Quarta giornata

Il modello lineare misto

Marcello Gallucci
Università Milano-Bicocca

GLM

Modello Lineare Generale

vantaggi

- Consente di stimare le relazioni fra due o più variabili
- Si applica ad una ampio spettro di tipi di dati
- Consente di stimare vari tipi di effetti

svantaggi

- Assume una struttura dei dati molto semplice
- Non consente di modellare una ampia serie di relazioni e dipendenza tra unità di misurazione

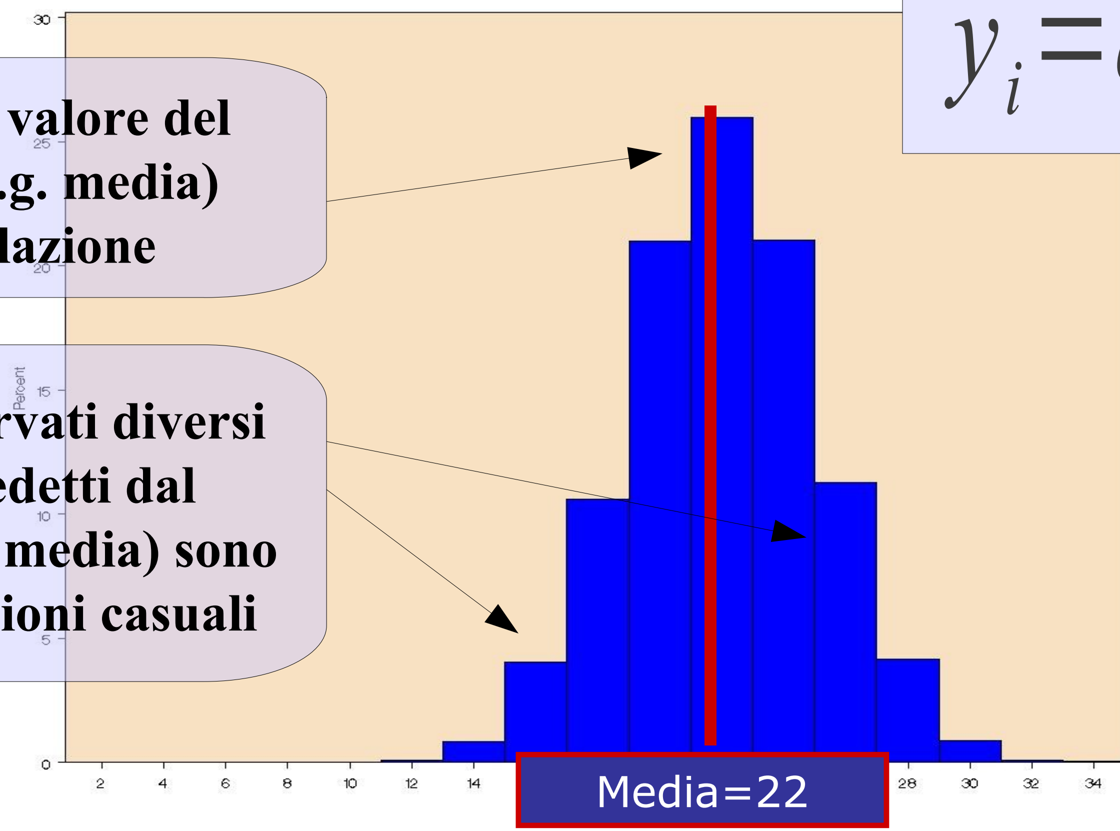
Assunzioni GLM

Modello Lineare Generale

$$y_i = a + e_i$$

Esiste un solo valore del parametro (e.g. media) nella popolazione

I punteggi osservati diversi da quelli predetti dal parametro (e.g. media) sono dovuti a variazioni casuali



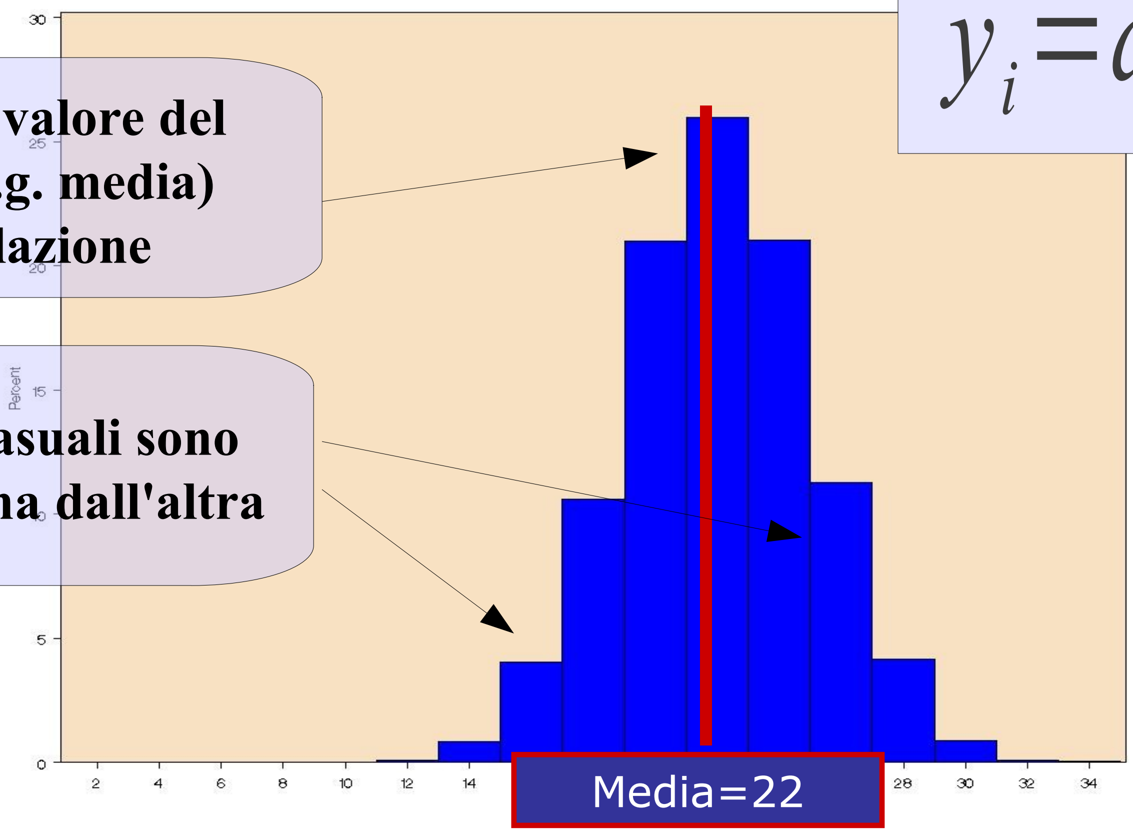
Assunzioni GLM

Modello Lineare Generale

$$y_i = a + e_i$$

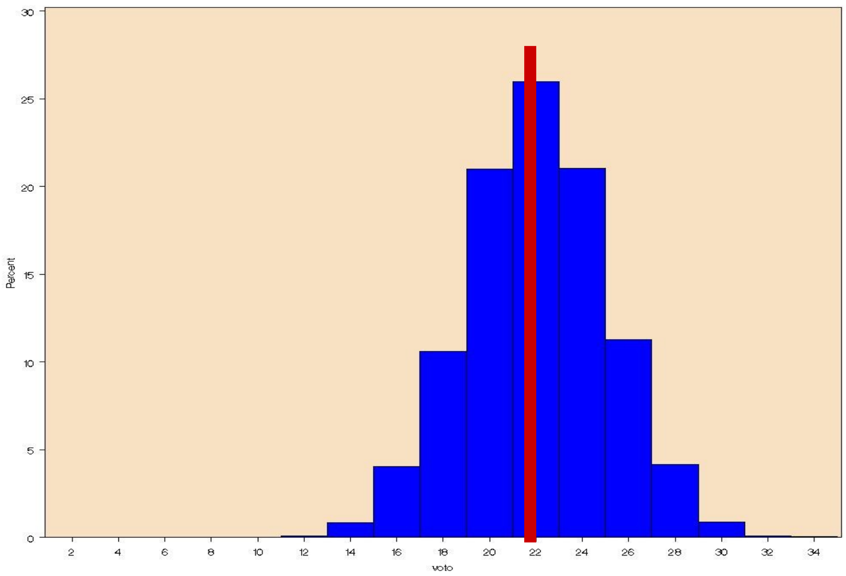
Esiste un solo valore del parametro (e.g. media) nella popolazione

Le variazioni casuali sono indipendenti l'una dall'altra



Assunzioni GLM

Modello Lineare Generale



Il valore stimato della popolazione si definice FISSO (fixed parameter)

$$y_i = a + e_i$$

$$corr(e_i, e_j) = 0$$

Le variazioni casuali sono indipendenti l'una dall'altra

Violazioni delle assunzioni

Le assunzioni di unicità degli effetti (effetti fissi) e indipendenza delle misurazioni (errori indipendenti) non sono rispettate in tutti i seguenti casi:

- Misurazioni correlate
- Disegni a misure ripeture
- Disegni longitudinali
- Dati con strutture gerarchiche
- Dati con misurazioni multi-livello

I modelli misti

Non esiste un solo valore fisso che intendiamo stimare

Le variazioni casuali non sono indipendenti l'una dall'altra

I modelli misti consentono di estendere il modello lineare generale in tutte quelle situazioni in cui le due assunzioni fondamentali del GLM non sono rispettate

I modelli misti

GLM

Regressione

T-test

ANOVA

ANCOVA

Moderazione

Mediazione

Path Analysis

Regressione Logistica

LMM

Random coefficients models

Random intercept regression models

One-way ANOVA with random effects

One-way ANCOVA with random effects

Intercepts-and-slopes-as-outcomes models

Generalized mixed model

Estensione del GLM al **modello misto**

Esempio "birre" 2

Consideriamo il caso in cui abbiamo ampliato il nostro campione di "bevitori di birra", avendo raccolto ulteriori dati in diversi bar della città

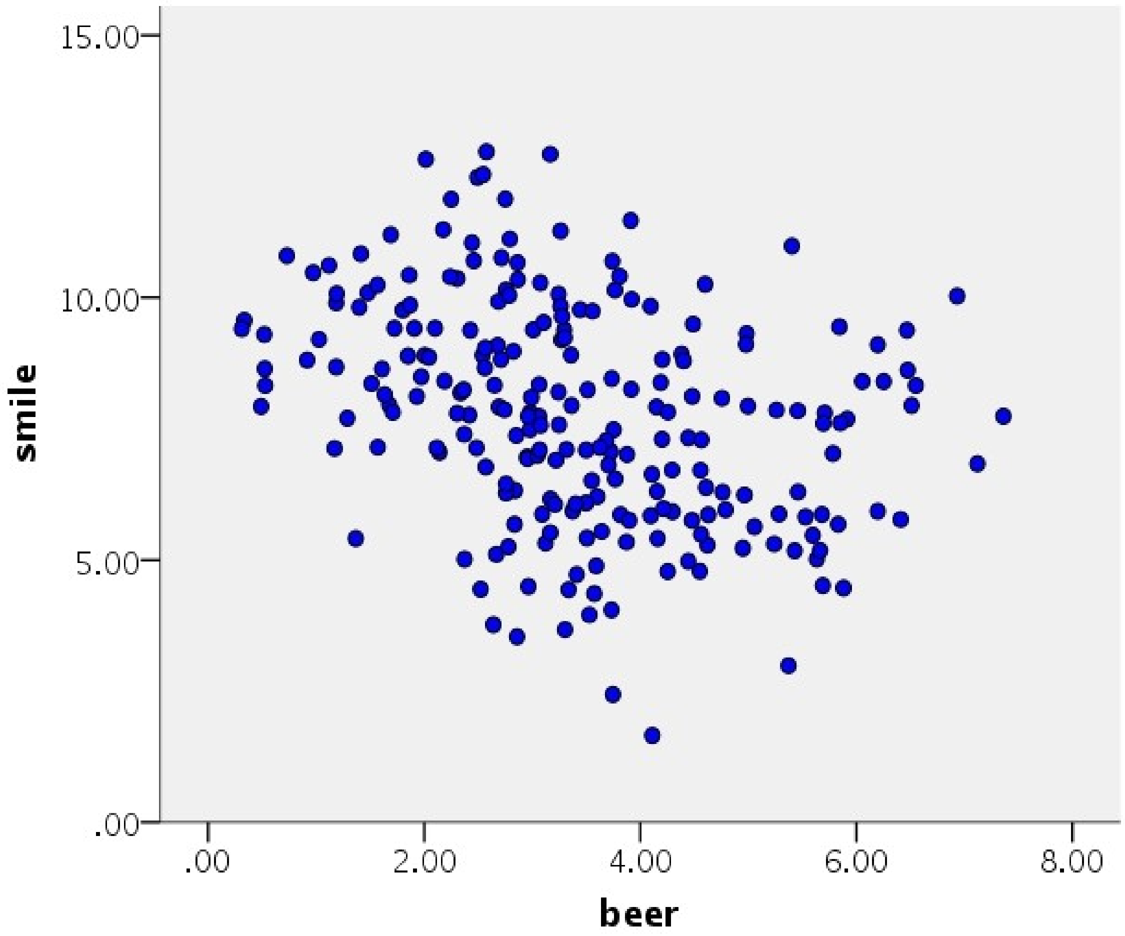
bar

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	a	3	1.3	1.3	1.3
	b	14	6.0	6.0	7.3
	c	22	9.4	9.4	16.7
	d	21	9.0	9.0	25.6
	e	14	6.0	6.0	31.6
	f	20	8.5	8.5	40.2
	g	24	10.3	10.3	50.4
	h	12	5.1	5.1	55.6
	i	16	6.8	6.8	62.4
	l	22	9.4	9.4	71.8
	m	21	9.0	9.0	80.8
	n	15	6.4	6.4	87.2
	o	16	6.8	6.8	94.0
	p	11	4.7	4.7	98.7
	q	3	1.3	1.3	100.0
	Total	234	100.0	100.0	

