



PŘÍRODOVĚDECKÁ  
FAKULTA  
Univerzita Karlova

## Algoritmy v počítačové kartografii

Úloha č. 3  
Digitální model terénu

*Čelonk Marek, Sýkora Matúš*

# 1. Zadání

Vstup: množina  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ ,  $p_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ .

Výstup: polyedrický DMT nad množinou  $P$  představovaný vrstevnicemi doplněný vizualizací sklonu trojúhelníků a jejich expozicí.

Metodou inkrementální konstrukce vytvořte nad množinou  $P$  vstupních bodů 2D Delaunay triangulaci. Jako vstupní data použijte existující geodetická data (alespoň 300 bodů) popř. navrhnete algoritmus pro generování syntetických vstupních dat představujících významné terénní tvary (kupa, údolí, spočinek, hřbet, ...).

Vstupní množiny bodů včetně níže uvedených výstupů vhodně vizualizujte. Grafické rozhraní realizujte s využitím frameworku QT. Dynamické datové struktury implementujte s využitím STL.

Nad takto vzniklou triangulací vygenerujte polyedrický digitální model terénu. Dále proveďte tyto analýzy:

- S využitím lineární interpolace vygenerujte vrstevnice se zadaným krokem a v zadaném intervalu, proveďte jejich vizualizaci s rozlišením zvýrazněných vrstevnic.
- Analyzujte sklon digitálního modelu terénu, jednotlivé trojúhelníky vizualizujte v závislosti na jejich sklonu.
- Analyzujte expozici digitálního modelu terénu, jednotlivé trojúhelníky vizualizujte v závislosti na jejich expozici ke světové straně.

Zhodnoťte výsledný digitální model terénu z kartografického hlediska, zamyslete se nad slabinami algoritmu založeného na 2D Delaunay triangulaci. Ve kterých situacích (různé terénní tvary) nebude dávat vhodné výsledky? Tyto situace graficky znázorněte.

Zhodnocení činnosti algoritmu včetně ukázek proveďte alespoň na tři strany formátu A4.

## 2. Popis a rozbor problému + vzorce

Triangulácia  $T$  nad množinou bodov  $P=\{p_1,p_2,\dots,p_n\}$  predstavuje také planárne rozdelenie, ktoré vytvorí súbor  $m$  trojuholníkov  $t=\{t_1,t_2,\dots,t_m\}$  a hrán, aby platilo:

- Ľubovoľne dva trojuholníky  $t_i, t_j \in T$ , ( $i \neq j$ ), majú spoločnú najviac hranu.
- Zjednotenie všetkých trojuholníkov  $t \in T$  tvorí  $H(p)$ .
- Vnútri žiadneho trojuholníka neleží žiadny ďalší bod z  $P$ .

Medzi najčastejšie aplikácie triangulácie v kartografii a GIS patrí kartografická generalizácia, tvorba digitálnych modelov terénu, segmentácia obrazu a rozpoznávanie vzorov. V oblasti DPZ tvorba priestorových modelov z dát laserového skenovania. Triangulácia sa ďalej využíva v počítačovej grafike modelovaní prírodných javov v biometrii.

Medzi požiadavky na triangulačný algoritmov patria:

- Jednoduchosť algoritmu a jednoduchá implementácia
- Dostatočná rýchlosť pre veľké množiny bodov a zložitosť  $O(n \cdot \log(n))$
- Malá citlivosť na singulárne prípady
- Prevod do vyšších dimenzií
- Schopnosť paralelizácie algoritmu
- Optimálny tvar trojuholníkovej siete

Triangulácia by mala vytvárať pravidelné trojuholníky vhodného tvaru. Táto trojuholníková sieť by sa mala čo najviac primykať k terénu. Ďalšou dôležitou súčasťou triangulácie je vkladanie povinných hrán a modifikovanie tvaru triangulácie a schopnosť triangulácie nekonvexných oblastí či oblastí obsahujúce diery. A vynechať plochy ktoré nie sú triangularizované ako napr. vodné plochy a budovy.

Najznámejšie triangulácie

- Greedy triangulácia.
- Delaunay triangulácia.
- MWT (Minimum Weight Triangulation).
- Constrained triangulácia.
- Dátovo závislá triangulácia.

Metódy pre konštrukciu delaunay triangulácie:

- Lokálne prehadzovanie
- Inkrementálna konštrukcia
- Inkrementálne vkladanie
- Divide and conquer
- Sweep line

### 3. Popisy algoritmů formálním jazykem

Triangulace je v naší aplikaci vytvořena metodou inkrementální konstrukce. V prvním kroku je náhodně z množiny vybrán bod  $p_1$  a k němu nejbližší bod  $p_2$ . Z těchto dvou bodů je vytvořena hrana  $e$ . V následujícím kroku je nalezen bod  $p$ , který s body  $p_1$  a  $p_2$  tvoří trojúhelník s nejmenší opsanou kružnicí. Dále dojde ke kontrole, zda nebyl bod hledán v prázdné polorovině. Pokud nebyl bod nalezen, je prohozena orientace hrany  $e$ . V 5. kroku jsou vytvořeny hrany  $e_2$  a  $e_3$ . V následujících dvou krocích jsou všechny tři hrany přidány do AEL (active edge list) a DT (delaunay triangulation).

Následuje while cyklus, který běží do té doby, než je AEL prázdný. V prvním kroku se vyjme z AEL hrana  $e$ . Následuje prohození její orientace. Dále je opět hledán bod  $p$ , který s vyjmutou hranou vytvoří trojúhelník s nejmenší opsanou kružnicí. Při každém opakování cyklu se pracuje s jinou hranou. V dalším kroku je podmínka, zda existuje takový bod  $p$ , pokud ne, tak cyklus končí. V případě, že je podmínka splněna dojde k vytvoření hran  $e_2$  a  $e_3$ . Hrana  $e$  je přidána do DT. V posledním kroku cyklu dochází k volání funkce *add* pro hrany  $e_2$  a  $e_3$ .

Funkce *add* v prvním kroku vytvoří hranu  $e'$ . Dále je kontrolováno, jestli tato hrana existuje v AEL, pokud ano, tak je z listu vyjmuta. V opačném případě je do listu přidána. V posledním kroku je vždy hrana přidána do DT.

