Optimizasyon Teknikleri

Doç. Dr. İrfan KAYMAZ

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Makine Mühendisliği Bölümü

Optimizasyon Nedir?

Optimizasyonun Tanımı:

- Optimum kelimesi Latince bir kelime olup nihai ideal manasına gelmektedir.
- Optimizasyon ise, bir problemin en iyi çözümünü veya tasarımını bulma işlemi olarak tanımlanabilir.

- Mühendisler, tasarımda, imalatta veya bakım çalışmalarının aşamalarında karalar almak zorundadırlar.
- Bütün bu kararların nihai amacı, gerekli çaba, sermaye, malzeme veya teknolojinin minimum da tutulması veya karı maksimum yapmaktadır.
- Dolayısıyla optimizasyon, hedeflenen amacı maksimum veya minimum yapacak şartları bulma işlemi olarak tanımlanır.

Dersin kapsamı

Bu dersin alt yapısı nelerden oluşuyor?

- Optimum değeri bulmada kullanılan metotlar ***matematiksel programlama*** olarak da adlandırılır ve bu da ***operation research*** (operasyon araştırması) bir alt kademesidir.

- Operation research, en iyi çözüm veya optimum çözümü bulmada karar verme (***decision making***) tekniklerini içeren bilimsel metotların uygulandığı matematiğin bir alt kademesidir.

- Dolayısıyla, bu ders kapsamında anlatılacak ve optimum değeri bulmada kullanılan metotlar genel olarak ***matematiksel programlama*** olarak adlandırılır.

