TIBBİ ENSTRUMANTASYON TASARIM VE UYGULAMALARI

SAYISAL FİLTRELER

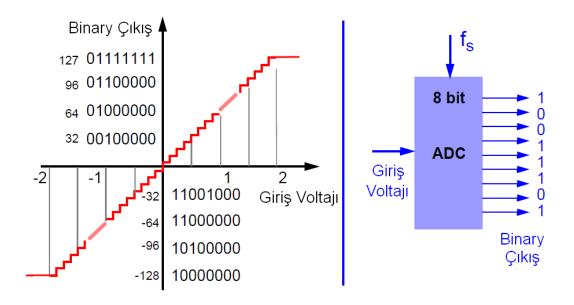
SUNU PLANI

- Analog sayısal çevirici
- FIR Filtreler
- IIR Filtreler
- Adaptif Filtreler
- Pan-Tompkins Algoritması

BÖLÜM 1

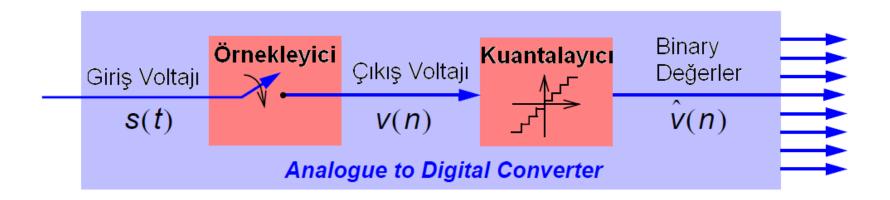
ANALOG SAYISAL ÇEVİRİCİ

Analog Sayısal Çevirici



ADC girişine uygulanan bir voltajı, binary bir değere çeviren elemandır.

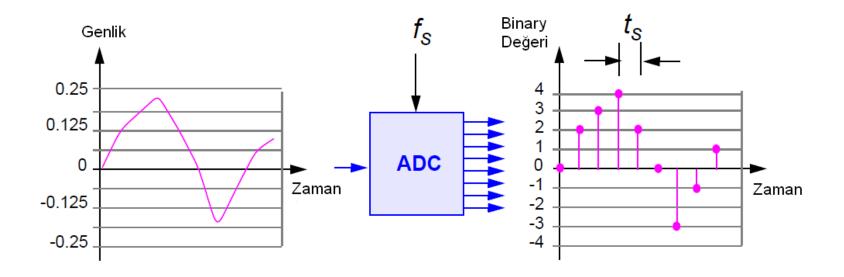
Analog Sayısal Çevirici



ADC bir örnekleyici ve bir kuantalayıcıyla temsil edilebilir.

Örnekleme

Bir saniyede sayısala çevrilen toplam örnek sayısı ADC'nin örnekleme frekansı olarak bilinir, fs Hz.



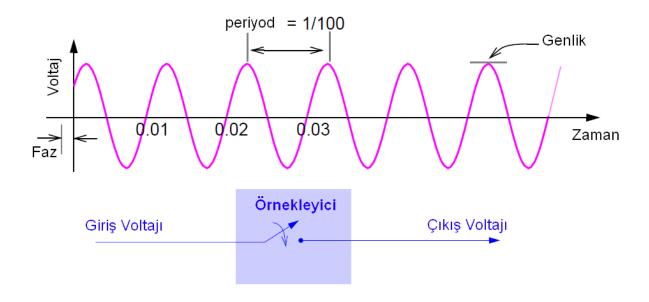
Örnekleme

Örnekler arasındaki zamana ise, örnekleme periyodu (ts), denir.

$$t_{s} = \frac{1}{f_{s}}$$

Örnekleme frekansı uygulamadan uygulamaya değişir.

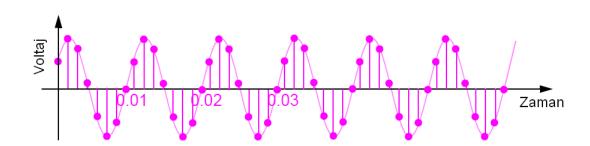
10 Hz'ler, Kontrol sistemlerinde
100 Hz'ler, Biyomedikal uygulamalarında
1000 Hz'ler, Ses ve görüntü uygulamalarında
1000000 Hz'ler, RF uygulamalarında



100 Hz'lik işarete ait bütün bilgiyi kaybetmeden geri alabilmek için örnekleme frekansımız kaç olmalı?

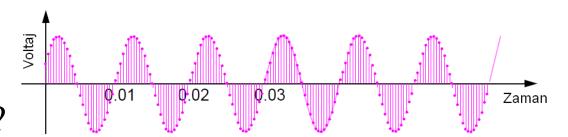
800 Hz

Yeterli gibi.



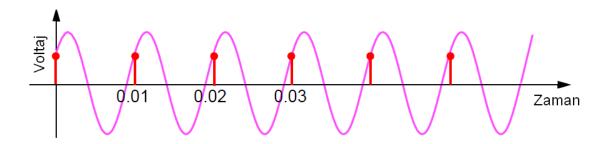
3000 Hz

Gereğinden fazla?



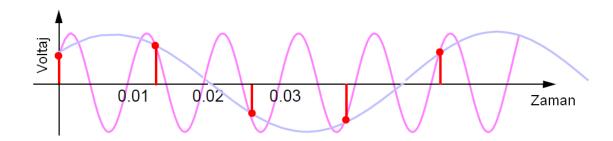
100 Hz

DC işaret!



80 Hz

Bilgi kaybı.



Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

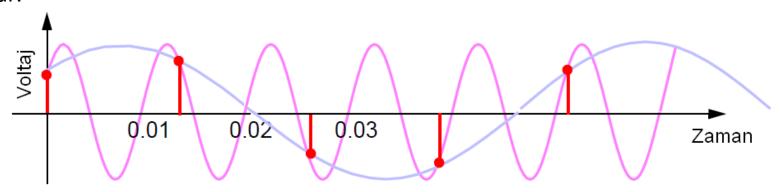
Nyquist örnekleme teoremine göre bir işarete ait bütün bilginin kaybedilmeden geri alınabilmesi için örnekleme frekansı (fs),

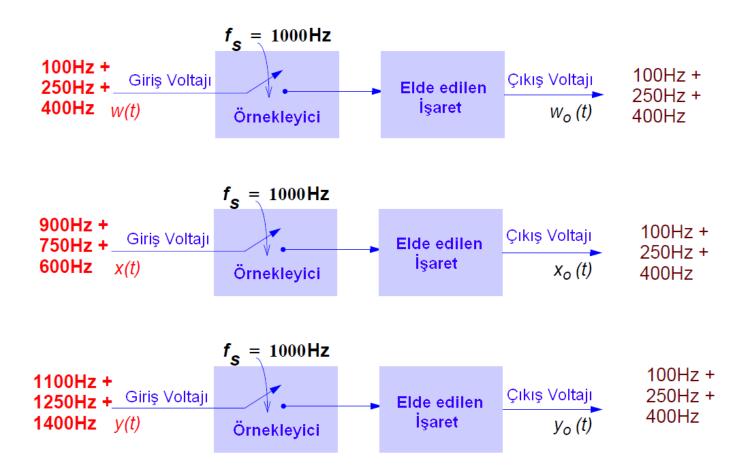
$$f_s \ge 2f_{max}$$

işaretteki maksimum frekans bileşeninin iki katına eşit veya daha büyük olmalıdır.

