



PAMUKKALE
ÜNİVERSİTESİ

Mühendislik Fakültesi,
Makine Mühendisliği Bölümü

Zekeriya Girgin
DENİZLİ, 2016

OTOMATİK KONTROL

DERS NOTLARI

Önsöz

Mühendislikte vermeye başladığım Otomatik Kontrol dersinin daha iyi anlaşılabilmesi için bu notlar hazırlanmaya başlandı. Şu anda eksikleri oldukça fazla olmasına rağmen yayınlanması daha uygun olacağı kanaatindeyim.

Şimdilik birçok eksikleri bulunmaktadır. İnşaallah gelecek yıllarda daha düzgün hâle getirilecektir. Aslında İngilizce kaynaklarda Otomatik Kontrol ile ilgili çok daha geniş ve ayrıntılı açıklamalar bulunmasına rağmen, Türkçe kaynaklarda fazla olmadığından dolayı bu kısma ağırlık verilecektir.

Çözümler yeri geldiğinde Simülasyon programları ile de gösterilecektir.

Ders notlarından Türkçe bilen tüm öğrencilerin parasız olarak faydalananabilmesi için PDF formatı tercih edildi. Böylece öğrenciler derste aynı şeyleri yazmak yerine, zamanlarını anlamaya ayırmayı ve daha başarılı olması arzu edildi.

Ders notları ilk defa yazılmaya başlandığı için hataları olacaktır. Fakat ders esnasında ve zamanla bu hatalar en az hale getirilecektir. Bu zamana kadar öğrencilere hiçbir şey vermemektense hatalı da olsa yayınlanması daha faydalı olacağı kanaatindeyim.

Notların genişletilmesine mümkün olduğunda devam edilecektir. Yani zaman geçtikçe daha düzgün ve hatasız hale getirilecektir. Ayrıca yeni bölümler de eklenecektir (Modelica kökenli (MapleSim, Dymola, Matlab\Simulink) gibi program örnekleri). Ders notlarında görülen hataların tarafına bildirilmesi beni daha da memnun eder. Böylece daha düzgün hale gelecektir. İnşâallah ilaveler yapıldıkça yeni hâliyle tekrar web sayfasından tekrar yayınlanmaya devam edecektir.

Doç.Dr. Zekeriya Girgin

Ekim 2016

Pamukkale Üniversitesi

Mühendislik Fakültesi

Makine Mühendisliği Bölümü

Kınıklı Kampüsü 20070

Denizli, Türkiye

Web page:

<http://zgirgin.pau.edu.tr/>

“İnsan, ipi boğazına sarılıp, istediği yerde otlamak için başıboş bırakılmamıştır; belki bütün amellerinin sûretleri alınıp yazılır ve bütün fiillerinin neticeleri muhasebe için zatdedilir.”

“Ahirette seni kurtaracak bir eserin olmadığı takdirde, fâni dünyada bıraktığın eserlere de kıymet verme”

*Otomatik Kontrol Ders Notları, Pamukkale Üniversitesi, Z.Girgin
İçindekiler*

Önsöz.....	1
GİRİŞ	5
1. Kontrol Sistemleri:.....	5
1.1 Blok Diyagramı:	5
1.2 Toplama Noktası (Summing Point):.....	6
1.3 Dağılma Noktası (Takeoff Point):.....	6
1.3.1 Uygulama :	6
1.3.2 Uygulama :	7
1.3.3 Uygulama :	8
1.3.4 Uygulama :	9
1.3.5 Uygulama :	9
1.3.6 Uygulama :	10
1.3.7 Uygulama :	10
1.3.8 Uygulama :	11
2. Laplace Dönüşümleri	11
2.1 A (s)'de Farklı Kökler Olması Durumu	12
2.1.1 Laplace Dönüşüm Tablosu	13
2.1.2 Laplace Dönüşüm Özellikleri	14
2.2 A (s)'de Köklerin Tekrarlaması Durumu	17
3. Blok diyagramı cebri ve blokların indirgenmesi	21
4. İşaret Akış Grafikleri: Tanımlamalar.....	26
4.1 İşaret Akış Grafiği Cebri.....	27
4.2 Lineer Sistemlerin İşaret Akış Grafiği İle Gösterimi.....	28
4.3 İşaret Akış Denklemi.....	29
4.3.1 Uygulama	29
4.3.2 Uygulama	30
4.3.3 Uygulama	32
4.3.4 Uygulama	34
4.3.5 Uygulama	35
4.3.6 Uygulama	36
4.3.7 Uygulama	42
4.3.8 Uygulama	43
4.3.9 Uygulama	44
4.3.10 Uygulama	45
4.3.11 Uygulama	47
4.3.12 Uygulama	48

5.	Kararlılık Kriterleri	50
5.1	Routh Kriteri.....	52
5.1.1	Uygulama	52
5.1.2	Uygulama	52
5.1.3	Uygulama	53
5.1.4	Uygulama	53
5.1.5	Uygulama	53
5.1.6	Uygulama	54
5.1.7	Uygulama	54
5.1.8	Uygulama	55
5.1.9	Uygulama	55
5.1.10	Uygulama	56
5.1.11	Uygulama	57
5.2	Hurwitz Kriteri	59
5.2.1	Uygulama	59
5.2.2	Uygulama	59
5.2.3	Uygulama	60
5.2.4	Uygulama	60
5.3	Sürekli Bölme Kriteri	60
5.3.1	Uygulama	61
5.3.2	Uygulama	61
5.3.3	Uygulama	62
6.	Kontrol Elemanları	62
6.1	İki konumlu veya Açıkl-Kapalı Kontrol Elemanı (Two-position or on-off Controllers)	63
6.2	Orantı Kontrol Elemanı (Proportional Controller)	63
6.3	İntegral Kontrol Elemanı (Integral Controller)	63
6.4	Orantı + İntegral Elemanı (PI) (Proportional+Integral Controller).....	64
6.5	Orantı+Diferansiyel Kontrol Elemanı (PD) (Proportional + Differential Controller).....	65
6.6	Orantı+Integral+Diferansiyel Kontrol Elemanı (PID = Proportional+Integral Differential Controller).....	65
6.7	Kendi Kendine Kontrol Eden Sistemler	66
7.	Hidrolik Kontrol Elemanları	66
7.1	Hidrolik İntegral Elemanı.....	66
7.2	Hidrolik Orantı Elemanı.....	67
7.3	Amortisörler	68
7.4	Hidrolik Orantı + İntegral Elemanı.....	70
7.5	Hidrolik Orantı + Diferansiyel Elemanı.....	71
7.6	Hidrolik Orantı + Integral + Diferansiyel Elemanı	72

7.7 Uygulamalar:	72
7.7.1 Uygulama :	72
7.7.2 Uygulama :	75
7.7.3 Uygulama :	76
8. Lineer Olmayan Fonksiyonların Lineerleştirilmesi	78
8.1.1 Misal	80
8.1.2 Misal	80
8.1.3 Misal	81
9. Zaman Cevabı (Time Response)	82
9.1 Birinci Mertebeden Sistemler (First Order Systems)	82
9.1.1 Misal :	84
9.2 İkinci Mertebeden Sistemler (Second Order Systems)	84
10. Root Locus Metodu (The Root-Locus Method)	87
10.1 Negatif geri beslemeli sistemlerde Root Locus Metodu ile Çizim	91
10.1.1 Misal:	93
10.1.2 Misal:	94
10.1.3 Misal:	96
10.1.4 Misal:	97
10.1.5 Misal:	99
10.1.6 Misal:	100
10.1.7 Misal:	103
10.1.8 Misal:	105
10.1.9 Misal:	108
10.1.10 Misal:	109
10.2 Pozitif geri beslemeli sistemlerde Root Locus Metodu ile Çizim	112
10.2.1 Misal:	113
10.3 Kutup ilavesi (Addition of Poles to G(s) H(s))	115
10.4 Sıfır ilavesi (Addition of Zeros to G(s) H(s))	115
10.5 Root-Locus ile Dizayn (Sisteme kutup ve sıfır eklemenin etkileri)	115
10.5.1 Root-Locus ile Lead Kompanzasyon (Lead Compensation with Root-Locus method)	
115	
10.5.2 Root-Locus ile Lag Kompanzasyon (Lag Compensation with Root-Locus method)	131
10.5.3 Root-Locus ile PD(Orantı+Integral) Kontrol (PD Controller using Root-Locus method)	
136	
11. Durum Uzay Metotları (State-Space Methods)	139
11.1 Durum Denkleminin Transformasyonu (Transforming the State Equations)	140
11.2 Direkt Programlama	141
11.3 Paralel Programlama	142

11.4	Seri Programlama.....	143
11.5	Genel Programlama.....	144
11.5.1	Uygulama	146
11.5.2	Uygulama	149
11.5.3	Uygulama	152
12.	Frekans Tepkisi Analizi (Frequency Response Analysis).....	153
12.1	Bode Grafiği (Bode Diagram)	153
13.	Matlab Control System Toolbox	154
13.1	Model bağlantıları (Model Interconnection).....	155
13.1.1	feedback.....	155
13.1.2	parallel.....	155
13.1.3	series.....	155

GİRİŞ

Otomatik kontrol uygulaması günlük hayatımızda sıkça kullanılmaktadır. Temel olarak kapalı devre (geri beslemeli) ve açık olmak üzere iki kısma ayrılabilir. Burada yalnızca geri beslemeli kontrol sistemleri inceleneciktir. Ayrıca kontrol elemanlarının malzemesine bağlı olarak da sınıflandırmak mümkündür. Hidrolik, mekanik, pnömatik, elektronik veya bileşenleri şeklinde olabilir. Ayrıca kontrol elemanlarını gösterdikleri davranışa bağlı olarak da sınıflandırmak mümkündür (Oranı(P), Integral(I), vs. şeklinde).

Bir Kontrol devresinin analiz veya sentez edilebilmesi için; 1. Fiziksel sistemin matematiksel modeli elde edilir. 2. Gerekli bağıntılar yazılır. 3. Sistemin Blok diyagramı çizilir. 4. Daha basit gösterim için, blok diyagramından işaret akış grafiği çizilir. 5. Elde edilen işaret akış grafiğinden sistemin transfer fonksiyonları veya kararlı olup olmadığı veya kararlı olması için hangi aralıklarda olması gerekiği gibi hesaplamalar elde edilir.

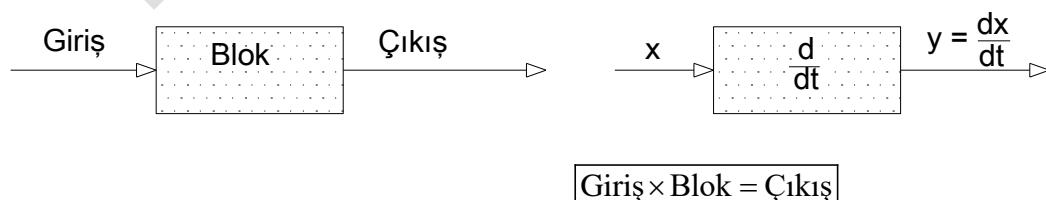
İleride bunlar detaylarıyla inceleneciktir.

1. Kontrol Sistemleri:

Kontrol sistemin anlaşılabilmesi açısından aşağıdaki temel tanımlamaların bilinmesi gereklidir.

1.1 Blok Diyagramı:

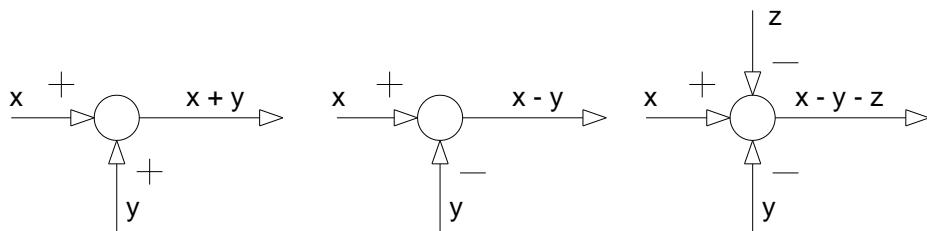
Fiziksel bir sistemin giriş ve çıkışları arasındaki, sebep sonuç ilişkilerinin resimle (çizim) anlatılış şecline denir. Blok diyagramını oluşturan parçalara ise, eleman denir. Blok diyagramının en basit şekli; tek blok ve bir giriş çıkıştan oluşur (bakınız şekil:1.1).



Dikdörtgenin içi, bloğu tanımlar ve genellikle elemanın tipi veya matematiksel bir işlemin tanımı içine yazılır. Blokta kullanılan oklar işlemin akış yönünü belirler.

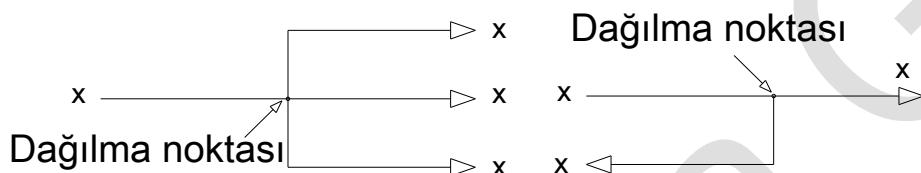
1.2 Toplama Noktası (Summing Point):

Blok küçük bir daire şeklinde olduğunda buna toplama noktası denir. Toplama noktasına gelen oklarda artı(+) veya eks(-) işaretleri bulunmalıdır. Toplama noktasına gelen giriş sayısı bir veya daha fazla olduğu halde çıkış sadece bir tanedir ve çıkışa işaret konulmaz.



1.3 Dağılma Noktası (Takeoff Point):

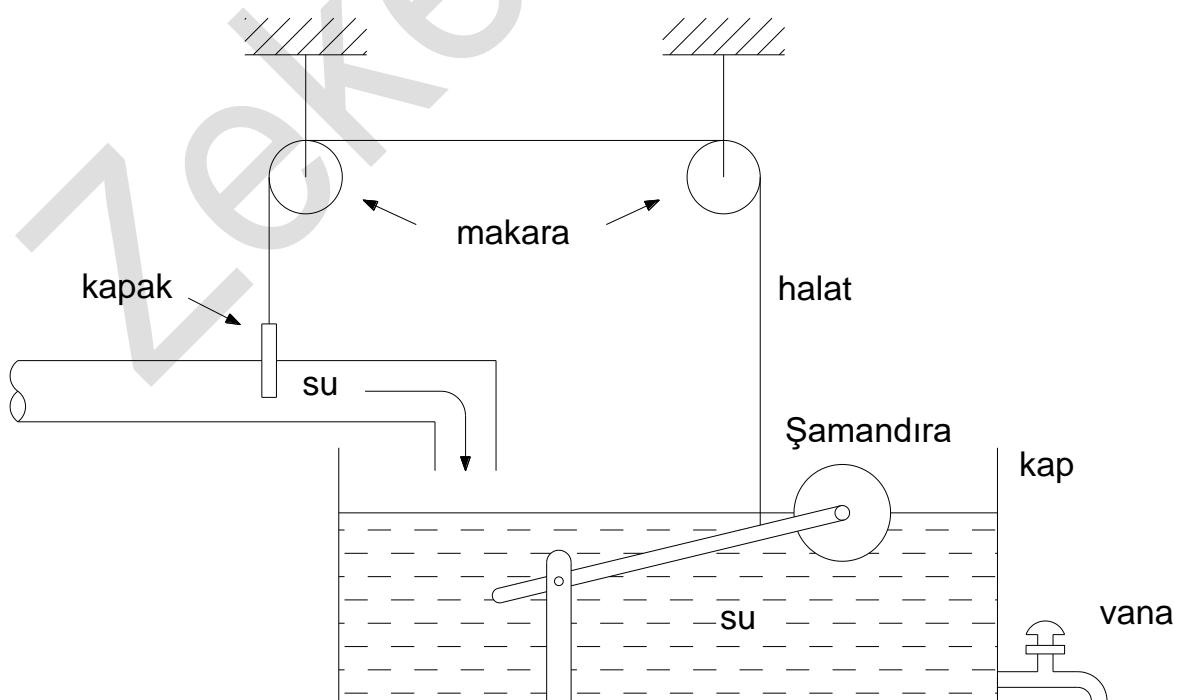
Gelen bir sinyalin, birden fazla kola çıkışını göstermek için dağılma noktası kullanılır ve nokta (•) ile gösterilir. Giriş bir tane olduğu halde çıkış iki veya fazladır. Bütün çıkış kollarındaki değerler giriş ile aynıdır. Örneğin bir insan sesinin iştilmesinde bir ile bin birdir veya evlerdeki elektrik 220V ile eve gelir. Bina içerisinde birçok dala (kola) ayrıldığı halde bütün dallardaki (kollardaki) voltaj yine 220V tur.



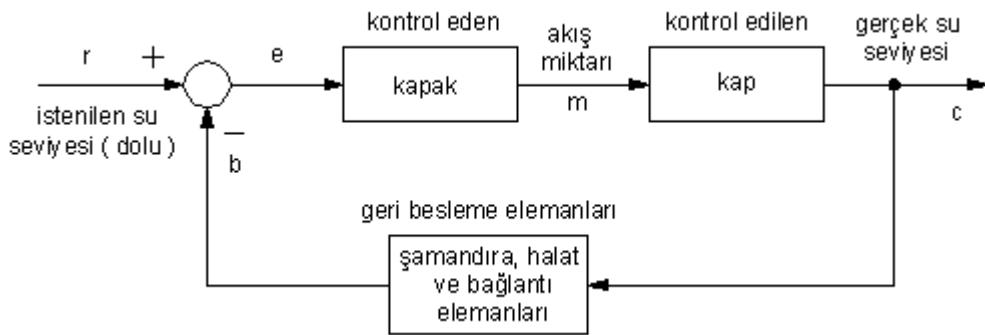
Gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin kontrol sistemlerinde nasıl ifade edildiği aşağıdaki uygulamalarda gösterilmiştir.

1.3.1 Uygulama :

Aşağıdakide negatif geri beslemeli kontrol sistemi verilmektedir. Tanktaki su seviyesi yükseldiğinde, yüzeyi yükselmekte ve dolayısıyla palangaya bağlı olan halat sayesinde su girişini engelleyen kapak aşağı inmektedir. Su seviyesi azaldığı takdirde kapak geri açılmakta ve su girişini serbest bırakmaktadır.



Bu sisteme ait blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



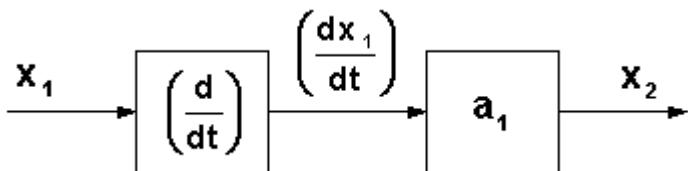
1.3.2 Uygulama :

Aşağıda verilen denklemlerin blok diyagramlarını çiziniz.

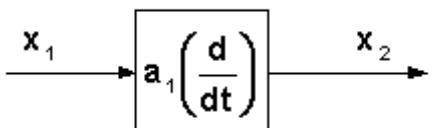
$$a) x_2 = a_1 \left(\frac{dx_1}{dt} \right) \quad b) x_3 = \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt} - x_1 \quad c) x_4 = \int x_3 dt$$

Çözüm:

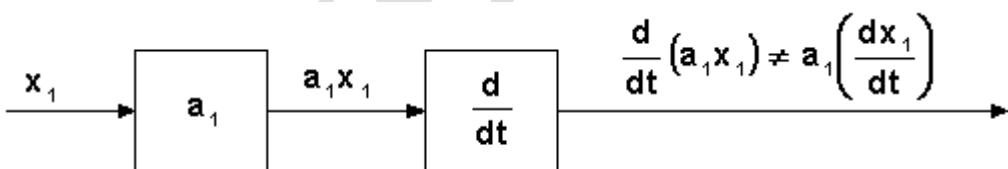
a)



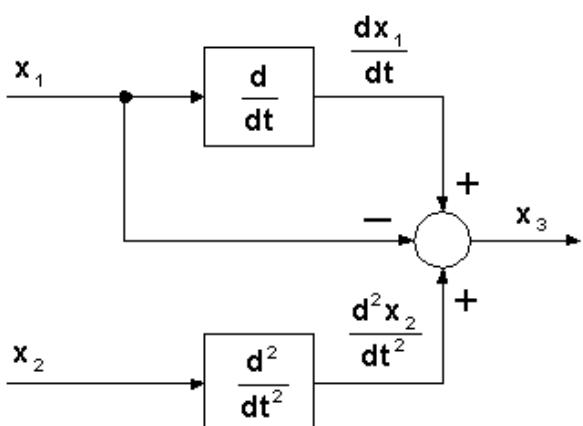
veya



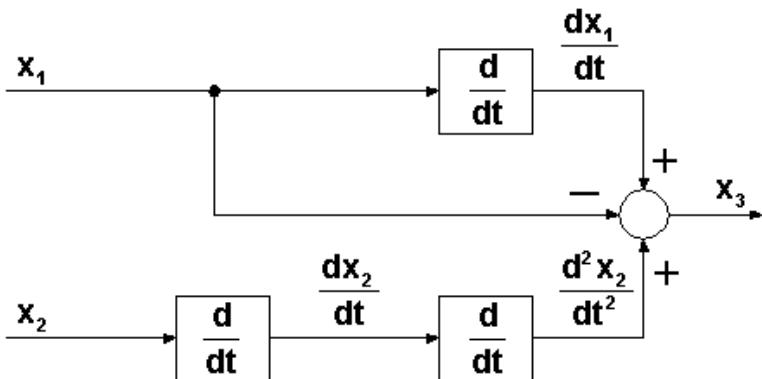
veya



b)

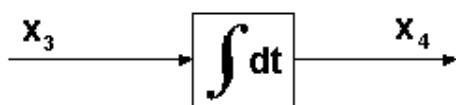


Kontrol elemanları seri olarak bağlılığı takdirde birleştirilebilir. Aynı örnek;



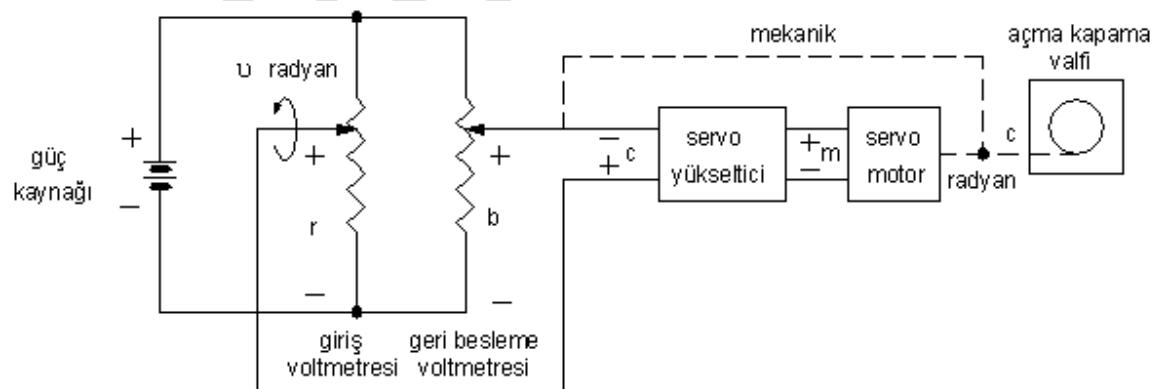
şeklinde de olabilir.

c)

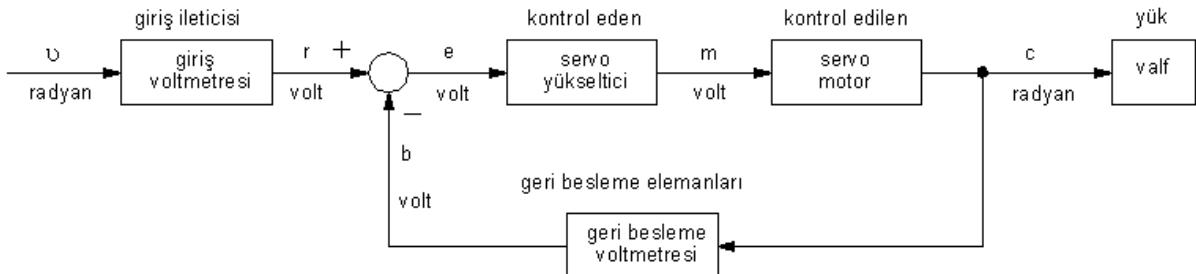


1.3.3 Uygulama :

Aşağıda verilen servo mekanizmanın fonksiyonu suyu açmak ve kapamaktır. Sistemin girişindeki döner tipli voltmetre, karşısındaki Batarya voltaj kaynağına bağlıdır. Voltmetrenin hareket edebilen üçüncü ucu, açısal konumla kalibre edilmiştir. Çıkış ucu ise, hız yükseltici (servo amplifier) diye adlandırılan terminale elektrikle bağlanmıştır. Hız yükseltici, hızı değiştirebilen elektrik motorunun (servomotor) çalışması için gerekli olan voltajı desteklemektedir. Servomotor ise mekanik bir kolla su valfına bağlıdır. Yani motorun dönmesiyle, su valfi açılmakta veya kapanmaktadır. Valfin yük etkisi ihmali edilmektedir. Motor milinin 360° dönmesiyle, valf tamamen açılmaktadır. Ayrıca, ikinci voltmetrenin (geri besleme voltmetresi) hareket edebilen ikinci ucu paralel olarak ve sabit şekilde giriş voltmetresine bağlıdır. Belli bir açı miktarı kadar giriş döndürüldüğünde, aradaki fark servo amplifier ile yükseltilerek motora iletilir. Motor dönmeye başlar. Fakat motordan alınan diğer bir uç geri besleme voltmetresine verildiğinden buda aradaki farkı düşürür. Yani motor istenilen konuma geldiğinde voltaj farkı sıfır olduğu için motor durur. Verilen açı ters yöne alınırsa motor ters yönde dönmeye başlar ve yine belirlenen konuma gelince durur.

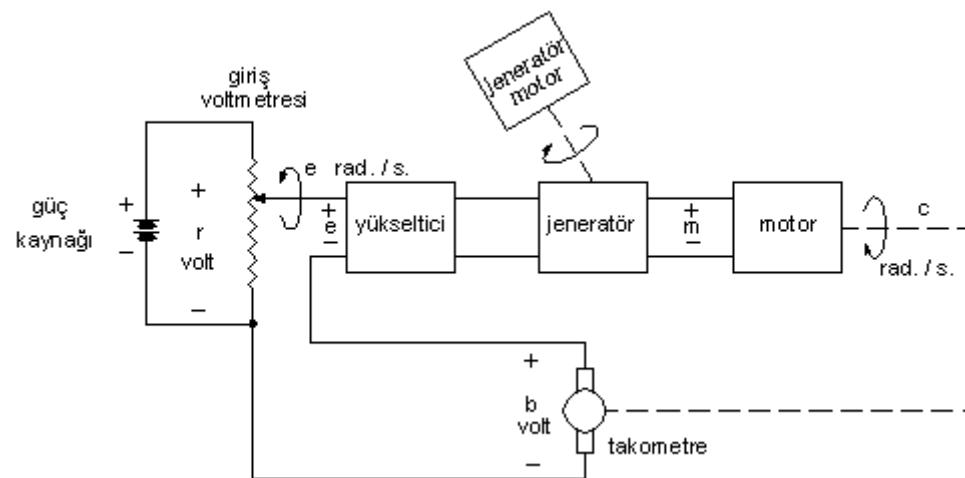


Bu sistemin Blok diyagramı şematik olarak aşağıdaki gibi çizilebilir. Şekilde görüldüğü gibi giriş (input) ve geri besleme (feedback) voltmetre voltajları aynı olduğunda sistem hareketsizdir. Buradaki kütlelerin etkisinden dolayı gerçekte sistem hemen durmaz, salınım yaparak durur.

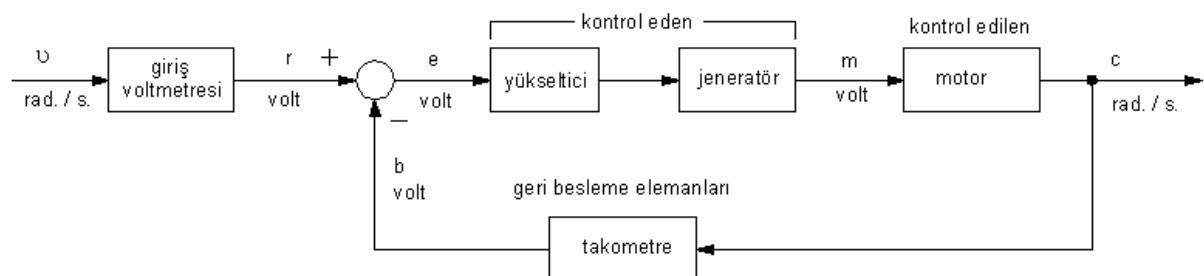


1.3.4 Uygulama :

Aşağıda şematik olarak verilen, basit bir hız kontrol sisteminin (velocity servomechanism) blok diyagramını çiziniz.

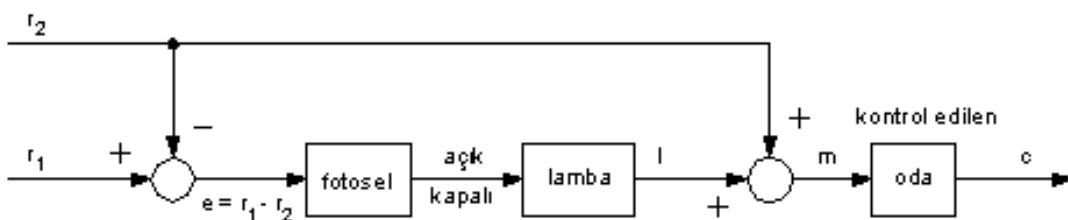


Döner tipli voltmetre vardır ve rad/s cinsinden kalibre edilmiştir. (Motor milinde herhangi bir dış yük yok.) batarya voltaj kaynağı, hem giriş voltmetresini hem de motoru döndürmektedir. Bataryadan alınan voltaj giriş voltmetresine bağlı olduğundan rad/s cinsinden verilen büyüklüğün bir ucu direk olarak yükselticiye, diğer ucu ise takometreye bağlıdır.



1.3.5 Uygulama :

Fotoselli ışık açma-kapama düğmesiyle çalışan bir lambanın odanın karanlığına bağlı olarak çalışması için, bu sistemin blok diyagramını çiziniz.



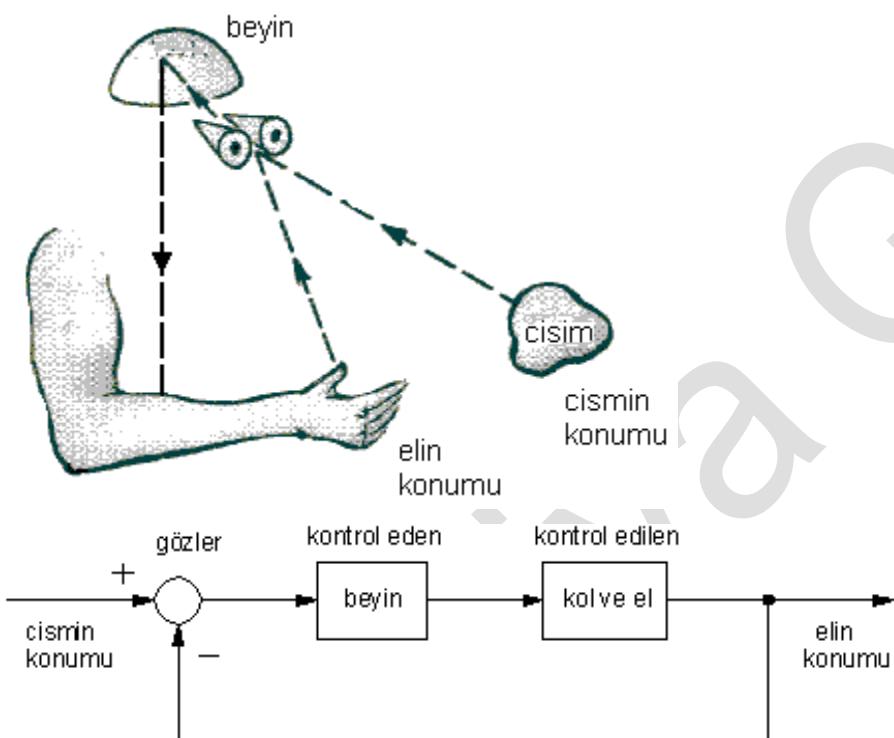
Çözüm : Odadaki ışık yoğunluğu fotoselin çalışması için gerekli yoğunluktan daha fazla veya ona eşit olmalıdır. Fotosel ve lamba kontrol elemanlarıdır. Kontrol sinyali odayı aydınlatan ışık

Otomatik Kontrol Ders Notları, Pamukkale Üniversitesi, Z.Girgin yoğunluğudur. Bu da güneş ve lambadan gelen ışıkla oluşmaktadır. En az miktardaki ışık yoğunluğu rı , lamba tek başına açıkken (güneş ışığı yok) elde edilen ışık yoğunluğuna eşittir.

1.3.6 Uygulama :

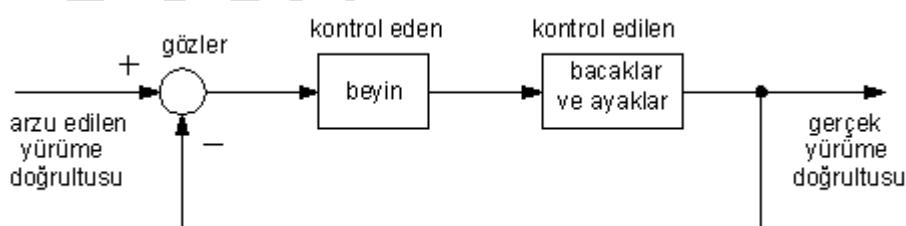
Bir insanın eliyle bir nesneye ulaşması için yaptığı davranışın blok diyagramını şematik olarak çiziniz.

Çözüm: Bu kontrol sisteminin temel elemanları; beyin(brain), kol(arm) ,el(hand) ve gözler(eyes). Giriş(Input);nesnenin konumudur. Çıkış(Output); elin konumudur. Aşağıdaki şekilde verilen kesik çizgiler ve oklar; bilgi akışının yönünü göstermektedir. Gözler insan eli ile nesne arasındaki farkı fark eder ve beyine iletir. Beyin buna göre koldaki sınırları uyararak harekete geçirir. El buna göre hareket ederken, göz sürekli olarak nesne ile el arasındaki farkı algılar ve el nesneye gereği kadar yaklaştığında beyin, el parmaklarını uyararak cismi tutmasını sağlar. Cisim tutulurken parmak uçları sensor(algilayıcı) vazifesini görür.



1.3.7 Uygulama :

İnsan yürüme sisteminin blok diyagramını çiziniz.

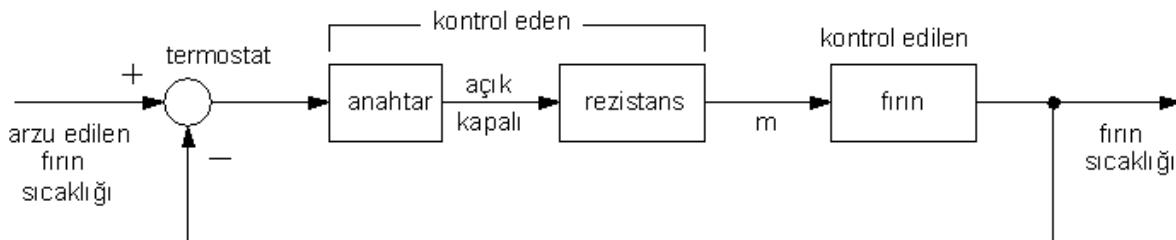


Çözüm: İstenilen hareket yönü (desired walk direction) girişdir. Gerçekleşen hareket yönü (Actual work direction) çıkıştır. Gözler(eyes) aradaki farkı görür ve beyine bildirir. Beyin de bu farka bağlı olarak bacaklara ve ayaklara uyarı göndererek onları yönlendirir.Bu arada göz hep ölçmeye devam eder. Hata payı olmadığı takdirde bacaklar ve ayaklar aynı şekilde devam eder. Eğer insan alkollü olduğu takdirde toplama noktasındaki fark ölçülemeyeceği için (gerçekleşen yön ile istenilen hareket yönü arasındaki fark), büyük hatalar meydana gelir.

1.3.8 Uygulama :

Sıcaklığını otomatik olarak ayarlayıp belirli seviyede tutan elektrikli fırının çalışmasıyla ilgili blok diyagramını çiziniz.

Çözüm : Bizim ayarladığımız sıcaklığı girişti. Fırının(Oven) gerçek sıcaklığı ise çıkıştır. Fırının sıcaklığı, ayarlanan(referans) değerden küçük olduğu takdirde, termostat elektrik düğmesini(switch) açar ve ısıtıcı(Heater), (rezistans) çalışmaya başlar. Isıtıcı çalışınca, fırının sıcaklığı artar ve istenilen değeri aşınca, termostat elektrik düğmesini kapatır ve fırının sıcaklığı yükselmesi durdurulmuş olur.



Sistemdeki çıkış herhangi bir şekilde giriş etkilemiyorsa açık devreli kontrol sistem, etkiliyorsa kapalı devreli (geri beslemeli) kontrol sistem olarak adlandırılır.

Geri beslemeli kontrol devreleri, kendi arasında, pozitif veya negatif geri beslemeli olmak üzere iki kısma ayrılır. Sistemde meydana gelen hata miktarı düzeltilmeye çalışılıyorsa *negatif geri beslemeli*, artırılmaya çalışılıyorsa *pozitif geri beslemeli* olarak adlandırılır. Yukarıdaki elektrikli fırın veya su tankının çalışma prensibi, negatif geri beslemeye örnektir. Girişten başlayıp çıkışa doğru giden yol üzerinde bulunan elemanlara, ileri yol kontrol elemanı, çıkıştan başlayıp girişe doğru bağlanan yol üzerinde bulunan elemanlara da geri yol elemanı denir.

2. Laplace Dönüşümleri

Başlangıç şartları bilinen diferansiyel denklemlere Laplace Dönüşümleri uygulanabilir. Bunun için diferansiyel denklemin kısmi açılımı ile ilgili aşağıdaki bilgileri kullanmak yararlıdır.

$$TF(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.1)$$

şeklinde bir eşitlik verilmiş olsun ve $B(s)$ polinomunun derecesi, $A(s)$ polinomundan küçük olsun. Bu durumda $F(s)$;

$$TF(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s) + \dots \quad (2.2)$$

olur. $A(s)$ polinomunda kökler gerçek ve birbirinden farklı veya tekrarlamalı kök olması durumunda katsayıların hesabı değişir.

Verilen diferansiyel denklemin mümkün olduğunda açık hale getirilmesi şarttır. Bunun için aşağıdaki yöntemler uygulanabilir.

$$y(t) = \frac{a_m D^m + a_{m-1} D^{m-1} + \dots + a_1 D^1 + a_0 \cdot f(t)}{D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \dots + b_1 D + b_0} \quad (2.3)$$

şeklinde verilen diferansiyel denklemde;

a_0, a_1, \dots, a_m ve b_0, b_1, \dots, b_{n-1} sabitlerdir.

$f(t)$ sistemi zorlayan fonksiyonu göstermektedir. $y(t)$ ise çıkış fonksiyonudur. Denklem (2.3) aşağıdaki biçimde kısa olarak gösterilebilir.

$$y(t) = \frac{L_m(D)}{L_n(D)} \cdot f(t) \quad (2.4)$$

Denklem (2.4)'de $L_n(D)$ çarpanlarına ayrıldığında;

$$L_n(D) = (D - r_1) \cdot (D - r_2) \cdot \dots \cdot (D - r_n) \quad (2.5)$$

olur. (r_1, r_2, \dots, r_n) paydanın kökleridir.

$(r_1 \neq r_2 \neq \dots \neq r_n)$ olduğu takdirde;

$$\frac{L_m(D)}{L_n(D)} = \frac{a_1}{D - r_1} + \frac{a_2}{D - r_2} + \dots + \frac{a_i}{D - r_i} + \dots + \frac{a_n}{D - r_n} \quad (2.6)$$

elde edilir.

$$(D - r_i) \frac{L_m(D)}{L_n(D)} = \frac{D - r_i}{D - r_1} K_1 + \frac{D - r_i}{D - r_2} K_2 + \dots + K_i + \dots + \frac{D - r_i}{D - r_n} K_n \quad (2.7)$$

Buradan;

$$a_i = \lim_{D \rightarrow r_i} \left[(D - r_i) \frac{L_m(D)}{L_n(D)} \right] \quad (2.8)$$

olduğu görülmektedir.

$$y(t) = \frac{a_1}{D - r_1} f(t) + \dots + \frac{a_i}{D - r_i} f(t) + \dots + \frac{K_n}{D - r_n} f(t) \quad (2.9)$$

Veya,

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{D - r_i} f(t) = \sum_{i=1}^n K_i y_i(t) \quad (2.10)$$

$$y_i(t) = \frac{1}{D - r_i} f(t) \quad (2.11)$$

$$y_i(t) = c_i e^{r_i t} + e^{r_i t} \int f(t) \cdot e^{-r_i t} \cdot dt \quad (2.12)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{r_i t} + \sum_{i=1}^n K_i e^{r_i t} \int f(t) e^{-r_i t} dt \quad (2.13)$$

$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$ olduğundan;

homojen çözüm kismi çözüm

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n k_i \cdot e^{r_i t} \quad (2.14)$$

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{r_i t} \int f(t) e^{-r_i t} dt \quad (2.15)$$

$k_i = c_i \cdot K_i$ dir.

2.1 A(s)'de Farklı Kökler Olması Durumu

$$TF(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1) \cdot (s+z_2) \cdot \dots \cdot (s+z_m)}{(s+p_1) \cdot (s+p_2) \cdot \dots \cdot (s+p_n)}, \quad (m < n) \quad (2.16)$$

Denklemde geçen p_1, p_2, \dots, p_n ve z_1, z_2, \dots, z_m gerçek veya karmaşık büyükliklerdir. Aşağıda gerçek büyüklik için incelenmiştir.

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \dots + \frac{a_n}{s+p_n} \dots \quad (2.17)$$

a_i : sabit değerlerdir. ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$a_i = \left[(s+p_i) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_i} \quad (2.18)$$

Denklem (2.18) ile verilen a_i değerleri daha genel olarak;

$$a_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \left[(s-p_i) \frac{B(s)}{A(s)} \right] \quad (2.19)$$

2.1.1 Laplace Dönüşüm Tablosu

$F(s)$	$f(t) \quad t>0$
1	(Birim impulse (çarpma)) $\delta(t)$ veya $u_1(t)$
$\frac{1}{s}$	(Birim basamak) 1 veya $u(t)$
$\frac{1}{s^2}$	(Birim rampa) t
$\frac{1}{s^n} \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} 0! = 1$
$\frac{1}{(s+a)}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad n=1,2,3,\dots$
$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{1}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t)$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos(\omega t)$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$

$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$
$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}(ae^{-at} - be^{-bt})$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\frac{s+z}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{(z-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{(z-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{(z-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\frac{1}{s^2+2abs+b^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-abt} \sin(\omega t) \quad \omega = b\sqrt{1-a^2}$
$\frac{1}{s(s^2+2abs+b^2)}$	$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b\omega} e^{-abt} \sin(\omega t + \theta) \quad \omega = b\sqrt{1-a^2} \quad \theta = \cos^{-1}(a)$
$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	$f''(t)$

2.1.2 Laplace Dönüşüm Özellikleri

1	$\mathcal{X}[Af(t)] = A\mathcal{F}(s)$
2	$\mathcal{X}[f_1(t) \pm f_2(t)] = \mathcal{F}_1(s) \pm \mathcal{F}_2(s)$
3	$\mathcal{X}_{\pm}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = s \cdot \mathcal{F}(s) - s \cdot f(0 \pm)$
4	$\mathcal{X}_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2\mathcal{F}(s) - f(0 \pm) - \dot{f}(0 \pm)$
5	$\mathcal{X}_{\pm}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n\mathcal{F}(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} {}^{(k-1)}f(0 \pm)$ ${}^{(k-1)}f(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$ olmak üzere
6	$\mathcal{X}_{\pm}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{\mathcal{F}(s)}{s} + \frac{1}{s} \left[\int f(t)dt \right]_{t=0 \pm}$
7	$\mathcal{X}_{\pm}\left[\int \dots \int f(t)(dt)^n\right] = \frac{\mathcal{F}(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[\int \dots \int f(t)(dt)^k \right]_{t=0 \pm}$

8	$\mathcal{X}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
9	$\int_0^\infty f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$; eğer $\int_0^\infty f(t) dt$ mevcut ise
10	$\mathcal{X}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$
11	$\mathcal{X}[f(t-a) \mathbf{1}(t-a)] = e^{-as} F(s) \quad a \geq 0$
12	$\mathcal{X}[t f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
13	$\mathcal{X}[t^2 f(t)] = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$
14	$\mathcal{X}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad n=1,2,3,\dots$
15	$\mathcal{X}\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^\infty F(s) ds \quad \text{eğer } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(t) \text{ mevcut ise};$
16	$\mathcal{X}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a F(as)$
17	$\mathcal{X}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s)$
18	$\mathcal{X}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) G(s-p) dp$

Uygulama 2.1: $F(s) = \frac{5s+8}{s^2+3s+2}$ denkleminin ters Laplace'ını hesaplayınız.

$$F(s) = \frac{5s+8}{s^2+3s+2} = \frac{5s+8}{(s+2)(s+1)} = \frac{a_1}{s+2} + \frac{a_2}{s+1} \quad (2.20)$$

(18) numaralı denklemin uygulanmasıyla;

$$a_1 = \left[(s+2) \frac{5s+8}{(s+2)(s+1)} \right]_{s=-2} = \frac{5s+8}{s+1} \Big|_{s=-2} \Rightarrow a_1 = \frac{-10+8}{-2+1} = \frac{-2}{-1} = 2 \text{ olur. Diğer katsayı için,}$$

$$a_2 = \left[(s+1) \frac{5s+8}{(s+2)(s+1)} \right]_{s=-1} = \frac{5s+8}{s+2} \Big|_{s=-1} = \frac{-5+8}{-1+2} = \frac{3}{1} = 3 \text{ olur.}$$

Denklem (2.20) de yerine yazıldığında;

$$F(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{3}{s+1} \quad (2.21)$$

elde edilir. Bu değerler, Laplace tablosu yardımıyla dönüştürüldüğünde;

$$f(t) = 2e^{-2t} + 3e^{-t} \quad (0 \leq t) \quad (2.22)$$

denklemi elde edilir.

Uygulama 2.2: $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$, $f(t) = ?$ (2.23)

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2} \quad (2.24)$$

$$a_1 = \left[(s+1) \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-1} = \frac{s+3}{s+2} \Big|_{s=-1} = \frac{-1+3}{-1+2} = \frac{2}{1} = 2 \text{ veya}$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \left[(s+1) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right] = \frac{-1+3}{-1+2} = 2$$

$$a_2 = \left[(s+2) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right] = \frac{s+3}{s+1} \Big|_{s=-2} = \frac{-2+3}{-2+1} = -1$$

bulunan değerler Denklem (2)'de yerine yazıldığında;

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad \text{elde edilir ve buradan;}$$

$$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad (t \geq 0) \quad \text{olur.}$$

Maple dilindeki çözümü;

invlaplace((s+3)/((s+1)*(s+2)),s,t);

Cevap: $2 \exp(-t) - \exp(-2t)$

şeklindedir.

Uygulama 2.3: $F(s) = \frac{2s+12}{s^2 + 2s + 5}$ $f(t) = ?$ (2.25)

Paydanın kökleri sanalıdır ve aşağıdaki biçimde ayrılır.

$$s^2 + 2s + 5 = (s+1+2j)(s+1-2j)$$

Kökler sanal olduğundan sinüs ve cosinüs dönüşümleri uygulanır. Dönüşümler aşağıdaki denklemler yardımıyla yapılır.

$$\mathcal{L} [e^{-at} \sin(\omega \cdot t)] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L} [e^{-at} \cos(\omega t)] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (2.27)$$

$$F(s) = \frac{2s+12}{s^2 + 2s + 5} = \frac{10+2(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2} \quad (2.28)$$

veya;

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)^2 + 2^2} + 2 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} \quad (2.29)$$

Otomatik Kontrol Ders Notları, Pamukkale Üniversitesi, Z.Girgin olarak elde edilir. Denklem (2.26) ve (2.27) deki dönüşümler yardımıyla;

$$F(s) = 5 \cdot L^{-1} \left[\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} \right] + \left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} \right]$$

$f(t) = 5e^{-t} \sin 2t + 2e^{-t} \cos 2t \quad (t \geq 0)$ sonucu elde edilir.

Maple dilindeki çözümü;

invlaplace((2*s+12)/(s**2+2*s+5),s,t);

Cevap: $2 \exp(-t) \cos(2t) + 5 \exp(-t) \sin(2t)$

şeklindedir.

2.2 A (s)'de Köklerin Tekrarlaması Durumu

Köklerin Tekrarlaması Durumunda;

$y(t) = \frac{L_m D}{L_n D} f(t)$ ve $L_n(D) = (D - r)^q (D - r_1)(D - r_2) \dots (D - r_{n-q})$ ile tanımlı olsun

$$b_q = \lim_{D \rightarrow r} \left[(D - r)^q \frac{L_m(D)}{L_n(D)} \right], \quad b_{q-1} = D \lim_{D \rightarrow r} \left[\frac{1}{1!} \frac{d}{dD} \left[(D - r)^q \frac{L_m(D)}{L_n(D)} \right] \right], \quad b_{q-k} = D \lim_{D \rightarrow r} \left[\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dD^k} \left[(D - r)^q \frac{L_m(D)}{L_n(D)} \right] \right]$$

$y_i(t) = \frac{c_i f(t)}{(D - r)^i}, \quad y_i(t) = (c_0 + c_1 t + \dots + c_{i-1} t^{i-1}) e^{rt} + c_i e^{rt} \int \dots \int f(t) e^{-rt} (dt)^i, \quad (i=2,3,\dots,q)$ şeklindedir.

$$\text{Uygulama 2.4: } F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} = \frac{b_3}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_1}{(s+1)}$$

$$b_3 = \frac{1}{0!} \left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-1} = (s+1)^3 \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} \Big|_{s=-1} = \frac{(-1)^2 - 2 + 3}{1} = 2$$

$$b_2 = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{ds} \left((s+1)^3 \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} \right) \right]_{s=-1} = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{ds} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1} = (2s+2) \Big|_{s=-1} = -2 + 2 = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{ds^2} \left((s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right) \right]_{s=-1} = 1 \Rightarrow F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}$$

$$f(t) = t^2 e^{-t} + 0 + e^{-t}$$

$$f(t) = (t^2 + 1) e^{-t}, \quad (t \geq 0) \quad \text{sonucu elde edilir.}$$

Uygulama 2.5: Aşağıda verilen diferansiyel denklemi Laplace metodıyla çözünüz.

$$(D+1)^2 (D+2) y(t) = f(t), \quad f(t) = e^{-t} \quad \text{ve} \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0 \quad \text{olarak veriliyor.}$$

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2) y(t) = f(t)$$

$$[s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0)] + 4[s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + 5[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = F(s)$$

$$(s^3 + 4s^2 + 5s + 2) Y(s) = F(s) \Rightarrow (s+1)^2 (s+2) Y(s) = F(s)$$

$$F(s) = x[f(t)] = x[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{1}{s+1} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{b_3}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_1}{(s+1)} + \frac{a_1}{(s+2)}$$

$$b_3 = \lim_{s \rightarrow -1} \left[(s+1)^3 \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} \right] = \left[\frac{1}{s+2} \right]_{s=-1} = 1$$

$$b_2 = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{d}{ds} \frac{1}{(s+2)} \right] = \left[\frac{-1}{(s+2)^2} \right]_{s=-1} = -1$$

$$b_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{(s+2)} \right] = \left[\frac{-1}{(s+2)^3} \right]_{s=-1} = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

$$a_1 = \left[(s+2) \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} \right]_{s=-2} = -1$$

Laplace tablosundaki;

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \right) = t^n e^{-at} \text{ ifadesi kullanılarak;}$$

$$y(t) = \frac{1}{2!} t^2 e^{-t} - \frac{1}{1!} t e^{-t} + e^{-t} - e^{-2t} \text{ elde edilir.}$$

Maple dilindeki çözümü:

```
dsolve({(D@@3)(y)(t)+4*(D@@2)(y)(t)+5*D(y)(t)+2*y(t)=exp(-t),y(0)=0,(D@@1)(y)(0)=0,(D@@2)(y)(0)=0},y(t));
```

Cevap: $y(t) = \exp(-t) + 1/2 t \exp(-t) - \exp(-t) t - \exp(-2 t)$

şeklindedir.

Uygulama 2.6: Aşağıda verilen difeansiyel denklemde, bütün başlangıç şartları sıfırdır ve $f(t) = 4t$ olduğuna göre, çıkış fonksyonunu hesaplayınız.

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = f(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{(D^2 + 3D + 2)} f(t) = \frac{1}{(D+1)(D+2)} f(t)$$

$$y(t) = \left(\frac{a_1}{D-1} + \frac{a_2}{D-2} \right) f(t)$$

$$a_1 = \lim_{D \rightarrow -1} \left[(D+1) \frac{1}{(D+1)(D+2)} \right] = \lim_{D \rightarrow -1} \left[\frac{1}{(D+2)} \right] = \frac{1}{-1+2} = 1$$

$$a_2 = \lim_{D \rightarrow -2} \left[(D+2) \frac{1}{(D+1)(D+2)} \right] = \lim_{D \rightarrow -2} \left[\frac{1}{D+1} \right] = -1$$

Denklem (14)'de yerine yazıldığında;

$$y_c = a_1 e^{r_1 t} + a_2 e^{r_2 t} = a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} \text{ olur.}$$

$a = 1$ ve $a = -1$ için kısmi çözüm elde edilir.

$$y_p = K_1 e^{-t} \int (4t) e^t dt + K_2 e^{-2t} \int (4t) e^{2t} dt$$

$$y_p = e^{-t} \int (4t) e^t dt - e^{-2t} \int (4t) e^{2t} dt = e^{-t} [4e^t(t-1)] - e^{-2t} [e^{2t}(2t-1)]$$

$$y_p = 4(t-1) - (2t-1) = 2t-3 \text{ elde edilir.}$$

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) \text{ olduğundan;}$$

$$y(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + 2t - 3$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k_1 e^{-t} - k_2 2e^{-2t} + 2$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0 \text{ olduğundan;}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = k_1 + k_2 - 3 = 0 \\ \dot{y}(0) = -k_1 - 2k_2 + 2 = 0 \end{array} \right\} \quad k_1 = 4 \quad k_2 = -1 \text{ olur.}$$

Denklem yerine yazıldığında;

$$y(t) = 4e^{-t} - e^{-2t} + 2t - 3 \text{ elde edilir.}$$

Maple dilinde aynı problemin çözümü aşağıdaki gibidir.

dsolve({diff(y(t),t\$2)+3*diff(y(t),t)+2*y(t)=4*t,y(0)=0,(D@@1)(y)(0)=0},y(t));

veya

dsolve(({D@@2)(y)(t)+3*D(y)(t)+2*y(t)=4*t,y(0)=0,D(y)(0)=0},y(t));

çözümü:

$y(t) = -3 + 2t - \exp(-2t) + 4\exp(-t)$ şeklindedir.

Uygulama 2.7: $y(t) = \frac{D+4}{(D+2)(D+3)} f(t)$ denkleminde, $f(t) = 2e^{-t}$, $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$

ve $f(0) = 2e^{-0} = 2$ olarak verildiğine göre, $y(t) = ?$

$$(D^2 + 5D + 6)y(t) = (D + 4)f(t)$$

$$(s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = (sF(s) - f(0)) + 4F(s)$$

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = (s + 4)F(s) - f(0) \rightarrow (s^2 + 5s + 6)Y(s) = (s + 4)F(s) - 2$$

$$Y(s) = \frac{(s+4)F(s)-2}{(s^2+5s+6)} \rightarrow Y(s) = \frac{(s+4)\frac{2}{(s+1)}-2}{(s+2)(s+3)} \rightarrow Y(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$Y(s) = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2} + \frac{a_3}{s+3}$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \left[(s+1) \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right] = \frac{6}{(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s+2) \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right] = \frac{6}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-2} = \frac{6}{(-1)(+1)} = -6$$

$$a_3 = \lim_{s \rightarrow -3} \left[(s+3) \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right] = \frac{6}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-3} = \frac{6}{(-2)(-1)} = \frac{6}{2} = 3$$

$Y(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{6}{s+2} + \frac{3}{s+3}$ elde edilir. Laplace tablosundan yararlanarak $y(t)$ fonksiyonunun;

$y(t) = 3e^{-t} - 6e^{-2t} + 3e^{-3t}$ olduğu görülür.

Uygulama 2.8: $\frac{dy}{dt} + 4y = 0$ denkleminde, $y(0) = 3$ olduğuna göre $y(t) = ?$

$$(D+4)y(t) = 0$$

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) = 0$$

$$(s+4)Y(s) - y(0) = 0$$

$Y(s) = \frac{3}{s+4}$ olarak elde edilir. Tablo yardımıyla;

$$y(t) = 3e^{-4t} \quad t > 0 \quad \text{olarak hesaplanır.}$$

Maple dilindeki çözümü;

dsolve({diff(y(t),t)+y(t)=0,y(0)=0},y(t));

Cevap: $y(t) = 3 * \exp(-t)$ şeklindedir.

Uygulama 2.9: $F(s) = \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ denklemi verildiğine göre, $f(t) = ?$

$$F(s) = \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2} + \frac{a_3}{s+3}$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \left[(s+1) \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right] = \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{2-3+3}{(1)(2)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s+2) \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right] = \frac{8-6+3}{(-1)(1)} = \frac{5}{-1} = -5$$

$$a_3 = \lim_{s \rightarrow -3} \left[(s+3) \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right] = \frac{18-9+3}{(-2)(-1)} = \frac{12}{2} = 6$$

$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{5}{s+2} + \frac{6}{s+3}$ olur $F(s)$ nin ters Laplace dönüşümüyle;

$f(t) = e^{-t} - 5e^{-2t} + 6e^{-3t}$ elde edilir. Ayrıca denklemde, $t \rightarrow \infty$, $f(t) \rightarrow 0$ olduğundan fonksiyonun çıkışısı kararlıdır.

Maple dilindeki çözümü;

invlaplace((2*s**2+3*s+3)/((s+1)*(s+2)*(s+3)),s,t);

Cevap: $\exp(-t) - 5 \exp(-2t) + 6 \exp(-3t)$ şeklindedir.

Uygulama 2.10: $(D^2 + 3D + 2)y(t) = f(t)$ denkleminde, $f(t) = 4t$ ve bütün başlangıç şartları sıfır kabul edildiğine göre $y(t) = ?$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = F(s)$$

$4t \rightarrow \frac{4}{s^2}$ alındığında (laplace tablosundan);

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s+1)(s+2)} = \frac{4}{s^2(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_1}{s} + \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

$$b_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s^2 \frac{4}{s^2(s+1)(s+2)} \right] = 2$$

$$b_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{4}{s^2(s+1)(s+2)} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{-4(2s+3)}{(s^2+3s+2)^2} \right] = -3$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \left[(s+1) \frac{4}{s^2(s+1)(s+2)} \right] = 4$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s+2) \frac{4}{s^2(s+1)(s+2)} \right] = -1 \text{ olur. Elde edilen katsayılar yerine yazıldığında;}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{4}{s+1} - \frac{1}{s+2} \text{ şeklinde gelir. Laplace tablosundan faydalananarak;}$$

$$y(t) = 4e^{-t} - e^{-2t} + 2t - 3 \text{ olduğu görülür.}$$

3. Blok diyagramı cebri ve blokların indirgenmesi

Transfer Fonksiyonu(TF): Bir kontrol sisteminde bütün değerler, t uzayından s uzayına dönüştürüldüğünde, Çıkış/Giriş oranına sistemin transfer fonksiyonu denir.

$$\text{TF}(s) = \frac{\text{Output}(s)}{\text{Input}(s)} \quad (3.1)$$

Blok diyagramları çok karışık olduğu takdirde bunların indirgenmesi gereklidir. İlk işlem t uzayından s uzayına geçirilir. İkinci olarak sistem bir giriş, bir çıkış ve bir eleman haline getirilir. Bu durumda sistemin çıkış değeri;

Giriş(s) x Kontrol elemanı(s) = Çıkış(s), elde edilir. Giriş ve çıkışın aynı cinsten olması şart değildir. İndirgeme işlemi 3 farklı şekilde yapılabilir.

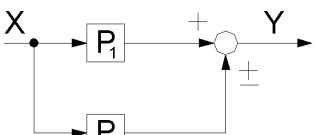
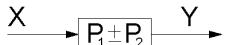
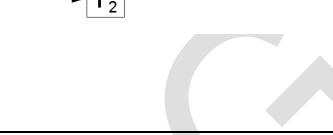
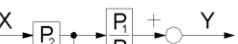
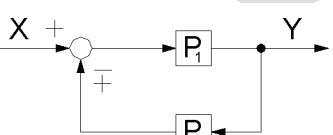
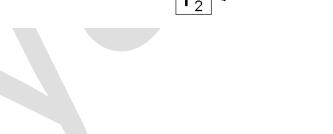
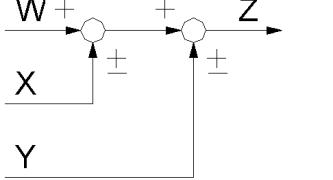
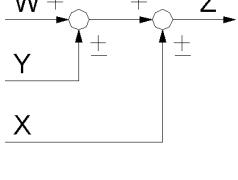
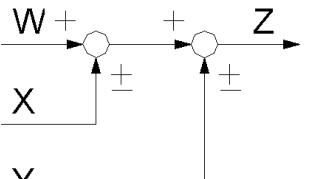
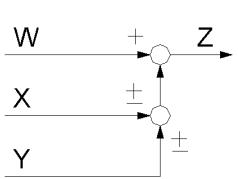
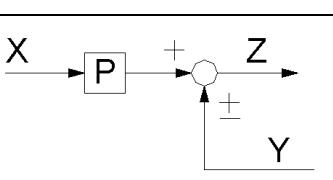
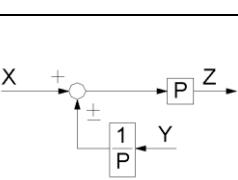
1. Tablodan yararlanarak indirgeme,
2. Cebirsel eşitliklerden faydalananarak indirgeme,
3. Kazanç Formülünü kullanarak indirgeme.

En pratik yol üçüncüsüdür. Bütün metodlar sırasıyla verilecektir. İlk metodun kullanılabilmesi için aşağıda verilen tablodan yararlanılır.

Aşağıda verilen tabloda P harfleri transfer fonksiyonunu; W,X,Y, Z ise s uzayındaki sinyalleri göstermektedir. Cebirsel eşitliklerden yararlanarak yapılan çözümlerde, dağılma noktası başlangıç

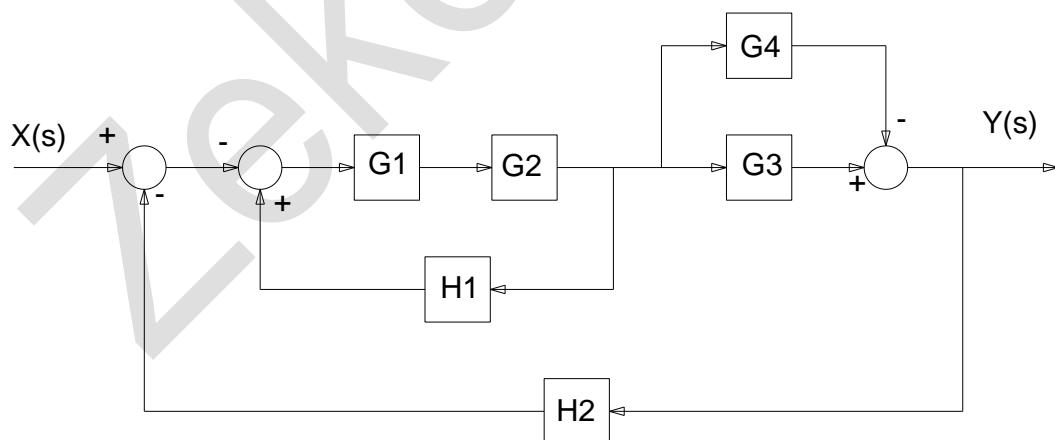
kabul edilir. Buradan itibaren dönerek tekrar aynı yere varıldığında denklem yazılmış olur. Sistemde çok fazla dağılma noktası ve döngü bulunduğu zaman, değişik harfler kullanılır. Bunlar sonra sistemden yok edilir.

Tablo 3.1: Blok diyagramı ile ilgili eşitlikler

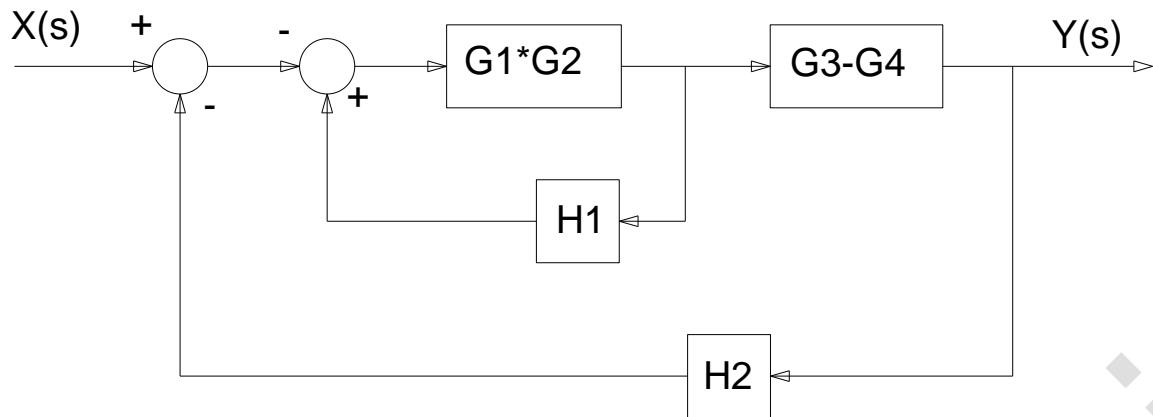
	Transformasyon	Denklem	Blok Diyagramı	Eşdeğer Blok Diyagramı
1	Seri haldeki blokların toplanması	$Y = (P_1 \cdot P_2)X$		
2	Paralel blokların toplanması veya ileri yolun yok edilmesi	$Y = P_1 \cdot X \pm P_2 \cdot X$		
3	İleri yol üzerindeki bloğun kaldırılması	$Y = P_1 \cdot X \pm P_2 \cdot X$		
4	Geri besleme döngüsünün yok edilmesi	$Y = P_1(X \mp P_2 \cdot Y)$		
5	Geri besleme döngüsünden bloğun kaldırılması	$Y = P_1(X \mp P_2 \cdot Y)$		
6a	Toplama noktasının tekrar düzenlenmesi	$Z = W \pm X \pm Y$		
6b	Toplama noktasının tekrar düzenlenmesi	$Z = W \pm X \pm Y$		
7	Bir bloğun gerisindeki toplama noktasının öne alınması	$Z = P \cdot X \pm Y$		

8	Bir bloğun önündeki toplama noktasının geriye alınması	$Z = P(X \pm Y)$		
9	Bir bloğun gerisindeki dağılma noktasının öne alınması	$Y = P.X$		
10	Bir bloğun önündeki dağılma noktasının geriye alınması	$Y = P.X$		
11	Toplama noktasının gerisindeki dağılma noktasının öne alınması	$Z = X \pm Y$		
12	Toplama noktasının önündeki dağılma noktasının geriye alınması	$Z = X \pm Y$		

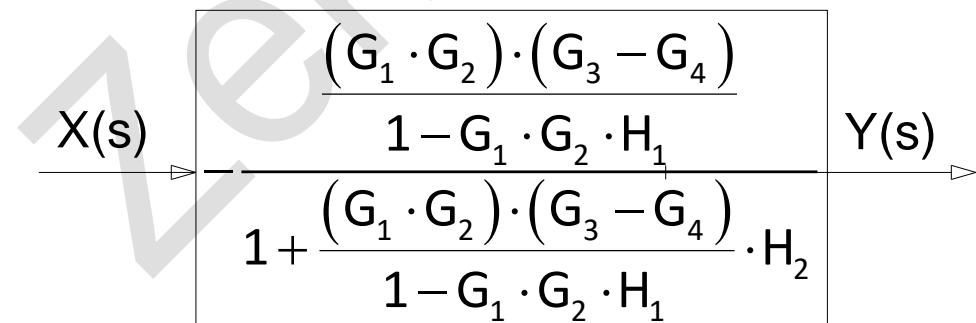
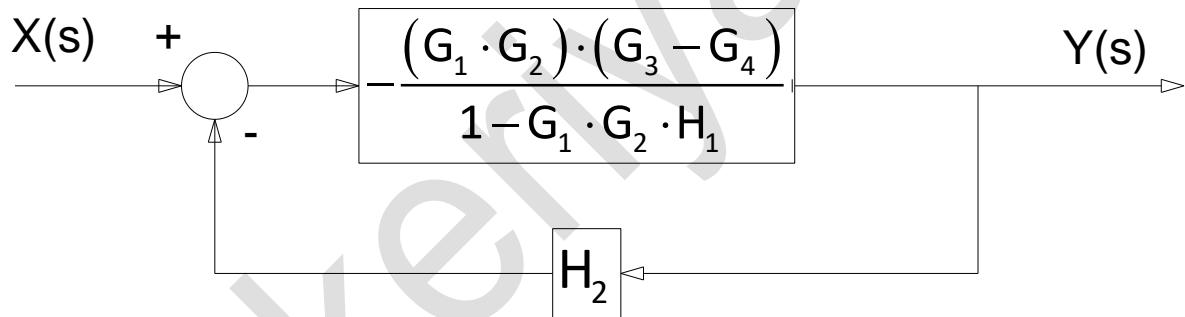
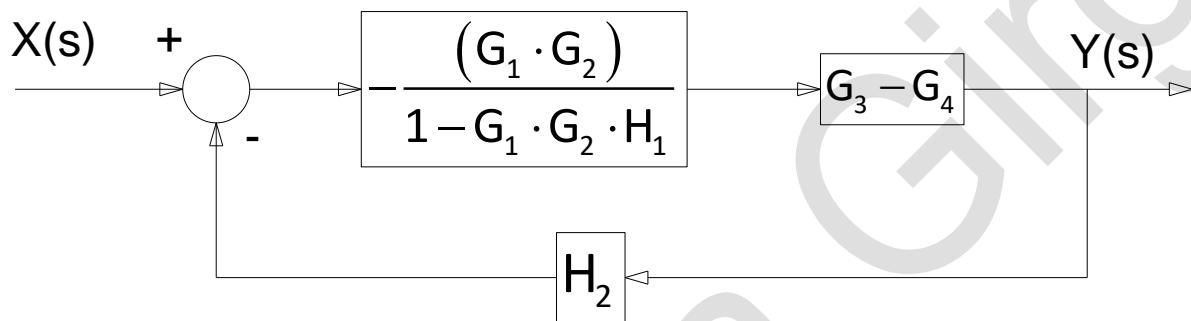
Uygulama 3.1: Aşağıda verilen blok diyagramını tablo metodunu kullanarak indirgeyiniz.