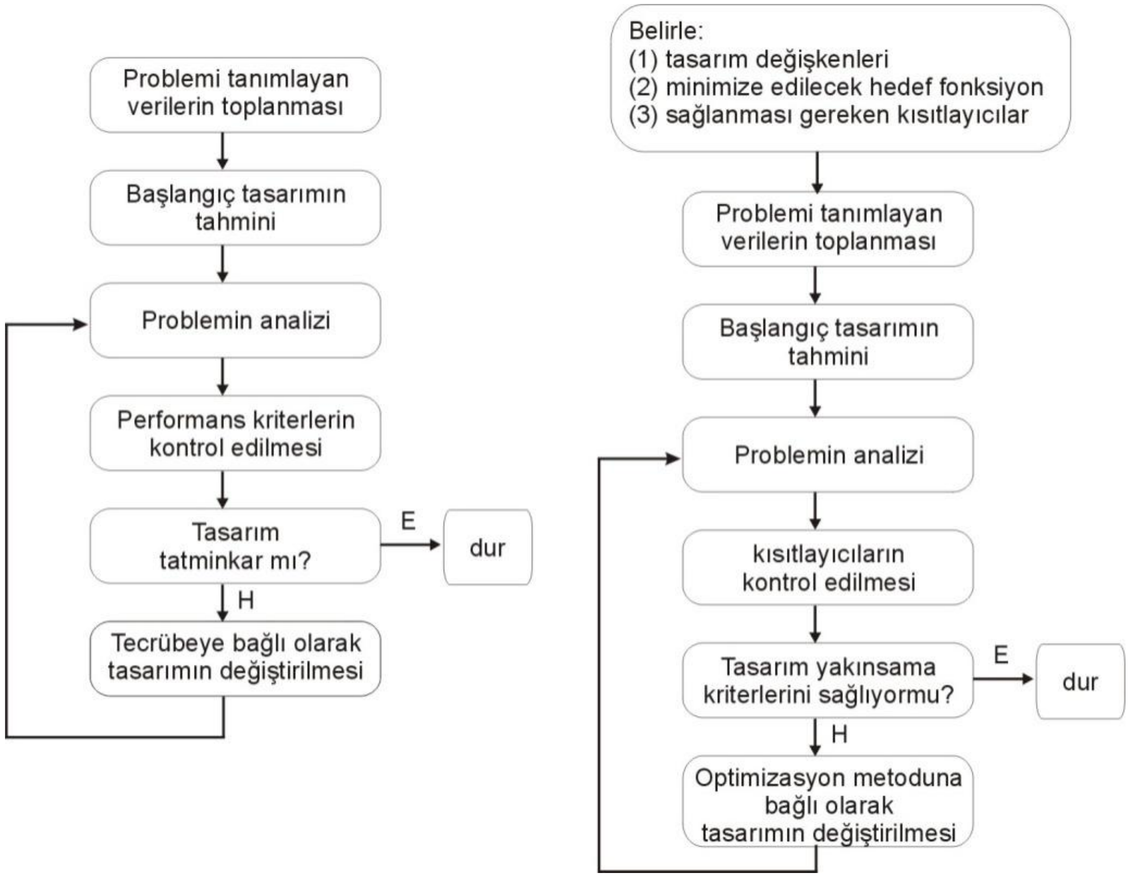
Dersin kapsamı

Bu derste neler işlenecek?

- Optimizasyona Giriş
- Grafiksel Optimizasyon
- Kısıtlamasız optimizasyon
- Kısıtlamalı Optimizasyon
- Global Optimizasyon
- Doğrusal Programlama
- Doğrusal olmayan optimizasyon metotları
- Genetik Programlama
- Yaklaşım Metotları

nasıl tasarım yaparız?

Klasik tasarım yaklaşımı ile optimizasyonun karşılaştırılması



Optimum masa tasarım problemi

Amaç: Aşağıdaki özelliklere sahip bir masa tasarlamak

- Rijit olmalı
- Hafif olmalı
- Maliyeti düşük olmalı
- Yeteri derecede dayanaklı olmalı
- veya sizin ekleyebileceğiniz diğer kriterler….

- Yukarıda verilen kriterler birbirleri ile çelişkilidir
- Bu nedenle bu kriterler arasında bir orta yolu bulmalıyız veya bunu bulacak bir ifade olmalı.

Hedefe ulaşabilmek için matematiksel bir tanımlama kullanabilir miyiz?

Genel bir optimizasyon probleminin matematiksel tanımı

minimize $f(\mathbf{x})$ $\qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

subject to

$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad j=1,\ldots,m$

$h_k(\mathbf{x}) = 0 \qquad k=1,\ldots,l$

Tasarım Değişkenleri:	$\boldsymbol{x}$
Hedef (Amaç) fonksiyonu:	$f(\mathbf{x})$
Eşitsizlik kısıtlayıcıları:	$g_j(\mathbf{x})$
Eşitlik kısıtlayıcıları:	$h_k(\mathbf{x})$

Optimizasyonun temel tanımları

- Optimize edilecek büyüklük (maksimum veya minimum or minimized) ***hedef fonksiyon olarak*** adlandırılır.
- Optimum değeri bulmak için, aldıkları değerleri değiştirilen parametreler ***tasarım değişkenleri*** olarak adlandırılır.
- Parametrelerin değer alması üzerine konulan sınırlamalara ***kısıtlayıcılar*** olarak adlandırılır.

Tasarım Değişkenleri

- Sistemi tanımlayan değişken setidir. Masanın yüksekliği veya genişliği gibi
- Tasarım değişkenlerine herhangi bir değer atanabilmelidir.
- Tasarım değişkenleri birbirlerinden bağımsız olmalıdırlar
- Probleme ait uygun ve gerekli tasarım değişkenlerinin seçimi oldukça önemlidir. Aksi halde problem tanımı eksik veya hatalı olabilir.