Bir işaret Nyquist örnekleme oranının altında bir frekansla örneklenirse işarete ait frekans bilgisi kaybedilir. Bu durumda örtüşme (aliasing) meydana gelir. 100 Hz'lik işaretin 80 Hz'de örneklendiği durumu yeniden göz önüne alalım. Bu durumda örnekleme sonucu elde edilen işaretin frekansı,

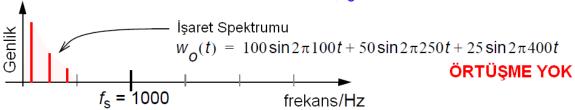
olur.

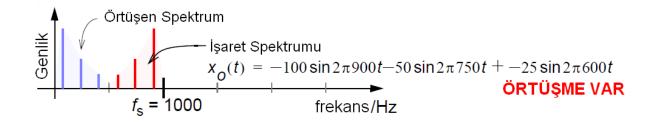


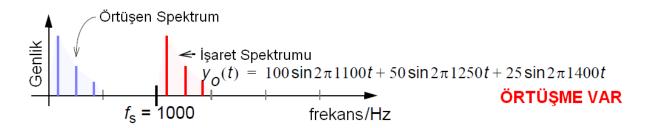


Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

Örnekleme Frekansı, $f_s = 1000$ Hz

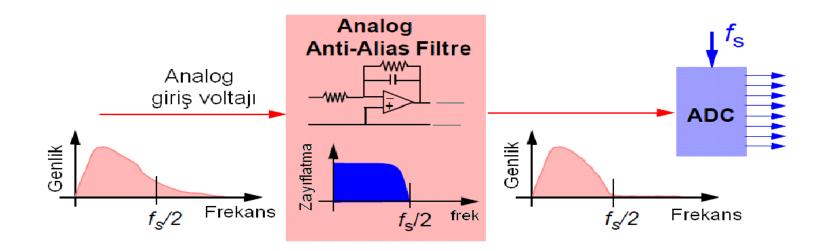






Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

ADC öncesi fs/2'den büyük bütün frekanslar bloke edilmeli!

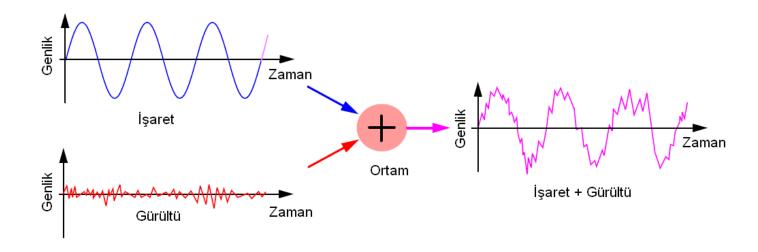


BÖLÜM 2

SAYISAL FİLTRELER

İşaretler ve Gürültü

İşaretler alınırken veya bir yerden bir yere gönderilirken işaret alınma koşullarından ve ortam şartlarından kaynaklanan sebeplerden ötürü çeşitli gürültülere maruz kalırlar.

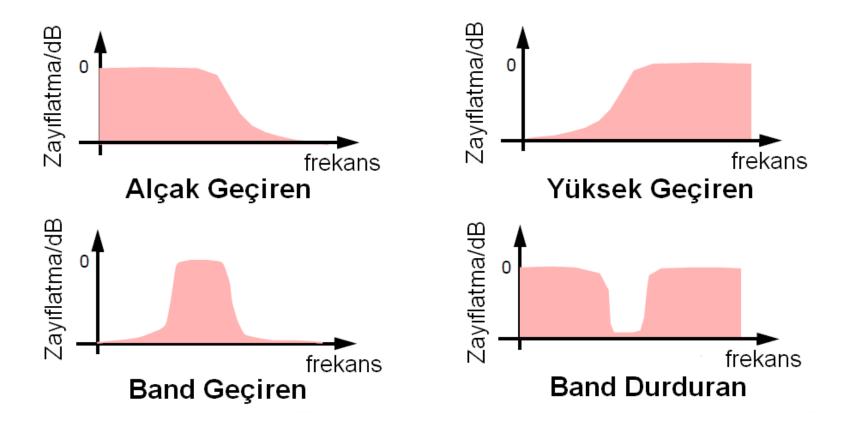


Gürültü Giderme Yöntemleri

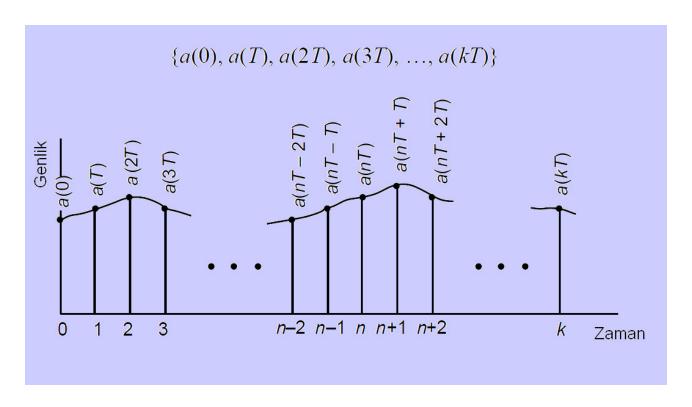
- FIR Filtreler (Sonlu Darbe Cevaplı): Non-rekürsif (geribeslemesiz) filtrelerdir.
- IIR Filtreler (Sonsuz Darbe Cevaplı): Rekürsif (Geribeslemeli) filtrelerdir.
- Adaptif Filtreler : İstenen bir işarete, öğrenme algoritmaları yardımıyla kendini adapte eden filtrelerdir.
- Doğrusal olmayan filtreler: Doğrusal olmayan işlemleri gerçekleyebilen filtrelerdir (örn. median filtre).

Gürültü Giderme Yöntemleri

Filtreleri dört temel sınıfta incelemek mümkündür.



Örnekleme sonucunda sürekli işaretler sayı dizilerine çevrilir.



Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

Verilen herhangi bir dizinin z-dönüşümü,

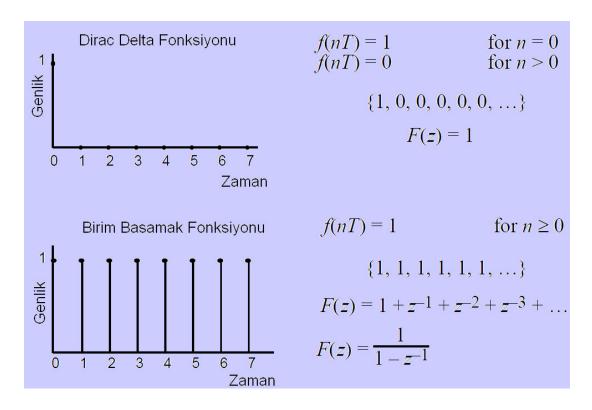
$$\{f(0), f(T), f(2T), \dots, f(kT)\}\$$

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(kT)z^{-k}$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{k} f(nT)z^{-n}$$

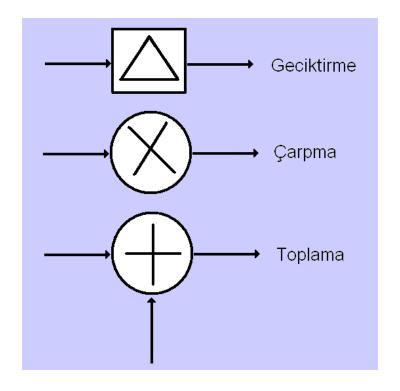
$$n = 0$$

Dirac Delta fonksiyonu ve Birim Basamak fonksiyonunun z-dönüşümü,



Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

Herhangi bir sayısal filtreyi gerçekleyebilmek için sadece üç operatör gereklidir.



Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

Geciktirme operatörünün transfer fonksiyonu,

$$X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots + x(nT)z^{-n}$$

$$X(z) \longrightarrow Y(z)$$

$$\{0, x(0), x(T), x(2T), \dots, x(nT)\}$$

$$Y(z) = 0 + x(0)z^{-1} + x(T)z^{-2} + \dots + x(nT - T)z^{-n}$$

$$Y(z) = X(z)z^{-1} \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-1}$$

Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

z-dönüşümünün matematiksel ifadesi,

$$z = e^{sT}$$

$$kompleks frekans$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

$$z \text{ inin genliği}$$

$$|z| = e^{\sigma T}$$

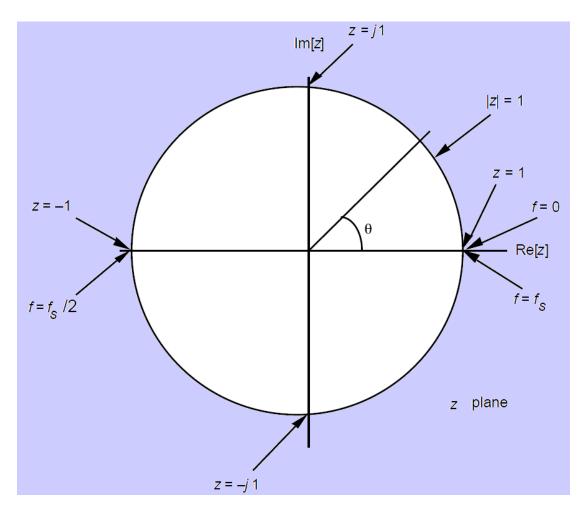
$$faz \ açısı$$

$$\angle z = \omega T$$

$$\sigma = 0 \ yani \ z \text{ inin genliği 1 alımırsa}$$

$$z = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$$

Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012



Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

Sayısal bir filtrenin kararlı olabilmesi için,

Filtrenin transfer fonksiyonunun tüm kutupları birim çember üzerinde veya içinde olmalıdır.

Şayet kutuplar birim çember üzerinde ise, tek olmalıdır.

Sıfırların filtrenin kararlılığına etkisi yoktur. Birim çember üzerinde herhangi bir yerde bulunabilirler.

Herhangi bir wT açısı birim çember üzerinde bir noktayı temsil eder.

$$\omega T = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

Şayet f = fs ise $\omega T = 2\pi' dir$. Yani örnekleme frekansının açısal yerleşimi 2π noktasıdır.

f = 0 ise $\omega T = 0$ olur. Yani DC 0°'de yerleşiktir.

Bir diğer frekans $f = f_s/2$ ise sayısal bir filtrenin işareti bozmadan işleyebileceği maksimum frekansı temsil eder. Bu nokta z düzleminde $\omega T = \pi$ 'ye karşılık gelir.

Transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olan filtreyi ele alalım.

$$H(z) = \frac{1}{3}(1+z^{-1}+z^{-2})$$

Filtrenin sıfır ve kutuplarını bulabilmek için transfer fonksiyonunu z^2/z^2 ile çarpalım.

$$H(z) = \frac{1}{3}(1+z^{-1}+z^{-2}) \times \frac{z^2}{z^2} = \frac{1}{3}\frac{(z^2+z+1)}{z^2}$$

Bu durumda filtrenin sıfırları aşağıdaki denklemin çözümü ile elde edilir.

$$z^2 + z + 1 = 0$$

Bu denklem çözülürse, denklemin sıfırları

$$z = -0.5 \pm j0.866$$

olarak bulunur.

Yani filtrenin sıfırları,

$$\omega T = \pm 2\pi/3 \ (\pm 120^{\circ})' te$$

yerleşiktir.

Filtrenin kutupları ise,

$$z^2 = 0$$
, $z = 0$

z düzleminin orijininde yerleşiktir.

Filtrenin 60 Hz'lik bir işareti bastırması için

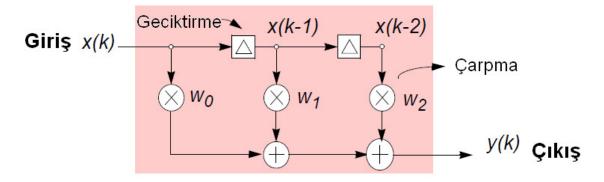
$$\omega T = 2\pi \frac{f}{f_s} = 2\pi/3$$

 f_s , örnekleme frekansı 180 Hz olmalıdır.

Filtrenin kutupları birim çember üzerindeki her noktaya eşit uzaklıkta oldukları için, filtrenin genlik cevabını bütün frekanslarda eşit şekilde etkileyeceklerdir.

FIR (Sonlu Darbe Cevaplı) filtreler birim darbe cevapları sonlu sayıda terim içeren filtrelerdir.