#### **Delaunayho triangulace inkrementální konstrukce:**

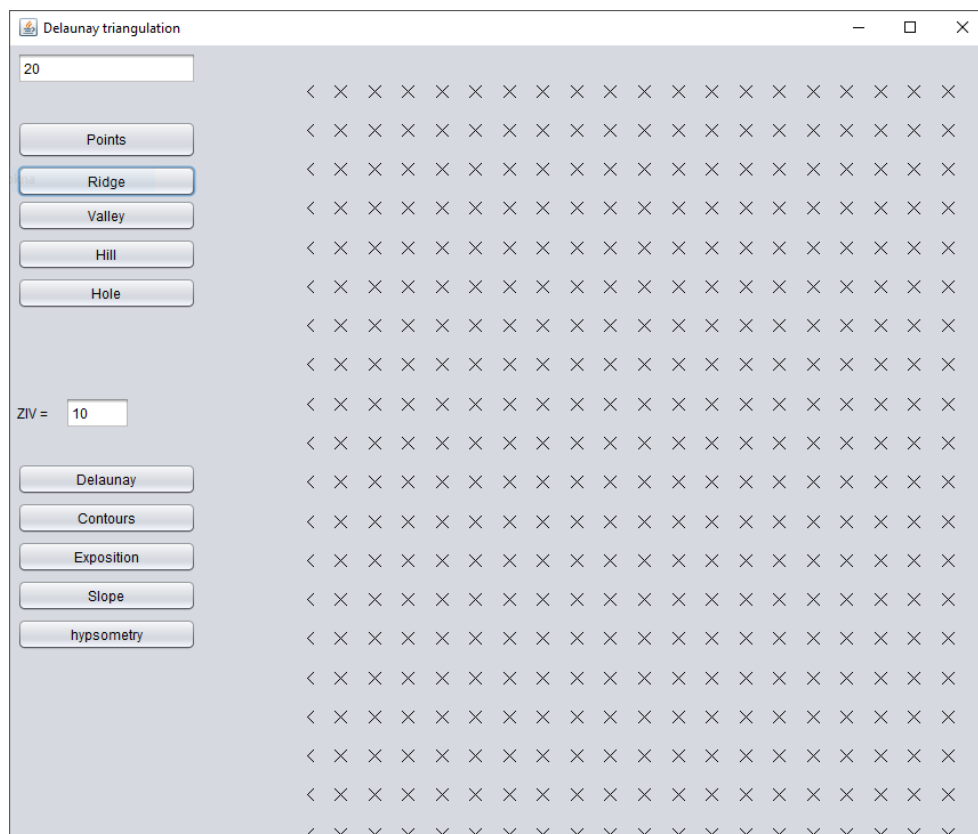
1. Point  $p_1 = \text{rand}(P)$ ,  $\|p_2 - p_1\|_2 = \min$
2. Edge  $e = (p_1 p_2)$
3.  $p = \arg \min_{p_i \in \sigma_L(e)} r'(k_i)$ ,  $k_i = (a, b, p_i)$ ,  $e = (a, b)$
4. Pokud  $\exists p$ , prohodit orientaci  $e \leftarrow (p_1 p_2)$ . Jdi na 3.
5.  $e_2 = (p_2, p)$ ,  $e_3 = (p, p_1)$
6.  $\text{AEL} \leftarrow e$ ,  $\text{AEL} \leftarrow e_2$ ,  $\text{AEL} \leftarrow e_3$
7.  $\text{DT} \leftarrow e$ ,  $\text{DT} \leftarrow e_2$ ,  $\text{DT} \leftarrow e_3$
8. while AEL not empty:
  1.  $\text{AEL} \rightarrow e$ ,  $e = (p_1 p_2)$
  2.  $e = (p_2 p_1)$
  3.  $p = \arg \min_{p_i \in \sigma_L(e)} r'(k_i)$ ,  $k_i = (a, b, p_i)$ ,  $e = (a, b)$
  4. if  $\exists p$ :
    1.  $e_2 = (p_2, p)$ ,  $e_3 = (p, p_1)$
    2.  $\text{DT} \leftarrow e$
    3.  $\text{add}(e_2, \text{AEL}, \text{DT})$ ,  $\text{add}(e_3, \text{AEL}, \text{DT})$

#### **Funkce *add*( $e$ , AEL, DT):**

1.  $e' = (b, a)$
2. if ( $e' \in \text{AEL}$ ):
3.      $\text{AEL} \rightarrow e'$
4. else:
5.      $\text{AEL} \leftarrow e$
6.  $\text{DT} \leftarrow (a, b)$

### 4. Problematické situace a jejich rozbor

Při vytváření algoritmu pro generování terénových tvarů jsme narazili na problém, kde pro body uspořádané v mřížce nebylo možné vytvořit delaunay triangulaci. Algoritmus pro tento druh vstupu funguje maximálně pro velikost mřížky 8x8 bodů, pro více bodů se algoritmus zacykli a padne. Spočiatku jsme mysleli, že to bude kvůli kolinearitě bodů, ale to nám vyvrátil fakt, že algoritmus funguje pro 64 bodů, kde jsou body rovnako rozmístěny. Situace je zobrazená na obrázku č. 1.



obr. č. 1: body usporiadané v mriežke

## 5. Vstupní data, formát vstupních dat, popis

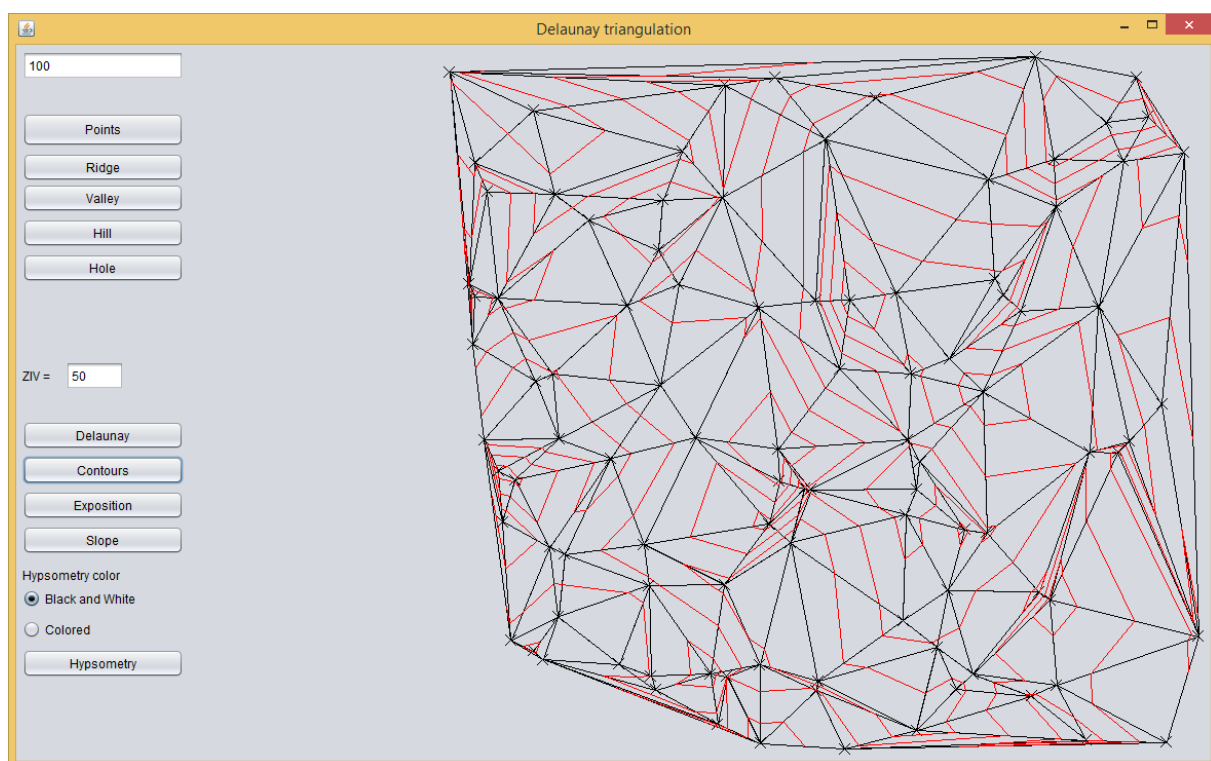
V aplikácii má užívateľ možnosť náhodne vygenerovať body, alebo si môže vybrať generovanie náhodných bodov v štyroch terénnych tvaroch. Medzi terénne tvary patria Ridge (chrbát), Valley (údolie), Hill (kopec) a Hole (jama). Užívateľ má taktiež možnosť zadať pre aký počet bodov sa majú dané útvary alebo náhodne body vygenerovať a taktiež zadať interval rozostupu vrstevníc.