Hedef Fonksiyonu

Minimize (or maximize) $f(\mathbf{x})$

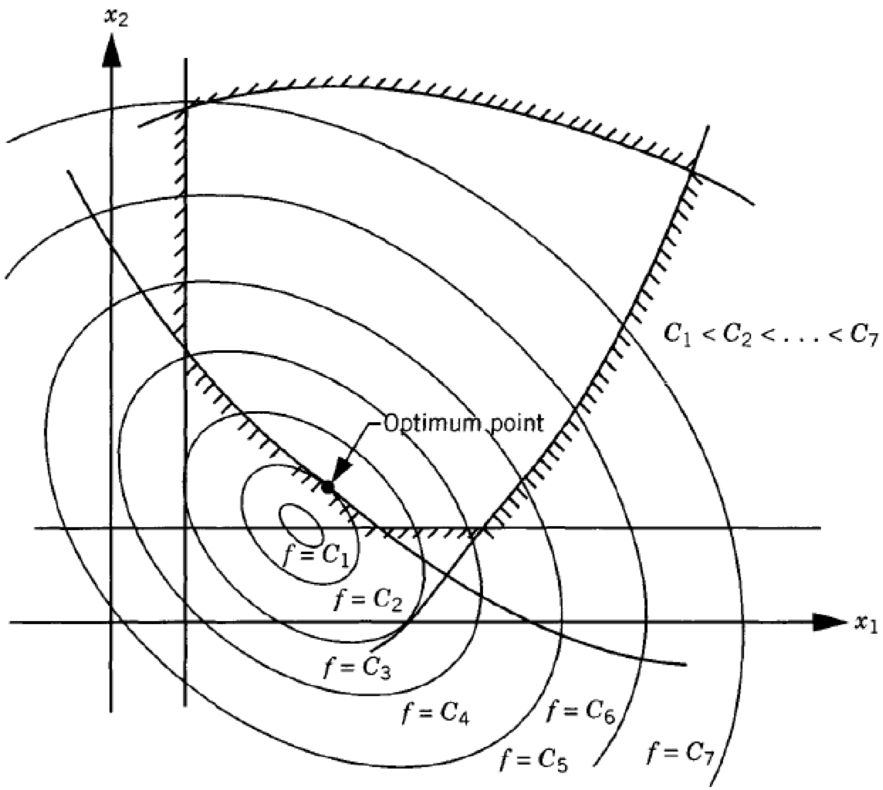
- Bir sistemin birden fazla mümkün çözümleri olabilir.. Bunlardan bazıları diğerlerinden daha iyi olabilir. Bu nedenle, bu altermatif tasarımları karşılaştıracak bir kriter olmalıdır.
- Bu tür kriterlere Hedef fonksiyonu denir, ve isteklere bağlı olarak ya minimize edilir veya maksimum değeri aranır.

Hedef fonksiyonu ile ilgili bazı örnekler:

- Maliyet (minimize edilecek)
- Ağırlık (minimize edilecek)
- Kar (maksimize edilecek)
- Enerji kullanımı(minimize edilecek)

.....