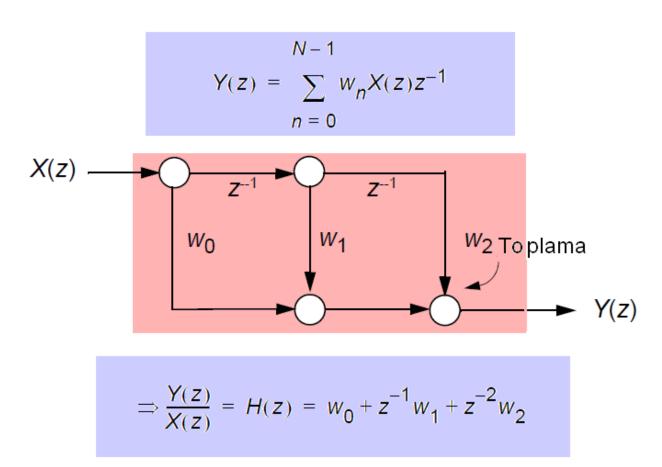
Filtre çıkışı, sadece şimdiki giriş ve geçmiş çıkış değerlerine bağlıdır. Filtre çıkışından girişine geri besleme yoktur.



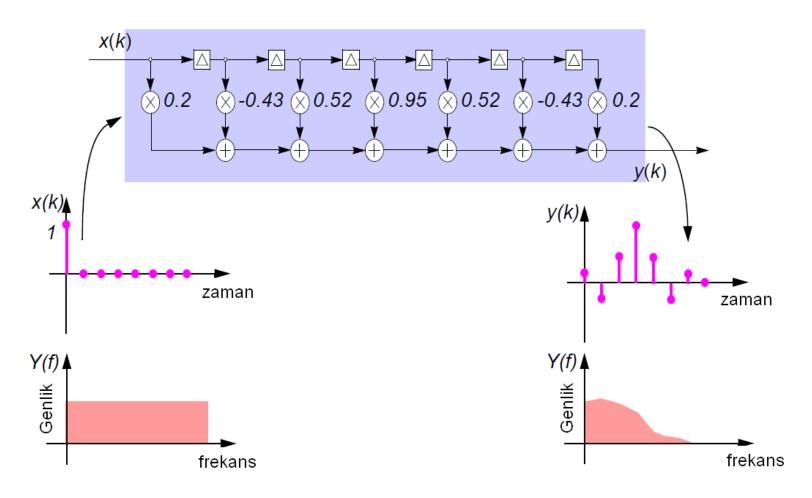
$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n x(k-n)$$

$$y(k) = x(k)w_0 + x(k-1)w_1 + x(k-2)w_2$$

Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

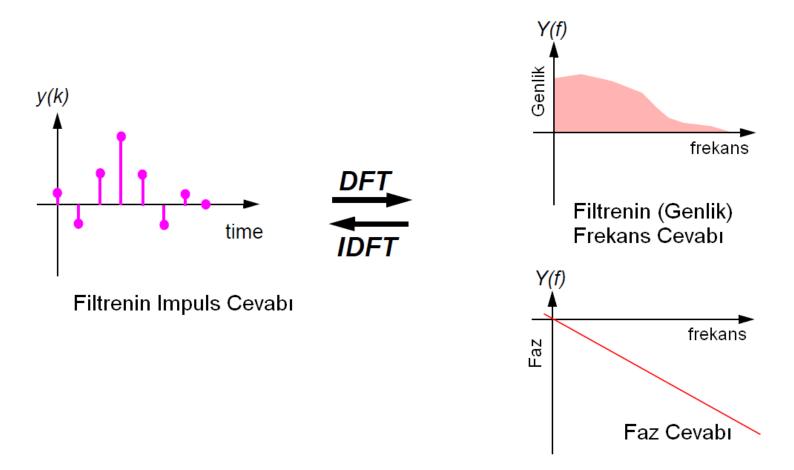


Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012



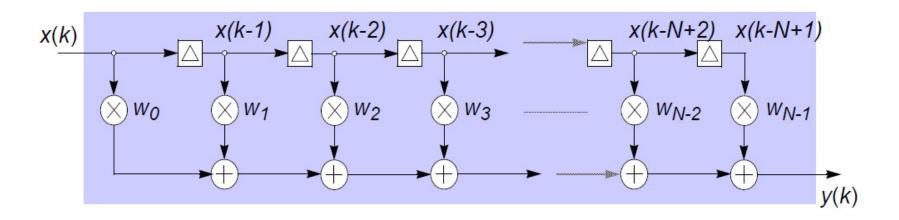
Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