Totale di 234 soggetti

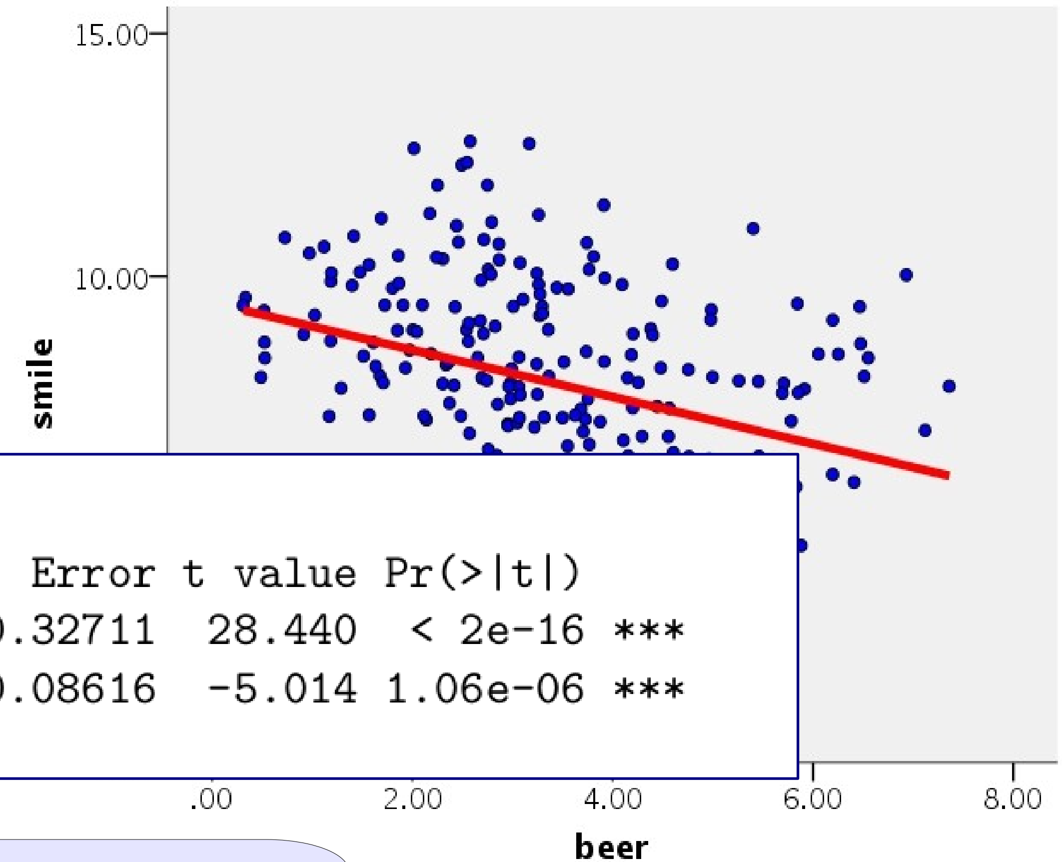
Esempio “birre” 2

Lo scatterplot mostra una distribuzione differente dall'esempio precedente



Esempio “birre” 2

La regressione semplice conferma il risultato assai differente




```
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  9.30306    0.32711  28.440  < 2e-16 ***
## beer        -0.43198    0.08616  -5.014 1.06e-06 ***
## ---
```

Relazione negativa

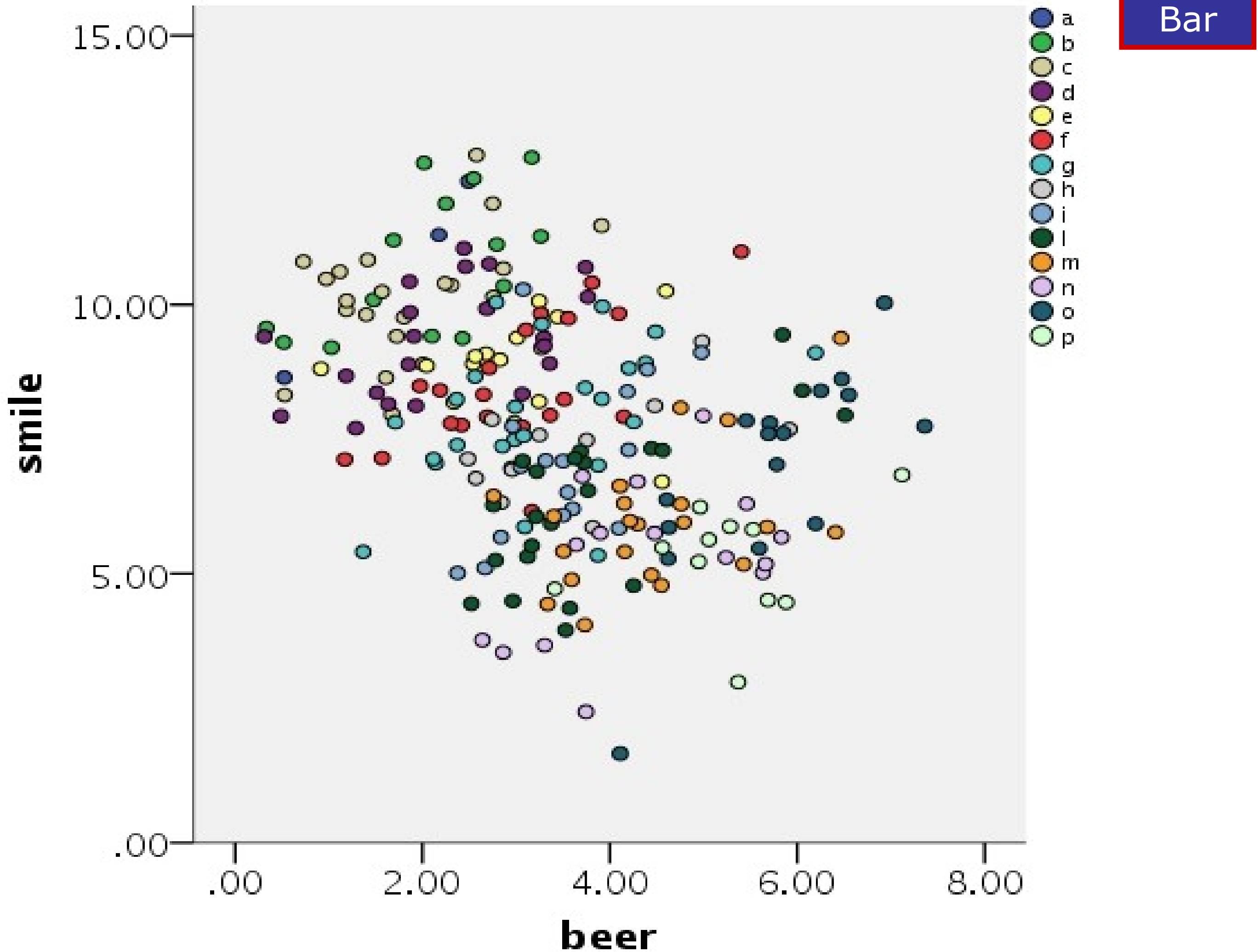
Possibili spiegazioni

I risultati potrebbero essere distorti (e ciò spiegherebbe il risultato inatteso) dal non aver considerato la struttura dei dati

- I dati infatti:
  - I soggetti sono stati campionati in diversi bar
  - Ogni bar potrebbe avere caretteristiche particolari (ambiente, qualità della birra, etc) che condizionano la relazione tra le variabili
  - I soggetti in ogni singolo bar potrebbero essere più simili tra loro di quando lo siano soggetti in bar diversi