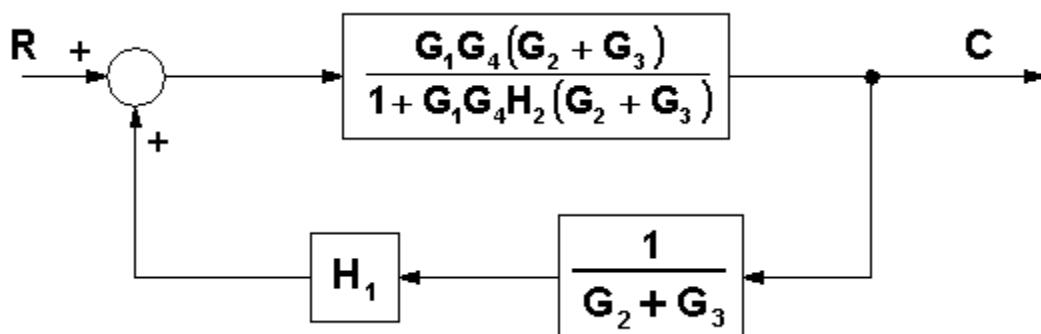
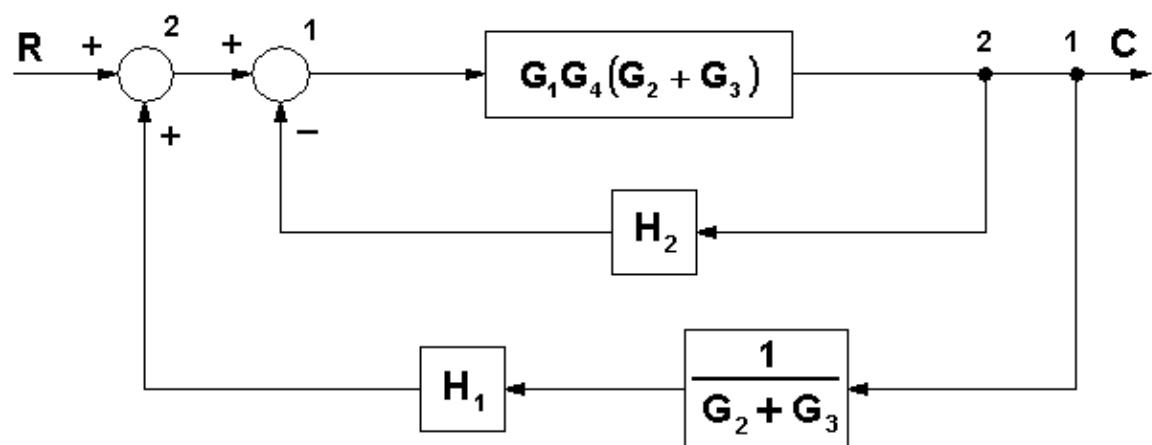
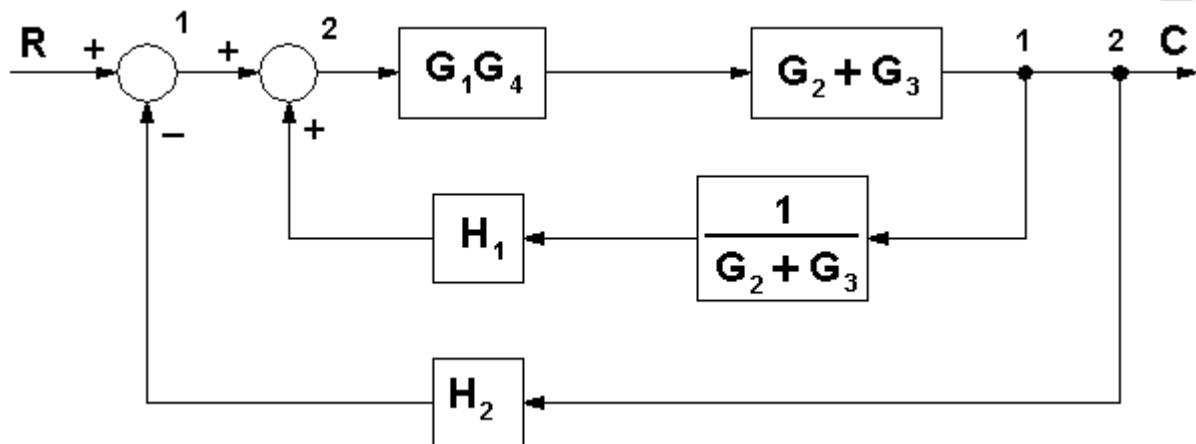
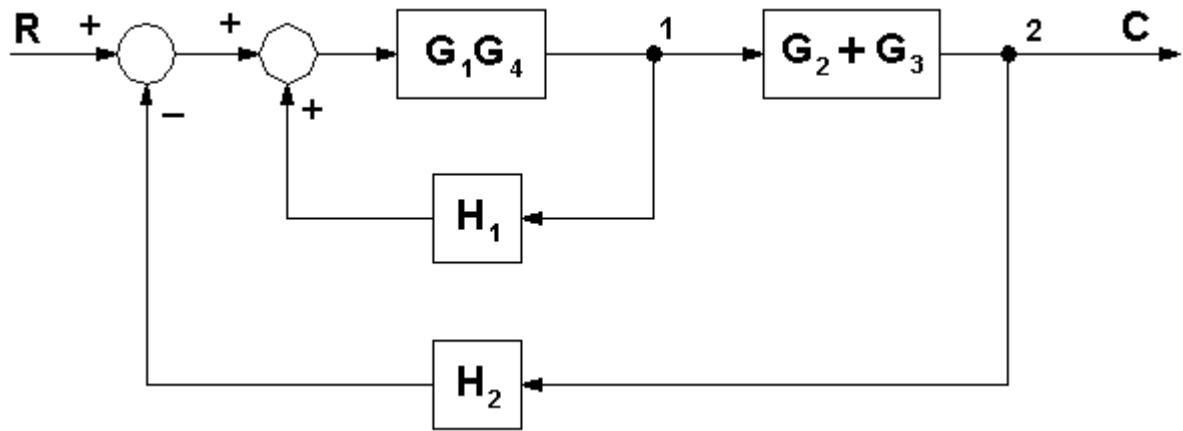
Çözüm: Tablo 3.1 deki 1 ve 2 numaralı eşitlikler kullanıldığında;

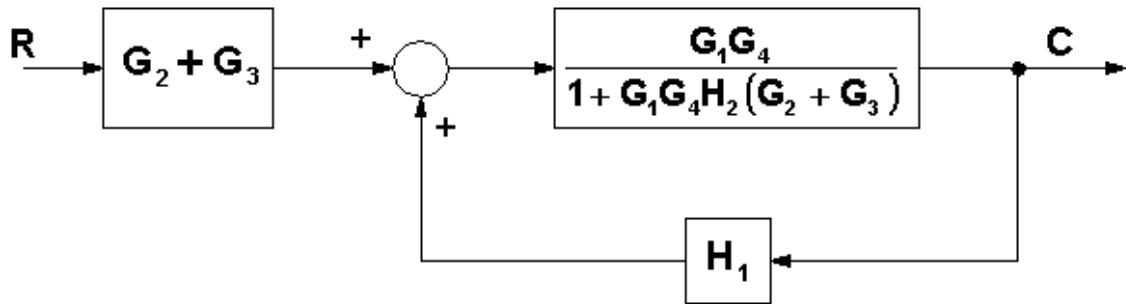


olur. 4 no lu eşitlikten faydalandığında;

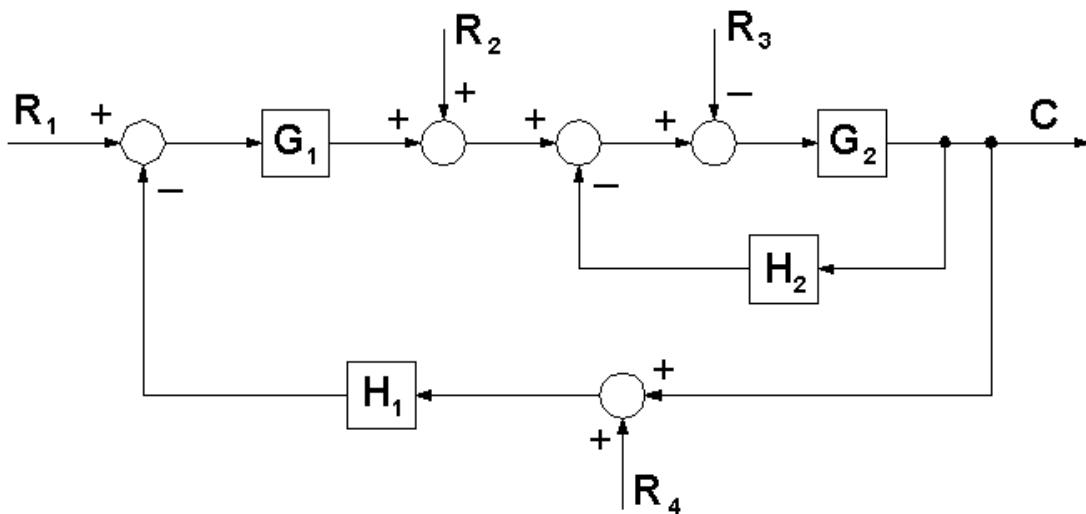


Uygulama 3.2: Aşağıda verilen blok diyagramını tablo metoduna göre indirgeyiniz.

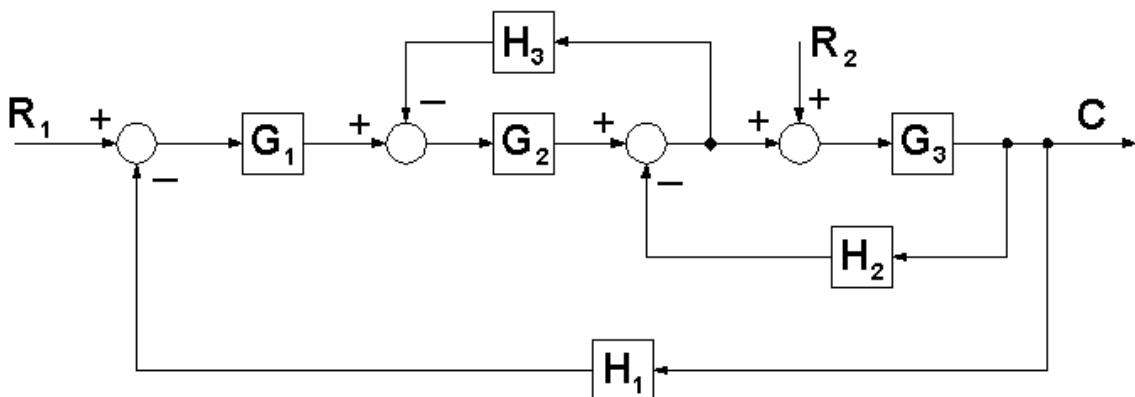




Uygulama 3.3: Aşağıda verilen sistemin çıkışını hesaplayınız.

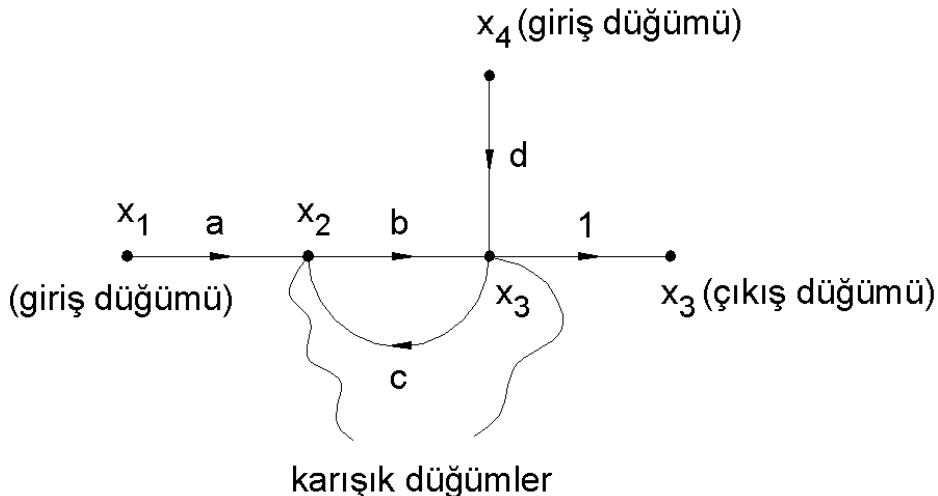


Uygulama 3.4: Aşağıda verilen sistemin çıkışını hesaplayınız.



4. İşaret Akış Grafikleri: Tanımlamalar

Blok diyagramları, kontrol sistemlerinin grafik gösteriminde oldukça sık kullanılır. Kontrol sistemi dinamiğinin grafiksel gösteriminin diğer bir metodu da işaret akış grafiğidir. Bu grafiğe S.J.Mason'un adına izafeten Mason kazanç Formülü de denir.



Karışık düğümler, hem gelen hem giden kollar ile bağlantılıdır.

Kol: İki düğümü birbirine bağlayan çizgiye denir.

Kol Kazancı: Kol üzerinde okla gösterilen değere denir ve artı veya eksı olabilir.

İleri Yol: Ters yöne girmemek ve aynı düğümden iki defa geçmemek kaydıyla, girişten başlayıp çıkışa giden yollara ileri yol denir

İleri Yol Kazancı: İleri yol üzerindeki geçişlerin çarpımına eşittir.

Döngü: bir düğümden harekete başlayıp aynı düğüme, ters yönde gitmemek ve aynı yerden iki defa geçmemek kaydıyla elde edilen döngülere denir.

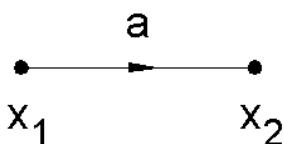
Döngü Kazancı: Bir döngünün kollarındaki kazançların çarpımıdır.

Temassız Döngü: Birbiri ile ortak düğümü olmayan döngülere denir.

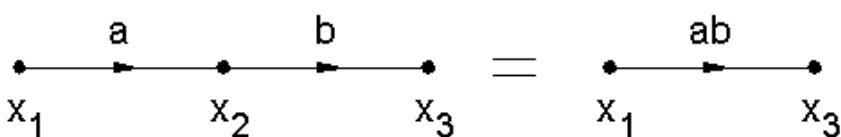
4.1 İşaret Akış Grafiği Cebri

1- Bir döngünün değeri, kendisine gelen kolun geçisi ile doğrunun çarpımına eşittir.

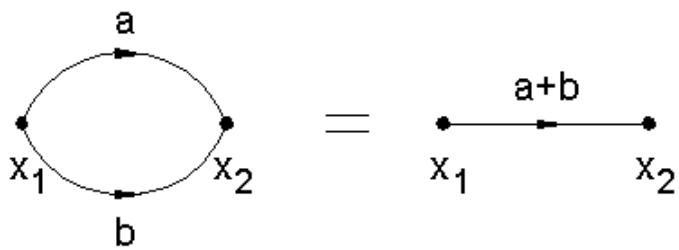
$$x_2 = a \cdot x_1 \quad (4.1)$$



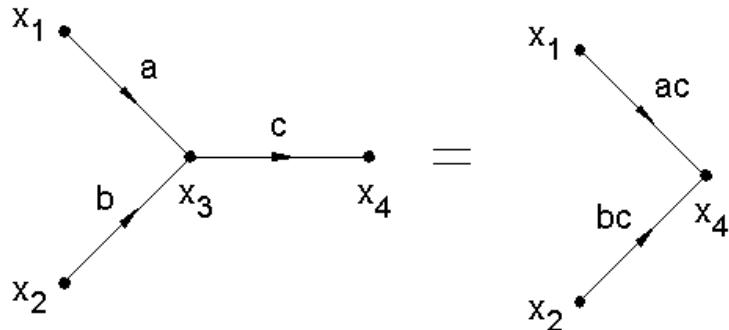
2- Seri bağlı kollarda toplam geçiş, kollardaki geçişlerin çarpımına eşittir.



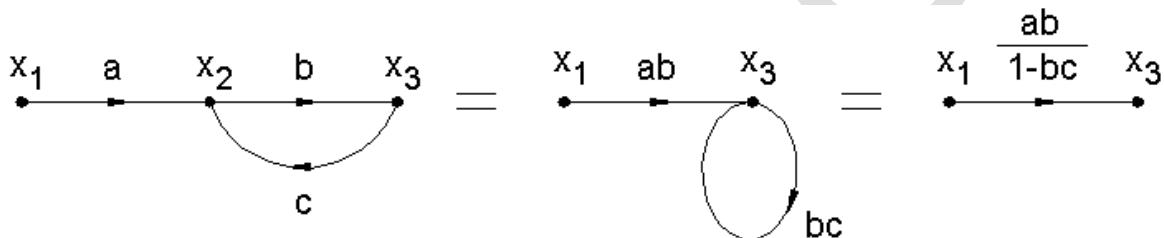
3- Paralel bağlı kollarda, geçişler toplanarak toplam geçiş bulunur.



4- Karışık düğümler, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi yok edilebilirler.



5- Benzer biçimde bir döngüde aşağıdaki biçimde yok edilebilir.



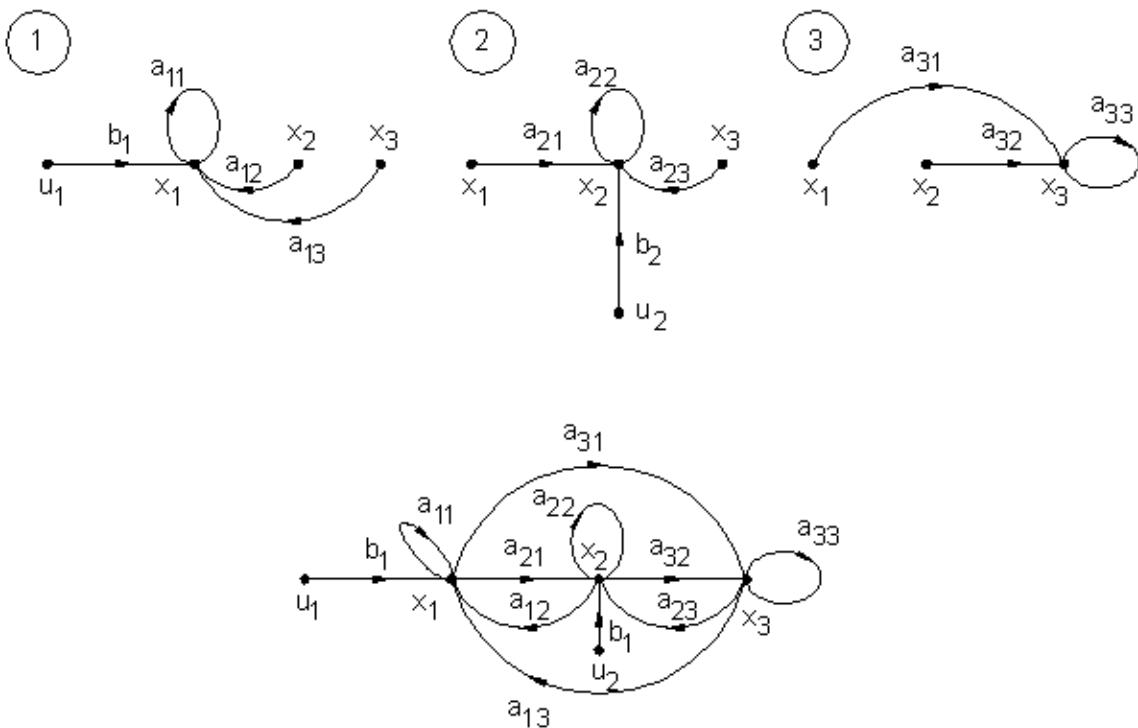
$$x_3 = (a \cdot b) \cdot x_1 + (b \cdot c) \cdot x_3 \text{ olur, veya } x_3 = \frac{a \cdot b}{1 - b \cdot c} \cdot x_1 \text{ elde edilir.}$$

4.2 Lineer Sistemlerin İşaret Akış Grafiği İle Gösterimi

Aşağıda bir lineer sistem örneği verilmektedir.

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u_2 \\ x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Burada; u_1 ve u_2 giriş değişkenleri; x_1 , x_2 ve x_3 çıkış değişkenleridir. İlk olarak sıra ile x_1 , x_2 , x_3 için düğüm konulur. Daha sonra denklemler bu düğümlere uygulanır. Her üç denklem için ayrı ayrı bu işlem tamamlanır. Daha sonra süper pozisyon ile birleştirilir. Aşağıdaki şekillerde bu uygulama gösterilmiştir.



4.3 İşaret Akış Denklemi

İşaret Akış Denklemi, blok diyagramlarının transfer fonksiyonlarının çözümünde kullanılan bir formüldür ve aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$TF = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cdot \Delta_i}{\Delta} \quad (4.3)$$

P_i = i. ileri yolun kazancı

Δ = Grafiğin determinantı

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n) + (L_1 \cdot L_2 + L_1 \cdot L_3 + \dots + L_i \cdot L_j) - (L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 + \dots) + \dots$$

Δ_i = i. yolun devreden çıkarılmasıyla elde edilen Δ değeri.

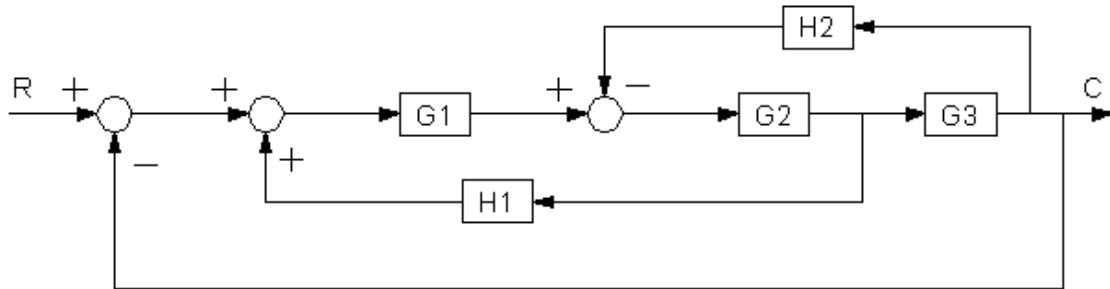
L_i : i. Döngünün kazancı.

$L_i \cdot L_j$ = Birbirine temas etmeyen döngülerin ikili çarpımları. ($(L_i \cdot L_j)$ çarpımının olabilmesi için bu iki döngünün ortak noktası bulunmamalıdır.)

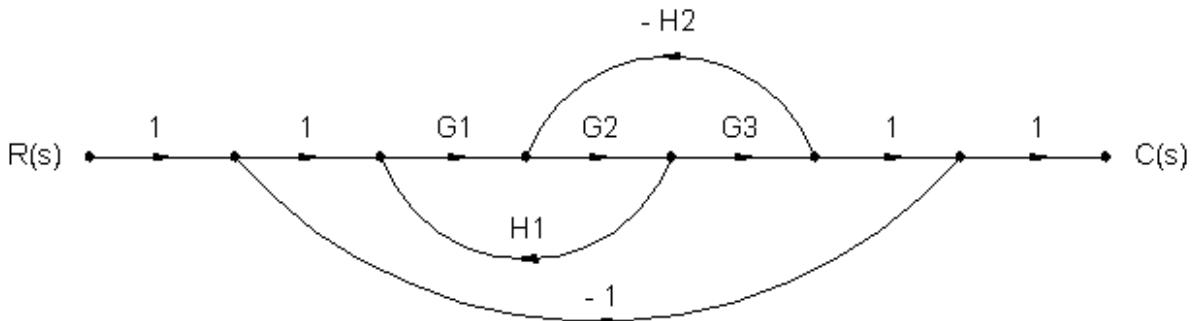
$L_i \cdot L_j \cdot L_k$ = Birbirine temas etmeyen döngülerin üçlü çarpımlarıdır. Bu çarpımın yapılabilmesi için ortak düşümlerinin olmaması şarttır.

4.3.1 Uygulama

Şekilde verilen blok diyagramının transfer fonksiyonunu işaret akış grafiği ile hesaplayınız.



Verilen sistemin işaret akış grafiği aşağıdaki biçimde çizilir.



Burada üç adet döngü kazancı vardır.

$$L_1 = G_1 G_2 H_1$$

$$L_2 = G_2 G_3 (-H_2) = -G_2 G_3 H_2$$

$$L_3 = (1) G_1 G_2 G_3 (1) (-1) = -G_1 G_2 G_3$$

Sistemin determinantı;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$$

$$\Delta = 1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3$$

Sistemde sadece bir adet ileri yol mevcuttur. İleri yol kazancı P_1 ;

$$P_1 = (1)(1) G_1 G_2 G_3 (1)(1) = G_1 G_2 G_3$$

Formül sisteme uygulandığında;

$$\frac{C(s)}{R(s)} = TF = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta}$$

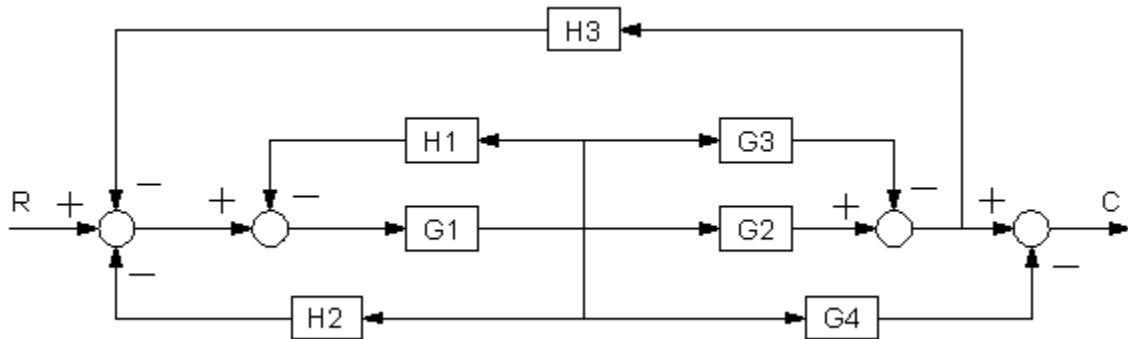
$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$TF = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3}$$

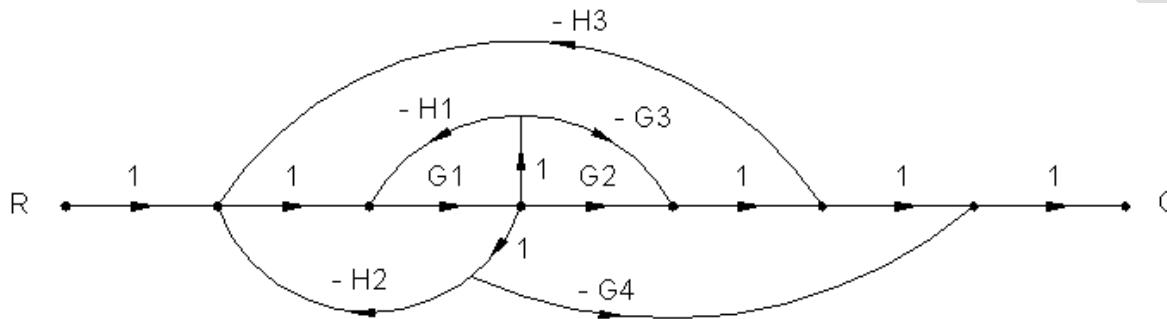
olarak elde edilir.

4.3.2 Uygulama

Şekilde verilen blok diyagramının transfer fonksiyonunu işaret akış grafiği ile hesaplayınız.



Verilen sistemin işaret akış grafiği aşağıdaki biçimde çizilir.



Burada dört adet döngü kazancı vardır.

$$L_1 = (1) G_1 G_2 (1) (-H_3) = -G_1 G_3 H_3$$

$$L_2 = G_1 (1) (-H_1) = -G_1 H_1$$

$$L_3 = (1) G_1 (1) (-H_2) = -G_1 H_2$$

$$L_4 = (1) G_1 (1) (-G_3) (1) (-H_3) = G_1 G_3 H_3$$

Sistemdeki ileri yolların kazançları ise;

$$P_1 = (1) (1) G_1 G_2 (1) (1) (1) = G_1 G_2$$

$$P_2 = (1) (1) G_1 (1) (-G_3) (1) (1) (1) = -G_1 G_3$$

$$P_3 = (1) (1) G_1 (1) (-G_4) (1) = -G_1 G_4$$

Sistemin determinantı;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)$$

$$\Delta = 1 + G_1 G_3 H_3 + G_1 H_1 + G_1 H_2 - G_1 G_3 H_3$$

Formül sisteme uygulandığında;

$$\frac{C(s)}{R(s)} = T_F = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_3 = 1 - 0 = 1$$

$$TF = \frac{G_1 G_2 - G_1 G_3 - G_1 G_4}{1 + G_1 G_3 H_3 + G_1 H_1 + G_1 H_2 - G_1 G_3 H_3} \text{ olarak elde edilir.}$$

4.3.3 Uygulama

Aşağıdaki ilk üç şıkta verilen denklemleri işaret akış grafiği ile elde ediniz. d) şıkkını verilen sayılar için çözünüz. $a_{11} = 2$, $a_{12} = 4$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 3$, $u_1 = 1$ için x_1 ve x_2 yi bulunuz.

a) $x_3 = \frac{d^2}{dt^2}(x_2) + \frac{d}{dt}(x_1) - x_1$

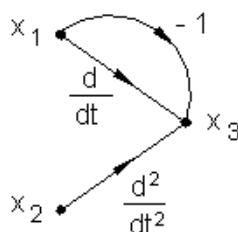
b) $x_4 = \int x_3 dt$

c) $x_3 = \frac{d}{dt}x_1 - 2x_1 + \int x_2 dt$

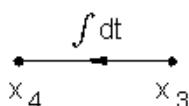
d) $x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - 14u_1$

$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - 4u_1$

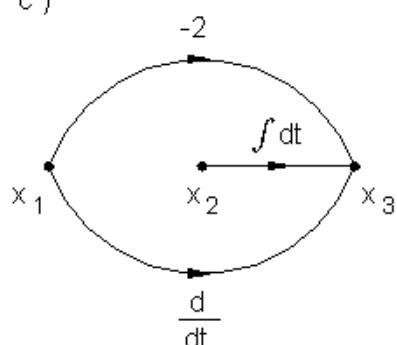
a)



b)

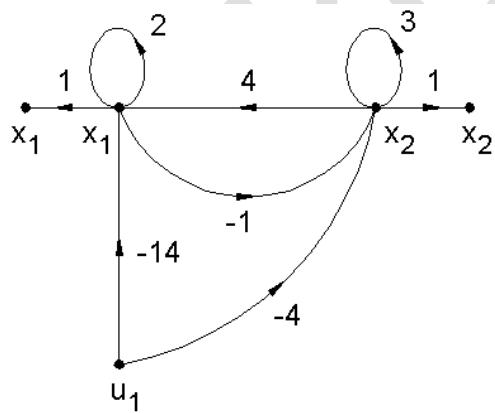


c)



d) $x_1 = 2x_1 + 4x_2 - 14u_1$

$x_2 = -x_1 + 3x_2 - 4u_1$



Sistemin çözüm fonksiyonunun bulunabilmesi için ilk olarak x_2 çıkışı iptal edilir.

$$TF = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + \dots + P_n \Delta_n}{\Delta}$$

Sisteme ait ileri yol kazançları;

$$P_1 = (-14)(1) = (-14)$$

$$p_2 = (-4)(4)(1) = (-16)$$

Döngü kazançları;

$$L_1 = 2, L_2 = 3, L_3 = 4 \ (-1) = -4$$

Determinantı;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1 L_2) = 1 - (2 + 3 - 4) + 6 = 6$$

$$\Delta_1 = 1 - L_2 = 1 - 3 = -2$$

$\Delta_2 = 1 - 0 = 1$ olarak yazılır ve buna göre çözüm fonksiyonu aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$TF = \frac{(-14)(-2) + (-16)(1)}{6} = \frac{28 - 16}{6} = 2 \rightarrow x_1 = TF.u_1 \Rightarrow u_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$$

Bundan sonra x_1 çıkışları iptal edilir. Sisteme ait ileri yol kazançları;

$$P_1 = (-4)(1) = (-4)$$

$$p_2 = (-14)(-1)(1) = (14)$$

Döngü kazançları ve determinant değeri yukarıda bulunmuştur.

$$\Delta_1 = 1 - L_1 = 1 - 2 = -1$$

$$\Delta_2 = 1 - 0 = 1$$

olarak yazılır ve buna göre çözüm fonksiyonu aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$TF = \frac{(-4)(-1) + 14(1)}{6} = \frac{4 + 14}{6} = 3 \rightarrow x_2 = 3u_1 \Rightarrow u_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 3$$

olarak elde edilir. Elde edilen sonuçlar, verilen denklemlerde yerleştirildiğinde eşitliğin sağlandığı görülür. Eşitliğin sağlanması, elde edilen sonuçların doğru olduğunu gösterir.

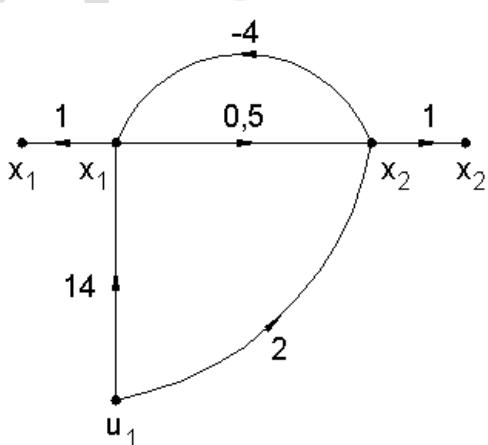
$$x_1 = 2x_1 + 4x_2 - 14u_1 \quad \rightarrow \quad x_1 + 4x_2 = 14 \quad \rightarrow \quad 14 = 14$$

$$x_2 = -x_1 + 3x_2 - 4u_1 \quad \rightarrow \quad -x_1 + 2x_2 = 4 \quad \rightarrow \quad 4=4$$

II. Yol : Aynı denklemleri daha sade halde yazarak benzer sonuçları bulabiliriz.

$$x_1 = -4x_2 + 14u_1 \quad \text{ve} \quad x_2 = 0,5x_1 + 2u_1$$

olarak yazılabılır. Bu durumda işaret akış grafiği aşağıdaki gibi olur.



Sistemin çözüm fonksiyonun bulunabilmesi için ilk olarak x_2 çıkışları iptal edilir.

$$TF = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + \dots + P_n\Delta_n}{\Delta}$$

Sisteme ait ileri vol kazancları:

$$P_1 = (14)(1) = 14$$

$$P_3 = 2(-4)(1) = (-8)$$

Döngü kazancları:

$$L_1 = 0.5 (-4) = -2$$

Determinantı;

$$\Delta = 1 - (L_1) = 1 - (-2) = 3$$

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 - 0 = 1$$

olarak yazılır ve buna göre çözüm fonksiyonu aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$TF = \frac{(14)(1) + (-8)(1)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x_1 = TF \cdot u_1 \Rightarrow u_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$$

Bundan sonra x_1 çıkıştı iptal edilir. Sisteme ait ileri yol kazançları;

$$P_1 = (2)(1) = 2$$

$$p_2 = (14)(0.5)(1) = 7$$

Döngü kazançları ve determinant değeri yukarıda bulunmuştur.

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 - 0 = 1$$

olarak yazılır ve buna göre çözüm fonksiyonu aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$TF = \frac{(2)(1) + 7(1)}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$x_2 = 3u_1 \Rightarrow u_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 3$$

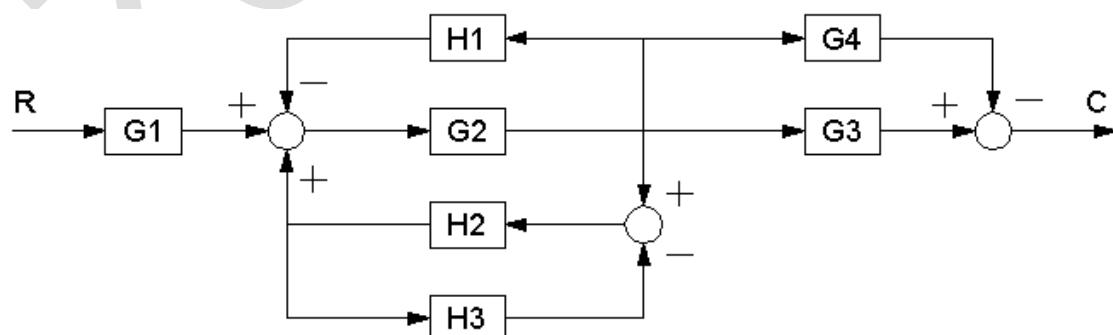
olarak elde edilir. Elde edilen sonuçlar, verilen denklemlerde yerleştirildiğinde eşitliğin sağlandığı görülür. Eşitliğin sağlanması, elde edilen sonuçların doğru olduğunu gösterir.

$$x_1 = 2x_1 + 4x_2 - 14u_1 \rightarrow x_1 + 4x_2 = 14 \rightarrow 14 = 14$$

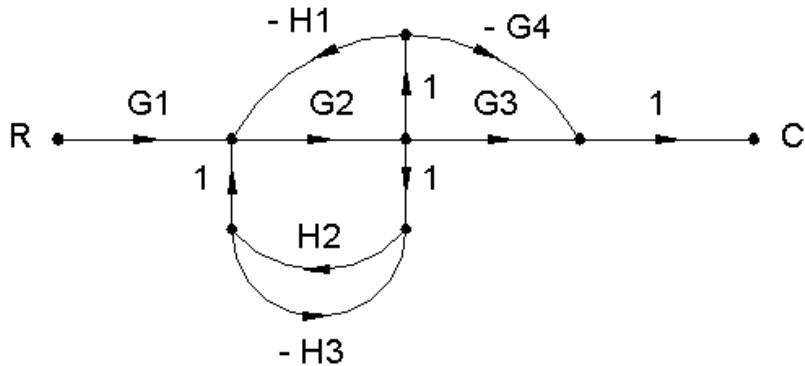
$$x_2 = -x_1 + 3x_2 - 4u_1 \rightarrow -x_1 + 2x_2 = 4 \rightarrow 4 = 4$$

4.3.4 Uygulama

Şekilde verilen blok diyagramının transfer fonksiyonunu işaret akış grafiği ile hesaplayınız.



Verilen sistemin işaret akış grafiği aşağıdaki biçimde çizilir.



Sistemin üç adet döngü kazancı vardır.

$$L_1 = G_2(-H_1) = -G_2 H_1$$

$$L_2 = G_2 H_2$$

$$L_3 = H_2(-H_3) = -H_2 H_3$$

Sistemdeki ileri yolların kazançları;

$$P_1 = G_1 G_2 G_3$$

$$P_2 = G_1 G_2 (-G_4) = -G_1 G_2 G_4$$

Sistemin determinantı;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (P_1 P_2)$$

$$\Delta = 1 + G_2 H_1 - G_2 H_2 + H_2 H_3 + G_2 H_1 H_2 H_3$$

Formül sisteme uygulandığında;

$$\frac{C(s)}{R(s)} = TF = \frac{\sum_i P_i \cdot \Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta}$$

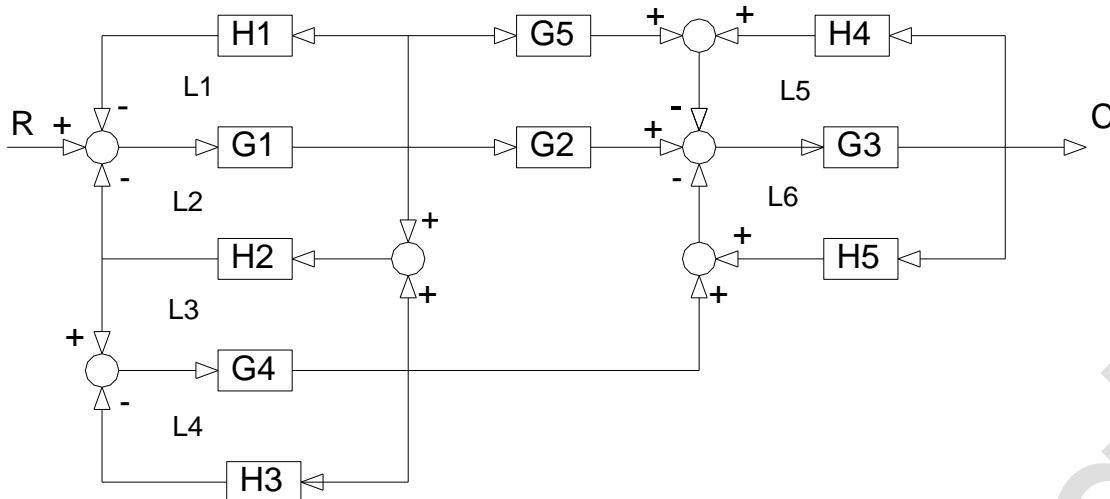
$$\Delta_1 = 1 - L_3 = 1 + H_2 H_3$$

$$\Delta_2 = 1 - L_3 = 1 + H_2 H_3$$

$$TF = \frac{(G_1 G_2 G_3)(1+H_2 H_3) + (-G_1 G_2 G_4)(1+H_2 H_3)}{1 + G_2 H_1 - G_2 H_2 + H_2 H_3 + G_2 H_1 H_2 H_3} \text{ olarak elde edilir.}$$

4.3.5 Uygulama

Şekilde verilen blok diyagramının transfer fonksiyonunu işaret akış grafiği ile hesaplayınız.



Çözüm: Sistemin döngü kazançları;

$$L_1 = G_1 \cdot (-H_1) = -G_1 \cdot H_1, \quad L_2 = -G_1 \cdot H_2, \quad L_3 = H_2 \cdot G_4 = G_4 \cdot H_2$$

$$L_4 = G_4 \cdot (-H_3) = -G_4 \cdot H_3, \quad L_5 = -G_3 \cdot H_4, \quad L_6 = G_3 \cdot (-H_5) = -G_3 \cdot H_5$$

Sistemdeki ileri yolların kazançları;

$$P_1 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3, \quad P_2 = G_1 \cdot (-G_5) \cdot G_3 = -G_1 \cdot G_3 \cdot G_5, \quad P_3 = G_1 \cdot H_2 \cdot (-G_4) \cdot (-G_3) = -G_1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot H_2$$

Sistemin determinantı;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6) + \left(\begin{array}{l} L_1 \cdot L_3 + L_1 \cdot L_4 + L_1 \cdot L_5 + L_1 \cdot L_6 + L_2 \cdot L_4 + L_2 \cdot L_5 \\ + L_2 \cdot L_6 + L_3 \cdot L_5 + L_3 \cdot L_6 + L_4 \cdot L_5 + L_4 \cdot L_6 \end{array} \right) - (L_1 \cdot L_3 \cdot L_5 + L_1 \cdot L_3 \cdot L_6 + L_1 \cdot L_4 \cdot L_5 + L_1 \cdot L_4 \cdot L_6 + L_2 \cdot L_4 \cdot L_5 + L_2 \cdot L_4 \cdot L_6)$$

$$\Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4), \quad \Delta_2 = 1 - (L_3 + L_4), \quad \Delta_3 = 1$$

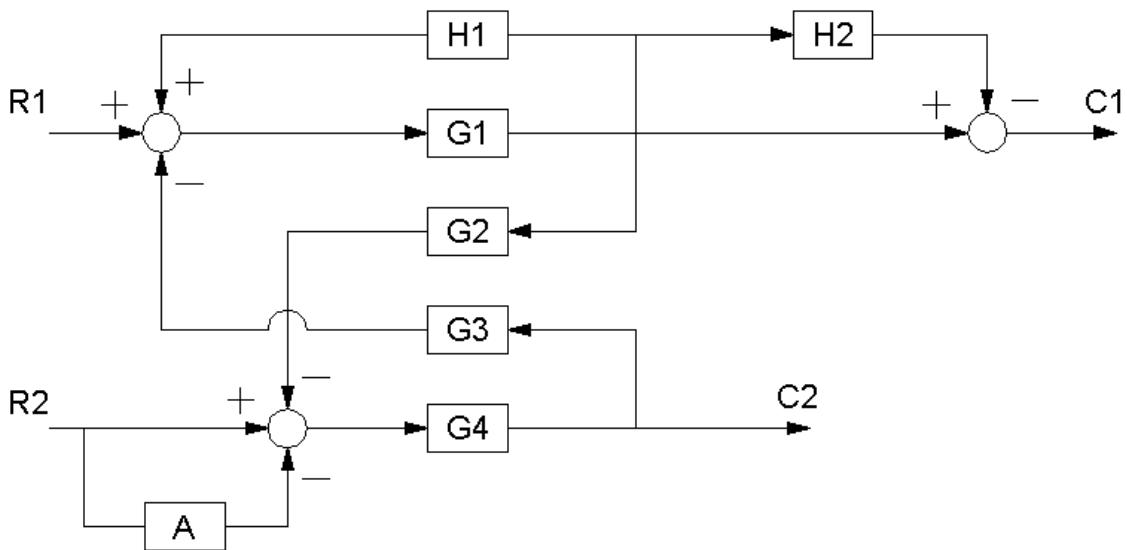
İşaret akış denklemi sisteme uygulandığında;

$$TF(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=1}^3 P_i \cdot \Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2 + P_3 \cdot \Delta_3}{\Delta}$$

Olur. Yukarıda elde edilen değerler, yerine yazıldığında, sistemin transfer fonksiyonu hesaplanmış olur.

4.3.6 Uygulama

Verilen kontrol sisteminin çıkış değerlerini İşaret Akış Denklemi metoduna göre bulunuz. $C_1=?$; $C_2=?$



Bu tip birden fazla giriş ve çıkış değerleri olan sistemlerin çözümü yapılmırken önce sistem tek giriş ve tek çıkışlı hale getirilip çözüm yapılır. Daha sonra çıkış değerleri toplanarak sonuca ulaşılır. Çözümde izlenmesi gereklili yol aşağıdaki şekildeki şevidedir.

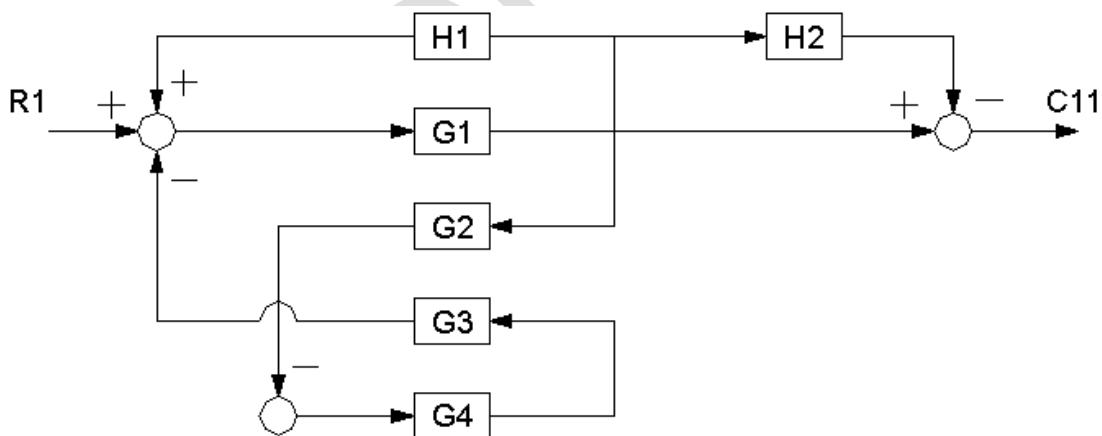
$$C_1 = C_{11} + C_{12}$$

$$C_2 = C_{21} + C_{22}$$

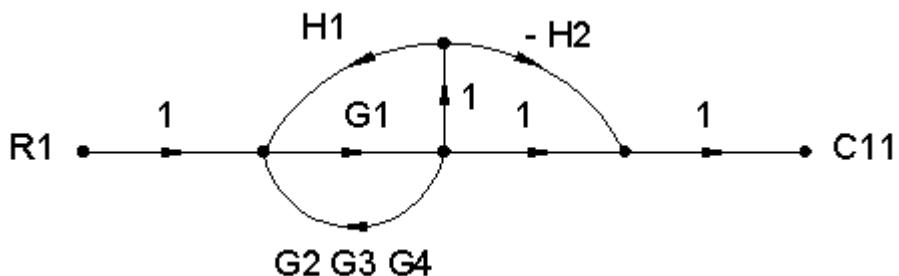
- | | | | | | |
|-----|-------------|-------------|----------------|----------------|----------------|
| a) | $R_1 = R_1$ | $R_2 = 0$ | $C_1 = C_{11}$ | $C_2 = 0$ | C_{11} / R_1 |
| b) | $R_1 = 0$ | $R_2 = R_2$ | $C_1 = C_{12}$ | $C_2 = 0$ | C_{12} / R_2 |
| c) | $R_1 = R_1$ | $R_2 = 0$ | $C_1 = 0$ | $C_2 = C_{21}$ | C_{21} / R_1 |
| d) | $R_1 = 0$ | $R_2 = R_2$ | $C_1 = 0$ | $C_2 = C_{22}$ | C_{22} / R_2 |

Yukarıdaki işlem sıraları sırasıyla uygulandığında;

a) İlk durum sisteme uygulandığında blok diyagramı aşağıdaki biçimde elde edilir.



Elde edilen blok diyagramının, işaret akış grafiği ise aşağıdaki biçimdedir.



Sisteme ait ileri yollar;

$$P_1 = (1) G_1 (1) (1) = G_1$$

$$P_2 = (1) G_1 (1) (-H_2) (1) = -G_1 H_2$$

Sisteme ait döngüler;

$$L_1 = G_1 (G_2 G_3 G_4) = G_1 G_2 G_3 G_4$$

$$L_2 = G_1 (1) H_1 = G_1 H_1$$

Sistemin determinantı;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1$$

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 - 0 = 1$$

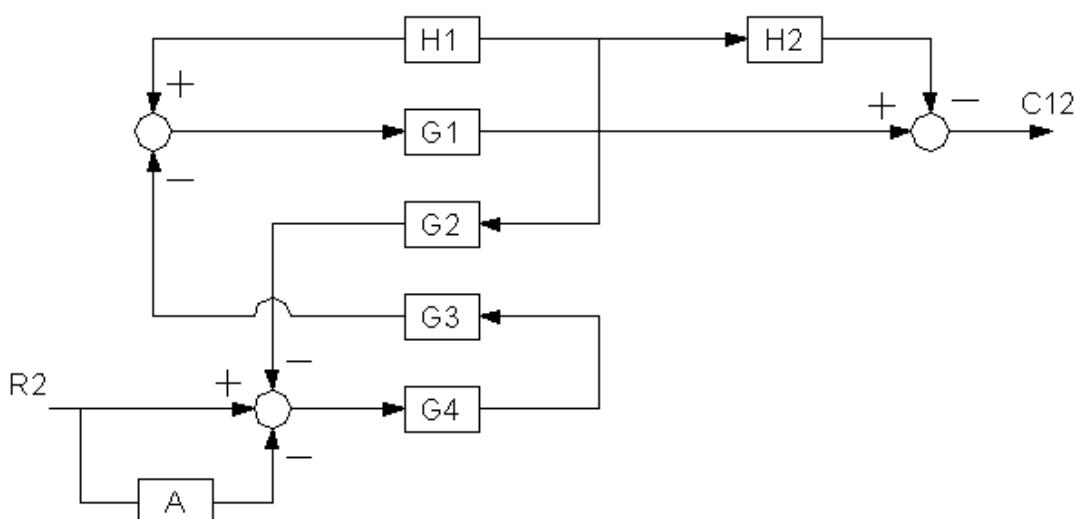
Sisteme Mason Kazanç Formülü uygulandığında;

$$TF = \frac{C_{11}}{R_1} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta}$$

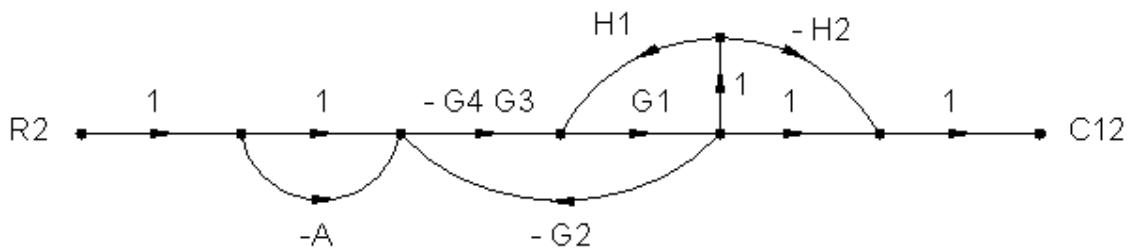
$$TF = \frac{C_{11}}{R_1} = \frac{G_1 - G_1 H_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1}$$

$$C_{11} = \frac{G_1 - G_1 H_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1} R_1 \text{ olarak elde edilir.}$$

b) İkinci durum sisteme uygulandığında blok diyagramı aşağıdaki biçimde elde edilir.



Elde edilen blok diyagramının, işaret akış grafiği ise aşağıdaki biçimdedir.



Sisteme ait ileri yollar;

$$P_1 = (1)(1)(-G_4 G_3) G_1 (1)(1) = -G_1 G_3 G_4$$

$$P_2 = (1)(1)(-G_4 G_3) G_1 (1)(-H_2)(1) = G_1 G_3 G_4 H_2$$

$$P_3 = (1)(-A)(-G_4 G_3) G_1 (1)(1) = A G_1 G_3 G_4$$

$$P_4 = (1)(-A)(-G_4 G_3) G_1 (1)(-H_2)(1) = -A G_1 G_3 G_4 H_2$$

Sisteme ait döngüler;

$$L_1 = (-G_4 G_3)(G_1)(-G_2) = G_1 G_2 G_3 G_4$$

$$L_2 = G_1 (1) H_1 = G_1 H_1$$

Sistemin determinantı;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1$$

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_3 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_4 = 1 - 0 = 1$$

Sisteme İşaret Akış Grafiği Denklemi uygulandığında;

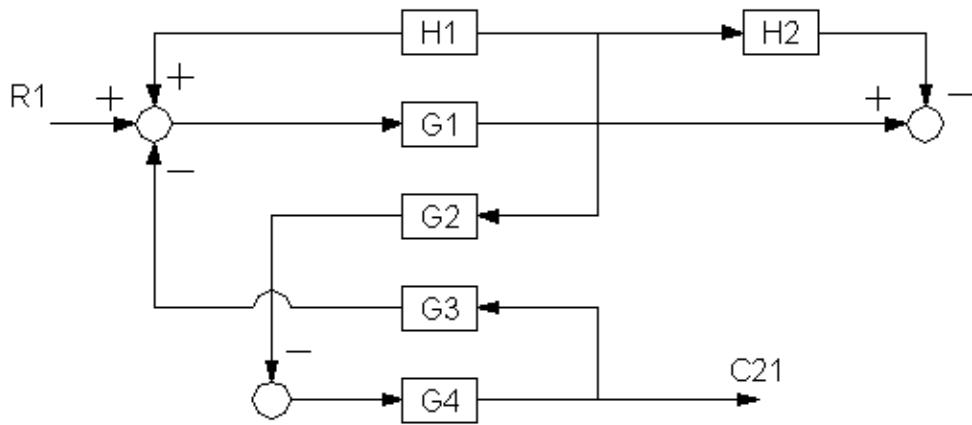
$$TF = \frac{C_{12}}{R_2} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3 + P_4 \Delta_4}{\Delta}$$

$$TF = \frac{C_{12}}{R_2} = \frac{-G_1 G_3 G_4 + G_1 G_3 G_4 H_2 + A G_1 G_3 G_4 - A G_1 G_3 G_4 H_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1}$$

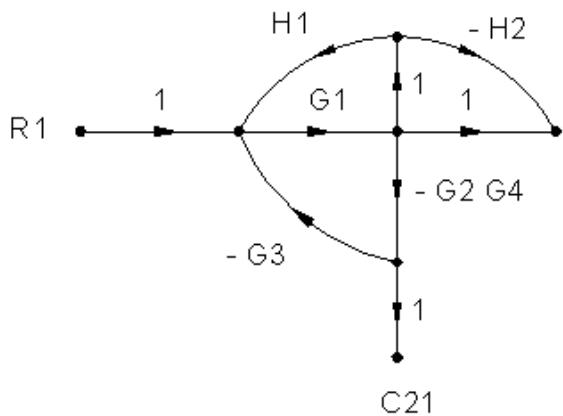
$$C_{12} = \frac{-G_1 G_3 G_4 + G_1 G_3 G_4 H_2 + A G_1 G_3 G_4 - A G_1 G_3 G_4 H_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1} R_2$$

olarak elde edilir.

c) Üçüncü durum sisteme uygulandığında blok diyagramı aşağıdaki biçimde elde edilir.



Elde edilen blok diyagramının, işaret akış grafiği ise aşağıdaki biçimdedir.



Sisteme ait ileri yollar;

$$P_1 = (1) G_1 (-G_2 G_4) (1) = -G_1 G_2 G_4$$

Sisteme ait döngüler;

$$L_1 = G_1 (1) H_1 = G_1 H_1$$

$$L_2 = G_1 (-G_2 G_4) (-G_3) = G_1 G_2 G_3 G_4$$

Sistemin determinantı;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1$$

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

Sisteme İşaret Akış Grafiği Denklemi uygulandığında;

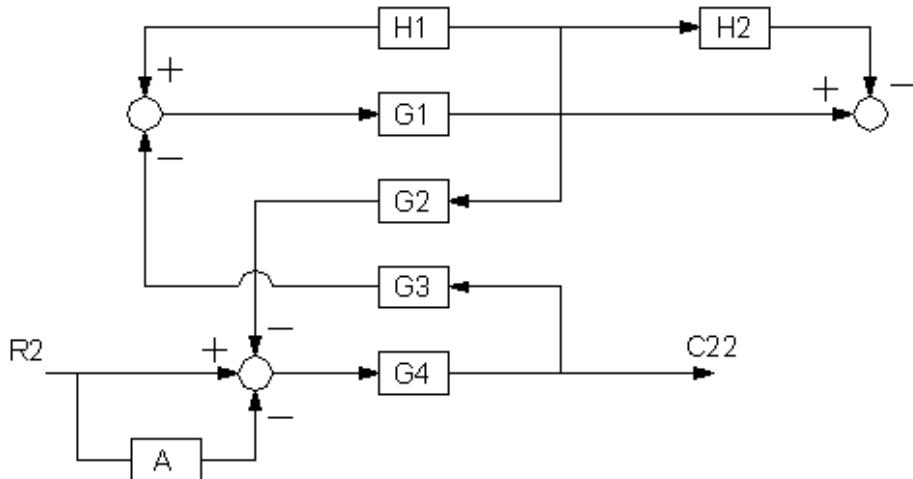
$$TF = \frac{C_{21}}{R_1} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta}$$

$$TF = \frac{C_{21}}{R_1} = \frac{-G_1 G_2 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1}$$

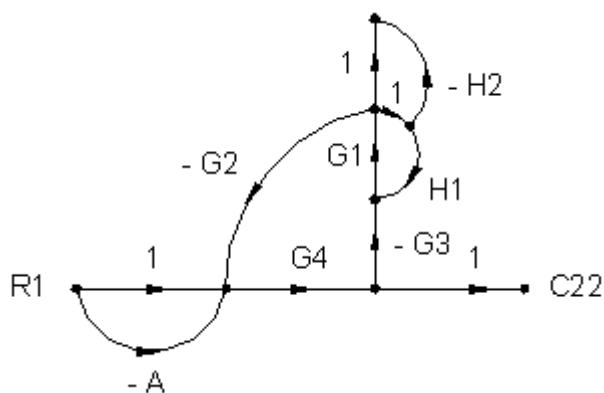
$$C_{21} = \frac{-G_1 G_2 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1} R_1$$

olarak elde edilir.

d) Dördüncü durum sisteme uygulandığında blok diyagramı aşağıdaki biçimde elde edilir.



Elde edilen blok diyagramının, işaret akış grafiği ise aşağıdaki biçimdedir.



Sisteme ait ileri yollar;

$$P_1 = (1) G_4 (1) = G_4$$

$$P_2 = (-A) G_4 (1) = -A G_4$$

Sisteme ait döngüler;

$$L_1 = G_4 (-G_3) G_1 (-G_2) = G_1 G_2 G_3 G_4$$

$$L_2 = G_1 (1) H_1 = G_1 H_1$$

Sistemin determinantı;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1$$

$$\Delta_1 = 1 - L_2 = 1 - G_1 H_1$$

$$\Delta_2 = 1 - L_1 = 1 - G_1 H_1$$

Sisteme İşaret Akış Grafiği Denklemi uygulandığında;

$$TF = \frac{C_{22}}{R_2} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta}$$

$$TF = \frac{C_{22}}{R_2} = \frac{G_4(1-G_1 H_1) - A G_4(1-G_1 H_1)}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1}$$

$$C_{22} = \frac{G_4 - G_1 G_4 H_1 - A G_4 + A G_1 G_4 H_1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1} R_2$$

olarak elde edilir. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki biçimde birleştirilerek çıkış değerleri bulunabilir.

$$C_1 = C_{11} + C_{12}$$

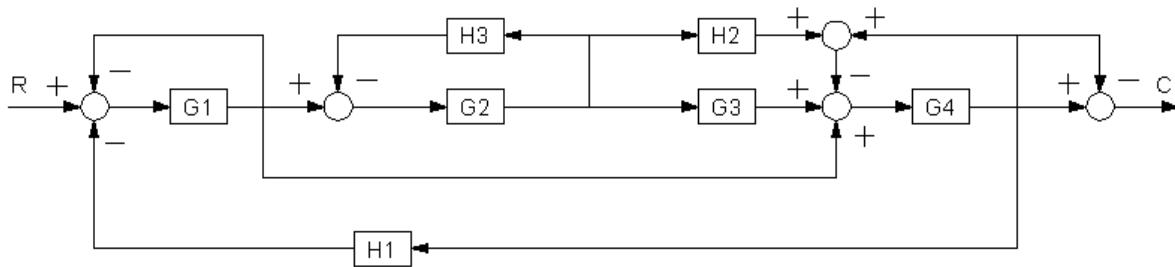
$$C_2 = C_{21} + C_{22}$$

$$C_1 = \frac{(G_1 - G_1 H_2) R_1 + (-G_1 G_3 G_4 + G_1 G_3 G_4 H_2 + A G_1 G_3 G_4 - A G_1 G_3 G_4 H_2) R_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1}$$

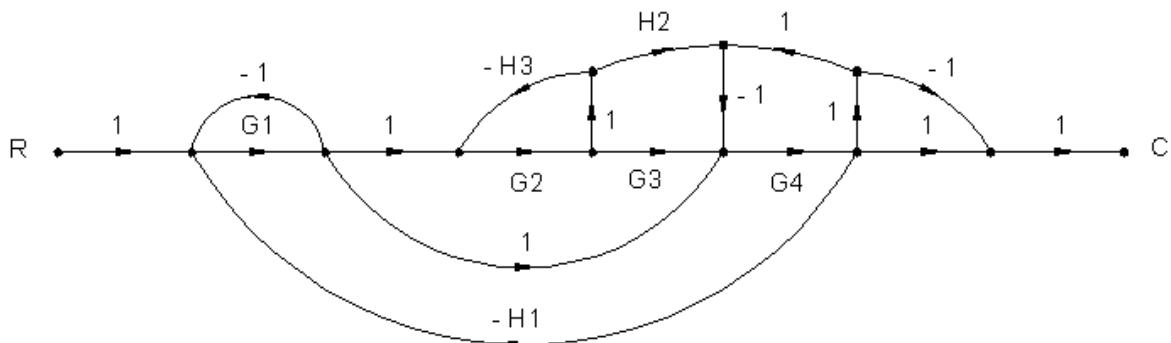
$$C_2 = \frac{(-G_1 G_2 G_4) R_1 + (G_4 - G_1 G_4 H_1 - A G_4 + A G_1 G_4 H_1) R_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 H_1}$$

4.3.7 Uygulama

Şekilde verilen blok diyagramının transfer fonksiyonunu işaret akış grafiği ile hesaplayınız.



Verilen sistemin işaret akış grafiği aşağıdaki biçimde çizilir.



Sisteme ait ileri yollar;

$$P_1 = (1) G_1 (1) G_2 G_3 G_4 (1) (1) = G_1 G_2 G_3 G_4$$

$$P_2 = (1) G_1 (1) G_2 G_3 G_4 (1) (-1) (1) = -G_1 G_2 G_3 G_4$$

$$P_3 = (1) G_1 (1) G_2 (1) H_2 (-1) G_4 (1) (1) = -G_1 G_2 G_4 H_2$$

$$P_4 = (1) G_1 (1) G_2 (1) H_2 (-1) G_4 (1) (-1) (1) = G_1 G_2 G_4 H_2$$

$$P_5 = (1) G_1 (1) G_4 (1) (1) = G_1 G_4$$

$$P_6 = (1) G_1 (1) G_4 (1) (-1) (1) = -G_1 G_4$$

Sisteme ait döngüler;

$$L_1 = G_1 (-1) = -G_1$$

$$L_2 = G_2 (1) (-H_3) = -G_2 H_3$$

$$L_3 = G_4 (1) (1) (-1) = -G_4$$

$$L_4 = G_1 (1) G_2 G_3 G_4 (-H_1) = -G_1 G_2 G_3 G_4 H_1$$

$$L_5 = G_1 (1) G_2 (1) H_2 (-1) G_4 (-H_1) = G_1 G_2 G_4 H_1 H_2$$

$$L_6 = G_1 (1) G_4 (-H_1) = -G_1 G_4 H_1$$

Sistemin determinantı;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6) + (L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3 + L_2 L_6) - (L_1 L_2 L_3)$$

$$\Delta = 1 + G_1 + G_2 H_3 + G_4 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 - G_1 G_2 G_4 H_1 H_2 + G_1 G_4 H_1 + G_1 G_2 H_3 + G_1 G_4 + G_2 H_3 G_4 + G_2 H_3 G_1 G_4 H_1 + G_1 G_2 H_3 G_4$$

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_3 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_4 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_5 = 1 - L_2 = 1 + G_2 H_3$$

$$\Delta_6 = 1 - L_2 = 1 + G_2 H_3$$

Sisteme İşaret Akış Grafiği Denklemi uygulandığında;

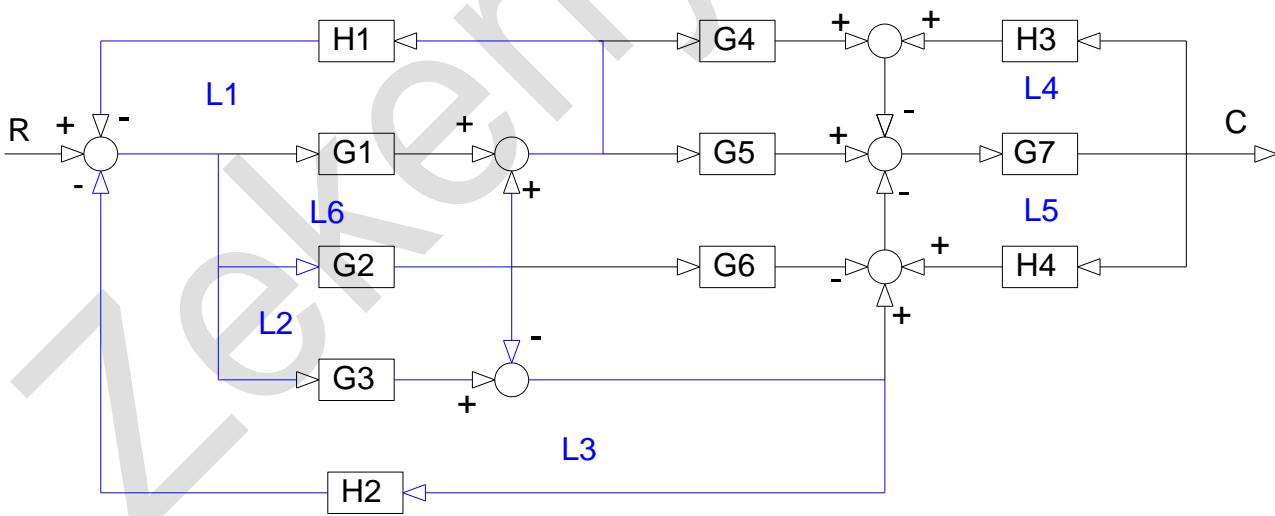
$$TF = \frac{C}{R} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3 + P_4 \Delta_4 + P_5 \Delta_5 + P_6 \Delta_6}{\Delta}$$

$$TF = \{ (G_1 G_2 G_3 G_4) + (-G_1 G_2 G_3 G_4) + (-G_1 G_2 G_4 H_2) + (G_1 G_2 G_4 H_2) + [(G_1 G_4)(1 + G_2 H_3)] + [(-G_1 G_4)(1 + G_2 H_3)] \} / \{ 1 + G_1 + G_2 H_3 + G_4 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 - G_1 G_2 G_4 H_1 H_2 + G_1 G_4 H_1 + G_1 G_2 H_3 + G_1 G_4 + G_2 H_3 G_4 + G_2 H_3 G_1 G_4 H_1 + G_1 G_2 H_3 G_4 \}$$

olarak elde edilir.

4.3.8 Uygulama

Şekilde verilen sistemin transfer fonksiyonunu işaret akış diyagramı denklemini kullanarak hesaplayınız.



Sistemin döngü kazançları;

$$L_1 = G_1 \cdot (-H_1) \rightarrow L_1 = -G_1 \cdot H_1, L_2 = (-G_1) \cdot (-H_2) \rightarrow L_2 = G_1 \cdot H_2$$

$$L_3 = G_3 \cdot (-H_2) \rightarrow L_3 = -G_3 \cdot H_2, L_4 = G_7 \cdot (H_3) \cdot (-1) \rightarrow L_4 = -G_7 \cdot H_3$$

$$L_5 = G_3 \cdot H_4 \cdot (-1) \rightarrow L_5 = -G_3 \cdot H_4, L_6 = G_2 \cdot (-H_1)$$

Sistemdeki ileri yol kazançları;

$$P_1 = G1 \cdot G4 \cdot (-1) \cdot G7 \rightarrow P_1 = -G1 \cdot G4 \cdot G7$$

$$P_2 = G1 \cdot G5 \cdot G7$$

$$P_3 = G2 \cdot G4 \cdot (-1) \cdot G7 \rightarrow P_3 = -G2 \cdot G4 \cdot G7$$

$$P_4 = G2 \cdot G5 \cdot G7$$

$$P_5 = G2 \cdot G6 \cdot (-1) \cdot G7 \rightarrow P_5 = -G2 \cdot G6 \cdot G7$$

$$P_6 = (-G2) \cdot (-1) \cdot G7$$

$$P_7 = G3 \cdot (-1) \cdot G7$$

Sistemin determinantı;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6) + (L_1 \cdot L_4 + L_1 \cdot L_5 + L_2 \cdot L_4 + L_2 \cdot L_5 + L_3 \cdot L_4 + L_3 \cdot L_5 + L_6 \cdot L_4)$$

$$\Delta_1 = 1 - 0, \Delta_2 = 1 - 0, \Delta_3 = 1 - 0, \Delta_4 = 1 - 0, \Delta_5 = 1 - 0, \Delta_6 = 1 - 0, \Delta_7 = 1 - 0 = 1$$

İşaret akış denklemi sisteme uygulandığında;

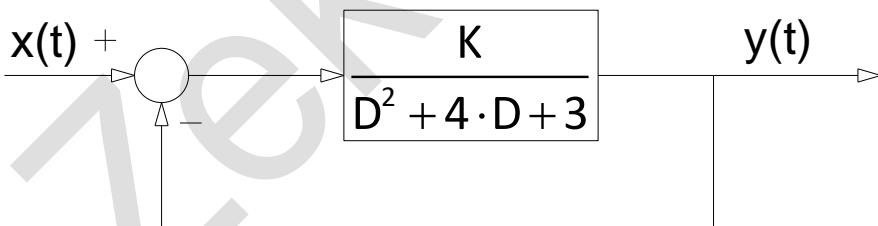
$$TF(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=1}^7 P_i \cdot \Delta_i}{\Delta} \rightarrow TF(s) = \frac{P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2 + P_3 \cdot \Delta_3 + P_4 \cdot \Delta_4 + P_5 \cdot \Delta_5 + P_6 \cdot \Delta_6 + P_7 \cdot \Delta_7}{\Delta}$$

$$TF(s) = \frac{P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 1 + P_3 \cdot 1 + P_4 \cdot 1 + P_5 \cdot 1 + P_6 \cdot 1 + P_7 \cdot 1}{\Delta} \rightarrow TF(s) = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7}{\Delta}$$

Olur. Yukarıda elde edilen (Δ) ve (P_i) değerleri yerine yazıldığında, sistemin transfer fonksiyonu hesaplanmış olur.