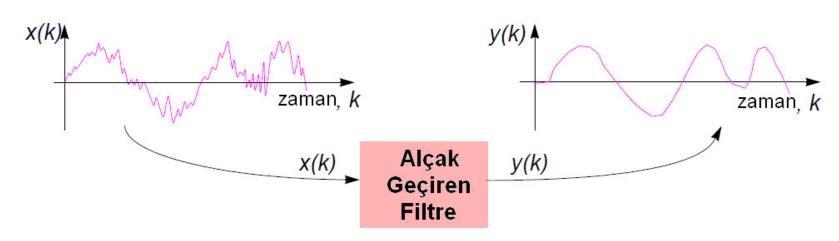
Frekans ve Faz Cevabi



Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

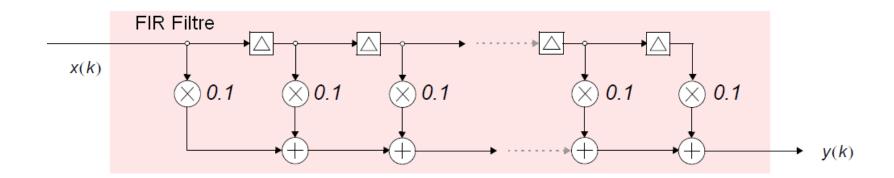
Alçak Geçiren Filtre

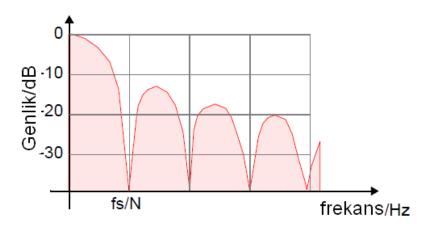




Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

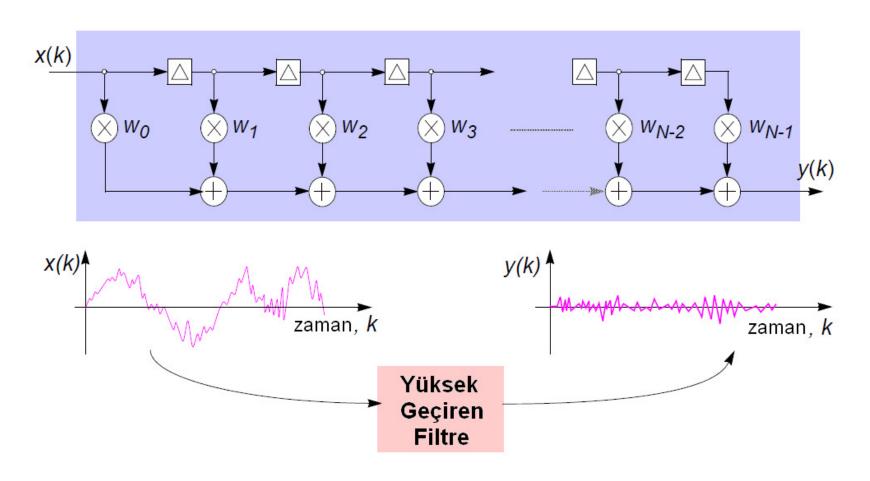
Alçak Geçiren Filtre





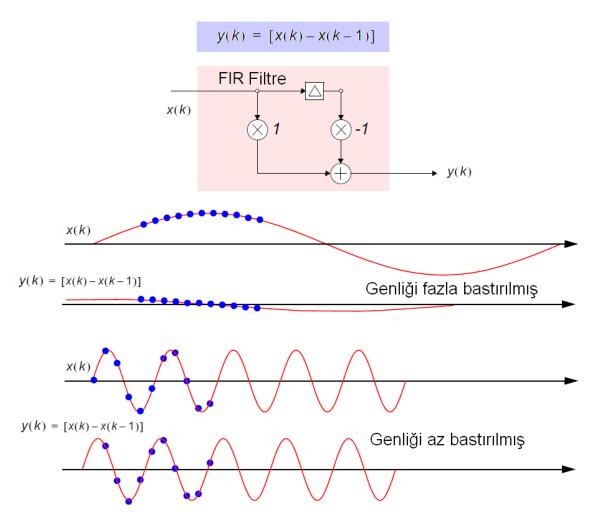
Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

Yüksek Geçiren Filtre



Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

Yüksek Geçiren Filtre



Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

Fourier Serileri Yöntemi ile FIR Filtre Tasarımı

Alçak geçiren filtre

$$C_n = \int_0^{v_1} Hd(v)\cos n\pi v dv = \frac{\sin n\pi v_1}{n\pi}$$

Yüksek geçiren filtre

$$C_n = \int_{v_1}^{1} Hd(v)\cos n\pi v dv = -\frac{\sin n\pi v_1}{n\pi}$$

Band geçiren filtre

$$C_n = \int_{v_1}^{v_2} Hd(v)\cos n\pi v dv = \frac{\sin n\pi v_2 - \sin n\pi v_1}{n\pi}$$

Band durduran filtre

$$C_n = \int_0^{v_1} Hd(v)\cos n\pi v dv + \int_{v_2}^1 Hd(v)\cos n\pi v dv$$
$$= \frac{\sin n\pi v_1 - \sin n\pi v_2}{n\pi}$$

Fourier Serileri Yöntemi ile FIR Filtre Tasarımı

 v_1 ve v_2 normalize kesim frekansları,

$$v_1 = f_c / f_N$$

 f_c , kesim frekansı, f_N Nyquist frekansı

$$f_N = \frac{f_s}{2}$$

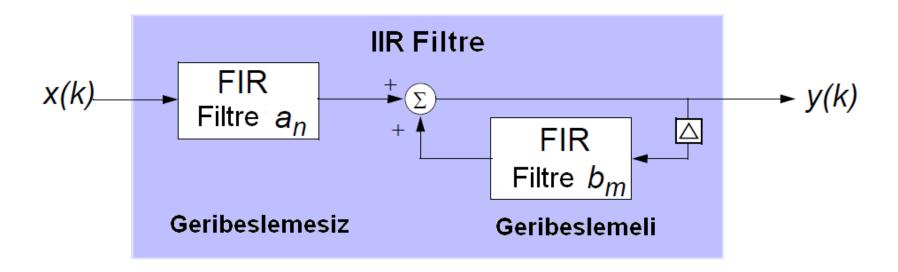
Fourier Serileri Yöntemi ile FIR Filtre Tasarımı

Filtre katsayıları h_n ,

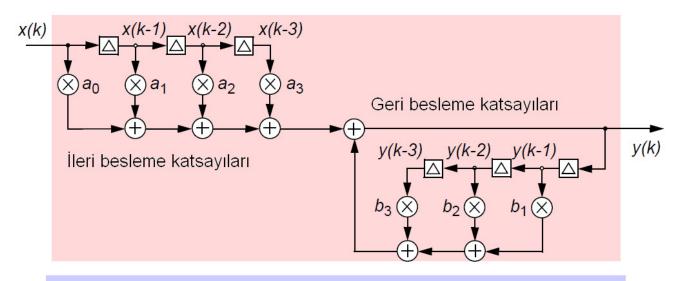
$$h_0 = C_5 = 0$$
 $h_{10} = C_5 = 0$
 $h_1 = C_4 = 0.0468$ $h_9 = C_4 = 0.0468$
 $h_2 = C_3 = 0.1009$ $h_8 = C_3 = 0.1009$
 $h_3 = C_2 = 0.1514$ $h_7 = C_2 = 0.1514$
 $h_4 = C_1 = 0.1872$ $h_6 = C_1 = 0.1872$
 $h_5 = C_0 = 0.2$

Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

IIR Filtreler



IIR Filtreler



$$y(k) = a_0x(k) + a_1x(k-1) + a_2x(k-2) + a_3x(k-3) + b_1y(k-1) + b_2y(k-2) + b_3y(k-3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx(k-n) + \sum_{m=1}^{\infty} b_my(k-m)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx(k-n) + \sum_{m=1}^{\infty} b_my(k-m)$$

Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

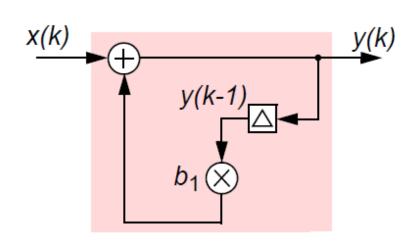
IIR Filtreler

$$Y(z) = a_0 X(z) + a_1 X(z) z^{-1} + a_2 X(z) z^{-2} + a_3 X(z) z^{-3} + ...$$

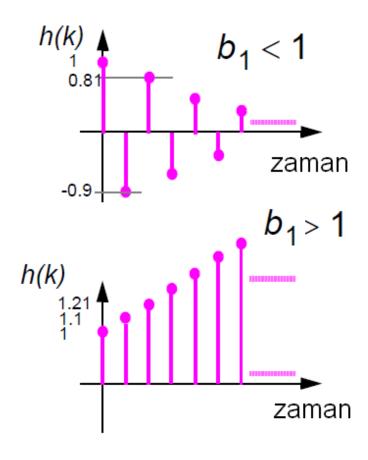
+ $b_1 Y(z) z^{-1} + b_2 Y(z) z^{-2} + b_3 Y(z) z^{-3}$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - b_3 z^{-3}}$$