Hedef Fonksiyonu izohips eğrileri

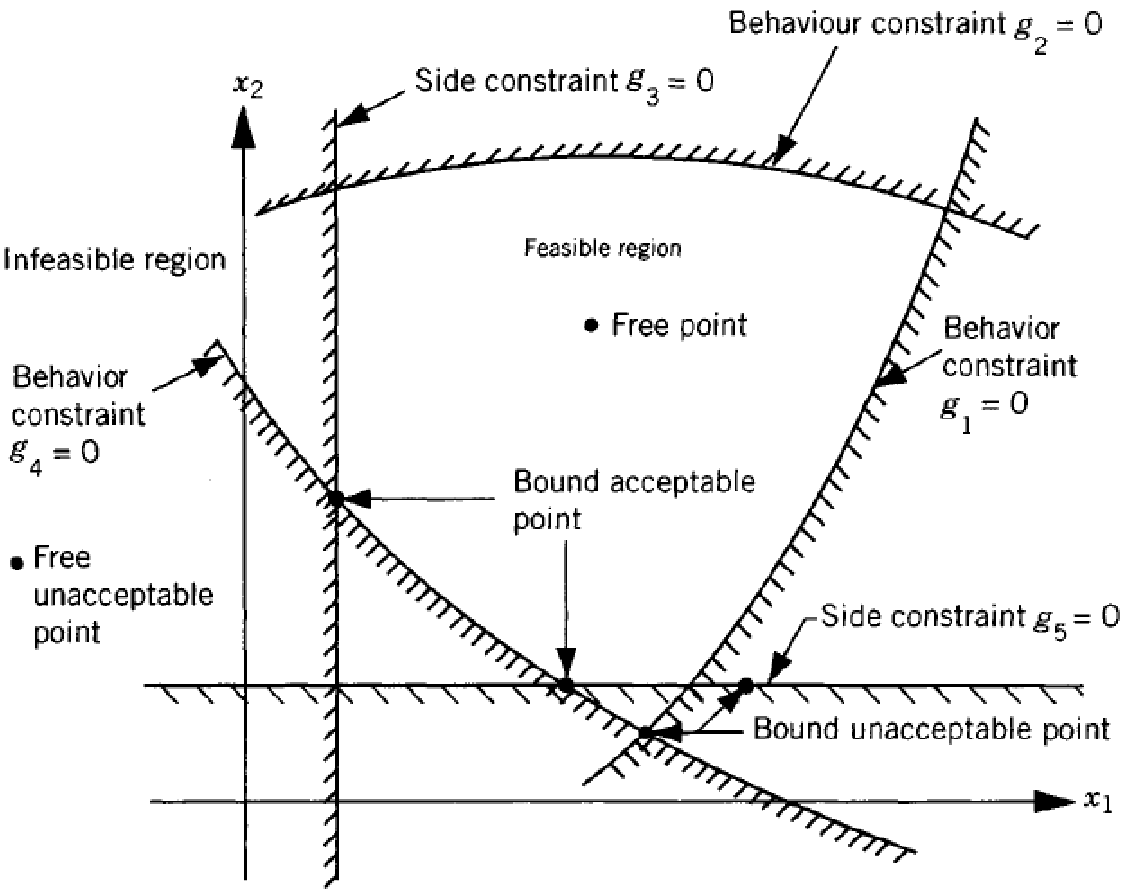


Kısıtlayıcı Fonksiyonu

Tasarımı sınırlayan, tasarım değişkenlerinin alacağı değerlere limit koyan fonksiyonlardır.

Bazı Örnekler:

- *Yapı, herhangi bir hasara uğramadan üzerine gelen yükleri taşıyabilmelidir.*
- *The life of a machine element subjected to a cycling loading must be minimum 1 million cycles.*
- *Dimensions of a machine element must not exceed available amounts of space.*



Behaviour constraint $g_2 = 0$
Side constraint $g_3 = 0$
x_2
Infeasible region
Feasible region
Free point
Behavior constraint $g_1 = 0$
Behavior constraint $g_4 = 0$
Bound acceptable point
Free unacceptable point
Side constraint $g_5 = 0$
Bound unacceptable point
x_1

Optimizasyon Problemlerinin Sınıflandırılması

- Pek çok optimizasyon algoritması bulunmaktadır.
- Ancak bu metotların çoğu ancak belirli bir tür problemin çözümü için geliştirilmiş yöntemlerdir.

Bu nedenle, optimizasyon probleminin çözümü için gerekli metodun seçimi için, optimizasyon probleminin türünün belirlenmesi önemlidir.

CHARACTERISTICS	PROPERTY	CLASSIFICATION
Number of design variables	One	*Univariate*
	More than one	*Multivariate*
Types of design variables	Continuous	*Continuous*
	Integers	*Integer or discrete*
	Both continues and integers	*Mixed integer*
Objective and constraints functions	Linear functions of design variables	*Linear*
	Quadratic functions of design variables	*Quadratic*
	Nonlinear functions of design variables	*Nonlinear*
Problem formulation	Subject to constraints	*Constrained*
	Not Subject to constraints	*Unconstrained*

Optimizasyon Türleri

KARAKTERİSTİĞİ	ÖZELLİĞİ	SINIFLANDIRMA
Tasarım değişkenlerin sayısı	Bir	*Tek değişkenli*
	Birden fazla	*Çok değişkenli*
Tasarım değişkenlerinin türü	Sürekli	*Sürekli*
	Tamsayı	*Tamsayı veya kesikli*
	Hem sürekli hem de tamsayı	*Karışık tamsayı*
Hedef ve kısıtlayıcı fonksiyonlar	Doğrusal fonksiyon	*Doğrusal*
	Kuadratik fonksiyon	*Kuadratik*
	Doğrusal olmayan fonksiyon	*Doğrusal olmayan*
Problem formülasyonu	Kısıtlama var	*Kısıtlamalı*
	Herhangi bir kısıtlama yok	*Kısıtlamasız*

Optimizasyon problem türleri için örnekler:

Kısıtlamasız çok değişkenli optimizasyon

$$\min \; f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 8x_2$$

Doğrusal programlama

$$\begin{aligned} &\min \; f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 6x_2 \\ &s.t. \\ &\quad -x_1 + x_2 \le 2 \\ &\quad 2x_1 + x_2 \le 2 \\ &\quad x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Doğrusal olmayan çok değişkenli kısıtlamalı optimizasyon

$$\begin{aligned} &\min \; f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 320x_1x_2 \\ &s.t. \\ &\quad \frac{1}{60x_2}x_1 - 1 \le 0 \\ &\quad 1 - \frac{1}{3600}x_1(x_1 - x_2) \le 0 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Optimizasyon problemini çözmek için takip edilecek adımlar