4.3.9 Uygulama

Aşağıdaki verilen blok diyagramının transfer fonksiyonunu elde ediniz. ($K=1$, $x(t)=u_1(t)$ ve başlangıç şartları ($x(0)=1, \dot{x}(0)=0$) dir.)



$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\frac{K}{D^2 + 4 \cdot D + 3}}{1 + \frac{K}{D^2 + 4 \cdot D + 3}} = \frac{\frac{K}{D^2 + 4 \cdot D + 3}}{\frac{D^2 + 4 \cdot D + 3 + K}{D^2 + 4 \cdot D + 3}} = \frac{K}{D^2 + 4 \cdot D + 3 + K} = \frac{1}{D^2 + 4 \cdot D + 4} \quad (4.4)$$

$$[s^2 Y(s) + s \cdot y(0) - \dot{y}(0)] + 4[s \cdot Y(s) - y(0)] + 4 \cdot Y(s) = X(s)$$

$$[s^2 \cdot Y(s) - s] + 4 \cdot s \cdot Y(s) - 4 + 4 \cdot Y(s) = X(s) \rightarrow s^2 \cdot Y(s) - s + 4 \cdot s \cdot Y(s) + 4 \cdot Y(s) - 4 = X(s)$$

$$Y(s) \cdot [s^2 + 4 \cdot s + 4] = (s+4) + X(s) \rightarrow Y(s) \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 4) = s + 4 + 1 \rightarrow Y(s) \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 4) = s + 5$$

$$Y(s) = \frac{s+5}{s^2 + 4 \cdot s + 4} \rightarrow \frac{s+5}{s^2 + 4s + 4} = \frac{b_2}{(s+2)^2} + \frac{b_1}{s+2}$$

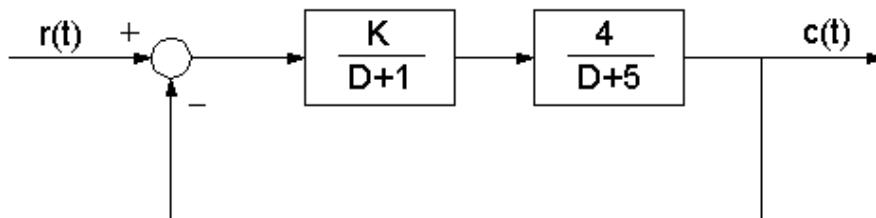
$$b_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{0!} \cdot \left(\cancel{(s+2)^2} \cdot \frac{s+5}{\cancel{(s+2)^2}} \right) = 3, \quad b_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{ds} \left((s+2)^2 \cdot \frac{s+5}{(s+2)^2} \right) \right] = 1$$

$$Y(s) = \frac{3}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)} \rightarrow y(t) = 3 \cdot \frac{1}{1!} \cdot t \cdot e^{-2t} + e^{-2t} \rightarrow y(t) = 3 \cdot t \cdot e^{-2t} + e^{-2t}$$

4.3.10 Uygulama

Aşağıda verilen blok diyagramında tüm başlangıç şartları sıfır ve giriş değeri $r(t) = e^{-t}$ olarak verilmiştir. Bu durumda,

- a) $K=1$ için $c(t) = ?$
- b) Sistemin kararlı olması için, K aralığını hesaplayınız.
- c) b şıkkında elde edilen sonuca göre, sistemi kararsız kıلان bir K değeri için sistemin kararsız olduğunu ispatlayınız.



$$a) \frac{c(t)}{r(t)} = \frac{\frac{4K}{(D+1)(D+5)}}{1 + \frac{4 \cdot K}{(D+1)(D+5)}} = \frac{4 \cdot K}{D^2 + 6 \cdot D + 5 + 4 \cdot K} \text{ veya sadeleştirildiğinde;}$$

$(D^2 + 6D + 5 + 4K) \cdot c(t) = 4 \cdot K \cdot r(t)$ Başlangıç şartları sıfır olduğundan D yerine s yazılır.

$$(s^2 + 6s + 9)C(s) = 4 \frac{1}{s+1}$$

$$C(s) = \frac{4}{(s+3)^2(s+1)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{b_2}{(s+3)^2} + \frac{b_1}{s+3}$$

$$a_1 = (s+1) \frac{4}{(s+1)(s+3)^2} \Big|_{s=-1} = \frac{4}{(-1+3)^2} = \frac{4}{4} = 1, \quad b_2 = \left((s+3)^2 \frac{4}{(s+3)^2(s+1)} \right) \Big|_{s=-3} = \frac{4}{s+1} \Big|_{s=-3} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$b_1 = \frac{1}{1!} \left(\frac{d}{ds} (s+3)^2 \frac{4}{(s+3)^2(s+1)} \right) \Big|_{s=-3} = \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{4}{s+1} \right) \right) \Big|_{s=-3} = \frac{-4}{(s+1)^2} \Big|_{s=-3} = \frac{-4}{4} = -1$$

$C(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+3)^2} - \frac{1}{(s+3)}$ elde edilir. Laplace dönüşüm tablosundan yararlanarak;

$$c(t) = e^{-t} - 2 \cdot t \cdot e^{-3t} - e^{-3t}$$

b) $(D^2 + 6D + 5 + 4K)c(t) = 4Kr(t)$

$$(s^2 \cdot C(s) - s \cdot c(0) - \dot{c}(0)) + 6 \cdot (s \cdot C(s) - c(0)) + 5 \cdot C(s) + 4 \cdot K \cdot C(s) = 4 \cdot K \cdot R(s)$$

$$(s^2 + 6 \cdot s + 5 + 4 \cdot K) \cdot C(s) = 4 \cdot K \cdot R(s)$$

$$r(t) = e^{-t} \rightarrow R(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{dönüşümü yapılabılır.}$$

$$C(s) = \frac{4 \cdot K}{(s^2 + 6 \cdot s + 5 + 4 \cdot K) \cdot (s+1)} = \frac{4 \cdot K}{(s^3 + 7s^2 + (11 + 4 \cdot K) \cdot s + 5 + 4 \cdot K)}$$

olarak elde edilir. Kararlılığın incelenmesi için transfer fonksiyonunun determinantı sıfır eşitlenmelidir.

$$s^3 + 7s^2 + (11 + 4K)s + 5 + 4K = 0$$

Routh kriterine göre;

s^3	1	$(11 + 4 \cdot K)$	0
s^2	7	$(5 + 4 \cdot K)$	0
s^1	$\left(\frac{72 + 24 \cdot K}{7}\right)$	0	
s^0	$(5 + 4 \cdot K)$	0	

$$5 + 4 \cdot K > 0 \rightarrow 4 \cdot K > -5 \rightarrow K > -\frac{5}{4} \text{ olmalıdır.}$$

$$72 + 24K > 0 \rightarrow K > -\frac{72}{24} \rightarrow K > -3 \text{ olmalıdır. İki şart birleştirildiğinde;}$$

$$K > -\frac{5}{4}$$

olmalıdır.

c) b şıkkında bulunan sonuca göre, $K = -2$ için sistem kararsız çıkmalıdır.

$$\frac{c(t)}{r(t)} = \frac{-8}{D^2 + 6D - 3}$$

$C(s) = \frac{-8}{(s^2 + 6s - 3)(s+1)}$ şeklinde elde edilir. Denklemin kökleri; $s_{1,2} = -3 \mp 2\sqrt{3}$ tür. Buna göre;

$$C(s) = \frac{a_1}{(s - (-3 + 2\sqrt{3}))} + \frac{a_2}{(s - (-3 - 2\sqrt{3}))} + \frac{a_3}{s+1}$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -3+2\sqrt{3}} \left[\frac{(s+3-2\sqrt{3})(-8)}{(s+3-2\sqrt{3})(s+3+2\sqrt{3})(s+1)} \right] = \frac{(-8)}{(s+3+2\sqrt{3})(s+1)} \Big|_{s=-3+2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3(-1+\sqrt{3})}$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow -3-2\sqrt{3}} \left[\frac{(s+3+2\sqrt{3})(-8)}{(s+3-2\sqrt{3})(s+3+2\sqrt{3})(s+1)} \right] = \frac{(-8)}{(s+3-2\sqrt{3})(s+1)} \Big|_{s=-3-2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}$$

$$a_3 = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{(s+1)(-8)}{(s+3-2\sqrt{3})(s+3+2\sqrt{3})(s+1)} \right] = \frac{(-8)}{(s+3-2\sqrt{3})(s+3+2\sqrt{3})} \Big|_{s=-1} = -\frac{2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$$

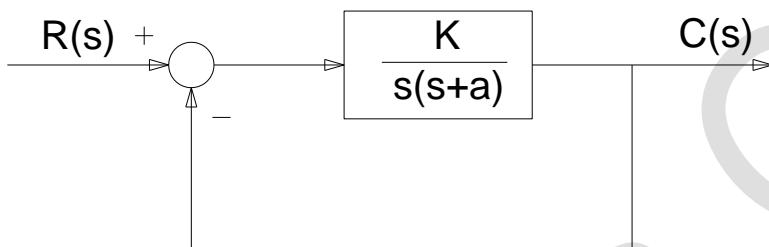
$$c(t) = a_1 e^{-s_1 t} + a_2 e^{-s_2 t} + a_3 e^{-t}$$

$c(t) = a_1 e^{-0,4642t} + a_2 e^{6,4642t} + a_3 e^{-t}$ olarak bulunur. Elde edilen denklemde, ($c(\infty) = \infty$) olduğundan kararsız olduğu görülür.

4.3.11 Uygulama

Aşağıda verilen blok diyagramında tüm başlangıç şartları sıfırdır.

- a) $r(t) = u_1(t)$ iken $c(t) = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{-4t}$ olması için, $K = ?$ ve $a = ?$
- b) $r(t) = e^{-t}$ iken $c(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-3t}$ olması için, $K = ?$ ve $a = ?$
- c) a şıkları için sistemin kararlı olması için $K = ?$ ve $a = ?$
- d) c şıklarında elde edilen koşula göre, kararsız K ve a değeri için sistemin kararsızlığını ispatlayınız.



Cevaplar: a)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+a)}}{1 + \frac{K}{s(s+a)}} = \frac{K}{s^2 + as + K} \quad (4.5)$$

$$c(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t} \text{ olduğundan; } C(s) = C_1 \frac{1}{s+1} + C_2 \frac{1}{s+4} \text{ olur.}$$

$$(s+1)(s+4) \Rightarrow \begin{cases} s^2 + 5s + 4 \\ s^2 + as + K \end{cases} \quad a=5; K=4 \text{ olmalıdır.}$$

$$\text{b) } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + as + K} \rightarrow C(s) = \frac{K}{s^2 + as + K} \frac{1}{s+1} \rightarrow C(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+2} + \frac{C_3}{s+3}$$

$$(s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6 \Rightarrow a=5; K=6$$

c) $s^2 + as + K = 0$ Routh kriterine göre;

s^2	1	K	0
s^1	a	0	
s^0	K		

$a > 0$ ve $K > 0$ olmalıdır.

e) Kararsız durum için; $K = 2$ ve $a = -3$ olsun,

$$C(s) = \frac{2}{s^2 - 3s + 2} = \frac{a_1}{(s-1)} + \frac{a_2}{(s-2)}$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow 1} \left((s-1) \frac{2}{(s-1)(s-2)} \right) = -2$$

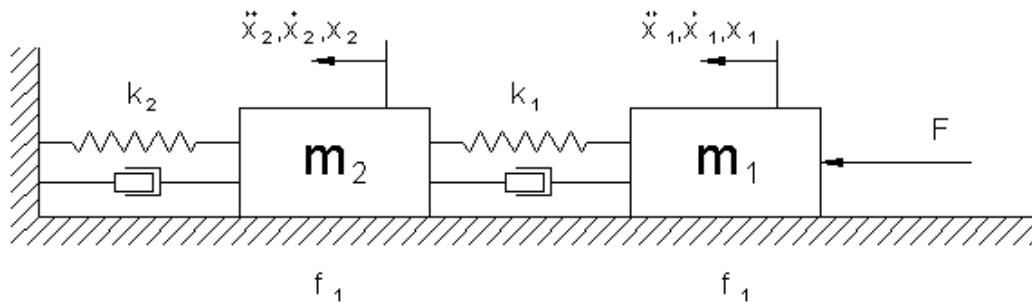
$$a_2 = \lim_{s \rightarrow 2} \left((s-2) \frac{2}{(s-1)(s-2)} \right) = 2$$

$C(s) = \frac{2}{(s-2)} - \frac{2}{(s-1)}$ elde edilir. Tablodan yararlanarak;

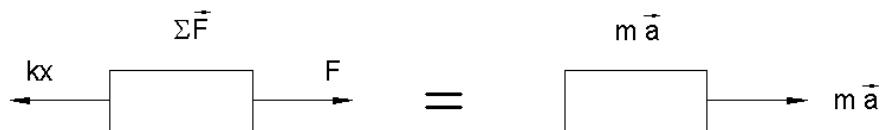
$c(t) = 2 \cdot e^{2t} - 2 \cdot e^t$ bulunur. $t \rightarrow \infty$, $c(t) \rightarrow \infty$ olduğundan kararsız olduğu görülür.

4.3.12 Uygulama

4.10: Aşağıdaki verilen gerçek sistemin transfer fonksiyonunu hesaplayınız. (k := yay katsayısı, m := kütle, x := x doğrultusundaki yer değiştirmeye, \dot{x} := x doğrultusundaki hız, \ddot{x} := x doğrultusundaki ivme, f := amortisör katsayısı, F := dış kuvvet), (Sisteme ait başlangıç şartları sıfırdır.) , ($X_1 > X_2$ dir.)



Sisteme ait giriş değeri F kuvveti ve çıkış değeri ise x yerdeğiştirmeye değeridir. Sisteme ait dış kuvvetler ve iç kuvvetler dengesi yazıldığında;

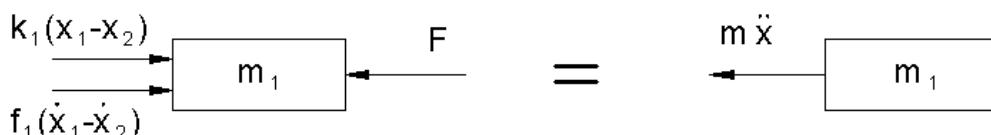


$$-kx + F = ma \rightarrow -kx - ma + F = 0 \quad ma + kx = F \rightarrow m\ddot{x} + kx = F$$

$$m(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) + kX(s) = F(s) \rightarrow m \cdot s^2 \cdot X(s) + k \cdot X(s) = F(s)$$

$$X(s)(ms^2 + k) = F(s) \rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + k} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

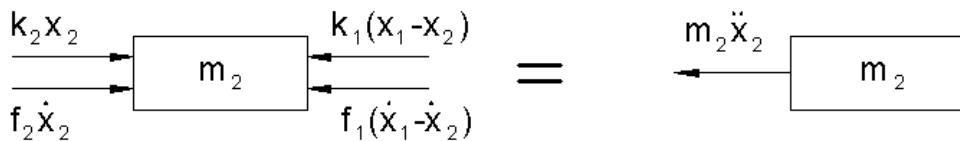
Yukarıda verilen sistem ele alındığında, 1 nolu kütleye için kuvvet dengesi;



Şekilden de görüldüğü gibi, yayın kütleye yaptığı etki $F = kx$, amortisörün yaptığı etki ise $F = f\dot{x}$ ile ölçülmektedir. Buna göre denge denklemi;

$$-k_1(x_1 - x_2) - f_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f(t) = m_1\ddot{x}_1 \quad (1)$$

Otomatik Kontrol Ders Notları, Pamukkale Üniversitesi, Z.Girgin olarak elde edilir. 2 nolu kütle için kuvvet dengesi ise;



2 nolu kütle için denge denklemi ise;

$$-k_2x_2 - f_2\dot{x}_2 + k_1(x_1 - x_2) + f_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_2\ddot{x}_2 \quad (2)$$

Elde edilen iki denge denklemi yeniden yazıldığında;

$$m_1\ddot{x}_1 + f_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) = f(t) \quad (3)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + f_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f_2\dot{x}_2 + k_1(x_1 - x_2) + k_2x_2 = 0 \quad (4)$$

Denklem (3) ve (4) matris formunda yazıldığında;

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 & -f_1 \\ -f_1 & (f_1 + f_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

olarak elde edilir. İki denklemi s uzayında aşağıdaki biçimde yazılabılır.

$$\begin{aligned} m_1(s^2X_1(s) - sx_1(0) - \dot{x}_1(0)) + f_1(sX_1(s) - x_1(0) - sX_2(s) + x_2(0)) + \\ k_1(X_1(s) - X_2(s)) = F(s) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} m_2(s^2X_2(s) - sx_2(0) - \dot{x}_2(0)) + f_1(sX_2(s) - x_2(0) - sX_1(s) + x_1(0)) + \\ f_2(sX_2(s) - x_2(0)) + k_1(X_2(s) - X_1(s)) + k_2(X_2(s)) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Başlangıç şartları sıfır kabul edildiğinde, denklem (6) aşağıdaki biçimde elde edilir;

$$m_1s^2X_1(s) + f_1sX_1(s) + k_1X_1(s) = f_1sX_2(s) + k_1X_2(s) + F(s)$$

$$\underbrace{(m_1s^2 + f_1s + k_1)}_A X_1(s) = \underbrace{(f_1s + k_1)}_B X_2(s) + F(s) \quad (8)$$

denklem (1.7) ise;

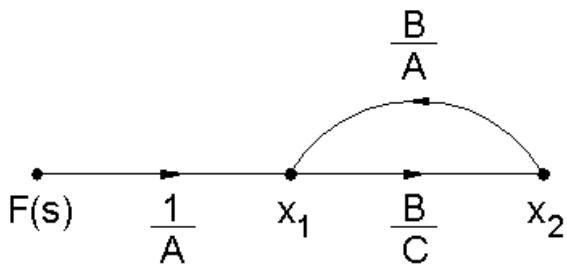
$$\underbrace{(m_2s^2 + (f_1 + f_2)s + (k_1 + k_2))}_C X_2(s) = \underbrace{(f_1s + k_1)}_B X_1(s) \quad (9)$$

olarak elde edilir. Denklem (8) ve denklem (9) aşağıdaki biçimde kısa olarak tekrar yazıldığında;

$$AX_1(s) = BX_2(s) + F(s) \Rightarrow X_1(s) = \frac{B}{A}X_2(s) + \frac{1}{A}F(s) \quad (10)$$

$$CX_2(s) = BX_1(s) \Rightarrow X_2(s) = \frac{B}{C}X_1(s) \quad (11)$$

Denklem (10) ve denklem (11)'den, sisteme ait işaret akış diyagramı aşağıdaki biçimde elde edilir.



Buna göre transfer fonksiyonu;

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} \quad (12)$$

Determinant değeri;

$$\Delta = 1 - \frac{B^2}{AC}$$

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$P_1 = \frac{B}{AC}$$

İleri yol değeri;

olarak yazılır. Elde edilen değerler, denklem (12) de yerine konulduğunda;

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{\frac{B}{AC}}{\frac{AC - B^2}{AC}} = \frac{B}{AC - B^2}$$

olarak elde edilir.

5. Kararlılık Kriterleri

Bir sistemde $t \rightarrow \infty$ iken impulsif cevap sıfıra yaklaşıyorsa, sistem kararlıdır denir.

Uygulama 5.1: $y = 5t$ fonksiyonu ele alınınsın. Denklemdeki $t \rightarrow \infty$ giderken; $y \rightarrow \infty$ gitmektedir. Bu durumda sistem kararsızdır.

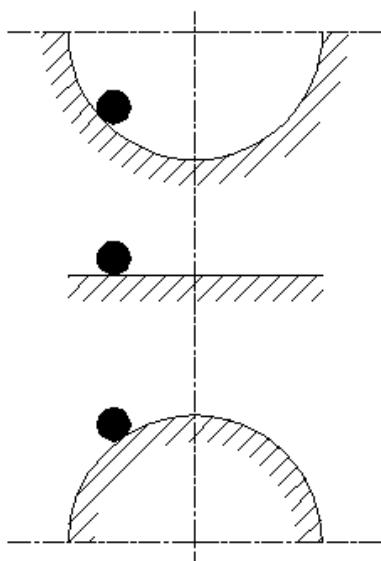
Uygulama 5.2: $y = 4 \cdot \sin(5 \cdot t)$ fonksiyonu ele alınınsın. Ele alınan denklemin grafiği çizildiğinde, y değerinin sıfıra gitmediği görülür. Sistem kararsızdır.

Uygulama 5.3: $y = \frac{10}{t}$ fonksiyonu ele alınınsın. $t \rightarrow \infty$ giderken; $y \rightarrow 0$ gitmektedir. Sistem kararlıdır.

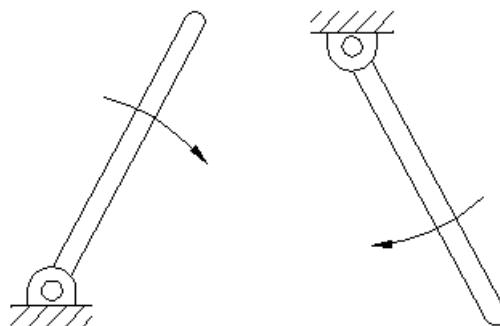
Uygulama 5.4: $y = 5e^{-2t}$ fonksiyonu ele alınınsın. $t \rightarrow \infty$ giderken; $y \rightarrow 0$ gitmektedir. Sistem kararlıdır.

Uygulama 5.5: $y = \frac{t}{e^{5t}}$ fonksiyonu ele alınınsın. Bu oranda payda paya göre daha hızlı ilerlemektedir. Bundan dolayı $y \rightarrow 0$ gitmektedir. Sistem kararlıdır.

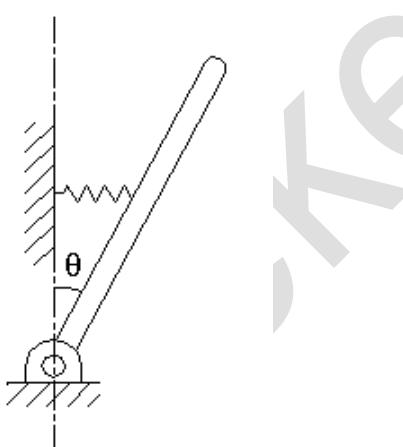
Uygulama 5.6: Aşağıdaki şekilde üç durum verilmiştir. İlk durumda iç bükey bir yüzeyde, ikinci durumda düz bir yüzeyde, üçüncü durumda ise dış bükey bir yüzeyde gösterilen pozisyonda kendi haline bırakılan toplardan ilki belirli bir salınım hareketinden sonra en alt noktada durur. Bu durum sistemin kararlı olduğunu gösterir. Çünkü zaman içinde sistem kararlılık noktasına gelmiştir. İkinci durumda topun hareketinde herhangi bir değişiklik olmaz. Bu hal Marjinal Kararlılık olarak adlandırılır. Üçüncü durumda ise top aşağı düşer. Sistem kararsızdır.



Uygulama 5.7: Aşağıda ters yönlü olarak iki mafsal bağlantısı gösterilmiştir. Birinci pozisyonda çubuk serbest bırakıldığında çubuk aşağı doğru düşecektir. Yani bir kararsızlık söz konusudur. Ancak ikinci durumda çubuk serbest bırakıldığında belli bir zaman sonra sistem kararlı hale gelecektir.



Uygulama 5.8: Aşağıda şekildeki gibi bir mafsal bağlantısında, θ açısı büyükçe yayın çubuğu tutması zorlaşır. Eğer θ açısı belli bir değeri geçerse, yay çubuğu tutamaz hale gelir. Böyle bir sistem kararlılık konusuna örnek olalarak düşünülebilir. Yani sistemin en uygun biçimde çalışması için yay katsayısının hesaplanması veya yay katsayısı belli bir sistemdeki en uygun çalışma açılarının belirlenmesi sorularının cevaplarını kararlılığını inceleyerek elde edebiliriz.



Bütün bu örneklerden de anlaşılacağı üzere kararlılık hali bir sistemin belli bir zaman dilimi içinde düzenli duruma gelme halidir. Kararlılık durumu yukarıda anlatıldığı gibi tesbit edileceği gibi sistem için elde edilen transfer fonksiyonundaki Δ determinant değerinin incelenmesiylede yapılabilir. Öncelikle determinant değeri sıfıra eşitlenir. $\Delta = 0$ polinomuna sistemin karakteristik denklemi denir. Karakteristik denklem aşağıdaki biçimlerde incelenerek sistemin kararlı veya kararsız olduğu anlaşılır. Aynı zamanda kararlılık için gerekli sınır değerleri hesaplanır. Bu inceleme üç değişik biçimde yapılabilir.

1. Routh Kriteri

2. Hurwitz Kriteri
3. Sürekli Bölme Kriteri

5.1 Routh Kriteri

$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ polinomu verilmiş olsun.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
...	b_1	b_2	b_3	...
s^1	c_1	c_2	c_3	...
s^0

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-3} b_3}{b_1} \quad (5.2)$$

Tablonun birinci ve ikinci satırları karakteristik denklemden doğrudan yazılır. Diğer katsayılar ($b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$) belli kurallara göre hesaplanarak elde edilir. Bu işlem s^0 polinomunun katsayısı hesaplanana kadar devam eder.

Tablo oluşturulduktan sonra inceleme için ilk sütun göz önüne alınır. İlk sütundaki katsayılar sıfırdan büyük olduğu takdirde sistem kararlıdır denir. Sütunda sıfır bulunması durumda sistem marginal kararlıdır. Küçük olması durumunda ise sistem kararsızdır.

Eğer hesaplama sonucunda ilk sütundaki elemanlardan biri sıfır çıkarsa, sıfır yerine ϵ değeri alınır ve işleme devam edilir. ϵ değeri sıfıra çok yakın bir değer olarak kabul edilir. Hesaplanan satırın tüm elemanları sıfır çıkarsa; bu durumda hesaplanan satırın, üzerindeki satırdaki katsayıların oluşturduğu polinomun türevi alınır ve elde edilen yeni polinomun katsayıları hesaplanan satıra yerleştirilir. Bu şekilde işleme devam edilir.

5.1.1 Uygulama

$\Delta = s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$ karakteristik denkleminin kararlılığını Routh Kriterine göre inceleyiniz.

s^3	1	12	0
s^2	6	8	0
s^1	64/6	0	
s^0	8	0	

İlk sütundaki elemanların hepsi pozitif işaretli olduğundan kararlıdır.

5.1.2 Uygulama

$\Delta = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K = 0$ karakteristik denkleminin kararlı olması için K değeri hangi aralıkta olmalıdır?

s^3	1	3	0
s^2	3	(1+K)	0
s^1	$\left(\frac{8-K}{3}\right)$	0	
s^0	(1+K)	0	

Routh tablosunun 3. satırından,

$$\frac{8-K}{3} > 0 \rightarrow 3 \cdot \frac{8-K}{3} > 0 \cdot 3 \rightarrow 8-K > 0 \rightarrow [8 > K] \text{ şartı ve 4. satırından,}$$

$1+K>0 \rightarrow K>-1$ şartı elde edilir. Bu iki şartın birleştirilmesiyle birlikte $-1<K<8$ olmalıdır.

5.1.3 Uygulama

$\Delta=s^4+6s^3+11s^2+6s+K=0$ karakteristik denkleminin kararlı olması için K değeri hangi aralıkta olmalıdır?

s^4	1	11	K
s^3	6	6	0
s^2	10	K	
s^1	$\left(\frac{60-6K}{10}\right)$	0	
s^0	K		

Routh tablosunun 4. satırından,

$$\frac{60-6K}{10} > 0 \rightarrow 10 \cdot \frac{60-6K}{10} > 0 \cdot 10 \rightarrow 60-6K > 0 \rightarrow 60 > 6 \cdot K \rightarrow K < 10 \text{ şartı ve 5. satırından,}$$

$K > 0$ şartı elde edilir. Bu iki şartın birleştirilmesiyle birlikte $0 < K < 10$ olmalıdır.

Routh kriterinde karşılaşılan iki istisna durum vardır. Bunlardan birincisi; Routh tablosunun satırındaki ilk sütun değer sıfıra eşit ve diğer satır değerleri sıfırdan farklı ise, bu sıfır olan değer sıfıra çok yakın pozitif bir ϵ değeri ile değiştirilir. Aşağıda buna ait bir misal verilmiştir.

5.1.4 Uygulama

$1 \cdot s^4 + 2 \cdot s^3 + 1 \cdot s^2 + 2 \cdot s - 2 = 0$ karakteristik denkleminin kararlılığını Routh Kriterine göre inceleyiniz.

s^4	1	1	-2	0	$\frac{2 \cdot (-2) - 1 \cdot 0}{2} = -2$
s^3	2	2	0	0	
s^2	0	-2	0		$\rightarrow \frac{2 \cdot \epsilon - 2 \cdot (-2)}{\epsilon} = \frac{2 \cdot \epsilon + 4}{\epsilon}$
s^1					
s^0					$\frac{2 \cdot \epsilon + 4}{\epsilon} > 0$

$$\frac{2 \cdot \epsilon + 4}{\epsilon} > 0 \rightarrow 2 \cdot \epsilon + 4 > 0 \rightarrow \epsilon > -2$$

1.sütun, 3.satırda ilk eleman 0 ve diğer elemanlar sıfırdan farklı çıktıği için, ilk sütundaki sıfır yerine, sıfıra çok yakın olan pozitif bir (ϵ) değeri ile değiştirilerek işleme devam edilir. Sütundaki son iki değer, sıfırdan küçük olduğu için sistem kararsızdır.

İkinci istisna durum aşağıda verilmiştir. Yani satırdaki bütün elemanlarının sıfıra eşit çıkması durumudur.

5.1.5 Uygulama

$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 + 25s + 50 = 0$ Karakteristik denkleminin kararlılığını Routh Kriterine göre inceleyiniz.

s^5	1	24	25	0
s^4	2	48	50	0
s^3	0	0	0	
s^2				
s^1				
s^0				

$$\rightarrow P(s) = 2s^4 + 48s^2 + 50 \rightarrow \frac{dP(s)}{ds} = 8 \cdot s^3 + 96 \cdot s \rightarrow$$

s^5	1	24	25	0
s^4	2	48	50	0
s^3	8	96	0	
s^2	24	50	0	
s^1	$\frac{238}{3}$	0		
s^0	50			

Not: Üçüncü satırın tüm elemanları sıfır çıktıği için ikinci satırın katsayılarından oluşan polinomda türev alma işlemi uygulanır ve elde edilen polinomun katsayıları yazılır. Eğer sadece 1. sütundaki eleman sıfır olup diğerleri sıfırdan farklı olursa, sıfır olan eleman yerine pozitif ve sıfırıra çok yakın ε alınarak işleme devam edilir. Bir satırda tek eleman var ve bu da sıfıra eşit ise bunun yerine de ε kullanılabilir.

Birinci sütunun bütün elemanları sıfırdan büyük olduğundan, Sistem kararlıdır.

5.1.6 Uygulama

$s^4 + 2 \cdot s^3 + (4+K) \cdot s^2 + 9 \cdot s + 25 = 0$ ile verilen karakteristik denklemde, sistemin kararlı olması için K ne olmalıdır?

s^4	1	$(4+K)$	25	0	$2 \cdot K - 1 > 0$
s^3	2	9	0	0	$K > \frac{1}{2}$
s^2	$(K-0.5)$	25	0	$\rightarrow \frac{2 \cdot (4+K) - 1 \cdot 9}{2} = \frac{2 \cdot K - 1}{2} = K - 0.5$	$K > \frac{1}{2}$
s^1	$\left(\frac{9 \cdot K - 54.5}{K-0.5} \right)$	0	0	$\rightarrow \frac{(K-0.5) \cdot 9 - 2 \cdot (25)}{K-0.5} = \frac{9 \cdot K - 54.5}{K-0.5}$	$9 \cdot K - 54.5 > 0$
s^0	25	0			$K > \frac{54.5}{9}$

$$K > \frac{54.5}{9} = 6.0556 \text{ olmalıdır.}$$

5.1.7 Uygulama

$\Delta = s^4 + 8 \cdot s^3 + 14 \cdot s^2 - 8 \cdot s - 15$ ile verilen karakteristik denklemde, kaç adet gerçek kısmı pozitif olan ($+a \mp b \cdot j$ veya $+a \mp 0 \cdot j$ gibi) kök olduğunu, Routh tablosu ile hesaplayınız.

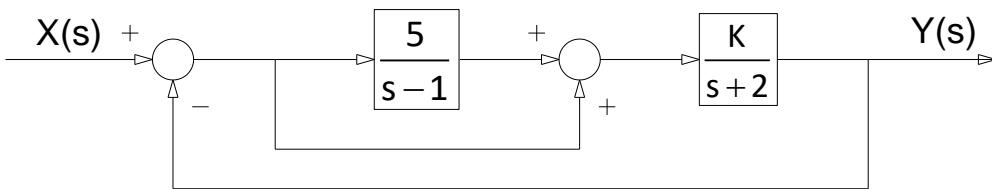
Çözüm:

Not: Routh tablosu oluşturulduğunda, ilk sütuna bakılır. Burada kaç adet işaret değişikliği var ise, karakteristik Δ polinomunda da o kadar pozitif gerçek sayıya sahip kök vardır. Yani köklerden o kadarı gerçek de olsa sanal da olsa pozitif gerçek kısma sahiptir. Anlaşılması için, yukarıda verilen polinom $\Delta = (s+1)(s+3)(s+5)(s-1)$ şeklindedir. Bu karakteristik polinomda bir adet kök değeri, kompleks düzlemede sanal eksenin sağ tarafında olacak şekildedir. Routh tablosuna yerleştirildiğinde, $\Delta = s^4 + 8 \cdot s^3 + 14 \cdot s^2 - 8 \cdot s - 15$

s^4	1	14	-15	s^4	+1	14	-15
s^3	8	-8	0	s^3	+8	-8	0
s^2	15	-15	0	s^2	+15	-15	
s^1	0	0		s^1	$+\varepsilon$	0	
s^0				s^0	-15		

5.1.8 Uygulama

Aşağıdaki şekilde verilen sistemde,



Sistemin kararlı olması için K aralığı ne olmalıdır?

Çözüm: Sistemin Transfer Fonksiyonu; $TF(s) = \frac{\left(\frac{5}{s-1} + 1\right) \cdot \frac{K}{s+2}}{1 + \left(\frac{5}{s-1} + 1\right) \cdot \frac{K}{s+2}}$

$$TF(s) = \frac{\frac{s+4}{s-1} \cdot \frac{K}{s+2}}{1 + \frac{s+4}{s-1} \cdot \frac{K}{s+2}} \rightarrow TF(s) = \frac{\frac{(s+4) \cdot K}{(s-1)(s+2)}}{\frac{(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)} + (s+4) \cdot K} \rightarrow TF(s) = \frac{(s+4) \cdot K}{s^2 + (K+1) \cdot s + (4 \cdot K - 2)}$$

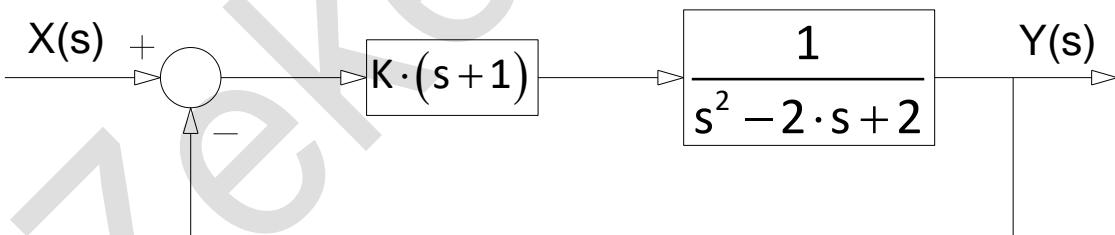
Buradan sistemin Routh tablosu oluşturulduğunda,

s^2	1	$(4 \cdot K - 2)$	0
s^1	$(K+1)$	0	0
s^0	$(4 \cdot K - 2)$	0	0

$K+1 > 0$ $\rightarrow K > -1$
 $4 \cdot K - 2 > 0 \rightarrow K > \frac{1}{2}$ $\rightarrow K > \frac{1}{2}$ olmalıdır.

5.1.9 Uygulama

Aşağıdaki şekilde verilen sistemin kararlı olması için K aralığı ne olmalıdır?



Çözüm: Sistemin Transfer Fonksiyonu; $TF(s) = \frac{K \cdot (s+1) \cdot \frac{1}{s^2 - 2 \cdot s + 2}}{1 + K \cdot (s+1) \cdot \frac{1}{s^2 - 2 \cdot s + 2}}$

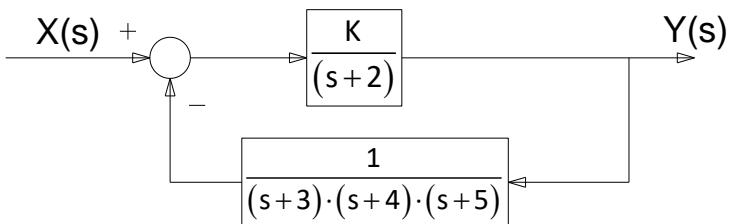
$$TF(s) = \frac{\frac{K \cdot (s+1)}{s^2 - 2 \cdot s + 2}}{\frac{s^2 - 2 \cdot s + 2}{s^2 - 2 \cdot s + 2} + K \cdot (s+1)} \rightarrow TF(s) = \frac{\frac{K \cdot (s+1)}{s^2 - 2 \cdot s + 2}}{\frac{s^2 - 2 \cdot s + 2}{s^2 - 2 \cdot s + 2} + (K-2) \cdot s + (K+2)} \rightarrow TF(s) = \frac{K \cdot (s+1)}{s^2 + (K-2) \cdot s + (K+2)}$$

Buradan sistemin Routh tablosu oluşturulduğunda,

$$\begin{array}{c|ccc} s^2 & 1 & (K+2) & 0 \\ s^1 & (K-2) & 0 & 0 \rightarrow K-2>0 \rightarrow K>2 \\ s^0 & (K+2) & 0 & 0 \end{array} \rightarrow K+2>0 \rightarrow K>-2 \rightarrow [K>2] \text{ olmalıdır.}$$

5.1.10 Uygulama

Aşağıda verilen sistemin karalı olması için K değeri ne olmalıdır.

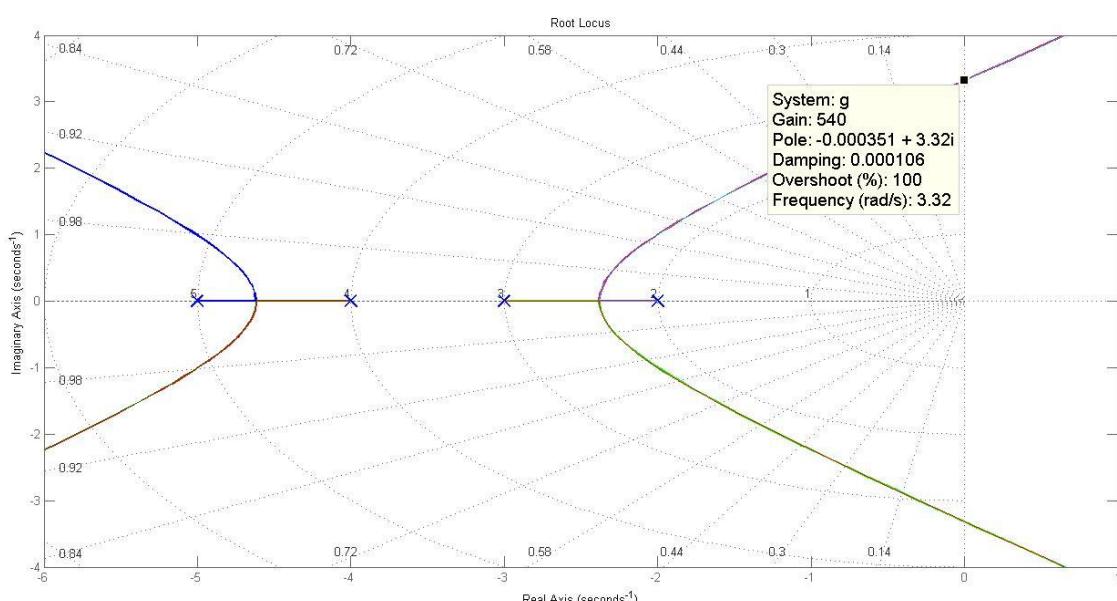


$$\text{TF}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{K}{(s+2)}}{1 + \frac{K}{(s+2)} \cdot \frac{1}{(s+3)(s+4)(s+5)}} \rightarrow \text{TF}(s) = \frac{(s+5)(s+4)(s+3) \cdot K}{s^4 + 14 \cdot s^3 + 71 \cdot s^2 + 154 \cdot s + (120 + K)}$$

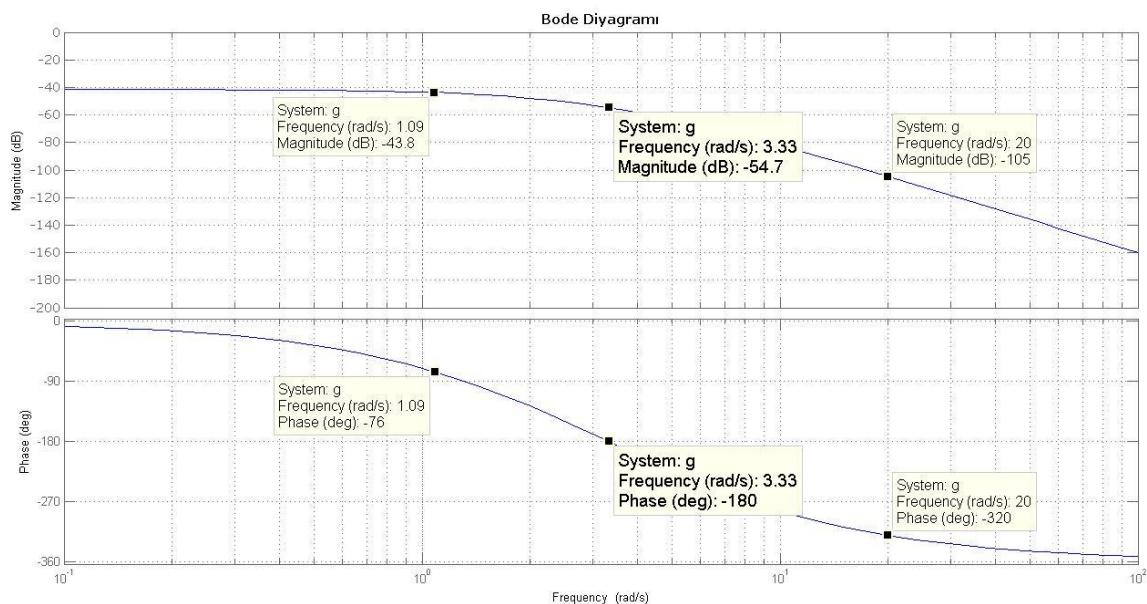
$$\Delta = s^4 + 14 \cdot s^3 + 71 \cdot s^2 + 154 \cdot s + (120 + K)$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 71 & (120+K) \\ s^3 & 14 & 154 & 0 \\ s^2 & 60 & (120+K) & 0 \\ s^1 & \left(126 - \frac{7}{30} \cdot K\right) & 0 & \\ s^0 & (120+K) & 0 & \end{array} \rightarrow 126 - \frac{7}{30} \cdot K > 0 \rightarrow 126 > \frac{7}{30} \cdot K \rightarrow [540 > K]$$

$120+K > 0 \rightarrow [-120 < K]$ İki şartın birleştirilmesiyle birlikte; $[-120 < K < 540]$ olduğu görülür.

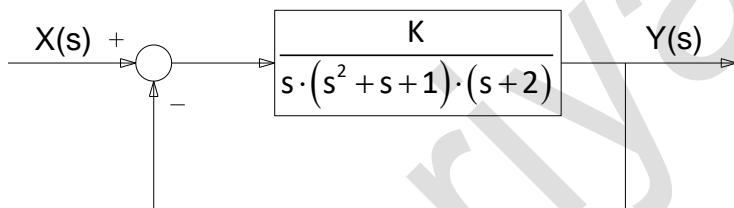


Root-Locus grafiğinde 540 değeri görülmektedir.



5.1.11 Uygulama

Aşağıdaki verilen blok diyagramının $R(s)$ giriş değeri, birim impulsif bir etki ise; sistemin transfer fonksiyonunu elde edip, sistemin kararlı olması için gerekli olan K aralığını Routh kararlılık kriterine göre hesaplayınız.



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{K}{s \cdot (s^2 + s + 1) \cdot (s + 2)}}{1 + \frac{K}{s \cdot (s^2 + s + 1) \cdot (s + 2)}} = \frac{K}{s \cdot (s^2 + s + 1) \cdot (s + 2) + K} = \frac{K}{\underbrace{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K}_{\Delta}} \quad (5.3)$$

Kararlılık kriterinin incelenmesi için Δ determinant değerinin sıfıra eşitlenmesi gereklidir. Elde edilen karakteristik denkleme göre Routh tablosu aşağıdaki biçimde oluşur

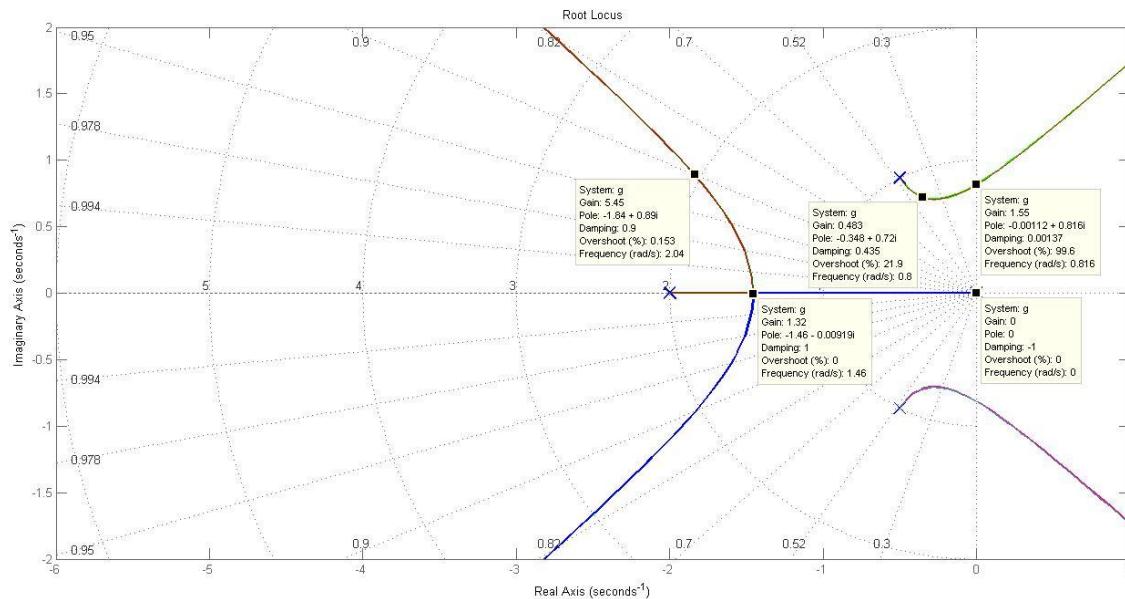
$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$7/3$	K	0
s^1	$\frac{14-9K}{7}$	0	
s^0	K	0	

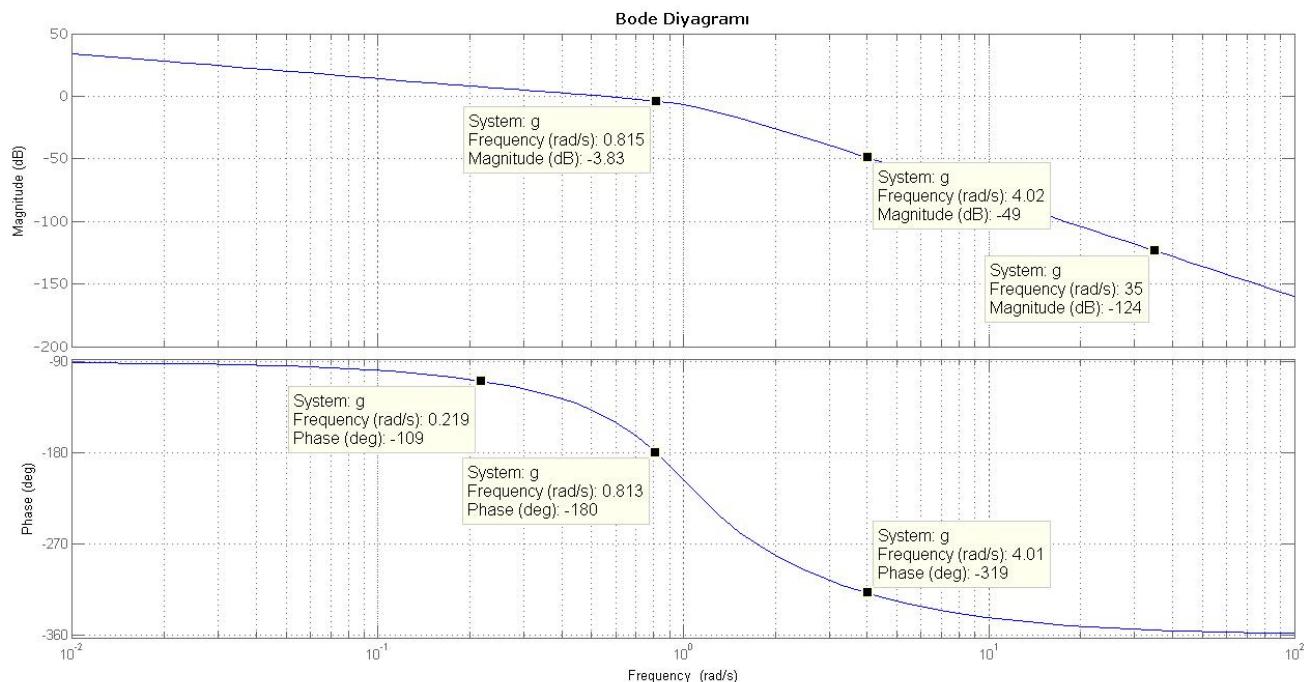
Elde edilen tablonun ilk sütundaki bütün elemanlar sıfırdan büyük olmalıdır.

$$\frac{14-9K}{7} > 0 \rightarrow 14-9K > 0 \rightarrow \frac{14}{9} > K$$

Son satırın ilk sütunundan $K > 0$ olmalıdır. İki şartın birleştirilmesiyle, $0 < K < \frac{14}{9}$ olur.



Root-Locus Grafiği çizildiğinde $k < 1.55$ (Gain) olduğu görülmektedir. Aynı sonuçlar Bode diyagramı çizildiğinde de görülmektedir. Bode diyagramı aşağıda verilmiştir.



$$20 \cdot \log_{10}(x) = a \rightarrow 20 \cdot \log_{10}(x) = -3.8377 \rightarrow \log_{10}(x) = \frac{-3.83}{20} \rightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{-3.83}{20} \rightarrow \ln(x) = \ln\left(10^{\frac{-3.83}{20}}\right)$$

$$e^{\ln(x)} = e^{\left(10^{\frac{-3.83}{20}}\right)} \rightarrow x = 10^{\left(\frac{-3.83}{20}\right)} \rightarrow K = 1.55$$

Gerçekte okunan değer 3.8377 dir. Ve tam uyum sağlamaktadır. Açı değerinin (-180°) olduğuna dikkat ediniz. Diğer verilen değerler sadece test amaçlıdır. Root-Locus grafiği ile karşılaştırma yapılabilir.

5.2 Hurwitz Kriteri

$\Delta = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ polinomunda $\Delta_n, \Delta_{n-1}, \dots, \Delta_1$ değerlerinin hepsi pozitif olduğu takdirde sistem kararlıdır denir. Herhangi biri sıfırdan küçük olursa sistem kararsız olur. Sıfıra eşit olması durumuna marginal kararlılık denir.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

5.2.1 Uygulama

$\Delta = s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$ karakteristik denkleminin kararlılığını Hurwitz Kriterine göre inceleyiniz.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} \quad (5.5)$$

$$\Delta_1 = |6| = 6 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot 12 - 1 \cdot 8 = 72 - 8 = 64 > 0$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 \cdot 8 = 512 > 0, \Delta_2 = 6 \cdot 12 - 1 \cdot 8 = 72 - 8 = 64 > 0$$

Bütün determinant değerleri sıfırdan büyük olduğundan dolayı sistem kararlıdır.

5.2.2 Uygulama

$\Delta = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K = 0$ karakteristik denkleminin kararlı olması için K değeri hangi aralıkta olmalıdır?

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1+K & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1+K \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1+K \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \Delta_1 = 3$$

Hurwitz şartına göre bütün Determinant değerleri sıfırdan büyük olmalıdır. Buradan,

$$\Delta_1 = 3 > 0 \text{ şart sağlanmaktadır. } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1+K \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 \cdot (1+K) = 8 - K > 0 \rightarrow K < 8 \text{ olmalıdır,}$$

$\Delta_3 = \Delta_2 \cdot (1+K) > 0 \rightarrow \Delta_2 > 0$ olması gereğinden dolayı $(1+K) > 0 \rightarrow K > -1$ olmalıdır. Bu iki şartın birleştirilmesiyle birlikte $-1 < K < 8$ sonucu çıkarılır.

5.2.3 Uygulama

$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K = 0$ karakteristik denkleminin kararlı olması için K değeri hangi aralıkta olmalıdır?

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & K & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & K \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 1 & 11 & K \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}, \Delta_1 = 6$$

Bütün determinant değerlerinin sıfırdan büyük olması gereklidir.

$\Delta_1 = 6 > 0$ şartı sağlamaktadır.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = 66 - 6 = 60 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 1 & 11 & K \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 11 & K \\ 6 & 6 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & K \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot (66 - 6 \cdot K) - 6 \cdot 6 + 0 = 6 \cdot (66 - 6 \cdot K) - 6 \cdot 6 > 0$$

$$(66 - 6 \cdot K) - 6 > 0 \rightarrow 60 - 6 \cdot K > 0 \rightarrow 10 - K > 0 \rightarrow K < 10$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & K & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & K \end{vmatrix} = \Delta_3 \cdot K > 0 \rightarrow K > 0 \text{ olmalıdır. Sonuçta; } 0 < K < 10 \text{ elde edilir.}$$

5.2.4 Uygulama

$\Delta = s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$ karakteristik denkleminin kararlılığını Hurwitz Kriterine göre inceleyiniz.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_1 = |2| = 2 > 0, \Delta_0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \Delta_2 \cdot 2, \Delta_2 = 0 \text{ olduğundan dolayı sistem marginal kararlıdır.}$$

5.3 Sürekli Bölme Kriteri

Bu kriterde polinom aşağıdaki biçimde ikiye ayrılır ve birinci polinom ikinci polinoma bölünür. Daha sonra elde edilen bölen değeri kalan değerine bölünderek, işleme, kalan değeri sıfır buluncaya kadar devam edilir. *Bölme işlemlerinde elde edilen bölüm değerlerindeki, (s)'nin katsayıları sıfırdan büyükse sistem kararlıdır denir. Kalanların bir tanesi dahi sıfırdan küçük olursa sistem kararsız olur. Sıfıra eşit olması durumu marginal kararlılık durumudur*

1. Polinom $\Rightarrow Q_1(s) = a_n s^n + a_{n-2} s^{n-2} + \dots = 0$

$$2. \text{ Polinom} \Rightarrow Q_2(s) = a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-3}s^{n-3} + \dots = 0$$

$h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ değerlerinin hepsi de sıfırdan büyük olduğu takdirde sistem kararlıdır denir. h_i 'lerden bir tanesi sıfır veya negatif olursa sistem kararsızdır denir.

5.3.1 Uygulama

$\Delta = s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$ karakteristik denkleminin kararlılığını Sürekli Bölme Kriterine göre inceleyiniz.

Çözüm: Verilen karakteristik denklemden $Q_1(s) = s^3 + 12s$ ve $Q_2(s) = 6s^2 + 8$ polinomları bulunur.

$$\begin{array}{c} s^3 + 12s \\ -s^3 - \frac{4}{3}s \\ \hline \frac{32}{3}s \end{array} \left| \begin{array}{c} 6s^2 + 8 \\ \hline 6s \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{c} 6s^2 + 8 \\ -6s^2 \\ \hline 16s \end{array} \left| \begin{array}{c} \frac{32}{3}s \\ \hline \frac{9}{16}s \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{c} \frac{32}{3}s \\ -\frac{32}{3}s \\ \hline 0 \end{array} \left| \begin{array}{c} 8 \\ \hline \frac{4}{3}s \end{array} \right. \end{array}$$

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{s^3 + 12s}{6s^2 + 8} = \frac{\frac{1}{6}s + \frac{3}{6}s}{\frac{9}{16}s + \frac{1}{4}s} = \frac{\frac{1}{6}s + \frac{1}{6}}{\frac{9}{16}s + \frac{4}{3}s}, \quad h_1 = \frac{1}{6} > 0, \quad h_2 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} > 0 \quad \text{ve} \quad h_3 = \frac{4}{3} > 0 \quad \text{olduğundan}$$

sistem kararlıdır. Bütün değerler sıfırdan büyük çıktıgı için sistem kararlıdır.

5.3.2 Uygulama

$s^5 + 6s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 5s + 1 = 0$ denkleminin kararlılığını Hurwitz Kriterine göre inceleyiniz.

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = |6|$$

$$\text{Buna göre; } \Delta_1 = |6| > 0 \rightarrow \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 24 - 2 = 22 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 |\Delta_2| = -6(6 \cdot 5 - 1 \cdot 1) + 2(22) = -130 < 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 |\Delta_3| - 1 \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1(6 \cdot 5 - 1 \cdot 1) + 4(6 \cdot 4 - 1 \cdot 2) = 59$$

$$\Delta_4 = 5 \mid \Delta_3 \mid -1 \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-130) - 59 = -709 < 0$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \mid \Delta_4 \mid = -709 < 0$$

Elde edilen determinant değerlerinde Δ_3 , Δ_4 ve Δ_5 değerleri sıfırdan küçük olduğu için sistem kararsızdır.

5.3.3 Uygulama

$\Delta = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K = 0$ denkleminin kararlı olabilmesi için gerekli olan K aralığını Sürekli Bölüm Kriterine göre inceleyiniz.

$Q_1(s) = s^3 + 3s$ ve $Q_2(s) = 3s^2 + 1 + K$ şeklindedir. İkinci polinomdaki $(1+K)$ terimi yerine, işlem kolaylığı bakımında A terimi kullanılın. Buna göre;

$$\begin{array}{c} s^3 + 3s \\ s^3 + \frac{1}{3}As \\ \hline 3s - \frac{1}{3}As \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} 3s^2 + A \\ \hline \frac{1}{3}s \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} 3s^2 + A \\ 3s^2 \\ \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} B \\ \left(\frac{9-A}{3} \right)s \\ \hline 3s \\ B \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} Bs \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} A \\ \frac{B}{A}s \end{array} \right. \\ \hline A \end{array}$$

Elde edilen bölümlerdeki s'lerin katsayılarının sıfırdan büyük olması gereklidir. Buna göre;

$$\begin{aligned} \frac{3}{B} > 0 &\rightarrow \frac{\frac{3}{9-A}}{3} = \frac{9}{9-A} > 0 \rightarrow \frac{9}{9-(1+K)} > 0 \rightarrow \frac{9}{8-K} > 0 \rightarrow K < 8 \\ \frac{B}{A} > 0 &\rightarrow \frac{\frac{B}{9-A}}{A} > 0 \rightarrow \frac{9-A}{3A} > 0 \rightarrow \frac{9-(1+K)}{3(1+K)} > 0 \rightarrow \frac{8-K}{3+3K} > 0 \rightarrow 8-K > 0 \rightarrow K < 8 \end{aligned}$$

Elde edilen şartlara göre 8'den küçük K değerleri için sistem kararlıdır.

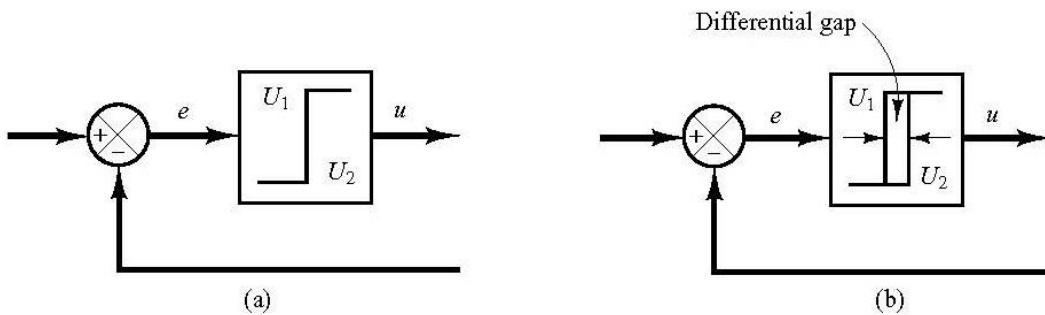
Kontrol sistemlerinin analizinde ve sentezinde kullanılan bütün teoriler doğrusal (lineer) sistemler için geçerli olduğu için, fonksiyonlar bilinen aralıklarda doğrusal hale getirilir. Böylece çözümler elde edilir.

6. Kontrol Elemanları

Endüstride kullanılan kontrol elemanları; hidrolik, pnömatik, mekanik, elektronik, ısıl veya mekatronik olarak kullanıldığı malzemeye göre sınıflandırıldığı gibi temel özelliklerine bağlı olarak da sınıflandırılırlar. Özelliklerine göre toplam altı (6) gruba ayrırlırlar. Bunların temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

6.1 İki konumlu veya Açık-Kapalı Kontrol Elemanı (Two-position or on-off Controllers)

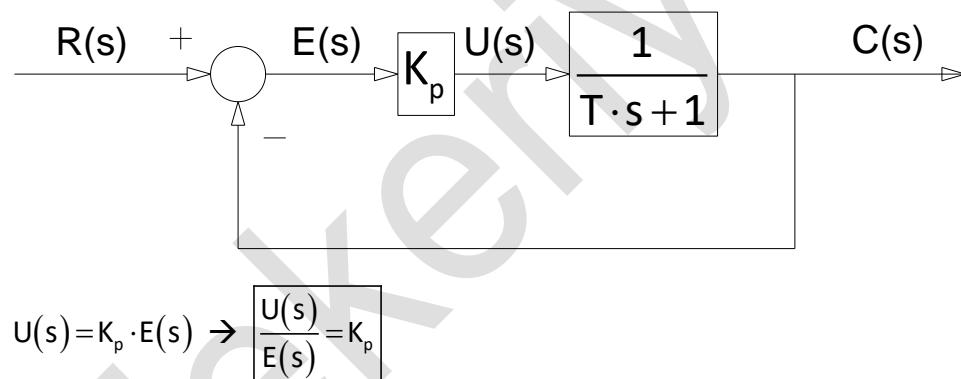
Kontrol elemanı sadece iki sabit konumda bulunabilir ve basit bir elemandır. Dolayısıyla pahalı da değildir. Davranışı parçalı fonksiyon ile aşağıdaki gibi izah(ifade) edilebilir. Çıkış sinyali $u(t)$ olduğunda etki eden hata sinyali veya değeri $e(t)$ olsun. Bu durum aşağıda blok diyagramında gösterilmiştir. Etki sinyalinin sıfırdan büyük veya küçük olmasına bağlı olarak kontrol elemanı sadece iki değer alabilmektedir. (U_1 veya U_2) Bazen bu geçişlerin olabilmesi için diferansiyel boşluk kullanılır. Aşağıda şekil b de gösterilmiştir.



$$u(t) = \begin{cases} U_1 & e(t) > 0 \\ U_2 & e(t) < 0 \end{cases}$$

6.2 Oranti Kontrol Elemanı (Proportional Controller)

Oranti kontrol elemanının mekanik karşılığı yaydır. $u(t) = K_p \cdot e(t)$ Laplace dönüşümü uygulandığında,

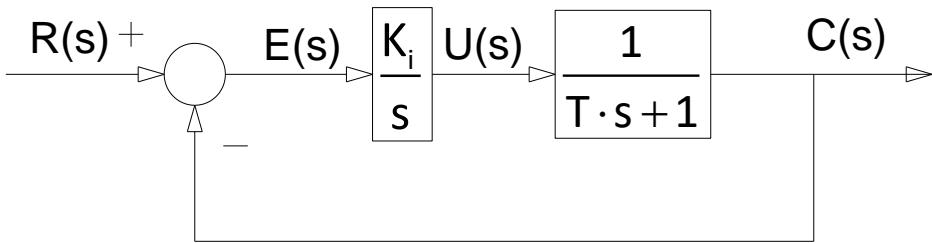


Burada K_p oranti katsayısidır ve ayarlanabilir bir katsayıdır.

6.3 Integral Kontrol Elemanı (Integral Controller)

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i \cdot e(t) \rightarrow u(t) = \int_0^t K_i \cdot e(t) \cdot dt \rightarrow u(t) = K_i \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt \rightarrow U(s) = K_i \cdot \frac{E(s)}{s} \rightarrow \boxed{\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}}$$

Blok diyagramı aşağıda verilmiştir. İntegral kontrol elemanının mekanik karşılığı kütlenin ataleti, kinetik enerjisi verilebilir. Mesela Volanların aldığı enerjiyi daha sonra sisteme vermesi gibi.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_i}{s \cdot (T \cdot s + 1) + K}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - C(s)}{R(s)} = \frac{s \cdot (T \cdot s + 1)}{s \cdot (T \cdot s + 1) + K_i}$$

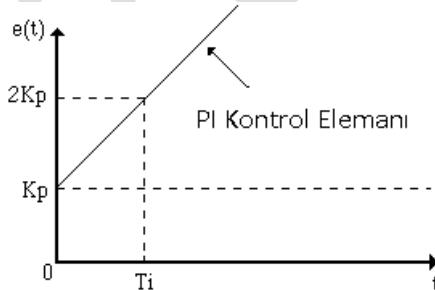
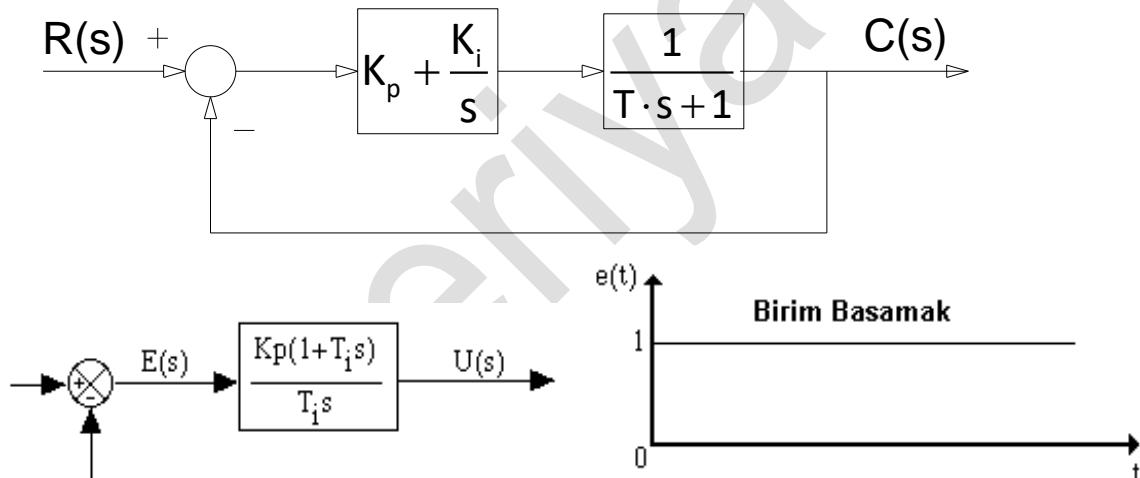
6.4 Oranti + İntegral Elemanı (PI) (Proportional+Integral Controller)

PI kontrol elemanın cevabı,

$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) \cdot dt$ şeklindedir. Laplace dönüşümü uygulandığında,

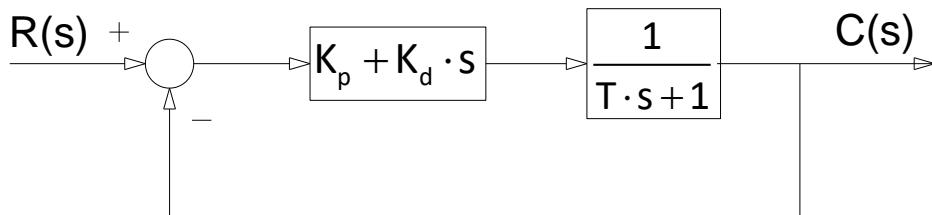
$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \cdot E(s) \rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

olur. Burada K_p oranti ayar katsayısı ($T_i \cdot s$) ise integral zamanıdır. Transfer fonksiyonundan anlaşılacağı üzere K_p kazancının ayarlanması integral kısmı da etkiler. PI kontrol elemanın blok diyagramı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



6.5 Oranı+Diferansiyel Kontrol Elemanı (PD) (Proportional + Differential Controller)

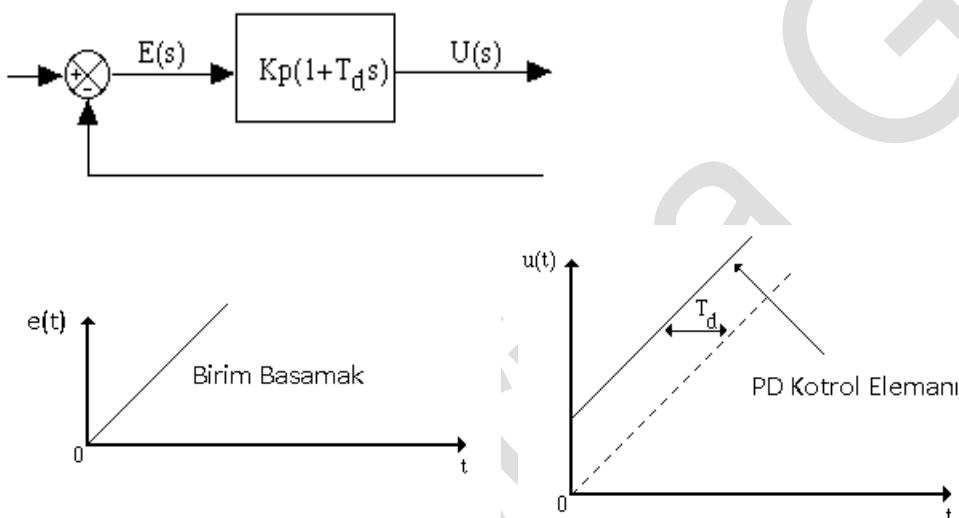
mekanik karşılığı yay ve amortisör bileşenidir.



$$\text{PD Kontrol elemanın cevabı } u(t) = K_p e(t) + K_p T_p \frac{de(t)}{dt}$$

şeklindedir. Transfer fonksiyonu $\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$ olur. Burada K_p orantı kazancı ve T_d ise

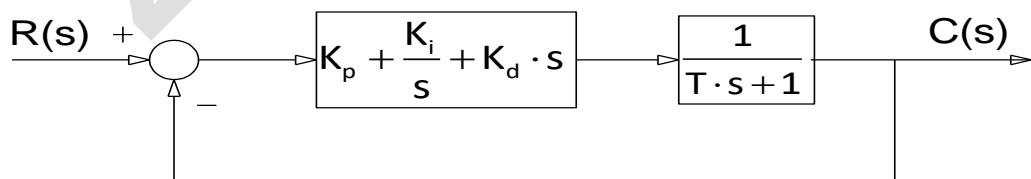
diferansiyel zamanıdır. Kontrol elemanı üzerinde K kazancının ayarlanmasından diferansiyel kısım da etkilenmektedir. Blok diyagramı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



PD tipi kontrolde ,D etkisinden dolayı hızlı bir çalışma sağlar. Mekanik olarak arabalardaki yay ile amortisör buna uygun bir misaldır.