## 6. Výstupní data, formát výstupních dat, popis

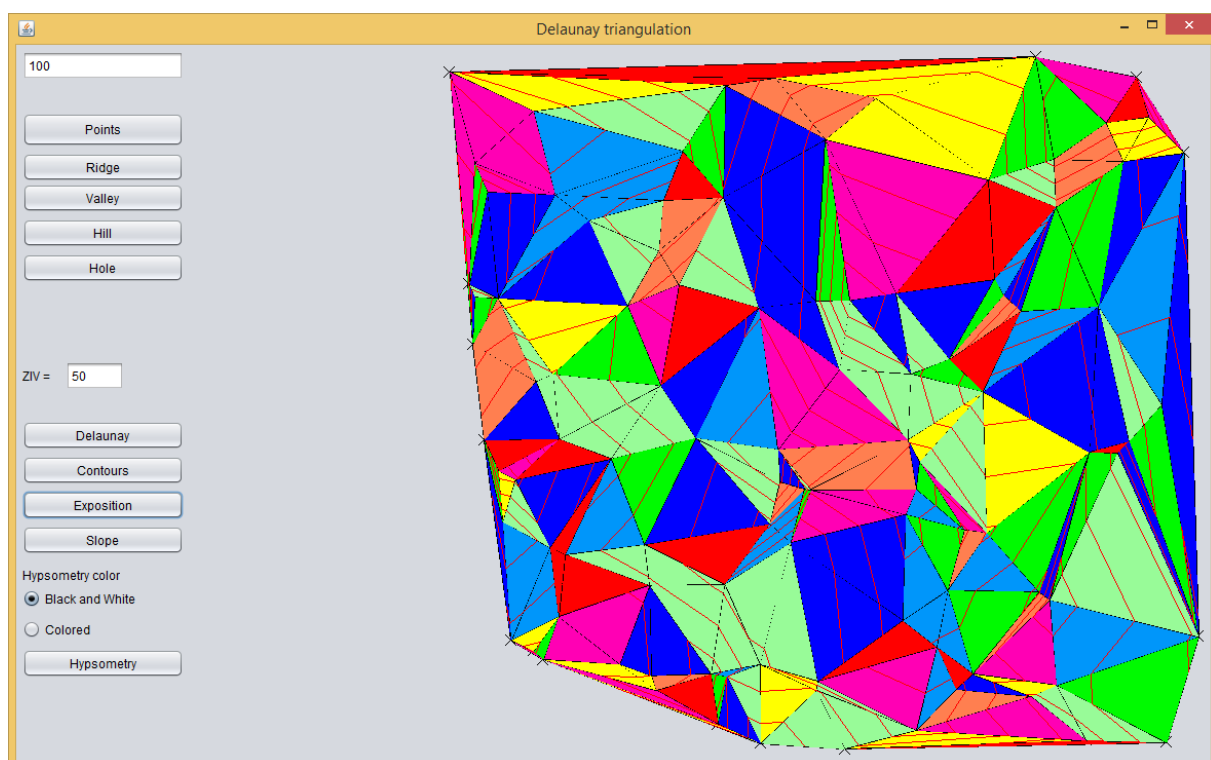
Výstupné dáta sú zobrazené vo forme grafiky v grafickom okne aplikácie. Aplikácia umožňuje vykresliť body v rôznych tvaroch, ktoré boli popísané v predchádzajúcej kapitole. Tieto body sú zobrazené ako čierne krížiky. Následne si užívateľ môže vybrať rôzne analýzy medzi ktoré patri Delaunay triangulácia ktorá vykreslí jednotlivé delaunay trojuholníky, následne môže spočítať sklon alebo orientáciu delaunay trojuholníkov voči svetovým stranám alebo môže využiť hypsometriu pre zobrazenie výšok digitálneho modelu terénu. Aplikácia ponúka možnosť aj vykreslenia vrstevníc kde si užívateľ zadáva interval rozostupu.

## 7. Printscreen vytvořené aplikace

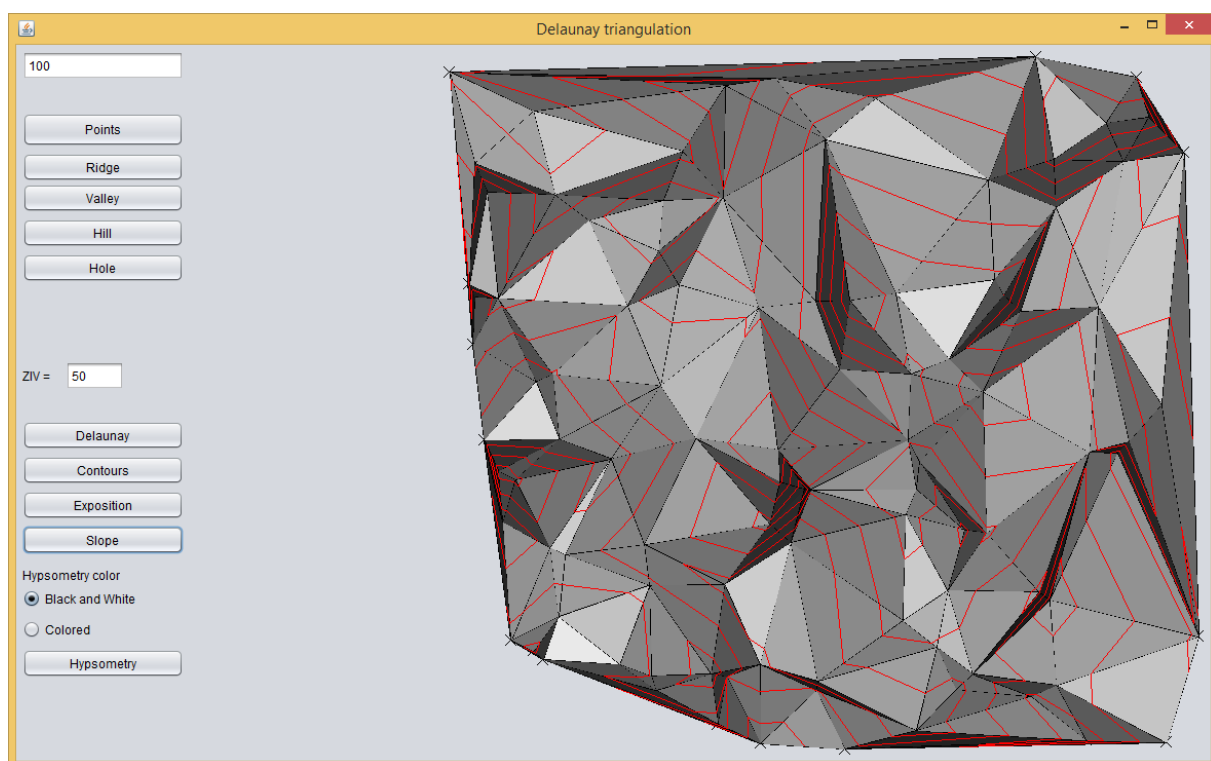
Na obrázku č. 2 je zobrazena triangulace množiny náhodně vygenerovaných bodů. Nad touto množinou bodů byly zpuštěny funkce pro zjištění expozice svahu (viz obr. č. 3) a sklonu svahu (viz obr. č. 4). Aplikace nabízí možnost výběru předdefinovaného tvaru reliéfu, například kopce, výsledek triangulace této množiny bodů lze vidět na obrázku č. 5)



