BÖLÜM 4
KLASİK OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ
(KISITLI OPTİMİZASYON)

4.1 GİRİŞ

Önceki bölümlerde de belirtildiği gibi optimizasyon problemlerin çoğunluğu kısıtlayıcı fonksiyonlar içermektedir. Kısıtlamasız optimizasyon problemlerde optimum değeri hedef fonksiyonun yapısı belirlemektedir. Halbuki kısıtlamalı optimizasyonda, aşağıdaki örnekte de gösterildiği gibi, kısıtlayıcı fonksiyonlar optimum çözümün bulunmasında önemli rol oynarlar.

Örnek 4.1:

Aşağıdaki optimizasyon probleminde hedef fonksiyonu minimum yapan değeri bulunuz.

$$\min\ f(x) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2$$

s.t.

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

$$g_2(x) = -x_1 \le 0$$

$$g_3(x) = -x_2 \le 0$$

Kısıtlamalı optimizasyon problemleri, kısıtlayıcının tipine bağlı olarak; eşitlik kısıtlayıcılı (Equality Constraint) ve eşitsizlik kısıtlayıcılı (Inequality Constraint) olmak üzere ikiye ayrılır ve her iki durum için farklı yaklaşımlar optimum çözümü elde etmek için kullanılır.

4.1.0.1 Regular point (Düzenli nokta)

Kısıtlayıcılı optimizasyon problemlerinin çözümleri için geliştirilen lagrange yaklaşmı içeren metotlar optimum x* noktasının regular (düzenli) nokta olması gerekliliği üzerine kuruludur. **x*** noktası öyle bir noktadır ki bu noktada eşitlik kısıtlayıcıları 0'a eşit (active constraints) ve bu kısıtlayıcıların gradyantları (1. türevleri) birbirlerinden lineer olarak bağımsızdırlar (lineer independency).

Lineer olarak bağımsızlık aşağıdaki özellikler ile verilir:

- iki vektörün gradyantı birbirine paralel olmamalıdır
- herhangi bir vektörün gradyantı diğer vektörlerin gradyantlarının bir lineer fonksiyonu olmamalıdır.

Herhangi iki veya daha fazla vektörün lineer olarak bağımsız veya bağımlı olduğunu belirlemek için bu vektörler lineer formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + ... + x_k a^{(k)} = 0 \text{ yada } \mathbf{Ax} = 0 \qquad (4.1)$$

Burada $a^{(i)}$ vektörleri temsil etmektedir. Eğer bu denklemin tek çözümü x=0 ise bu vektörler lineer olarak bağımsızdırlar. Aksi durumda vektörler lineer olarak bağımlıdırlar. Burada tanımlanan vektörler, kısıtlayıcıların tasarım değişkenlerine göre oluşturulmuş gradyantlarıır.

Örnek 4.2:

Aşağıda verilen vektörlerin lineer olarak bağımız olup olmadıklarını kontrol ediniz.

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Geometrik olarak lineer bağımlı veya bağımsızlık aşağıdaki örenklerle daha detaylı olarak verilebilir:

4.2 EŞİTLİK KISITLAYICILARI

Eşitlik kısıtlayıcıları aşağıdaki forma sahip optimizasyon problemlerini ihtiva eder:

$$\min f(x)$$

s.t.

$$g_j(x) = 0, \quad j = 1,2,...m$$

$$x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$$

Burada m ve n sırasıyla kısıtlayıcı fonksiyonların sayısını ve tasarım değişkenini göstermektedir. Optimum çözüm elde etmek için $m \le n$ olmak zorundadır. Eğer $m > n$ ise problem aşırı tanımlanmış olur (overdefined), yani çok fazla sayıda kısıtlayıcı içermekte olduğu anlamına gelir ve çözümü yoktur. Eşitlik kısıtlayıcılı optimizasyon problemlerin çözümünde çoğunlukla aşağıdaki metotlardan birisi kullanılmaktadır.

- Direkt yerleştirme metodu (direct substitution)
- Kısıtlayıcı değerlendirme (constrained evaluation)
- Lagrange çarpanları (Lagrange multipliers)

Bu tür optimizasyon problemleri için gerek ve yeter şart yukarda verilen metotlara bağlı olarak tanımlanır.