IIR Filtrelerin Kararlılığı

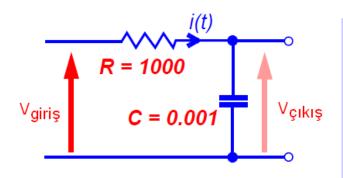


$$y(k) = x(k) + b_1 y(k-1)$$



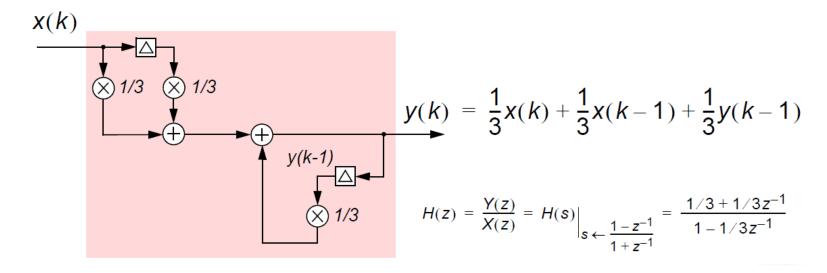
Bilineer dönüşüm kararlı bir analog filtrenin kararlı bir sayısal prototipini gerçeklemeyi garanti eder.

$$s = \frac{2}{T_s} \left[\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right]$$



Birinci dereceden Butterworth alçak geçiren filtre

$$H(s) = \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{s+1}$$



Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

Aşağıdaki tablo analog alçak geçiren filtreden diğer analog filtre tiplerine geçmek için kullanılır.

Alçak geçiren süzgeçten	Dönüşüm	Süzgeç derecesi
Alçak geçirene	$s \rightarrow s/\Omega_1$	N
Yüksek geçirene	$s \rightarrow \Omega_{\rm u}/s$	N
Bant geçirene	$s \rightarrow (s^2 + \Omega_u \Omega_l)/(s(\Omega_u - \Omega_l))$	2N
Bant durdurana	$s \rightarrow (s(\Omega_u - \Omega_l)/(s^2 + \Omega_u \Omega_l)$	2N

İkinci dereceden alçak geçiren filtrenin transfer fonksiyonu,

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

İkinci dereceden yüksek geçiren filtre için $s \rightarrow \Omega_u/s$,

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{\Omega_u}{s}\right)^2 + 1.414\left(\frac{\Omega_u}{s}\right) + 1} = \frac{s^2}{\Omega_u^2 + 1.414\Omega_u s + s^2}$$

Bilineer dönüşüm ile H(z) hesaplanırsa,

$$s \to \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{\left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^{2}}{\Omega_{u}^{2} + \sqrt{2}\Omega_{u}\left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) + \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^{2}}$$

$$H(z) = \frac{4(1-z^{-1})^2}{T^2 \Omega_u^2 (1+z^{-1})^2 + 2\sqrt{2}T\Omega_u (1-z^{-1})(1+z^{-1}) + 4(1-z^{-1})^2}$$

$$= \frac{4-8z^{-1} + 4z^{-2}}{(T^2 \Omega_u^2 + 2\sqrt{2}T\Omega_u + 4) + (2T^2 \Omega_u^2 - 8)z^{-1} + (T^2 \Omega_u^2 - 2\sqrt{2}T\Omega_u + 4)z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{\frac{4}{(T^2 \Omega_u^2 + 2T\sqrt{2}\Omega_u + 4)} + \frac{-8}{(T^2 \Omega_u^2 + 2\sqrt{2}T\Omega_u + 4)} z^{-1} + \frac{4}{(T^2 \Omega_u^2 + 2\sqrt{2}T\Omega_u + 4)} z^{-2}}{1 + \frac{(2T^2 \Omega_u^2 - 8)}{(T^2 \Omega_u^2 + 2\sqrt{2}T\Omega_u + 4)} z^{-1} + \frac{(T^2 \Omega_u^2 - 2\sqrt{2}T\Omega_u + 4)}{(T^2 \Omega_u^2 + 2\sqrt{2}T\Omega_u + 4)} z^{-2}}$$

$$a_{0} = \frac{4}{(T^{2}\Omega_{u}^{2} + 2\sqrt{2}T\Omega_{u} + 4)}$$

$$b_{1} = \frac{(2T^{2}\Omega_{u}^{2} - 8)}{(T^{2}\Omega_{u}^{2} + 2\sqrt{2}T\Omega_{u} + 4)}$$

$$a_{1} = \frac{-8}{(T^{2}\Omega_{u}^{2} + 2\sqrt{2}T\Omega_{u} + 4)}$$

$$b_{2} = \frac{(T^{2}\Omega_{u}^{2} - 2\sqrt{2}T\Omega_{u} + 4)}{(T^{2}\Omega_{u}^{2} + 2\sqrt{2}T\Omega_{u} + 4)}$$

$$a_{2} = \frac{4}{(T^{2}\Omega_{u}^{2} + 2\sqrt{2}T\Omega_{u} + 4)}$$

$$H(z) = \frac{a_{0} + a_{1}z^{-1} + a_{2}z^{-2}}{1 + b_{1}z^{-1} + b_{2}z^{-2}}$$

Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

Sayısal üst kesim frekansı 50 Hz, örnekleme frekansı 400 Hz olan filtrenin analog üst kesim frekansı,

$$\Omega_u = \frac{2}{T} \tan(\frac{\omega_D T}{2}) = \frac{2}{0.0025} \tan(\frac{2\pi 50 \cdot 0.0025}{2}) = 331.370 \quad Rad / sn$$

olarak bulunur. Böylece filtrenin katsayıları aşağıdaki gibi olur.