obr. č. 2: triangulace množiny náhodných bodů s vrstevnicemi

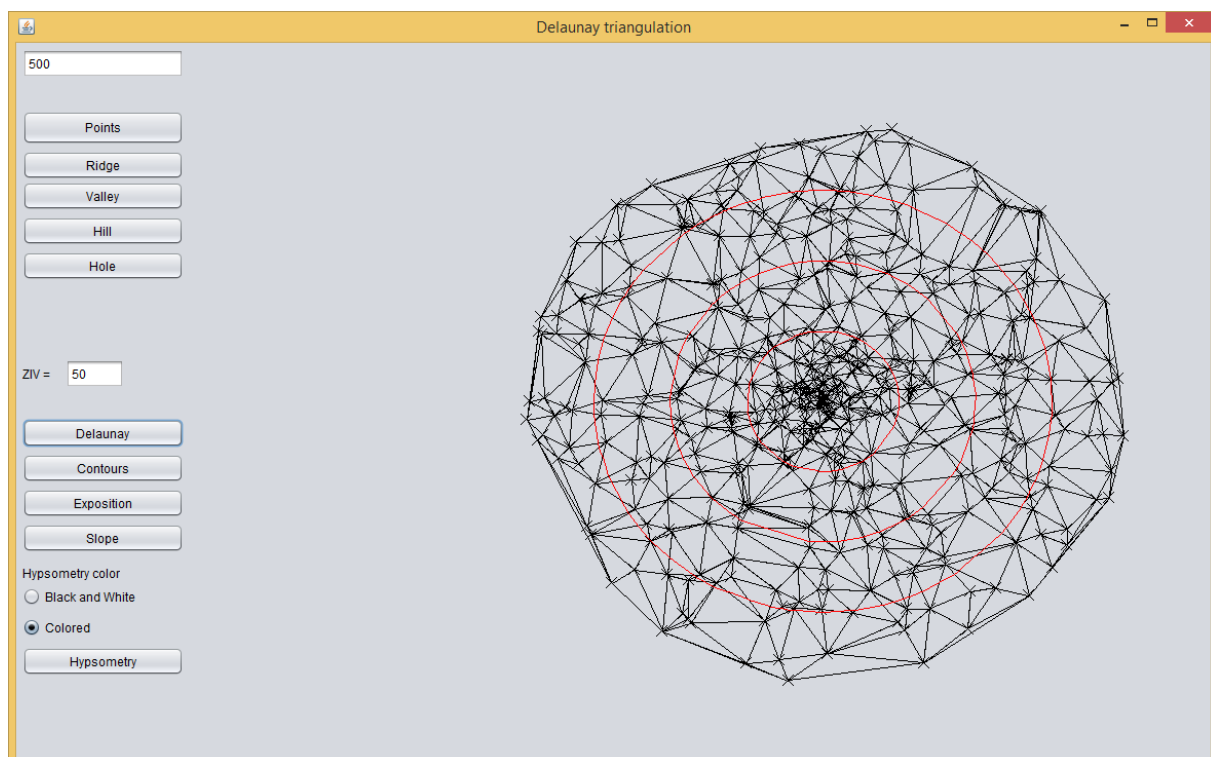


obr. č. 3: expozice trojúhelníků v množině náhodných bodů

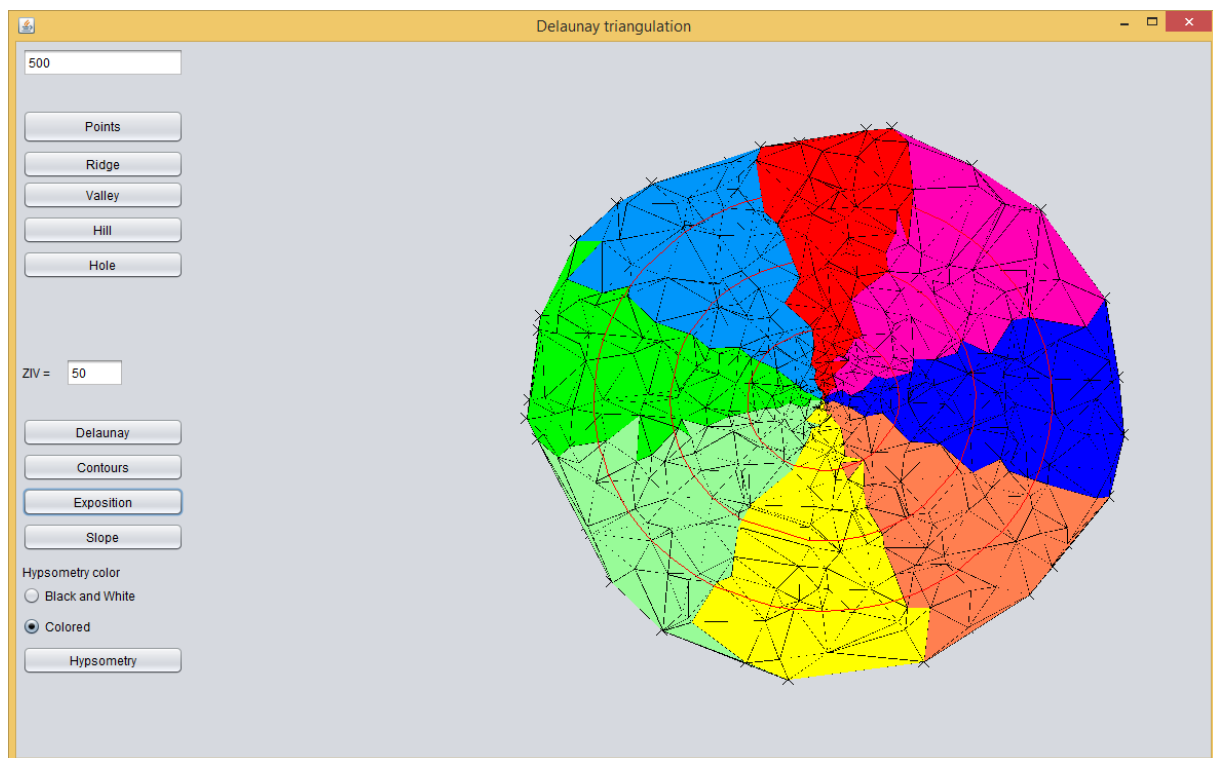


obr. č. 4: sklon trojúhelníků v množině náhodných bodů

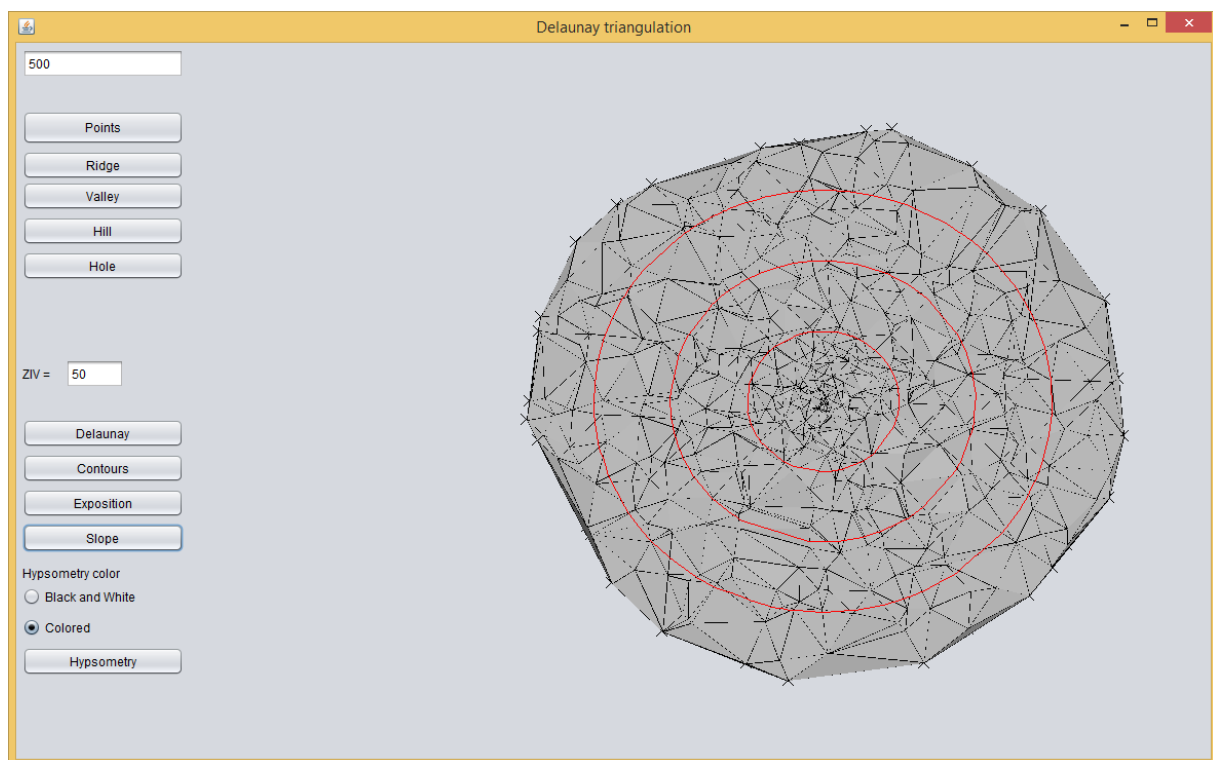
Aplikace nabízí možnost výběru předdefinovaného tvaru reliéfu, například kopce, výsledek triangulace této množiny bodů lze vidět na obrázku č. 5). Výsledná expozice je zobrazena na obrázku č. 6. Sklon trojúhelníků (svahů) je ve všech případech stejný (viz obr. č. 7). Další možností je vykreslit trojúhelníky podle černo-bílé hypsometrie (viz obr. č. 8) nebo barevné hypsometrie (viz obr. č. 9).