STEP 1: temel konfigürasyonun oluşturulması

STEP 2: tasarım değişkenlerinin tanımlanması

STEP 3: hedef fonksiyonun kurulması

STEP 4: kısıtlayıcı fonksiyonun tanımlanması

STEP 5: uygun optimizasyon metodunun seçilmesi ve uygulanması

Kola kutusu tasarımı

Belirli bir miktarda sıvıyı alacak ve tasarım kriterlerini karşılayacak bir kola kutusunun tasarımın ele alalım. Çok fazla sayıda üretileceğinden, üretim maliyetlerini en asgari seviyede tutulması gerekmektedir. Dolayısıyla kullanılacak malzeme, üretim maliyetleri ile direkt olarak ilgilidir. Tasarım kriterleri olarak aşağıdaki hususlar dikkate alınacaktır:

- Kutunun çapı 8 cm'den büyük ve 3.5 cm'den küçük olmayacak
- Kutunun yüksekliği 18 cm'den büyük ve 8 cm'den küçük olmayacaktır.
- Kola kutusunun en azından 400 ml=400 cm^3 sıvıyı alabilmesi istenmektedir.
- Bu tasarım problemini optimizasyon problemi olarak tanımlayınız.

Optimum kargo yükünün belirlenmesi

Bir kargo yükü beş farklı eşya tipinden oluşmaktadır ve bu eşya tiplerinin ağırlığı, hacimleri ve parasal değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Eşya tipi (i)	Ağırlığı (w_i)	Hacmi (v_i)	Parasal değeri (c_i)
1	4	9	5
2	8	7	6
3	2	4	3
4	5	3	2
5	3	8	8

Bu kargo yükünün parasal değerini maksimum yapacak eşya tiplerinin sayısını belirleyiniz. Kargo yükünün ağırlığı ve hacmi sırasıyla 2000 ve 2500 değerini aşmaması istenmektedir.

STANDART OPTIMIZASYON MODELININ ÖZELLIKLERI

1. Yukarıda tanımlanan hedef fonksiyonu ve kısıtlayıcı fonksiyonlar ya bazı veya tüm tasarım değişkenlerine bağlı olarak tanımlanmalıdır. Bu şekilde tanımlanmayan fonksiyonlar optimizasyon problemi ile bir ilişkisi yoktur ve problem tanımlanmasında ihmal edilirler.
2. tasarım değişkenlerinin sayısı (*n*) ile eşitlik kısıtlayıcıların sayısı (*l*) arasında optimizasyon probleminin çözümü aşamasında aşağıda belirtilen bağıntılar vardır:
   a. eşitlik kısıtlayıcıları içeren optimizasyon probleminin bir çözümün olabilme şartı $l \leq n$ dır.
   b. Eğer $l > n$ ise problem aşırı tanımlanmış olur. Yani boş yere (gereksiz) tanımlanmış kısıtlayıcı vardır ki bu çoğu durumda birbirlerine lineer bağımlı fonksiyonların olduğunu gösterir veya problem tanımlanması hatalıdır ve böyle durumlarda ya gereksiz kısıtlayıcı problem tanımlanmasında çıkarılarak a şıkkında verilen şart sağlanır veya problem tanımlanmasında hata yapıldıysa bir çözüm elde edilemez.
   c. Eğer $l = n$ ise, tanımlanan sistemin optimum çözümü veya optimizasyon problemi olarak ifade edilmesi gereksizdir zira eşitlik kısıtlayıcıları optimum çözüm için gereken yegane fonksiyonlardır ki bu gibi durumlarda basit denklem çözümleri ile de çözüme gidilebilir.