4.2.1 DİREKT YERLEŞTİRME METODU

Direkt yerleştirme metodunda, kısıtlayıcı fonksiyonlardan tasarım değişkenleri çekilerek hedef fonksiyona yazılır ve dolayısıyla problem, kısıtlamasız optimizasyon problemi halini alır. Yani, n tasarım değişkeni ve m kısıtlayıcı fonksiyona sahip bir optimizasyon problemi, teorik olarak m eşitlik kısıtlayıcı çözülür ve m değişken geri kalan n-m değişken cinsinden ifade edilir. Bu ifadeler hedef fonksiyona yazıldığında kısıtlayıcı fonksiyonu içermeyen optimizasyon problemi elde edilir ve kısıtlamasız optimizasyon teknikleri uygulanarak çözüm elde edilir.

Teorik olarak basit bir yaklaşım olsa da, pratikte uygulama güçlükleri vardır. Pek çok pratik problemde kısıtlayıcı fonksiyonlar nonlinear yapıdadır ve bunları m değişkene karşılık n-m değişken cinsinden ifade edilmesi oldukça zordur.

Örnek 4.3:

Sabit bir V hacmine sahip olacak şekilde iki tarafı kapalı bir silindirik tankı minimum maliyette imal etmek için gerekli ölçüleri bulunuz. Maliyet olarak kullanılan metal levhanın alanı dikkate alınacaktır. Metal levhanın birim maliyetini C YTL olarak kabul ediniz. Tankın yarıçapı R ve yüksekliğini l olarak alınız.

4.2.2 LAGRANGE ÇARPANLARI METODU

Lagrange çarpanları metodu optimizasyon teorisinde ve optimizasyonda kullanılan sayısal yöntemlerde oldukça önemli bir yer tutmaktadır.

Lagrange çarpanları metodunu tanımlamak için aşağıdaki örnek dikkate alınmıştır.

Örnek 4.4:

Aşağıdaki optimizasyon probleminde hedef fonksiyonu minimum yapan x_1 ve x_2 değeri bulunuz.

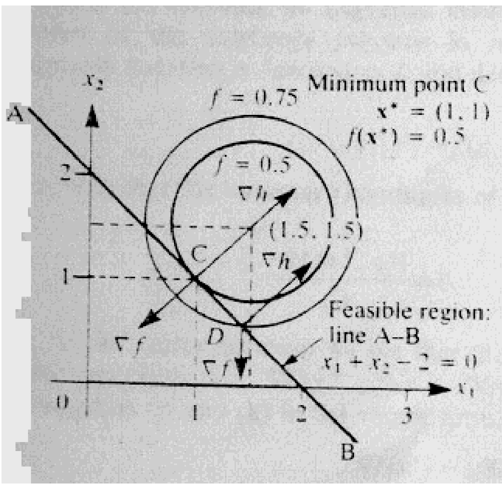
$$\min\ f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2$$

s.t.

$$h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

Çözüm 3.3:

Bu problem iki tasarım değişkenine sahip olduğundan grafiksel optimizasyon uygulanarak çözümü elde edilebilir ve elde edilen çözüm aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Problemin grafiksel çözümü

A-B doğrusu kısıtlayıcı fonksiyonu ve feasible alanı göstermektedir. Bu nedenle optimum çözüm bu çizgi üzerinde olmalıdır. Hedef fonksiyon ise merkezi (1.5,1.5) olan bir çember denklemini göstermektedir. Şekilde hedef fonksiyonun 0.5 ve 0.75 değerlerine karşılık gelen izo çizgileri gösterilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi optimum nokta C noktasıdır.

4.2.2.1 Lagrange çarpanlarına giriş

Yukarıda verilen örnekte C noktasında hangi şartların sağlandığına bakalım. Optimum nokta $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ olarak gösterilsin. Lagrange çarpanlarını belirlemek ve tanımlamak için eşitlik kısıtlayıcısı bir değişkene göre çözersek;

$$x_2 = \phi(x_1) \tag{4.2}$$

Burada ϕ x_1'e ait bir fonksiyon olsun. Yukarıdaki örnek için aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\phi(x_1) = -x_1 + 2 \tag{4.3}$$