obr. č. 5: triangulace množiny bodů ve tvaru kopce s vrstevnicemi

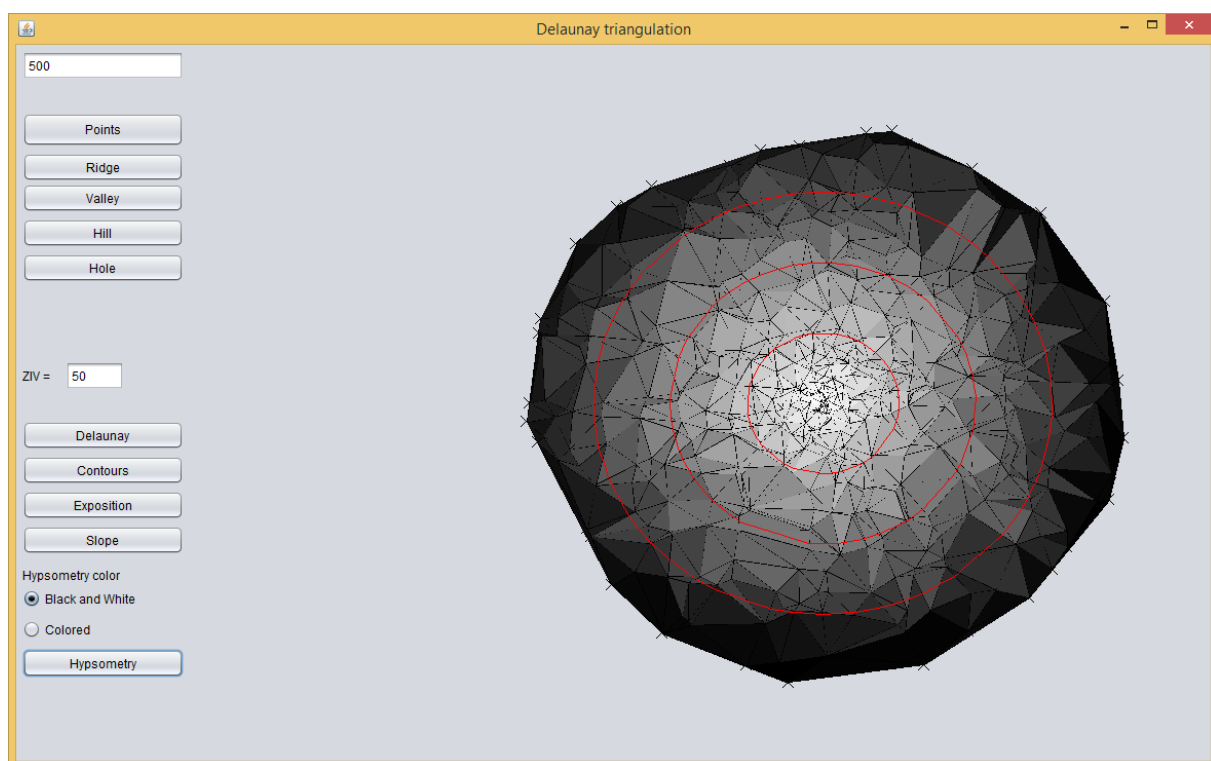


obr. č. 6: expozice trojúhelníků v množině bodů ve tvaru kopce

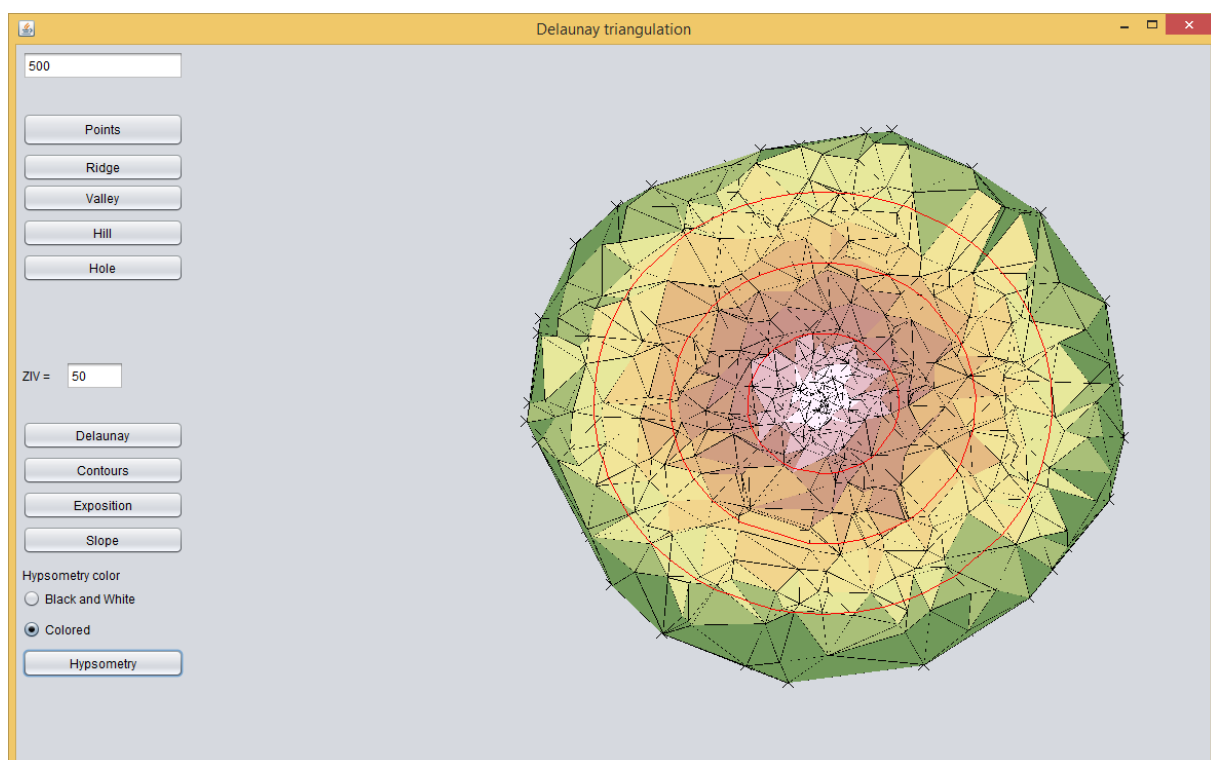


obr. č. 7: sklon trojúhelníků v množině bodů ve tvaru kopce



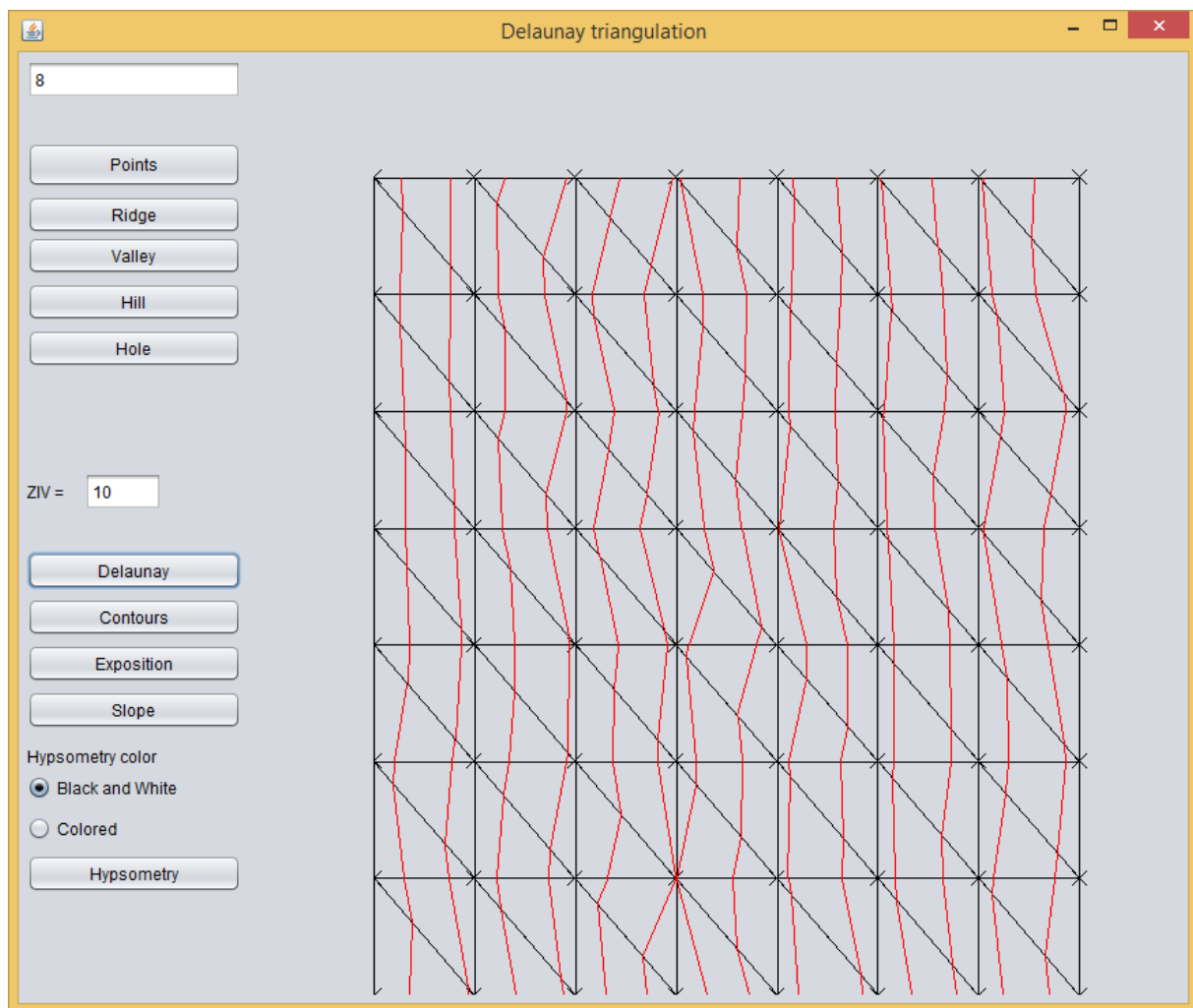


obr. č. 8: černo-bílá hypsometrie trojúhelníků v množině bodů ve tvaru kopce

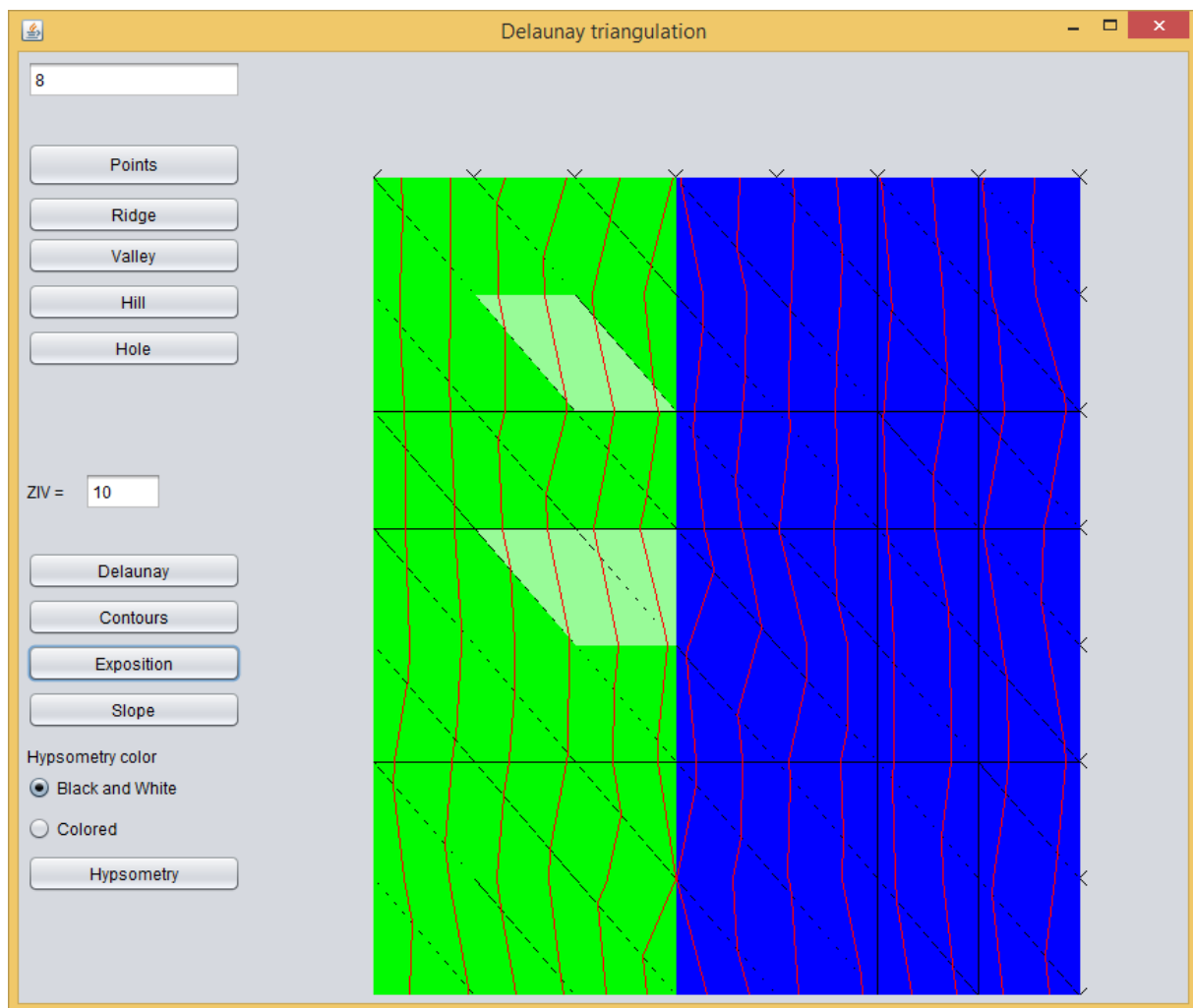


obr. č. 9: barevná hypsometrie trojúhelníků v množině bodů ve tvaru kopce

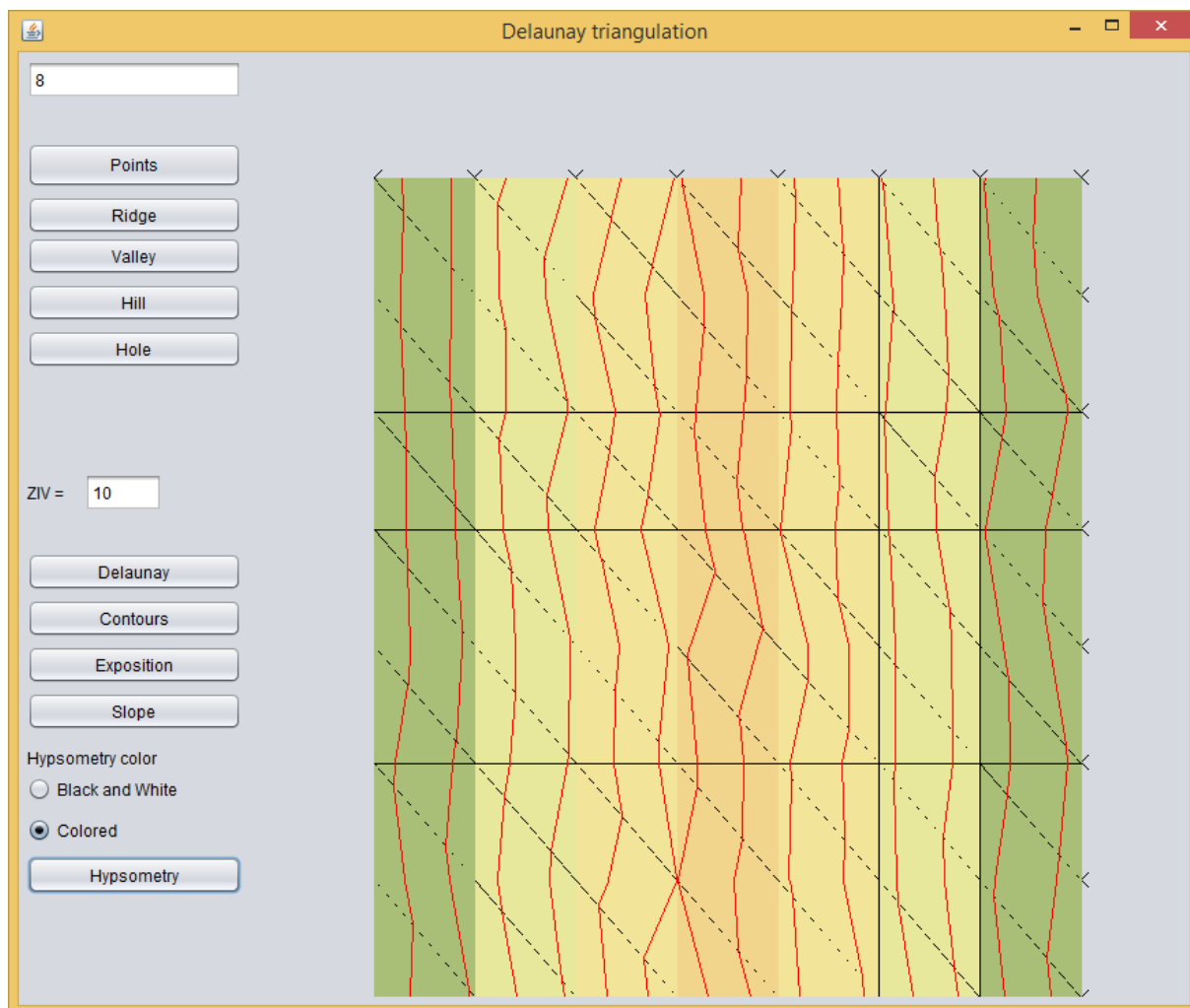
Další možností je vygenerování mřížky ve tvaru hřbetu. Nad touto množinou bodů, lze vytvořit triangulaci (viz obr. č. 10) a vypočítat sklonitost, expozici (viz obr. č. 11) i hypsometrii (viz obr. č. 12).



obr. č. 10: triangulace množiny bodů ve tvaru hřbetu s vrstevnicemi



obr. č. 11: expozice množiny bodů ve tvaru hřebetu s vrstevnicemi



obr. č. 12: barevná hypsometrie množiny bodů ve tvaru hřbetu s vrstevnicemi

## 8. Dokumentaci: popis tříd, datových položek a jednotlivých metod

Aplikácia sa skladá zo šiestich tried. Jedna reprezentuje grafické rozhranie, druhá vykresľovanie grafiky, ďalšia algoritmy a posledné tri reprezentujú dátové štruktúry.

Trieda Triangle reprezentuje trojuholník a obsahuje 5 premenných medzi ktoré patria tri body typu Point3D a dve premenné typu double ktoré sa používajú pri výpočte sklonu a hypsometrie. Trieda obsahuje tri metódy. Metóda getNormalVec ma za úlohu výpočet normálový vektor trojuholníka. Táto metóda sa následne využíva v ďalších dvoch metódach getSlope ktorá vypočíta sklon a getExp ktorá vypočíta