6.6 Oranı+Integral+Diferansiyel Kontrol Elemanı (PID = Proportional+Integral Differential Controller)

Endüstride kullanılan en kullanışlı kontrol elemanıdır.



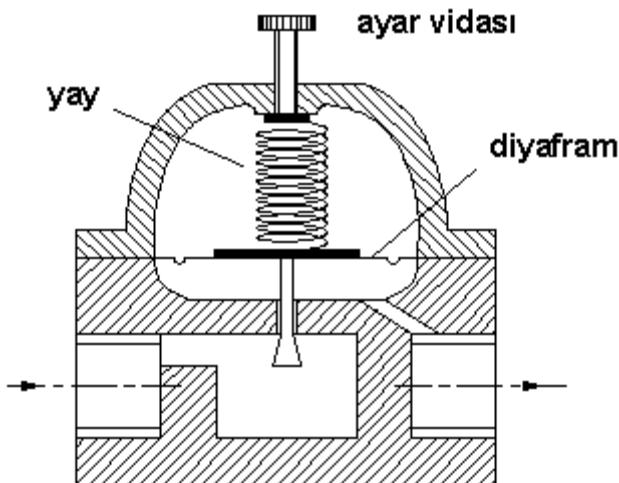
Buradaki katsayıların ayarlanması için Ziegler-Nichols tablosundan faydalanılır.

Kontrol Tipi	K_p	T_i	T_d
--------------	-------	-------	-------

P	$0.5 \cdot K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45 \cdot K_{cr}$	$\frac{1}{1.2} \cdot P_{cr}$	0
PID	$0.6 \cdot K_{cr}$	$0.5 \cdot P_{cr}$	$0.125 \cdot P_{cr}$

Burada (K_{cr}) kritik kazanç (Gain) katsayısıdır. (P_{cr}) de saniye cinsinden, (K_{cr}) kritik katsayısı kullanıldığından sistemdeki salınının periyot değeridir. Bu hesaplamaların nasıl yapıldığı ilerde verilecektir.

6.7 Kendi Kendine Kontrol Eden Sistemler



Yandaki şekilde kendi kendini kontrol eden bir sistem görülmektedir. Ayar vidası, yayın uyguladığı kuvveti kontrol etmektedir. Basınç kontrolü ise diyaframla sağlanmaktadır. Çıkış basıncının referans basıncından küçük olduğu durumda yay kuvveti basınç kuvvetinden büyüktür ve diyafram aşağı doğru hareket eder. Bunun sonucu olaraka akış artar ve çıkış basıncı büyür. Eğer basınç kuvveti yay kuvetine eşit olursa, diyafram ve kapak sabit kalır. Sonuçta akışta sabittir.

Çıkış basıncı referans basıncından büyük olursa, kapak çok az açık kalır ve akış buna bağlı olarak az olur. Kendi kendini kontrol sistemi genellikle su ve gaz basıncı kontrolünde kullanılır.

Bunların haricinde elektronikte kullanılan lead, lag ve lead-lag kontrol elemanları ileri de verilecektir.

7. Hidrolik Kontrol Elemanları

1. Hidrolik Oranti Elemanı ($P = \text{Proportional}$)
2. Hidrolik Integral Elemanı ($I = \text{Integral}$)
3. Hidrolik Oranti + Integral Elemanı ($PI = \text{Proportional} + \text{Integral}$)
4. Hidrolik Oranti + Diferansiyel Elemanı ($PD = \text{Proportional} + \text{Differential}$)
5. Hidrolik Oranti + Integral + Diferansiyel Elemanı ($PID = \text{Proportional} + \text{Integral Differential}$)
6. İkili (on/off) Eleman

Yukarıdaki sıralamadan da anlaşılacığı üzere diferansiyel elemanlar tek başlarına kullanılamazlar. Diferansiyel elemanlar oranti elemanlar ile birlikte kullanılırlar. Verilen kontrol elemanları aşağıda incelenmiştir.

7.1 Hidrolik Integral Elemanı

Yukarıdaki şekilde bir hidrolik integral elemanı örneği görülmektedir. Sistemdeki x kolu, sağa doğru hareket ettiğinde basıncı yağ II numaralı girişten silindire girerek alttaki pistonu sola doğru iter. X kolu sola doğru itildiğinde ise bu işlemin tersi gerçekleşir. Sonuçta elde edilmek istenen, $\frac{Y(s)}{X(s)}$ değeridir ve bu oran aşağıdaki biçimde elde edilmiştir.

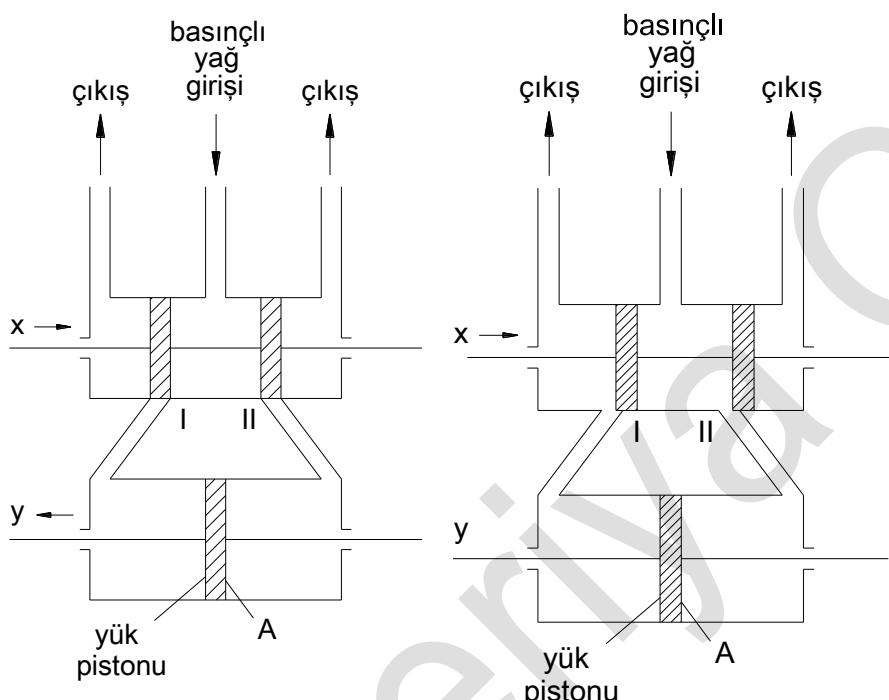
Alttaki pistonda dt süresinde yer değiştiren sıvının küntesel miktarı, II nolu girişten geçen küntesel debiye eşittir. q birim zamanda geçen küntesel debiyi ve ρ yoğunluğu göstermek üzere; $A \rho dy = q dt$ yazılabilir. Daha başka bir ifade ile;

$$A \rho \frac{dy}{dt} = q = Kx \quad \text{veya} \quad A \rho (sY(s) - y(0)) = Kx(s) \text{ olur.}$$

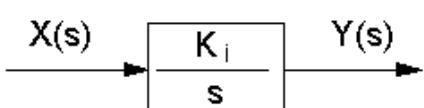
Başlangıç şartları sıfır kabul edildiğinde;

$$A \cdot \rho \cdot s \cdot Y(s) = K \cdot X(s) \quad (6.1)$$

$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{A \rho s} \rightarrow K_i = \frac{K}{A \rho}$ alındığında $\rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_i}{s}$ elde edilir. (K , A ve ρ sabit olduğundan, K_i integral sabiti gösterilmiştir.)



Sisteme ait blok diyagramı aşağıdaki biçimde elde edilir.



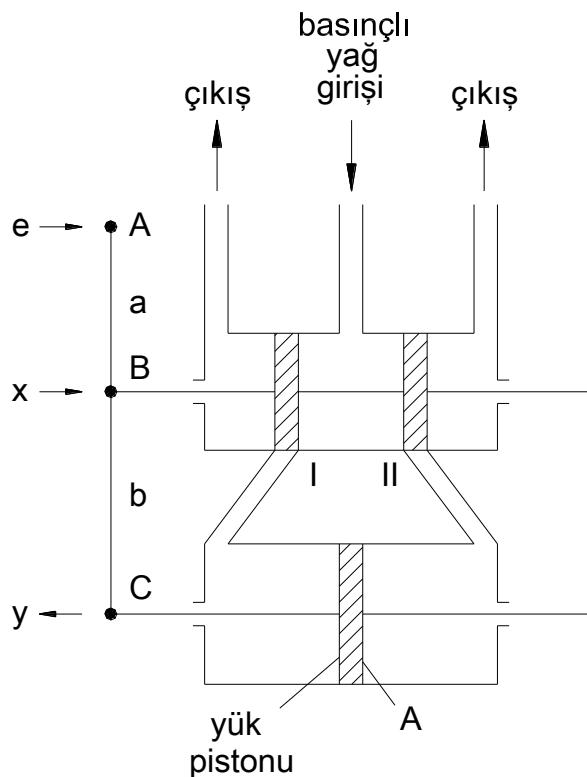
7.2 Hidrolik Orantı Elemanı

Aşağıdaki şekilde bir hidrolik orantı elemanı örneği görülmektedir. AC kolu, A noktasından itildiğinde, B noktası da kol uzunluklarına bağlı olarak sağa doğru itilir ve piston sağa doğru hareket eder. Basınçlı yağ II numaralı koldan silindire girerek pistonu sola doğru iter. Böylece C noktası da sola doğru hareket eder. C çıkış değeri, B giriş değerini etkilediği için bu durum blok diyagramında geri besleme olarak gösterilir.

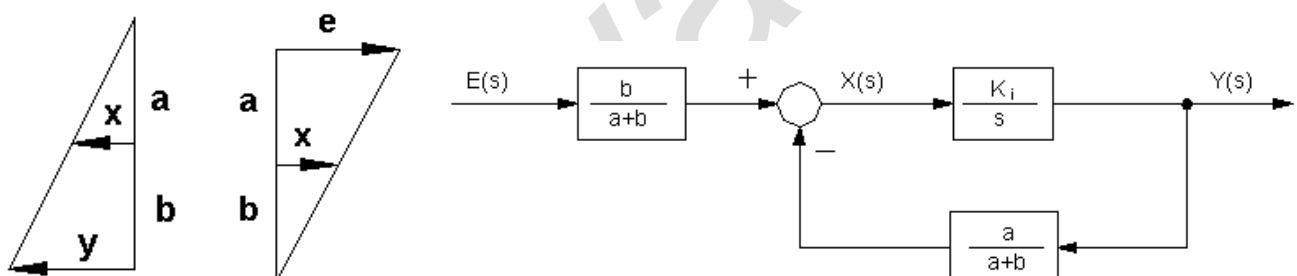
C noktasındaki y etkisinin, B noktasına etkisi ise aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$\frac{y}{a+b} = \frac{x}{a}$ y 'den x 'e gelen geri besleme negatiftir. Bunun nedeni, y 'nin hareketi x 'in hareketini engellemeye çalışmaktadır. A noktasındaki x etkisinin, B noktasına etkisi için aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\frac{e}{a+b} = \frac{x}{b}$$



Sisteme ait blok diyagramı aşağıdaki biçimde elde edilir.



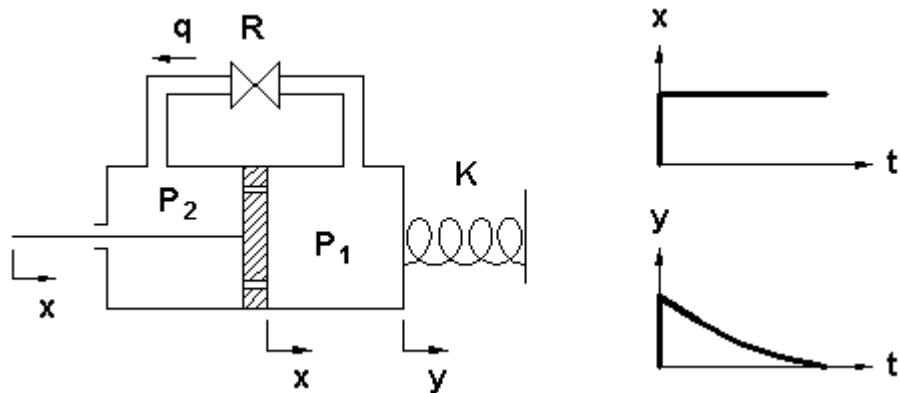
Buna göre transfer fonksiyonu aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b \cdot K_i}{s(a+b)}}{1 + \frac{K_i \cdot a}{s(a+b)}} = \frac{\frac{b \cdot K_i}{s(a+b)}}{\frac{s(a+b) + K_i \cdot a}{s(a+b)}} = \frac{b \cdot K_i}{a \cdot K_i + s \cdot (a+b)} = \frac{b}{a} = K_p \quad (6.2)$$

Denklemde $s(a+b) = \frac{d}{dt}(a+b)$ dir ve çok küçük bir değişim olduğundan ihmäl edilebilir.

7.3 Amortisörler

Aşağıda bir amortisörün temsili gösterimi ile piston ve silindir hareketlerinin zamanla değişimi gösterilmiştir.



Amortisörün önündeki yayda oluşan kuvvet dengesinden;

$$A(P_1 - P_2) = ky \text{ yazılabilir. } q \text{ debisi için } q = \frac{P_1 - P_2}{R} \quad (R = \text{Amortisör direnci}) \text{ dir. Birim zamanda kuvvet}$$

geçen kütlesel debinin miktarı, yük pistonunda yer değiştiren yer değiştiren sıvının miktarı kadar olduğundan;

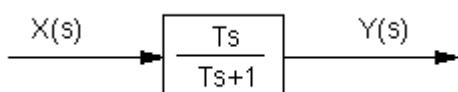
$$q \cdot (dt) = A \cdot \rho \cdot (dx - dy) \quad (6.3)$$

$$\frac{q}{A\rho} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \frac{P_1 - P_2}{RA\rho} \rightarrow \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \frac{ky}{A^2 R \rho}$$

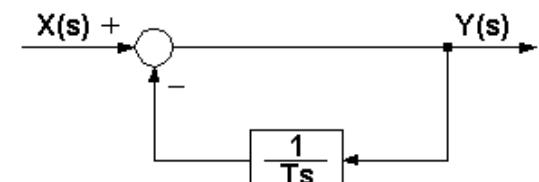
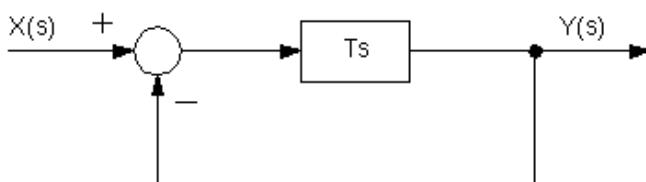
Başlangıç Şartları sıfır kabul edilirse;

$$sX(s) - sY(s) = \frac{k}{A^2 R \rho} Y(s) \rightarrow sY(s) + \frac{k}{A^2 R \rho} Y(s) = sX(s)$$

$$Y(s)(s + T_d) = sX(s) \rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s + T_d} \rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s + T_d} = \frac{s}{s + \frac{k}{A^2 R \rho}} = \frac{Ts}{Ts + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Ts}}$$



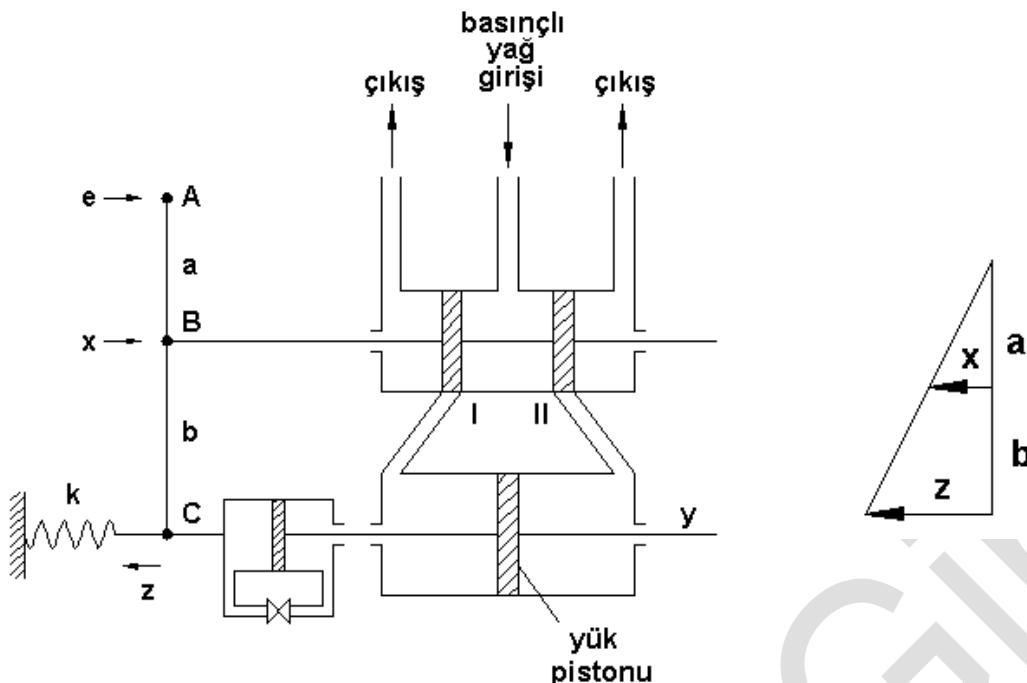
Sisteme ait blok diyagramları aşağıdaki biçimde elde edilir. Veya



veya

olarak elde edilir.

7.4 Hidrolik Orantı + İntegral Elemanı



Sistem hidrolik orantı elemanına benzer şekilde çalışmaktadır. Ancak sistemin C noktasında amortisör sistemi etkimektedir. Sisteme ait denklemler ve blok diyagramı aşağıdaki biçimde elde edilmiştir.

$Y(s)$ ile $Z(s)$ arasında amortisör elemanı vardır ve iki nokta arasındaki bağıntı amortisörler bölümünde verilmiştir.

A noktasındaki e etkisinin, B noktasına etkisi için aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

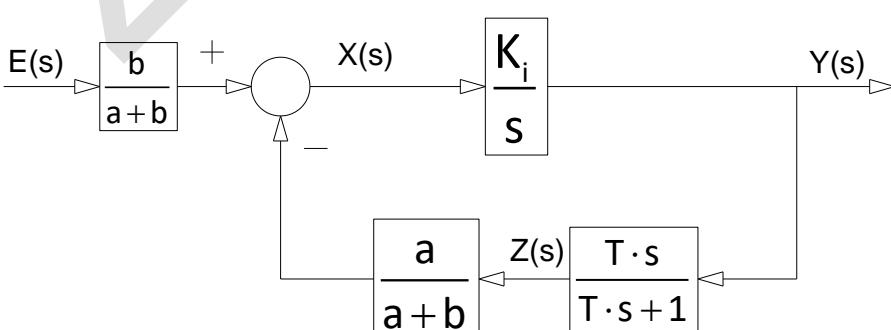
$$\frac{e}{a+b} = \frac{x}{b} \rightarrow C \text{ noktasındaki } y \text{ etkisinin, } B \text{ noktasına etkisi ise aşağıdaki şekilde yazılabılır.}$$

$$\frac{z}{a+b} = \frac{x}{a} \rightarrow \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \cdot \frac{K_i}{s}}{1 + \frac{K_i}{s} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{T \cdot s}{T \cdot s + 1}} = \frac{\frac{b \cdot K_i}{s \cdot (a+b)}}{\frac{s \cdot (a+b) \cdot (T \cdot s + 1) + T \cdot s \cdot K_i \cdot a}{s \cdot (a+b) \cdot (T \cdot s + 1)}} = \frac{b \cdot K_i \cdot (T \cdot s + 1)}{\underbrace{s \cdot (a+b) \cdot (T \cdot s + 1) + T \cdot s \cdot K_i \cdot a}_{=0}}$$

$$s(a+b) = \frac{d}{dt}(a+b) \approx 0$$

$$= \frac{bK_i(Ts+1)}{sK_iTs} = \frac{b(Ts+1)}{aTs} = \frac{bTs+b}{aTs} = \frac{b}{a} \left(1 + \frac{1}{Ts}\right) = K_p + \frac{K_p}{Ts} = K_p + \frac{K_a}{s}$$

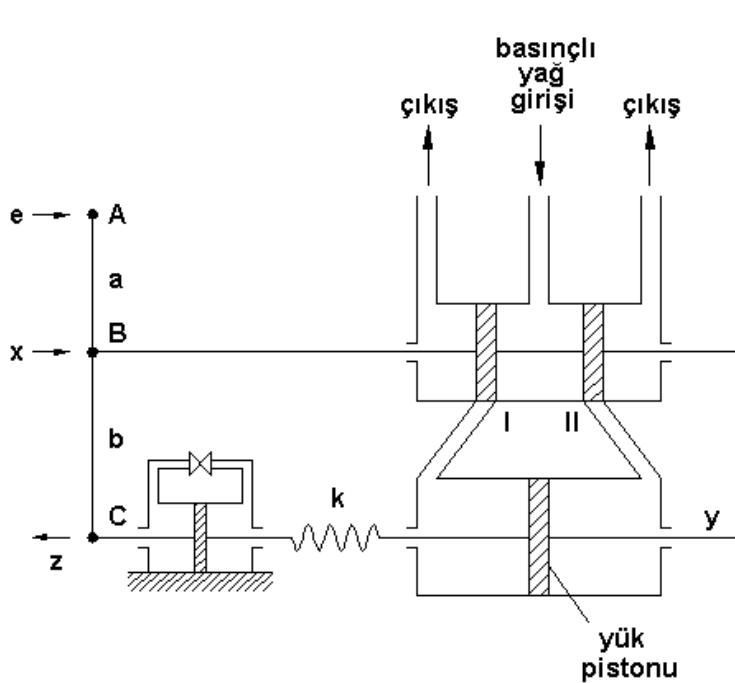
oranti integral



Sisteme ait blok diyagramı yukarıdaki biçimde elde edilir.

7.5 Hidrolik Orantı + Diferansiyel Elemanı

Sistem hidrolik orantı elemanına benzer şekilde çalışmaktadır. Ancak sistemin C noktasında diferansiyel sistemi etkimektedir. Diferansiyel oran aşağıdaki biçimde elde edilir. k yay sabiti, P basınç, A yüzey alanı, ρ yoğunluk, t zaman olmak üzere;



$$k(y - z) = A(P_1 - P_2)$$

$$q \cdot dt = A \cdot dz \cdot \rho$$

$$q = \frac{P_1 - P_2}{R} \rightarrow q = A \frac{dz}{dt} \rho$$

$$(y - z) = \frac{A^2 R \rho}{K} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{R} = A \frac{dz}{dt} \rho \rightarrow k(y - z) = A^2 R \rho \frac{dz}{dt} \rightarrow$$

$$y = z + \frac{A^2 R \rho}{k} \frac{dz}{dt}$$

Başlangıç şartları sıfır kabul edilerek laplace dönüşümü uygulanırsa;

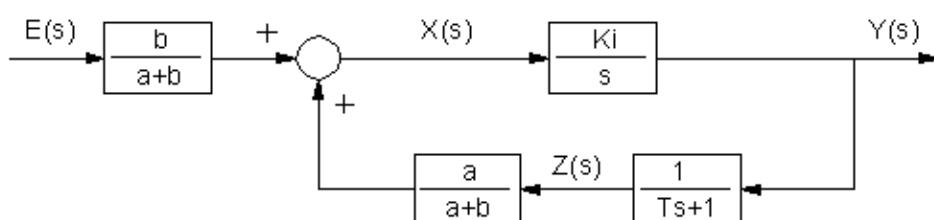
$$Y(s) = Z(s) + \frac{A^2 R \rho}{K} s Z(s)$$

$$Y(s) = Z(s) \left(1 + \frac{A^2 R \rho}{K} s \right) \rightarrow \frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

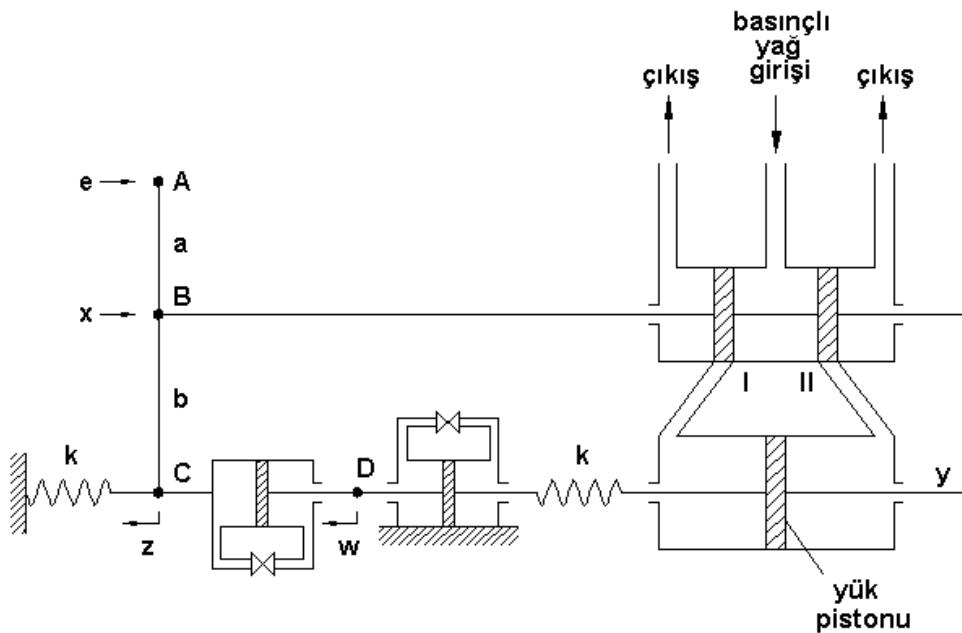
olarak elde edilir. Sisteme ait denklemler aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{E(s)} &= \frac{\frac{b}{a+b} \cdot \frac{K_i}{s}}{1 + \frac{K_i}{s} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{T \cdot s}{T \cdot s + 1}} = \frac{\frac{b \cdot K_i}{s \cdot (a+b)}}{\frac{s \cdot (a+b) \cdot (T \cdot s + 1) + K_i \cdot a}{s \cdot (a+b) \cdot (T \cdot s + 1)}} = \frac{b \cdot K_i \cdot (T \cdot s + 1)}{s \cdot (a+b) \cdot (T \cdot s + 1) + K_i \cdot a \cdot T \cdot s} \\ &= \frac{b \cdot K_i \cdot (T \cdot s + 1)}{a \cdot K_i} = \frac{b}{a} \cdot (T \cdot s + 1) = \frac{b}{a} \cdot T \cdot s + \frac{b}{a} = K_p + K_d s \end{aligned}$$

Burada; $K_d = \frac{bT}{a}$ şeklinde bir sabittir. Sisteme ait blok diyagramı aşağıdaki biçimde elde edilir.



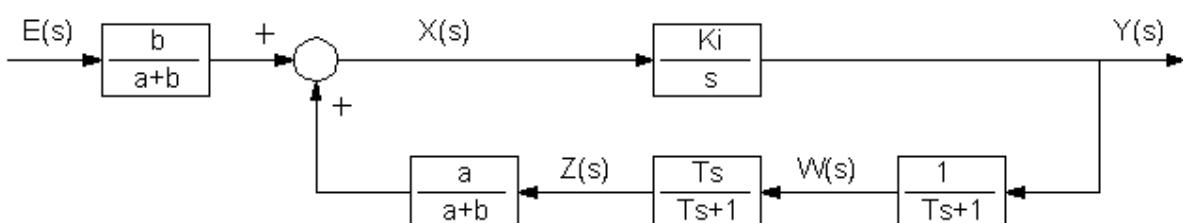
7.6 Hidrolik Orantı + Integral + Diferansiyel Elemanı



Sisteme ait denklemler aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \frac{Y(s)}{E(s)} &= \frac{\frac{b}{a+b} \cdot \frac{K_i}{s}}{1 + \frac{K_i}{s} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{T \cdot s}{T \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{Ts + 1}} = \frac{\frac{b \cdot K_i}{s \cdot (a+b)}}{\frac{s \cdot (a+b) \cdot (T \cdot s + 1)^2 + K_i \cdot a \cdot T \cdot s}{s \cdot (a+b) \cdot (T \cdot s + 1)^2}} = \frac{b \cdot K_i \cdot (T \cdot s + 1)^2}{s \cdot (a+b) \cdot (T \cdot s + 1)^2 + K_i \cdot a \cdot T \cdot s} \\
 &= \frac{b K_i (T s + 1)}{s(a+b)(T s + 1) + \left(\frac{K_i \cdot a \cdot T s}{(T s + 1)} \right)} = \frac{b K_i (T s + 1)}{\left(\frac{K_i \cdot a \cdot T s}{(T s + 1)} \right)} = \frac{b K_i (T s + 1)(T s + 1)}{K_i \cdot a \cdot T s} \\
 &= K \frac{(T^2 \cdot s^2 + 2T s + 1)}{T s} = K \left(T s + 2 + \frac{1}{T s} \right) = K \cdot T \cdot s + 2 \cdot K + \frac{K}{T \cdot s} = K_d s + K_p + \frac{K_i}{s}
 \end{aligned}$$

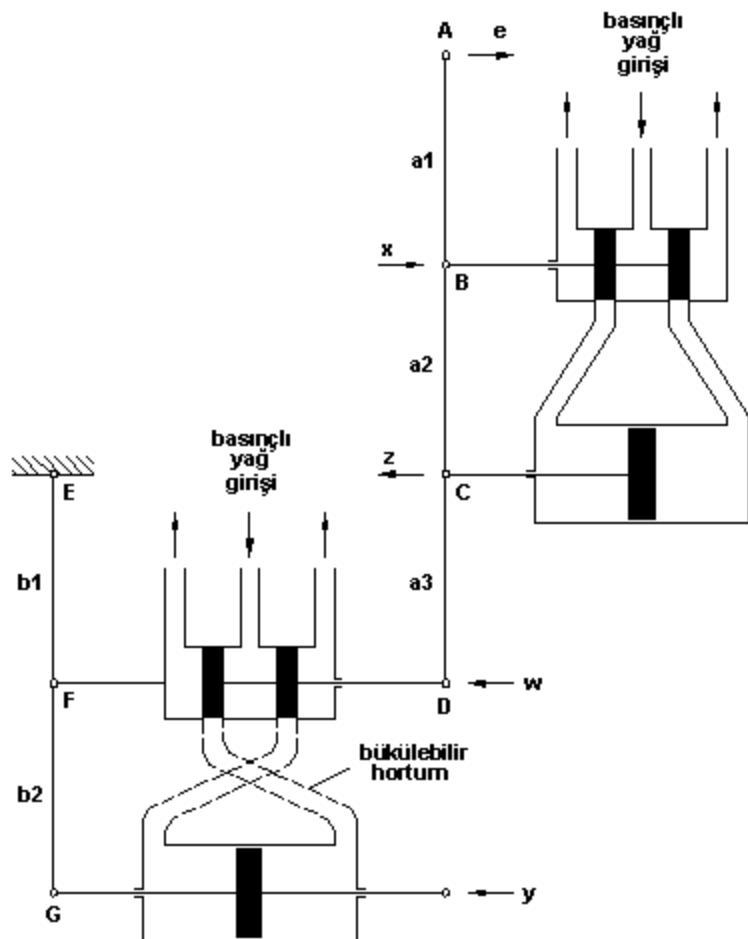
Sisteme ait blok diyagramı aşağıdaki biçimde elde edilir.



7.7 Uygulamalar:

7.7.1 Uygulama :

Aşağıdaki şekilde bir hidrolik servo sistemi göz önüne alınmıştır. $e(t)$, giriş değeri ve yük pistonunun yerdeğiştirmesi $y(t)$, çıkış değeri kabul edildiğine göre, transfer fonksiyonu $Y(s) / E(s)$ 'yi hesaplayınız.



Sistemin blok diyagramının oluşturulabilmesi için, bağlantı noktalarını, birbirlerine olan etkilerinin, bağıntıları yazılması gereklidir. Buna göre;

A noktası ile B noktası arasındaki bağıntı;

$$\frac{e}{a_1 + a_2} = \frac{x}{a_2}$$

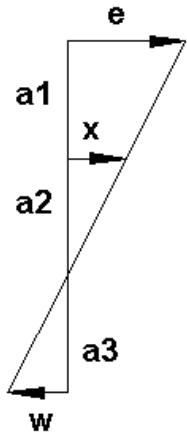
$$e \frac{a_2}{a_1 + a_2} = x$$

B noktası ile C noktası arasındaki bağıntı;

$$\frac{z}{a_1 + a_2} = \frac{x}{a_1}$$

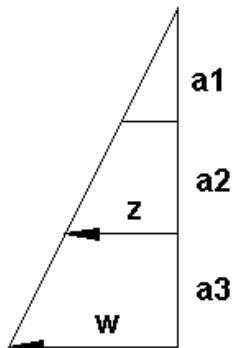
$$z \frac{a_1}{a_1 + a_2} = x$$

A noktası ile D noktası arasındaki bağıntı;



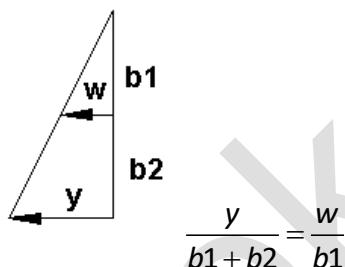
$$\frac{e}{a_1+a_2} = \frac{w}{a_3}, \quad e \frac{a_3}{a_1+a_2} = w$$

C noktası ile D noktası arasındaki bağıntı;



$$\frac{z}{a_1+a_2} = \frac{w}{a_1+a_2+a_3}$$

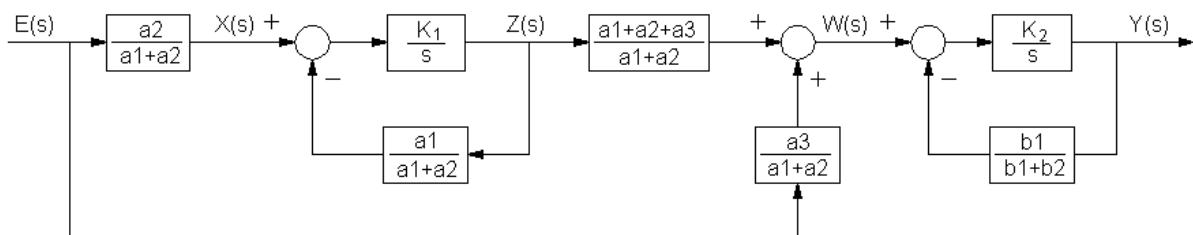
$$z \frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2} = w \quad F \text{ noktası ile } G \text{ noktası arasındaki bağıntı};$$



$$\frac{y}{b_1+b_2} = \frac{w}{b_1}$$

$$y \frac{b_1}{b_1+b_2} = w$$

Şeklinde elde edilir. Buna göre sisteme ait blok diyagramı aşağıdaki biçimdedir.



Elde edilen blok diyagramının transfer fonksiyonu;

$$\frac{Z(s)}{E(s)} = \frac{\frac{a_2}{a_1+a_2} \frac{K_1}{s}}{1 + \frac{K_1}{s} \frac{a_1}{a_1+a_2}} = \frac{a_2}{a_1+a_2} \frac{a_1+a_2}{a_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{W(s)}{E(s)} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2} \frac{Z(s)}{E(s)} + \frac{a_3}{a_1 + a_2} = \frac{a_2 + a_3}{a_1}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\frac{K_2}{s}}{1 + \frac{b_1}{b_1 + b_2} \frac{K_2}{s}} = \frac{b_1 + b_2}{b_1}$$

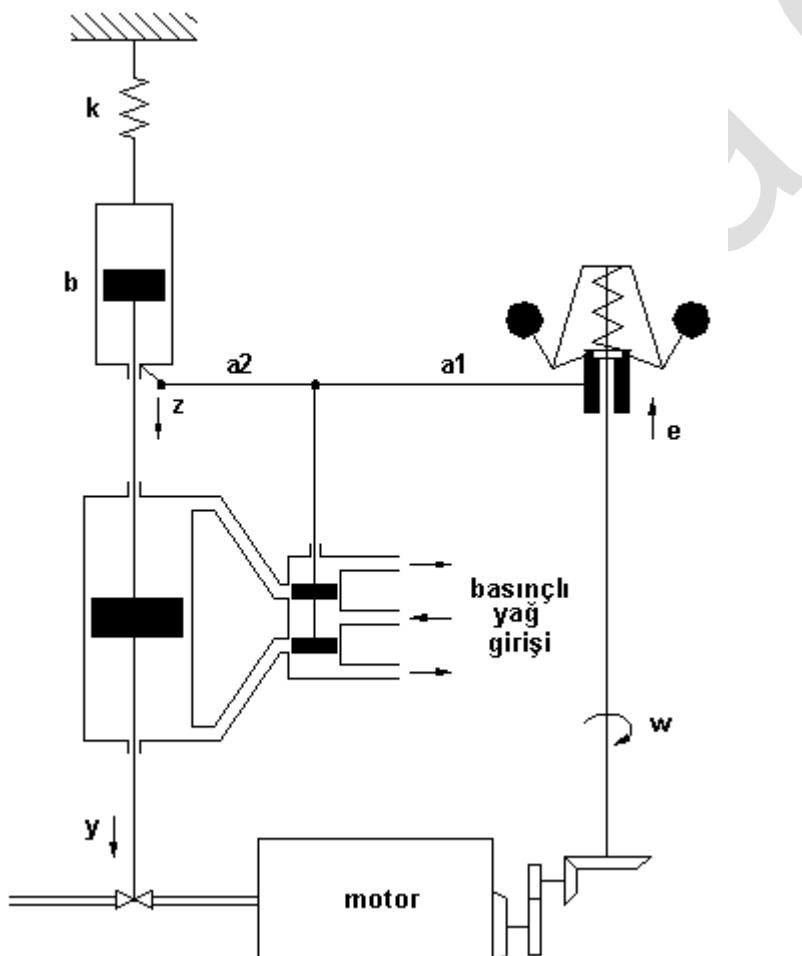
$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} \cdot \frac{W(s)}{E(s)} = \frac{(a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2)}{a_1 \cdot b_1} \quad (6.4)$$

Bulunan sonuç, ele alınan servo sistemin orantı kontrol elemanı olduğunu gösterir.

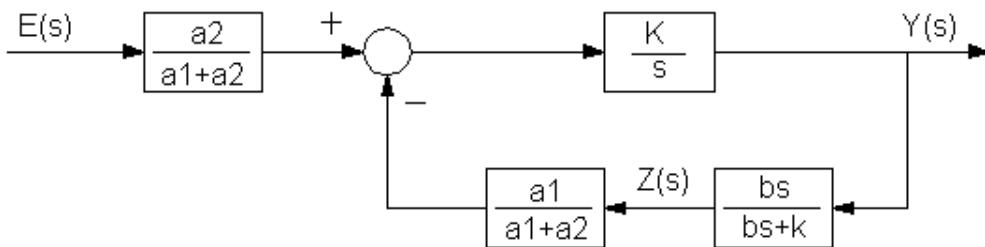
7.7.2 Uygulama :

Aşağıdaki şekilde bir hız kontrol sistemi göz önüne alınmıştır. Transfer fonksiyonu $Y(s) / E(s)$ 'yi hesaplayınız.

Cevap: Şekilde verilen sistemde, motor hızı arttığında, kola bağlı küreler merkezkaç kuvveti etkisiyle, dönme merkezinin dışına doğru kuvvet uygular ve kol yukarı doğru kalkar. Bu hareket hidrolik PI elemanın giriş değeridir. Kolun yukarı hareketi, yük pistonunun aşağı hareket etmesini sağlar ve yakıt girişini kısaltır. Buna bağlı olarak motor hızı azalır.



Sisteme ait blok diyagramı ve transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.



Şekil 7.2:Hız kontrol sistemi

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{a_2}{a_1+a_2} \frac{K}{s}}{1 + \frac{a_1}{a_1+a_2} \frac{bs}{s+k} \frac{K}{s}} = \frac{\frac{K \cdot a_2}{s(a_1+a_2)}}{\frac{s(a_1+a_2)(bs+k) + a_1 bs K}{s(a_1+a_2)(bs+k)}} = \frac{K \cdot a_2 (bs+k)}{s(a_1+a_2)(bs+k) + a_1 bs K}$$

$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{K \cdot a_2 \cdot (b \cdot s + k)}{a_1 \cdot b \cdot s \cdot K} = \frac{a_2}{a_1} \frac{(b \cdot s + k)}{b \cdot s} = \frac{a_2}{a_1} \left(1 + \frac{k}{b \cdot s} \right)$ şeklinde elde edilir. Buradan sistemin kontrolünün PI olduğu görülür.

7.7.3 Uygulama :

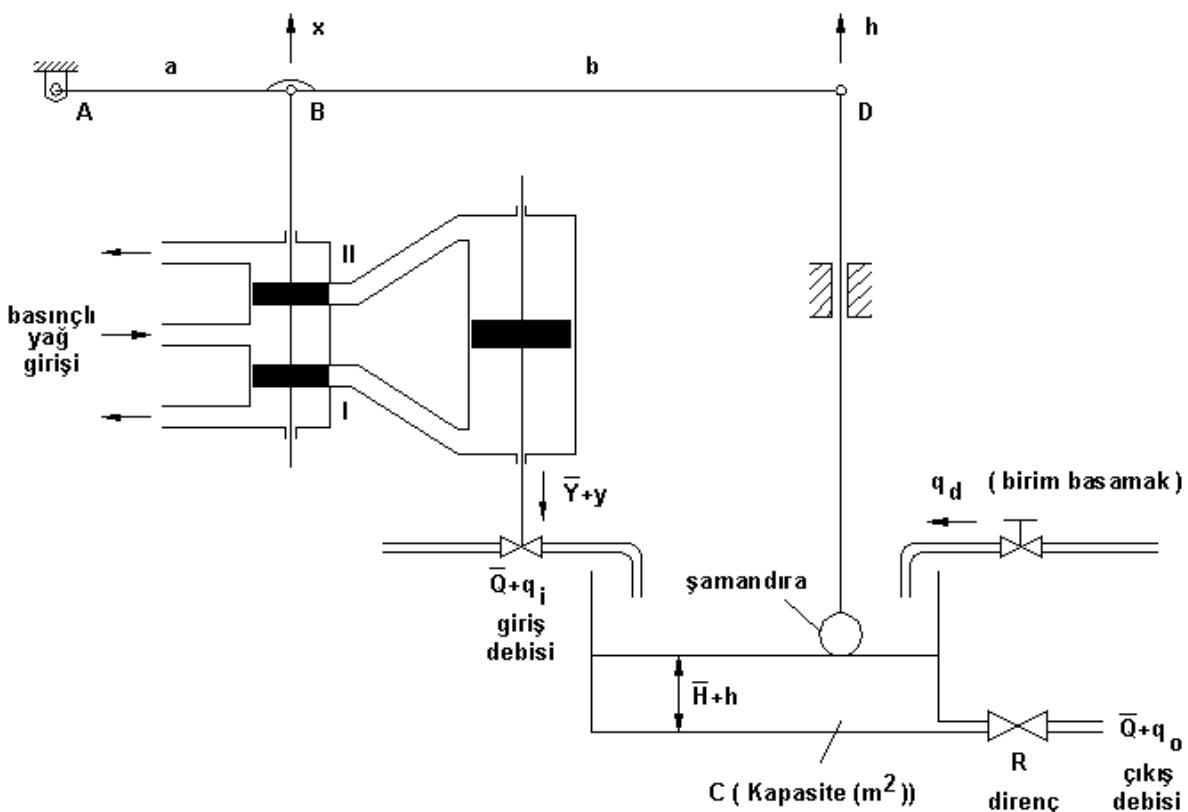
Aşağıdaki şekilde verilen sıvı seviyesi kontrol sisteminde, q_d debisi, giriş ve h yüksekliği, çıkış değerleri olduğuna göre;

a) Sistemin blok diyagramını çiziniz ve transfer fonksiyonunu hesaplayınız.

(Başlangıç şartları sıfırdır.)

b) $C = 2 \text{ m}^2$, $R = 0,5 \text{ s} / \text{m}^2$, $K_v = 1 \text{ m}^2 / \text{s}$, $a = 0,25 \text{ m}$, $b = 0,75 \text{ m}$, $K_1 = 4 \text{ s}^{-1}$

$Q_d (s) = 1 / s$ olduğunda çıkış fonksiyonunu ($h(t)$) hesaplayınız ve sistemin kararlı olup olmadığını kontrol ediniz.



a)

$$(q_i + q_d - q_o) dt = c dh \quad (1)$$

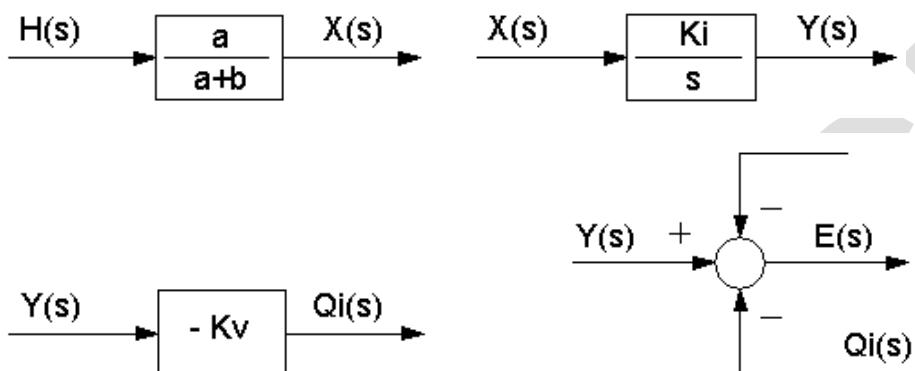
$$q_o = \frac{h}{R} \quad (2)$$

$$x = \frac{a}{a+b} h \quad (3)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1}{s} \quad (4)$$

$$q_i = -K_v y$$

Yukarıda yazılan bağıntılar blok diyagramına aşağıdaki biçimde dönüştürülür.



olarak yazılabilir. Ayrıca Denklem (1)'den;

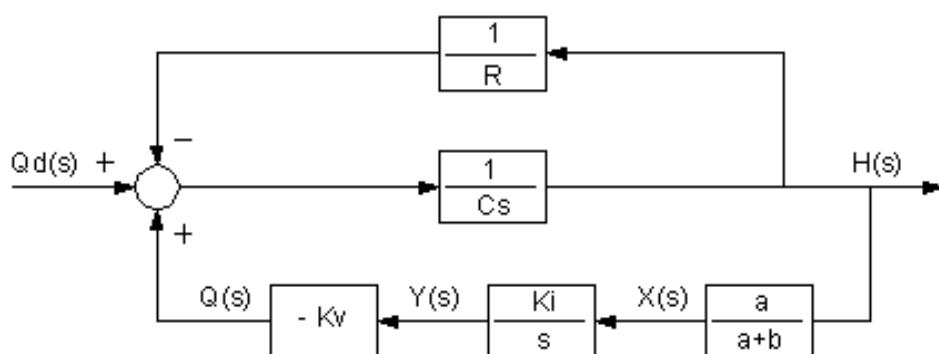
$$c \frac{dh}{dt} = q_i + q_d - q_o$$

$$C(s)H(s) = Q_i(s) + Q_d(s) - Q_o(s)$$

$$H(s) = (Q_i(s) + Q_d(s) - Q_o(s)) \frac{1}{Cs}$$

$$H(s) = \left(-K_v Y(s) + Q_d(s) - \frac{H(s)}{R} \right) \frac{1}{Cs}$$

olur. Buradan blok diyagramı aşağıdaki biçimde elde edilir.



$$\frac{H(s)}{Q_d(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta}$$

$$P_1 = \frac{1}{Cs}, \quad \Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$L_1 = -K_v \frac{K_1}{s} \frac{a}{a+b} \frac{1}{Cs} = \frac{-a K_1 K_v}{C s^2 (a+b)} , \quad L_2 = -\frac{1}{R} \frac{1}{Cs} = -\frac{1}{R C s}$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{H(s)}{Qd(s)} &= \frac{\frac{1}{Cs}}{1 + \frac{aK_1K_v}{Cs^2(a+b)} + \frac{1}{R C s}} = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{Cs}{Cs} + \frac{aK_1K_v}{Cs(a+b)} + \frac{1}{Cs R}} \\ &= \frac{\frac{1}{Rs(a+b)}}{\frac{(a+b)RCs^2 + aK_1K_v R + s(a+b)}{Rs(a+b)}} = \frac{\frac{Rs(a+b)}{s(a+b)}}{\left[RCs + 1 + \frac{aRK_1K_v}{s(a+b)} \right]} \end{aligned}$$

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1}{Cs + \frac{1}{R} + \frac{aK_1K_v}{a+b} \frac{1}{s}}$$

$$H(s) \left(Cs + \frac{1}{R} + \frac{aK_1K_v}{a+b} \frac{1}{s} \right) = Q_d(s)$$

Elde edilen sonuç;

$$\frac{H(s)}{Q_d(s)} = \left(T_d s + K_p + \frac{K_i}{s} \right) \text{ şeklinde olduğundan, PID kontrol elemanı davranışını göstermektedir.}$$

b) $H(s) \left(Cs + \frac{1}{R} + \frac{aK_1K_v}{a+b} \frac{1}{s} \right) = Qd(s)$ denkleminde verilen değerler yerine yazıldığında;

$$\frac{H(s)}{Q_d(s)} = \frac{1}{\left(2s + \frac{1}{0,5} + \frac{0,25 \cdot 4 \cdot 1}{(0,25+0,75)s} \frac{1}{s} \right)} = \frac{1}{\left(2s + 2 + \frac{1}{s} \right)}$$

$$2s^2 + 2s + 1 = 0 \quad \text{Karakteristik denklemidir.}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0$ Denklemin determinantı sıfırdan küçük olduğundan dolayı kökler sanaldır ve Laplace dönüşüm tablosundan aşağıdaki kural uygulanarak dönüşüm yapılır.

$$\frac{w}{(s+a)^2 + w^2} \rightarrow e^{-at} \sin(wt)$$

$$H(s) = \frac{0,5}{s^2 s + 0,5} = \frac{0,5}{(s+0,5)^2 0,5^2} \rightarrow h(t) = e^{-0,5 \cdot t} \cdot \sin(0,5 \cdot t)$$

olarak elde edilir. Elde edilen denklemin kararlı olması için t değerleri artarken h (t) değerinin sıfıra yaklaşması gereklidir. Yani h (t) değeri sonsuzda sıfırlanmalıdır. Eğer sistemin denklemi bu şartı gerçekliyorsa kararlıdır denir. Bu şarta göre ele alınan sistem kararlıdır.

8. Lineer Olmayan Fonksiyonların Lineerleştirilmesi

Sistem analizinin birçok güçlü metotları, lineer kontrol sistemleri için geliştirilmiştir. Bir lineer kontrol sistemi için, değişkenler arası bütün bağıntılar genellikle sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerdir. Bu nedenle geri beslemeli kontrol sistemindeki değişkenler, cebirsel değişkenlerden ziyade zamana bağlı diferansiyel denklemlerdir. Örneğin sıcaklık kontrolünde gerçek sinyal işaret akışında değişikliğe neden olur. Fakat sıcaklığı istenilen değere getirmek için, ilave edilecek ısı

miktardan dolayı zaman gereklidir. Yine hız kontrol sisteminde gerçek sinyal, yakıt girişindeki asıl hareketin değişimine neden olur (Temel kontrol değişimine neden olur.). Ama arzu edilen hız erişmek için motoru hızlandırmak veya yavaşlatmak amacıyla zamana ihtiyaç vardır. Benzer şekilde basınç kontrol sistemlerinde arzu edilen basınç değerlerine ulaşmak için zamana ihtiyaç vardır.

Kontrol sistemleri, genellikle bazı lineer olmayan elemanlardan oluşur. Bu elemanlardan dolayı sisteme ait diferansiyel denklemde nonlinear olur. Bunların lineer hale nasıl dönüştürüleceği aşağıda gösterilmiştir. n değişkenli bir lineer denklem;

$$f \approx f_i + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + \dots \quad (6.5)$$

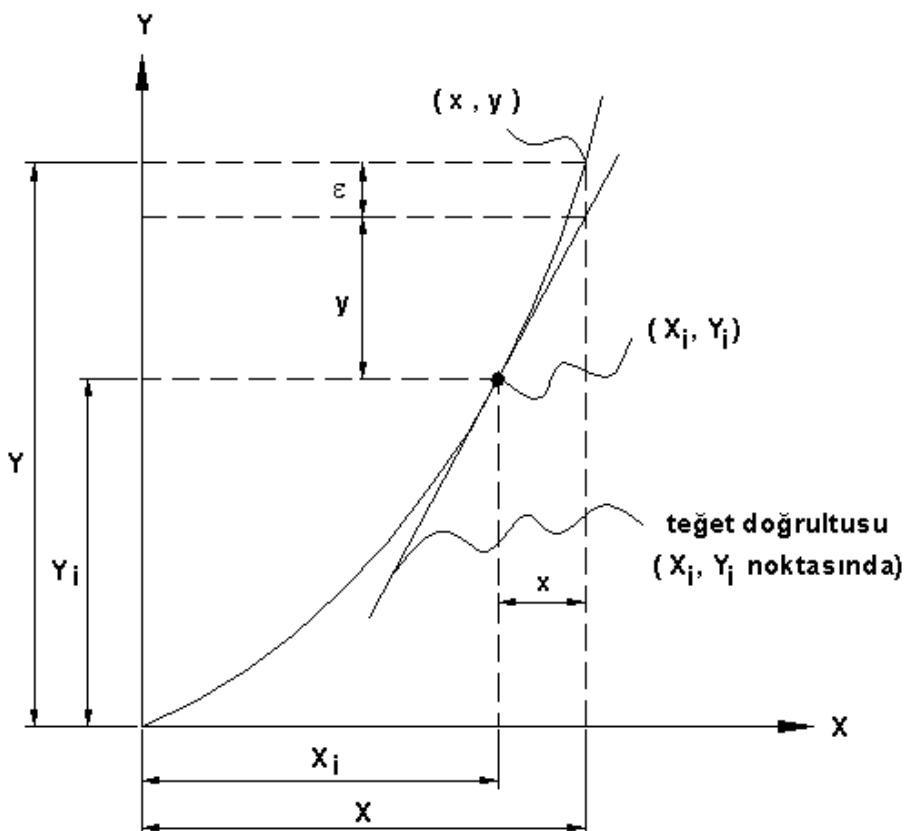
Burada, $(f_i, c_1, c_2, \dots, c_n)$ sabit değerlerdir.

(f_i) : f fonksiyonunun bilinen noktalardaki başlangıç (initial) değeridir.

Örnek olarak;

$$y = x^2 \quad (6.6)$$

fonksiyonu göz önüne alalım.



Grafikten görüleceği gibi;

$$y = y_i + y + \varepsilon \approx y_i + y \quad (6.7)$$

Grafikte (x_i, y_i) noktasındaki eğim;

$$c_1 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_i} \quad (6.8)$$

Burada y değeri için;

$$y_i = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_i} \quad (6.9)$$

Otomatik Kontrol Ders Notları, Pamukkale Üniversitesi, Z.Girgin
olduğu görülür. (6.7) nolu denklemde yerine yazıldığında;

$$y \approx y_i + \left. \frac{dy}{dx} \right|_i \cdot \Delta x \quad (6.10)$$

elde edilir.

8.1.1 Misal

$y = x^3$ denkleminde ($x_i = 10$) fererans değeri için ($y = 10^3 = 1000$) dir. ($x = 11$) ve ($x = 9$) değerleri için, denklemi doğrusal hale getirip yaklaşık y değerlerini hesaplayınız.

$$y \approx y_i + c_1 \cdot \Delta x \quad \Delta x = 11 - 10 = 1$$

$$y_i = 1000 \quad \Delta x = 9 - 10 = -1$$

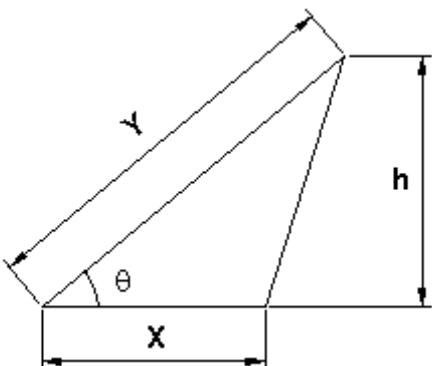
$$c_1 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_i = \left. 3x^2 \right|_i = 3 \cdot 10^2 = 300$$

$y \approx y_i + c_1 \cdot \Delta x \rightarrow y \approx 1000 + 300 \cdot \Delta x \rightarrow y \approx 1000 + 300 \cdot (11 - 10) \rightarrow y(11) \approx 1300$ fonksiyonun $x = 11$ deki değeridir.

$$y \approx 1000 + 300 \cdot \Delta x \rightarrow y \approx 1000 + 300 \cdot (-1) \rightarrow y(9) \approx 700 \quad x = 9$$
 için yaklaşık değeridir.

8.1.2 Misal

Aşağıdaki şekilde verilen üçgenin alanı ($x_i = 10$), ($y_i = 16$) ve ($\theta_i = 30^\circ$) başlangıç değerleri için bilinmektedir. Bu değerlere bağlı olarak alan formülünü doğrusal hale getirip (lineerleştirip), ($x = 9$), ($y = 16.5$) ve ($\theta = 33^\circ$) için yaklaşık sonucunu hesaplayınız.



Alan formülü a;

$$a = a(x, y, \theta) \quad (6.11)$$

Şeklinde olup üç farklı değişkene bağlıdır. Ve değeri;

$$a = x \cdot h \cdot \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin(\theta) \quad (6.12)$$

$$a \approx a_i + \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_i \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_i \cdot \Delta y + \left. \frac{\partial a}{\partial \theta} \right|_i \cdot \Delta \theta \quad (6.13)$$

Veya;

$$a \approx a_i + c_1 \cdot \Delta x + c_2 \cdot \Delta y + c_3 \cdot \Delta \theta$$

$$a_i = \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin(\theta) \right) \Big|_i = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 16 \cdot \sin(30^\circ) = 40 \quad (6.14)$$

$$c_1 = \frac{\partial a}{\partial x} \Big|_i = \frac{1}{2} \cdot y \cdot \sin(\theta) \Big|_i = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \sin 30^\circ = 4$$

$$c_2 = \frac{\partial a}{\partial y} \Big|_i = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sin(\theta) \Big|_i = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sin(30^\circ) = 2.5$$

$$c_3 = \frac{\partial a}{\partial \theta} \Big|_i = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \cos(\theta) \Big|_i = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 16 \cdot \cos(30^\circ) = 40\sqrt{3} = 69.282$$

Bu değerler

$$a_{ap} \approx 40 + 4 \cdot \Delta x + 2.5 \cdot \Delta y + 69.282 \cdot \frac{\Delta \theta}{3 \cdot \frac{\pi}{180}} = 40.8776 \text{ olarak hesaplanır. Gerçek değeri;}$$

$$a = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 16.5 \cdot \sin(33^\circ) = 40.4394 \quad (6.15)$$

olduğu görülür. İki sonuç karşılaştırıldığında, aralarındaki fark çok azdır.

Lineerleştirmede boyutsuz parametreler kullanmak daha uygun olabilir. Bunun için (6.13) nolu denklemdeki her bir terim, (2) denklemdeki gibi A_i haline getirilir.

$$a = \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin \theta \right) \cdot \frac{x}{x_i} + \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin(\theta) \right) \cdot \frac{y}{y_i} + \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \cos(\theta_i) \cdot \frac{\sin(\theta_i)}{\cos(\theta_i)} \right) \cdot \frac{\Delta \theta}{\tan(\theta)} \quad (6.16)$$

$$a = \left(\frac{x}{x_i} + \frac{y}{y_i} + \frac{\Delta \theta}{\tan(\theta)} \right) \cdot a_i \quad (6.17)$$

$$a = \left(\frac{x}{10} + \frac{y}{16} + \frac{\Delta \theta}{\tan(30^\circ)} \right) \cdot 40 \Rightarrow a_p \approx a_i + a \quad (6.18)$$

8.1.3 Misal

$F = x \cdot y^2 + 2 \cdot y \cdot \sin(\theta)$ fonksiyonunu ($x_i = 10$) , ($y_i = 9$) ve $\theta_i = 30^\circ$ civarında lineerleştirip ($x = 9.9$) , ($y = 9.1$) ve ($\theta = 33^\circ$) için yaklaşık değerini hesaplayınız.

Çözüm: fonksiyonun başlangıçtaki değeri; $F_i = x \cdot y^2 + 2 \cdot y \cdot \sin(\theta) = 10 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9 \cdot \sin(30^\circ) \rightarrow F_i = 819$

$$c_1 = \frac{\partial F}{\partial x} \rightarrow c_1 = y^2 \rightarrow c_1 = 9^2 \rightarrow c_1 = 81$$

$$c_2 = \frac{\partial F}{\partial y} \rightarrow c_2 = 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot \sin(\theta) \rightarrow c_2 = 2 \cdot 10 \cdot 9 + 2 \cdot \sin(30^\circ) \rightarrow c_2 = 181$$

$$c_3 = \frac{\partial F}{\partial \theta} \rightarrow c_3 = 2 \cdot y \cdot \cos(\theta) \rightarrow c_3 = 2 \cdot 9 \cdot \cos(30^\circ) \rightarrow c_3 = 15.588457$$

$$F_{ap} \approx F_i + c_1 \cdot \Delta x + c_2 \cdot \Delta y + c_3 \cdot \Delta \theta \rightarrow F_{ap} \approx 819 + 81 \cdot (-0.1) + 181 \cdot (+0.1) + 15.588457 \cdot \left(+3 \cdot \frac{\pi}{180} \right)$$

$F_{ap} \approx 829.81621$ olarak yaklaşık değeri hesaplanır. Gerçek değeri; $F_{real} \approx 829.73143$ dir.

Gördüğü gibi yaklaşık değer, gerçek değere yakın bir değerdir.

9. Zaman Cevabı (Time Response)

Bir sistemin çıkış cevabı; zorlamalı cevap ile doğal cevabın toplamıdır. Yani bir diferansiyel denklem göz önüne alındığında denklemin sağ tarafı sıfıra eşitlenerek elde edilen çözüm homojen kısmı (doğal cevabı) zorlama etkisi de hesaba katıldığında kısmi çözüm (zorlamalı cevap) olarak adlandırılmaktadır. Bir sistemin Çıkış Fonksiyonu elde edildiğinde (laplace dönüşümü uygulandığı zaman), sistemi sıfırlayan değerler sıfırları (zeros) sonsuza götürünen değerler de kutupları (poles) oluşturmaktadır.

9.1 Birinci Mertebeden Sistemler (First Order Systems)

Birinci mertebeden bir sistemin çıkış fonksiyonu göz önüne alındığında,

$$C(s) = \frac{(s+2)}{s \cdot (s+5)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+5} = \frac{\frac{2}{5}}{s} + \frac{\frac{3}{5}}{s+5} \quad (7.1)$$

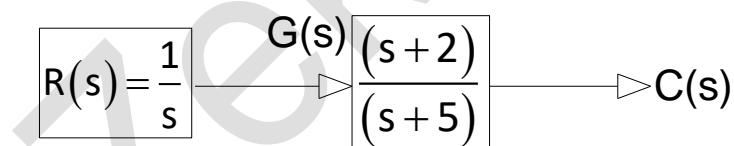
olarak hesaplanır. Buradaki a ve b katsayıları Denklem (2.19) kullanılarak elde edilmiştir.

$$a_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \left[(s - p_i) \frac{B(s)}{A(s)} \right] \rightarrow a = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{(s+2)}{s \cdot (s+5)} \right] \rightarrow a = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{(0+2)}{(0+5)} \right] \rightarrow a = \frac{2}{5}$$

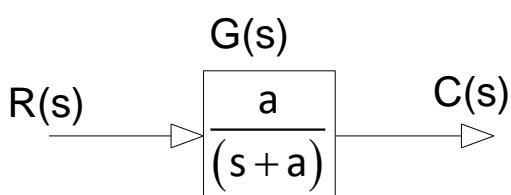
$$b = \lim_{s \rightarrow -5} \left[(s+5) \cdot \frac{(s+2)}{s \cdot (s+5)} \right] \rightarrow b = \frac{(-5+2)}{-5} \rightarrow b = \frac{3}{5}$$

Elde edilen laplace denkleminin ters Laplace'sı alındığında,

$C(s) = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{s} \right) + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{s+5} \right) \rightarrow c(t) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot e^{-5t}$ şeklinde çıkış fonksiyonu hesaplanır. Sistemin Blok diyagramı aşağıdaki gibidir.



Birinci mertebeden $C(s) = R(s) \cdot G(s)$ sistemi göz önüne alındığında, giriş değeri $R(s) = 1/s$ için, çıkış fonksiyonunun $C(s) = \frac{a}{s \cdot (s+a)}$ olduğu görülür. Fonksiyonun ters Laplace'sinden,



$$C(s) = \frac{a}{s \cdot (s+a)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+a},$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s \cdot a}{s \cdot (s+a)} \right] \rightarrow a_1 = \frac{a}{(0+a)} \rightarrow a_1 = 1, \quad a_2 = \lim_{s \rightarrow -a} \left[\frac{(s+a) \cdot a}{s \cdot (s+a)} \right] \rightarrow a_2 = \frac{a}{-a} \rightarrow a_2 = -1$$

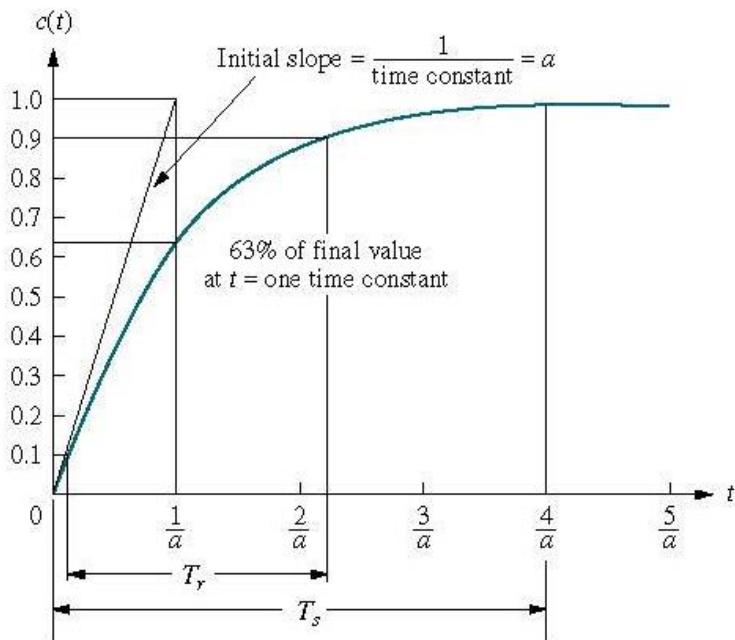
Hesaplanan değerler yerlerine yazıldığında,

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \rightarrow c(t) = 1 - e^{-at} \text{ olarak hesaplanır. } (t = \frac{1}{a}) \text{ olduğunda çıkış fonksiyonu,}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{a^1}{a}} = 1 - e^{-1} \rightarrow c(t) = 1 - 0.36788 \rightarrow c(t) = 0.63212 \text{ olduğu görüldür.}$$

$(T_c = t = \frac{1}{a})$ değerine birinci mertebeden sistemler için **Zaman sabiti** (**Tc=Time constant**) denir.

Diğer bir ifadeyle, t zaman sonsuza doğru giderken $c(t)$ fonksiyonun alacak olduğu değerin %63 üne varması için gerekli zamandır.



Yükselme Zamanı (Rise Time) (Tr):

Çıkış fonksiyonunun t sonsuza giderken alacak olduğu değer ($c(\infty) = c_f$) ile ifade edildiğinde, ($c(t) = 0.1 \cdot c_f$) değerinden başlayıp ($c(t) = 0.9 \cdot c_f$) oluncaya kadar geçen süreye denir. ($Tr = t_2 - t_1$)

$$c(t) = 1 - \frac{1}{e^{at}} \rightarrow c(\infty) = 1 - \frac{1}{e^{a\infty}} \rightarrow c(\infty) = 1 - 0 \rightarrow c(\infty) = 1 \rightarrow c_f = 1$$

$$0.1 = 1 - \frac{1}{e^{at_1}} \rightarrow \left(t_1 = \frac{0.1053605157}{a} \right), \quad 0.9 = 1 - \frac{1}{e^{at_2}} \rightarrow \left(t_2 = \frac{2.302585093}{a} \right) (Tr = t_2 - t_1)$$

$$Tr = \frac{2.302585093}{a} - \frac{0.1053605157}{a} \rightarrow Tr = \frac{2.197224577}{a} \rightarrow Tr \approx \frac{2.197}{a} \rightarrow Tr \approx \frac{2.2}{a}$$

Ayarlama Süresi (Settling Time) (Ts):

Çıkış fonksiyonunun t sonsuza giderken alacak olduğu değer ($c(\infty) = c_f$) ile ifade edildiğinde, ($c(t) = 0$) değerinden başlayıp ($c(t) = \mp 0.98 \cdot c_f$) oluncaya kadar geçen süreye denir.

$$0.98 = 1 - \frac{1}{e^{at}} \rightarrow T_s = \frac{3.912023005}{a} \rightarrow T_s \approx \frac{3.912}{a} \rightarrow T_s \approx \frac{4}{a}$$

Olarak hesaplanır. Bu mantık ve düşünceden gidilerek ikinci mertebeden fonksiyonlar için de benzer hesaplamalar yapılacaktır.

9.1.1 Misal :

Transfer fonksiyonu $\left(G(s) = \frac{50}{s+50} \right)$ ile verilen sistemde giriş değeri birim basamak olduğunda, zaman sabiti (T_c), yükselme zamanı (T_r) ve ayarlama süresini (T_s) hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } G(s) = \frac{50}{s+50} \rightarrow C(s) = R(s) \cdot G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{50}{s+50} \rightarrow C(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{50}{s+50} \rightarrow c(t) = 1 - \frac{1}{e^{50t}}$$

$$a=50 \rightarrow T_c = \frac{1}{a} \rightarrow T_c = \frac{1}{50} \rightarrow T_c = 0.02s, T_s \approx \frac{4}{a} \rightarrow T_s \approx \frac{4}{50} \rightarrow T_s = 0.08s, T_r \approx \frac{2.197}{a} \rightarrow T_r \approx \frac{2.197}{50}$$

$T_r \approx \frac{2.197}{50} \rightarrow T_r \approx 0.043944 \rightarrow T_r \approx 0.044s$ olarak hesaplanır.