Denklem (4.2) hedef fonksiyonunda yazılırsa, x_2 ifadelerden yok edilmiş olur ve sadece x_1'e ait optimizasyon problemine çevrilmiş olur:

$$\min f(x_1, \phi(x_1)) \tag{4.4}$$

Bu örnek için hedef fonksiyonu aşağıdaki gibi belirlenir:

$$f(x_1) = (x_1 - 1.5)^2 + (-x_1 + 2 - 1.5)^2$$

Bu fonksiyonun gerek şartı df / dx_1 yazılır ve çözülürse aday nokta $x_1^* = 1$ elde edilir. Bu aday noktada hedef fonksiyonun değeri 0.5 olarak hesaplanır. Bu aday noktanın gerçekten lokal minimum noktayı verip vermediği ise yeter şart $d^2 f / dx_1^2$ şartına bakılır ve bu örnek için bu şartı sağladığından, bu noktalar şekilde de görüldüğü gibi gerçekten lokal minimum noktayı verir.

Yukarıdaki çözümde tasarım değişkenleri açık bir şekilde bir fonksiyonda ifade edilebilmektedir. Ancak çoğu pratik problemler için böyle bir fonksiyonu tanımlamanın imkanı yoktur. Böyle bir durumda aşağıda ki adımlar gerçekleştirildiğinde Lagrange çarpanlarının işlemin doğası gereği ortaya çıktığı görülecektir.

Denklem (4.3) için gerek şart yazıldığında yani df / dx_1 hesaplandığında aşağıdaki ifade türev alımındaki zincir kuralından elde edilir:

$$\frac{df(x_1,x_2)}{dx_1} = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = 0 \tag{4.5}$$

x_2 yerine $x_2 = \phi(x_1)$ yazılırsa yukarıdaki denklem optimum noktada (x_1^*, x_2^*) aşağıdaki biçimi alır:

$$\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}\frac{d\phi}{dx_1} = 0 \tag{4.6}$$

ϕ fonksiyonu bilinmediğinden yukarıdaki denklemdeki $d\phi / dx_1$ ifadesi yok edilmesi gerekir. Bunun için eşitlik kısıtlayıcısı $h = (x_1, x_2)$ dikkate alınarak optimum noktada (x_1^*, x_2^*) türevi alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{dh(x_1^*,x_2^*)}{dx_1} = \frac{\partial h(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial h(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}\frac{d\phi}{dx_1} = 0 \tag{4.7}$$

Bu ifadeden $d\phi / dx_1$ ifadesi çekilirse

$$\frac{d\phi}{dx_1} = -\frac{\partial h(x_1^*,x_2^*)/\partial x_1}{\partial h(x_1^*,x_2^*)/\partial x_2} \tag{4.8}$$

Bu ifade, yukarıda hedef fonksiyon için yazılan denkleme yazılırsa:

$$\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}\left(\frac{\partial h(x_1^*,x_2^*)/\partial x_1}{\partial h(x_1^*,x_2^*)/\partial x_2}\right) = 0 \tag{4.9}$$

elde edilir.

Eğer

$$\nu = -\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial h(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2} \tag{4.10}$$

olarak tanımlanırsa aşağıdaki hali alır:

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial h(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0 \tag{4.11}$$

Benzer durum x_2^* için aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial h(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0 \tag{4.12}$$

Bu iki denklem ve $h(x_1, x_2) = 0$ ifadesi bir noktanın aday nokta olabilmesi için gerek şartları verir ve bu denklemleri ihlal eden herhangi bir nokta aday nokta olamaz. Buradaki ν skaler büyüklük lagrange çarpanı olarak adlandırılır.

4.2.2.2 LAGRANGE ÇARPANINI GEOMETRIK ANLAMI

Gerek şartları yazmak için Lagrange fonksiyonu denilen bir fonksiyon aşağıda belirtildiği gibi hedef ve kısıtlayıcı fonksiyonları içerecek şekilde yazılır:

$$L(x_1, x_2, \nu) = f(x_1, x_2) + \nu h(x_1, x_2) \tag{4.13}$$

Yukarıda elde edilen optimum nokta için gerek şart lagrange fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi verilir:

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0 \ , \ \frac{\partial L(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0 \tag{4.14}$$

Vektör formda yazılırsa:

$$\nabla L(x_1^*, x_2^*) = 0 \tag{4.15}$$

Burada ∇ gradyantı gösterir ve aşağıdaki gibi açık formda belirtilir:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T \tag{4.16}$$

Denklem (4.12) vektör formda düzenlenirse

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + v\nabla h(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{4.17}$$

Burada

$$\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \nabla h(x^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial h(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Denklem (4.16) aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = -v\nabla h(\mathbf{x}^*) \tag{4.19}$$

Bu denklem gerek şartın geometrik anlamını gösterir. Yani, aday noktada, hedef fonksiyonun gradyantı ve kısıtlayıcı fonksiyonun gradyantı aynı doğru üzerindedir ve lagrange çarpanı bu ikisini arasındaki oranı belirtir.