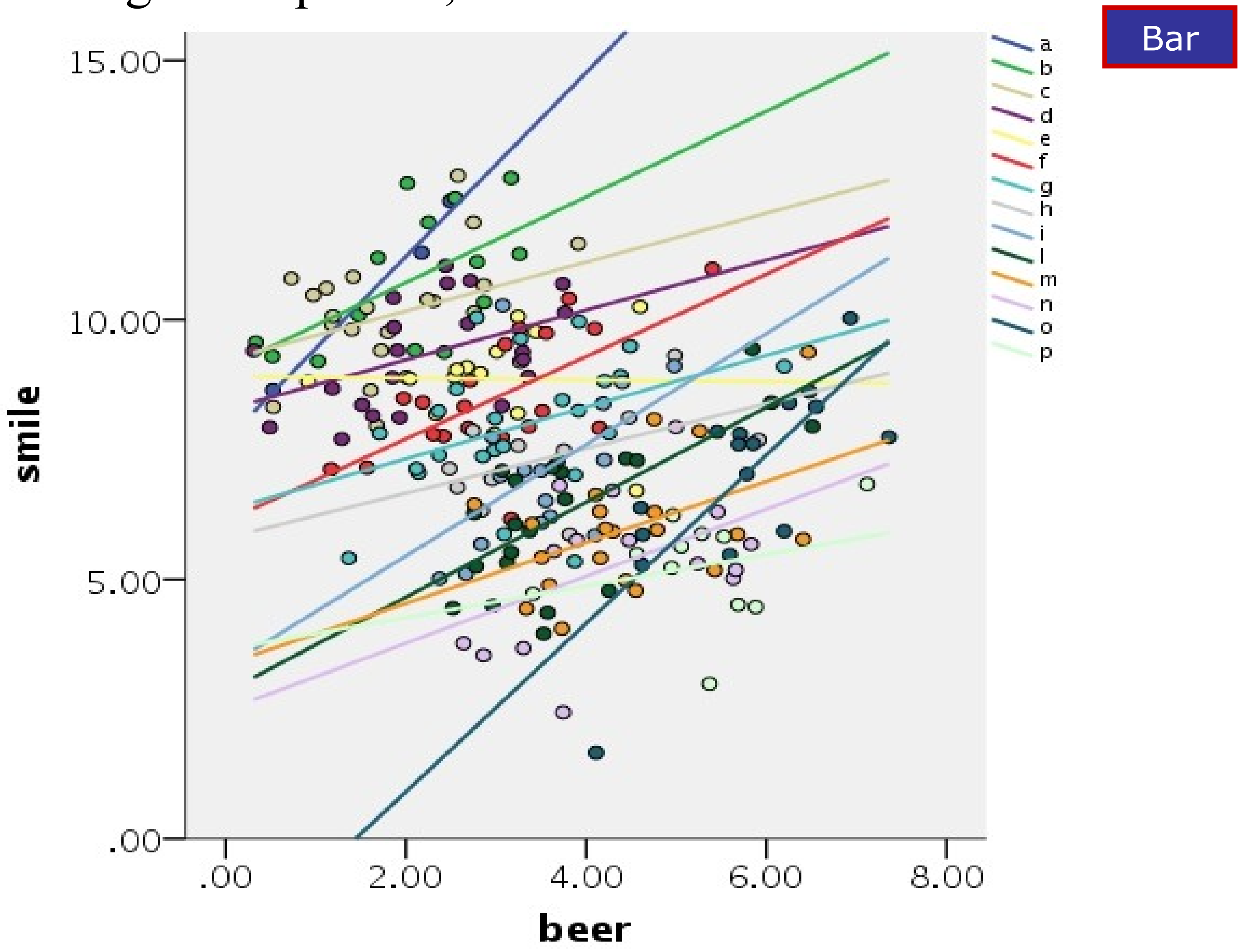
Scatterplot per Bar

Lo scatterplot, distinguendo per bar, offre indicazioni



Scatterplot per Bar

Lo scatterplot, distinguendo per bar, offre indicazioni

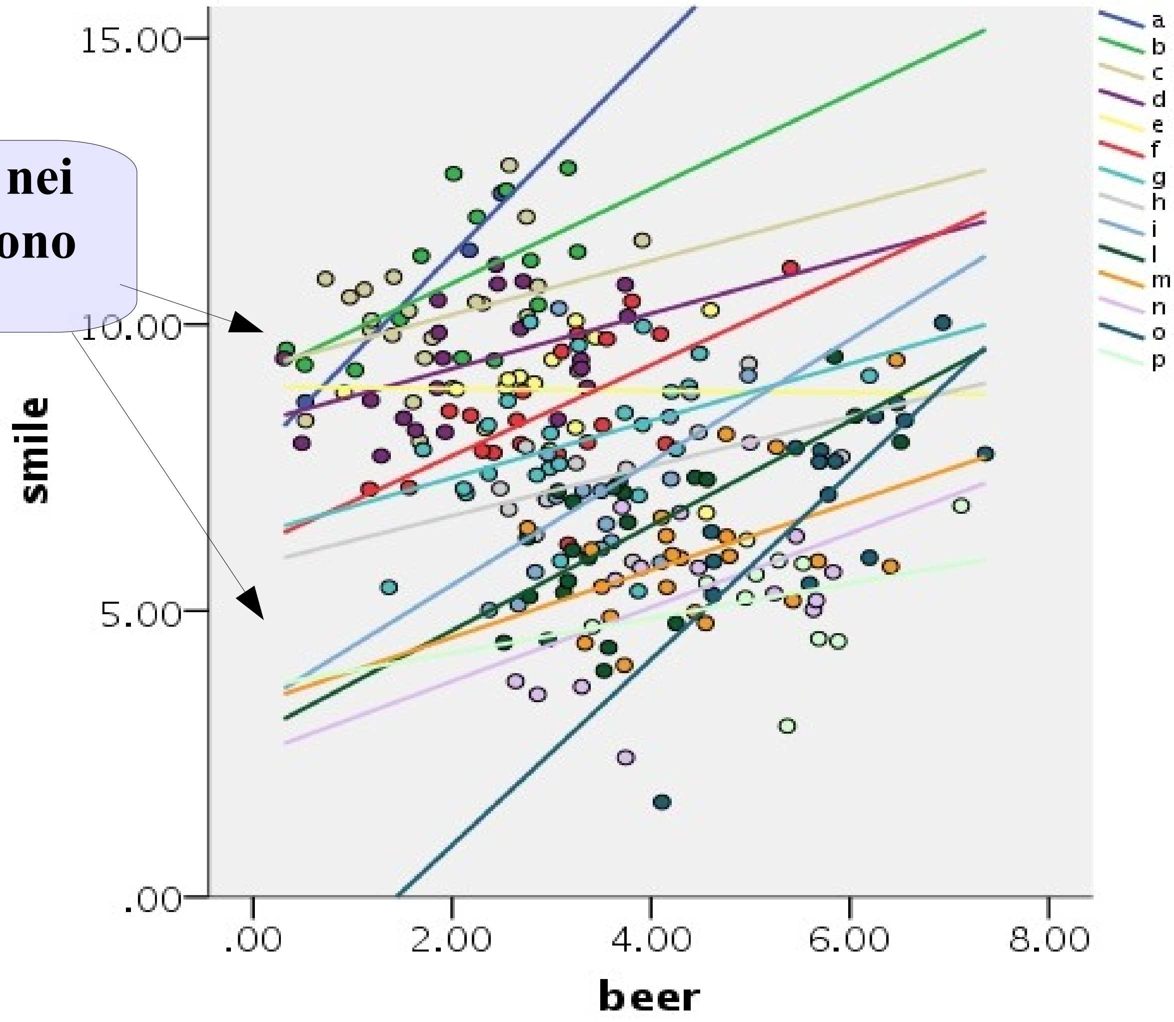


Scatterplot per Bar

Lo scatterplot, distinguendo per bar, offre indicazioni

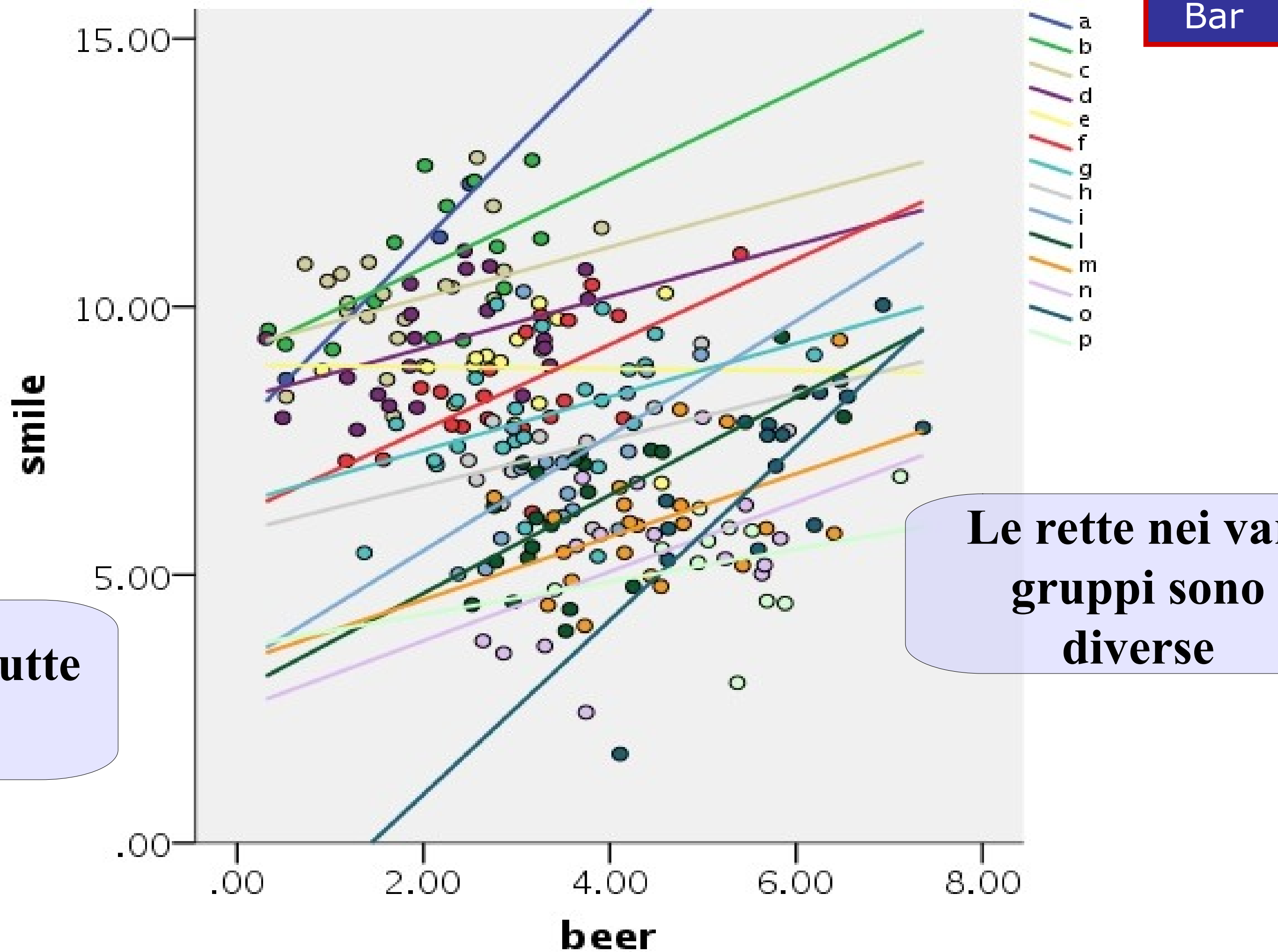
Bar

Le intercette nei vari gruppi sono diverse



Scatterplot per Bar

Lo scatterplot, distinguendo per bar, offre indicazioni



Le rette nei vari gruppi sono diverse

Le rette sono tutte positive

Modello

- Sembrerebbe che considerando tutti i soggetti come equivalenti ed indipendenti (assunzione della regressione) otteniamo un risultato distorto

- Se stimassimo un modello in cui la retta di regressione (intercetta e coefficiente B) sia diversa in ogni gruppo, avremmo dei risultati più soddisfacenti

Modello

- Definiamo dunque una regressione per ogni gruppo

y_{ij} **Numero di sorrisi del soggetto i nel gruppo j**

$$\hat{y}_{ia}=a_a+b_a \cdot x_{ia}$$
$$\hat{y}_{ib}=a_b+b_b \cdot x_{ib}$$
$$\hat{y}_{ic}=a_c+b_c \cdot x_{ic}$$

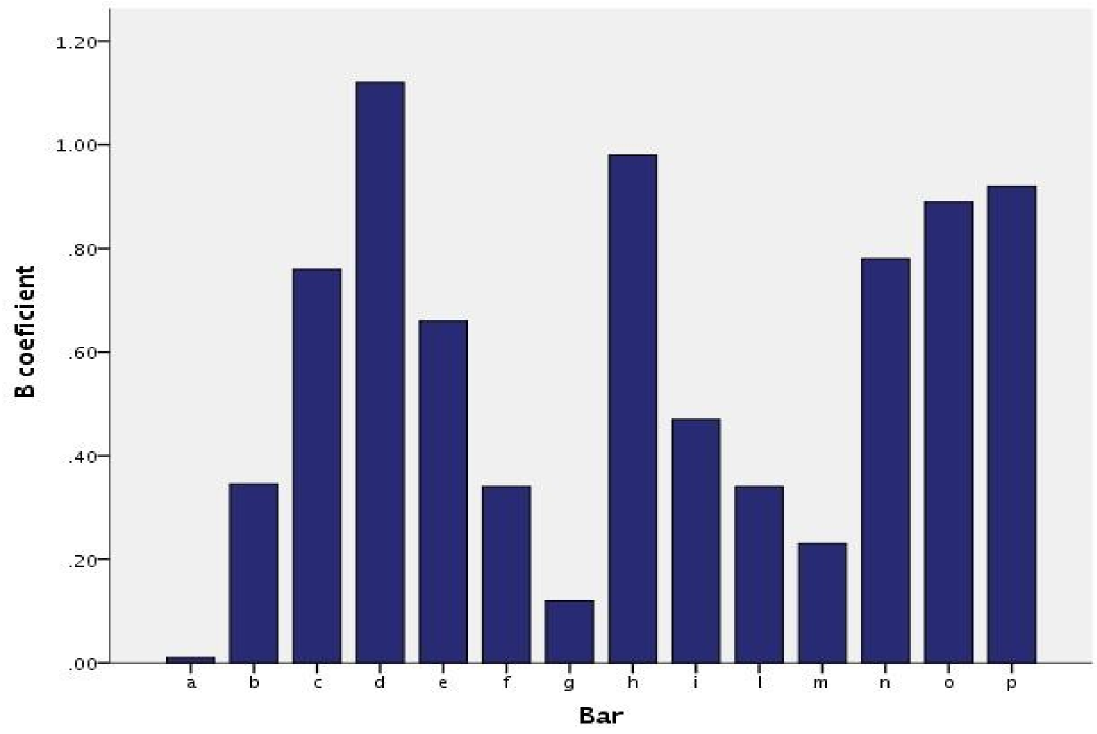
$$\hat{y}_{ij}=a_j+b_j \cdot x_{ij}$$

In queste regressioni, sia l'intercetta che i coefficienti sono diversi (non fissi) nei vari gruppi

Coefficienti variabili

- Se i coefficienti cambiano nei vari gruppi, ovviamente non sono fissi (!!!)