9.2 İkinci Mertebeden Sistemler (Second Order Systems)

İkinci mertebeden bir sistemde ileri yol elemanı $G(s)$ için,

$$\left(s^2 + \frac{c}{m} \cdot \omega_n \cdot s + \frac{k}{m} \right) \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow s^2 + \frac{c}{m} \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2$$

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{c}{m} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4 \cdot \omega_n^2}}{2} \rightarrow \frac{c^2}{m^2} = 4 \cdot \omega_n^2 \rightarrow c_{cr}^2 = 4 \cdot m^2 \cdot \omega_n^2$$

$$c_{cr} = 2 \cdot m \cdot \omega_n \rightarrow \zeta = \frac{c}{c_{cr}} \rightarrow c = \zeta \cdot c_{cr} = \zeta \cdot 2 \cdot m \cdot \omega_n \rightarrow (s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2)$$

$$(s_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \mp \omega_n \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1}, \zeta \geq 1), (\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2})$$

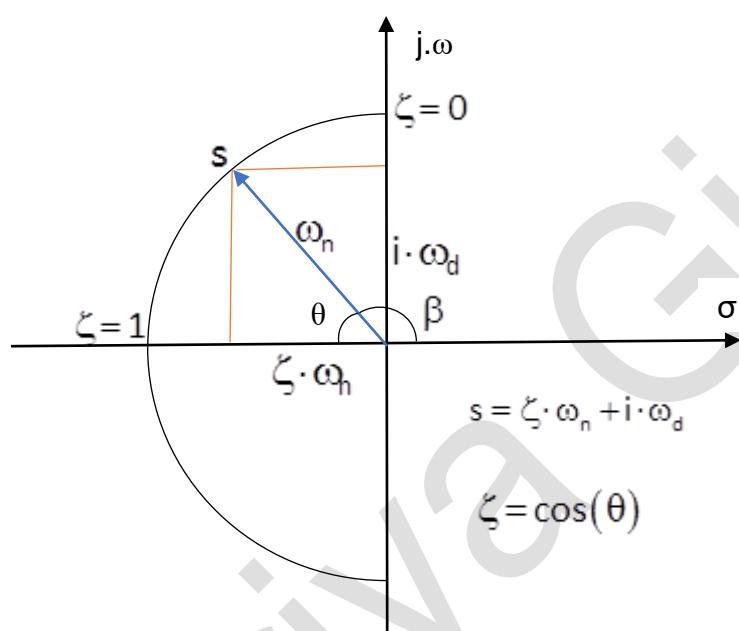
$$(s_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \mp \omega_d \cdot j, \zeta < 1) \quad (7.2)$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \quad (7.3)$$

denklemi geçerlidir. Burada bulunan ζ ve ω_n değerlerinin kompleks (sanal) düzlemdeki gösterimi aşağıda Şekil 9-1 de verilmiştir. Bu grafiğe bakarak, sanal düzlemede bir $s = a + i \cdot b$ noktası için,

$s = \zeta \cdot \omega_n + i \cdot \omega_d = a + i \cdot b$ denklemi geçerlidir ve söküMLEME ORANI İÇİN ζ Yİ HESAPLAMAK İÇİN, İLK ÖNCE $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$ BAĞINTISINDAN θ AÇISI HESAPLANIR. BURADA DİKKAT EDİLMESİ GEREKEN θ AÇISINI HESAPLARKEN BU AÇININ TRIGONOMETRİK ÇEMBER ÜZERİNDE HANGİ BÖLGEDE OLDUĞUNA DİKKAT EDİLMESİDIR. DAHA SONRA $\zeta = \cos(\theta)$ BAĞINTISINDAN ζ , SÖküMLEME KATSAYISI HESAPLANIR. ŞEKİL 9-1 DEN GÖRÜLDÜĞÜ GİBİ, SANAL EKSEN ÜZERİNDE, $s = 0 + i \cdot b$ OLDUĞUNDA $\zeta = 0$ OLMAKTADIR. BENZER ŞEKLİDE GERÇEK EKSEN ÜZERİNDE $s = -a + 0 \cdot i$ İKEN SÖküMLEME KATSAYISI $\zeta = 1$ OLMAKTADIR.

Denklem (7.2) ile kökler sanal düzlemede yerleştirildiğinde aşağıdaki şekilde olur.



$$i \cdot \omega_d \quad \omega_n \quad \zeta = 1 \quad s$$

Şekil 9-1: doğal frekans, söküMLEME KATSAYISI VE SÖküMLEMELİ FREKANSIN KOMPLEKS DÜZLEMDE GöSTERİMİ

Kompleks düzlemede bir sayı büyÜKLÜK (Magnitude, M) ve açı (Angle, θ) ile ifade edilmektedir. Şekil 9-1 de bunu,

$$(M \angle \theta) \rightarrow \text{yani,}$$

$$\boxed{\omega_n \angle \beta} \quad (7.4)$$

ile gösterilmektedir. Kompleks düzlemede sanal eksen her zaman, söküMLEMELİ DOĞAL FREKANSI göstermektedir.

Doğal Frekans (Natural Frequency), ω_n : Sistemde söküMLEME ETKİSİ YOK İKEN, 1 SANİYEDE YAPMIŞ OLDUĞU SALINIM MIKTARINA DENİR. BİRİMİ, RADYAN/SANIYE (RAD/S) DIR.

SöküMLÜ Frekans (Damped Frequency), ω_d : Sistem söküMLEME ETKİSİNDE İKEN, 1 SANİYEDE YAPMIŞ OLDUĞU SALINIM MIKTARINA DENİR. BİRİMİ, RADYAN/SANIYE (RAD/S) DIR. VE DOĞAL FREKANS İLE SÖküMLEMELİ FREKANS ARASINDA,

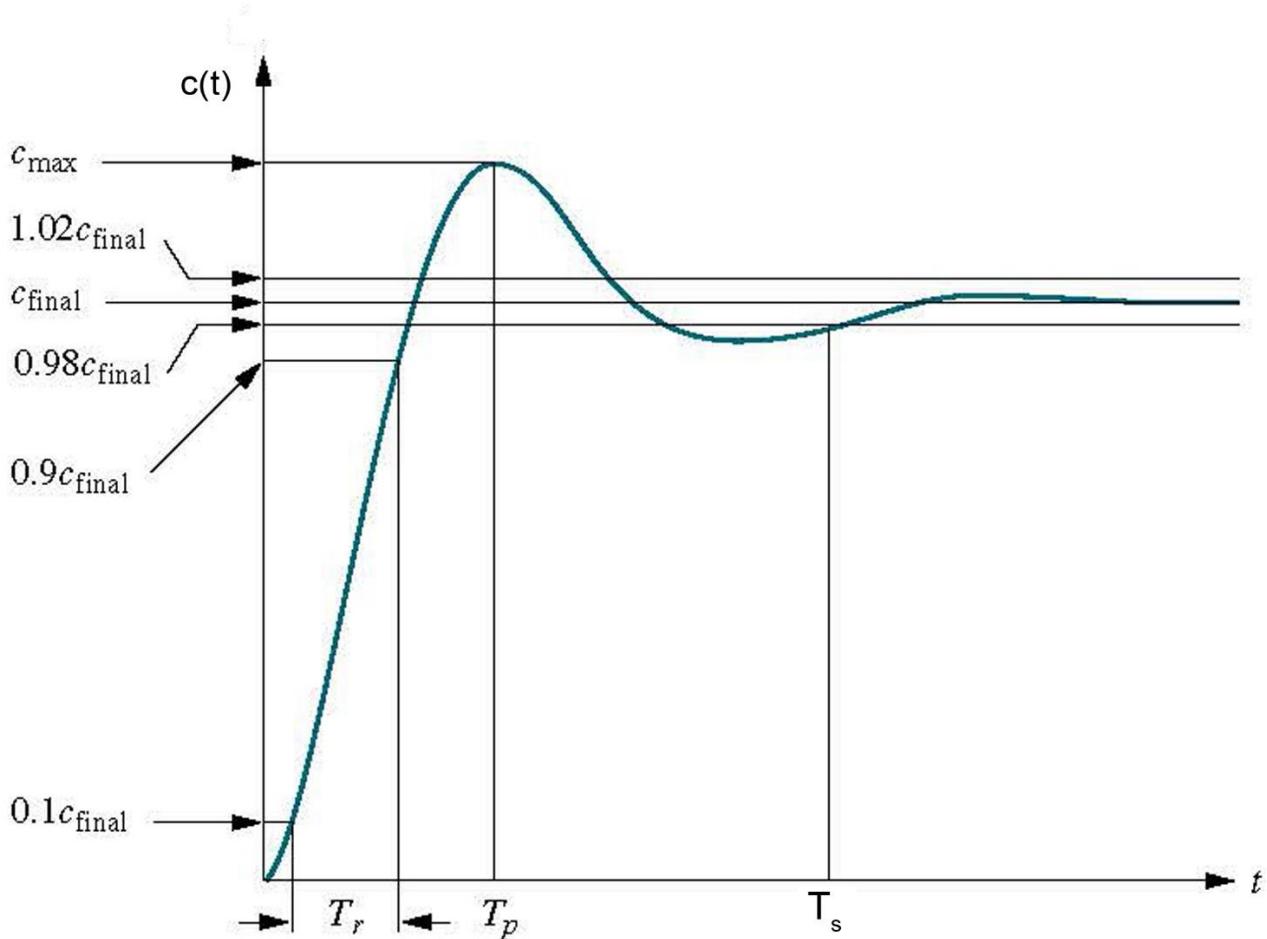
$$\boxed{\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (7.5)$$

BAĞINTISI VARDIR.

SönüMLEME ORANI (Damping Ratio), ζ : SönüMLEME etkisi altında olan bir sistem salınım yaparken yavaş yavaş sönüMLEmeye gider. Bu sönüMLEME etkisi,

$$\zeta = \cos(\theta) \quad (7.6)$$

denklemi ile veya Denklem (7.3) ile hesaplanır.



Şekil 9-2: İkinci mertebeden bir sisteme ait, ayarlama zamanı, yükselme zamanı ve tepe zamanı değerlerinin gösterilişi

Tepe Zamanı (Peak Time), T_p : Sistem ilk hareketinde en yüksek noktaya çıkması için geçen süreye Tepe zamanı (Peak Time) denir ve aşağıdaki formülle hesaplanır.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (7.7)$$

Ayarlama Süresi (Settling Time), T_s : t zamanı sonsuza giderken fonksiyonun değeri $c_{final} = c_f$ olmaktadır. İşte bu durumda, sistem değerinin, $c_f \cdot (1 \pm 0.02)$ sınırları içerisinde girinceye kadar geçen süreye ayarlama zamanı, T_s , denir ve aşağıdaki denklem ile hesaplanır.

$$T_s = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2})}{\zeta \cdot \omega_n} \approx \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n} \quad (7.8)$$

Yükselme Zamanı (Rise Time), T_r : Sistemin son değeri olan c_f değerinin %10 undan başlayıp, %90 değerine varıncaya kadar geçen süreye denir. Bu sebeple hesaplanması biraz zaman alıcıdır.

Çünkü sistemin kararlı hale varınca alacak olduğu değer ($c(\infty) = c_f$) önce hesaplanır. daha sonra $c(t_1) = 0.1 \cdot c_f$ denkleminden t_1 zamanı ve $c(t_2) = 0.9 \cdot c_f$ denkleminden de t_2 zamanı hesaplanır. Buradan da T_r için,

$$T_r = t_2 - t_1 \quad (7.9)$$

denkleminden yararlanılır.

Maksimum Aşma Değeri (% Over Shoot), OS: t zamanı sonsuza giderken fonksiyonun değeri $c_{final} = c_f$ olmaktadır. işte bu durumda, sistem değerinin, $c_f \cdot (1 \pm 0.02)$ sınırları içerisinde girinceye kadar geçen sürüye ayarlama zamanı, T_s , denir ve aşağıdaki denklem ile hesaplanır.

$$\%OS = \frac{c_{max} - c_f}{c_f} \cdot 100 \quad (7.10)$$

veya

$$\%OS = e^{-\left(\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \cdot 100 \quad (7.11)$$

denkleminden yararlanılarak hesaplanır.

Sönümleme katsayısı ile Maksimum aşma değeri arasında aşağıdaki bağıntı da kullanılır.

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%OS}{100}\right)}} \quad (7.12)$$

Kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımında dört farklı usul, tarz, yöntem kullanılmaktadır. Bunlar,

- 1 Root-Locus grafik metodu
- 2 Bode diyagramı
- 3 Nyquist kriteri
- 4 Nicholas-chart diyagramı

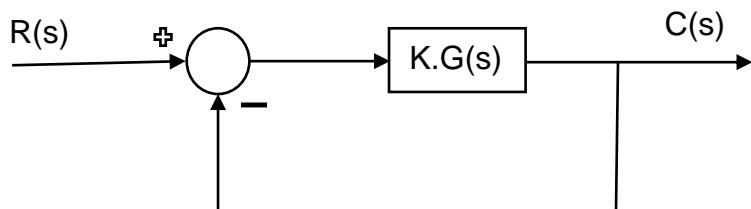
olarak karşımıza çıkmaktadır Bunlardan ilk olarak, Root-Locus metodu inceleneciktir.

10. Root Locus Metodu (The Root-Locus Method)

Bu inceleme tarzı, California Üniversitesi lisans öğrencisi iken Walter Evans (1922-1999) tarafından 1948 yılında ortaya atılmış ve grafik çizime dayanan bir usuldür. Faydalari aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

- a.) Kontrol sistemlerin analizinde veya tasarımında kullanılan güçlü bir grafik metottur.
- b.) Kutupların yer değiştiğinde kontrol sistemine nasıl tesir ettiği kolaylıkla anlaşılmaktadır.
- c.) Açık döngü transfer fonksiyonuna ilave edilecek kutup ve sıfırların (kompanzasyon) kontrol sistemine etkisini kolayca görebilmeyi sağlar.
- d.) Sisteme tesir eden iki veya daha fazla parametre (PID gibi) değiştiğinde, Root locus sonucun hemen dizayn edilmesini (sentezini) sağlar.

Birim negatif geri beslemeli bir sistemin kararlılığı incelenirken, buna bağlı olarak aşağıdaki denklem yazılabilir.



Şekil 10-1: Birim negatif geri beslemeli sistem

Yukarıda Şekil 10-1 de verilen negatif geri beslemeli sistemin Transfer fonksiyonu (TF),

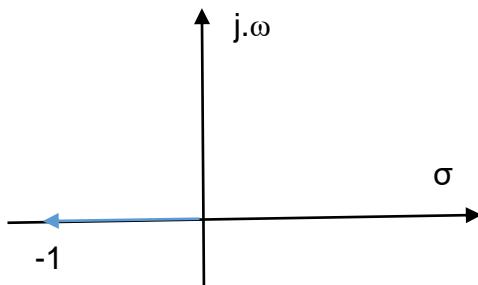
$$TF = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} \quad (8.1)$$

şeklinde yazılabilir. Sistemin kararlılığı incelenirken, paydayı sıfır yapan değer sistemi kararsız hale getireceğinden dolayı buradan,

$$1 + K \cdot G(s) = 0 \quad (8.2)$$

yazılabilir. Kompleks düzlemden bu denklem incelendiğinde,

$$K \cdot G(s) = -1 + 0 \cdot j \quad (8.3)$$



Şekil 10-2: Sanal Düzlemden Root-Locus'un gösterimi

olduğu görülür. Buradan negatif geri beslemeli sistemlerin gösteriminde, açı değerinin her zaman, $[\pm 180^\circ \pm k \cdot 360^\circ, (k=0,1,2,3,\dots)]$ şartını sağlaması gerektiği görülmektedir. Pozitif geri beslemeli sistemlerde açı değeri, $1 - K \cdot G(s) = 0$ olduğundan dolayı, her zaman,

$K \cdot G(s) = 1 + 0 \cdot i \rightarrow$ açı değeri $[\pm k \cdot 360^\circ, (k=0,1,2,3,\dots)]$ olmalıdır. Şimdi sadece negatif geri beslemeler incelenecaktır.

Root-Locus metodu bir grafik usulidir ve bu grafik üzerinden birçok değer ($K, \zeta, s, \omega_n, \%OS, \omega_d$, gibi) okunabilmektedir.

Ayrıca, Root-Locus grafiği çizilirken, Denklem (8.2) değeri aşağıdaki gibi sıfırlar (zeros) ve kutuplar (poles), grafik üzerinde sırasıyla "o" ve "x" şeklinde gösterilir. Yönler her zaman kutuplardan, sıfırlara doğrudur. ($\times \rightarrow o$) Başlangıçta, yani kutoplarda Kazanç değeri (Gain) K , her zaman sıfıra eşittir. Sıfırlarda (zeros) ise K değeri sonsuza gitmektedir.

Kompleks düzlemden sanal eksenin sağ tarafı, her zaman kararsız ve sol tarafı ise tamamen kararlıdır. **Negatif** geri beslemeli sistemlerde, K kazanç katsayı (Gain), aralığı $(0 \leq K < \infty)$ ile tanımlıdır. **Pozitif** geri beslemeli sistemlerde ise K değeri (Gain faktör), $(-\infty < K \leq 0)$ aralığında tanımlıdır.

Negatif geri beslemeli sistemlerde,

Kol sayısı (Branches) : Kol sayısı kutup sayısı (poles) sayısı “n” kadardır. Sıfır sayısı (zeros) “m” ile ifade edildiğinde sonsuza giden kol sayısı (branches), $(n-m)$ kadardır.

Asimtotlar (Asymptotes): Kutup sayısı (poles) , sıfırlar (zeros) dan büyük olduğunda ($n > m$) , kollar sonsuza gider ve bu kollar asimtotlara paralel olur. Bu asimtotların gerçek eksen üzerindeki yeri σ_a ve gerçek eksen ile yapmış olduğu açı, θ_a değeri sırasıyla aşağıda verilen denklemler ile hesaplanır.

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} \quad (8.4)$$

$$\theta_a = \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot 180^\circ}{n-m}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1) \quad (8.5)$$

Ayrılma (break-away point) ve birleşme (break-in point) noktaları: iki kutup gerçek eksen üzerinde olduğunda, root-locus değeri bu iki kutup arasında bir değere ulaştığında birbirinden ayrılır. Buna **ayırılma (break-away)** noktası denir. Yine Benzer şekilde iki sıfır (zeros) değeri gerçek eksen üzerinde olduğunda root-loci kolları bu iki zeros arasında bir değerde birleşir. Bu noktaya da **birleşme (break-in)** noktası denir. Bu noktaları hesaplamak için,

$$\frac{d}{ds}[G(s)] = 0 \quad (8.6)$$

denkleminden yararlanılır. Bu denklemin köklerine dikkat edilerek hangi noktanın ayrılma veya birleşme noktası olduğu poles ve zeros değerlerine bakılarak anlaşılır.

İkinci bir usul ise ,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma + p_i} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{\sigma + z_j} \right) \quad (8.7)$$

denkleminden yararlanılarak hesaplanır.

Ayrılma ve Birleşme açıları (Angles of Departure and Arrival) : Kutuplar (poles) veya zeroslar gerçek tamamen eksen üzerinde olmayıp, kompleks bileşeni de olduğu takdirde ayrılma açıları 0° veya 180° değildir. Bu amaçla k . kutuptaki $\theta(p)_k$ **ayırılma açısını (angle of departure)** hesaplamak için, ilk önce sıfırlardan (zeros) bu noktaya(k . kutuba doğru vektörler çizilir. Bu vektörlerin yapmış olduğu açılar toplamı $\left(\sum_{j=1}^m \theta(z)_j \right)$ olsun. Benzer şekilde kutuplardan (poles) istenilen k . kutba (k th pole) doğru vektörler çizilir. Bu vektörlerin yapmış olduğu açılar toplamı $\sum_{i=1, i \neq k}^n \theta(p)_i$ ifade edilsin.

Buradan,

$$\sum_{j=1}^m (\text{Zeros Angles})_j - \left[\sum_{i=1, i \neq k}^n \theta(\text{Poles Angles})_i + \theta(p)_k \right] = (2 \cdot k + 1) \cdot 180^\circ \text{ olacağından dolayı,}$$

$$\sum_{j=1}^m \theta(z)_j - \left[\sum_{i=1, i \neq k}^n \theta(p)_i + \theta(p)_k \right] = (2 \cdot k + 1) \cdot 180^\circ \quad (8.8)$$

bağıntısı kullanılarak hesaplanır.

Unutulmamalıdır ki, Root-locus kolları her zaman gerçek eksene göre **simetrik**tir.

Ayrıca, **negatif geri beslemeli** sistemlerde, kompleks düzlemin gerçek ekseni üzerinde, **tek kutup (poles) ve/veya sıfırların (zeros) solunda** her zaman **root-loci** mevcuttur.

Vektörün başlangıç noktası ayrılma için, kutup noktası yönü ise sıfır doğrudur.

Verilen bir $s_v = a + j \cdot b$ noktasının root-loci olup olmadığını araştırmak için iki usul vardır.

Birincisi: bu noktaya ilk önce sıfırlardan (zeros) başlayıp bu noktada biten vektörler çizilir ve bütün vektörlerin yapmış olduğu açılar toplamından, kutuplardan (poles) bu noktaya çizilen vektörlerin yapmış olduğu açılar çıkartılır. Elde edilen açı değeri $\pm 180^\circ$ olduğu takdirde bu nokta root-loci noktasıdır. Farklısa, verilen nokta root-loci noktasıdır.

İkincisi: Verilen fonksiyonda s yerine $s_v = a + j \cdot b$ değeri girilir ve sonuçta $F(s) = c + j \cdot d$ gibi bir ifade elde edilir. Bu ifadenin trigonometrik çemberde yaptığı açı $\pm 180^\circ$ ise verilen nokta root-loci noktasıdır. Değilse, değildir.

Root-locusun sanal ekseni kestiği değerleri bulmak için, kararlılık kriterleri olan Routh veya Hurwitz kriteri kullanılır. Bulunan **K kazanç değeri** (Gain factor) discriminant $[\Delta(s) = 0]$ polinomunda yerine yazılıarak kökler bulunur. Bulunan kompleks köklerden sanal ekseni kestiği yer tayin edilmiş olur.

Bir noktadaki K kazanç değeri (Gain Factor) ise, Bu noktadaki büyülüğu (Magnitude) ile ilgilidir.

$$K = \left| \frac{1}{M} \right| \rightarrow M = \frac{\prod(\text{zerolengths})}{\prod(\text{polelengths})} \quad (8.9)$$

denklemi ile hesaplanır.

Kontrol devrelerin analiz ve tasarımda kullanılan bir yöntemdir. Verilen Kontrol devresinde istenilen ayarların bulunmasında kullanılır ve grafik çözümü bir usuldür. Metodun anlaşılabilmesi için bazı temel kavramların bilinmesi gereklidir. Laplace uzayında verilen bir s değişkeni, karmaşık sayılarla da ifade edilebilmektedir. Bunun için s Laplace uzayında verilen bir $F(s)$ fonksiyonun, $s = a + j \cdot b$ deki değerini hesaplamak için,

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (8.10)$$

$F(s)$ fonksiyonunun, herhangi bir $(s = a + j \cdot b)$ noktasındaki şiddeti yani büyülüğu,

$$M = \frac{\prod_{i=1}^m |(s - z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s - p_j)|} = \frac{|(s - z_1)| \cdot |(s - z_2)| \cdots |(s - z_m)|}{|(s - p_1)| \cdot |(s - p_2)| \cdots |(s - p_n)|} \quad (8.11)$$

denklemi ile hesaplanır. Aynı fonksiyonun o noktadaki, (+x) gerçek ekseni ile yapmış olduğu açı,

$$\theta = \sum(\text{zero angels}) - \sum(\text{pole angels})$$

veya,

$$\theta = \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) \quad (8.12)$$

denklemi ile hesaplanabilir. Diğer farklı bir şekilde de büyülüük ve açı hesaplanabilmektedir.

10.1 Negatif geri beslemeli sistemlerde Root Locus Metodu ile Çizim

Mühendislikte karşımıza çıkan birçok mühendislik problemi “Negatif Geri Beslemeli”dir. Çizim için aşağıdaki adımlar takip edilirse, kontrol sistemi daha rahat bir şekilde analiz edilebilir.

1. Adım: Root Locus formunda karakteristik denklemin elde edilmesi: yani $1+K \cdot G(s) = 0$ formuna getirilmesi.

2. Adım: açık döngü halinde kutup (poles: x) ve sıfırların (zeros: o) bulunması: Payı sıfır yapan değerler sıfırları, paydayı sıfır yapan değerlerde kutupları belirler. Bu işlem aşağıdaki gibi denklemler ile gösterilebilir. Transfer fonksiyonu faktöriyel tarzda yazılmalıdır.

$$1 + K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = 0 \rightarrow \prod_{j=1}^n (s - p_j) + K \cdot \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0 \rightarrow \underset{K=0}{(x)} \rightarrow \underset{K=\infty}{(o)}$$

$(K=0)$ olduğunda, aktif terim $\prod_{j=1}^n (s - p_j)$ olmakta ve $(K=\infty)$ olduğunda, aktif terim $\prod_{i=1}^m (s - z_i)$ olmaktadır.

3. Adım: gerçek eksen üzerindeki Locus yerlerinin belirlenmesi: Birçok root-loci yeri gerçek eksen üzerinde bulunmaktadır. Root-locus' un gerçek eksen üzerindeki yeri şu şekilde belirlenir: Gerçek eksen üzerinde, açık döngü kutupları ve sıfırların tek sayılı olanlarının solunda bir nokta alındığında (bu da gerçek eksen üzerinde olmak şartıyla), bu nokta Root locus noktasıdır. Gerçek eksen üzerinde pozitif sonsuzdan başla ve sola doğru orijine yaklaşacak şekilde bir kutup veya sıfırla karşılaşcaya kadar hareket et. Karşılaştıktan sonra kaleminle gerçek eksen üzerinde çizmeye başla ve devam et, ta ki gerçek eksen üzerinde bir kutup veya sıfıra varıncaya kadar. Eğer karşılaşmazsan sonsuza kadar çizilmiş kabul et (yani çiz).

Eğer gerçek eksen üzerinde kutup veya sıfır yok ise, o takdirde gerçek eksen üzerinde root-locus yeri olmayacak demektir.

Bazı sistemlerde gerçek eksen üzerinde aynı noktada birden fazla kutup ve sıfır olabilmektedir. Bu konumda iki farklı durum karşımıza çıkar.

Birincisi: karşılaşılan noktada tek sayılı kutup veya sıfırlar var ise, yapılan çizim bu noktadan itibaren sola doğru devam eder.

İkincisi: karşılaşılan noktada çift sayılı kutup veya sıfırlar var ise, yapılan çizim bu nokta durur ve bu noktadan itibaren sola doğru devam etmez.

Gerçek eksen üzerinde bir yeri işaretlediğinde bu noktanın sağında tek sayılı bir kök var ise, bu nokta locus kısmından bir yerdır, noktadır. Eğer bu noktanın sağında birden fazla kök var ise, bunların tek veya çift sayı olmasına göre durum değişir.

4. Adım: (var ise) asimtotların yerlerinin ve açılarının belirlenmesi: asimtotlar kutupların sonsuza hangi doğrultu boyunca paralel gideceğini belirler. Kutup sayısı (n), sıfır sayısından (m), fazla olan sistemler için, $(n-m)$ kadar kutup sonsuza doğru gider. Bu sayı asimtotların sayısını belirler. Kutup sayısı, sıfır sayısına eşit olduğu takdirde, asimtot bulunmaz. Locus çizgileri kutupta (x) başlar ve sonsuza gitmeden sıfırda (o) biter. Asimtotlar gerçek eksene göre simetiktir. İlk önce asimtotların yeri belirlenir, daha sonra (+x) gerçek eksen ile yaptıkları açı hesaplanarak çizimi yapılır. Bunun ile ilgili denklemler, denklem (8.4) ve (8.5) dir.

5. Adım: (var ise) gerçek eksen üzerindeki ayrılma ve birleşme noktalarının belirlenmesi: iki veya daha fazla loci bir noktada birleştiğinde, bu noktada ayrılma meydana gelir. Genellikle bu nokta gerçek eksen (x ekseni) üzerinde olduğu gibi, bazı durumlarda sanal düzlemede herhangi bir nokta

da olabilir. Her bir ayrılma noktasında K 'nın (Gain) bazı değerleri için çift veya daha fazla kök (root) değeri mevcuttur.

$$1 + K \cdot G(s) = 0 \rightarrow K \cdot G(s) = -1 \rightarrow K = \frac{-1}{G(s)} \rightarrow K = \frac{-1}{\left(\frac{b(s)}{a(s)} \right)} \rightarrow K = -\frac{a(s)}{b(s)}$$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{\left[b(s) \cdot \frac{da(s)}{ds} - a(s) \cdot \frac{db(s)}{ds} \right]}{\left[b(s) \right]^2} = 0$$

K gerçek ve pozitif bir sayı olduğunda bu şart sağlandığı takdirde, bu nokta ayrılma veya birleşme noktasıdır. Hesaplanan nokta kutuplar arasında ise ayrılma, sıfırlar arasında bir değer ise birleşme noktası olduğu anlaşılır.

6. Adım: (var ise) ayrılma ve birleşme açılarının belirlenmesi: Kutup noktası sadece gerçek eksen üzerinde olup sanal bileşeni yok ise, ayrılma açısı ya $(+180^\circ)$ veya (-180°) dir. Fakat gerçek eksen üzerinde herhangi bir nokta olduğu takdirde (yani sanal bileşeni de mevcut), ayrılma açısı (θ_{dep}) aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\theta_{dep} = 180 + \sum_{j=1}^m \theta(z)_j - \sum_{i=1, i \neq k}^n \theta(p)_i$$

Burada;

$\theta(p)_i$: i. kutuptan seçilen kutba doğru bir vektör çizildiğinde, bu vektörün (+x) ekseni ile yapmış olduğu açıdır.

$\theta(z)_j$: j. sıfır (zeros) noktası ile seçilen kutup arasındaki açıdır. Bu da aynı şekilde sıfır noktasından istenen kutba doğru bir vektör çizilir. Bu vektörün (+x) ekseni ile yapmış olduğu açıdır.

Benzer şekilde, sıfır noktaları gerçek eksen üzerinde olmayıp, sanal düzlemede herhangi bir noktada olduğu takdirde, sıfır noktasına gelen birleşme açısı (θ_{arr}) aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\theta_{arr} = 180 + \sum_{i=1, i \neq k}^n \theta(p)_i - \sum_{j=1}^m \theta(z)_j$$

$\theta(p)_i$: i. kutuptan istenen sıfır noktasına doğru bir vektör çizildiğinde, bu vektörün (+x) ekseni ile yapmış olduğu açıdır.

$\theta(z)_j$: j. sıfır noktasından istenen sıfır noktasına doğru bir vektör çizildiğinde, bu vektörün (+x) ekseni ile yapmış olduğu açıdır.

Gerçek eksen üzerindeki tek kutup ve tek sıfırlar simetriden dolayı, her zaman (0°) veya $(+180^\circ)$ derecelik ayrılma veya birleşme açısına sahiptir.

7. Adım: (var ise) sanal ekseni kesen noktanın belirlenmesi: Root-locus' un sanal ekseni kestiği yerde kapalı döngü transfer fonksiyonunda K değeri ucta son değer olarak (marjinal) karalıdır. Bu değeri geçtiğinde Root-locus grafiği sanal düzlemede, sanal eksenin sağ tarafına geçtiği takdirde kapalı döngü transfer fonksiyonu kararsızdır. Bunun için K değeri her zaman sanal eksenin sol

tarafında bulunacak şekilde değer almalıdır. Root-Locus' un sanal eksenin kestiği noktayı tesbit etmek için, üç farklı usülden faydalanyılır.

a) Deneme yanılma ile [trial and error], sayısal analizde öğretilen ikiye bölmeye metodu gibi: Çözüme kompleks düzlemden orijinden başlanır ve sanal eksen üzerinde yukarı doğru aralıklı basamaklarla (discrete step) ileri döngü transfer fonksiyonunun faz açısı (phase angle) hesaplanır.

İki nokta arasında ne zaman faz açısı birisinde (180°) derecen az ve diğer noktada (180°) derecen fazla ise veya tersi olursa, bu iki nokta arasında root-locus mevcuttur. Faz açısının (180°) dereceye

$$G(s) = -\frac{a(s)}{b(s)}$$

eşit olduğu nokta root-locus noktasıdır. Buradan da K değeri hesaplanmış olur. fonksiyonunda s yerine $(s_i = +y_i \cdot j)$ yazılır ve açı hesaplanır. Tekrar s yerine $(s_{i+1} = +y_{i+1} \cdot j)$ yazılır ve açı hesaplanır. Elde edilen açı değerlerinde birisi (180°) dereceden büyük ise diğerini küçük olmalıdır. Böylece aralık küçültüldüğünde Root-locus' un sanal eksenin kestiği yer hesaplanmış olur.

b) Routh-Hurwitz kriterinden faydalanyılır: Sistemi kararsız yapan K değeri hesaplanır ve bu değer kapalı transfer fonksiyonunda yerine yazılır. Buradan determinant değeri sıfır yapan değerden elde edilen sanal kök istenen değerdir. Denklemin mertebesi arttığında bu usul ile çözüm yapmak oldukça sıkıcıdır.

c) Sönümlü doğal frekans (ω_d) ile K kazanç (gain) katsayısını hesaplayarak: Karakteristik denklemde, $(s = +\omega_d \cdot j)$ alınarak hesaba başlanır. Gerçek ve sanal eksen bileşenleri ayrı eşitlikler halinde yazılıp sıfıra eşitlenir. Buradan iki tane denklem elde edilmiş olur. $s = (\zeta \cdot \omega_n) + j \cdot \omega_d$ denkleminden faydalananarak, (ω_d) hesaplanır. Bu değer sanal eksenin kestiği noktadır. Buradan da K değeri hesaplanmış olur.

8. Adım: kalan locus çizgilerinin belirlenmesi: Çözüme açık döngü kutupları çizilerek başlanır. Unutulmamalıdır ki Root locus grafiği gerçek ekene göre her zaman simetiktir. Ve bu grafiğin sanal eksene göre sol kısmı kararlıdır, sağ kısmı ise kararsızdır.

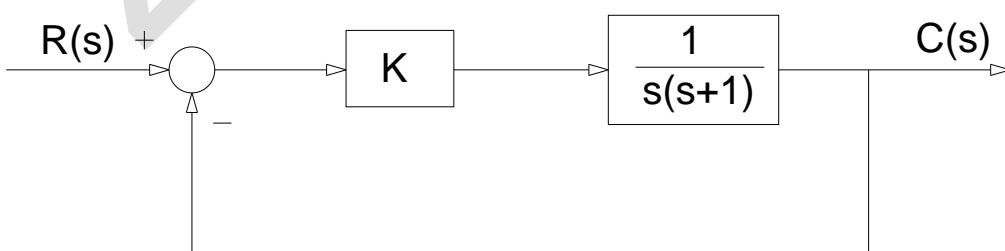
10.1.1 Misal:

Aşağıda verilen negatif geri beslemeli sistemin,

- Root-Locus grafiğini çiziniz.
- Sistemin kararlı olması için K kazanç değeri ne olmalıdır?

Çözüm: sistemin transfer fonksiyonu;

$$TF(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s \cdot (s+1)}}{1 + \frac{K}{s \cdot (s+1)}} \rightarrow TF(s) = \frac{K}{s \cdot (s+1) + K \cdot G(s)}$$



$$TF(s) = \frac{\frac{K}{s \cdot (s+1)}}{1 + K \cdot \left[\frac{1}{s \cdot (s+1)} \right]} \rightarrow G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$$

Buradan kutupların $(p_{1,2} = 0, -1)$ olduğu görülür.

Bu iki kutup arasında ayrılma noktası olacaktır. Bu da iki şekilde hesaplanabilir.

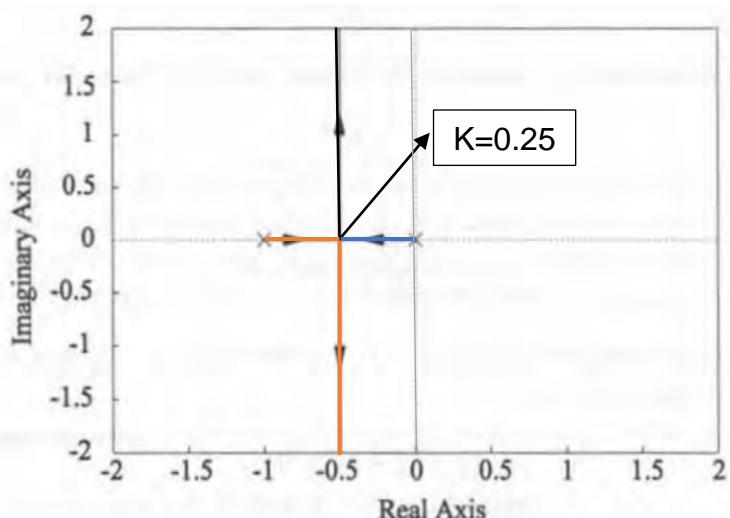
$$\frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s^2 + s} \right] = \frac{0 \cdot (s^2 + s) - (2 \cdot s + 1) \cdot 1}{(s^2 + s)^2} \rightarrow \frac{dK}{ds} = \frac{-2 \cdot s - 1}{(s^2 + s)^2} \cdot (s^2 + s)^2 = 0 \cdot (s^2 + s)^2 \rightarrow -2 \cdot s - 1 = 0$$

$\left(s = -\frac{1}{2} \right)$ noktası, ayrılma noktasıdır. $(s=0)$ ve $(s=-1)$ noktasında kazanç değeri $(K=0)$ dır.

$$M = G(s) \Big|_{s=-0.5} = \frac{1}{-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)} \rightarrow M = -4 \rightarrow K = \left| \frac{1}{M} \right| = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

Ayrılma noktasında K değeri;

Root-Locus noktası sanal düzlemin tamamen sol tarafında olduğundan, $(K > 0)$ için sistem kararlıdır. Grafiği aşağıda verilmiştir.



10.1.2 Misal:

$F(s) = \frac{(s+1)}{s \cdot (s+2)}$ ile verilen fonksiyonun $(s = -3 + 4 \cdot j)$ deki şiddetini (büyüklüğünü) ve açısını, karmaşık düzlemede hesaplayınız.

Çözüm 1: $(s = -3 + 4 \cdot j)$ değeri, $F(s)$ fonksiyonunda yerine yazıldığında,

$$F(s) = \frac{(s+1)}{s \cdot (s+2)} \rightarrow F(s) = \frac{((-3+4 \cdot j)+1)}{(-3+4 \cdot j) \cdot ((-3+4 \cdot j)+2)} \rightarrow F(s) = \frac{-2+4 \cdot j}{-13-16 \cdot j}$$

Karmaşık sayılarla bölme yapabilmek için paydanın eşleniği ile her iki taraf çarpılır. Böylece,

$$F(s) = \frac{(-2+4 \cdot j) \cdot (-13+16 \cdot j)}{(-13-16 \cdot j) \cdot (-13+16 \cdot j)} \rightarrow F(s) = \frac{38+84 \cdot j}{13^2+16^2} = \frac{38+84 \cdot j}{425} \rightarrow F(s) = -\frac{38}{425} - \frac{84}{425} \cdot j$$

Eldeilen bu sayı,

$$F(s) = \sqrt{\left(-\frac{38}{425}\right)^2 + \left(-\frac{84}{425}\right)^2} \cdot \angle \tan^{-1}\left(-\frac{84}{425}, -\frac{38}{425}\right)$$

tarzında da ifade edilebileceğinden,

$$F(s) = 2 \frac{\sqrt{85}}{85} \angle \tan^{-1}(-42, -19) \quad (8.13)$$

$$F(s) = 0.2169304578 \angle \theta = -114.3410899^\circ$$

olarak hesaplanır. Aynı işlemler aşağıdaki şekilde de yapılabilir.

$$\theta = \sum_{i=1}^m \angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s+p_j), \quad (z_1 = -1, p_1 = 0, p_2 = -2)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^1 \angle(-3+4 \cdot i - 1) - \sum_{j=1}^2 \angle(-3+4 \cdot i + p_j) \Rightarrow \theta = [(-3+4 \cdot i + 1)] - [(-3+4 \cdot i + 0) + (-3+4 \cdot i + 2)]$$

$$\theta = [(-2+4 \cdot i)] - [(-3+4 \cdot i) + (-1+4 \cdot i)] \Rightarrow \theta = [116.5650512^\circ] - [(126.8698976^\circ) + (104.0362435^\circ)]$$

$$\theta = -114.3410899^\circ$$

benzer şekilde büyüklüğü de,

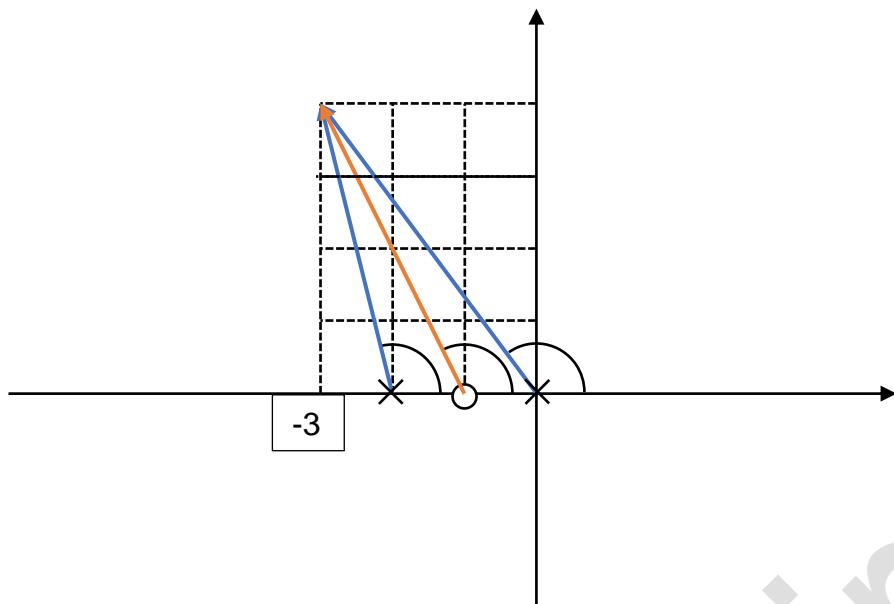
$$M = \frac{\prod_{i=1}^m |(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s-p_j)|} = \frac{|(s-z_1)| \cdot |(s-z_2)| \cdots |(s-z_m)|}{|(s-p_1)| \cdot |(s-p_2)| \cdots |(s-p_n)|} \text{ denklemi yardımıyla hesaplanabilir.}$$

$$M = \frac{\prod_{i=1}^1 |(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^2 |(s-p_j)|} = \frac{|(s-z_1)|}{|(s-p_1)| \cdot |(s-p_2)|} = \frac{|(s+1)|}{|(s-0)| \cdot |(s+2)|} = \frac{|(-3+4 \cdot i + 1)|}{|(-3+4 \cdot i + 0)| \cdot |(-3+4 \cdot i + 2)|}$$

$$M = \frac{|(-2+4 \cdot i)|}{|(-3+4 \cdot i)| \cdot |(-1+4 \cdot i)|} = \frac{|2\sqrt{5}|}{|5| \cdot |\sqrt{17}|} = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{17}} = 0.2169304577$$

$$M = 0.2169304577 \text{ şeklinde büyüklüğü elde edilebilir.}$$

Çözüm 2: Aynı sonuçlar vektör çizerek de hesaplanabilir. $s = -3 + 4 \cdot j$



$$\theta(s) = \sum_{j=1}^m \theta(z)_j - \sum_{i=1}^n \theta(p)_i \rightarrow s = -3 + 4 \cdot j \rightarrow \theta(s) = \theta(z)_1 - [\theta(p)_1 + \theta(p)_2]$$

$$\theta(z)_1 = \text{atan2}(y, x) = \text{atan2}(4, -2) = 116.57^\circ, \theta(p)_1 = \text{atan2}(y, x) = \text{atan2}(4, -3) = 126.87^\circ$$

$\theta(p)_2 = \text{atan2}(y, x) = \text{atan2}(4, -1) = 104.04^\circ$, Bu değerler yerine yazıldığında;

$$\theta(s) = \theta(z)_1 - [\theta(p)_1 + \theta(p)_2] \rightarrow \theta(s) = 116.57^\circ - [126.87^\circ + 104.04^\circ] \rightarrow \boxed{\theta(s) = -114.34^\circ}$$

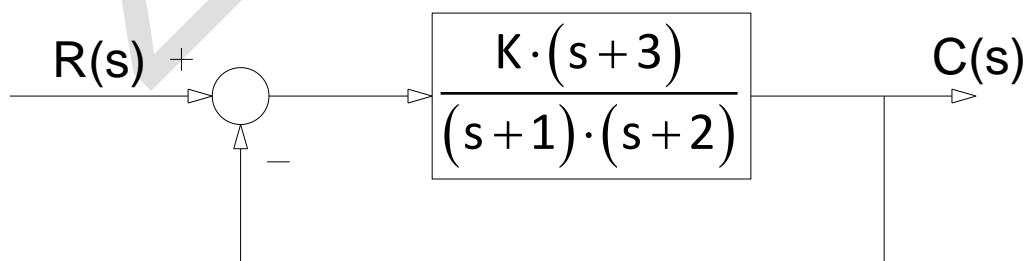
Büyüklüğü de benzer şekilde hesaplanabilir. Sıfır ve kutup noktalarından istenilen noktaya vektör çizilir ve bu vektörlerin boyu hesaplanarak aynı sonuçlar elde edilir.

$$M = \frac{\prod_{i=1}^1 |(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^2 |(s-p_j)|} = \frac{|(s-z_1)|}{|(s-p_1)| \cdot |(s-p_2)|} \rightarrow M = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 4^2}} \rightarrow M = \frac{\sqrt{20}}{5 \cdot \sqrt{17}} \rightarrow \boxed{M = 0.2169304577}$$

10.1.3 Misal:

Aşağıda verilen sistemde,

1. Ayrılma (Break-away) ve/veya birleşme (break-in) noktaları var ise hesaplayınız.
2. Ayrılma (Break-away) olan yerde Kazanç değeri (K) ve doğal frekans (ω_n) değeri ile verilen fonksiyonun $s = -3 + i \cdot 4$ deki şiddetini (büyüklüğünü) ve açısını, karmaşık düzlemede hesaplayınız.



Çözüm: Ayrılma ve birleşme noktaları iki farklı şekilde hesaplanabilir.

$$\frac{d}{ds} [G(s)] = \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+3)}{(s+1) \cdot (s+2)} \right] \rightarrow \frac{d}{ds} [G(s)] = -\frac{s^2 + 6 \cdot s + 7}{(s+1)^2 \cdot (s+2)^2} \rightarrow s^2 + 6 \cdot s + 7 = 0$$

Buradan denklemi kökleri olarak,

$$s_{1,2} = -3 \mp \sqrt{2} = [-4.414213562, -1.585786438] \text{ olduğu görülür.}$$

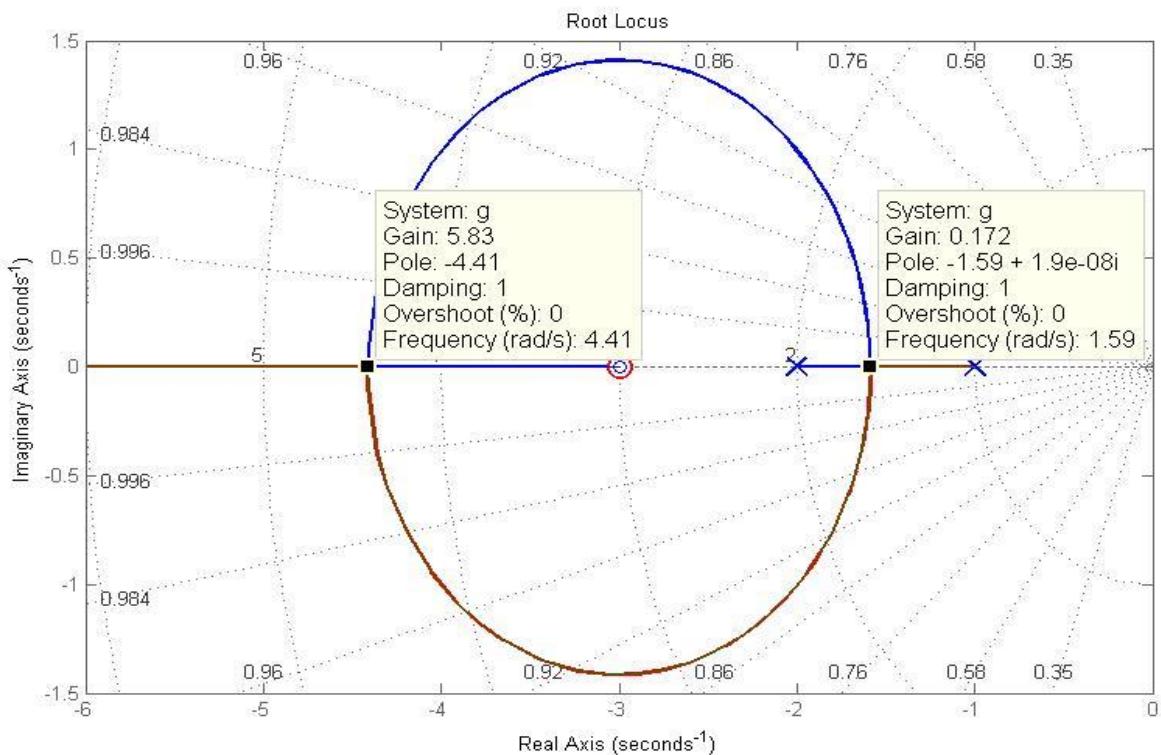
Köklerden -1.585786438 değeri ayrılma noktasıdır ve -4.4142 değeri ise birleşme noktasıdır.

Ayrılma olan yerde kazanç değeri K yi bulmak için, $G(s) = \frac{(s+3)}{(s+1) \cdot (s+2)}$ denkleminde s görülen yere,

$$s = -1.585786438 \text{ değeri yazılıarak hesaplanır. } M = \frac{(-1.585786438 + 3)}{(-1.585786438 + 1) \cdot (-1.585786438 + 2)}$$

$M = -5.828427124$ olarak bulunur. kazanç değeri için,

$$K = \frac{1}{|M|} = \frac{1}{|-5.828427124|} \rightarrow K = 0.1715728753 \text{ olduğu görülür.}$$



Doğal frekansı s değerinin büyüklüğü olduğundan dolayı,

$$s_1 = a + i \cdot b, \quad \omega_n = \sqrt{(a)^2 + (b)^2} = \sqrt{(-1.585786438)^2 + (0.0)^2} \rightarrow \omega_n = 1.585786438 \text{ rad/s} \text{ dir}$$

Sistemin root-locus grafiği yukarıda verilmiştir.

10.1.4 Misal:

Yukarıdaki verilen Misal 10.1.4 de s değerlerinden, $(s_1 = -1.6252 + 0.3306 \cdot j)$ ve $(s_2 = -1.6252 + 1.3060 \cdot j)$ için hangisinin root-locus noktası olup olmadığını önce ayrı ayrı test ediniz ve doğru olanı için sökütleme katsayısını (ζ) ve sökütlemelii doğal frekansı (ω_d) hesaplayınız

$G(s)$ fonksiyonunda s görülen yere $s_1 = -1.6252 + 0.3306 \cdot j$ değeri yazılır sonuçta çıkan açı değeri ($\theta \approx \mp 180^\circ$) olduğu takdirde bu nokta root-locus noktasıdır. Bunun için,

$$s_1 = -1.6252 + 0.3306 \cdot j, \quad G(s_1) = \frac{(s_1 + 3)}{(s_1 + 1) \cdot (s_1 + 2)}$$

$$G(s_1) = \frac{(-1.6252 + 0.3306 \cdot j + 3)}{(-1.6252 + 0.3306 \cdot j + 1) \cdot (-1.6252 + 0.3306 \cdot j + 2)} = -4.000515143 + \underbrace{0.001663472642 \cdot j}_{\approx 0}$$

Çıkan sonuçtan dolayı verilen nokta root-locus noktasıdır.

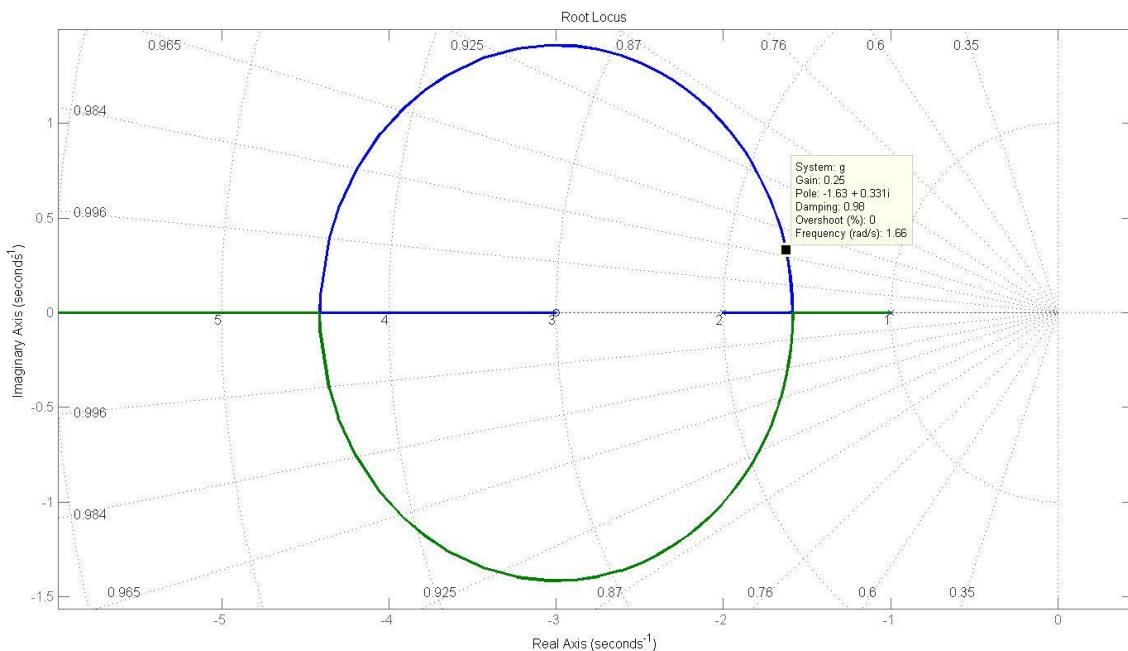
Aynı işlemler $s_2 = -1.6252 + 1.3060 \cdot j$ değeri için yapıldığında,

$$s_2 = -1.6252 + 1.3060 \cdot j, \quad G(s_2) = \frac{(s_2 + 3)}{(s_2 + 1) \cdot (s_2 + 2)}$$

$$G(s_2) = \frac{(-1.6252 + 1.3060 \cdot j + 3)}{(-1.6252 + 1.3060 \cdot j + 1) \cdot (-1.6252 + 1.3060 \cdot j + 2)} = -0.7994408425 - 0.5384463701 \cdot j$$

Gördüğü gibi çıkan sayı trigonometrik çemberin 3. bölgesindedir. root-locus noktası değildir. Doğru olanı için söküme katsayısı aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\theta = \text{atan}2(y, x) = \text{atan}2(0.3306, -1.6252) \rightarrow \theta = 2.940909732 \text{ rad}$$



$$\zeta = |\cos(\theta)| = |\cos(2.940909732)| \rightarrow \zeta = 0.9799306737$$

$$s_1 = a + j \cdot b, \quad \omega_n = \sqrt{(a)^2 + (b)^2} \quad \rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{(-1.6252)^2 + (0.3306)^2} \quad \rightarrow \quad \omega_n = 1.658484670 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \rightarrow \omega_d = 1.658484670 \cdot \sqrt{1 - 0.9799306737^2} \rightarrow \omega_d = 0.3306 \text{ rad/s}$$

olduğu görülür. Matlab ile elde edilen sonuçlar da yukarıdaki grafikte verilmiştir.

10.1.5 Misal:

$F(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+6)}$ ile verilen fonksiyonun ($s = -7 + 9j$) deki şiddetini (büyüklüğünü) ve açısını, karmaşık düzlemede hesaplayınız.

Çözüm: ($s = -7 + 9j$) değeri, $F(s)$ fonksiyonunda yerine yazıldığında,

$$F(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+6)} \rightarrow F(s) = \frac{(-7+9j+2)(-7+9j+4)}{(-7+9j)(-7+9j+3)(-7+9j+6)}$$

$$F(s) = \frac{(-5+9j)(-3+9j)}{(-7+9j)(-4+9j)(-1+9j)} \rightarrow F(s) = \frac{-66+72i}{944-378i} = \frac{(-66+72j)(944+378j)}{(944-378j)(944+378j)}$$

$$F(s) = \frac{(-66+72j)(944+378j)}{944^2+378^2} = -\frac{8772}{258505} - \frac{23229}{258505}j$$

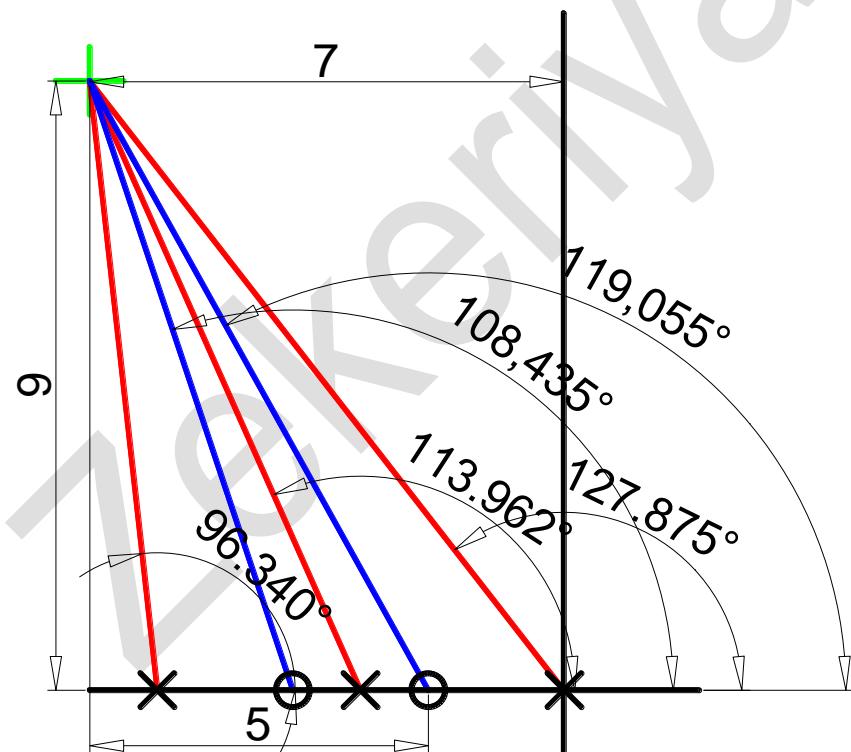
$$F(s) = -0.03393357962 - 0.08985899692j$$

Elde edilen bu sayıdan büyülüük ve açı kolaylıkla hesaplanabilir.,

$$|F(s)| = M \angle \theta = \sqrt{\left(\frac{-8772}{258505}\right)^2 + \left(\frac{-23229}{258505}\right)^2} \cdot \angle \tan^{-1}\left(\frac{-23229}{258505}, \frac{-8772}{258505}\right)$$

$$F(s) = 0.09605273 \angle -110.688111449587^\circ$$

Aynı sonuçlar vektör çizerek de elde edilebilir.



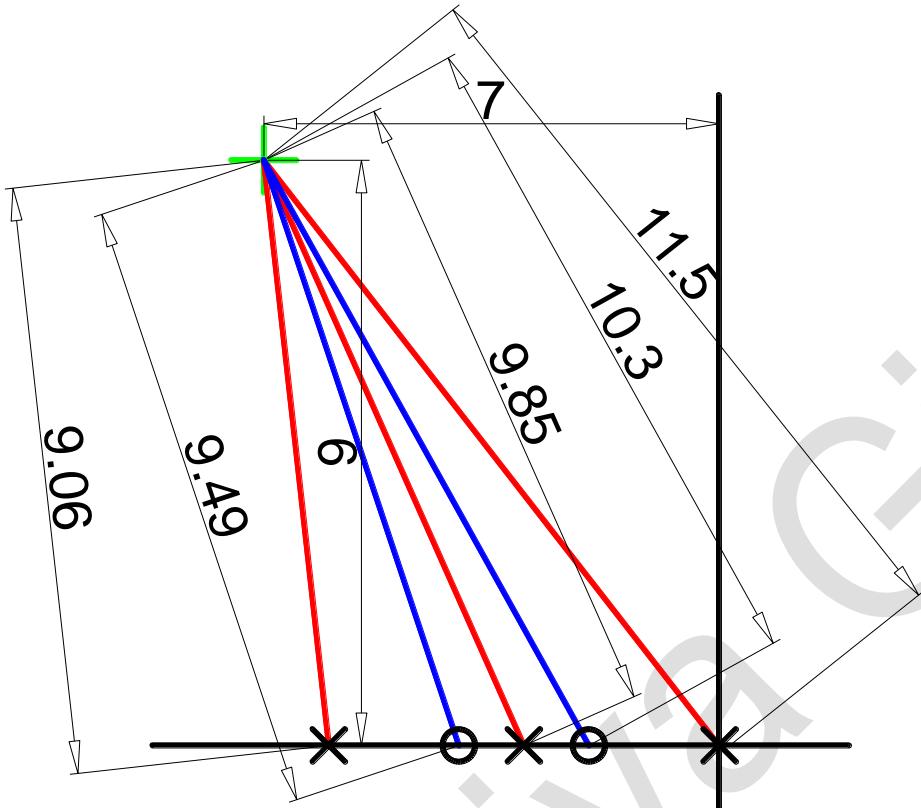
$$\theta(s) = \sum_{j=1}^2 \theta(z)_j - \sum_{i=1}^3 \theta(p)_i \rightarrow \theta(s) = [\theta(z)_1 + \theta(z)_2] - [\theta(p)_1 + \theta(p)_2 + \theta(p)_3]$$

$$\theta(z)_1 = \text{atan2}(y, x) = \text{atan2}(9, -5) = 119.055^\circ, \quad \theta(z)_2 = \text{atan2}(y, x) = \text{atan2}(9, -8) = 108.435^\circ$$

$$\theta(p)_1 = \text{atan}2(y, x) = \text{atan}2(9, -7) = 127.875^\circ, \theta(p)_2 = \text{atan}2(y, x) = \text{atan}2(9, -4) = 113.962^\circ$$

$\theta(p)_3 = \text{atan}2(y, x) = \text{atan}2(9, -1) = 96.340^\circ$, Bu değerler yerine yazıldığında;

$$\theta(s) = [108.435^\circ + 113.962^\circ] - [127.875^\circ + 113.962^\circ + 96.340^\circ] \rightarrow \boxed{\theta(s) = -110.688^\circ}$$



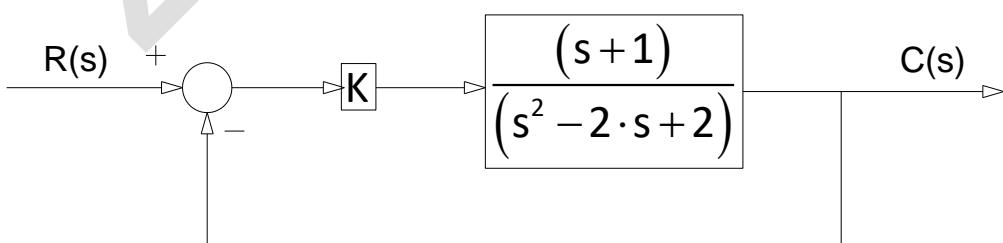
Büyüklüğü de benzer şekilde hesaplanabilir. Sıfır ve kutup noktalarından istenilen noktaya vektör çizilir ve bu vektörlerin boyu hesaplanarak aynı sonuçlar elde edilir.

$$M = \frac{\prod_{i=1}^2 |(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^3 |(s-p_j)|} = \frac{|(s-p_1)| \cdot |(s-p_2)|}{|(s-p_1)| \cdot |(s-p_2)| \cdot |(s-p_3)|} \rightarrow M = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (+9)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (+9)^2}}{\sqrt{(-7)^2 + (+9)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (+9)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (+9)^2}} \rightarrow$$

$$M = \frac{\sqrt{106} \cdot \sqrt{90}}{\sqrt{130} \cdot \sqrt{97} \cdot \sqrt{82}} \rightarrow \boxed{M = 0.09605273} \text{ olarak aynı sonuçlar elde edilir.}$$

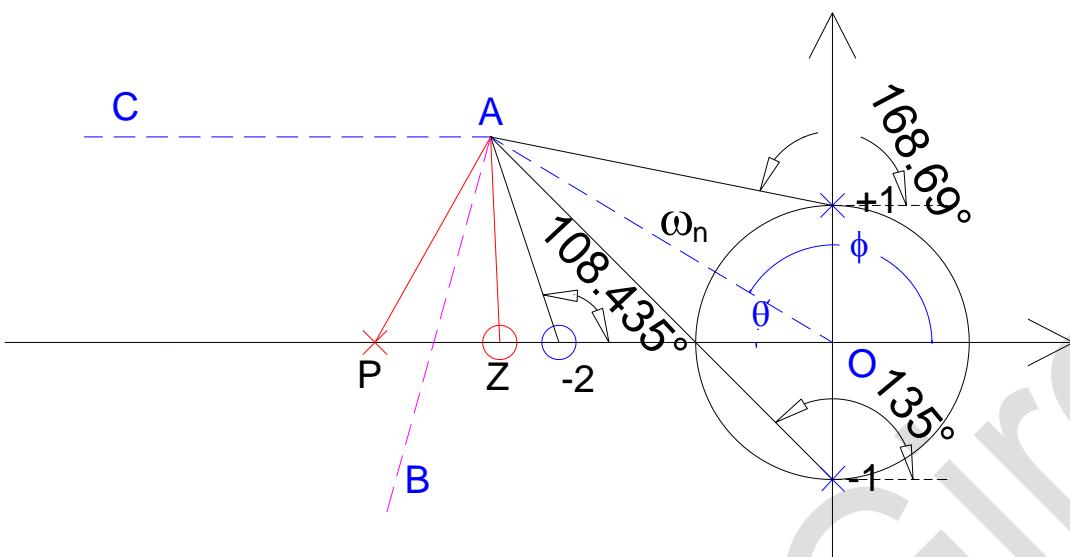
10.1.6 Misal:

Aşağıda verilen kontrol devresinde var ise ayrılma ve/veya birleşme açılarını,



ayrılma ve/veya birleşme noktalarını ve sistemin kararlı olması için **K** ne olmalıdır, hesaplayınız.

Çözüm: verilen ($s = -2.5 + 1.5 \cdot j$) noktası ve diğer sıfır ve pole değerleri kompleks düzlemede yerleştirilir. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1.5}{2.5}\right) \rightarrow \theta = 30.963756532073521^\circ \rightarrow \phi = 149.03624346792648^\circ$



. Root-Locus açı özelliği kullanıldığında,

$$\left[\sum_{j=1, j \neq c}^m (\text{Zeros Angles})_j + \theta_z \right] - \left[\sum_{i=1, i \neq c}^n \theta (\text{Poles Angles})_i + \theta_p \right] = \mp 180^\circ$$

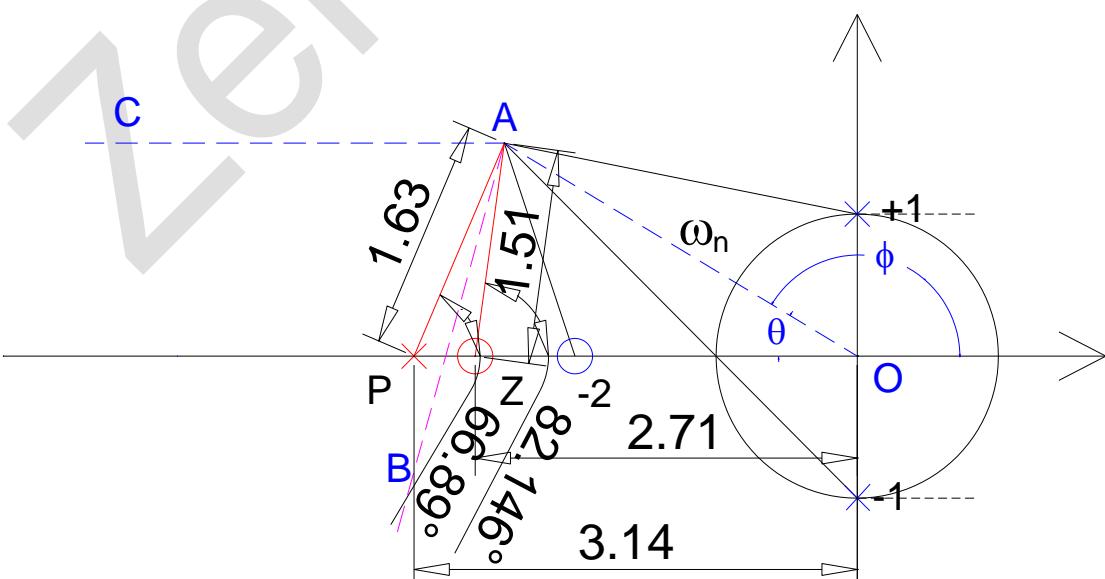
$$[\theta z_1 + \theta_z] - [\theta p_1 + \theta p_2 + \theta_p] = +180^\circ$$

$$[108.435 + \theta_z] - [135 + 168.69 + \theta_p] = +180^\circ$$

$$\theta_z - \theta_p = -108.435 + 303.69 + 180^\circ \rightarrow \theta_z - \theta_p = 375.255$$

$$\theta_z - \theta_p = 375.255 - 360 \rightarrow \theta_z - \theta_p = 15.255^\circ \rightarrow \theta_z - \theta_p = \alpha = 15.255^\circ$$

$$\text{PAZ} = \boxed{\alpha = 15.255^\circ} \rightarrow \boxed{\text{BAO} = \frac{\phi}{2} = 74.5181217339632^\circ} \rightarrow \boxed{\text{PAB} = \frac{\alpha}{2} = 7.6275593515289^\circ}$$



Yukarıdaki şekildeki gibi (PAO) üçgeni göz önüne alındığında;

$$POA = \theta = 30.963756532073521^\circ$$

$$PAO = \frac{\phi + \alpha}{2} = \frac{149.03624346792648 + 15.255118703057796}{2} \rightarrow PAO = 82.146^\circ$$

Bir üçgenin iç açıları toplamı (180°) olduğundan dolayı, hesaplanması gereken (θ_p) açısı bu özellikten dolayı kolaylıkla bulunur.

(PAO) üçgeninin iç açıları toplamı;

$$\theta_p + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\phi}{2} \right) + \theta = 180^\circ \rightarrow \theta_p + (PAO) + \theta = 180^\circ \rightarrow \theta_p = 180^\circ - \theta - (PAO)$$

$$\theta_p = 180^\circ - (82.146 + 30.964)$$

$$\theta_p = 66.890562382434339^\circ$$

Buradan pole değerinin gerçek eksen üzerindeki yerini belirlemek için ilk önce ($p = \overline{PA}$) uzunluğu hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$\sin(\theta_p) = \frac{b}{\overline{PA}} = \frac{b}{p} \rightarrow p = \frac{b}{\sin(\theta_p)} \rightarrow p = \frac{1.5}{\sin(66.890562382434339^\circ)} \rightarrow p = 1.6308657919775447$$

$$p_c = -p \cdot \cos(\theta_p) + a \rightarrow p_c = -3.1400962673243331 \text{ olduğu görülür.}$$

(PAZ) üçgeni dikkate alındığında;

$$\theta_z = \theta_p + \alpha \rightarrow \theta_z = 66.890562382434339^\circ + 15.255118703057796^\circ$$

$$\theta_z = 82.145681085492143^\circ \text{ olarak hesaplanır.}$$

Buradan zero değerinin gerçek eksen üzerindeki yerini belirlemek için ilk önce ($z = \overline{ZA}$) uzunluğu hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$\sin(\theta_z) = \frac{b}{\overline{ZA}} = \frac{b}{z} \rightarrow z = \frac{b}{\sin(\theta_z)} \rightarrow z = \frac{1.5}{\sin(82.145681085492143^\circ)} \rightarrow z = 1.5142051660844245$$

$$z_c = -z \cdot \cos(\theta_z) + a \rightarrow z_c = -2.7069233795315535$$

olduğu görülür.

Tüm uzunluklar bilindiğinden dolayı, Kazanç değeri (K_c) kolaylıkla hesaplanır.