Mevcut örnek dikkate alındığında, aday optimum noktada (1,1), hedef ve kısıtlayıcı fonksiyonun gradyant değerleri

$$\nabla f(1{,}1) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ ve } \nabla h(1{,}1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Bu vektörler şekil üzerinde C noktasında gösterilmiştir.

İki tasarım değişkenine sahip bir kısıtlı optimizasyon problemi için Lagrange çarpanları aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Hem hedef fonksiyonu ve hem de kısıtlayıcıyı içeren lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2) \tag{4.21}$$

Burada λ Lagrange çarpanı olarak adlandırılan bir büyüklük olup problem içerisinde diğer tasarım değişkenleri gibi değeri bulunacaktır. Bu fonksiyona bağlı olarak gerek şartlar (necessary conditions) aşağıdaki gibi verilir:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = g(x_1, x_2) = 0
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Verilen bu gerek şartlar yardımıyla elde edilen aday noktalar arasından optimum hedefi veren değerleri bulabilmek için aşağıda verilen yeter şartlar uygulanır.

Yeter şart:

$f(x)$ fonksiyonun x* noktasında minimum olması için aşağıda verilen Q fonksiyonun x=x*'de bütün dx değerleri için pozitif tanımlı olması gerekmektedir.

$$
Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) dx_i dx_j
\tag{4.23}
$$

Yukarda verilen fonksiyonun açılımı aşağıdaki determinant denklemi yardımıyla verilebilir. z_i polinomun kökleri pozitif veya negatif tanımlı olmasına bağlı olarak x=x*'da $f(x)$ fonksiyonu minimum veya maksimum olduğu belirilir.

$$
\begin{vmatrix}
L_{11} - z & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{1n} & g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{m1} \\
L_{21} & L_{22} - z & L_{23} & \cdots & L_{2n} & g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{m2} \\
\vdots & & & & & & & & \\
L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \cdots & L_{nm-z} & g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{mn} \\
g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \\
g_{m1} & g_{m2} & g_{m3} & \cdots & g_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix} = 0
\tag{4.24}
$$

Burada

$$
\begin{aligned}
L_{ij} &= \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \\
g_{ij} &= \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

olarak tanımlanır.

<u>Örnek 4.5:</u>

Yüzey alanı $A_0 = 24\pi$ olacak şekilde bir silindirin hacmini maksimum yapacak boyutları bulunuz.

4.3 EŞİTLİKSİZ KISITLAYICILI OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ

Bir önceki bölümde kullanılan Lagrange çarpanları metodunda kısıtlayıcılar eşitlik kısıtlayıcıları şeklindeydi. Bu bölümde ise aşağıdaki tipteki optimizasyon problemlerinin çözümü için gerekli olan şartlar verilecektir.

$$\min\ f(x)$$

s.t.

$$g_j(x) \le 0, \qquad j = 1,2,\ldots m$$

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$$

Bu tür problemlerin çözümünde kullanılacak metotlara geçmeden bu tür problemlerin eşitlikli kısıtlayıcılı optimizasyon problemlerine çevrilip çevrilemeyeceği araştırılır.

4.3.3 EŞİTLİK KISITLAYICI OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNE ÇEVİRME

Eşitsizlik kısıtlayıcılarına sahip olan bir optimizasyon problemini eşitlik kısıtlayıcılı bir optimizasyon problemine çevirerek daha önceki bölümlerde anlatılan metotları kullanılır ve optimum değerler elde edilebilir. Bunun için ise Slack (gevşek) değişken tanımlanır ve bu değişkenin karesi eşitsizlik kısıtlayıcısına eklenir. Yani:

$$g_j(x) + y_j^2 = 0 \quad j = 1,2,\ldots,m \tag{4.26}$$

Burada kullanılan slack değişken y_j pozitif veya negatif olmasından ziyade kareli ifadesi kısıtlayıcıya eklenir ve böylece $\le$ formundaki kısıtlayıcı, eşitlik kısıtlayıcısına çevrilmiş olur.