STANDART OPTIMIZASYON MODELININ ÖZELLIKLERI

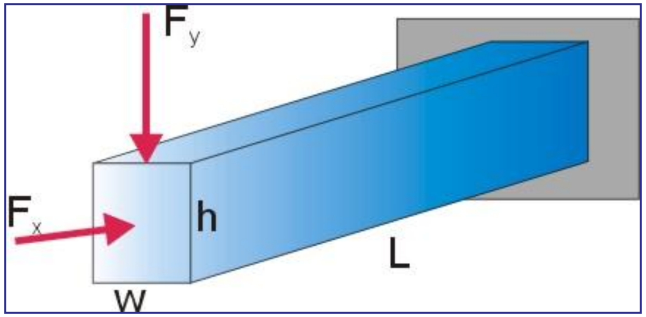
3. Eşitliksiz kısıtlayıcıları bir çok optimizasyon metodunda ≤ 0 şeklinde tanımlanır ve bu duruma göre çözümler üretilir. Diğer bir durum olan ≥ 0 şeklinde kısıtlayıcılar -1 ile çarpılarak ≤ 0 şekline dönüştürülür.
4. Eşitlik kısıtlayıcıları için tasarım değişkeni sayısı ile ilgili şartlar olmasına rağmen eşitliksiz kısıtlayıcıları için bu şartlar yoktur. Optimum çözümde bazı eşitliksiz kısıtlayıcıları aktif olabilir yani optimum değerler kısıtlayıcılara yazıldığında kısıtlayıcı sıfır değeri alabilir. Aktif eşitliksiz kısıtlayıcıların sayısı genelde tasarım değişkenleri sayısından az veya maksimum eşit olabilir.
5. Bazı optimizasyon problemlerinde kısıtlayıcı bulunmayabilir ki bu tür problemlere kısıtlamasız optimizasyon problemi denir.
6. Eğer optimizasyon formülasyonundaki fonksiyonların tümü tasarım değişkenlerine doğrusal olarak bağımlı iseler bu tür problemlere doğrusal optimizasyon problemi adı verilir ve çözümü doğrusal olmayan optimizasyonlara nazaran çok daha basittir.

An Engineering Problem

Define the following design problem as an optimization problem:

The goal is to design a rectangular shaped cantilever beam with minimum weight without subjecting to a yielding failure.

- The beam must safely carry a vertical and horizontal load of 5000 and 1000 N, as shown.
- The length of the beam is constant and takes a value of 1000 mm.
- The width of the beam must be at least 20mm.
- The height must be at least twice as much as the width of the beam.
- The beam material is steel with the yielding strength of 350 MPa, and the density is 7850 kg/m^3.



Engineering problem

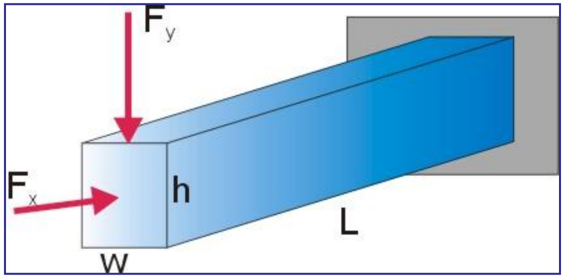
Solution

STEP 1: Create a basic configuration

In this step, problem is defined so that the element required for definition are explicitly presented.

So, since the goal is to design with minimum weight while there is no yielding failure and some restrictions will apply, therefore the followings are needed:

- The weight of beam must be expressed in terms of design variables
- A necessary expression must be defined for the yielding failure



Engineering problem

Solution

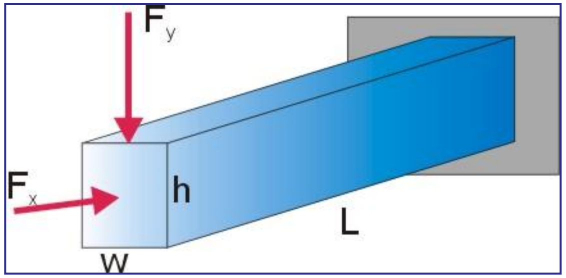
STEP 2: Identify the design variables

Since the aim is to design the beam with a minimum weight, the following variables must be selected as design variables:

w: width of the bean
h: height of the beam

$$\boxed{\mathbf{x} = [w \quad h]}$$

since the length of the beam is constant.