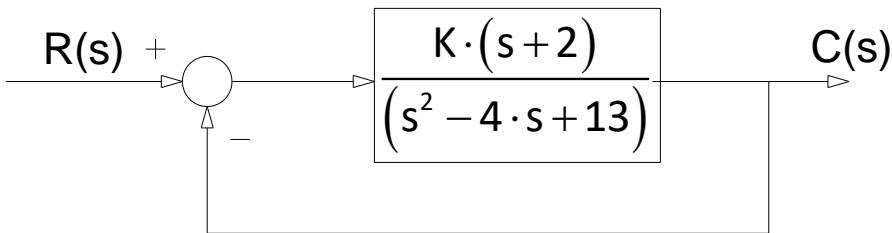
$$K_c = \frac{\prod_{i=1}^3 \text{poles}}{\prod_{i=1}^2 \text{zeros}} \rightarrow K_c = \frac{(p_1) \cdot (p_2) \cdot (p)}{(z_1) \cdot (z)}$$

$$K_c = \frac{(3.5355339059327378) \cdot (2.5495097567963922) \cdot (1.6308657919775447)}{(1.5811388300841898) \cdot (1.5142051660844245)}$$

$$K_c = 6.1400962673243322 \text{ kazanç değeridir.}$$

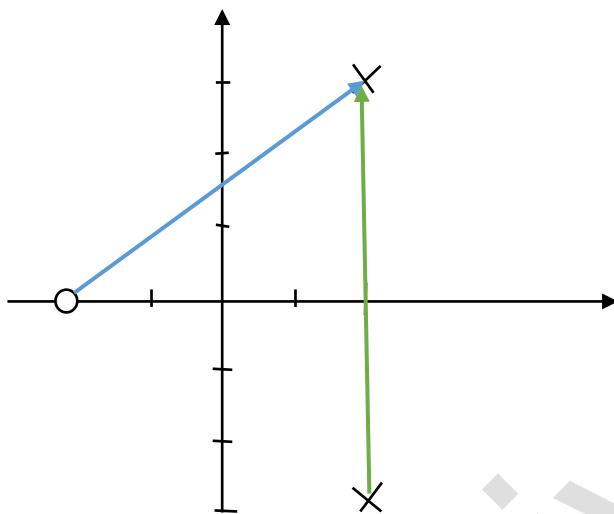
10.1.7 Misal:

Aşağıda verilen negatif geri beslemeli sistemde ayrılma açılarını (Departure Angles) hesaplayınız.



Çözüm: $s^2 - 4 \cdot s + 13 = 0 \rightarrow s_{1,2} = 2 \mp 3 \cdot j$ olduğu görülmür. Ayrıca, $s = -2$ de zeros vardır.

$$G(s) = \frac{(s+2)}{s^2 - 4 \cdot s + 13} \rightarrow \text{Transfer fonksiyonu; } TF = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} \text{ şeklindedir.}$$

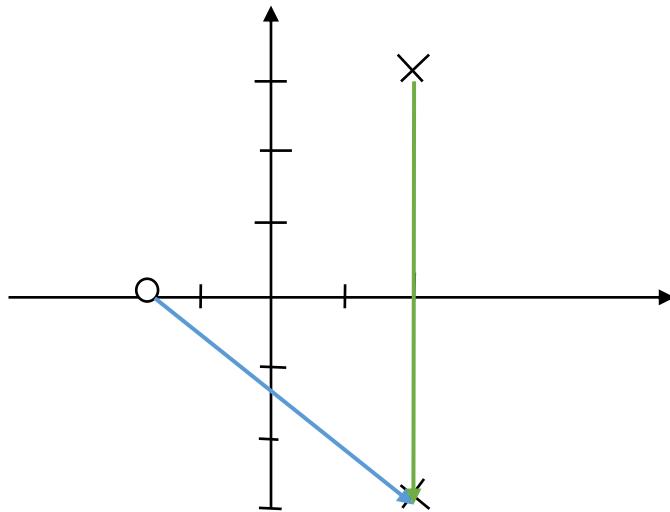


Ayrılma açılarının hesaplanabilmesi için, $\left[\sum_{i=1, i \neq k}^n \theta(p)_i + \theta(p)_k \right] - \sum_{j=1}^m \theta(z)_j = (2 \cdot k + 1) \cdot 180^\circ$ denklemi

veya $\theta_{dep} = 180 + \sum_{j=1}^m \theta(z)_j - \sum_{i=1, i \neq k}^n \theta(p)_i$ denklemi kullanılabilir.

$$\theta_{dep} = 180 + \sum_{j=1}^1 \theta(z)_j - \sum_{i=1}^1 \theta(p)_i \rightarrow \theta_{dep} = 180^\circ + \theta(z)_1 - \theta(p)_1 \rightarrow \boxed{\theta(p)_1 = +90^\circ}$$

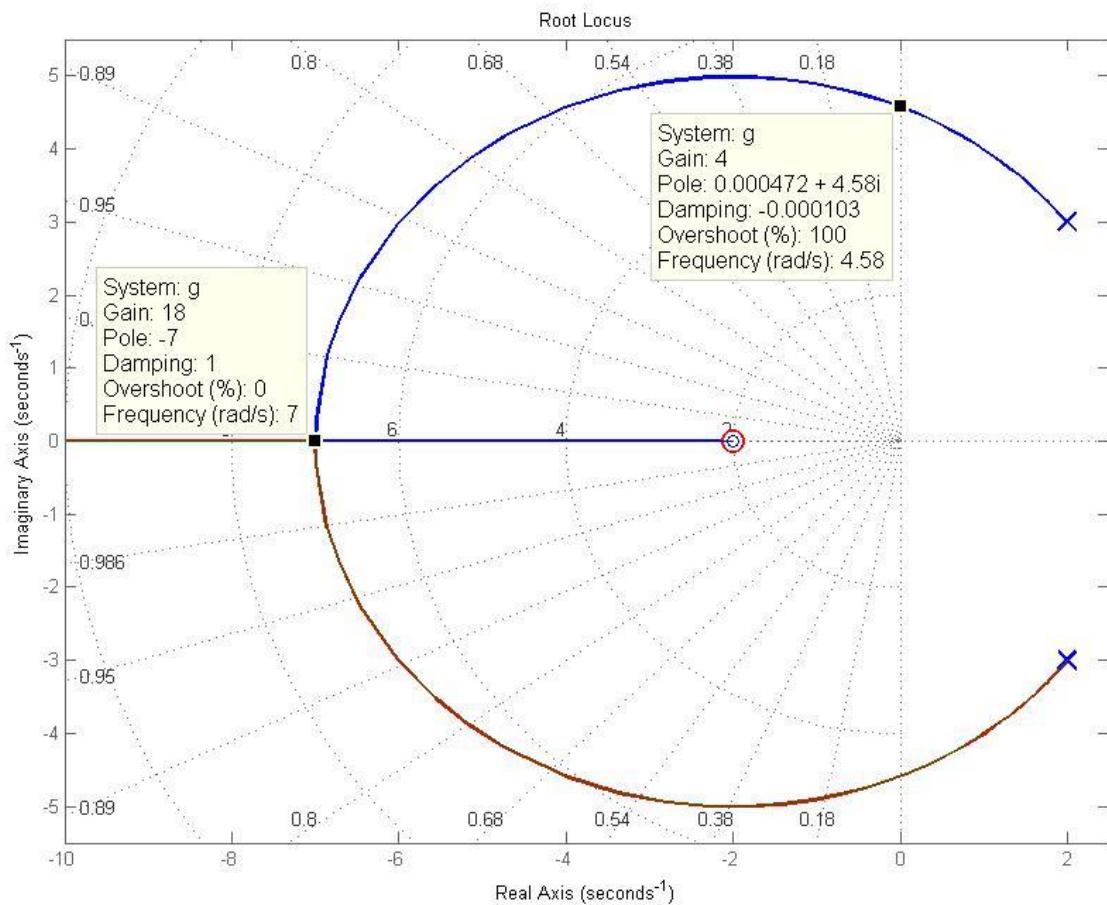
$$\theta(z)_1 = \text{atan}2(y, x) = \text{atan}2(3, 4) = 36.87^\circ \rightarrow \theta_{dep} = 180^\circ + 36.87^\circ - 90^\circ \rightarrow \boxed{\theta_{dep} = 126.87^\circ}$$



$$\theta_{\text{dep}} = 180 + \sum_{j=1}^1 \theta(z)_j - \sum_{i=1}^1 \theta(p)_i \rightarrow \theta_{\text{dep}} = 180^\circ + \theta(z)_1 - \theta(p)_1 \rightarrow \theta(p)_1 = -90^\circ$$

$$\theta(z)_1 = \text{atan2}(y, x) = \text{atan2}(-3, 4) = -36.87^\circ \rightarrow \theta_{\text{dep}} = 180^\circ + (-36.87^\circ) - (-90^\circ)$$

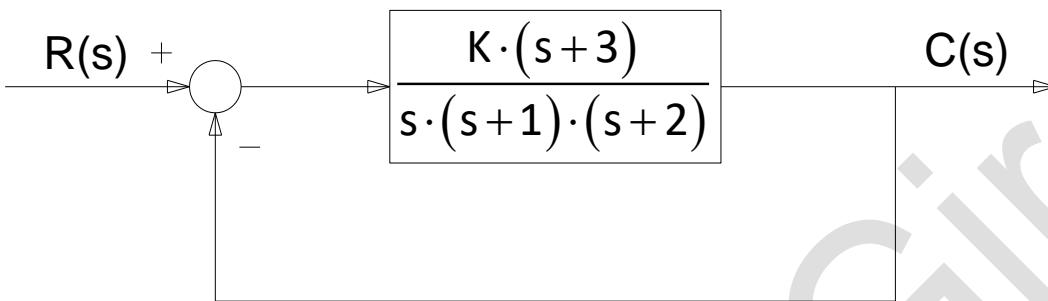
$\theta_{\text{dep}} = 180 - 36.87 + 90 \rightarrow \boxed{\theta_{\text{dep}} = -126.87^\circ}$ olarak hesaplanır. Açılar yazılırken, her zaman (+x) ekseninden itibaren açı değerleri yazılmalıdır.



10.1.8 Misal:

Aşağıda verilen negatif geri beslemeli sistemde,

1. Ayrılma ve birleşme noktalarını hesaplayınız.
2. Asimtotların yeri ve açılarını hesaplayınız.
3. ($s = -0.277 + 1.85 \cdot j$) ile verilen nokta Root-locus noktası mıdır? Hesaplayınız.
4. Eğer Root-locus noktası ise bu noktadaki, kazanç değerini, doğal frekansı, söküMLEME katsayısını, söküMLEMELİ frekansı, yükselme zamanını, ayarlama süresini ve maksimum aşma değerini hesaplayınız.



Çözüm:

1 poles=[0,-1,-2] olduğundan ayrılma noktası vardır. fakat zeros sadece tek bir nokta olduğundan birleşme yoktur.

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+3)}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2)} \right] = 0 \rightarrow -2 \cdot \frac{s^3 + 6s^2 + 9s + 3}{s^2 (s+1)^2 (s+2)^2} = 0 \rightarrow s^3 + 6s^2 + 9s + 3 = 0$$

$$s_{1,2,3} = -0.467911113762044, -1.65270364466614, -3.87938524157182$$

olduğu görülür ve $s = -1.65270364466614$ noktası, ayrılma noktasıdır.

2. Asimtotların yeri, $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$ denklemi ile bulunur.

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^3 p_i - \sum_{j=1}^1 z_j}{3-1} = \frac{(0-1-2)-(-3)}{2} = \frac{(-3)+3}{2} = 0$$

Yani $s=0$ noktasında asimtotlar vardır ve gerçek eksen ile yapmış oldukları açılar,

$$\theta_a = \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot 180^\circ}{n-m}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1) \rightarrow \theta_a = \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot 180^\circ}{3-1}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 3-1-1)$$

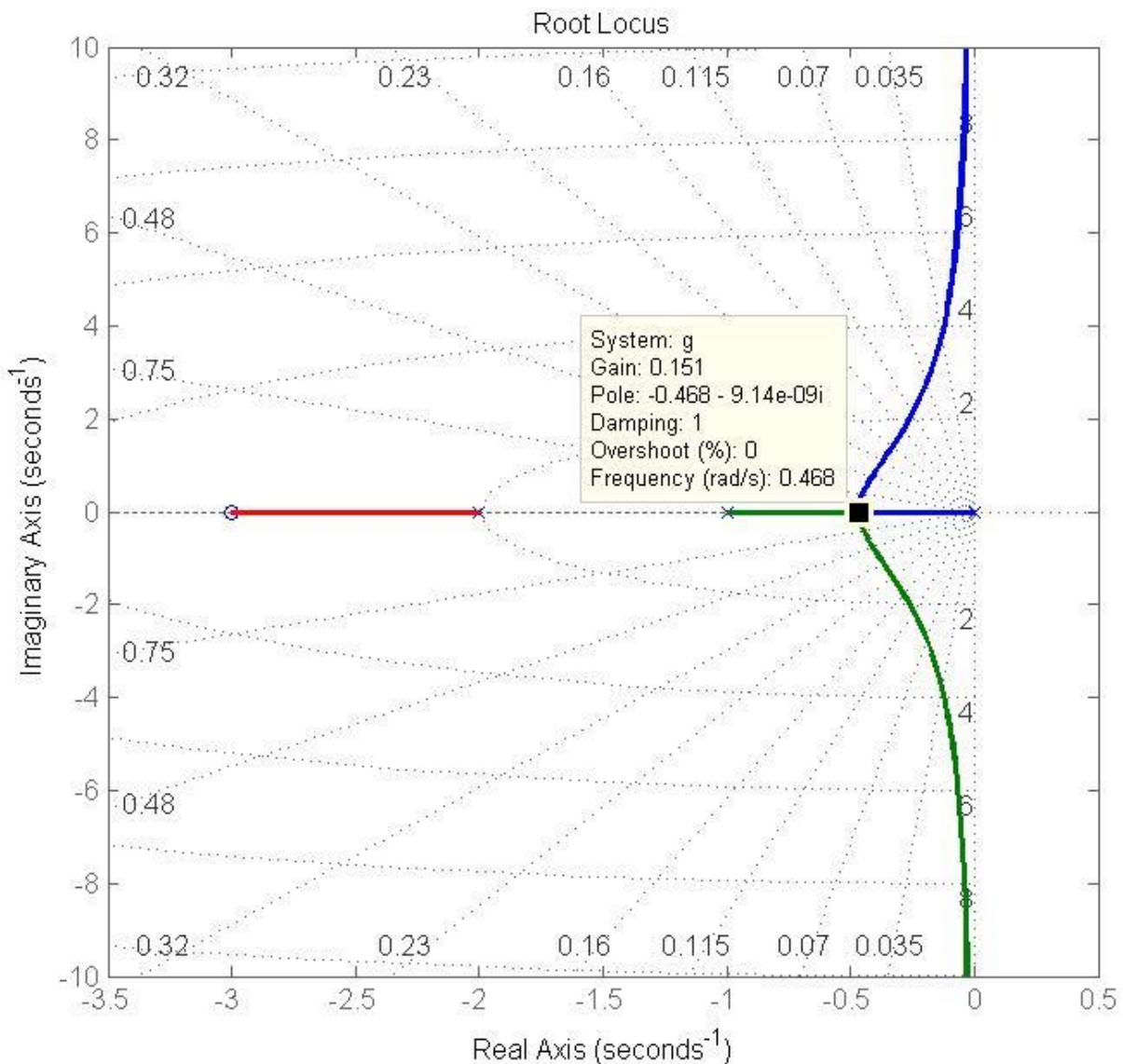
$$\theta_a = \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot 180^\circ}{3-1}, \quad (k = 0, 1) \rightarrow \theta_a = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ, \quad (k = 0) \text{ ve } \theta_a = \frac{3 \cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ, \quad (k = 1)$$

3. ($s = -0.277 + 1.85 \cdot j$) ile verilen nokta, root-locus noktasıdır. Çünkü bu noktadaki açı değeri yaklaşık 180 derecedir. Bu değer,

$F(s) = \frac{(s+3)}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2)}$ denkleminde s görülen yere ($s = -0.277 + 1.85 \cdot j$) yazıldığında,

$$f(s) = \frac{(2.723 + 1.85 \cdot j)}{(-7.768469433 - 5.28047905 \cdot j)} = \frac{(2.723 + 1.85 \cdot j) \cdot (-7.768469433 + 5.28047905 \cdot j)}{(-7.768469433 - 5.28047905 \cdot j) \cdot (-7.768469433 + 5.28047905 \cdot j)}$$

$f(s) = -0.3504649846 + 0.0008019716067 \cdot j \rightarrow \theta \approx 180^\circ$ ve dolayısıyla, verilen noktanın root-locus olduğu görülür. Aynı değerler vektör çizimi ile de hesaplanabilir.



Şekil 10-3: Ayrılma noktası değerinin matlab ile gösterimi

$$M = \sqrt{(-0.3504649846)^2 + (+0.0008019716067)^2} = 0.3504649937$$

Bu noktadaki kazanç değeri K (gain factor) aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$K = \frac{1}{M} = \frac{1}{0.3504649937} = 2.853352027$$

Doğal frekans değeri,

$$\omega_n = \sqrt{(-0.277)^2 + (1.85)^2} = 1.870570666 \text{ rad/s}$$

Sönümleme katsayısı ζ ,

$$\theta = \text{atan2}(y, x) \rightarrow \theta = \text{atan2}(1.85, -0.277) \rightarrow \theta = 98.50958566^\circ$$

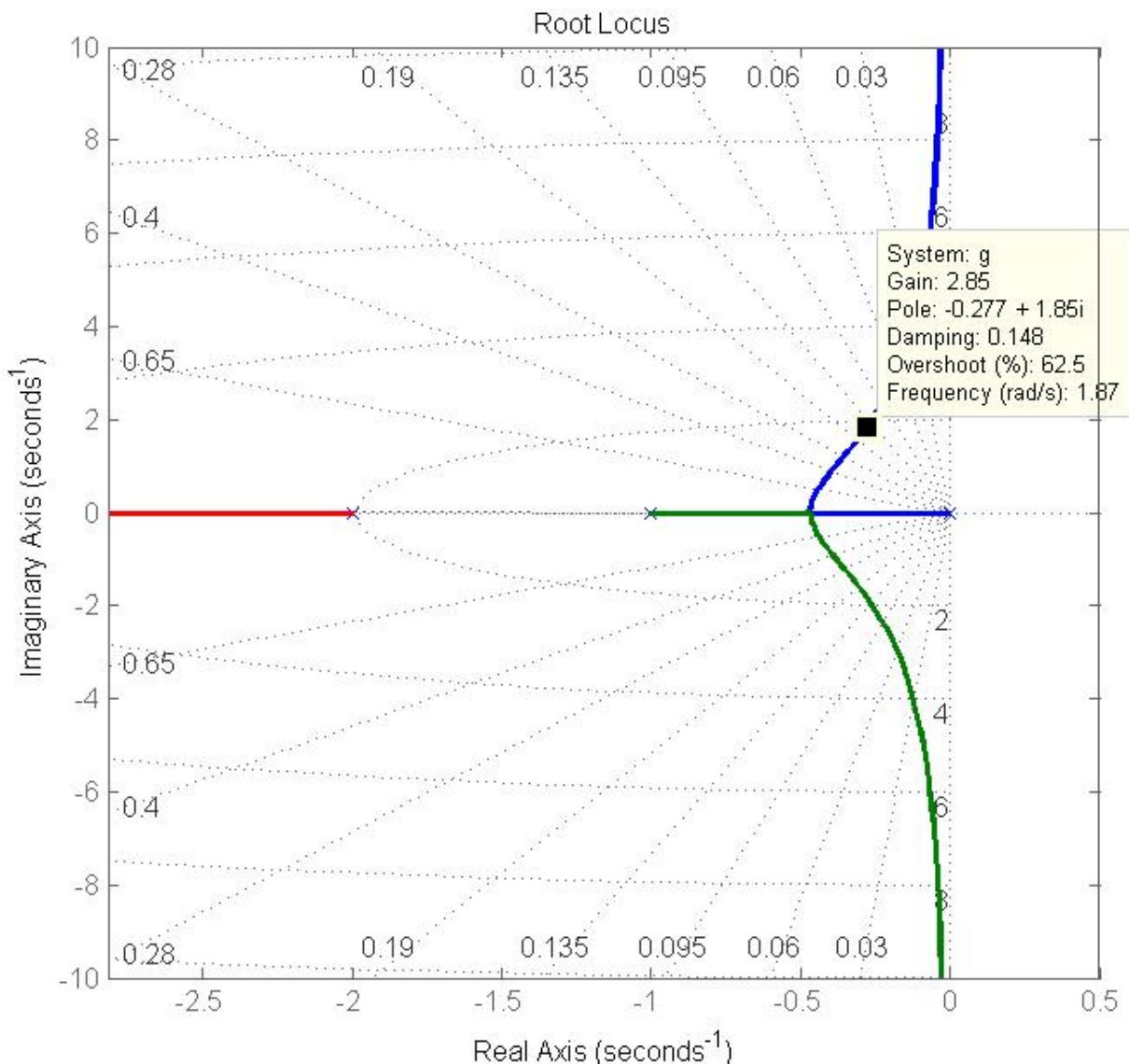
$$\zeta = |\cos(\theta)| = |\cos(98.50958566^\circ)| = 0.1479748732 \quad \text{olarak bulunur.}$$

Sönümleme frekansı ω_d ise,

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \rightarrow \omega_d = 1.870570666 \cdot \sqrt{1 - 0.1479748732^2} \rightarrow \omega_d = 1.849977779 \text{ rad/s}$$

Yükselme zamanı,

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} \rightarrow T_p = \frac{\pi}{1.849977779} = 1.698178589 \text{ s} \quad \text{olarak bulunur.}$$



Şekil 10-4: $K=2.85$ değerine karşılık gelen değerlerin Matlab ile gösterimi

Ayarlama süresi ise,

$$T_s = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta \cdot \omega_n} \approx \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n} \rightarrow T_s = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta \cdot \omega_n} = 14.17315380 \text{ s} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Maksimum aşma değeri ise,

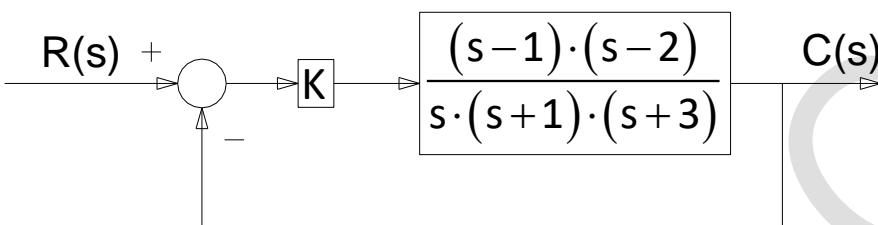
$$\%OS = e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \cdot 100 \rightarrow \%OS = e^{-\left(\frac{0.1479748732\pi}{\sqrt{1-0.1479748732^2}}\right)} \cdot 100 = 62.49700722$$

olarak hesaplanır. Bu değerlerin doğruluğu Matlab ile elde edilen sonuçlarla gösterilmiştir.

10.1.9 Misal:

Aşağıda verilen sistemde

- Ayrılma (break-away point) ve birleşme (break-in point) noktalarını hesaplayınız.
- Asal ekseni kestiği yerde kazanç değerini ve doğal frekansı hesaplayınız



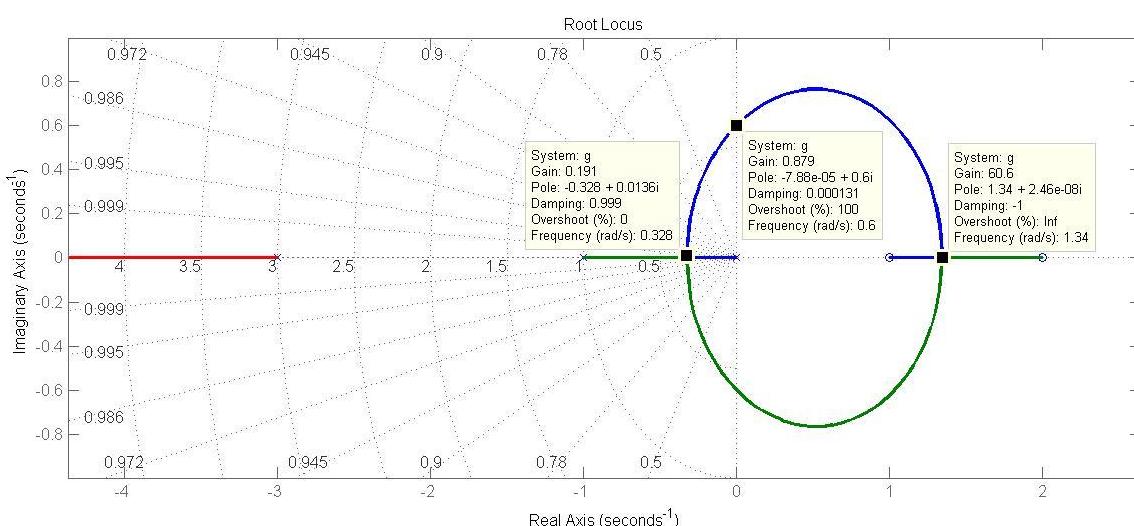
Çözüm: Ayrılma ve Birleşme noktaları iki farklı şekilde hesaplanabilir.

$$\frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{\sigma-2} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma+1} + \frac{1}{\sigma+3} \rightarrow -\sigma^4 + 6\cdot\sigma^3 + 9\cdot\sigma^2 - 16\cdot\sigma - 6 = 0$$

$$\sigma_{1,2,3,4} = -0.328355250687124, -1.95998527577220, 1.34217577654448, 6.94616474991485$$

$\sigma = -0.328355250687124$ → Ayrılma noktasıdır. (break-away point)

$\sigma = +1.34217577654448$ → Birleşme noktasıdır (break-in point)



$$\Delta = s^3 + (K+4)s^2 + (-3K+3)s + 2K$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & (3-3\cdot K) & 0 \\ s^2 & (K+4) & 2\cdot K & 0 \\ s^1 & \frac{-3\cdot K^2 - 11\cdot K + 12}{(K+4)} & 0 \\ s^0 & 2\cdot K & 0 \end{array}$$

Routh tablosunun 3. satırından,

$$\frac{-3\cdot K^2 - 11\cdot K + 12}{(K+4)} > 0 \rightarrow 3\cdot K^2 + 11\cdot K - 12 > 0 \rightarrow K < -\frac{11}{6} + \frac{1}{6}\cdot\sqrt{265} \rightarrow K < 0.879803434$$

$2\cdot K > 0 \rightarrow K > 0$ şartı elde edilir. Bu iki şartın birleştirilmesiyle birlikte $0 < K < 0.879803434$ olmalıdır.

Sistemde K görülen yere 0.879803434 değeri girilir.

$$TF = \frac{\frac{K\cdot(s-1)\cdot(s-2)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+3)}}{1 + \frac{K\cdot(s-1)\cdot(s-2)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+3)}} \rightarrow TF = \frac{\frac{K\cdot(s-1)\cdot(s-2)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+3)}}{\frac{s\cdot(s+1)\cdot(s+3)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+3)} + \frac{K\cdot(s-1)\cdot(s-2)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+3)}}$$

$$TF = \frac{\frac{K\cdot(s-1)\cdot(s-2)}{\cancel{s\cdot(s+1)\cdot(s+3)}}}{\frac{\cancel{s\cdot(s+1)\cdot(s+3)} + K\cdot(s-1)\cdot(s-2)}{\cancel{s\cdot(s+1)\cdot(s+3)}}} \rightarrow TF = \frac{K\cdot(s-1)\cdot(s-2)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+3) + K\cdot(s-1)\cdot(s-2)}$$

$$\Delta = s\cdot(s+1)\cdot(s+3) + K\cdot(s-1)\cdot(s-2) \rightarrow \Delta = s\cdot(s+1)\cdot(s+3) + 0.879803434\cdot(s-1)\cdot(s-2) = 0$$

$$s_{1,2,3} = 0 - 0.6004912155\cdot i, 0 + 0.6004912155\cdot i, -4.879803434$$

s değerinin gerçek kısmı sıfıra eşit olmalıdır. Dolayısıyla doğal frekans değeri hemen belliidir.

$$\omega_n = \sqrt{(0)^2 + (0.6004912155)^2} \rightarrow \omega_n = 0.6004912155 \text{ rad/s}$$

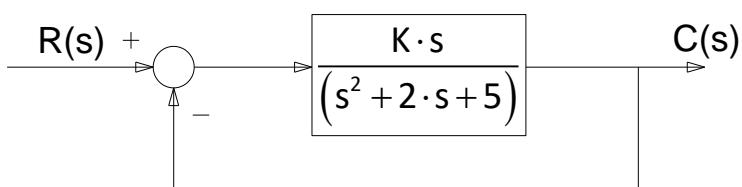
Kazanç değeri; $K = 0.879803434$

Elde edilen değerlerin, Matlab sonuçları ile, tamamen uyumlu olduğu görülmektedir.

10.1.10 Misal:

Aşağıda verilen sistemde;

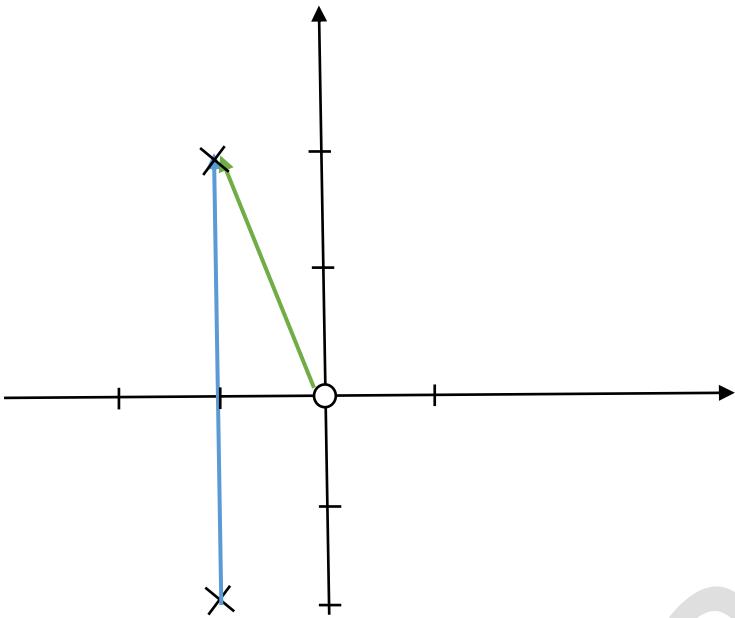
- Ayrılma açılarını (Departure Angles),
- $K=1.4$ için söküMLEME frekansını (ω_d), söküMLEME katsayısını (ζ), ve maksimum aşma değerini (%OS) hesaplayınız.



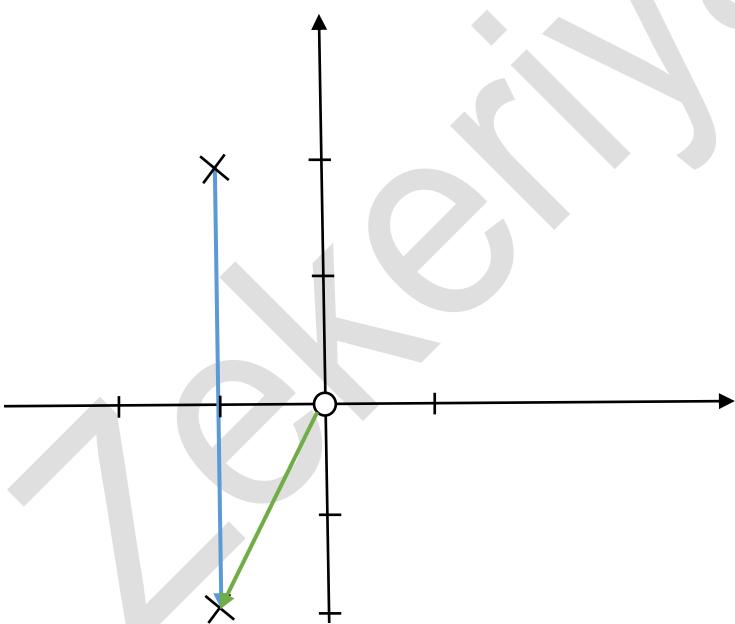
$$\text{Çözüm: } (\text{zeros}=0, \text{poles}=-1 \mp 2 \cdot j) \rightarrow \left[\sum_{i=1, i \neq k}^n \theta(p)_i + \theta(p)_k \right] - \sum_{j=1}^m \theta(z)_j = (2 \cdot k + 1) \cdot 180^\circ$$

$$[\theta_1 + 90^\circ] - [116.565051177078] = 180^\circ \rightarrow \theta_1 = 206.565051177078^\circ \text{ veya}$$

$\theta_1 = -153.43495^\circ$ olarak bulunur.



Diğer açı gerçek eksene göre simetrik olmalıdır. Yani $\theta_2 = 153.434948822922^\circ$



$$[-90 + \theta_2] - [-116.565051177078] = 180^\circ \rightarrow \theta_2 = 180 + 90 - 116.565051177078$$

$\theta_2 = 153.434948822922^\circ$

Burada dikkat edilmesi gereken, açılar her zaman (+x) ekseninden itibaren ölçülmelidir.

Not: Ayırılma (Break-away) ve Birleşme (Break-in Angle) açıları hesaplanırken, asla s yerine koordinat değerini yazarak hesaplamayınız. Sonucunuz yanlış olur. Sadece vektör çizerek hesaplayınız. UNUTMAYINIZ !!!

$$b) K=1.4 \text{ değeri sistemde girilir. } TF = \frac{\frac{K \cdot s}{s^2 + 2 \cdot s + 5}}{1 + \frac{K \cdot s}{s^2 + 2 \cdot s + 5}} \rightarrow TF = \frac{\frac{K \cdot s}{s^2 + 2 \cdot s + 5}}{\frac{s^2 + 2 \cdot s + 5}{s^2 + 2 \cdot s + 5} + \frac{K \cdot s}{s^2 + 2 \cdot s + 5}}$$

$$TF = \frac{\frac{K \cdot s}{s^2 + 2 \cdot s + 5}}{\frac{s^2 + 2 \cdot s + 5 + K \cdot s}{s^2 + 2 \cdot s + 5}} = \frac{K \cdot s}{s^2 + (K+2) \cdot s + 5} \rightarrow TF = \frac{1.4 \cdot s}{s^2 + (1.4+2) \cdot s + 5} = \frac{1.4 \cdot s}{s^2 + 3.4 \cdot s + 5}$$

$$s^2 + 3.4 \cdot s + 5 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -1.700000000 \mp 1.452583905 \cdot i$$

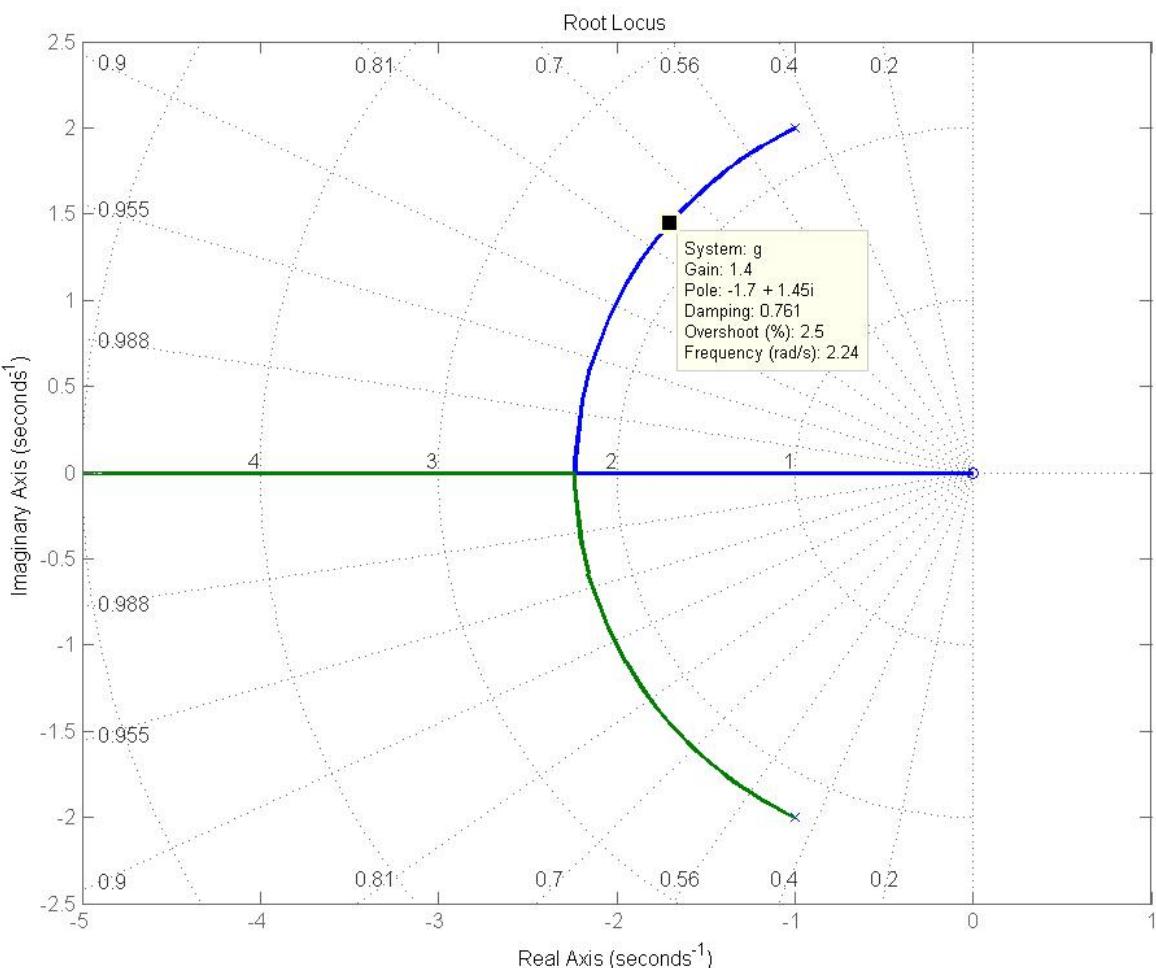
Doğal frekans değeri,

$$\omega_n = \sqrt{(-1.700)^2 + (1.452583905)^2} \rightarrow \boxed{\omega_n = 2.236067978 \text{ rad/s}}$$

SönüMLEME katsayısı ζ ,

$$\theta = \text{atan2}(y, x) \rightarrow \theta = \text{atan2}(-1.700, 1.452583905) \rightarrow \theta = 2.434514374$$

$$\zeta = |\cos(\theta)| = |\cos(2.434514374)| \rightarrow \boxed{\zeta = 0.7602631125} \text{ olarak bulunur. } \omega_d$$



SönüMLEME frekansı ise,

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \rightarrow \omega_d = 2.236067978 \cdot \sqrt{1 - 0.7602631125^2} \rightarrow \boxed{\omega_d = 1.452583905 \text{ rad/s}}$$

Maksimum aşma yüzdesi;

$$\%OS = M_p \cdot 100 = e^{-\left(\frac{\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \cdot 100 \rightarrow \%OS = M_p \cdot 100 = e^{-\left(\frac{0.7602631125 \cdot \pi}{\sqrt{1-0.7602631125^2}}\right)} \cdot 100$$

$$\boxed{\%OS = 2.530648277}$$

elde edilen değerler matlab ile kontrol edilebilir. Görüldüğü gibi sonuçlar, tamamen uyumludur.

10.2 Pozitif geri beslemeli sistemlerde Root Locus Metodu ile Çizim

Mühendislikte karşımıza bazen “Pozitif Geri Beslemeli” sistemler çıkmaktadır. Negatif geri beslemeden farklı olarak aşağıdaki işlemleri uygulanır.

1. Adım: Root Locus formunda karakteristik denklemin elde edilmesi: yani $[1 - K \cdot G(s) = 0]$ formuna getirilmesi.

2. Adım: açık döngü halinde kutup (poles: x) ve sıfırların (zeros: o) bulunması: Payı sıfır yapan değerler sıfırları, paydayı sıfır yapan değerlerde kutupları belirler. Bu işlem aşağıdaki gibi denklemler ile gösterilebilir. Transfer fonksiyonu faktöriyel tarzda yazılmalıdır.

$$1 - K \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \rightarrow 1 - K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = 0 \rightarrow \prod_{j=1}^n (s - p_j) - K \cdot \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0 \rightarrow \underset{K=0}{(x)} \rightarrow \underset{K=\infty}{(o)} \quad (K=0)$$

olduğunda, aktif terim $\prod_{j=1}^n (s - p_j)$ olmakta ve $(K=\infty)$ olduğunda, aktif terim $\prod_{i=1}^m (s - z_i)$ olmaktadır. Yani Pozitif geri beslemede hesaplanan noktada açı değeri;

$$(K \cdot G(s) \cdot H(s)) = 1 = 1 \angle k \cdot 360^\circ, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

şartını sağlamalıdır.

3. Adım: gerçek eksen üzerindeki Locus yerlerinin belirlenmesi: Birçok root-loci yeri gerçek eksen üzerinde bulunmaktadır. Root-locus' un gerçek eksen üzerindeki yeri şu şekilde belirlenir: Gerçek eksen üzerinde, açık döngü kutupları ve sıfırların çift sayılı olanlarının solunda bir nokta alındığında (bu da gerçek eksen üzerinde olmak şartıyla), bu nokta Root locus noktasıdır. Gerçek eksen üzerinde pozitif sonsuzdan başla ve sola doğru orijine yaklaşacak şekilde bir kutup veya sıfırla karşılaşınca kadar hareket et. Karşılaştıktan sonra kaleminle gerçek eksen üzerinde çizmeye başla ve devam et, ta ki gerçek eksen üzerinde bir kutup veya sıfır varıncaya kadar. Eğer karşılaşmazsan sonsuza kadar çizilmiş kabul et (yani çiz).

Eğer gerçek eksen üzerinde kutup veya sıfır yok ise, o takdirde gerçek eksen üzerinde root-locus yeri olmayacak demektir.

Bazı sistemlerde gerçek eksen üzerinde aynı noktada birden fazla kutup ve sıfır olabilmektedir. Bu konumda iki farklı durum karşımıza çıkar.

Birincisi: karşılaşılan noktada çift sayılı kutup veya sıfırlar var ise, yapılan çizim bu noktadan itibaren sola doğru devam eder.

İkincisi: karşılaşılan noktada tek sayılı kutup veya sıfırlar var ise, yapılan çizim bu nokta durur ve bu noktadan itibaren sola doğru devam etmez.

Gerçek eksen üzerinde bir yeri işaretlediğinde, bu noktanın sağında cift sayılı bir kök var ise, bu nokta locus kısmından bir yerdır, noktadır. Eğer bu noktanın sağında birden fazla kök var ise, bunların tek veya çift sayı olmasına göre durum değişir.

4. Adım: Ayrılma ve birleşme açıları 0 veya 360° in katları olacağından dolayı;

$$\sum_{j=1}^m \theta(z)_j - \sum_{i=1, i \neq k}^n \theta(p)_i = k \cdot 360^\circ, (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\sum_{j=1}^m \theta(z)_j - \left[\sum_{i=1, i \neq k}^n \theta(p)_i + \theta_{\text{dep}} \right] = 0 \quad \boxed{\theta_{\text{dep}} = \sum_{j=1}^m \theta(z)_j - \sum_{i=1, i \neq k}^n \theta(p)_i} \rightarrow \sum_{j=1, j \neq k}^m \theta(z)_j + \theta_{\text{arr}} - \sum_{i=1}^n \theta(p)_i = 0$$

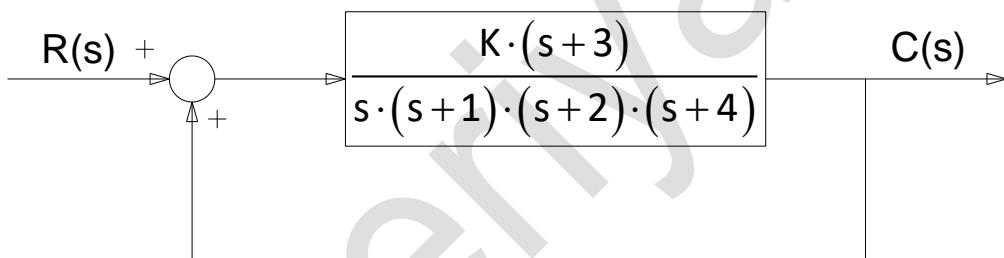
$$\boxed{\theta_{\text{arr}} = \sum_{i=1}^n \theta(p)_i - \sum_{j=1, j \neq k}^m \theta(z)_j}$$

denklemleri ile hesaplanır.

10.2.1 Misal:

Aşağıda verilen pozitif geri beslemeli sistemde,

1. Ayrılma ve birleşme noktalarını hesaplayınız.
2. Asimtotların yerini ve açılarını hesaplayınız.
3. ($s = -2.437 + 1.5734 \cdot j$) ile verilen nokta Root-locus noktası mıdır? Hesaplayınız.
4. Eğer Root-locus noktası ise bu noktadaki, kazanç değerini, doğal frekansı, sönümleme katsayısını, sönümlemeli frekansı, yükselme zamanını, ayarlama süresini ve maksimum aşma değerini hesaplayınız.



Çözüm:

1 poles=[0,-1,-2,-4] olduğundan ayrılma noktası vardır. Fakat sıfırlar (zeros) sadece tek bir nokta olduğundan birleşme yoktur.

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+3)}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+4)} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-3 \cdot s^4 - 26 \cdot s^3 - 77 \cdot s^2 - 84 \cdot s - 24}{s^2 \cdot (s+1)^2 \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)^2} = 0$$

$$-3 \cdot s^4 - 26 \cdot s^3 - 77 \cdot s^2 - 84 \cdot s - 24 = 0$$

$$s_{1,2,3} = -1.609717709, 0.4349223188$$

olduğu görülür ve ($s = -1.609717709$) noktası, ayrılma noktasıdır.

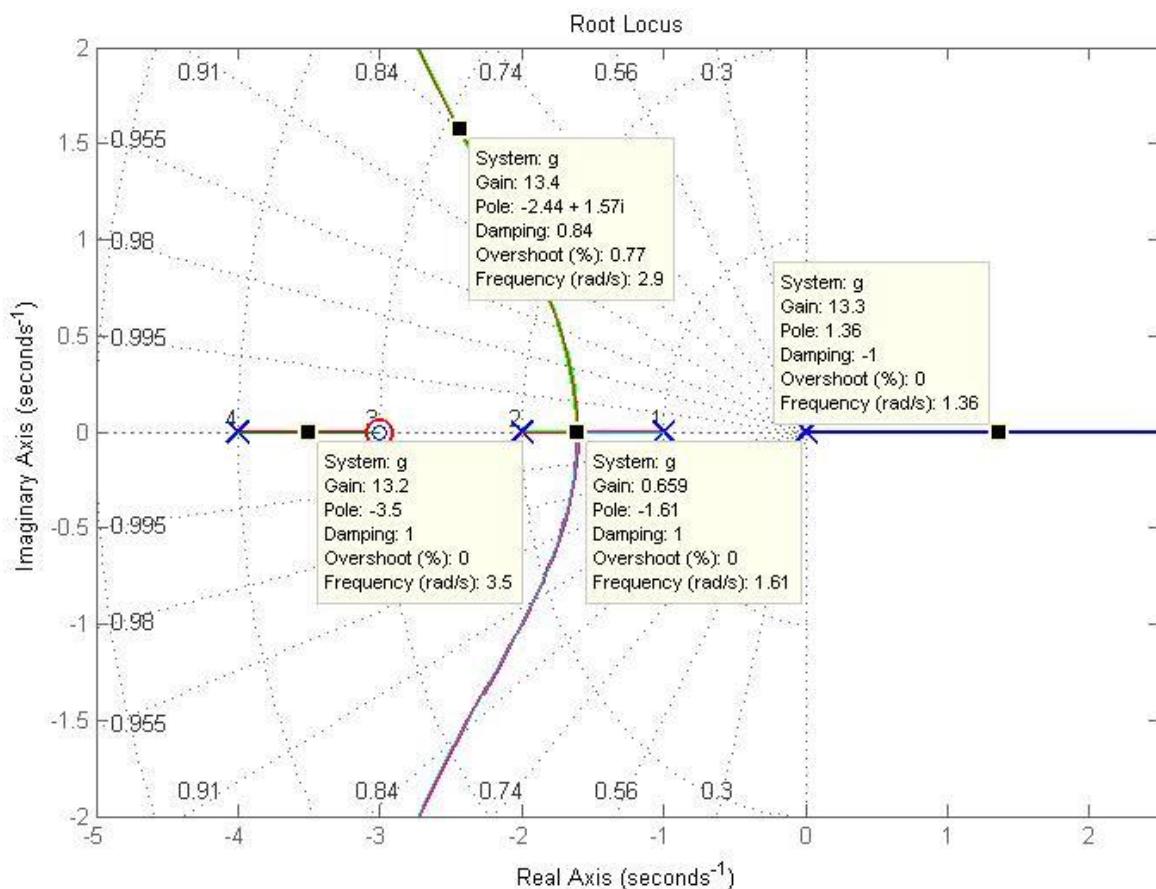
2. Asimtotların gerçek ekseni kestiği yer, $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$ denklemi ile bulunur.

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^3 p_i - \sum_{j=1}^1 z_j}{4-1} = \frac{(0-1-2-4)-(-3)}{3} = \frac{(-7)+3}{3} \rightarrow \sigma_a = -\frac{4}{3}$$

Yani $\left(s = -\frac{4}{3}\right)$ noktasında asimtotlar vardır ve bu noktada gerçek eksen ile yapmış oldukları açılar,

$$\theta_a = \frac{(2 \cdot 180^\circ) \cdot k}{n-m}, \quad (k=0,1,2,\dots,n-m-1) \rightarrow \theta_a = \frac{(2 \cdot 180^\circ) \cdot k}{4-1}, \quad (k=0,1,2,\dots,4-1-1)$$

$\theta_a = 120^\circ \cdot k, \quad (k=0,1,2) \rightarrow \theta_a = 0^\circ, \quad (k=0)$ ve $\theta_a = 120^\circ, \quad (k=1) \quad \theta_a = 240^\circ, \quad (k=2)$ derecedir.



3. $(s = -2.437 + 1.5734 \cdot j)$ ile verilen nokta, root-locus noktasıdır. Çünkü bu noktadaki açı değeri yaklaşık sıfır (0) derecedir. Bu değer,

$F(s) = \frac{(s+3)}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+4)}$ denkleminde s görülen yere $(s = -2.437 + 1.5734 \cdot j)$ yazıldığında,

$$F(s) = \frac{(0.563 + 1.553 \cdot j)}{(7.548700484 + 21.0604806 \cdot j)} = \frac{(0.563 + 1.553 \cdot j) \cdot (7.548700484 - 21.0604806 \cdot j)}{(7.548700484 + 21.0604806 \cdot j) \cdot (7.548700484 - 21.0604806 \cdot j)}$$

$F(s) = 0.07467744020 + 0.00003407467130 \cdot j \rightarrow \theta \equiv 0^\circ$ ve dolayısıyla, verilen noktanın root-locus olduğu görülür. Aynı değerler vektör çizimi ile de hesaplanabilir. Bu noktadaki kazanç değeri;

$$M = \sqrt{(0.07467744020)^2 + (0.00003407467130)^2} = 0.07467744797$$

$$K = -\left| \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{1}{0.07467744797} \right| \rightarrow K = -13.39092359$$

Bu noktadaki kazanç değeri K (gain factor) aşağıdaki şekilde de hesaplanır.

$$M = \frac{\prod_{i=1}^1 |(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^4 |(s-p_j)|} = \frac{|(s-z_1)|}{|(s-p_1)| \cdot |(s-p_2)| \cdot |(s-p_3)| \cdot |(s-p_4)|} \rightarrow K = -\left| \frac{1}{M} \right|$$

10.3 Kutup ilavesi (Addition of Poles to G(s) H(s))

$[G(s) \cdot H(s)]$ terimine, kutup(poles) ilave edildiği takdirde, Root-Locus eğrisi sağa doğru itilmiş olur.

10.4 Sıfır ilavesi (Addition of Zeros to G(s) H(s))

$[G(s) \cdot H(s)]$ terimine, zeros(sıfır) ilave edildiği takdirde, Root-Locus eğrisi sola doğru itilmiş olur.

10.5 Root-Locus ile Dizayn (Sisteme kutup ve sıfır eklemenin etkileri)

Burada yapılan işlemler genel isim olarak "Kompanzasyon" (Compensation) diye adlandırılır. Geçici cevabın daha iyi hale getirilmesi ve alıcı etkilerdeki hatanın azaltılması bu sınıfa girer. Kontrolde kullanılan birçok kompanzasyon türleri aşağıda verilmiştir.

- Lead Kompanzasyon
- Lag Kompanzasyon
- Lead-Lag Kompanzasyon
- Notch Filtre
- P (Orantı) Kontrol ediciler
- I (Integral) Kontrol ediciler
- PI (Orantı+Integral) Kontrol ediciler
- PD (Orantı+Diferansiyel) Kontrol ediciler
- PID (Orantı+Integral+Diferansiyel) Kontrol ediciler

Bunların temel özellikleri bilindiği takdirde, kontrol elemanlarının katsayıları, istenen şartlara uygun olarak belirlenebilir. Aynı zamanda blok diyagramına bağlanış şekilleri de katsayırlarda değişikliğe yol açar.

10.5.1 Root-Locus ile Lead Kompanzasyon (Lead Compensation with Root-Locus method)

Burada yapılan işlemler genel isim olarak "Kompanzasyon" (Compensation) diye adlandırılır. Geçici cevabın daha iyi hale getirilmesi ve alıcı etkilerdeki hatanın azaltılması bu sınıfa girer. Kontrolde kullanılan birçok kompanzasyon türleri aşağıda verilmiştir. Lead kompanzasyon isminden de anlaşılacağı gibi sisteme lider bir eleman ilave etmektir. Yani kompleks düzlemede gerçek eksen üzerine bir tane kutup(pole) ve bu kutup değerinden daha büyük olacak bir sıfır(zero) ilave edilir. Diğer bir ifade ile kutup sağ tarafında sıfır vardır ve konumları ($x \rightarrow o$) şeklindedir. Sisteme bunlar ilave edildiğinde yerleri tam olarak belli değildir ve hesaplama ile bulunur. Lead Kompanzasyon ;

$$\left(K_c \cdot \frac{(s+z_c)}{(s+p_c)} \right), (z_c > p_c) \quad (8.14)$$

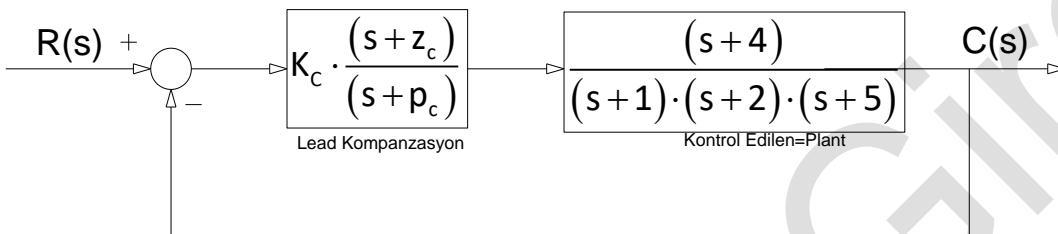
Şeklinde ifade edilebilir. Bazı kaynaklarda Denklem (8.14) deki gösterim yerine,

$$\left(K_c \cdot \alpha \cdot \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \right), \left(\alpha = \frac{z_c}{p_c}, T = \frac{1}{z_c}, \alpha < 1 \right) \quad (8.15)$$

Denklemi ile gösterilmiştir. Bunun ispatı oldukça basittir.

$$K_c \cdot \frac{\frac{z_c}{p_c} \cdot \left(\frac{s+z_c}{z_c} \right)}{\frac{s+p_c}{p_c}} \Rightarrow K_c \cdot \frac{z_c}{p_c} \cdot \left(\frac{s}{p_c} + 1 \right) \Rightarrow \alpha = \frac{z_c}{p_c} \Rightarrow K_c \cdot \alpha \cdot \frac{\left(\frac{1}{z_c} \cdot s + 1 \right)}{\left(\frac{s}{p_c} + 1 \right)} \Rightarrow T = \frac{1}{z_c} \Rightarrow K_c \cdot \alpha \cdot \frac{T \cdot s + 1}{\frac{z_c}{p_c} \cdot \frac{1}{z_c} \cdot s + 1}$$

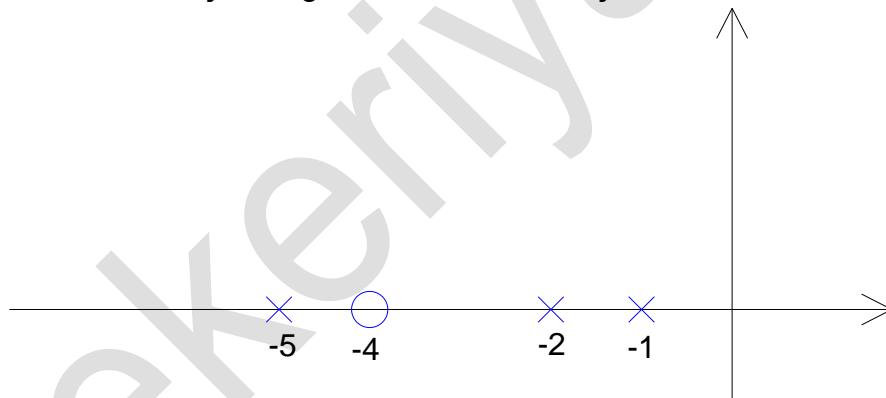
Buradan da, $\left(K_c \cdot \alpha \cdot \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \right)$ olduğu görülür. Kontrol devresinde kullanımı aşağıdaki gibidir.



Şekil 5: Lead Kompanzasyonlu Kutup ve Sıfır ihtiyacı eden (iceren, bulunduran) Kontrol Devresi

Lead Kompanzasyon işlem basamakları aşağıdaki gibi sırasıyla hesaplanabilir.

- İlk işlem olarak, yukarıda verilen kontrol elemanı üzerindeki bilinen kutuplar ve sıfırlar (Poles and zeros) kompleks düzlemede yerleştirilir. Kutuplar ve sıfırların mutlaka gerçek eksen üzerinde olması şart değildir. Yani sanal bileşenleri de olabilir.

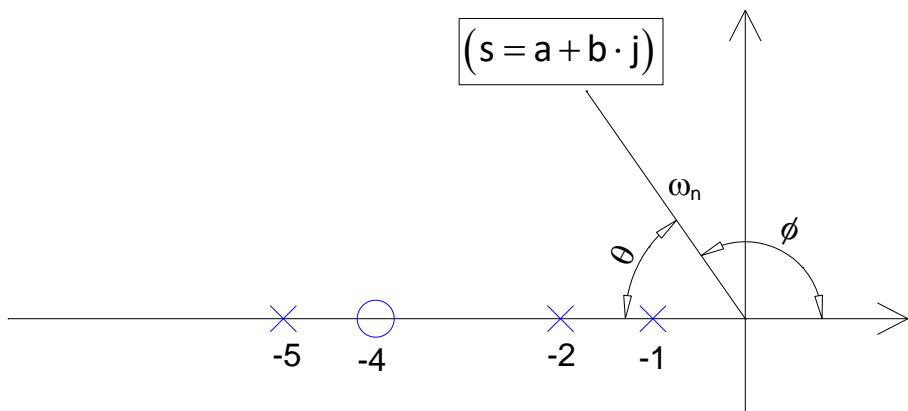


Şekil 6: Kutup ve sıfırların kompleks düzlem üzerinde yerleştirilmesi

- Zamana bağlı olarak ayarlanması istenen değerlerden ($s = a + j \cdot b$) noktası belirlenir. Bu bizden istenen kriterlere bağlıdır. Maksimum aşma değeri (%OS) şu olsun, ayarlama süresi (T_s) bu olsun gibi... Buradan istenen Root-Locus noktasının yeri belirlenir. (θ) açısı ile (ω_n) bilindiği takdirde s noktasına ait a ve bileşenleri hesaplanabilmektedir.

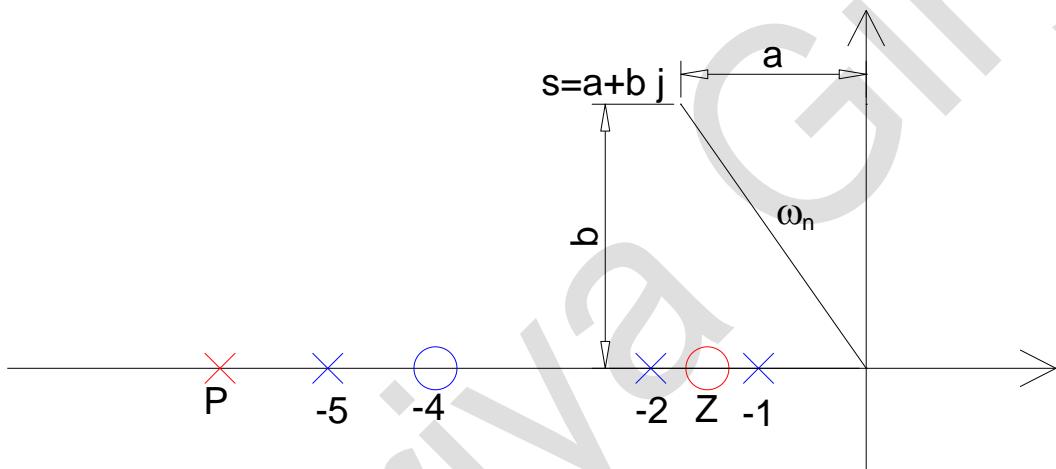
$$\text{Hatırlatma: } T_s = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2})}{\zeta \cdot \omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2})}{\zeta \cdot T_s}, \zeta = \frac{-\ln(\frac{\%OS}{100})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\frac{\%OS}{100})}}$$

Bu denklemler 2. Mertebeden sistemler için geçerlidir. Fakat yüksek mertebeden denklemler için de yaklaşık olarak kullanılmaktadır.



ϕ açısı ile θ açısının toplamı (180°) olduğundan dolayı, $\phi = 180^\circ - \theta$ yazılabilir.

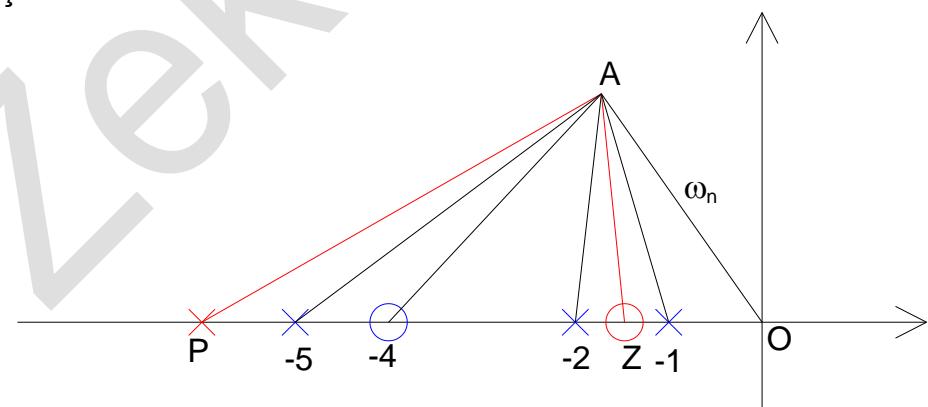
3. Yerleri bilinmeyen (z_c) ve (p_c) aynı kompleks düzlemede ($\times \rightarrow o$) olacak şekilde aşağıdaki gibi yerleştirilir.



Şekil 7: Kompanzasyon değerlerinin kutup solda ve sıfır sağda olacak şekilde yerleştirilmesi

Bu nokta Root-Locus noktası olduğuna göre istenen şartları sağlamalıdır.

4. Daha sonra kutup ve sıfır noktalarından istenen A noktasına ($s = a + b \cdot j$) doğru vektörler çizilir.



Root-Locus metodunun temel özelliği olan açı bağıntısı,

$$\left[\sum_{j=1, j \neq c}^m (\text{Zeros Angles})_j + \theta_z \right] - \left[\sum_{i=1, i \neq c}^n \theta (\text{Poles Angles})_i + \theta_p \right] = \mp 180^\circ$$

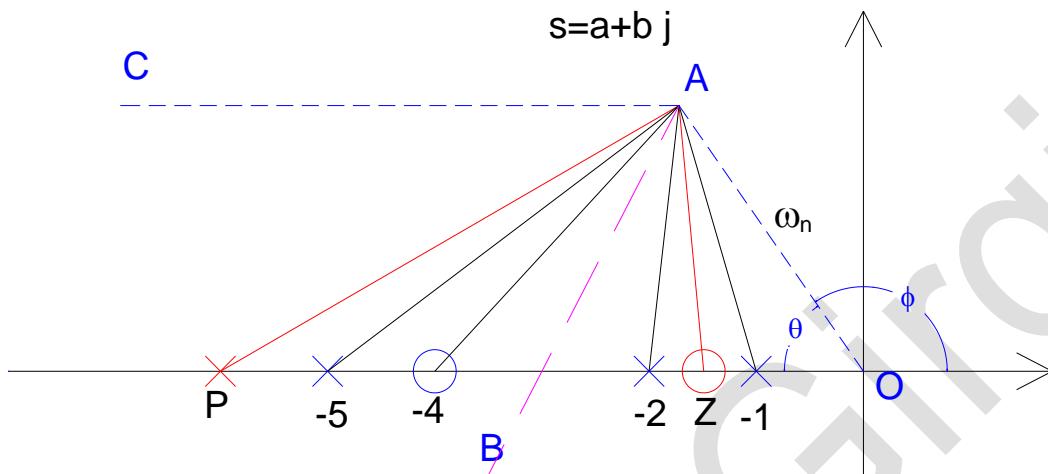
kullanılarak, $(\theta_z - \theta_p = \alpha)$ açısı hesaplanır.

5. Diğer sağlama gereken bir şart da Kazanç değeri ile büyülüklük arasındaki,

$$K_c = \left| \frac{1}{M} \right| = \rightarrow M = \frac{\prod(\text{zeros lengths})}{\prod(\text{poles lengths})}$$

bağıntısıdır.

6. Ayrıca en iyi kazanç değerinin yeri, (CAO) açısının açıortayı olan (\overline{AB}) doğrusu ile sağlandığından dolayı, (\overline{AB}) doğrultusu çizilir.



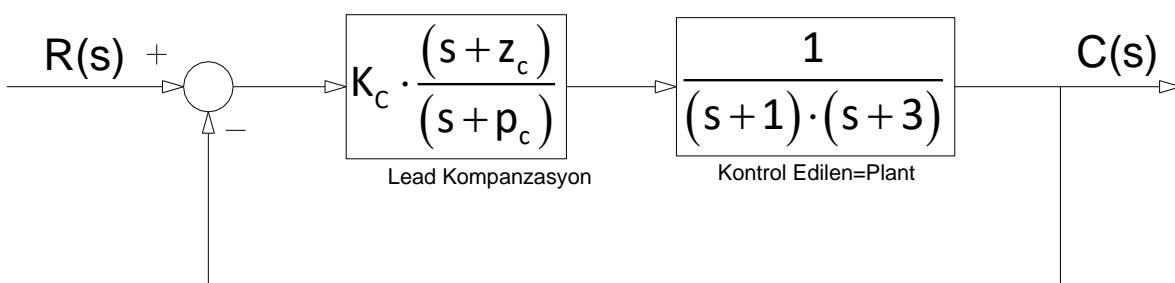
$$\text{CAO} = \phi, \text{ CAB} = \text{BAO} = \frac{\phi}{2}$$

7. Ayrıca yukarıdaki şekilde $(PAB = BAZ = \frac{\alpha}{2})$ olduğu takdirde en iyi kazanç değeri hesaplanmış olur. (PAO) üçgeni göz önüne alındığında, bu üçgenin iç açıları toplamı (180°) olacağından dolayı, $\left[\theta_p + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\phi}{2} \right) + \theta = 180^\circ \right]$ yazılabilir. Burada tek bilinmeyen açı (θ_p) olduğundan kolaylıkla hesaplanır. Daha sonra (PAZ) üçgeni göz önüne alındığında, bu üçgenin iki iç açısının toplamı kendisine komşu olmayan dış açısının toplamına eşit olacağından dolayı, $\left[\theta_p + \alpha = \theta_z \right]$ yazılabilir. Buradan da bilinmeyen (θ_z) açısı kolaylıkla hesaplanmış olur.

Böylece bu üç şartın birleştirilmesiyle birlikte istenen değerler elde edilir. Şayet çözüm sonucunda şartların sağlanmadığı görülürse bu da Lead Kompanzasyon ile bu sistemin kontrol edilemeyeceği anlamına gelir, yani başka kontrol elemanları denenmelidir. Aşağıda bununla ilgili misaller verilmiştir.

10.5.1.1 Misal

Aşağıda verilen kontrol devresinde maksimum aşma değeri (%OS)= 0.898329102112942 ve ayarlama süresinin ($T_s = 1.50045016786632s$) olması için sisteme ilave edilecek Lead Kompanzasyon ile ilgili (z_c), (p_c) ve (K_c) değerlerini hesaplayınız.



Çözüm: maksimum aşma değeri verildiği için buradan (ζ) sönümleme oranı hesaplanabilir.

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%OS}{100}\right)}} \rightarrow \zeta = \frac{-\ln\left(\frac{0.898329102112942}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{0.898329102112942}{100}\right)}} \rightarrow \boxed{\zeta = 0.8320502943378436}$$

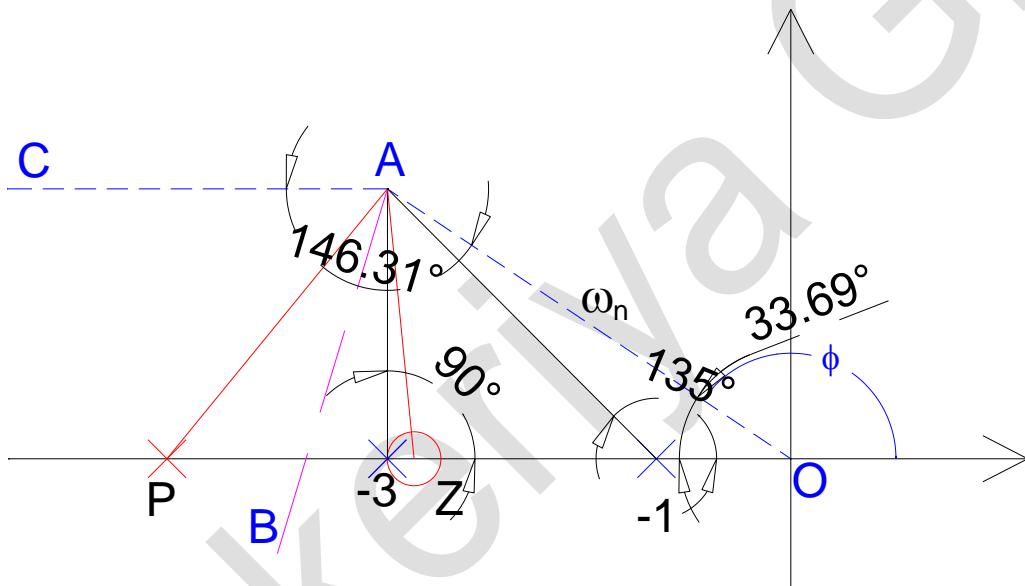
$$\zeta = \cos(\theta) \rightarrow \theta = \cos^{-1}(\zeta) \rightarrow \boxed{\theta = 33.690067525979799^\circ}$$

$$\phi = CAO = 180^\circ - \theta = 180 - 33.690067525979799 \rightarrow \boxed{\phi = 146.3099324740202^\circ}$$

Ayrıca ayarlama süresinden faydalananarak, doğal frekans hesaplanır.

$$T_s = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta \cdot \omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta \cdot T_s} \rightarrow \omega_n = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1-0.8320502943378436^2})}{0.8320502943378436 \cdot 1.50045016786632}$$

$\boxed{\omega_n = 3.6055512754639971 \text{ rad/s}}$ \rightarrow , $a = -\omega_n \cdot \cos(\theta) \rightarrow a = -3$ ve $b = \omega_n \cdot \sin(\theta)$ olduğundan, bilinen değerler yerine yazıldığında, $(s = -3 + 2 \cdot j)$ olduğu görülür



Root-Locus açı özelliği kullanıldığında,

$$\left[\sum_{j=1, j \neq c}^m (\text{Zeros Angles})_j + \theta_z \right] - \left[\sum_{i=1, i \neq c}^n \theta(\text{Poles Angles})_i + \theta_p \right] = \mp 180^\circ$$

$$[\theta_z] - [\theta_p] = +180^\circ$$

$$[\theta_z] - [90 + 135 + \theta_p] = +180^\circ \rightarrow \theta_z - \theta_p = 415^\circ \rightarrow \theta_z - \theta_p = 415^\circ - 360^\circ$$

$$\theta_z - \theta_p = 45^\circ \rightarrow \boxed{\theta_z - \theta_p = \alpha = 45^\circ}$$

$$PAZ = \boxed{\alpha = 45^\circ} \rightarrow BAO = \frac{\phi}{2} = 73.1549662370101^\circ \rightarrow PAB = \frac{\alpha}{2} = 22.5^\circ$$

Yukarıdaki şeviden de anlaşılacağı gibi (PAO) üçgeni göz önüne alındığında;

$$POA = \theta = 33.690067525979799^\circ$$

$$PAO = \frac{\phi + \alpha}{2} = \frac{146.3099324740202 + 45}{2} \rightarrow PAO = 95.6549662370102^\circ$$

Bir üçgenin iç açıları toplamı (180°) olduğundan dolayı, hesaplanması gereken (θ_p) açısı bu özellikten dolayı kolaylıkla bulunur.