Böylece optimizasyon problemi aşağıdaki tipe dönüştürülür:

$\min \ f(x)$

s.t.

$$G(x,y) = g_j(x) + y_j^2 = 0, \quad j = 1,2,...m \tag{4.27}$$

Bu tip optimizasyon problemlerinin çözümü için bir önceki bölümde anlatılan Lagrange çarpanları metodu kullanılabılır. Bunun için Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$L(x,y,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j G_j(x,y) \tag{4.28}$$

Stationary (aday noktaların) değerleri aşağıdaki denklemlerin çözümünden elde edilir.

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,2,...,n$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda_j} = G(x,y) = g_j(x) + y_j^2 = 0 \quad j = 1,2...,m \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y_j} = 2\lambda_j y_j = 0 \quad j = 1,2...,m$$

Örnek 4.6:

Aşağıdaki optimizayon problemini Lagarange çarpanları metodunu kullanarak çözünüz.

$$\min \ f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2$$

s.t.

$$h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

4.3.4 KUHN-TUCKER (K-T) GEREK ŞARTLARI

Hem eşitlik ve hem de eşitsizlik optimizasyon problemleri için gerek şartlar **Kuhn-Tucker** gerek şartları olarak derlenebilir. Bu şartlar slack (gevşek) değişkenli ve slack değişkensiz olmak üzere iki türlü verilebilir.

Aşağıdaki optimizasyon problemini dikkate alalım:

$\min\ f(x)$

s.t.

$$h_i(x) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,p$$
$$g_j(x) \le 0, \qquad j = 1,2,\ldots m$$

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$$

Bu problem için Lagrange fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} v_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i (g_i(\mathbf{x}) + s)) \qquad (4.30)$$

Burada ν,**u**: Lagrange çarpanı

s: slack değişkeni olarak atanmıştır.

Bu Lagrange fonksiyonuna bağlı olarak K-T gerek şartları aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{p} v_i^* \frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n \\
&h_i(\mathbf{x}^*) = 0; \qquad i = 1,2,\ldots,p \\
&g_i(\mathbf{x}^*) + s_i^2 = 0; \qquad i = 1,2,\ldots,m \\
&u_i^* s_i = 0; \qquad i = 1,2,\ldots,m \\
&u_i^* \ge 0; \qquad i = 1,2,\ldots,m
\end{aligned} \qquad (4.31)$$

Bu şartlar aynı zamanda 1. derece gerek şartlar (first-order conditions) olarak da adlandırılır. Bu denklemler **x*** (regular point) düzenli nokta denilen özel bir noktada değerlendirilmiştir.

4.3.4.1 Kuhn-Tucker gerek şartının kullanım amacı

Kuhn-Tucker gerek şartları iki amaç için kullanılır:

- verilen bir noktanın muhtemel optimum olup olmadığını kontrol etmede
- aday minimum noktaların tespitinde kullanılır

Kuhn-Tucker 1. derece gerek şartları ile ilgili önemli bazı özellikler aşağıda verilmiştir:

- K-T şartları ancak regular (düzenli) noktada uygulanır.
- K-T şartlarını sağlamayan noktalar, eğer irregular (düzensiz) noktalar değilse lokal minimum olamazlar. K-T şartlarını sağlayan noktalar Kuhn-Tucker noktaları olara adlandırılır.
- K-T şartlarını sağlayan noktalar kısıtlı veya kısıtsız olabilir.
- Eğer eşitlik kısıtlayıcı varsa ve eşitliksiz kısıtlayıcıların hiçbiri aktif değilse K-T şartlarını sağlayan bu noktalar stationary noktalardır. Yani bu noktalar minimum maksimum veya dönüm noktaları olabilir.

<u>Örnek 4.7:</u>

Aşağıda verilen optimizasyon problemi için Kuhn-Tucker şartlarını yazarak optimum notayı belirleyiniz.

min

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(b+c)x^2 + bcx + f_0$$

s.t.

$$a \le x \le d$$

Burada $0 < a < b < c < d$ ve f_0 bir sabit değerdir.

ÖDEV:

Aşağıda verilen hedef fonksiyonu minimum yapan aday noktaları Lagrange çarpanları metodunu kullanarak elde ediniz.

$$\begin{aligned}&\min\ f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 18x_1x_2 + 13x_2^2 - 4\\&\text{s.t. } x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = 16\end{aligned}$$