I coefficienti avranno una distribuzione rispetto ai bar per i quali sono calcolati

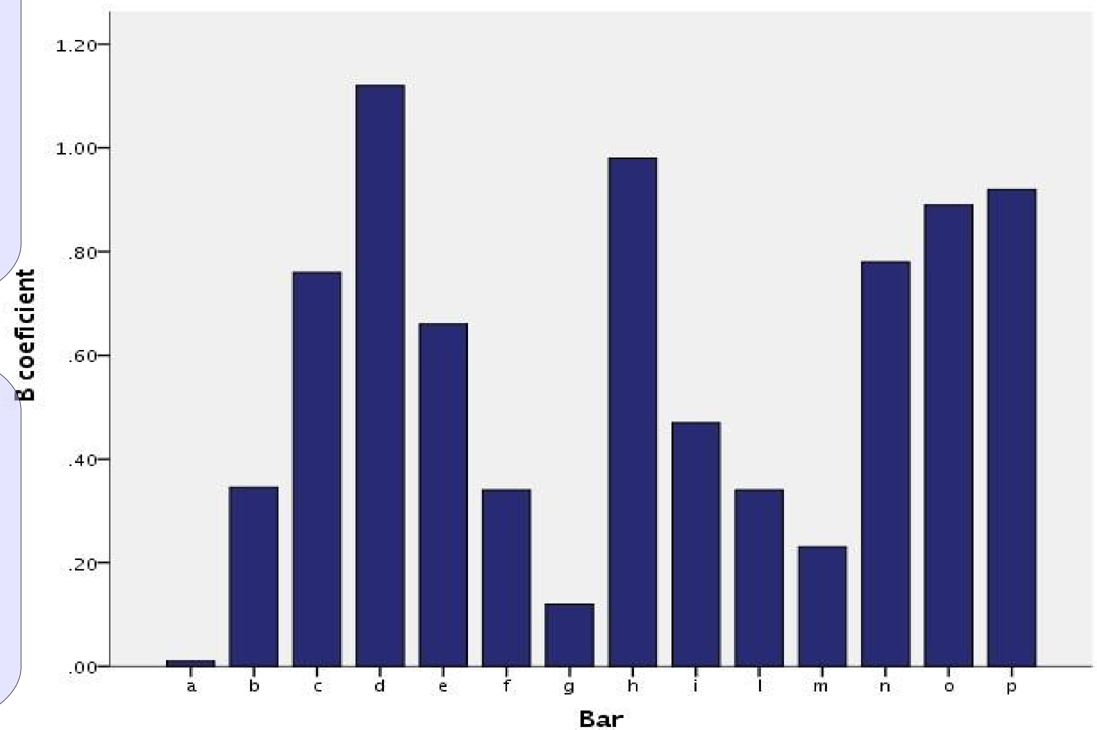


Coefficienti random

- I coefficienti che cambiano sono definiti **coefficienti random**

I coefficienti avranno una distribuzione random (cioè avranno una loro variabilità)

Cioè, nella popolazione esiste una variazione random dei coefficienti

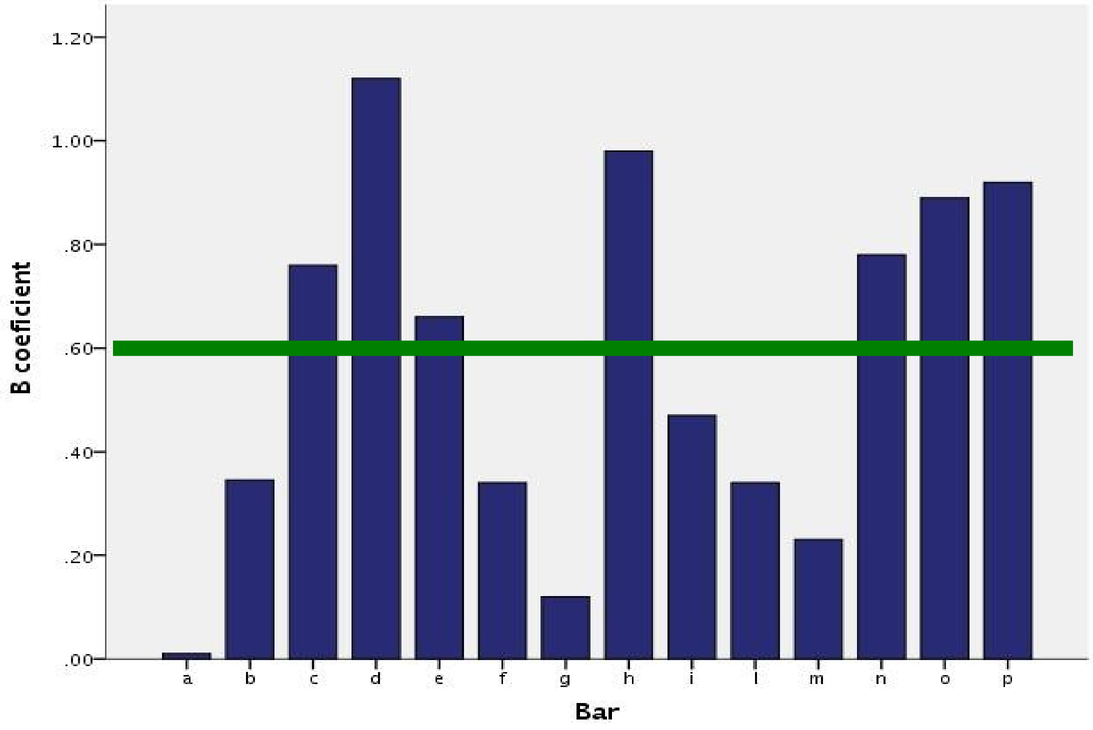


Media dei Coefficiente

- Se i coefficienti sono delle variabili, avranno una loro **media** ed una loro **varianza**

MEDIA

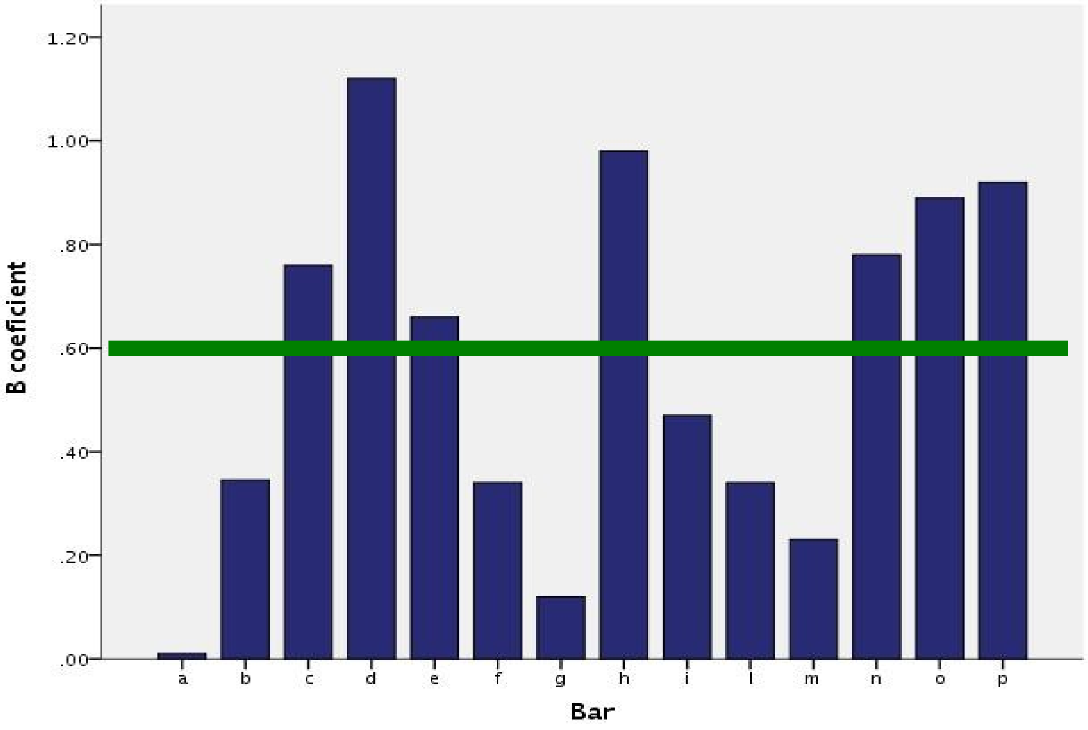
$$\bar{b} = \frac{\sum_j b_j}{k}$$



Coefficienti fissi

- La media dei coefficienti per bar indica la relazione (media) tra birre e sorrisi in tutto il campione

La media (come visto prima) è un parametro fisso del modello che descrive la distribuzione dei coefficienti nei cluster (bar)



Modello

- Definiamo ora un modello con le varie regressioni per cluster e la loro media

Una regressione per cluster

$$\hat{y}_{ij} = a_j + b_j \cdot x_{ij}$$

Ogni coefficiente è espresso come deviazione dalla media dei coefficienti

$$b'_j = b_j - \bar{b}$$

Modello generale

$$\hat{y}_{ij} = a_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

Modello

- Definiamo ora un modello con le varie regressioni per cluster e la loro media

Modello generale

$$\hat{y}_{ij} = a_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

Coefficienti random

Coefficiente fisso

Modello Misto

- Definiamo ora un modello con le varie regressioni per cluster e la loro media

Modello generale

$$\hat{y}_{ij} = a_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

Coefficienti random

Coefficiente fisso

I modelli che contengono coefficienti sia random che fissi sono definiti **modelli misti (mixed models)**

Modello Misto

- Analogamente

Una regressione per cluster

$$\hat{y}_{ij} = a_j + b_j \cdot x_{ij}$$

Ogni intercetta espressa come deviazione dalla media delle intercette

$$a'_j = a_j - \bar{a}$$

Modello generale

$$\hat{y}_{ij} = \bar{a} + a'_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

Modello Misto

- Interpretazione

Modello generale

$$\hat{y}_{ij} = \bar{a} + a'_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

Il punteggio della VD (i sorrisi) di ogni soggetto in un dato cluster (bar) è influenzato da:

Modello Misto

- Interpretazione

Modello generale

$$\hat{y}_{ij} = \bar{a} + a'_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

La media dei valori attesi di Y per x=0

Per x=0, in media quanto è grande y

Modello Misto

- Interpretazione

Modello generale

$$\hat{y}_{ij} = \bar{a} + a'_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

I valori attesi di y per x=0 in ogni cluster (bar)

Per x=0, quanto devo aggiungere o sottrarre al valore atteso medio per un cluster specifico

Modello Misto

- Interpretazione

Modello generale

$$\hat{y}_{ij} = \bar{a} + a'_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

L'effetto specifico di x su y per il cluster j

In un dato cluster, quanto aumenta (o diminuisce) l'effetto di x su y

Modello Misto

- Interpretazione

Modello generale

$$\hat{y}_{ij} = \bar{a} + a'_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

L'effetto medio di x su y

In media, quanto aumenta y per ogni unità in più di x

GLM come sottocaso

La corrispondenza logica tra le varie tecniche inerenti al Modello Lineare Generale con le tecniche inerenti ai Modelli Misti è data dal fatto che il GLM può essere pensato come sottocaso dei MM

MM

$$\hat{y}_{ij} = \bar{a} + a'_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

GLM

$$\hat{y}_{ij} = \hat{a} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

Notazione

Per chiarezza, useremo questa notazione

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + b_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

y_{ij}, x_{ij}	**Variabili osservate per caso i nel cluster j**
$\bar{a}, \bar{b}$	**Effetti fissi**
a_j, b_j	**Effetti random calcolati nel cluster j espressi come deviazione dalla loro media**
e_{ij}	**Errore associato al singolo caso i**

Varianze

Per chiarezza, useremo questa notazione

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + b_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

σ_a	**Varianza dei coefficienti a**
σ_b	**Varianza dei coefficienti b**
σ	**Varianza di errore**
σ_{ab}	**Covarianza tra i coefficienti a e b**

Modelli Misti

- In sostanza, i modelli misti consentono di stimare gli effetti di VI su una VD, consentendo a tali effetti di variare in diverse unità di misurazione (cluster).

- Gli effetti che variano sono detti **effetti random**

- Gli effetti che non variano (cioè gli effetti medi uguali per tutto il campione) sono detti **effetti fissi**

Modelli Misti

- Per stimare correttamente un modello misto, si deve semplicemente capire quale siano gli effetti random, e per quali unità variano (quali sono i cluster)

- Una volta stimato il modello, gli **effetti fissi** si interpretano esattamente come nel GLM (regressione/anova etc)

- Gli **effetti random** generalmente non si interpretano, ma se ne può studiare la variabilità

- La definizione corretta del modello, consente di ottenere stime e errori standard (e dunque test inferenziali) corretti

Costruire il modello

Per costruire il modello, dobbiamo rispondere a tre semplici domande

- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random?
- Quali sono gli effetti fissi?
- Quali sono gli effetti random?

Variabili cluster

- **Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random?**
- Quali sono gli effetti fissi?
- Quali sono gli effetti random?
  - Qualunque variabile che raggruppa le osservazioni (i casi o le osservazioni) in modo che i punteggi possano essere più simili entro i gruppi che tra gruppi
  - Una variabili i cui livelli rappresentano un campione casuale di gruppi estratti da una popolazione più ampia di gruppi

Effetti Fissi

- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random?
- **Quali sono gli effetti fissi?**
- Quali sono gli effetti random?