(PAO) üçgeninin iç açıları toplamı;

$$\theta_p + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\phi}{2} \right) + \theta = 180^\circ \rightarrow \theta_p + (PAO) + \theta = 180^\circ \rightarrow \theta_p = 180^\circ - \theta - (PAO)$$

$$\theta_p = 180^\circ - (33.690067525979799 + 95.6549662370102)$$

$$\theta_p = 50.65496623701^\circ$$

Buradan pole değerinin gerçek eksen üzerindeki yerini belirlemek için ilk önce ($p = \overline{PA}$) uzunluğu hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$\sin(\theta_p) = \frac{b}{PA} = \frac{b}{p} \rightarrow p = \frac{b}{\sin(\theta_p)} \rightarrow p = \frac{2}{\sin(50.65496623701^\circ)} \rightarrow p = 2.5861774408671891$$

$$p_c = -p \cdot \cos(\theta_p) + a \rightarrow p_c = -2.5861774408671891 \cdot \cos(50.65496623701) - 3$$

$$p_c = -4.639607805437131 \text{ olduğu görülmür. } (PAZ) \text{ üçgeni dikkate alındığında;}$$

$$\theta_z = \theta_p + \alpha \rightarrow \theta_z = 50.65496623701^\circ + 45^\circ$$

$$\theta_z = 95.65496623701^\circ \text{ olarak hesaplanır.}$$

Buradan zero değerinin gerçek eksen üzerindeki yerini belirlemek için ilk önce ($z = \overline{ZA}$) uzunluğu hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$\sin(\theta_z) = \frac{b}{ZA} = \frac{b}{z} \rightarrow z = \frac{b}{\sin(\theta_z)} \rightarrow z = \frac{2}{\sin(95.65496623701^\circ)} \rightarrow z = 2.009780947339443$$

$$z_c = -z \cdot \cos(\theta_z) + a \rightarrow z_c = -2.8019609728144328$$

olduğu görülmür.

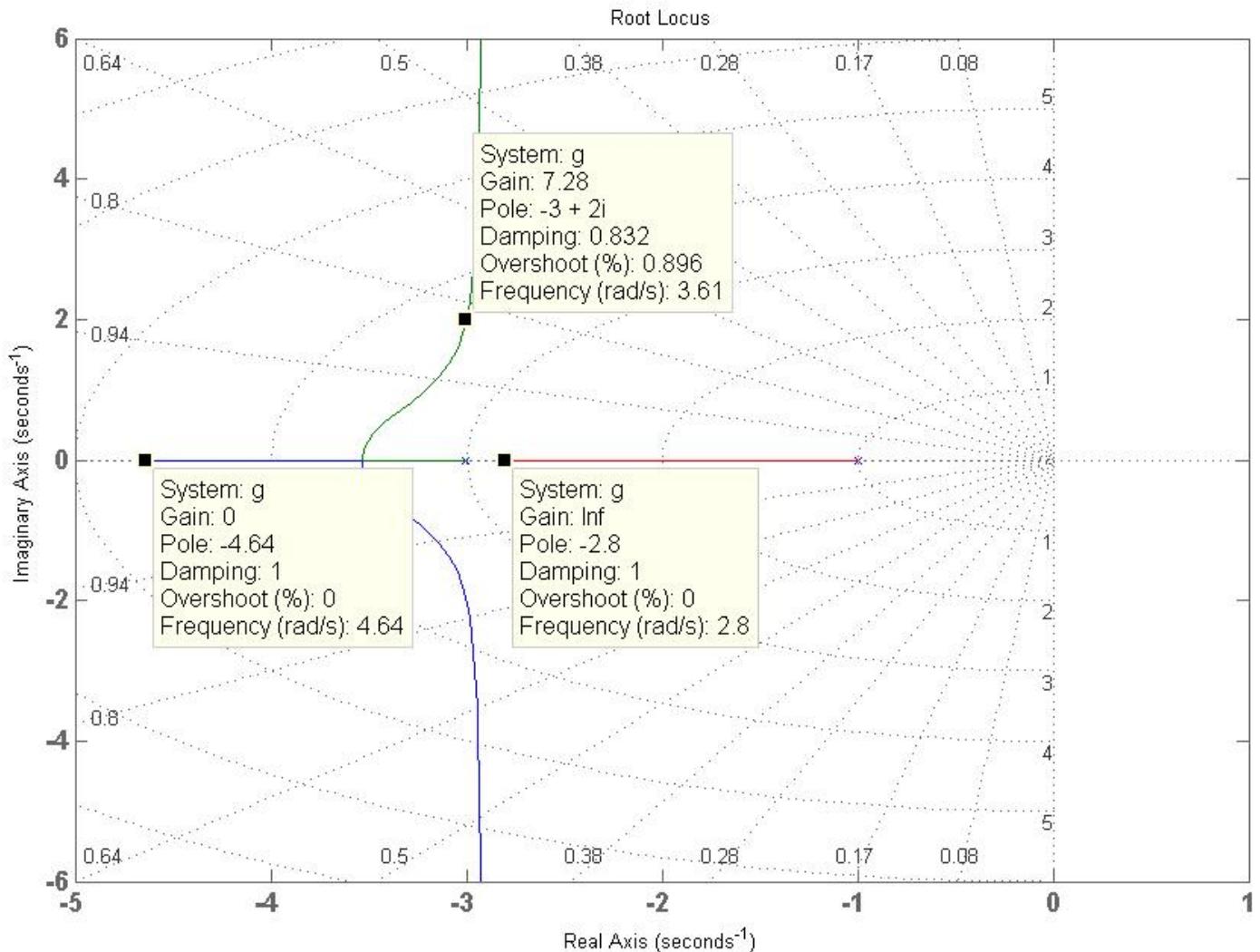
Tüm uzunluklar bilindiğinden dolayı, Kazanç değeri (K_c) kolaylıkla hesaplanır.

$$K_c = \frac{\prod_{i=1}^4 \text{poles}}{\prod_{i=1}^1 \text{zeros}} \rightarrow K_c = \frac{(p_1) \cdot (p_2) \cdot (p)}{(z)}$$

$$K_c = \frac{(2) \cdot (2.8284271247461978) \cdot (2.5861774408671891)}{(2.009780947339443)}$$

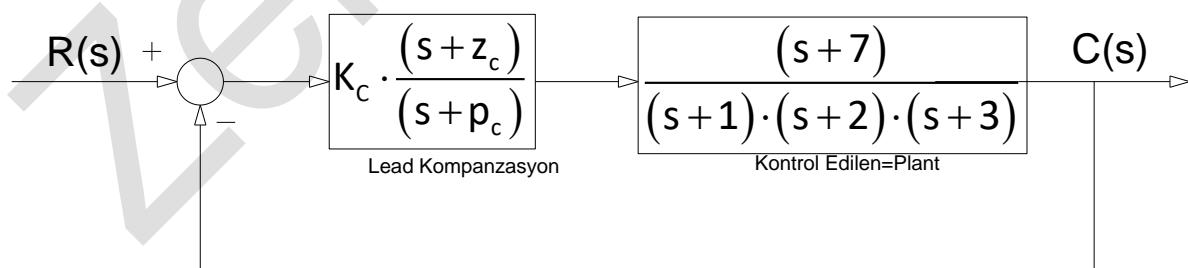
$$K_c = 7.2792156108742763$$

Aşağıda verilen grafikte matlab ile elde edilen sonuçlar bulunmaktadır ve hesaplanan değerlerle aynı uyumlu olduğu görülmektedir.



10.5.1.2 Misal

Aşağıda verilen kontrol devresinde maksimum aşma değeri (%OS)= 8.10025921579431 ve ayarlama süresinin ($T_s = 2.59960695396637$ s) olması için sisteme ilave edilecek Lead Kompanzasyon ile ilgili (z_c , p_c , ve K_c) değerlerini hesaplayınız.



Çözüm: maksimum aşma değeri verildiği için buradan (ζ) sönümleme oranı hesaplanabilir.

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%OS}{100}\right)}} \rightarrow \zeta = \frac{-\ln\left(\frac{8.10025921579431}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{8.10025921579431}{100}\right)}} \rightarrow \boxed{\zeta = 0.6246950475544243}$$

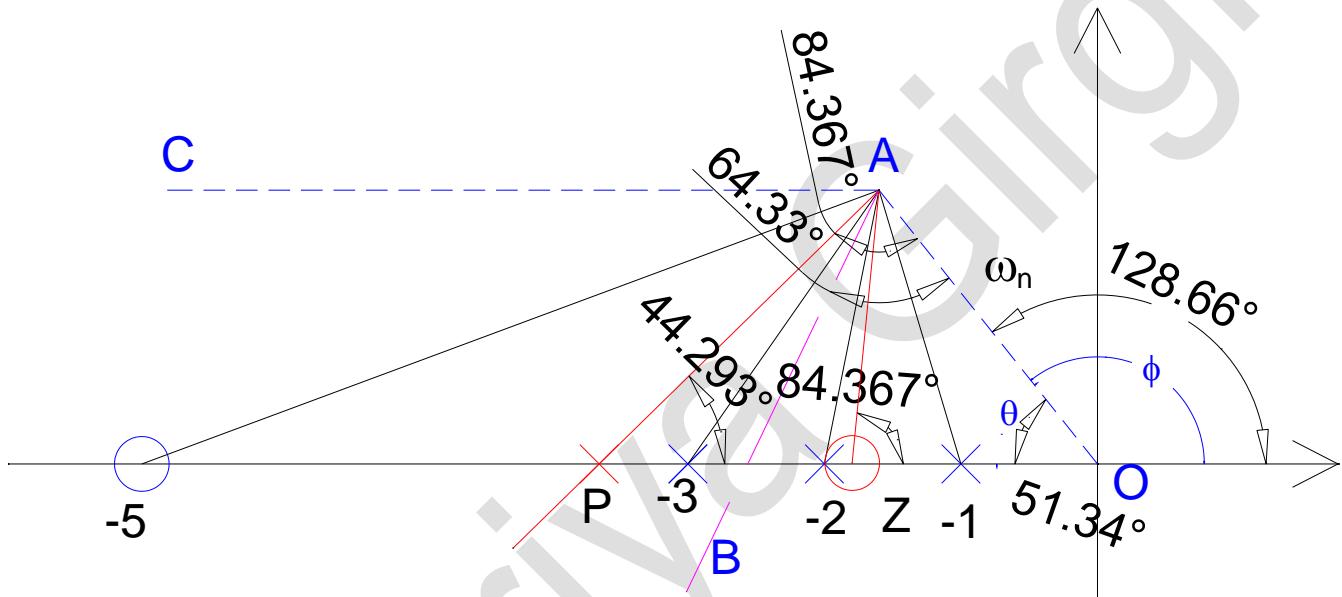
$$\zeta = \cos(\theta) \rightarrow \theta = \cos^{-1}(\zeta) \rightarrow \theta = 51.340191745909912^\circ$$

$$\phi = \text{CAO} = 180^\circ - \theta = 128.65980825409008^\circ \rightarrow \phi = 128.65980825409008^\circ$$

Ayrıca ayarlama süresinden faydalananarak, doğal frekans hesaplanır.

$$T_s = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta \cdot \omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta \cdot T_s} \rightarrow \omega_n = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1-0.6246950475544243^2})}{0.6246950475544243 \cdot 2.59960695396637}$$

$\omega_n = 2.561249694973144 \text{ rad/s}$ →, $a = -\omega_n \cdot \cos(\theta)$ → $a = -1.6$ ve $b = \omega_n \cdot \sin(\theta)$ olduğundan, bilinen değerler yerine yazıldığında, $(s = -1.6 + 2 \cdot j)$ olduğu görülür



. Root-Locus açı özelliği kullanıldığından,

$$\left[\sum_{j=1, j \neq c}^m (\text{Zeros Angles})_j + \theta z \right] - \left[\sum_{i=1, i \neq c}^n \theta (\text{Poles Angles})_i + \theta p \right] = \mp 180^\circ$$

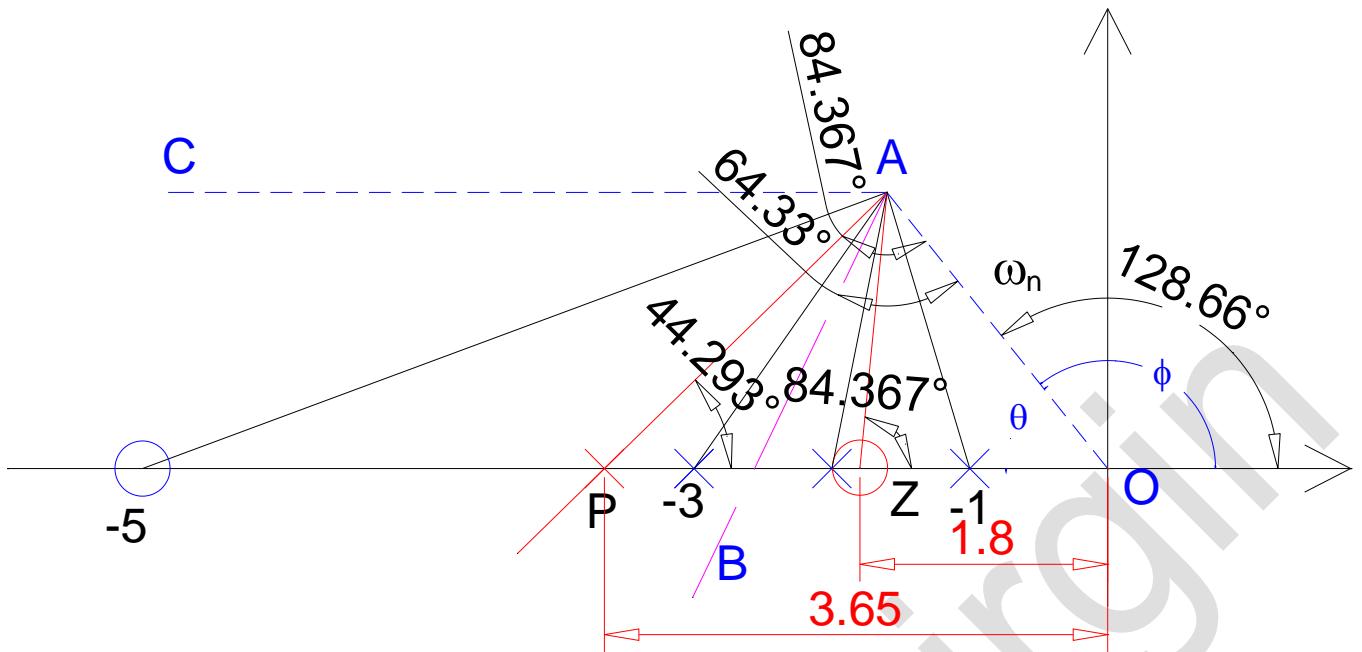
$$[\theta z_1 + \theta z] - [\theta p_1 + \theta p_2 + \theta p_3 + \theta p] = +180^\circ$$

$$[20.323 + \theta z] - [55.008 + 78.69 + 106.699 + \theta p] = +180^\circ$$

$$\theta z - \theta p = -20.323 + 240.397 + 180^\circ \rightarrow \theta z - \theta p = 400.074$$

$$\theta z - \theta p = 400.074 - 360 \rightarrow \theta z - \theta p = 40.0741547317520390^\circ \rightarrow \theta z - \theta p = \alpha = 40.074^\circ$$

$$\text{PAZ} = \boxed{\alpha = 40.074^\circ} \rightarrow \text{BAO} = \frac{\phi}{2} = 64.329904127045^\circ \rightarrow \text{PAB} = \frac{\alpha}{2} = 20.037077365876^\circ$$



Yukarıdaki şeviden de anlaşılacağı gibi (PAO) üçgeni göz önüne alındığında;

$$\text{POA} = \theta = 51.340191745909912^\circ$$

$$\text{PAO} = \frac{\phi + \alpha}{2} = \frac{128.65980825409008 + 40.074154731752039}{2} \rightarrow \text{PAO} = 84.366981492921056^\circ$$

Bir üçgenin iç açıları toplamı (180°) olduğundan dolayı, hesaplanması gereken (θ_p) açısı bu özellikten dolayı kolaylıkla bulunur.

(PAO) üçgeninin iç açıları toplamı;

$$\theta_p + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\phi}{2} \right) + \theta = 180^\circ \rightarrow \theta_p + (\text{PAO}) + \theta = 180^\circ \rightarrow \theta_p = 180^\circ - \theta - (\text{PAO})$$

$$\theta_p = 180^\circ - (51.340191745909912 + 84.366981492921056)$$

$$\boxed{\theta_p = 44.292826761169017^\circ}$$

Buradan pole değerinin gerçek eksen üzerindeki yerini belirlemek için ilk önce ($p = \overline{PA}$) uzunluğu hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$\sin(\theta_p) = \frac{b}{\overline{PA}} = \frac{b}{p} \rightarrow p = \frac{b}{\sin(\theta_p)} \rightarrow p = \frac{2}{\sin(44.292826761169017^\circ)} \rightarrow \boxed{p = 2.8639932112657438}$$

$$p_c = -p \cdot \cos(\theta_p) + a \rightarrow \boxed{p_c = -3.649989540016306} \text{ olduğu görülür.}$$

(PAZ) üçgeni dikkate alındığında;

$$\theta_z = \theta_p + \alpha \rightarrow \theta_z = 44.292826761169017^\circ + 40.074154731752039^\circ$$

$$\boxed{\theta_z = 84.366981492921056^\circ} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Buradan zero değerinin gerçek eksen üzerindeki yerini belirlemek için ilk önce ($z = \overline{ZA}$) uzunluğu hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$\sin(\theta z) = \frac{b}{ZA} = \frac{b}{z} \rightarrow z = \frac{b}{\sin(\theta z)} \rightarrow z = \frac{2}{\sin(84.366981492921056^\circ)} \rightarrow z = 2.0097048658190872$$

$$z_c = -z \cdot \cos(\theta z) + a \rightarrow z_c = -1.7972654244841264$$

olduğu görülür.

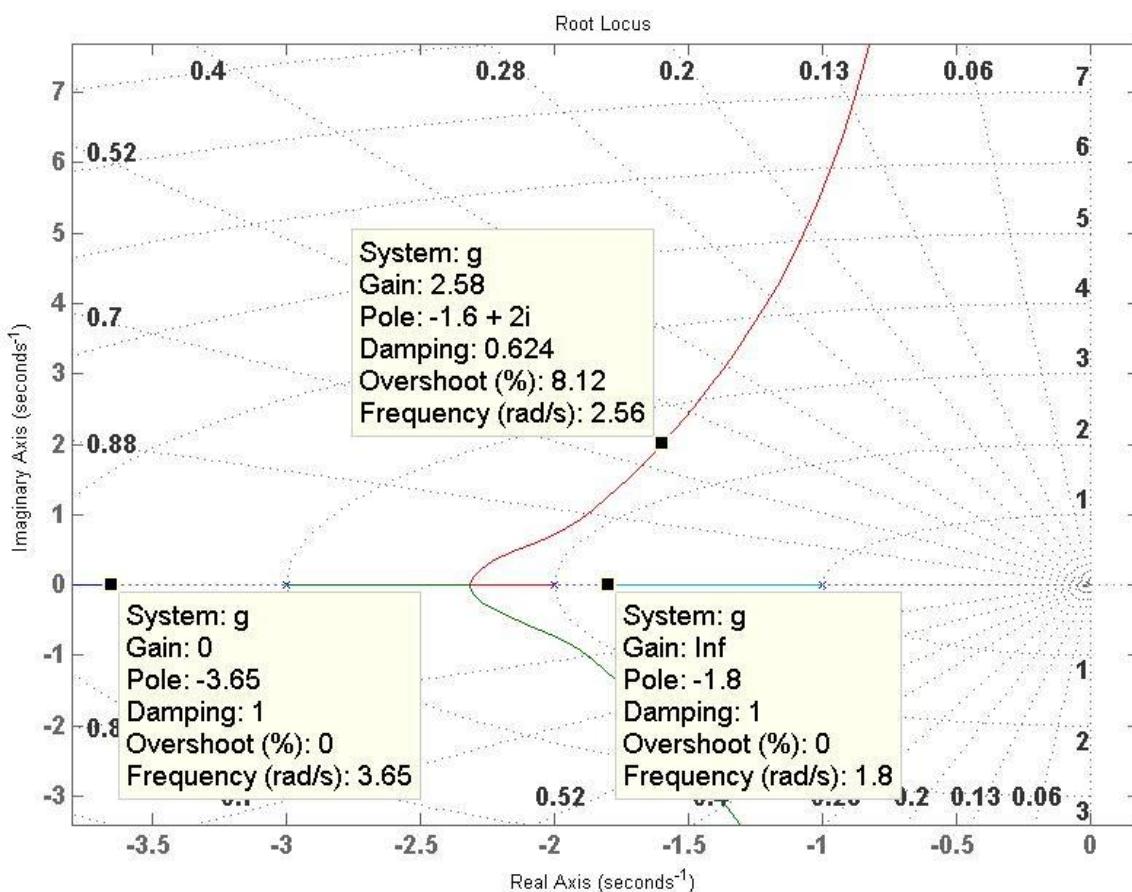
Tüm uzunluklar bilindiğinden dolayı, Kazanç değeri (K_c) kolaylıkla hesaplanır.

$$K_c = \frac{\prod_{i=1}^4 \text{poles}}{\prod_{i=1}^1 \text{zeros}} \rightarrow K_c = \frac{(p_1) \cdot (p_2) \cdot (p_3) \cdot (p_4)}{(z_1) \cdot (z)}$$

$$K_c = \frac{(2.4413111231467428) \cdot (2.0396078054371163) \cdot (2.0880613017821141) \cdot (2.8639932112657438)}{(5.7584720195551862) \cdot (2.0097048658190872)}$$

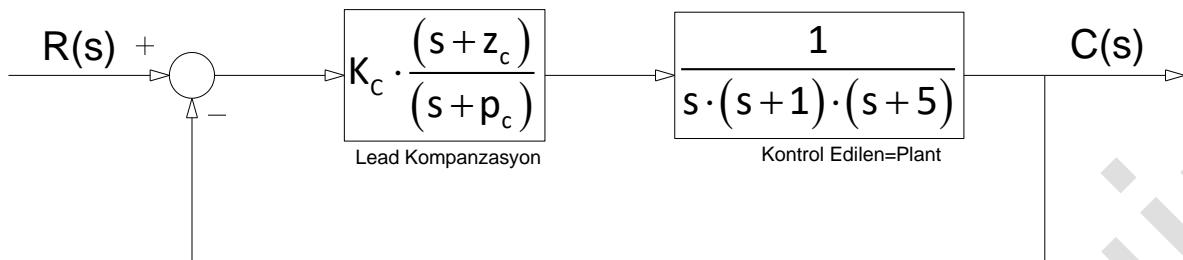
$$K_c = 2.573033727840607$$

Aşağıda verilen grafikte matlab ile elde edilen sonuçlar bulunmaktadır ve hesaplanan değerlerle aynı uyumlu olduğu görülmektedir.



10.5.1.3 Misal

Aşağıda verilen kontrol devresinde maksimum aşma değeri (%OS)= 20.78795763507624 ve ayarlama süresinin ($T_s = 4.02359478108525$ s) olması için sisteme ilave edilecek Lead Kompanzasyon ile ilgili (z_c , p_c , ve K_c) değerlerini hesaplayınız.



Şekil 8: Lead kompanzasyonlu kontrol devresi

Çözüm: maksimum aşma değeri verildiği için buradan (ζ) sönümleme oranı hesaplanabilir.

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%OS}{100}\right)}} \rightarrow \zeta = \frac{-\ln\left(\frac{20.7879576350762}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{20.7879576350762}{100}\right)}} \rightarrow \boxed{\zeta = 0.447213595499958}$$

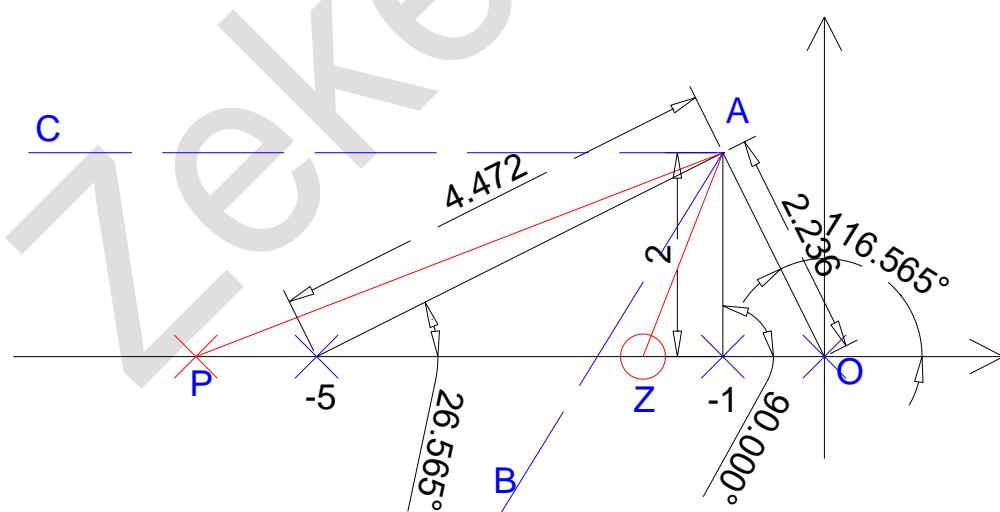
$$\zeta = \cos(\theta) \rightarrow \theta = \cos^{-1}(\zeta) \rightarrow \boxed{\theta = 63.434948822922^\circ}$$

Ayrıca ayarlama süresinden faydalananarak, doğal frekans hesaplanır.

$$T_s = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2})}{\zeta \cdot \omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2})}{\zeta \cdot T_s} \rightarrow \omega_n = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1 - 0.447213595499958^2})}{0.447213595499958 \cdot 4.02359478108525}$$

$$\boxed{\omega_n = 2.23606797749979 \text{ rad/s}} \rightarrow, a = -\omega_n \cdot \cos(\theta) \rightarrow a = -2.23606797749979 \cdot \cos(63.434948822922) \text{ ve}$$

$b = \omega_n \cdot \sin(\theta)$ olduğundan, bilinen değerler yerine yazıldığından, ($s = -1 + 2 \cdot j$) olduğu görülür



Şekil 9: Plant üzerindeki kutup ve sıfırların hem boyalarının ve hem de açılarının gösterilmesi

Çözümün yapılması kolay hale getirilmiş olur. Root-Locus açı özelliği kullanıldığında,

$$\left[\sum_{j=1, j \neq c}^m (\text{Zeros Angles})_j + \theta_z \right] - \left[\sum_{i=1, i \neq c}^n \theta (\text{Poles Angles})_i + \theta_p \right] = \mp 180^\circ$$

$$\theta_z - [\theta p_1 + \theta p_2 + \theta p_3 + \theta p] = +180^\circ \rightarrow \theta_z - [26.595 + 90 + 116.565 + \theta p] = +180^\circ$$

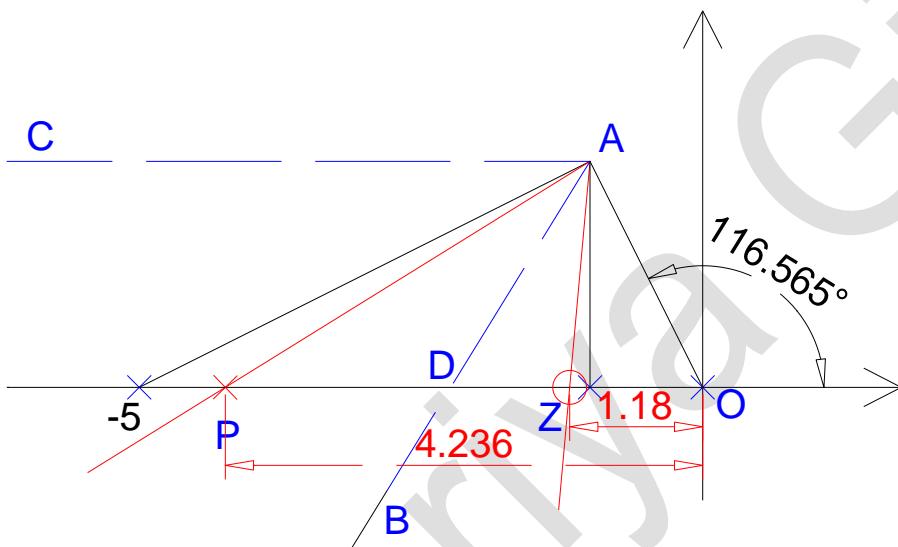
$$\theta_z - \theta p = 26.595 + 90 + 116.565 + 180^\circ \rightarrow \theta_z - \theta p = 233.130 + 180$$

$$\theta_z - \theta p = 413.130 \rightarrow \theta_z - \theta p = 413.130 - 360 \rightarrow \theta_z - \theta p = \alpha = 53.130^\circ$$

$$PAZ = \alpha = 53.130^\circ$$

$$CAO = 180^\circ - \theta = \phi = 116.565^\circ \rightarrow BAO = \frac{\phi}{2} = 58.282525588539^\circ$$

$$PAB = \frac{\alpha}{2} = 26.565^\circ$$



Sekil 10: Kompanzasyonda kullanılan kutup ve sıfır değerlerinin gerçek gösterimi

Yukarıdaki şeviden de anlaşılacağı gibi (PAO) üçgeni göz önüne alındığında;

$$POA = \theta = 63.434948822922^\circ$$

$$PAO = \frac{\phi + \alpha}{2} = \frac{116.565051177078 + 53.130102354156}{2} \rightarrow PAO = 84.847576765617^\circ$$

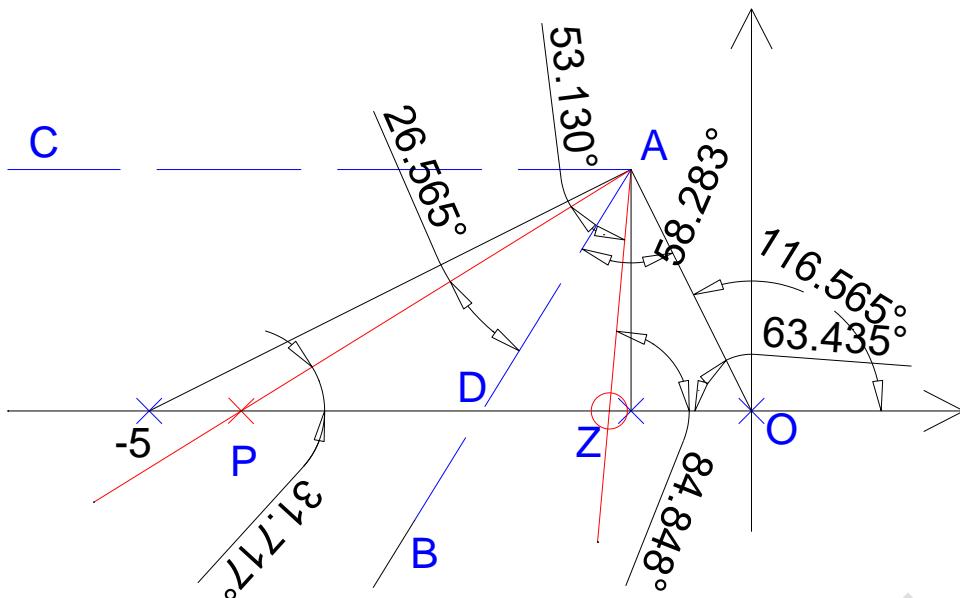
Bir üçgenin iç açıları toplamı (180°) olduğundan dolayı, hesaplanması gereken (θ_p) açısı bu özellikten dolayı kolaylıkla bulunur.

(PAO) üçgeninin iç açıları toplamı;

$$\theta_p + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\phi}{2} \right) + \theta = 180^\circ \rightarrow \theta_p = 180^\circ - \left(\theta + \frac{\phi + \alpha}{2} \right)$$

$$\theta_p = 180^\circ - \left(63.434948822922 + \frac{116.565051177078 + 53.130102354156}{2} \right)$$

$$\theta_p = 31.717474411461^\circ$$



Şekil 11: alfa açısının AB açıortayı ile eşit bölünmesinin gösterimi

Buradan pole değerinin gerçek eksen üzerindeki yerini belirlemek için ilk önce ($p = \overline{PA}$) uzunluğu hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$\sin(\theta p) = \frac{b}{\overline{PA}} = \frac{b}{p} \rightarrow p = \frac{b}{\sin(\theta p)} \rightarrow p = \frac{2}{\sin(31.717474411461^\circ)} \rightarrow p = 3.80422606518062$$

$$p_c = -p \cdot \cos(\theta p) + a \rightarrow p_c = -3.23606797749979 - 1 \rightarrow p_c = -4.23606797749979$$

Olduğu görülür.

(PAZ) üçgeni dikkate alındığında;

$$\theta z = \theta_p + \alpha \rightarrow \theta z = 31.717474411461^\circ + 53.13010235415598^\circ$$

$$\theta z = 84.847576765617^\circ \text{ olarak hesaplanır.}$$

Buradan zero değerinin gerçek eksen üzerindeki yerini belirlemek için ilk önce ($z = \overline{ZA}$) uzunluğu hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$\sin(\theta z) = \frac{b}{\overline{ZA}} = \frac{b}{z} \rightarrow z = \frac{b}{\sin(\theta z)} \rightarrow z = \frac{2}{\sin(84.847576765617^\circ)} \rightarrow z = 2.00811415886227$$

$$z_c = -z \cdot \cos(\theta z) + a \rightarrow z_c = -0.180339887498949 - 1 \rightarrow z_c = -1.180339887498949$$

olduğu görülür.

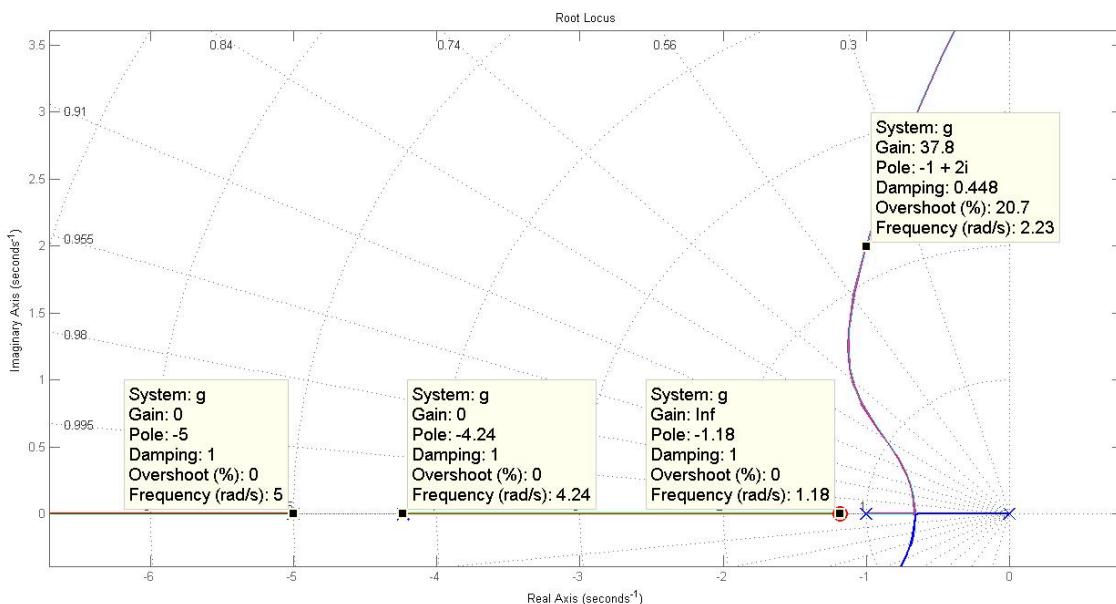
Tüm uzunluklar bilindiğinden dolayı, Kazanç değeri (K_c) kolaylıkla hesaplanır.

$$K_c = \frac{\prod_{i=1}^4 \text{poles}}{\prod_{i=1}^1 \text{zeros}} \rightarrow K_c = \frac{(p_1) \cdot (p_2) \cdot (p_3) \cdot (p)}{(z)}$$

$$K_c = \frac{(4.47213595499958) \cdot (2) \cdot (2.23606797749979) \cdot (3.80422606518062)}{(2.00811415886227)}$$

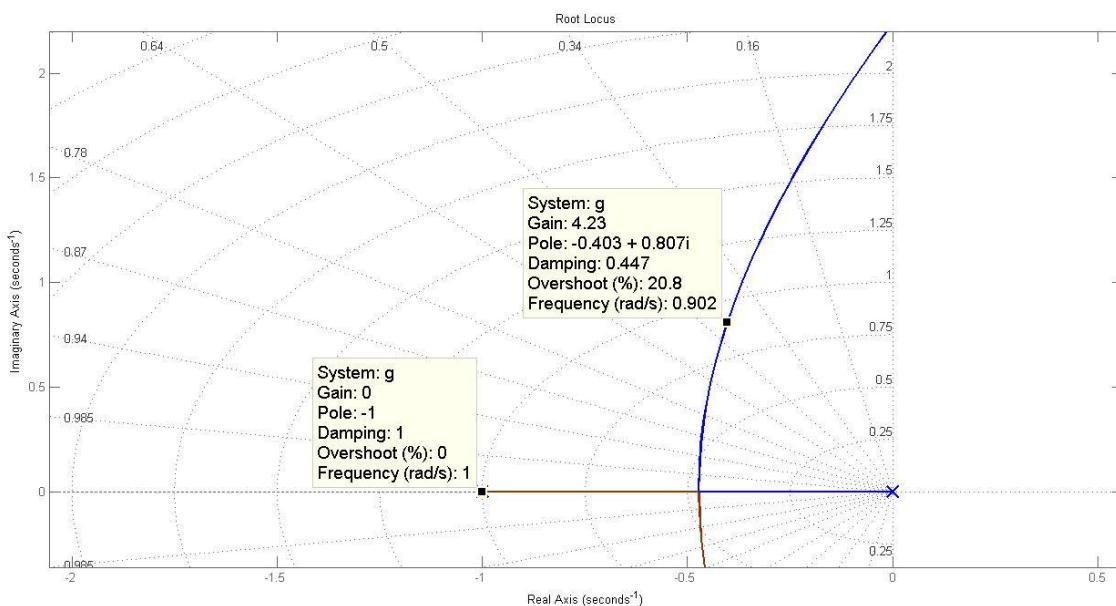
$$K_c = 37.8885438199984$$

Kazanç değeri(=Gain) böylece hesaplanmış olur. Sistemin sonuçları gerçek Root-Locus grafiğinde aşağıda verilmiştir. Elde edilen sonuçların, Matlab programıyla elde grafikle tamamen uyumlu olduğu görülmüştür.



Şekil 12: matlab ile elde edilen sonuçların aynı olduğunu ispatı

Kompenzasyon yapılmamış halinin Root-Locus grafiği karşılaştırma amaçlı aşağıda verilmiştir.

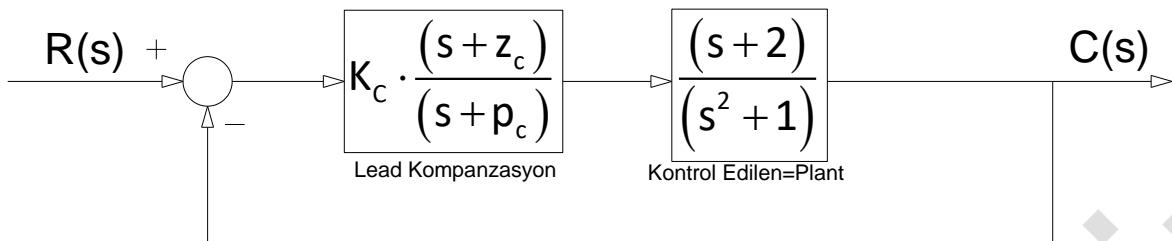


Şekil 13: Kompenzasyon yapılmadan önceki hali

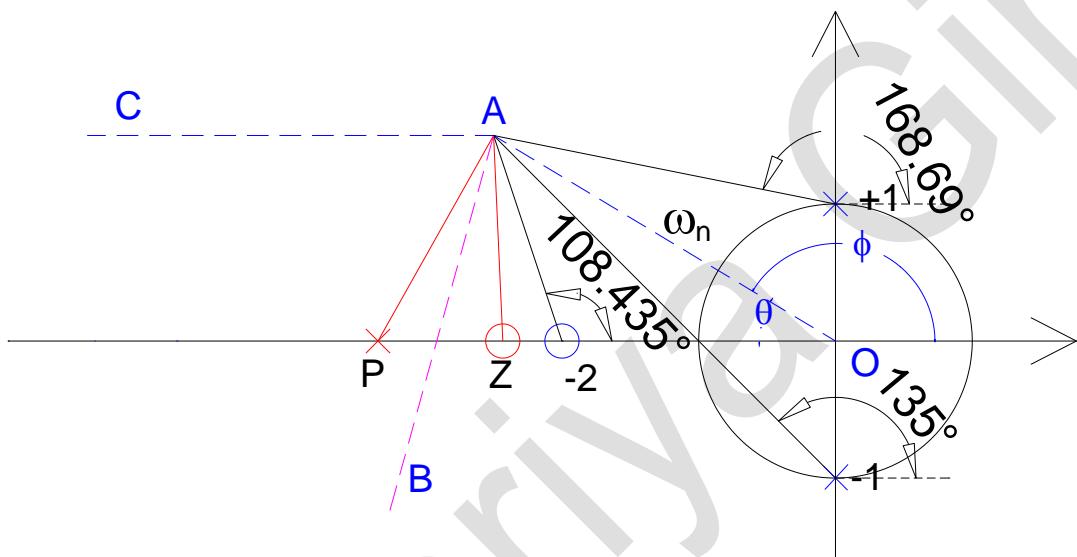
Göründüğü gibi "Lead kompenzasyon" yapılmadığında ayarlama süresi artmaktadır. Diğer kontrol elemanları için de tasarım yapıldığında en iyi hangisinin olduğu daha rahat görülür.

10.5.1.4 Misal

Aşağıda verilen kontrol devresinde ($s = -2.5 + 1.5 \cdot j$) noktasının root-locus olması için, sisteme ilave edilecek Lead Kompanzasyon ile ilgili (z_c , p_c , ve K_c) değerlerini hesaplayınız.



Çözüm: verilen ($s = -2.5 + 1.5 \cdot j$) noktası ve diğer sıfır ve pole değerleri kompleks düzlemede yerine yerleştirilir. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1.5}{2.5}\right) \rightarrow \theta = 30.963756532073521^\circ \rightarrow \phi = 149.03624346792648^\circ$



. Root-Locus açı özelliği kullanıldığında,

$$\left[\sum_{j=1, j \neq c}^m (\text{Zeros Angles})_j + \theta_z \right] - \left[\sum_{i=1, i \neq c}^n \theta(\text{Poles Angles})_i + \theta_p \right] = \mp 180^\circ$$

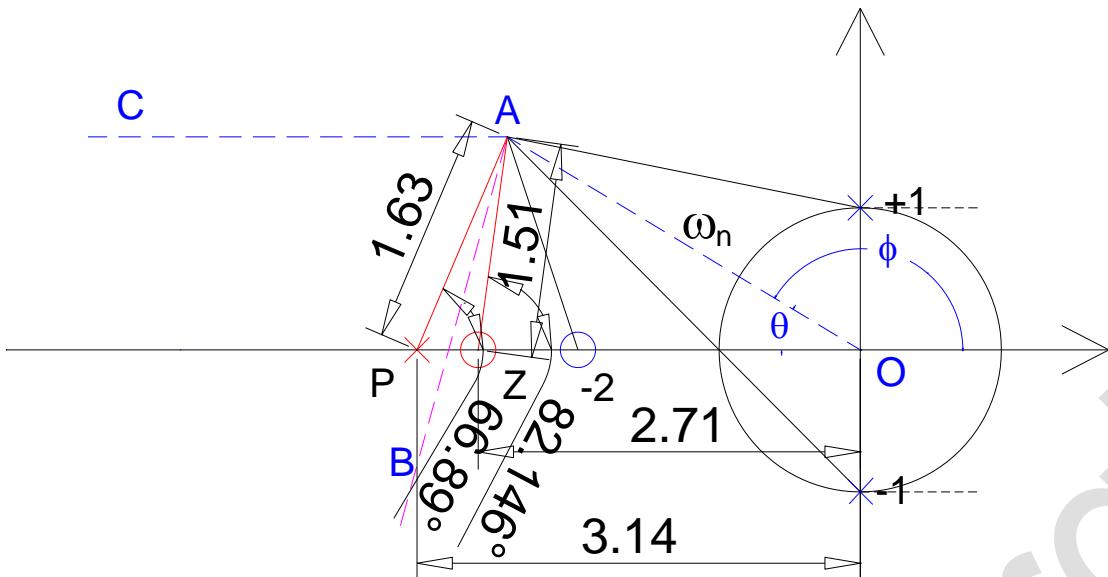
$$[\theta_z + \theta_z] - [\theta_p + \theta_p + \theta_p] = +180^\circ$$

$$[108.435 + \theta_z] - [135 + 168.69 + \theta_p] = +180^\circ$$

$$\theta_z - \theta_p = -108.435 + 303.69 + 180^\circ \rightarrow \theta_z - \theta_p = 375.255$$

$$\theta_z - \theta_p = 375.255 - 360 \rightarrow \theta_z - \theta_p = 15.255^\circ \rightarrow \theta_z - \theta_p = \alpha = 15.255^\circ$$

$$\text{PAZ} = \boxed{\alpha = 15.255^\circ} \rightarrow \boxed{\text{BAO} = \frac{\phi}{2} = 74.5181217339632^\circ} \rightarrow \text{PAB} = \frac{\alpha}{2} = 7.6275593515289^\circ$$



Yukarıdaki şeviden de anlaşılacağı gibi (PAO) üçgeni göz önüne alındığında;

$$\text{POA} = \theta = 30.963756532073521^\circ$$

$$\text{PAO} = \frac{\phi + \alpha}{2} = \frac{149.03624346792648 + 15.255118703057796}{2} \rightarrow \text{PAO} = 82.146^\circ$$

Bir üçgenin iç açıları toplamı (180°) olduğundan dolayı, hesaplanması gereken (θ_p) açısı bu özellikten dolayı kolaylıkla bulunur.

(PAO) üçgeninin iç açıları toplamı;

$$\theta_p + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\phi}{2} \right) + \theta = 180^\circ \rightarrow \theta_p + (\text{PAO}) + \theta = 180^\circ \rightarrow \theta_p = 180^\circ - \theta - (\text{PAO})$$

$$\theta_p = 180^\circ - (82.146 + 30.964)$$

$$\boxed{\theta_p = 66.890562382434339^\circ}$$

Buradan pole değerinin gerçek eksen üzerindeki yerini belirlemek için ilk önce ($p = \overline{PA}$) uzunluğu hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$\sin(\theta_p) = \frac{b}{\overline{PA}} = \frac{b}{p} \rightarrow p = \frac{b}{\sin(\theta_p)} \rightarrow p = \frac{1.5}{\sin(66.890562382434339^\circ)} \rightarrow \boxed{p = 1.6308657919775447}$$

$$p_c = -p \cdot \cos(\theta_p) + a \rightarrow \boxed{p_c = -3.1400962673243331} \text{ olduğu görülür.}$$

(PAZ) üçgeni dikkate alındığında;

$$\theta_z = \theta_p + \alpha \rightarrow \theta_z = 66.890562382434339^\circ + 15.255118703057796^\circ$$

$$\boxed{\theta_z = 82.145681085492143^\circ} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Buradan zero değerinin gerçek eksen üzerindeki yerini belirlemek için ilk önce ($z = \overline{ZA}$) uzunluğu hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$\sin(\theta z) = \frac{b}{ZA} = \frac{b}{z} \rightarrow z = \frac{b}{\sin(\theta z)} \rightarrow z = \frac{1.5}{\sin(82.145681085492143^\circ)} \rightarrow z = 1.5142051660844245$$

$$z_c = -z \cdot \cos(\theta z) + a \rightarrow z_c = -2.7069233795315535$$

olduğu görülür.

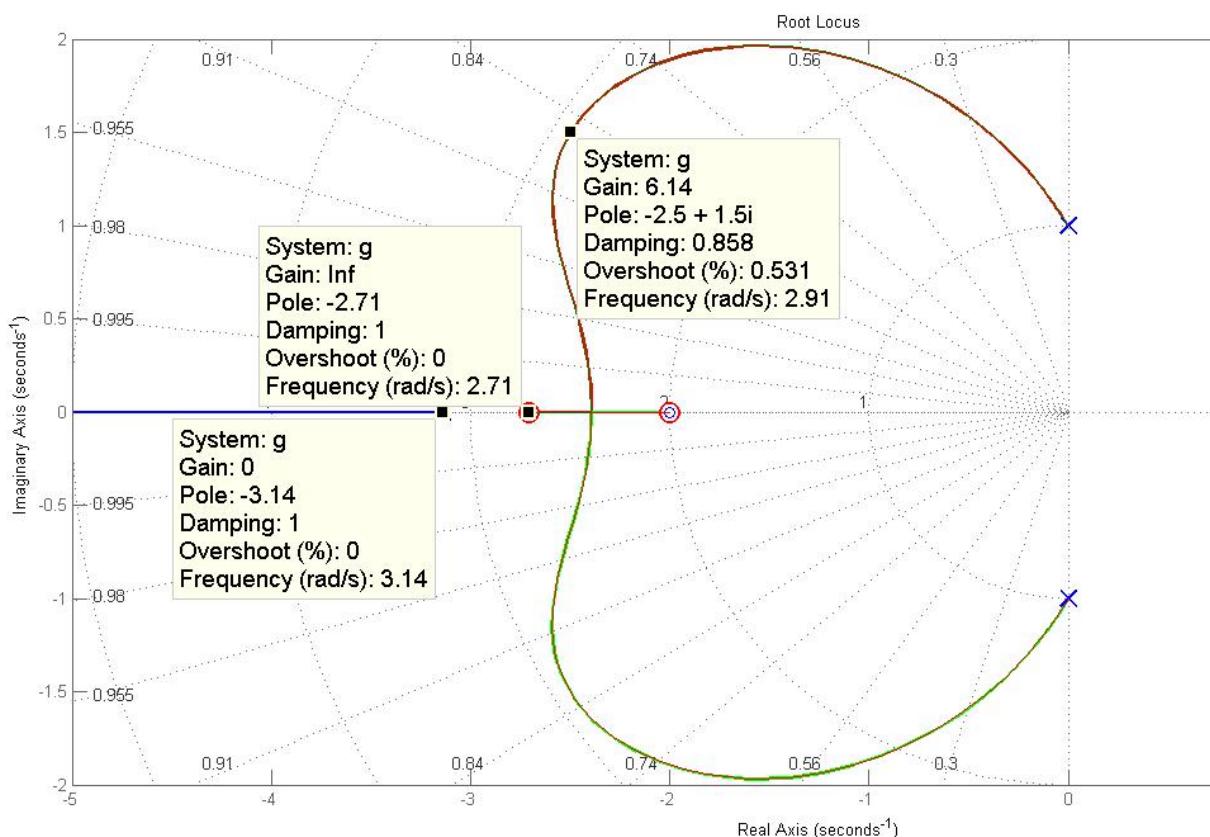
Tüm uzunluklar bilindiğinden dolayı, Kazanç değeri (K_c) kolaylıkla hesaplanır.

$$K_c = \frac{\prod_{i=1}^3 \text{poles}}{\prod_{i=1}^2 \text{zeros}} \rightarrow K_c = \frac{(p_1) \cdot (p_2) \cdot (p)}{(z_1) \cdot (z)}$$

$$K_c = \frac{(3.5355339059327378) \cdot (2.5495097567963922) \cdot (1.6308657919775447)}{(1.5811388300841898) \cdot (1.5142051660844245)}$$

$$K_c = 6.140096267324332$$

Aşağıda verilen grafikte matlab ile elde edilen sonuçlar bulunmaktadır ve hesaplanan değerlerle aynı uyumlu olduğu görülmektedir.



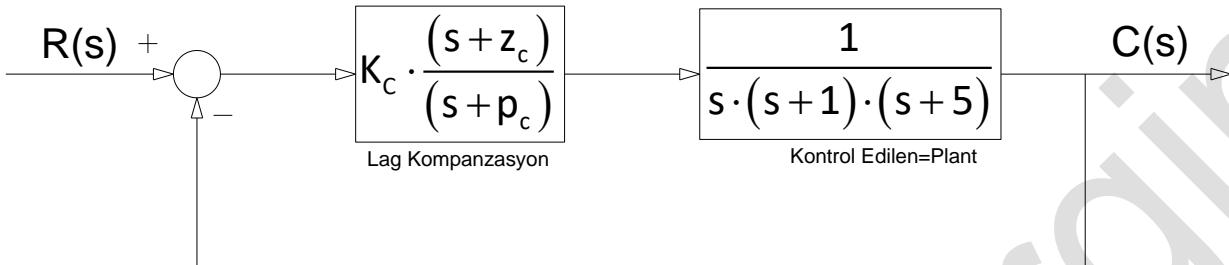
10.5.2 Root-Locus ile Lag Kompenzasyon (Lag Compensation with Root-Locus method)

Lag (engelleyici, geriletiçi) kompenzasyon isminden de anlaşılacağı gibi sistemi yavaşlatan ters yönde bir eleman ilave etmektir. Yani karmaşık düzlemede gerçek eksen üzerine bir tane kutup(pole) ve bu kutup değerinden daha küçük olacak bir sıfır (zero) ilave edilir. Diğer bir ifade ile sıfırın(zero)

sağ tarafında kutup(pole) vardır ve konumları ($\textcolor{red}{o} \leftarrow \textcolor{blue}{x}$) şeklindedir. Sisteme bunlar ilave edildiğinde yerleri tam olarak belli değildir ve hesaplama ile bulunur. Lag Kompanzasyon ;

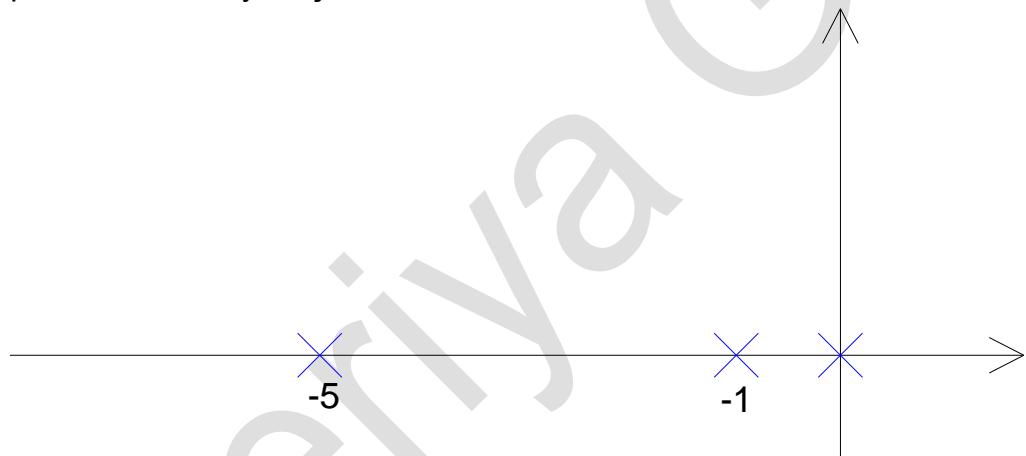
$$\left(K_c \cdot \frac{(s+z_c)}{(s+p_c)} \right), (z_c < p_c) \quad (8.16)$$

Şeklinde ifade edilebilir. Kontrol devresinde kullanımı aşağıdaki gibidir.

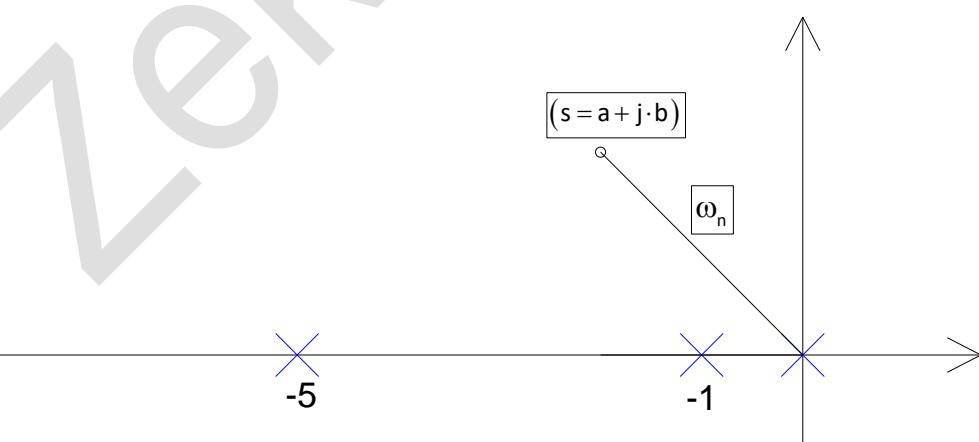


Lag Kompanzasyon işlem basamakları aşağıdaki gibi sırasıyla hesaplanabilir.

1. İlk işlem olarak, kontrol edilen eleman üzerinde bulunan kutuplar ve sıfırlar (Poles and zeros) kompleks düzlemede yerleştirilir.

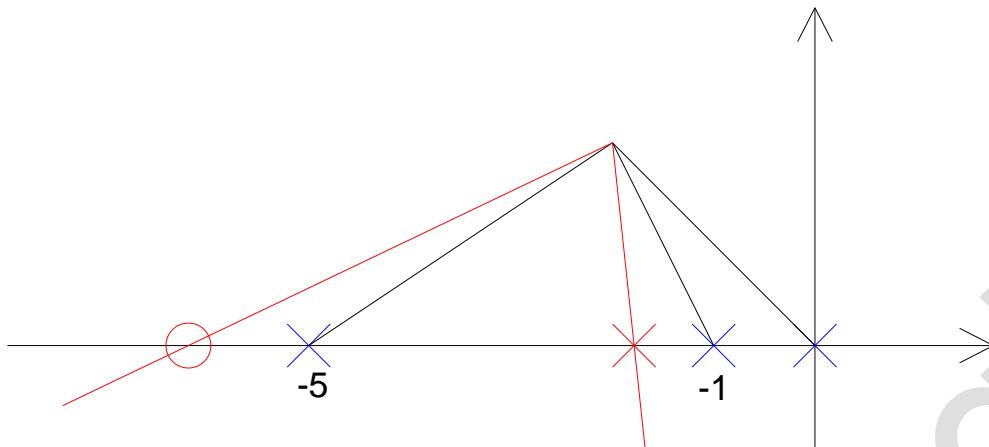


2. Zamana bağlı olarak ayarlanması istenen değerlerden $(s = a + j \cdot b)$ noktası belirlenir. Bu bizden istenilen kriterlere bağlıdır. Maksimum aşma değeri (%OS) şu olsun, ayarlama süresi (Ts) bu olsun gibi... Buradan istenen Root-Locus noktasının yeri belirlenir.



Bu nokta Root-Locus noktası olduğuna göre istenen şartları sağlamalıdır.

3. Yerleri bilinmeyen (z_c) ve (p_c) aynı kompleks düzlemede ($o \leftarrow x$) olacak şekilde aşağıdaki gibi yerleştirilir. Ve istenen ($s = a + j \cdot b$) noktasına poles ve zeros noktalarından doğrular çizilir.



Root-Locus metodunun temel özelliği olan açı bağıntısı, kullanılarak,

$$\left[\sum_{j=1, j \neq c}^m (\text{Zeros Angles})_j + \theta z \right] - \left[\sum_{i=1, i \neq c}^n \theta (\text{Poles Angles})_i + \theta p \right] = \mp 180^\circ$$

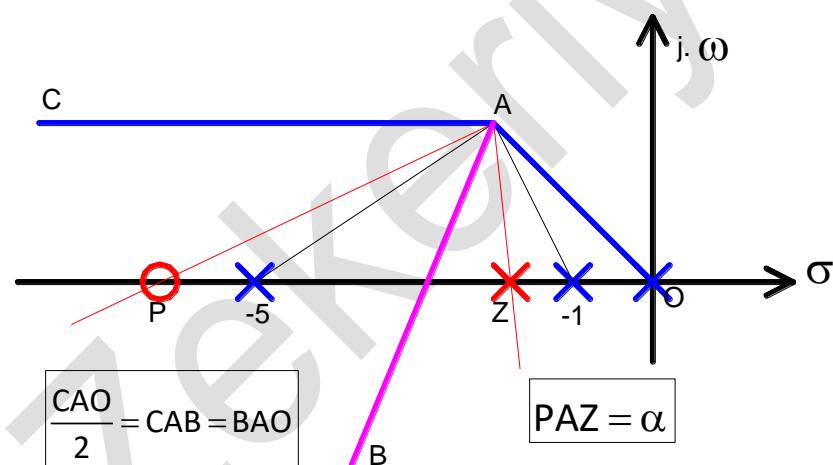
$(\theta z - \theta p = \alpha)$ açısı hesaplanır.

4. Diğer sağlaması gereken bir şart da Kazanç değeri ile büyülüklük arasındaki,

$$K_c = \frac{1}{M} = \rightarrow M = \frac{\prod(\text{zeros lengths})}{\prod(\text{poles lengths})}$$

bağıntısıdır.

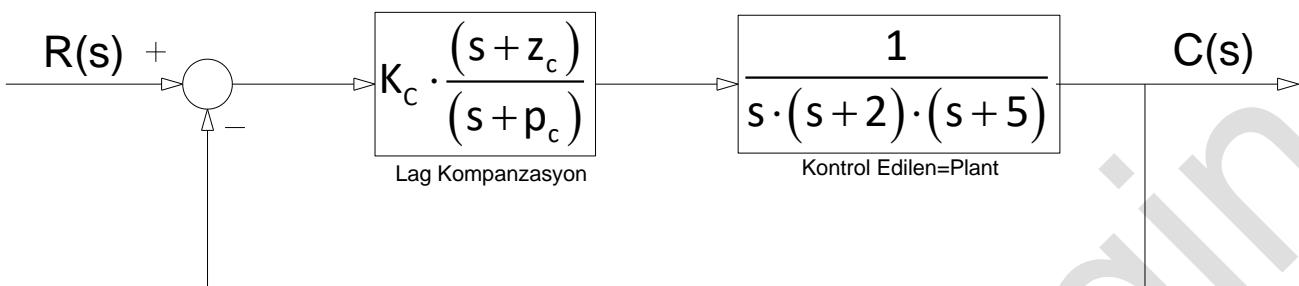
5. Ayrıca en iyi kazanç değerinin yeri, (\overline{AB}) Açı ortayı ile sağlandığı için, bu açı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.



Yukarıdaki şekilde $\left(PAB = BAZ = \frac{\alpha}{2} \right)$ olduğu takdirde en iyi kazanç değeri hesaplanmış olur. Böylece bu üç şartın birleştirilmesiyle birlikte istenen değerler elde edilir. Şayet çözüm sonucunda şartların sağlanmadığı görülsürse bu da Lag(engelleşici, gerileşici) Kompanzasyon ile bu sistemin kontrol edilemeyeceği anlamına gelir, yani başka kontrol elemanları denenmelidir. Aşağıda bununla ilgili misaller verilmiştir.

10.5.2.1 Misal

Aşağıda verilen kontrol devresinde maksimum aşma değeri (%OS)= 4.0 ve ayarlama süresinin ($T_s = 1.4s$) olması için sisteme ilave edilecek Lag Kompanzasyon ile ilgili (z_c , p_c , ve K_c) değerlerini hesaplayınız.



Çözüm: maksimum aşma değeri verildiği için buradan (ζ) sönümleme oranı hesaplanabilir.

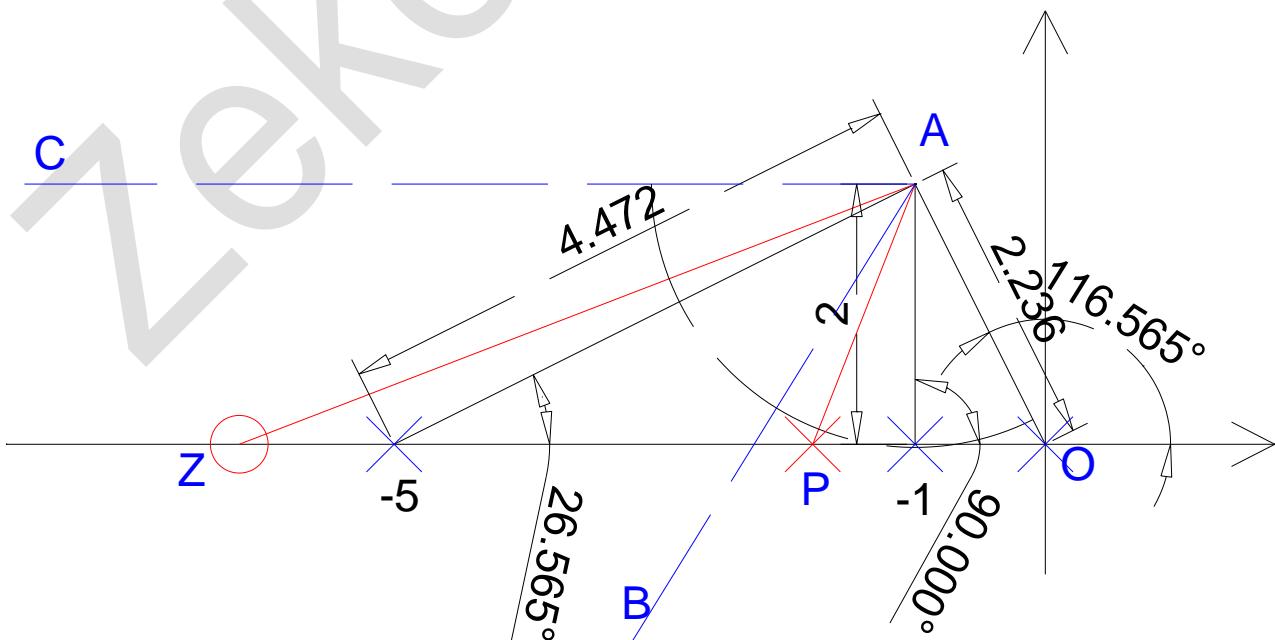
$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%OS}{100}\right)}} \rightarrow \zeta = \frac{-\ln\left(\frac{20.7879576350762}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{20.7879576350762}{100}\right)}} \rightarrow \boxed{\zeta = 0.447213595499958}$$

$$\zeta = \cos(\theta) \rightarrow \theta = \cos^{-1}(\zeta) \rightarrow \boxed{\theta = 63.434948822922^\circ}$$

Ayrıca ayarlama süresinden faydalananarak, doğal frekans hesaplanır.

$$T_s = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2})}{\zeta \cdot \omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2})}{\zeta \cdot T_s} \rightarrow \omega_n = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1 - 0.447213595499958^2})}{0.447213595499958 \cdot 4.02359478108525}$$

$\omega_n = 2.23606797749979 \text{ rad/s}$ $\rightarrow a = -\omega_n \cdot \cos(\theta)$ ve $b = \omega_n \cdot \sin(\theta)$ olduğundan, bilinen değerler yerine yazıldığında, $(s = a + b \cdot j)$ noktasının, $(s = -1 + 2 \cdot j)$ olduğu görülür. Bilinen değerler karmaşık(sanal) düzleme gösterildiğinde;



$$\left[\sum_{j=1, j \neq c}^m (\text{Zeros Angles})_j + \theta z \right] - \left[\sum_{i=1, i \neq c}^n \theta (\text{Poles Angles})_i + \theta p \right] = \mp 180^\circ$$

$$\theta z - [\theta p_1 + \theta p_2 + \theta p_3 + \theta p] = +180^\circ \rightarrow \theta z - [26.595 + 90 + 116.565 + \theta p] = +180^\circ$$

$$\theta z - \theta p = 26.595 + 90 + 116.565 + 180^\circ \rightarrow \theta z - \theta p = 233.130 + 180$$

$$\theta z - \theta p = 413.130 \rightarrow \theta z - \theta p = 413.130 - 360 \rightarrow \theta z - \theta p = \alpha = 53.130^\circ$$

$$ZAP = \alpha = 53.130^\circ$$

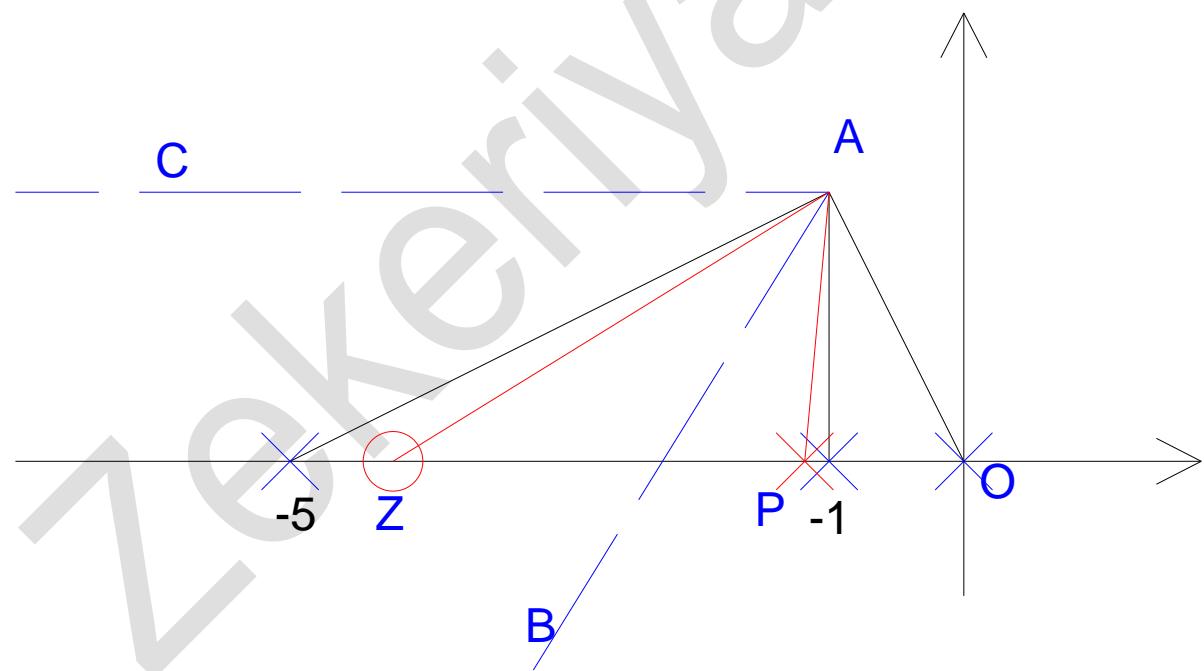
$$CAO = \pi - \theta = \phi = 116.565^\circ \rightarrow BAO = \frac{\phi}{2} = 58.282525588539^\circ$$

$$PAB = \frac{\alpha}{2} = 26.565^\circ$$

$$ZOA = \theta = 63.434948822922^\circ$$

$$ZAO = \frac{\phi + \alpha}{2} = \frac{116.565051177078 + 53.130102354156}{2} \rightarrow ZAO = 84.847576765617^\circ$$

Bir üçgenin iç açıları toplamı (180°) olduğundan dolayı, (ZAO) üçgeni göz önüne alındığında, hesaplanması gereken (θz) açısı bu özellikten dolayı kolaylıkla bulunur.



