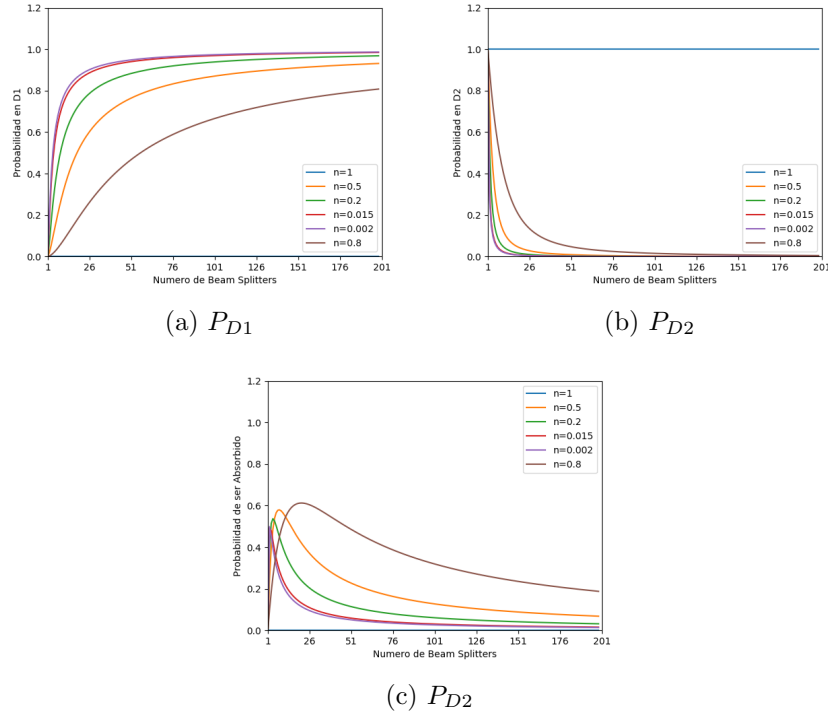


Figura 13: Comportamiento de las probabilidades cuando tenemos como objeto semitransparente BS(n) para distintos valores de n, y el mismo tipo de Bs para toda N, D1 esta en el camino b, y D2 en el camino a

## Bibliografía

- [1] Z. Blanco-García. Mediciones no destructivas en mecánica cuántica. M.Sc. Thesis(Advisors: O. Rosas-Ortiz , V. M. Velázquez) (2014).
- [2] P. Kwiat, H. Weinfurter, T. Herzog, A. Zeilinger, and M. A. Kasevich. Interaction-free measurement,. *Phys. Rev. Lett.*, 74:4763–4766, (1995).
- [3] Hiroo Azuma. Interaction-free measurement with an imperfect absorber. *Phys. Rev. A*, 74:054301, Nov 2006.