$$a_0 = 0.569$$
 $b_1 = -0.944$

$$a_1 = -1.138$$
 $b_2 = 0.333$

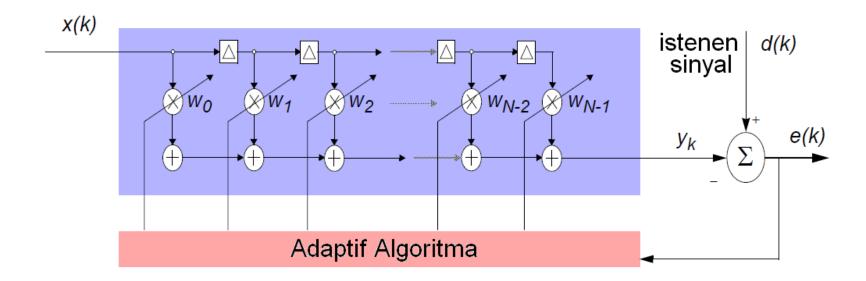
$$a_2 = 0.569$$

Tasarlanan filtrenin transfer fonksiyonu,

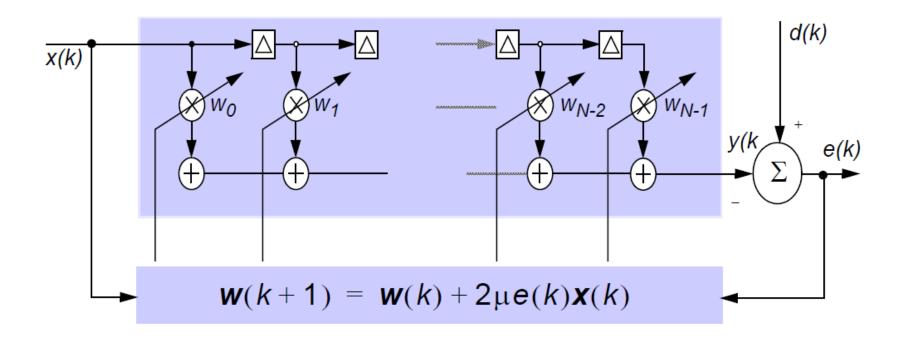
$$H(z) = \frac{0.569 - 1.138z^{-1} + 0.569z^{-2}}{1 - 0.944z^{-1} + 0.333z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

!!! Bilineer dönüşümle sayısal IIR filtre tasarımı yaparken, band geçiren ve band durduran filtre için birinci dereceden analog alçak geçiren filtrenin transfer fonksiyonu kullanılır.

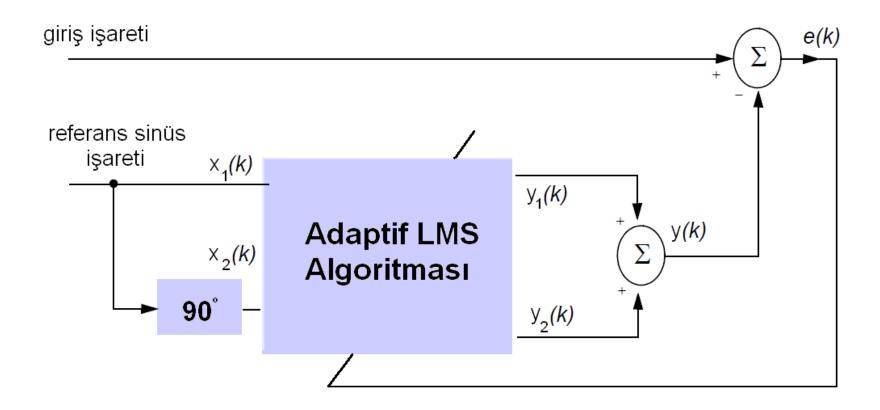
Adaptif Filtreler



Adaptif LMS Algoritması



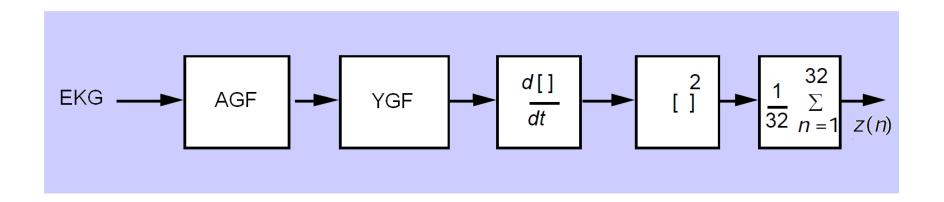
Adaptif Güç Hattı Filtresi



BÖLÜM 3

PAN-TOMPKINS ALGORITMASI

Pan-Tompkins Algoritması



Pan-Tompkins Algoritması (AGF)

Alçak geçiren filtrenin transfer fonksiyonu,

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-6})^2}{(1 - z^{-1})^2}$$

Fark denklemi,

$$y(nT) = 2y(nT - T) - y(nT - 2T) + x(nT) - 2x(nT - 6T) + x(nT - 12T)$$

Filtrenin kesim frekansı 11 Hz, 200 Hz örnekleme frekansı için gecikme 25 ms, 0.3 f/f_s 'te 35 dB zayıflatma (60 Hz)

Pan-Tompkins Algoritması (YGF)

Yüksek geçiren filtre, bir tüm geçiren filtreden transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen bir alçak geçiren filtrenin gecikme ile çıkarılmasıyla elde edilir.

$$H_{lp}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-32}}{1 - z^{-1}}$$

Fark denklemi,

$$y(nT) = y(nT - T) + x(nT) - x(nT - 32T)$$

Yüksek geçiren filtrenin transfer fonksiyonu ve fark denklemi,

$$H_{hp}(z) = \frac{P(z)}{X(z)} = z - 16 - \frac{H_{lp}(z)}{32}$$

$$p(nT) = x(nT - 16T) - \frac{1}{32} [y(nT - T) + x(nT) - x(nT - 32T)]$$

Pan-Tompkins Algoritması (Türev Alıcı)

Türev alıcının transfer fonksiyonu,

$$H(z) = 0.1 (2 + z^{-1} - z^{-3} - 2z^{-4})$$

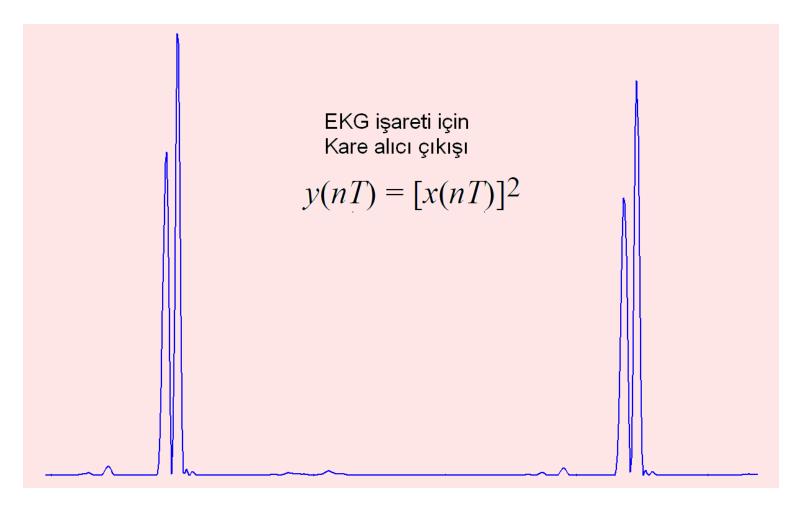
Fark denklemi,

$$y(nT) = \frac{2x(nT) + x(nT - T) - x(nT - 3T) - 2x(nT - 4T)}{8}$$

Pan-Tompkins Algoritması (Türev Alıcı)