(ZAO) üçgeninin iç açıları toplamı;

$$\theta z + \theta + \frac{\phi + \alpha}{2} = 180^\circ \rightarrow \theta z = 180^\circ - \left(\theta + \frac{\phi + \alpha}{2} \right)$$

$$\theta z = 180^\circ - \left(63.434948822922 + \frac{116.565051177078 + 53.130102354156}{2} \right)$$

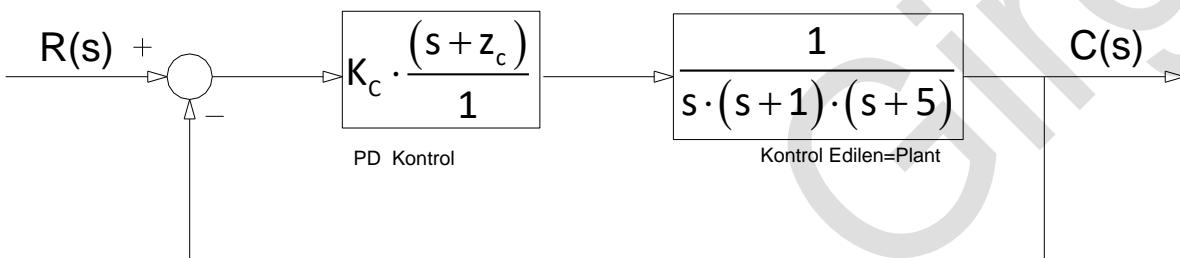
$$\Theta_z = 31.717474411461^\circ$$

10.5.3 Root-Locus ile PD(Orantı+Integral) Kontrol (PD Controller using Root-Locus method)

PD kontrol elemanı isminden de anlaşılacağı gibi sisteme (Orantı+Diferansiyel) eleman ilave etmek anlamına gelir. Yani karmaşık düzlemede gerçek eksen üzerine sadece bir tane sıfır (zero) ilave edilir. Sisteme bunlar ilave edildiğinde yerleri tam olarak belli değildir ve hesaplama ile bulunur. Lag Kompanzasyon ;

$$\left(K_c \cdot \frac{(s + z_c)}{1} \right) \quad (8.17)$$

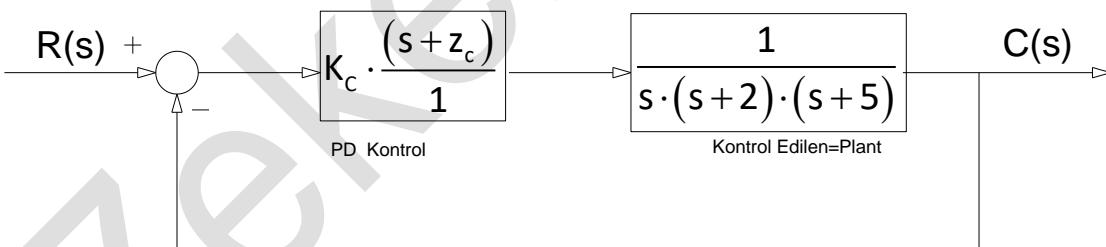
Şeklinde ifade edilebilir. Kontrol devresinde kullanımı aşağıdaki gibidir.



PD kontrol elemanın tasarımını oldukça kolaydır. Çünkü sisteme sadece bir adet sıfır (zero) ilave edilir ve bunun yeri bilinmemektedir. İşlem basamakları aşağıdaki gibi sırasıyla hesaplanabilir.

10.5.3.1 Misal

Aşağıda verilen kontrol devresinde maksimum aşma değeri (%OS)=4.0 ve ayarlama süresinin ($T_s = 1.4s$) olması için sistemde ileri yola ilave edilecek PD Kontrol elemanı ile ilgili (z_c) ve (K_c) değerlerini hesaplayınız.



Çözüm: maksimum aşma değeri verildiği için buradan (ζ) sönümleme oranı hesaplanabilir.

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%OS}{100}\right)}} \rightarrow \zeta = \frac{-\ln\left(\frac{4.0}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{4.0}{100}\right)}} \rightarrow \boxed{\zeta = 0.715645689865545}$$

$$\zeta = \cos(\theta) \rightarrow \theta = \cos^{-1}(\zeta) \rightarrow \boxed{\theta = 44.3038591944085740^\circ}$$

Ayrıca ayarlama süresinden faydalananarak, doğal frekans hesaplanır.

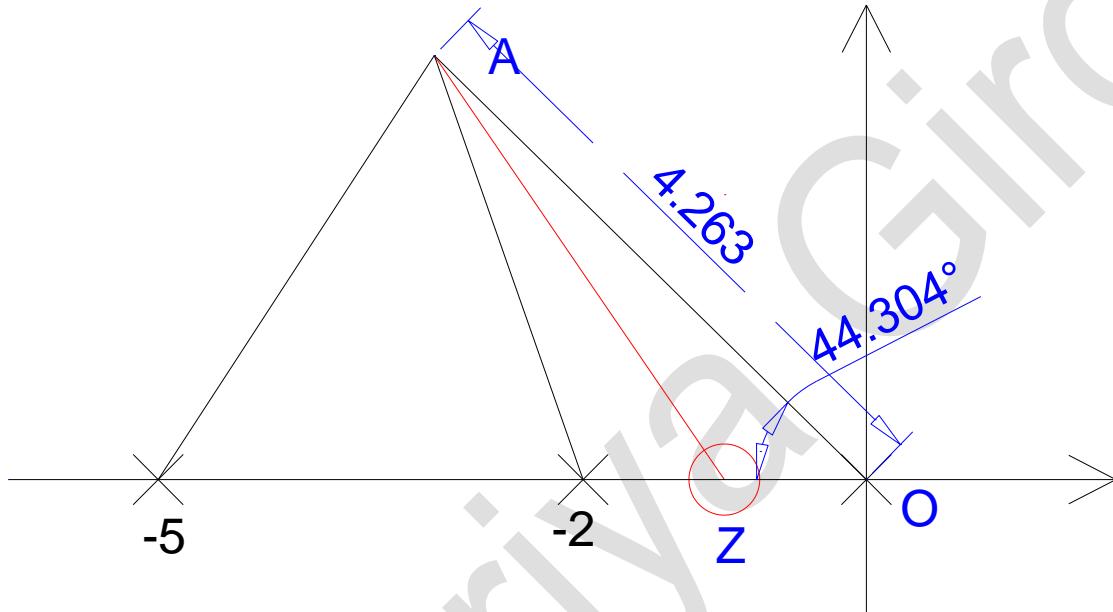
$$T_s = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta \cdot \omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta \cdot T_s} \rightarrow \omega_n = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1-0.715645689865545^2})}{0.715645689865545 \cdot 4.0}$$

$$\omega_n = 4.26277919067861 \text{ rad/s}$$

Böylece ($s=a+b \cdot j$) noktası belirlenmiş olur. Yani ($s=-3.05063955465768+2.97739562974767 \cdot j$) olduğu görülür. Bilinen değerler karmaşık(sanal) düzleme gösterildiğinde;

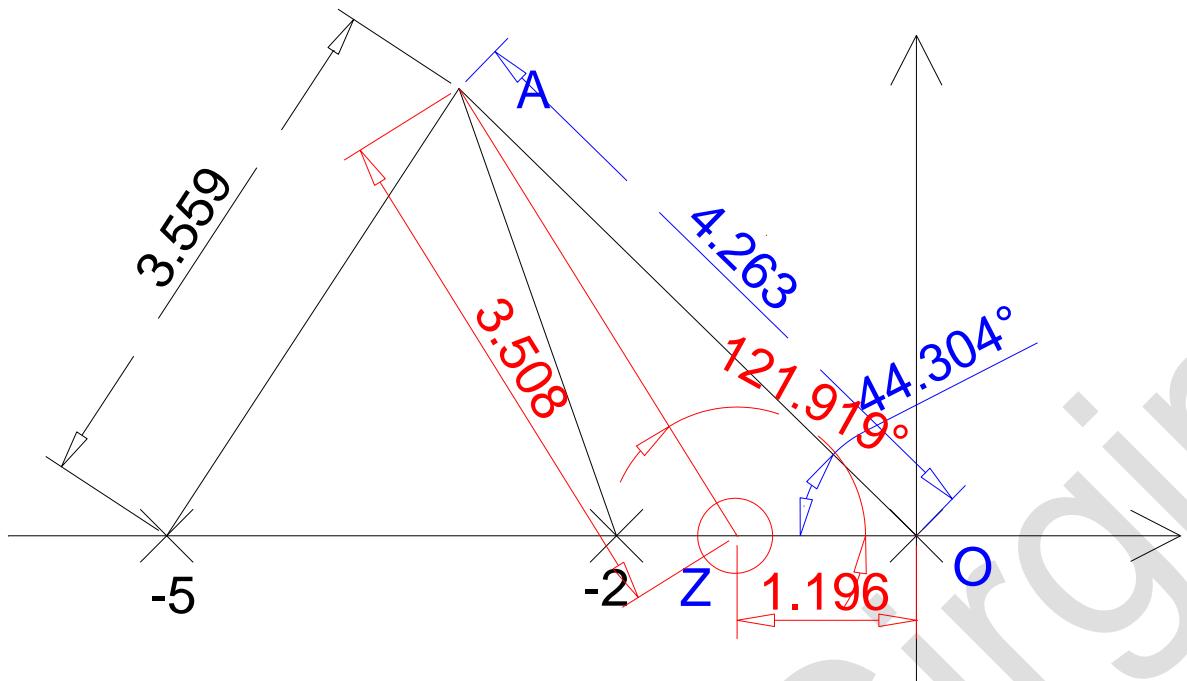
$$\left[\sum_{j=1, j \neq c}^m (\text{Zeros Angles})_j + \theta_z \right] - \left[\sum_{i=1}^n \theta (\text{Poles Angles})_i \right] = \mp 180^\circ$$

$$\theta_z - [\theta p_1 + \theta p_2 + \theta p_3] = +180^\circ \rightarrow \theta_z - [56.7864 + 109.4365 + 135.696] = +180^\circ$$



$$\theta_z = 301.919 + 180^\circ \rightarrow \theta_z = 481.919^\circ \rightarrow \theta_z = 481.919^\circ - 360^\circ \rightarrow \theta_z = 121.919080477703^\circ$$

Buradan zero değerinin gerçek eksen üzerindeki yerini belirlemek için ilk önce ($zl = \overline{ZA}$) uzunluğu hesaplanmalıdır. Bunun için;



$$\sin(\theta_z) = \frac{b}{ZA} = \frac{b}{z_l} \rightarrow z_l = \frac{b}{\sin(\theta_z)} \rightarrow z_l = \frac{2.97739562974767}{\sin(121.919080477703^\circ)} \rightarrow z_l = 3.50778846395386$$

$$z_c = -z_l \cdot \cos(\theta_z) + a \rightarrow z_c = -1.19599803355253$$

olduğu görülür.

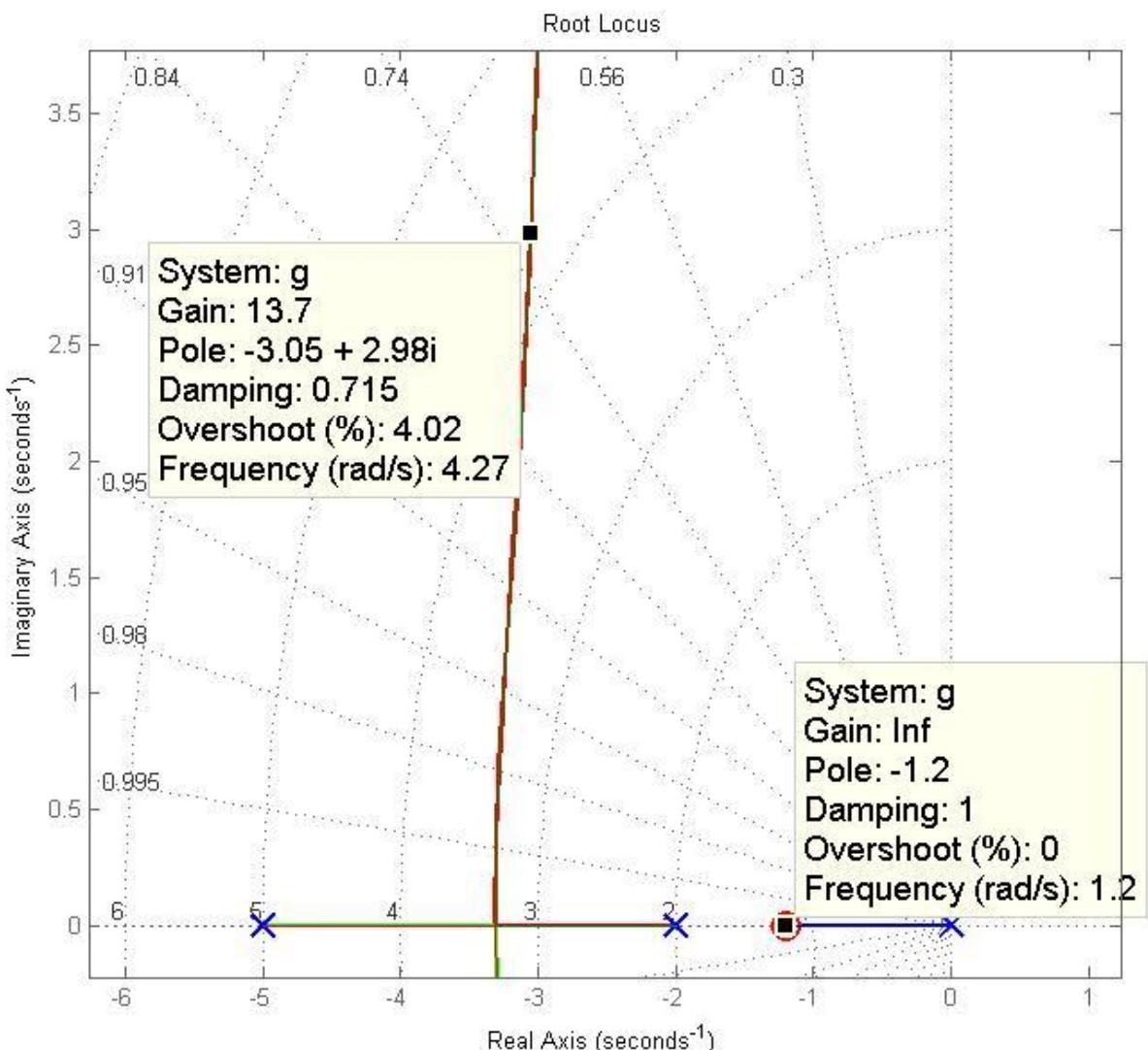
Tüm uzunluklar bilindiğinden dolayı, Kazanç değeri (K_c) kolaylıkla hesaplanır.

$$K_c = \frac{\prod_{i=1}^3 \text{poles}}{\prod_{i=1}^1 \text{zeros}} \rightarrow K_c = \frac{(p_1) \cdot (p_2) \cdot (p_3)}{(z_l)}$$

$$K_c = \frac{(3.55877659904436) \cdot (3.15732928435598) \cdot (4.26277919067861)}{(3.50778846395386)}$$

$$K_c = 13.6546334239220160$$

Kazanç değeri(=Gain) böylece hesaplanmış olur. Sistemin sonuçları gerçek Root-Locus grafiğinde aşağıda verilmiştir. Elde edilen sonuçların, Matlab programıyla elde grafikle tamamen uyumlu olduğu görülmüştür.



11. Durum Uzay Metotları (State-Space Methods)

Kontrol sistemlerinde tek giriş tek çıkış yerine (SISO=Single Input Single Output) birden fazla giriş ve birden fazla çıkış olduğu takdirde (MIMO=Multiple Input Multiple Output) çözümleri "Root-locus" veya "Frekans Cevabı" ile yapılamamaktadır. Fakat Durum Uzay metodu ile gerekli analiz veya tasarım yapılmaktadır. Root Locus metodu ile kontrolün temel kavramları anlaşılmakta burada ise daha ileri seviyede bir kontrol yapılmaktadır. Durum Uzay yönteminde Genel Çözüm olarak aşağıda verilen matris eşitliklerinin kurulması gereklidir. "u" giriş değişkeni ve "y" çıkış değişkeni, "x" ise durum değişkenidir (state variable). Genel olarak durum uzay denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}\{\dot{x}\} &= [A]\{x\} + \{B\} \cdot u \\ \{y\} &= [C]\{x\} + \{D\} \cdot u\end{aligned}\tag{9.1}$$

Burada $[A]$: ($n \times n$) boyutunda sistem matrisi, $[B]$: ($n \times m$) boyutunda kontrol matrisi, $[C]$: ($n \times n$) boyutunda sistem matrisi,

Bu denklemelerin çözümünden çıkış değeri hesaplanabilir. Durum uzay değişkenleri birçok farklı şekilde yazılabildiği halde, yani gösterim farklı olduğu halde, transfer fonksiyonu değişmez. Bunlardan dört farklı gösterim şekli aşağıda verilmiştir.

11.1 Durum Denkleminin Transformasyonu (Transforming the State Equations)

Durum değişkeni x vektörünün z vektörüne dönüştürülmesi aşağıdaki gibi yapılır.

$$\{x\} = [P]\{z\} \quad (9.2)$$

olsun. Buradan x durum değişkeni vektörünün zamana göre türevi alındığında,

$$\{\dot{x}\} = [P]\{\dot{z}\} \quad (9.3)$$

Olur. Bu değerler Denklem (9.1) de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} [P]\{\dot{z}\} &= [A][P]\{z\} + \{B\} \cdot u \\ \{y\} &= [C][P]\{z\} + \{D\} \cdot u \end{aligned} \quad (9.4)$$

Denklem (9.4) soldan $([P]^{-1})$ ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned} [P]^{-1}[P]\{\dot{z}\} &= [P]^{-1}[A][P]\{z\} + [P]^{-1}\{B\} \cdot u \rightarrow \{\dot{z}\} = [P]^{-1}[A][P]\{z\} + [P]^{-1}\{B\} \cdot u \\ \{y\} &= [C][P]\{z\} + \{D\} \cdot u \quad \{y\} = [C][P]\{z\} + \{D\} \cdot u \end{aligned} \quad (9.5)$$

Böylece farklı bir durum uzay denklemi elde edilmiş olur. "u" giriş ve "y" çıkış olduğuna göre sistemin transfer fonksiyonunu bulmak için ilk önce t uzayından s uzayına geçilmelidir. Kolaylık olması bakımından başlangıç şartları sıfır kabul edildiğinde Denklem (9.1),

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\} &= [A]\{x\} + \{B\} \cdot u \\ \{y\} &= [C]\{x\} + \{D\} \cdot u \\ s \cdot X(s) &= [A]X(s) + \{B\}U(s) \\ Y(s) &= [C]X(s) + \{D\}U(s) \\ (s \cdot I - [A])X(s) &= \{B\}U(s) \\ Y(s) &= [C]X(s) + \{D\}U(s) \end{aligned} \quad (9.6)$$

Denklem (9.6) nın ilkinde $X(s)$ değeri çekiliş ikincisinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} X(s) &= (s \cdot I - [A])^{-1}\{B\}U(s) \rightarrow Y(s) = [C](s \cdot I - [A])^{-1}\{B\}U(s) + \{D\}U(s) \\ Y(s) &= [C]X(s) + \{D\}U(s) \\ Y(s) &= [C](s \cdot I - A)^{-1}B + D \end{aligned} \quad (9.7)$$

Buradan sistemin Transfer fonksiyonu $TF(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ değeri,

$$TF(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(s \cdot I - A)^{-1}B + D \quad (9.8)$$

Olarak hesaplanır. Bu özellik ileride öz değerler (eigen values) hesaplanır iken kullanılacaktır.

Aynı transfer fonksiyonunu hesaplamak için, Denklem (9.1) yerine Denklem (9.4) kullanıldığı takdirde ilk önce t uzayından s uzayına geçilmelidir.

$$\begin{aligned} [P]s \cdot Z(s) &= [A][P]Z(s) + \{B\} \cdot u \rightarrow [P]s \cdot Z(s) - [A][P]Z(s) = \{B\} \cdot u \\ Y(s) &= [C][P]Z(s) + \{D\} \cdot u \quad Y(s) = [C][P]Z(s) + \{D\} \cdot u \end{aligned}$$

$$[P]^{-1}[P]s \cdot Z(s) - [P]^{-1}[A][P]Z(s) = [P]^{-1}\{B\}U(s)$$

$$Y(s) = [C][P]Z(s) + \{D\}U(s)$$

$$Z(s) = (s \cdot I - [P]^{-1}[A][P])^{-1}[P]^{-1}\{B\}U(s)$$

$$Y(s) = [C][P]Z(s) + \{D\}U(s)$$

$$Y(s) = [CP(s \cdot I - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D]U(s)$$

Buradan transfer fonksiyonu,

$$TF(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = CP(s \cdot I - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D \quad (9.9)$$

Şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi iki farklı transfer fonksiyonu olduğu halde bunların ikisi birbirine eşittir. Bunu ispatlamak için, matrislerin temel özelliklerinden, $\{N\}^{-1}\{M\}^{-1} = (\{M\}\{N\})^{-1}$ özelliği dikkate alınarak Denklem (9.9) tekrar yazıldığında,

$$TF(s) = CP[P(s \cdot I - P^{-1}AP)]^{-1}B + D$$

11.2 Direkt Programlama

Aşağıdaki diferansiyel denklem göz önüne alınınsın.

$$y(t) = \frac{D+3}{(D+1) \cdot (D+2)} f(t) \quad (9.10)$$

Ele alınan diferansiyel denklemin payı 1 olarak alınıp (x_1) e eşitlendiğinde;

$$x_1 = \frac{1}{(D+1) \cdot (D+2)} f(t) \quad \text{veya} \quad x_1 = \frac{1}{D^2 + 3 \cdot D + 2} f(t)$$

elde edilir. Denklem (9.10) yeniden yazıldığında;

$$y(t) = (D+3) \cdot x_1 = \dot{x}_1 + 3 \cdot x_1 \quad (9.11)$$

elde edilir. Verilen sistem ikinci mertebeden olduğu için, x_2 terimi tanımlanması gereklidir ve;

$\dot{x}_1 = x_2$ alındığında;

$$y(t) = x_2 + 3 \cdot x_1 \quad (9.12)$$

elde edilir. Elde edilen denklemeler;

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \cdot f(t) \quad (9.13)$$

$$y(t) = \begin{Bmatrix} c_1 & c_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (9.14)$$

birimde matris formunda ifade edilmek istendiğinde Denklem (9.10);

$$\ddot{x}_1 + 3 \cdot \dot{x}_1 + 2 \cdot x_1 = f(t) \quad (9.15)$$

Otomatik Kontrol Ders Notları, Pamukkale Üniversitesi, Z.Girgin şeklinde de ifade edilebilir. Elde edilen denklemi, Denklem (8.5) 'deki biçimde matris formunda ifade edebilmek için \ddot{x}_1 teriminin kaldırılması gereklidir. Yani $\dot{x}_2 = \ddot{x}_1$ alınmalıdır. Ayrıca \dot{x}_1 terimi için de $x_2 = \dot{x}_1$ alınmalıdır. Böylece denklem;

$$\dot{x}_2 + 3x_2 + 2x_1 = f(t) \quad \text{veya}$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + f(t) \quad (9.16)$$

halini alır. Bundan başka $\dot{x}_1 = x_2$ idi. Buna göre Denklem (8.3) 'de;

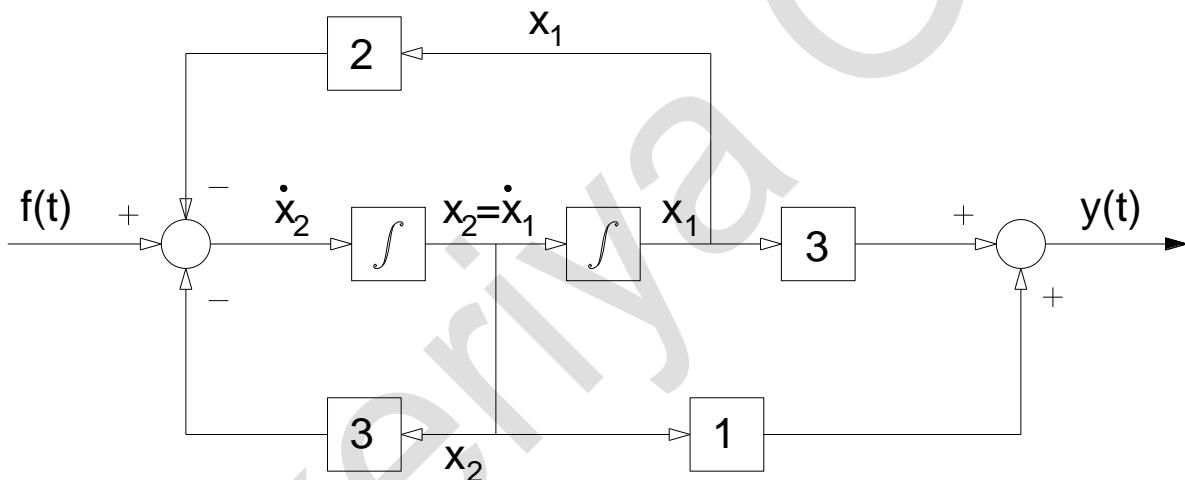
$$y(t) = 3x_1 + x_2 \quad (9.17)$$

şeklinde yazılmıştır. Bu denklemler matris formunda;

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} f(t) \quad (9.18)$$

$$y(t) = 3x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (9.19)$$

olarak elde edilir. Sistemin blok diyagramı ise aşağıdaki biçimde gösterilebilir.



11.3 Paralel Programlama

Bu metotta diferansiyel denklem parçalara ayrılır. Aynı diferansiyel denklem göz önüne alındığında;

$$y(t) = \frac{D+3}{(D+1)(D+2)} f(t) = \left(\frac{2}{D+1} - \frac{1}{D+2} \right) f(t) \quad (9.20)$$

elde edilir. Burada;

$$x_1 = \frac{f(t)}{D+1} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{f(t)}{D+2}$$

alındığında denklem;

$$y(t) = 2x_1 - x_2 \quad (9.21)$$

halini alır. Denklem (9.20) , aynı zamanda;

$$\dot{x}_1 + x_1 = f(t) \quad \text{ve} \quad \dot{x}_2 + 2x_2 = f(t) \quad \text{veya}$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + f(t) \text{ ve } \dot{x}_2 = -2 \cdot x_2 + f(t) \quad (9.22)$$

olarak da ifade edilebilir. Denklem (8.13) ve Denklem (8.14);

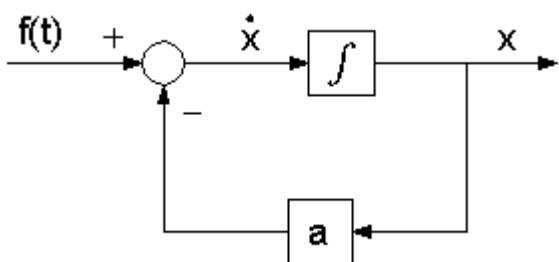
$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} f(t) \quad (9.23)$$

$$y(t) = \begin{Bmatrix} 2 & -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (9.24)$$

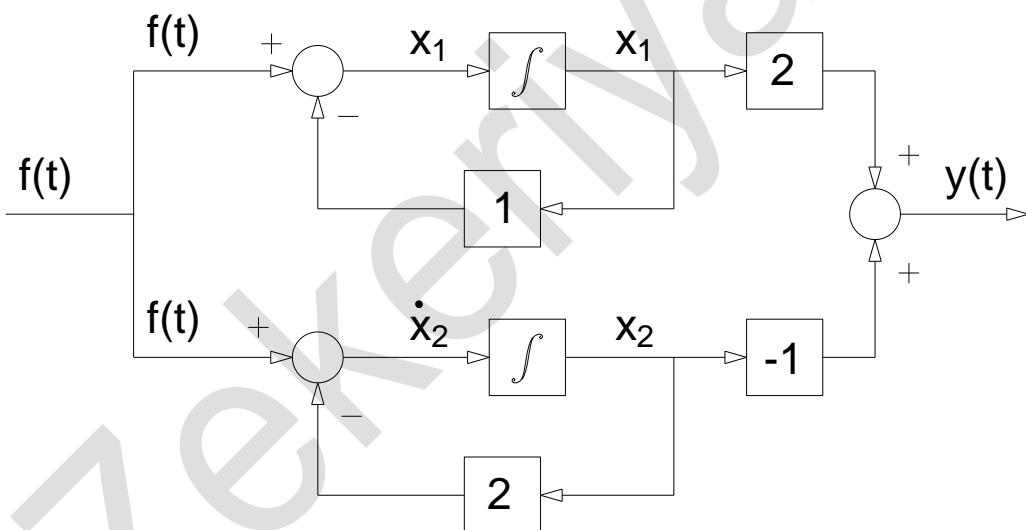
şeklinde matris formunda da yazılabilir. Denklem (9.20) genel hale getirildiğinde;

$$x = \frac{f(t)}{D+a} \quad \text{olur. Ayrıca;}$$

$\dot{x} + a \cdot x = f(t)$ veya $\dot{x} = -a \cdot x + f(t)$ şeklinde de ifade edilebilir. Bu denkleme ait blok diyagramı;



şeklindedir. Sisteme ait blok diyagramı ise;



şeklinde ifade edilebilir.

11.4 Seri Programlama

n. mertebeden bir diferansiyel denklem göz önüne alınsın.

$$(D^n + a_1 \cdot D^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot D + a_n) \cdot y(t) = (b_1 \cdot D^{n-1} + b_2 \cdot D^{n-2} + \dots + b_{n-1} \cdot D + b_n) \cdot f(t) \quad (9.25)$$

ve $x_1 = y(t)$ olsun. Buna göre direkt olarak matris formu;

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{Bmatrix} f(t) \quad (9.26)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre daha önce incelenen diferansiyel denklem göz önüne alındığında;

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = (D + 3) \cdot f(t) \quad (9.27)$$

dir. Burada gerekli olan katsayılar;

$a_1 = 3, a_2 = 2, b_1 = 1$ ve $b_2 = 3$ tür. Denklem (8.19), Denklem (8.18) şeklinde yazılmak istenirse;

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} f(t) \quad (9.28)$$

$$y = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (9.29)$$

olur. Denklem (8.20) ve Denklem (8.21), Denklem (8.19) 'u sağlamaktadır. Ayrıca Denklem (8.20) den aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + f(t) \quad (8.22)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 3 \cdot f(t) \quad (8.23)$$

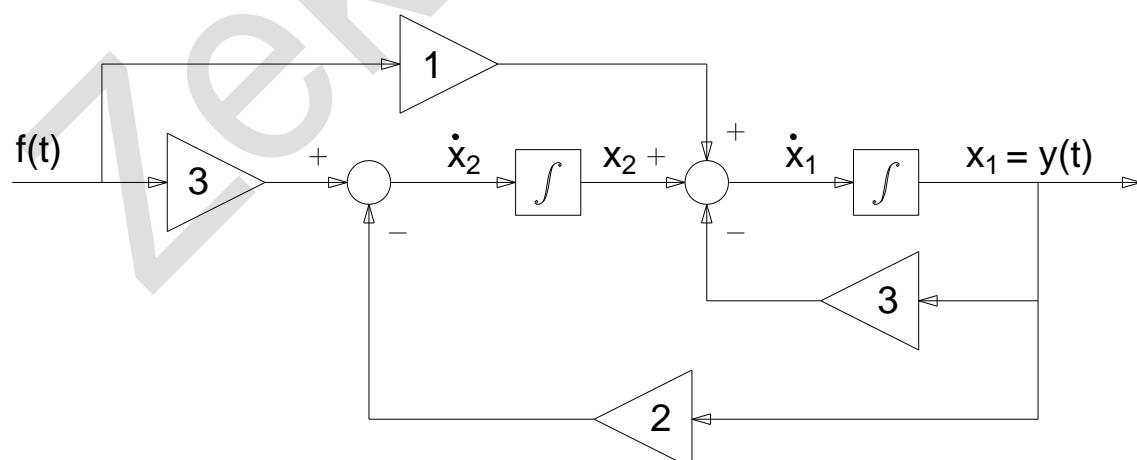
Denklem (8.22) 'nin türevi alınıp Denklem (8.23) ' de yazılırsa;

$$\ddot{x}_1 = -3\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{f}(t)$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 - \dot{f}(t) = -2x_1 + 3f(t)$$

$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 2x_1 = \dot{f}(t) + 3f(t)$ olarak elde edilir.

Burada $x_1 = y$ dir. Ancak $\dot{x}_1 \neq x_2$ dir. Sisteme ait blok diyagramı ise aşağıda gösterilmiştir.



11.5 Genel Programlama

Aşağıdaki diferansiyel denklem göz önüne alınınsın.

$$(D^n + a_{n-1} \cdot D^{n-1} + \dots + a_2 \cdot D^2 + a_1 \cdot D + a_0) \cdot y(t) = (D^n + b_{n-1} \cdot D^{n-1} + \dots + b_2 \cdot D^2 + b_1 \cdot D + b_0) \cdot f(t) \quad (9.30)$$

Bu metotta, göz önüne alınan diferansiyel denklem aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{Bmatrix} f(t) \quad (9.31)$$

$$y = \{b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1} \quad b_n\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (9.32)$$

Denklem (9.31)'deki h_i katsayıları;

$$h_1 = b_1 - a_1 \cdot b_0$$

$$h_2 = b_2 - a_2 \cdot b_0 - a_1 \cdot h_1$$

$$h_3 = b_3 - a_3 \cdot b_0 - a_2 \cdot h_1 - a_1 \cdot h_2$$

.....

.....

$$h_n = b_n - a_n \cdot b_0 - a_{n-1} \cdot h_1 - a_{n-2} \cdot h_2 - \dots - a_1 \cdot h_{n-1}$$

Ayrıca $y = x_1$ olarak tanımlıdır. Yine aynı diferansiyel denklem göz önüne alındığında;

$$y(t) = \frac{(D+3) \cdot f(t)}{(D^2 + 3 \cdot D + 2)} \rightarrow (D^2 + 3 \cdot D + 2) \cdot y(t) = (D+3) \cdot f(t) \rightarrow (D^2 + a_1 \cdot D + a_0) \cdot y(t) = (b_1 \cdot D + b_0) \cdot f(t)$$

elde edilir. Denklemin katsayıları ise;

$a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ ve $b_2 = 3$ olarak elde edilir. Buna bağlı olarak göz önüne alınan denklem, Denklem (8.25) formunda aşağıdaki biçimde yazılır.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} f(t) \quad (9.33)$$

$$y = \{1 \quad 0\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (9.34)$$

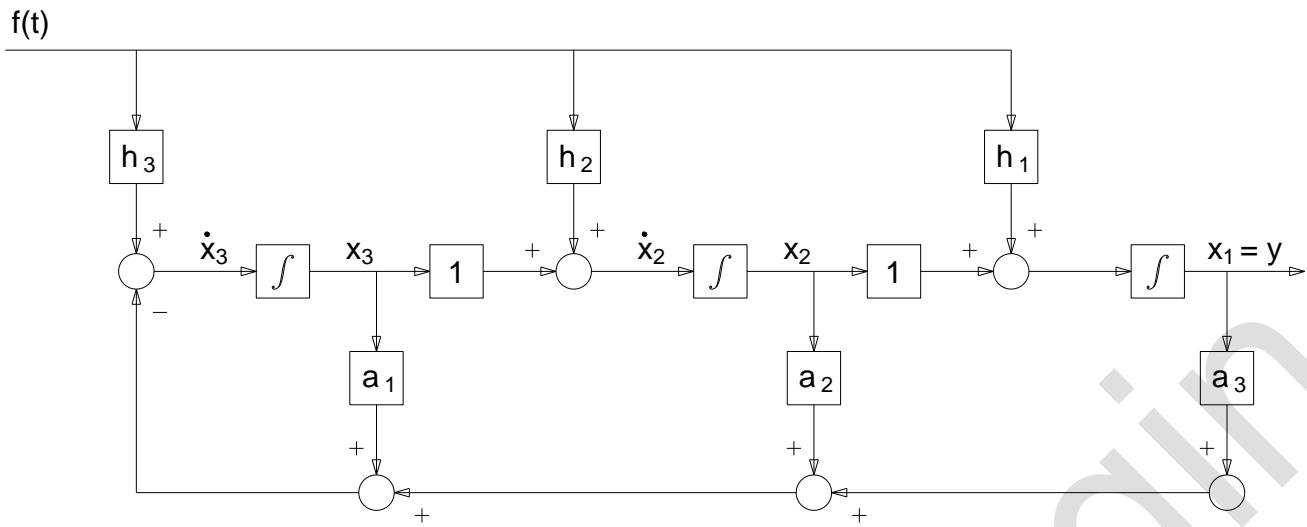
Denklem (9.33)'in açılımı yapıldığında;

$$\dot{x}_1 = x_2 + h_1 \cdot f(t)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + h_2 \cdot f(t)$$

$$\dot{x}_3 = -a_3 \cdot x_1 - a_2 \cdot x_2 - a_1 \cdot x_3 + h_3 \cdot f(t)$$

denklemleri elde edilir. Genel denklem için blok diyagramı aşağıdaki gibidir.

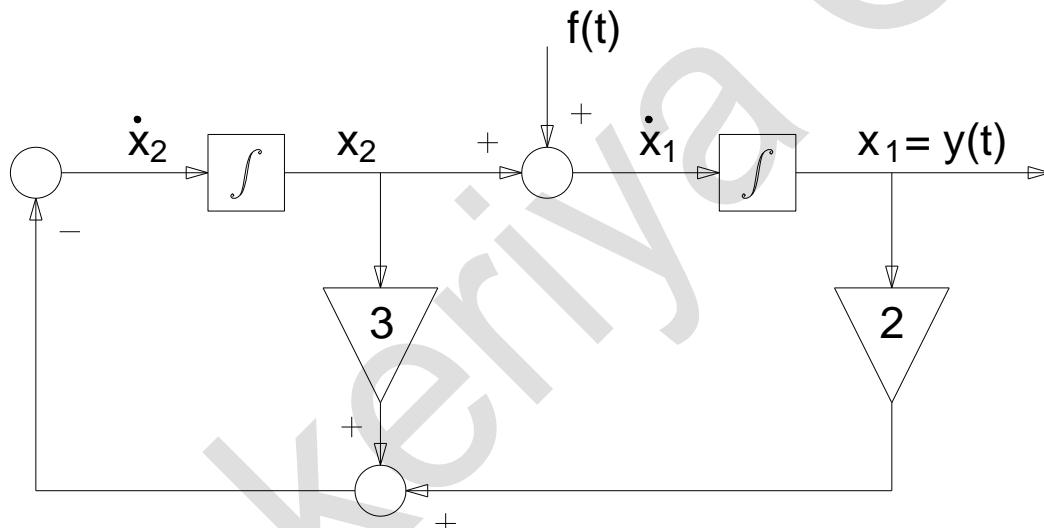


Ayrıca göz önüne alınan örnek için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\dot{x}_1 = x_2 + f(t)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$$

ve göz önüne alınan diferansiyel denklem için blok diyagramı ise aşağıdaki biçimdedir.

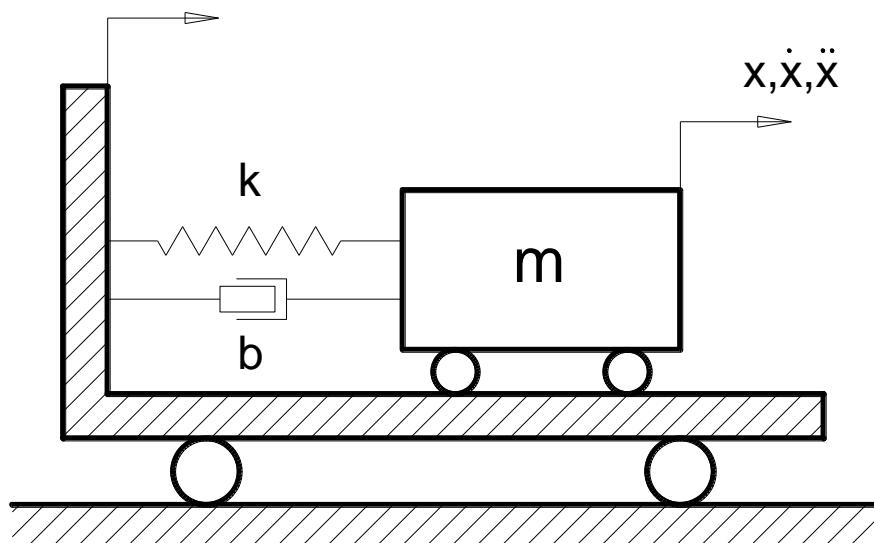


Bu şekilde aynı diferansiyel denklem dört farklı metotla uygulanarak çözülmüştür. Her metot için elde edilen blok diyagramları farklı görünse de transfer fonksiyonları birbirinin aynıdır.

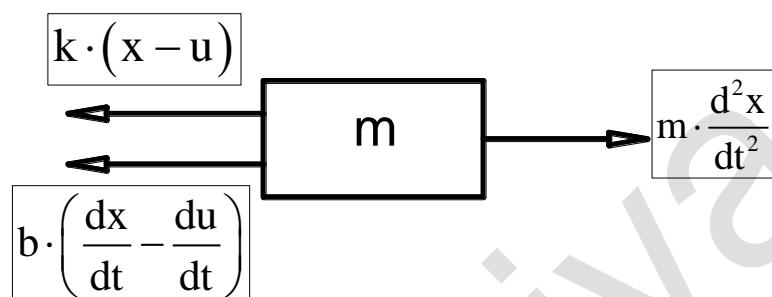
11.5.1 Uygulama

Aşağıda verilen ve kütlesi ihmal edilen bir el arabası üzerindeki kütle-yay-sönümlerici sistemin durum uzayı denklemini genel programlama metoduna göre oluşturunuz. Giriş değişkeni u ve çıkış değişkeni x dir.

u, \dot{u}, \ddot{u}



Çözüm: Newton prensibine göre hareket denkleminin yazılabilmesi için ($x > u$) kabul edildi. x yönünde kuvvetler dengesi yazıldığında, sisteme ait denge denklemi; $\sum F = m \cdot \ddot{x}$ olmalıdır.



$$-k \cdot (x - u) - b \cdot (\dot{x} - \dot{u}) = m \cdot \ddot{x} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x &= b \cdot \dot{u} + k \cdot u \rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{b}{m} \cdot \dot{u} + \frac{k}{m} \cdot u \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x &= \frac{b}{m} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{k}{m} \cdot u \end{aligned} \quad (2)$$

Genel programlama şartına göre katsayılar;

$$x_1 = x \rightarrow x_2 = \dot{x}_1 \quad (3)$$

Bize 3 tane denklem lazımdır. Bunlar, $\dot{x}_1 = \dots, \dot{x}_2 = \dots, y = \dots$ şeklinde ilgili olmalıdır.

Denklem (3) den,

$\dot{x}_1 = x_2$ veya katsayıların anlaşılması için,

$$\dot{x}_1 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot u \quad (4)$$

yazılabilir.

$x_1 = x$ değeri, denklem (2) de yerine yazıldığında,

$$\ddot{x}_1 + \frac{b}{m} \cdot \dot{x}_1 + \frac{k}{m} \cdot x_1 = \frac{b}{m} \cdot \dot{u} + \frac{k}{m} \cdot u, \quad x_2 = \dot{x}_1 \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x}_1$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{b}{m} \cdot \dot{x}_1 + \frac{k}{m} \cdot x_1 = \frac{b}{m} \cdot \dot{u} + \frac{k}{m} \cdot u \rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{b}{m} \cdot \dot{x}_1 - \frac{k}{m} \cdot x_1 + \frac{b}{m} \cdot \dot{u} + \frac{k}{m} \cdot u \quad (5)$$

haline gelir. Denklem (4) ve (5) matris şeklinde yazıldığında,

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{Bmatrix} u$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{b}{m}, \quad a_2 = \frac{k}{m}$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{b}{m}, \quad b_2 = \frac{k}{m}$$

olarak elde edilebilir. Denklemdeki x 'in birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin Laplace'ları aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$L\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0), \quad L\left[\frac{dx}{dt}\right] = s \cdot X(s) - x(0)$$

Başlangıç şartları sıfır olarak alındığında, genel denklem aşağıdaki biçimde yazılabılır.

$$\left[s^2 \cdot X(s) - s \cdot \cancel{x(0)} - \cancel{\dot{x}(0)} \right] + \frac{b}{m} \cdot \left[s \cdot X(s) - \cancel{x(0)} \right] + \frac{k}{m} \cdot X(s) = \frac{b}{m} \cdot \left[s \cdot U(s) - \cancel{u(0)} \right] + \frac{k}{m} \cdot U(s)$$

$$\left(s^2 + \frac{b}{s}s + \frac{k}{m} \right) \cdot X(s) = \left(\frac{b}{m}s + \frac{k}{m} \right) \cdot U(s)$$

Genel programlama şartına göre katsayılar;

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{b}{m}, \quad a_2 = \frac{k}{m}$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{b}{m}, \quad b_2 = \frac{k}{m}$$

şeklindedir. Genel denklem,

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix} u \quad \text{ve} \quad y = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \text{ dir.}$$

$$h_1 = b_1 - a_1 b_0 = \frac{b}{m}$$

Buna göre;

$$h_2 = b_2 - a_2 b_0 - a_1 h_1 = \frac{k}{m} - \frac{b}{m} \frac{b}{m} = \frac{k}{m} \left(\frac{b}{m} \right)^2$$

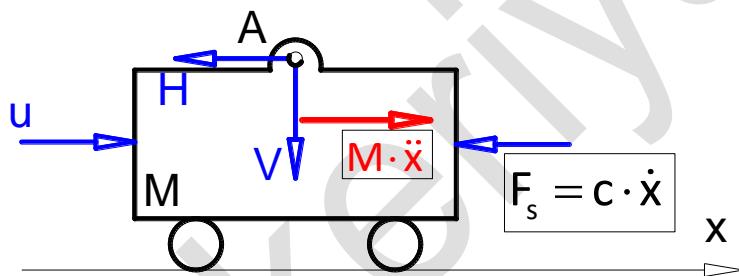
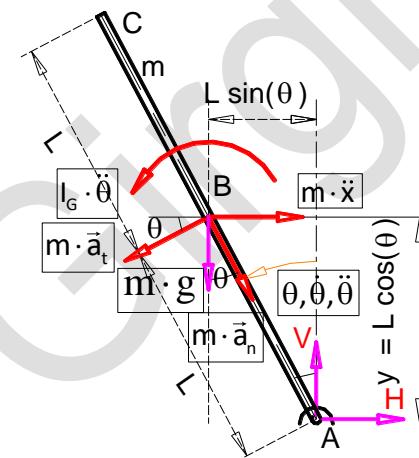
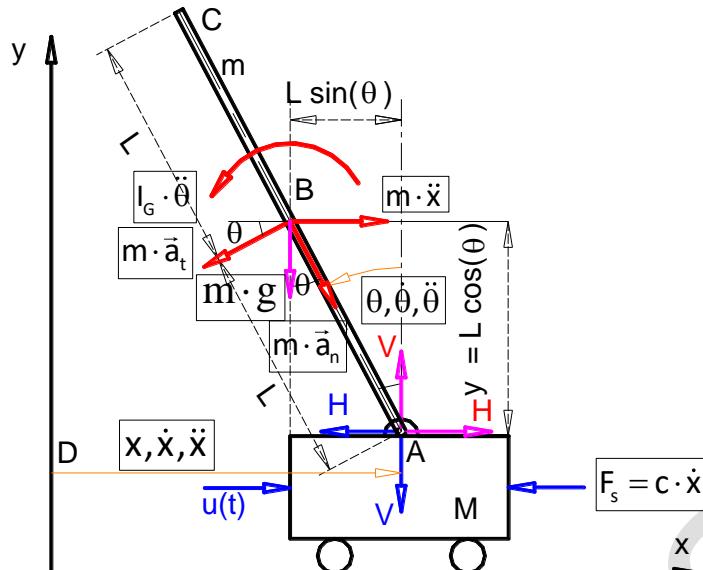
şeklindedir. Elde edilen katsayırlara göre sistemin denklemi;

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{Bmatrix} u$$

olarak elde edilir.

11.5.2 Uygulama

Aşağıda verilen ters sarkaç (pendulum) sisteminin matematiksel modelini çıkarınız ve transfer fonksiyonunu elde ediniz.



Sarkaç çubuğuun ağırlık merkezini ifade eden x ve y bileşenleri;

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA} = x \cdot \vec{i} - L \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{i} + L \cdot \cos(\theta) \cdot \vec{j} \quad \text{ve} \quad x_B = x - L \cdot \sin(\theta), \quad y_B = L \cdot \cos(\theta)$$

şeklindedir.

Sarkaç çubuğuunu taşıyan arabanın yatay yönde kuvvet dengesi için Newton prensibi kullanıldığında, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} \rightarrow u - H - F_s = M \cdot \ddot{x} \rightarrow [M \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + H = u] \quad (1)$$

Arabanın düşey yönde kuvvet dengesinden işe yarar bir eşitlik yoktur. Bu yüzden yazılmadı. Ters sarkaç çubuğuun yatay yönündeki kuvvet dengesinden aşağıdaki denge şartı yazılabilir.

$$\sum \vec{F}_x = m \cdot (\vec{a}_B)_x \rightarrow \sum \vec{F}_x = m \cdot (\vec{a}_A + \vec{a}_{BA})_x \rightarrow \sum \vec{F}_x = m \cdot (\vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t)_x \rightarrow \sum \vec{F} = m \cdot (\ddot{x} + \vec{a}_{BA}^n \cdot \sin(\theta) - \vec{a}_{BA}^t \cdot \cos(\theta))$$

$$\sum \vec{F}_x = m \cdot (\ddot{x} + [\omega^2 \cdot L]_x - [\alpha \cdot L]_x) \rightarrow H = m \cdot [\ddot{x} + \vec{a}_{BA}^n \cdot \sin(\theta) - \vec{a}_{BA}^t \cdot \cos(\theta)]$$

$$H = m \cdot [\ddot{x} + L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) - L \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta)]$$

Küçük açı değerleri için; $\sin(\theta) \approx \theta$, $\cos(\theta) \approx 1$ ve $\theta \cdot \dot{\theta}^2 \approx 0$

alınabileceğinden; $H = m \cdot [\ddot{x} + L \cdot \cancel{\dot{\theta}^2 \cdot \theta} - L \cdot \ddot{\theta} \cdot 1]$

$$H = m \cdot \ddot{x} - m \cdot L \cdot \ddot{\theta} \quad (2)$$

Denklem (2) de elde edilen H kuvveti, Denklem (1) de yerine yazıldığında;

$$M \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + H = u \rightarrow M \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + m \cdot \ddot{x} - m \cdot L \cdot \ddot{\theta} = u$$

$$(M+m) \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} - m \cdot L \cdot \ddot{\theta} = u \quad (3)$$

olur. Sarkacın A noktasına göre moment dengesi için;

$$\sum \vec{M}_A = I_A \cdot \vec{\alpha} \rightarrow m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta) = -m \cdot \ddot{x} \cdot [L \cdot \cos(\theta)] + m \cdot a_t \cdot L + I_G \cdot \ddot{\theta}$$

$$m \cdot g \cdot L \cdot \theta = -m \cdot \ddot{x} \cdot L \cdot 1 + m \cdot a_t \cdot L + I_G \cdot \ddot{\theta} \rightarrow m \cdot g \cdot L \cdot \theta = -m \cdot \ddot{x} \cdot L + m \cdot (\ddot{\theta} \cdot L) \cdot L + I_G \cdot \ddot{\theta}$$

$$m \cdot g \cdot L \cdot \theta = -m \cdot L \cdot \ddot{x} + m \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} + I_G \cdot \ddot{\theta} \rightarrow (m \cdot L^2 + I_G) \cdot \ddot{\theta} - m \cdot g \cdot L \cdot \theta = m \cdot L \cdot \ddot{x} \quad (4)$$

yazılabilir. Denklem (3) ve (4) Ters sarkaç sisteminin hareket denklemidir. Yani

$$(M+m) \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} - m \cdot L \cdot \ddot{\theta} = u$$

$$(m \cdot L^2 + I_G) \cdot \ddot{\theta} - m \cdot g \cdot L \cdot \theta = m \cdot L \cdot \ddot{x}$$

denklemleri sistem için yeterlidir.

Giriş değeri arabaya uygulanan $u(t)$ kuvveti ve çıkış değeri $\theta(t)$ açısından. Başlangıç şartları sıfır kabul edilerek Denklem (3) ve (4) e sırasıyla Laplace dönüşümü uygulandığında;

$$(M+m) \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} - m \cdot L \cdot \ddot{\theta} = u$$

$$(M+m) \cdot [X(s) \cdot s^2 - \cancel{x(0)} \cdot s - \cancel{\dot{x}(0)}] + c \cdot [X(s) \cdot s - \cancel{x(0)}] - m \cdot L \cdot [\theta(s) \cdot s^2 - \cancel{\theta(0)} \cdot s - \cancel{\dot{\theta}(0)}] = U(s)$$

$$(M+m) \cdot [X(s) \cdot s^2] + c \cdot [X(s) \cdot s] - m \cdot L \cdot [\theta(s) \cdot s^2] = U(s)$$

$$(M+m) \cdot X(s) \cdot s^2 + c \cdot X(s) \cdot s - m \cdot L \cdot s^2 \cdot \theta(s) = U(s) \rightarrow [(M+m) \cdot s^2 + c \cdot s] \cdot X(s) - m \cdot L \cdot s^2 \cdot \theta(s) = U(s)$$

$$\theta(s) = \frac{[(M+m) \cdot s^2 + c \cdot s] \cdot X(s) - U(s)}{m \cdot L \cdot s^2} \rightarrow \theta(s) = -\frac{U(s)}{m \cdot L \cdot s^2} + \frac{[(M+m) \cdot s^2 + c \cdot s]}{m \cdot L \cdot s^2} \cdot X(s) \quad (5)$$

Giriş değeri $U(s)$ ve çıkış değeri $\theta(s)$ olduğu için, $X(s)$ yerine değerinin yazılması gereklidir. (4) nolu denklemin laplace'ı alındığında;

$$(m \cdot L^2 + I_G) \cdot \ddot{\theta} - m \cdot g \cdot L \cdot \theta = m \cdot L \cdot \ddot{x}$$

$$(m \cdot L^2 + I_G) \cdot [\theta(s) \cdot s^2 - \cancel{\theta(0)} \cdot s - \cancel{\dot{\theta}(0)}] - m \cdot g \cdot L \cdot \theta(s) = m \cdot L \cdot [X(s) \cdot s^2 - \cancel{x(0)} \cdot s - \cancel{\dot{x}(0)}]$$

$$(m \cdot L^2 + I_G) \cdot \theta(s) \cdot s^2 - m \cdot g \cdot L \cdot \theta(s) = m \cdot L \cdot s^2 \cdot X(s) \rightarrow m \cdot L \cdot s^2 \cdot X(s) = [(m \cdot L^2 + I_G) \cdot s^2 - m \cdot g \cdot L] \cdot \theta(s)$$

$$X(s) = \frac{[(m \cdot L^2 + I_G) \cdot s^2 - m \cdot g \cdot L]}{m \cdot L \cdot s^2} \cdot \theta(s) \quad (6)$$

Elde edilir. Denklem (6) daki $X(s)$ değeri, Denklem (5) de yerine yazılıp sadeleştirildiğinde;

$$\theta(s) = -\frac{U(s)}{m \cdot L \cdot s^2} + \frac{[(M+m) \cdot s^2 + c \cdot s]}{m \cdot L \cdot s^2} \cdot \frac{[(m \cdot L^2 + I_G) \cdot s^2 - m \cdot g \cdot L]}{m \cdot L \cdot s^2} \cdot \theta(s)$$

$$TF(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{(m \cdot L) \cdot s}{[m \cdot L^2 \cdot M + I_G \cdot (M+m)] \cdot s^3 + [L^2 \cdot m + I_G] \cdot c \cdot s^2 - [M+m] \cdot m \cdot g \cdot L \cdot s - m \cdot g \cdot c \cdot L}$$

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{s}{[L \cdot M + I_G \cdot \left(\frac{M+m}{m \cdot L}\right)] \cdot s^3 + \left[L + \frac{I_G}{m \cdot L}\right] \cdot c \cdot s^2 - [M+m] \cdot g \cdot s - g \cdot c}$$

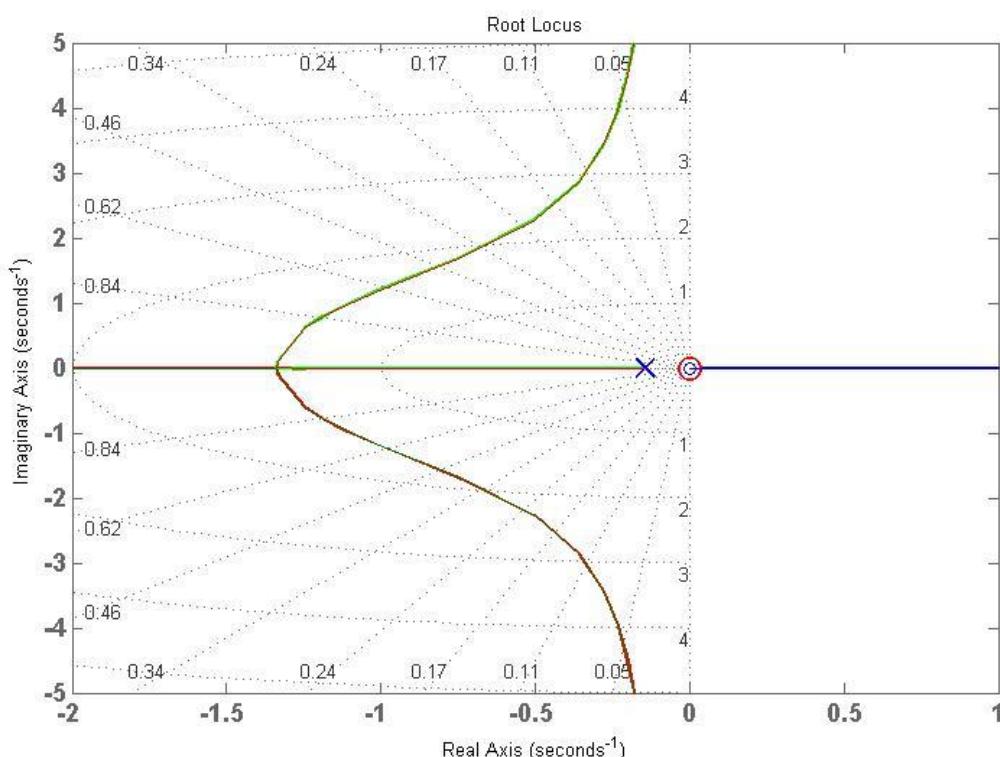
Sayısal değerler kullanıldığında; $M=0.5\text{kg}$, $m=0.2\text{kg}$, $c=0.1$, $I_G=0.006$, $g=9.8\text{m/s}^2$, $L=0.3\text{m}$

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{s}{0.22 \cdot s^3 + 0.04 \cdot s^2 - 6.867 \cdot s - 0.981} = \frac{s}{(s - 5.567955609) \cdot (s + 5.606942129) \cdot (s + 0.1428316617)}$$

$$TF(s) = \frac{s}{(s - 5.567955609) \cdot (s + 5.606942129) \cdot (s + 0.1428316617)}$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{m \cdot g \cdot L - (m \cdot L^2 + I_G) \cdot s^2}{(m \cdot L^2 \cdot M + I_G \cdot M + I_G \cdot m) \cdot s^4 + (m \cdot L^2 \cdot c + I_G \cdot c) \cdot s^3 - (L \cdot M \cdot g \cdot m + L \cdot g \cdot m^2) \cdot s^2 - (g \cdot c \cdot m \cdot L) \cdot s}$$

Bu sistemde Açıyı dengelemek oldukça kolaydır. Fakat $X(s)$ mesafesini dengelemek o kadar kolay değildir. Transfer fonksiyonunda, üç kutup ve bir sıfır bulunmaktadır. Root-Locus grafiği aşağıdaki gibidir.



Bu problemin çözümüne bir PID kontrol elemanları uygulanabildiği gibi ileri ve geri kazanç sağlayıcılar (lead and lag compensator) uygulayarak da dengeleme yapılabilir. Root-Locus çözümü burada etkin olarak kullanılabilmektedir.

11.5.3 Uygulama

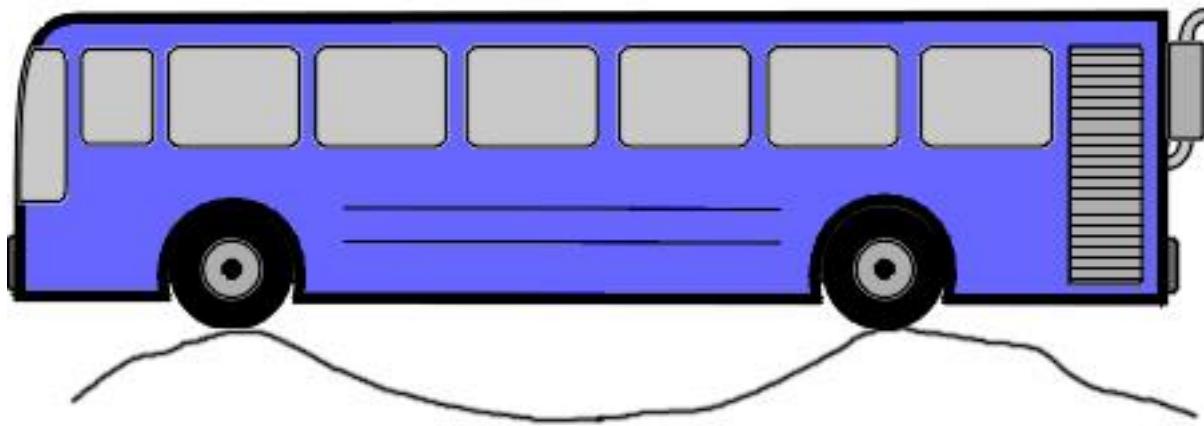
Aşağıda verilen Otobüs-süspansiyon sisteminde sadece bir tekerleğin matematiksel modelini tekerlek ($w=10\text{cm}$) lik bir yükseklikten geçtiğinde 5 saniye (settling time=ayarlama süresi) içerisinde

$(x_1 - x_2)$ çıkış değerinin (output) en fazla (overshoot) $\left(\frac{5}{100} = 0.5\text{cm} = 5\text{mm} \right)$ olması için PID

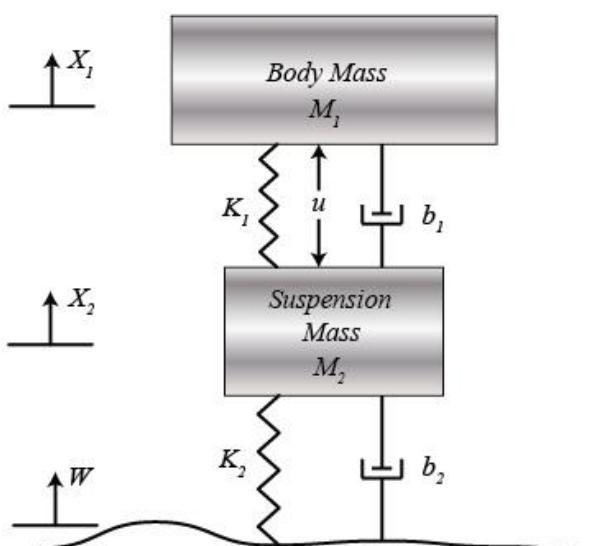
kontrol ile $\left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s \right)$ orantı, integral ve diferansiyel katsayılarını hesaplayınız. Kurup hareket

denklemini çıkarınız ve buradan durum uzay denklemini elde ediniz. Bunun için aşağıdaki sayısal değerleri kullanınız.

$$(m_1 = 2500\text{kg}, m_2 = 320\text{kg}, k_1 = 80000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_2 = 500000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, b_1 = 350 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}, b_2 = 15020 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}})$$



Otobüs süspansiyon sistemi modeli



Çözümün Newton prensibine göre yazılabilmesi için, araba tekerinin w yükseltisine vurduğu anda ($w > x_2 > x_1$) kabul edilerek otobüs hareket denklemi;

$$k_1 \cdot (x_2 - x_1) + b_1 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + u = m_1 \cdot \ddot{x}_1 \quad \text{veya}$$

$$-k_1 \cdot (x_1 - x_2) - b_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u = m_1 \cdot \ddot{x}_1 \quad (1)$$

Şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde süspansiyon sistemi için hareket denklemi,

$$k_2 \cdot (w - x_2) + b_2 \cdot (\dot{w} - \dot{x}_2) - k_1 \cdot (x_2 - x_1) - b_1 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - u = m_2 \cdot \ddot{x}_2$$

Veya,

$$k_2 \cdot (w - x_2) + b_2 \cdot (\dot{w} - \dot{x}_2) + k_1 \cdot (x_1 - x_2) + b_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - u = m_2 \cdot \ddot{x}_2 \quad (2)$$

Yazılabilir. Bütün başlangıç şartları sıfır kabul edilerek, t uzayından s uzayına geçilip, Laplace dönüşümü yapıldığında, Denklem (1) için,

$$\begin{aligned} & -k_1 \cdot (x_1 - x_2) - b_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u = m_1 \cdot \ddot{x}_1 \\ & -k_1 \cdot (X_1(s) - X_2(s)) - b_1 \cdot [s \cdot X_1(s) - \cancel{x_1(0)}] - [s \cdot X_2(s) - \cancel{x_2(0)}] + u = m_1 \cdot [s^2 \cdot X_1(s) - s \cdot \cancel{x_1(0)} - \cancel{\dot{x}_1(0)}] \\ & -k_1 \cdot (X_1(s) - X_2(s)) - b_1 \cdot (s \cdot X_1(s) - s \cdot X_2(s)) + u = m_1 \cdot s^2 \cdot X_1(s) \\ & m_1 \cdot s^2 \cdot X_1(s) + k_1 \cdot (X_1(s) - X_2(s)) + b_1 \cdot (s \cdot X_1(s) - s \cdot X_2(s)) = u \\ & [m_1 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + k_1] \cdot X_1(s) - [b_1 \cdot s + k_1] \cdot X_2(s) = U(s) \end{aligned} \quad (3)$$

Benzer işlemler (2) nolu denklem için de yapıldığında,

$$\begin{aligned} & k_2 \cdot (w - x_2) + b_2 \cdot (\dot{w} - \dot{x}_2) + k_1 \cdot (x_1 - x_2) + b_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - u = m_2 \cdot \ddot{x}_2 \\ & k_2 \cdot w - k_2 \cdot x_2 + b_2 \cdot \dot{w} - b_2 \cdot \dot{x}_2 + k_1 \cdot x_1 - k_1 \cdot x_2 + b_1 \cdot \dot{x}_1 - b_1 \cdot \dot{x}_2 + u = m_2 \cdot [s^2 \cdot X_1(s) - s \cdot \cancel{x_1(0)} - \cancel{\dot{x}_1(0)}] \\ & k_2 \cdot W(s) - k_2 \cdot X_2(s) + b_2 \cdot [s \cdot W(s) - \cancel{w(0)}] - b_2 \cdot [s \cdot X_2(s) - \cancel{x_2(0)}] + k_1 \cdot X_1(s) - k_1 \cdot X_2(s) \\ & + b_1 \cdot [s \cdot X_1(s) - \cancel{x_1(0)}] - b_1 \cdot [s \cdot X_2(s) - \cancel{x_2(0)}] - U(s) = m_2 \cdot [s^2 \cdot X_2(s) - s \cdot \cancel{x_2(0)} - \cancel{\dot{x}_2(0)}] \\ & -(b_1 \cdot s + k_1) \cdot X_1(s) + [m_2 \cdot s^2 + (b_1 + b_2) \cdot s + (k_1 + k_2) \cdot s] \cdot X_2(s) = (b_2 \cdot s + k_2) \cdot W(s) - U(s) \end{aligned}$$

Veya

$$-[b_1 \cdot s + k_1] \cdot X_1(s) + [m_2 \cdot s^2 + (b_1 + b_2) \cdot s + (k_1 + k_2)] \cdot X_2(s) = [b_2 \cdot s + k_2] \cdot W(s) - U(s) \quad (4)$$

Elde edilir. 3 ve 4 denklemeleri matris şeklinde yazıldığında;

$$\begin{bmatrix} (m_1 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + k_1) & -(b_1 \cdot s + k_1) \\ -(b_1 \cdot s + k_1) & (m_2 \cdot s^2 + (b_1 + b_2) \cdot s + (k_1 + k_2)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U(s) \\ (b_2 \cdot s + k_2) \cdot W(s) - U(s) \end{Bmatrix}$$

olduğu görülür.

12. Frekans Tepkisi Analizi (Frequency Response Analysis)

Kontrol sistemlerinin davranışını belirlemek için kullanılan usullerden birisidir. Bunun anlaşılması için bode grafiğinin bilinmesi gereklidir.

12.1 Bode Grafiği (Bode Diagram)

Frekans tepkisinin (cevabın) logaritmik bir gösterimidir. Aynı zamanda kazanç (gain) ve doğal frekansın ölçümünü de sağlar.

Pratikte gücün, decibel biriminde, $\left(\frac{1}{10}\right)$ luk artışının büyüklüğü aşağıdaki şekildedir.

$$|H(j\omega)|_{db} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \quad (10.1)$$

Aynı zamanda güç Voltaj ve Direnç cinsinden; $P = \frac{V^2}{R}$ olarak da ifade edilmektedir. Buradan;

$$|H(j\omega)|_{db} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\frac{V_2^2}{R}}{\frac{V_1^2}{R}} \right) \rightarrow |H(j\omega)|_{db} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{V_2^2}{V_1^2} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 \rightarrow |H(j\omega)|_{db} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad (10.2)$$

Bundan dolayı, herhangi bir $G(s)$ fonksiyonunun M "Bode büyülüğu" veya "logaritmik büyülüğu" aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$M = |G(j\omega)|_{db} = 20 \cdot \log_{10} |G(j\omega)| \rightarrow M = 20 \cdot \log_{10} |A| \quad (10.3)$$

Transfer fonksiyonunun Bode grafikleri iki resimden oluşur ve bunlar alta alta çizilir. Birincisi; doğal frekans ω ya göre Logaritmik Büyüklük M dir. İkincisi; yine doğal frekansa göre faz açısı θ dir. Yatak eksende her zaman doğal freans ω bulunur.

Bode grafiğinin çizilmesi

$$G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \rightarrow G(j\omega) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega + z_i)}{\prod_{j=1}^n (j\omega + p_j)} = \frac{(j\omega + z_1) \cdot (j\omega + z_2) \cdots (j\omega + z_m)}{(j\omega + p_1) \cdot (j\omega + p_2) \cdots (j\omega + p_n)} = A \cdot e^{j\omega} \quad (10.4)$$

Buradaki A büyülüğu,

$$A = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m |(j\omega + z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(j\omega + p_j)|} \quad (10.5)$$

denklemiyle ve θ faz açısı ise,

$$\theta = \sum_{k=1}^m \angle(j\omega + z_k) + \sum_{i=1}^n \angle \frac{1}{(j\omega + p_i)} \quad (10.6)$$

denklemiyle ifade edilir.

13. Matlab Control System Toolbox

Matlab ile bu işlemler kolaylıkla yapılabilmektedir.

13.1 Model bağlantıları (Model Interconnection)

13.1.1 feedback

`sys=feedback(g1,g2)`: negatif geri beslemeli sistem.

`sys=feedback(g1,g2,-1)`: negatif geri beslemeli sistem.

`sys=feedback(g1,g2,+1)`: pozitif geri beslemeli sistem.

13.1.2 parallel

`sys = parallel(sys1,sys2)`

`sys = parallel(sys1,sys2,inp1,inp2,out1,out2)`

`sys = parallel(sys1,sys2,'name')`

13.1.3 series

`sys = series(sys1,sys2)`

`sys = series(sys1,sys2,outputs1,inputs2)`