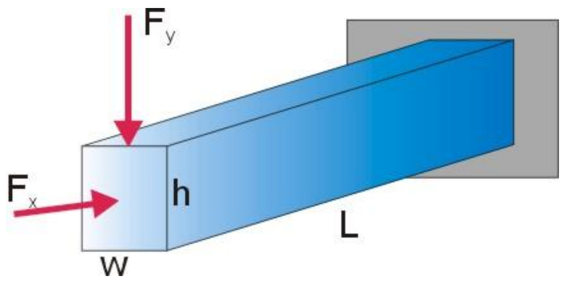


Solution

STEP 3: Establish the objective function

The weight of the beam is defined as:

$$\boxed{W_{beam} = \rho \times h \times w \times L}$$



Since the density and the length of the beam are constant, the objective function becomes:

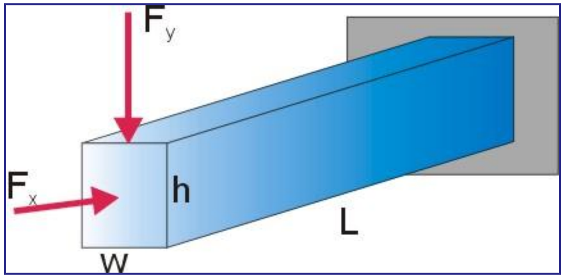
$$\boxed{f(\mathbf{x}) = 7850 \times 10^{-9} \times h \times w \times 1000 = 0.00785 \times h \times w}$$

Solution

STEP 4: Identify any constraints

In the problem statement, the followings indicates restriction to reduce the dimension of the beam as much as we like:

- The beam must safely carry a vertical and horizontal load of 5000 and 10000 N
- The width of the beam must be at least 20mm.
- The height must be at least twice as much as the width of the beam.



The maximum normal stress due to the loading can be expressed as

$$\sigma_{max} = \frac{F_x}{w \times h} + \frac{F_y \times 1000}{w \times \frac{h^2}{6}}$$

So the first constrain can be formulized as

$$g_1(\mathbf{x}) = \sigma_{max} - \sigma_{ys} \leq 0$$

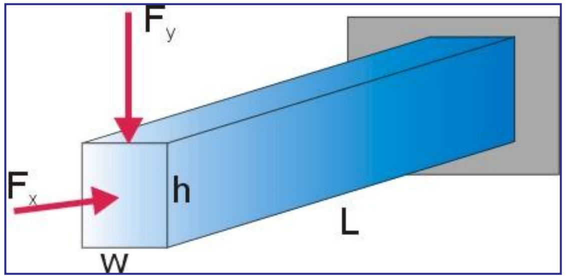
$$g_1(\mathbf{x}) = \sigma_{max} - \sigma_{AK} \leq 0 \rightarrow g_1(\mathbf{x}) = \frac{F_x}{w \times h} + \frac{F_y \times 6000}{w \times h^2} - 350 \leq 0$$

Solution

STEP 4: Identify any constraints

The second constraint concerning the dimension of the beam can be mathematically given as:

$$g_2(\mathbf{x}) = h \geq 2 \times w \rightarrow g_2(\mathbf{x}) = 2 \times w - h \leq 0$$

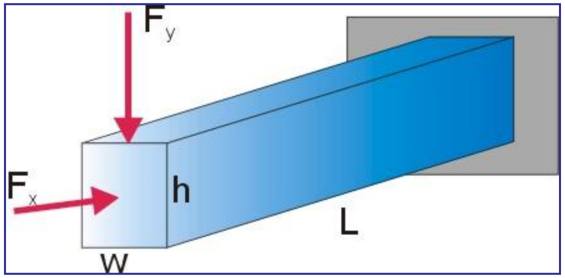


Solution

STEP 5: Select and apply an optimization method

So, the optimization problem can be expressed as:

$$\min f(\mathbf{x}) = 0.00785 \times h \times w$$
$$\boldsymbol{s.t.}$$
$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{F_x}{w \times h} + \frac{F_y \times 6000}{w \times h^2} - 350 \leq 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) = 2 \times w - h \leq 0$$
$$w \geq 20, h \geq 0$$