Pan-Tompkins Algoritması (Kare alıcı)



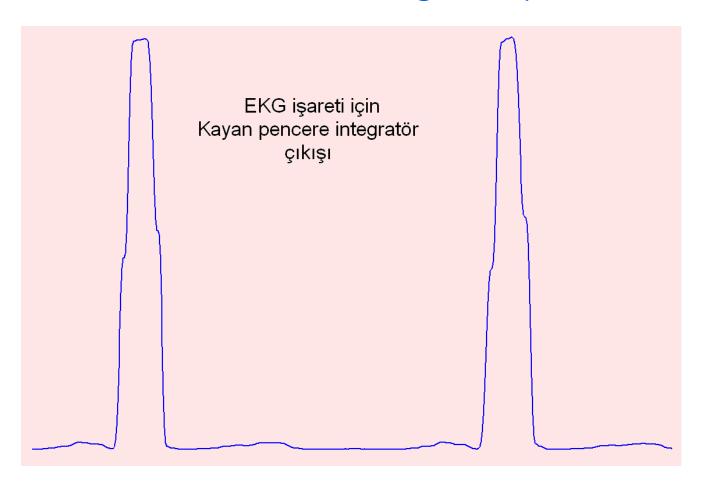
Pan-Tompkins Algoritması (Kayan Pencere Integratör)

Kayan pencere integratörün fark denklemi,

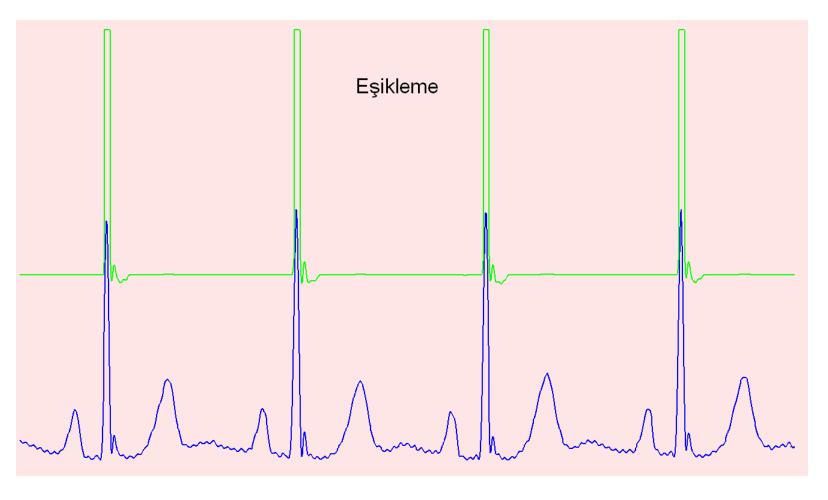
$$y(nT) = \frac{1}{N} \left[x(nT - (N-1)T) + x(nT - (N-2)T) + \dots + x(nT) \right]$$

N pencere boyutudur ve olabilecek maksimum QRS genişliği göz önünde bulundurularak deneysel olarak bulunur. Pan ve Tompkins 200 Hz örnekleme frekansı için 30 örnek uzunluğunda bir pencere kullanmışlardır.

Pan-Tompkins Algoritması (Kayan Pencere Integratör)

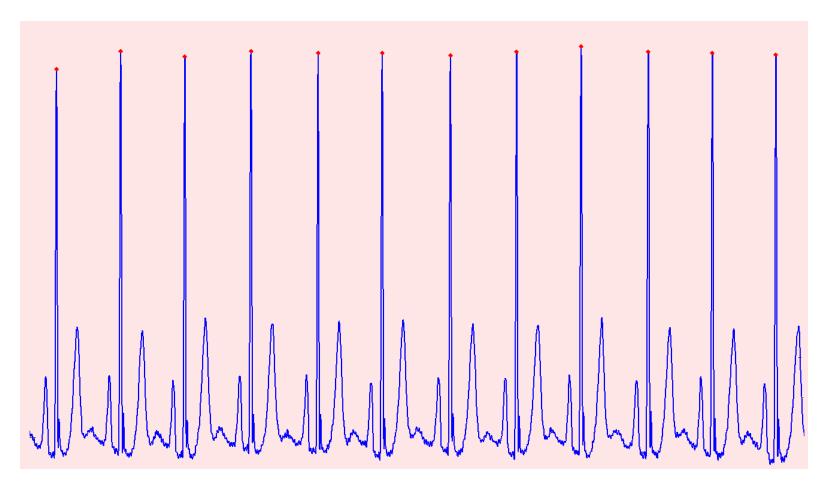


Eşikleme



Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012

Sonuç



Araş. Gör. Berat Doğan 11/04/2012



ÖDEV 1

Fourier serileri yöntemiyle, üst kesim frekansı 72 Hz, alt kesim frekansı 44 Hz olan 23 tap FIR band durduran filtreyi tasarlayınız. Tasarladığınız filtrenin frekans cevabını çizdiriniz. Derste size verilecek EKG kaydını tasarladığınız filtre ile süzünüz ve 60 Hz şebeke gürültüsünün bastırıldığını işaretin filtrelenme öncesinde ve sonrasında frekans spektrumunu çizerek gösteriniz. (Size verilecek EKG işareti 360 Hz ile örneklenmiştir.)

ÖDEV 2

Bilineer transform yöntemiyle üst kesim frekansı 61 Hz, alt kesim frekansı 59 Hz olan IIR band durduran filtreyi tasarlayınız. Tasarladığınız filtrenin frekans cevabını çizdiriniz. Derste size verilecek EKG kaydını tasarladığınız filtre ile süzünüz ve 60 Hz şebeke gürültüsünün bastırıldığını işaretin filtrelenme öncesinde ve sonrasında frekans spektrumunu çizerek gösteriniz. (Size verilecek EKG işareti 360 Hz ile örneklenmiştir.)

ÖDEV 3

Pan-Tompkins algoritması yardımıyla derste verilecek EKG kaydının R tepelerinin yerini tespit ederek işaret üstünde çizdiriniz ve bir dosyaya yazdırınız. Size verilecek EKG kaydını filtrelemek için Pan-Tompkins algoritmasının ilk iki basamağı olan AGF ve YGF işlemleri yerine, işareti derste anlatılan adaptif güç hattı filtresini gerçekleyerek süzünüz. Daha sonra türev alıcıdan itibaren Pan-Tompkins algoritmasını kullanabilirsiniz.