  - Qualunque effetto che ci interessa in generale (equivalenti agli effetti nel GLM)
  - Esempio: L'effetto di birra sui sorrisi

Effetti Random

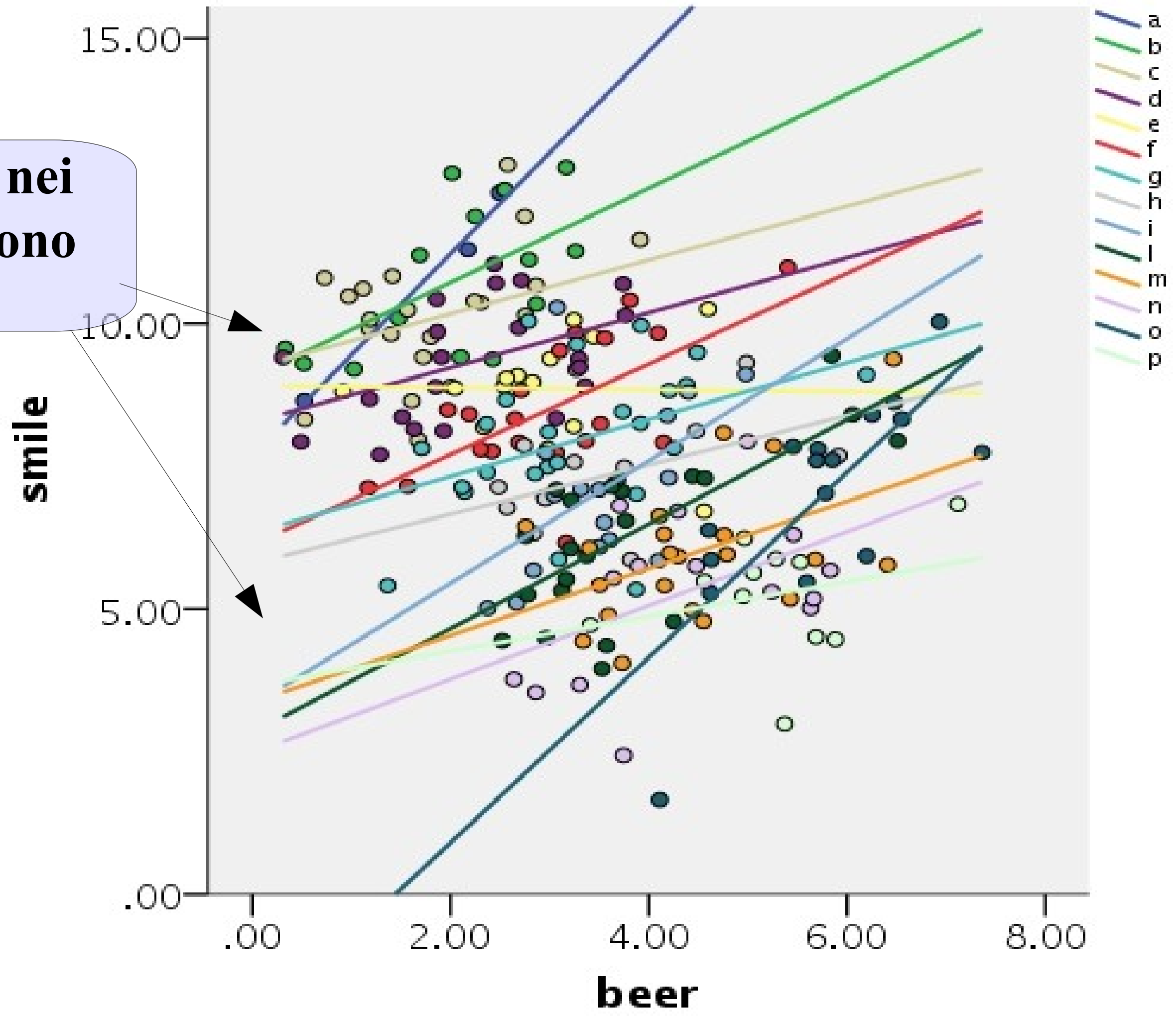
- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random?
- Quali sono gli effetti fissi?
- **Quali sono gli effetti random?**
  - Qualunque efffetto che può variare da cluster a cluster
  - (Dunque:) **Qualunque effetto (coefficiente) che può essere calcolato dentro ogni cluster**
  - Esempio: le intercette e il B di birre su sorrisi

Birre al Bar

Definiamo il modello, iniziando dal più semplice

Bar

Le intercette nei vari gruppi sono diverse



Birre al Bar

Definiamo un modello dove le intercette possono variare nei diversi bar, mentre il coefficiente b è fisso ed uguale per tutti i bar

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + \bar{b} \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

- Quali sono gli effetti fissi?
- Quali sono gli effetti random?
- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random?

Birre al Bar

Definiamo un modello dove le intercette possono variare nei diversi bar, mentre il coefficiente b è fisso ed uguale per tutti i bar

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + \bar{b} \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

- Quali sono gli effetti fissi? Intercetta e effetto di birre
- Quali sono gli effetti random? Intercetta
- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random? bar

Vari autori e libri definiscono questomodello:

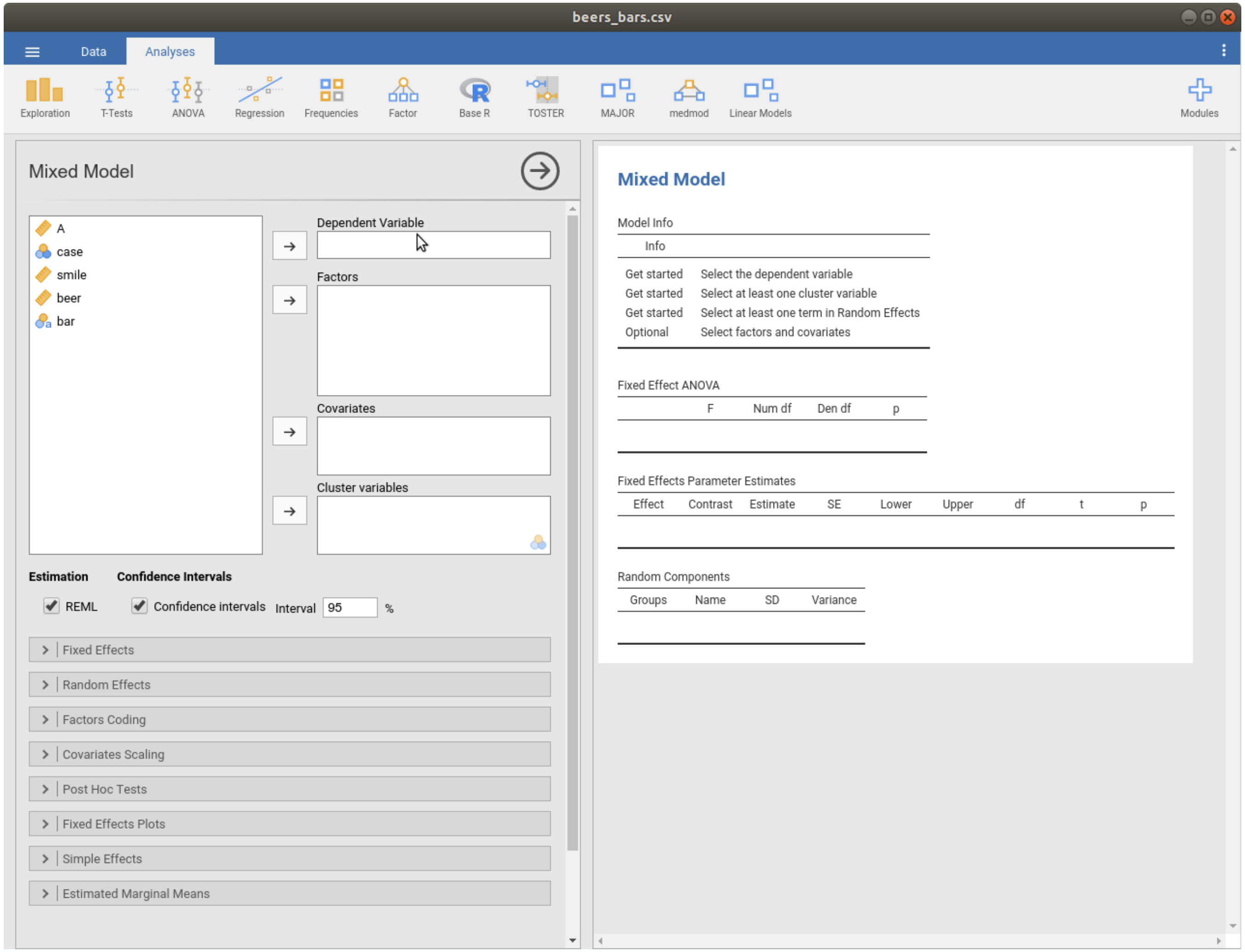
Random-intercepts regression

altri

Intercepts-as-outcomes model

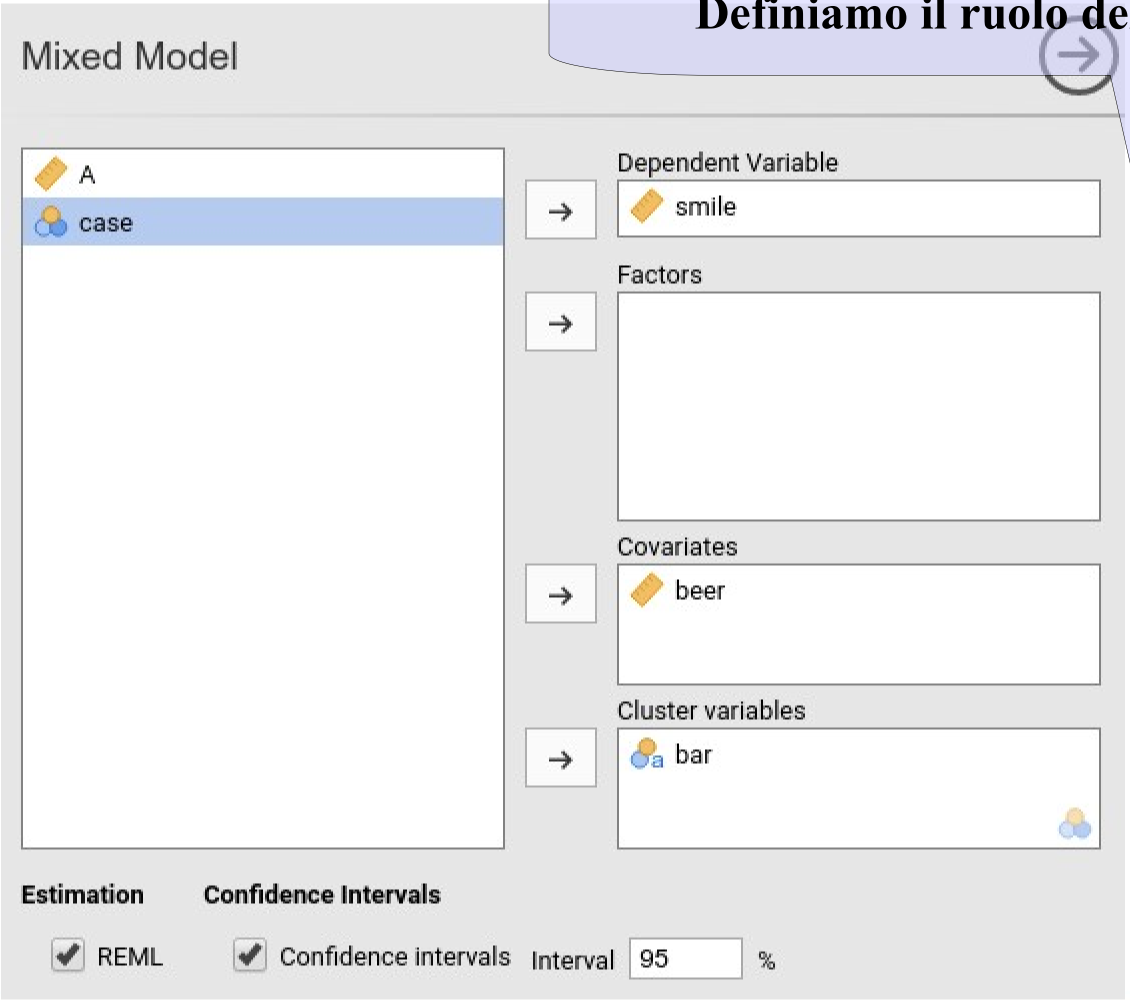
jamovi

- In jamovi "mixed model" è nel modulo GAMLj



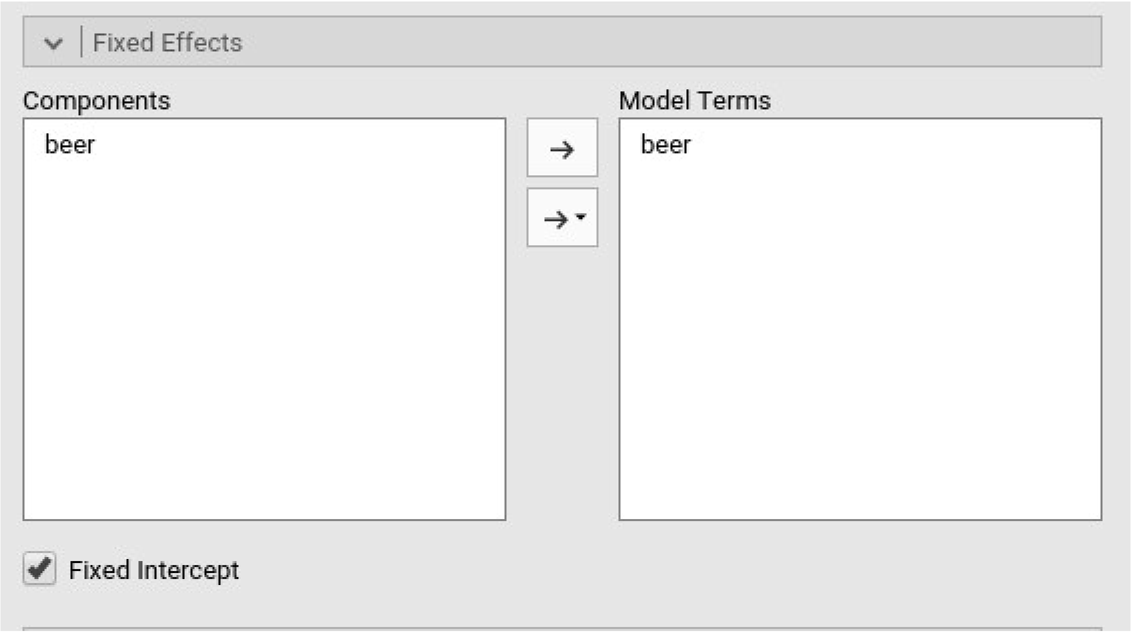
jamovi

Definiamo il ruolo delle variabili



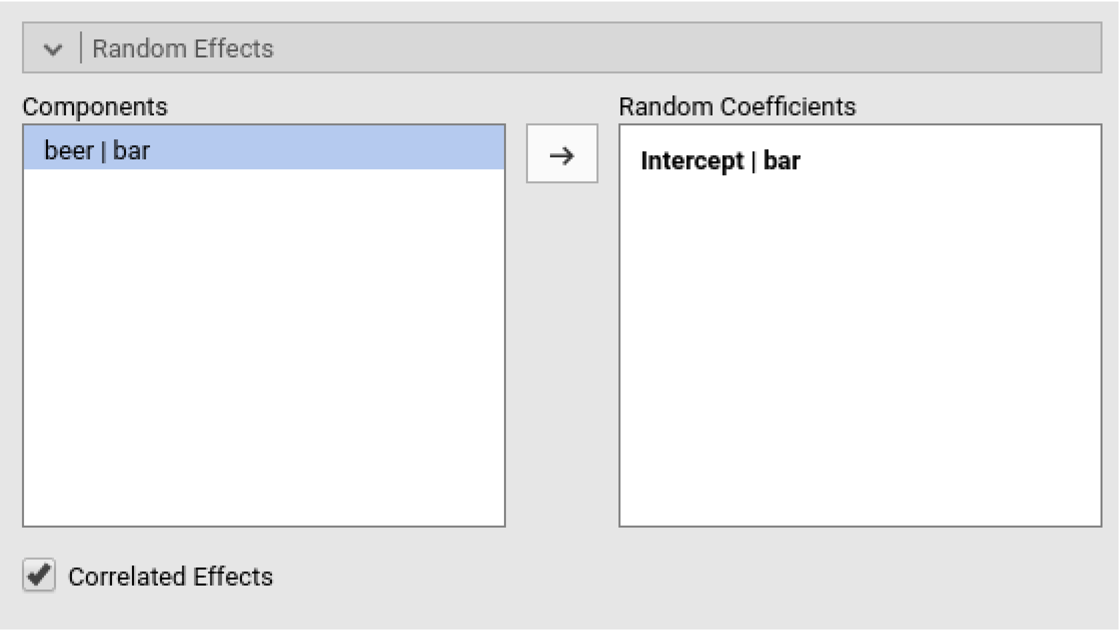
jamovi

Definiamo gli effetti fissi



jamovi

Definiamo la componente random



Risultati

- Una volta definita la componente random, otteniamo i risultati

Mixed Model

Model Info

Info	
Estimate	Linear mixed model fit by REML
Call	smile ~ 1 + (1 | bar) + beer
AIC	811.1613
R-squared Marginal	0.0894
R-squared Conditional	0.8172

R-squared Marginal: Quanta varianza è spiegata dai fixed effects da soli

R-squared Conditional: quanta varianza è spiegata dai fixed e dai random effects tutti insieme

Componente random

La varianza delle intercette è diversa da zero, dunque le intercette variano, dunque ok che siano random

Random Components

Groups	Name	SD	Variance
bar	(Intercept)	2.40	5.77
Residual		1.20	1.45

Note. Numer of Obs: 234 , groups: bar , 15

Jamovi

F-test per l’effetto fisso di beer

Fixed Effect ANOVA

	F	Num df	Den df	p
beer	46.0	1	229	< .001

Note. Satterthwaite method for degrees of freedom

Output

Se tutto è ok, guarderemo gli effetti fissi per valutare ed interpretare la relazione tra VD e VI

Fixed Effects Parameter Estimates

				95% Confidence Interval				
Effect	Contrast	Estimate	SE	Lower	Upper	df	t	p
(Intercept)	Intercept	7.778	0.6276	6.548	9.008	13.2	12.39	< .001
beer	beer	0.548	0.0808	0.390	0.706	229.4	6.79	< .001

Output

Se tutto è ok, guarderemo gli effetti fissi per valutare ed interpretare la relazione tra VD e VI

Fixed Effects Parameter Estimates

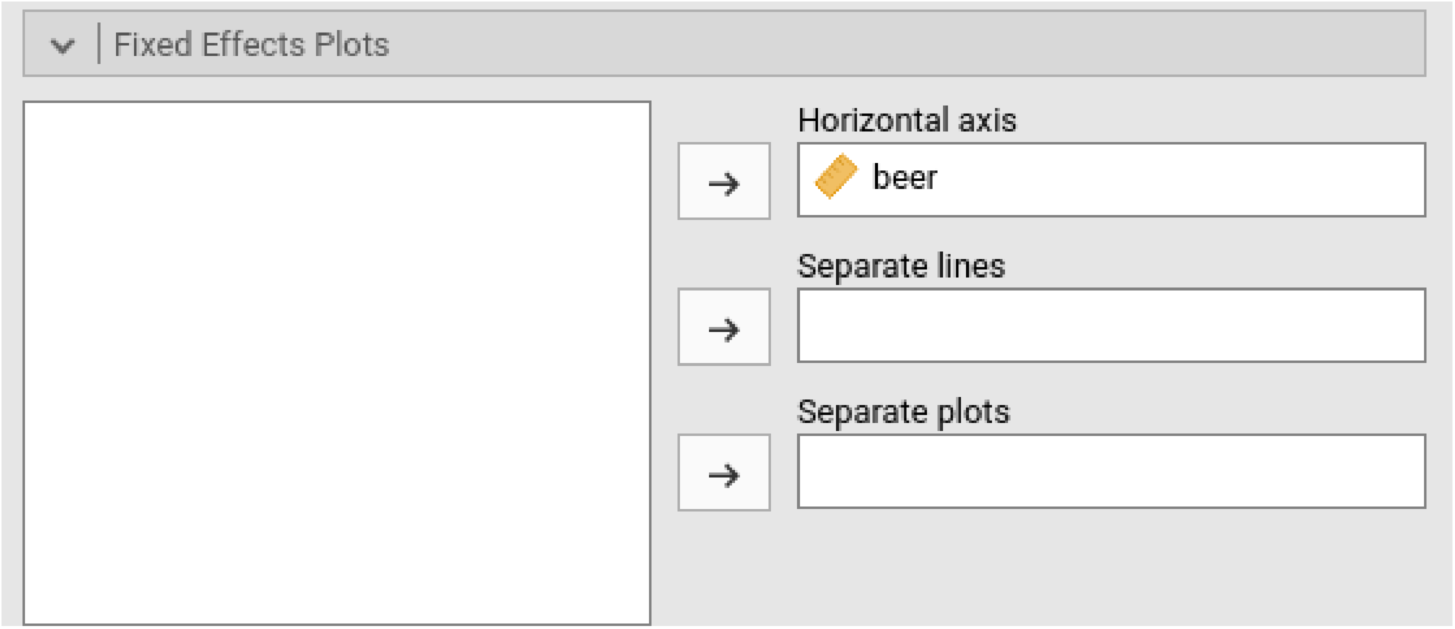
				95% Confidence Interval				
Effect	Contrast	Estimate	SE	Lower	Upper	df	t	p
(Intercept)	Intercept	7.778	0.6276	6.548	9.008	13.2	12.39	< .001
beer	beer	0.548	0.0808	0.390	0.706	229.4	6.79	< .001