orientáciu trojuholníka voči svetovým stranám. Trieda Point3D obsahuje tri premenné typu double, ktoré reprezentujú súradnice bodov x,y,z. Obsahuje metódu toPoint ktorá vráti nový Point2D. Obsahuje 3 metódy pre dopyt súradníc a tri pre nastavenie týchto hodnôt. Trieda Edge obsahuje dve premenné typu Point3D ktoré reprezentuje začiatok a koniec hrany. Trieda ma päť metód. Metóda equals porovnáva objekty, metóda hashCode vráti hodnotu pre objekt, metóda swapp mení orientáciu hrany, swappedEdge vytvorí hranu s opačnou orientáciou, a metóda toString nastaví formát v tvare string.

Trieda Algorithms obsahuje tri premenne dve typu enum a jedna typu double. OrientationEnum– metóda na určenia orientácie (clockwise, counter clockwise a colinear), getOrientation metóda na určenie orientácie pre Point3D, dotProd – výpočet skalárneho súčinu, len – výpočet dĺžky skalárneho súčinu, angle – výpočet uhlu medzi vektormi, dotProdNorm – výpočet normovaného uhla, splitPoints – pridá body do listov podľa strany na ktorej ležia, distanceFromLine –

výpočet vzdialenosti bodu od línie, dist – výpočet vzdialenosti medzi dvoma bodmi, circleRadius – pre výpočet kružnice a stredového bodu, minimalBoundingCircle – pre nájdenie s opísaním minimálnej kružnice, addToAel – metóda, ktorá kontroluje či daná hraná sa nachádza v liste, delaunay – metóda ktorá zabezpečuje výpočet delaunay triangulácie, calcContours – ma na starosti výpočet vrstevníc, ďalšia metóda calcContours – vytvára list v ktorom sú uložené línie reprezentujúce vrstevnice a metóda det3 vypočíta determinant.