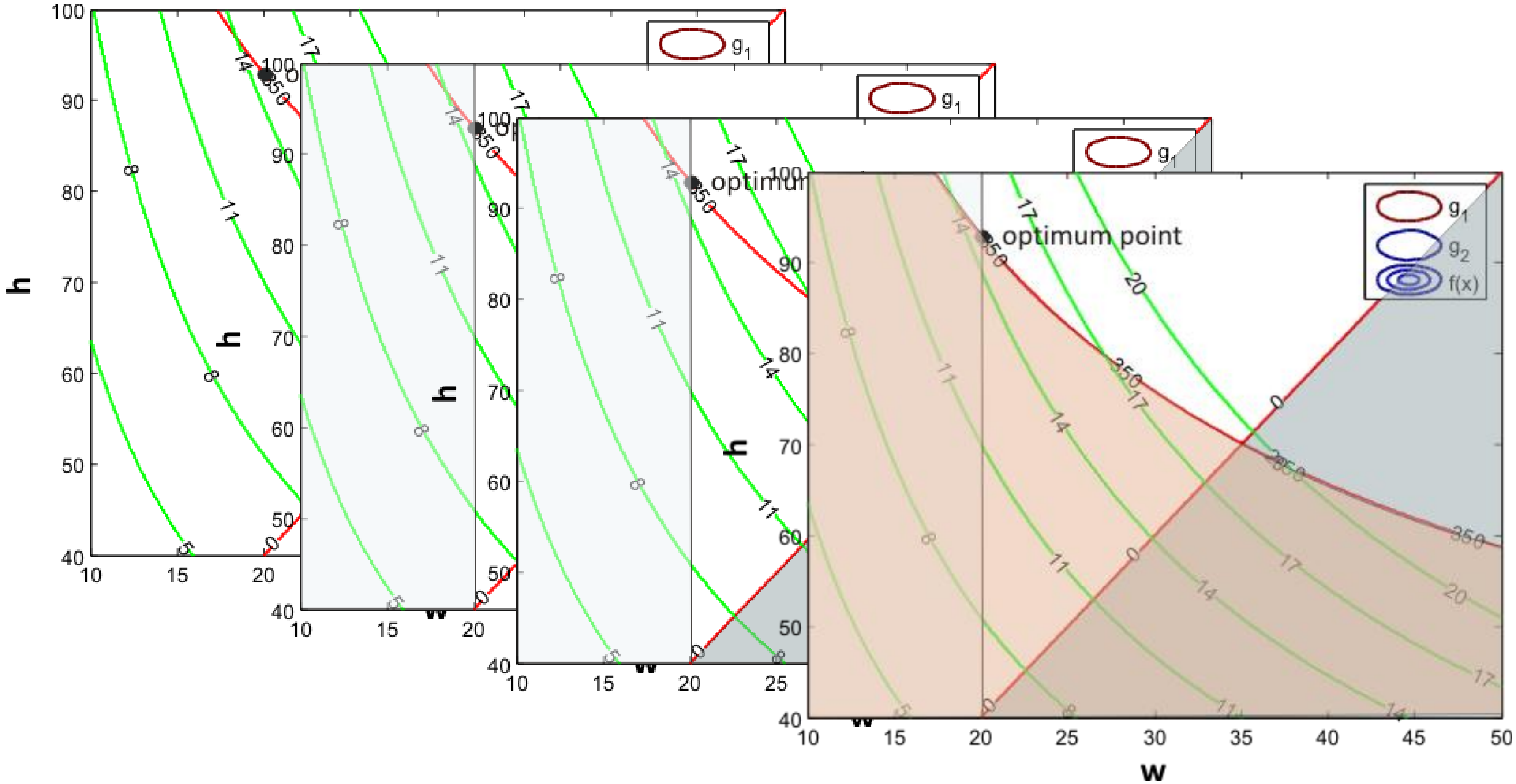
type of the above optimization problem:
nonlinear constrained optimization problem

So, what is the optimum values for w and h?

Next lecture
will include the methods to answer this question

Solution by graphical optimization

Since there are only two design variables, this problem can be solved by using graphical optimization



References

Some of the references used:

- S.S. Rao, “Engineering Optimization: Theory and Practice”, Third Edition, John Wiley & Son, New York, 1996.
- J.S. Arora, “Introduction to Optimum Design”, McGraw-Hill, New York, 1989.
- Lecture Notes from Munich Technical University, http://www.st.bv.tum.de/
- Lecture Notes from Stanford University, http://stanford.edu/~carlberg/optSchool.html