Coefficiente b: In media, per ogni birra in più i sorrisi aumentano di .548

Intercetta: In media, per zero (media di) birre ci attendiamo 7.7 sorrisi

Jamovi

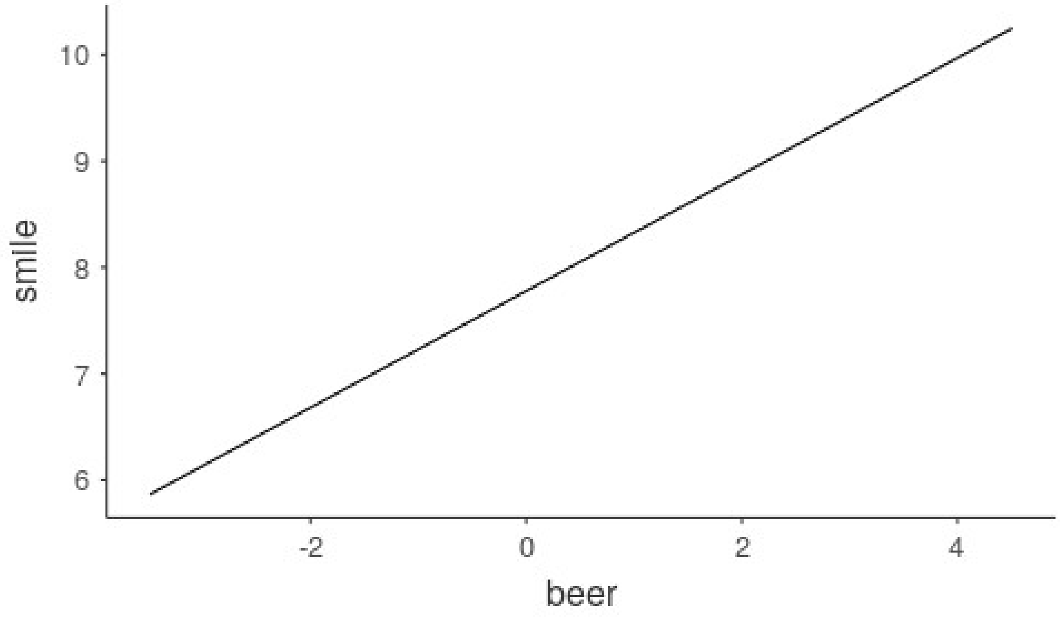
- Plots



Jamovi

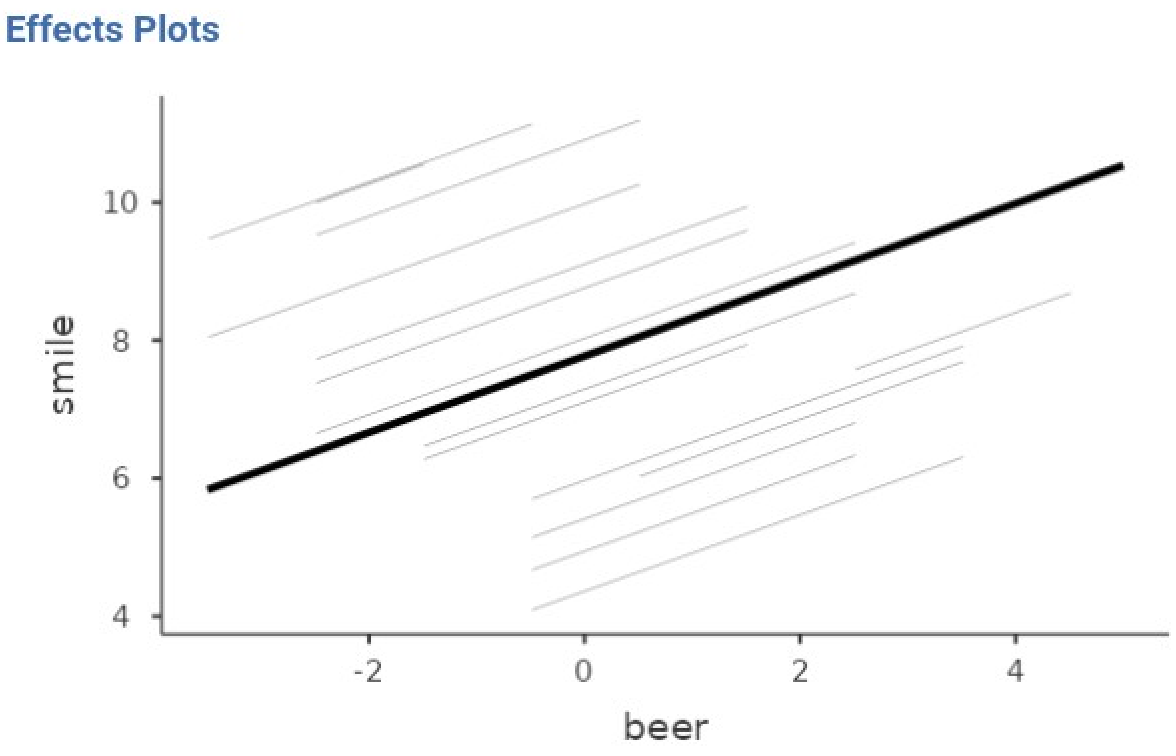
Plot dell'effetto fisso

Fixed Effects Plots



R Plot

Possiamo anche plottare gli effetti random



Note: Random effects are plotted by bar

Birre al Bar

Definiamo un modello dove le intercette e i coefficienti di regressione possono variare nei diversi bar,

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + \bar{b} \cdot x_{ij} + b \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

- Quali sono gli effetti fissi? Intercetta e effetto di birre
- Quali sono gli effetti random? Intercetta ed effetto di birre
- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random? bar

Vari autori e libri definiscono questo modello:

Random-coefficients regression

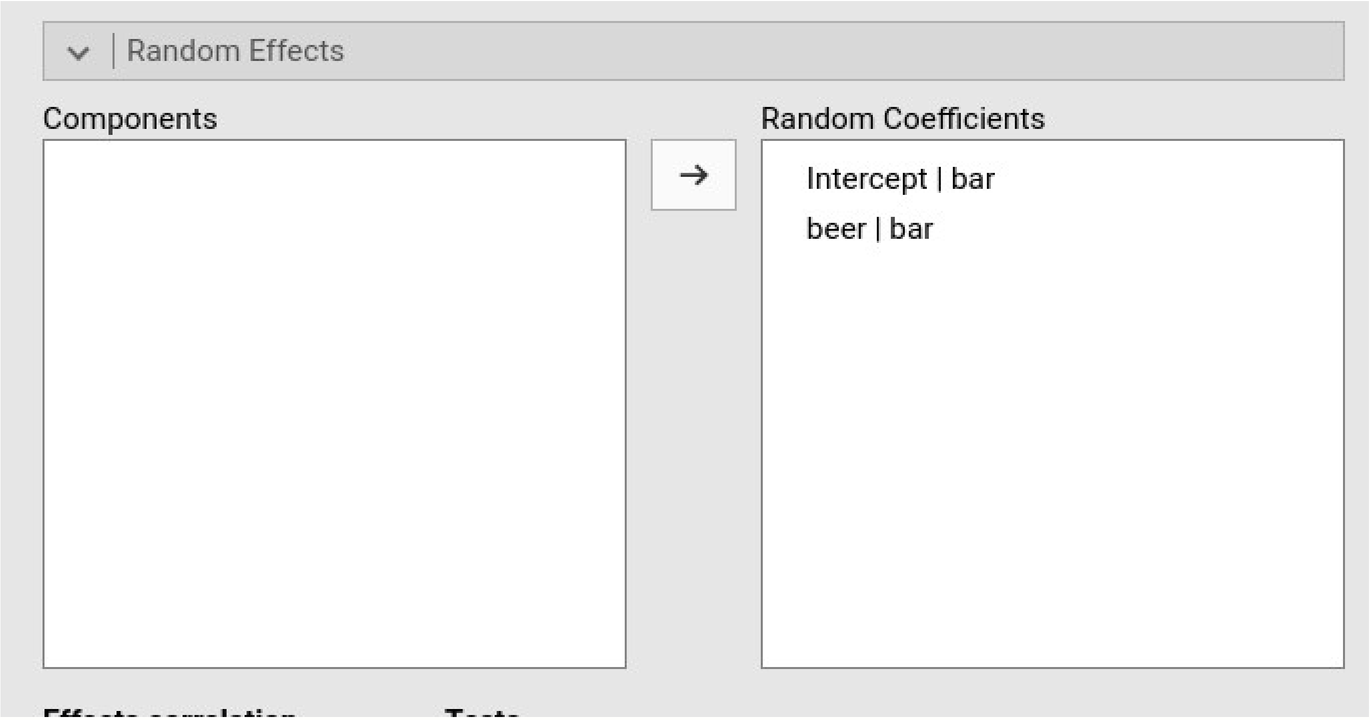
Altri come

Intercepts- and Slopes-as-outcomes model

Effetti random

Definiamo un modello dove le intercette possono variare nei diversi bar, mentre il coefficiente b è fisso ed uguale per tutti i bar

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + \bar{b} \cdot x_{ij} + b \cdot x_{ij} + e_{ij}$$



Output

Poi guarderemo la variabilità degli effetti random, per capire se è abbiamo fatto bene a settarli come tali

Random Components

Groups	Name	SD	Variance	ICC
bar	(Intercept)	2.417	5.8417	0.803
	beer	0.167	0.0278	
Residual		1.196	1.4314	

Note. Number of Obs: 234 , groups: bar 15

Random Parameters correlations

Groups	Param.1	Param.2	Corr.
bar	(Intercept)	beer	-0.766

La varianza dei b è piccola dunque i b variano molto poco, dunque potremmo tenere il modello precedente

Varianze

La varianza degli effetti random ci indica quanta variabilità c'è tra i cluster nell'effetto

- L'effetto random lo lasciamo anche se la varianza è molto piccola
- Se è zero (esattamente), l'effetto random deve essere tolto dal modello

Coefficiente di dipendenza

Possiamo quantificare la dipendenza tra punteggi mediante il **coefficiente di correlazione intraclasse**

$$ICC = \frac{\sigma_a}{\sigma_a + \sigma}$$

σ_a

Random Components

Groups	Name	SD	Variance	ICC
bar	(Intercept)	2.417	5.8417	0.803
	beer	0.167	0.0278	
Residual		1.196	1.4314	

Note. Number of Obs: 234 , groups: bar 15

σ

Output

Guarderemo gli effetti fissi per valutare ed interpretare la relazione tra VD e VI

Fixed Effects Parameter Estimates

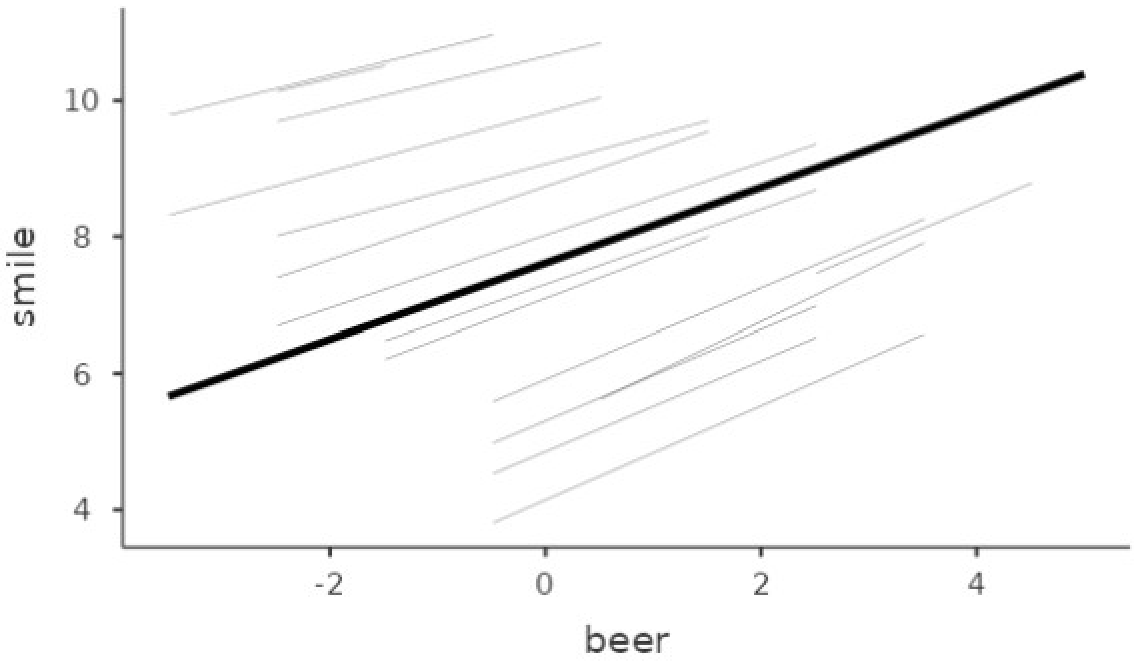
			95% Confidence Interval				
Names	Estimate	SE	Lower	Upper	df	t	p
(Intercept)	7.610	0.6335	6.368	8.851	12.93	12.01	< .001
beer	0.555	0.0925	0.374	0.737	7.23	6.00	< .001

Effetti non diversi da prima

Plots

- Plottando glli effetti random vediamo che non sono più tutti paralleli

Effects Plots



Note: Random effects are plotted by bar

Morale

- Il modello misto consente di estendere il modello lineare generale a cui problemi di analisi dei dati in cui la struttura dei dati non si adatta naturalmente

- I semplici concetti visti oggi, combinati alle conoscenze relative al GLM, ci consentiranno di stimare modelli misti per (quasi) tutte i problemi di ricerca (plausibili)

Il disegno a misure ripetute

Disegno a misure ripetute

- Consideriamo un disegno a misure ripetute classico (within-subjects) in cui i livelli del fattore WS (5 differenti trials) sono misurati sulle stesse persone