Trieda Drawpanel ma na starosti okno na vykreslenie bodov a jednotlivých analýz v aplikácii. Obsahuje sedem premenných, ktoré sú typu Point3D, Path2D, List a boolean. Obsahuje jednu metódu predefinovanú metódu paintComponent, ktorá zabezpečuje vizualizáciu bodov, delaunay triangulácie, vrstevníc, sklonu, expozície a hypsometrie.

Gui je trieda, ktorá reprezentuje grafické rozhranie celej aplikácie. Obsahuje viacero premenných, ktoré reprezentujú jednotlivé tlačidlá v aplikácii. V tejto triede sa nachádzajú metódy zabezpečujúce jednotlivé úkony po stlačení jednotlivých tlačidiel. Ďalej sa tam nachádza metóda generateRandom3D pre generovanie náhodne vygenerovaných bodov, generateRidge metóda pre generovanie bodov v tvare chrbátice, generateValley metóda pre generovanie bodov v tvare údolia. Metóda main, ktorá tvorí celkové grafické rozhranie.

## 9. Závěr, možné či neřešené problémy, náměty na vylepšení

Aplikácia je funkčná pre všetky zadané algoritmy čiže pre delaunay trianguláciu sklon, expozíciu a pre vykreslenie vrstevníc. V aplikácii sme ešte implementovali generovanie štyroch terénnych tvarov a taktiež hypsometriu.

Nedostatok aplikácie je tvorba delaunay triangulácie pre body usporiadané v mriežke, čo bolo spomenuté v predchádzajúcej kapitole.

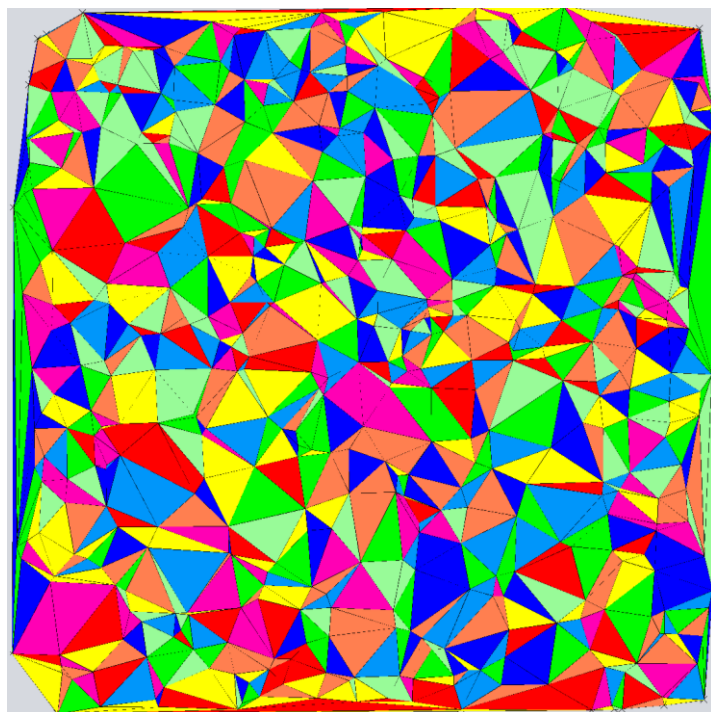
Medzi vylepšenia aplikácie by sme ešte zaradili generovanie popis vrstevníc, ktorý zatiaľ chýba. Taktiež by bolo možné vyriešiť elegantnejšie orientáciu voči svetovým stranám jednotlivých trojuholníkov, kde by sa dalo vyriešiť automatické generovanie farieb. Taktiež by bolo možné aplikáciu rozšíriť o možnosť výberu farebných škál pre sklon a hypsometriu.

## Zhodnocení výsledného digitálního modelu terénu

Jako první věc při hodnocení výsledků je důležité zmínit, že body v naší aplikaci jsou generovány jako náhodná množina. Z toho důvodu dochází k vytváření velmi nereálných tvarů reliéfu s velkými rozdíly v členitosti, tudíž i sklonu (viz obr. č. 13) a orientaci (viz obr. č. 14).

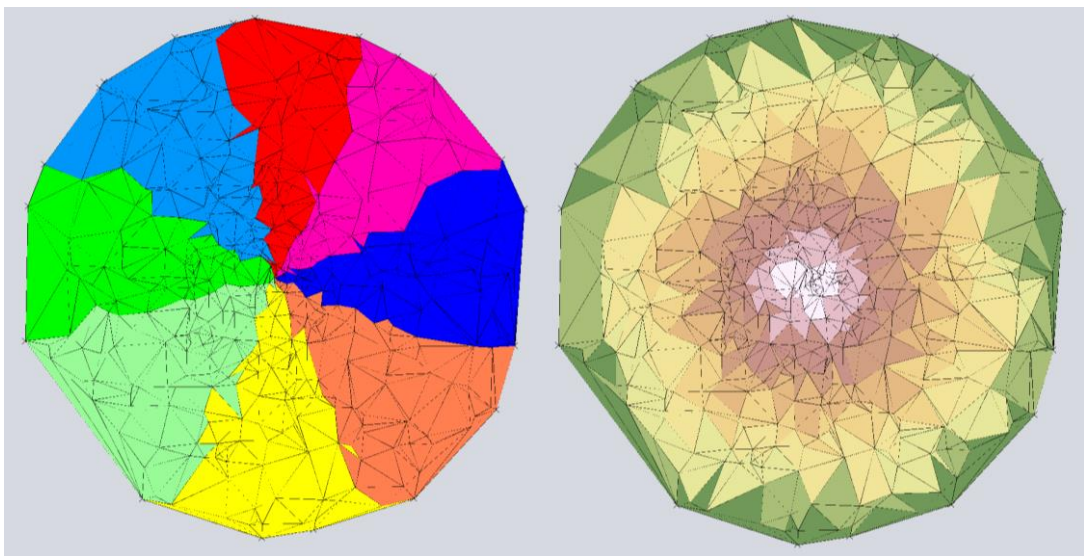


*obr. č. 13: sklonitost svahu*



*obr. č. 14: expoze svahu*

Funkčnost algoritmů lze testovat pro body umístěné ve tvaru kopce, resp. kuželu (viz obr. č. 15). Můžeme tedy říct, že výsledná triangulace má vypovídající hodnotu o přibližném tvaru reliéfu.



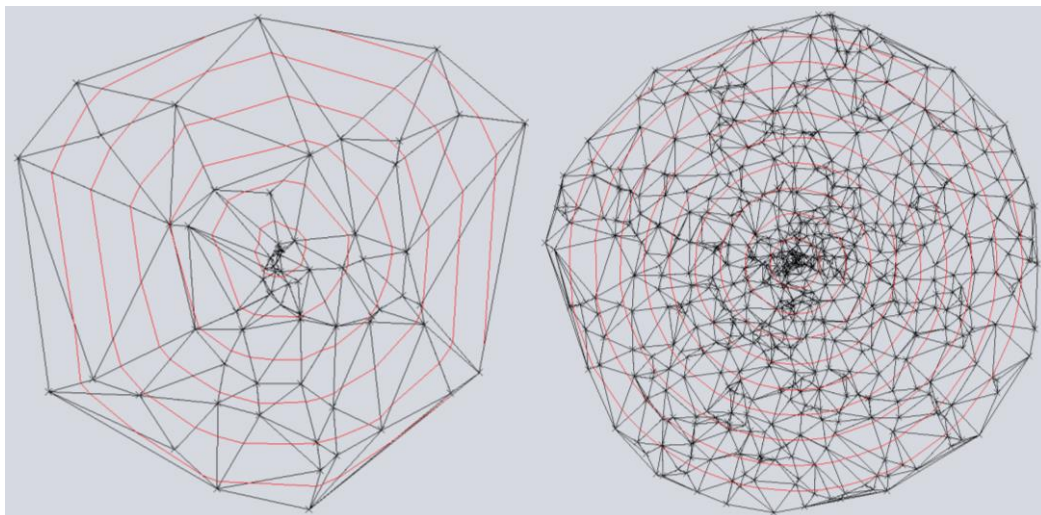
obr. č. 15: triangulace ve tvaru kopce (vlevo expozice, vpravo hypsometrie)

Vykreslení reliéfu je nejvíce závislé na hustotě bodů ve vstupní množině. V případě, že máme k dispozici málo bodů reprezentujících reliéf, může dojít ke ztrátě dominantních prvků reliéfu, jako jsou vrcholy nebo hřebety. Maximální výška DMT bude vždy odpovídat maximální výšce známého vstupního bodu. Hustší množina bodů může výsledky zlepšit, avšak chyby při vykreslení mohou stále nastávat. V praxi lze tento problém řešit přidáním dalších vstupních dat. Jedná se převážně o vodní toky nebo přesné kótované body, tím docílíme přesného vykreslení vrcholu a dodržení topografických pravidel právě v oblasti vodních toků.

Další nevýhodou triangulace je vykreslování hran trojúhelníků pomocí metody lineární interpolace. Všechny body na této hraně tedy leží na přímce, avšak to je ve skutečném reliéfu málo pravděpodobné. Dochází tedy k ostřejšímu vykreslení prvků reliéfu, jako je úpatí, hřbet, spočinek nebo vrchol. Ideálním řešením by bylo substituovat přímku křivkou a využít ideálnější interpolační metodu od jednoduché IDW (tato metoda vykreslí hranu jako křivku, ale vytváří artefakty v podobě takzvaných „bullseye“) až po složitější Kriging. Větší hustota dat i v tomto případě může zčásti tento problém eliminovat, ale je důležité pamatovat na pořizovací a následně výpočetní náročnost.

Z kartografického hlediska jsou DMT využívány například pro tvorbu vrstevnic nebo stínovaného reliéfu pro podklad map. V naší aplikaci využíváme výslednou triangulaci právě pro vykreslování vrstevnic. Jak je patrné z obrázku č. 16 jsou červené vrstevnice vykresleny jako úsečky. To je zapříčiněno opět použitím metody lineární interpolace. Takovéto vrstevnice nereprezentují reálný povrch, protože ve skutečnosti je reliéf tvořen spíše zaoblenými hranami. Řešení tohoto problému je podobné jako v předchozích případech. Lze zvýšit množinu vstupních bodů, kdy dojde k vizuálnímu zlepšení vjemu vrstevnice (viz obr. č. 16) zakomponovat důležité prvky reliéfu (vodní toky, vrcholy) a použít vhodnější metodu interpolace a nahrazení úsečky křivkou.





obr. č. 16: triangulace kopce s vrstevnicemi (vlevo 70 bodů, vpravo 700 bodů)

## 10. Seznam literatury

BAYER, T. 2018. Rovinné triangulace a jejich využití: Greedy Triangulation. Delaunay Triangulation. Constrained Delaunay Triangulation. Data Dependent Triangulation. DMT. [elektronický zdroj]. Praha.

Dostupné na: <https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/index.php/teaching/algoritmy-pro-tvorbu-digit-map>