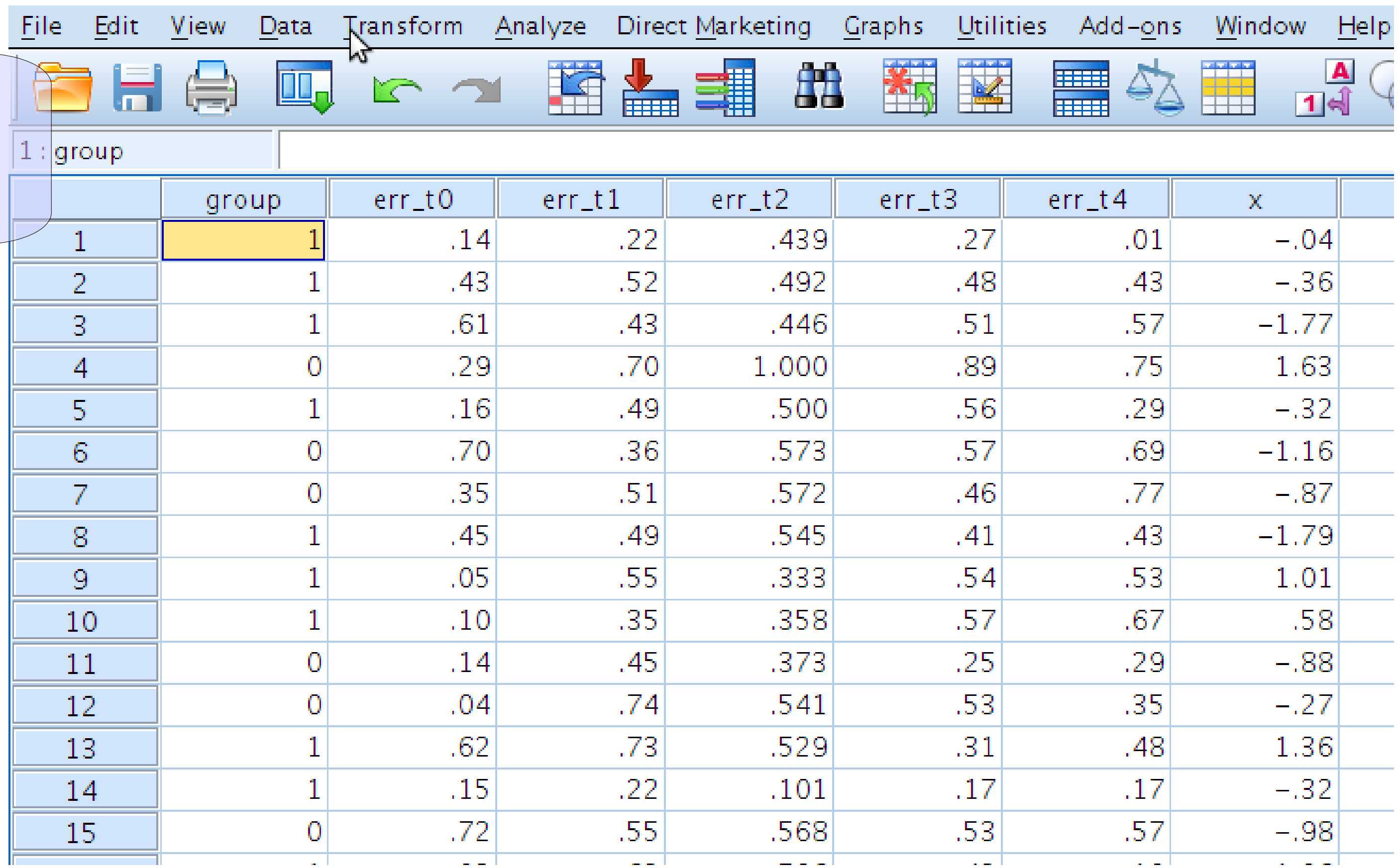
trial

		1	2	3	4	5
Soggetti	1	Y11	Y21	Y31	Y41	Y51
	2	Y12	Y22	Y32	Y42	Y52
	3	Y13	Y23	Y33	Y43	Y53
	….					
	N	Y1n	Y2n	Y3n	Y4n	Y5n

Formato file Standard

- Spesso (in SPSS) il file è organizzato nel formato “wide”, una riga un soggetto

Una riga, un soggetto



	group	err_t0	err_t1	err_t2	err_t3	err_t4	x
1	1	.14	.22	.439	.27	.01	-.04
2	1	.43	.52	.492	.48	.43	-.36
3	1	.61	.43	.446	.51	.57	-1.77
4	0	.29	.70	1.000	.89	.75	1.63
5	1	.16	.49	.500	.56	.29	-.32
6	0	.70	.36	.573	.57	.69	-1.16
7	0	.35	.51	.572	.46	.77	-.87
8	1	.45	.49	.545	.41	.43	-1.79
9	1	.05	.55	.333	.54	.53	1.01
10	1	.10	.35	.358	.57	.67	.58
11	0	.14	.45	.373	.25	.29	-.88
12	0	.04	.74	.541	.53	.35	-.27
13	1	.62	.73	.529	.31	.48	1.36
14	1	.15	.22	.101	.17	.17	-.32
15	0	.72	.55	.568	.53	.57	-.98

Formato file "Long"

- Per l'utilizzo dei modelli misti è necessario un formato "una misura, una riga"

Ogni riga rappresenta una misurazione

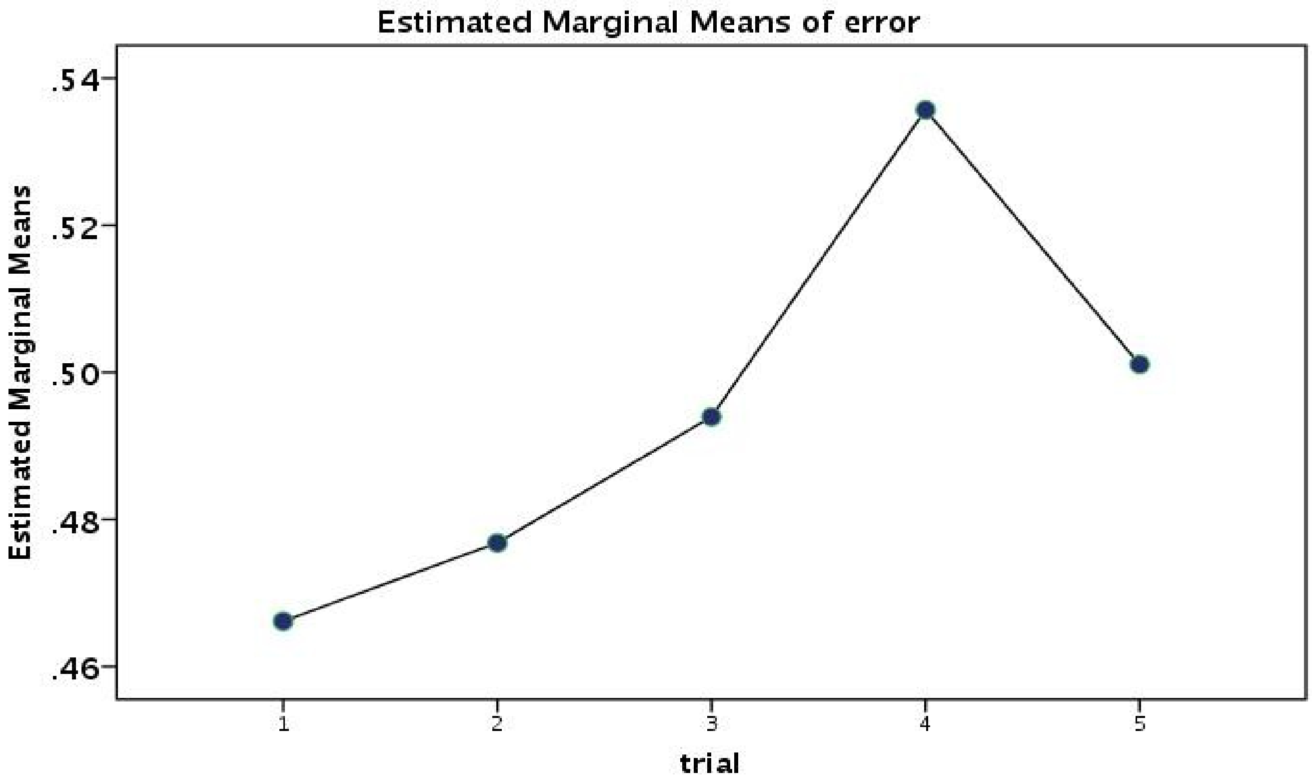
	id	group	x	trial	error
1	1	Cognitive Load	-0.03721233	1	0.139644148
2	1	Cognitive Load	-0.03721233	2	0.219611404
3	1	Cognitive Load	-0.03721233	3	0.439030338
4	1	Cognitive Load	-0.03721233	4	0.270522729
5	1	Cognitive Load	-0.03721233	5	0.009309587
6	2	Cognitive Load	-0.36044158	1	0.431302228
7	2	Cognitive Load	-0.36044158	2	0.518326274
8	2	Cognitive Load	-0.36044158	3	0.492408109
9	2	Cognitive Load	-0.36044158	4	0.483458141
10	2	Cognitive Load	-0.36044158	5	0.432801733
11	3	Cognitive Load	-1.76705741	1	0.612178698
12	3	Cognitive Load	-1.76705741	2	0.431445717
13	3	Cognitive Load	-1.76705741	3	0.446141329
14	3	Cognitive Load	-1.76705741	4	0.509173965
15	3	Cognitive Load	-1.76705741	5	0.572991706
16	4	Emotional Stressor	1.63388771	1	0.290753013
17	4	Emotional Stressor	1.63388771	2	0.702075839

GLM

- Potremmo analizzare questi dati mediante un modell GLM, ma incontremo dei (gravi) problemi

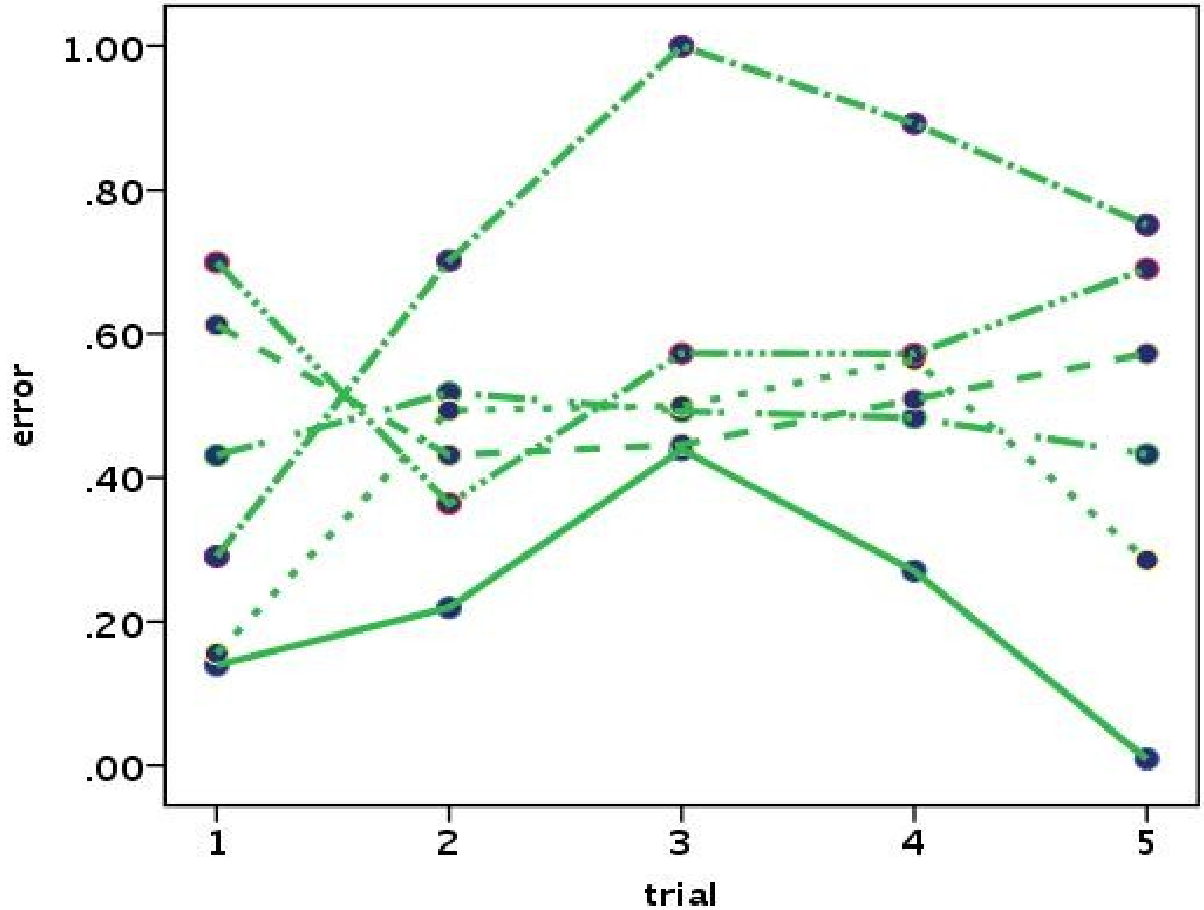
Effetti fissi

Medie dei 5 trials



Problemi

- Il primo problema è ogni soggetto, avendo tutte le misurazioni, esprime il suo proprio effetto di trial



Esempio per 6 soggetti

Soluzione (1)

Dunque per analizzare correttamente il disegno, dobbiamo considerare nel modello un termine che rappresenti la specificità di ogni soggetto. Questo termine sarà lo stesso in ogni soggetto

$$\left.\begin{aligned} Y_{11} &= a + b \cdot T_1 + u_1 + e_{11} \\ Y_{12} &= a + b \cdot T_2 + u_1 + e_{12} \\ Y_{13} &= a + b \cdot T_3 + u_1 + e_{13} \end{aligned}\right\}$$

Stesso soggetto, stesso errore

......

$$\left.\begin{aligned} Y_{i1} &= a + b \cdot T_1 + u_i + e_{i1} \\ Y_{i2} &= a + b \cdot T_2 + u_i + e_{i2} \\ Y_{i3} &= a + b \cdot T_2 + u_i + e_{i3} \end{aligned}\right\}$$

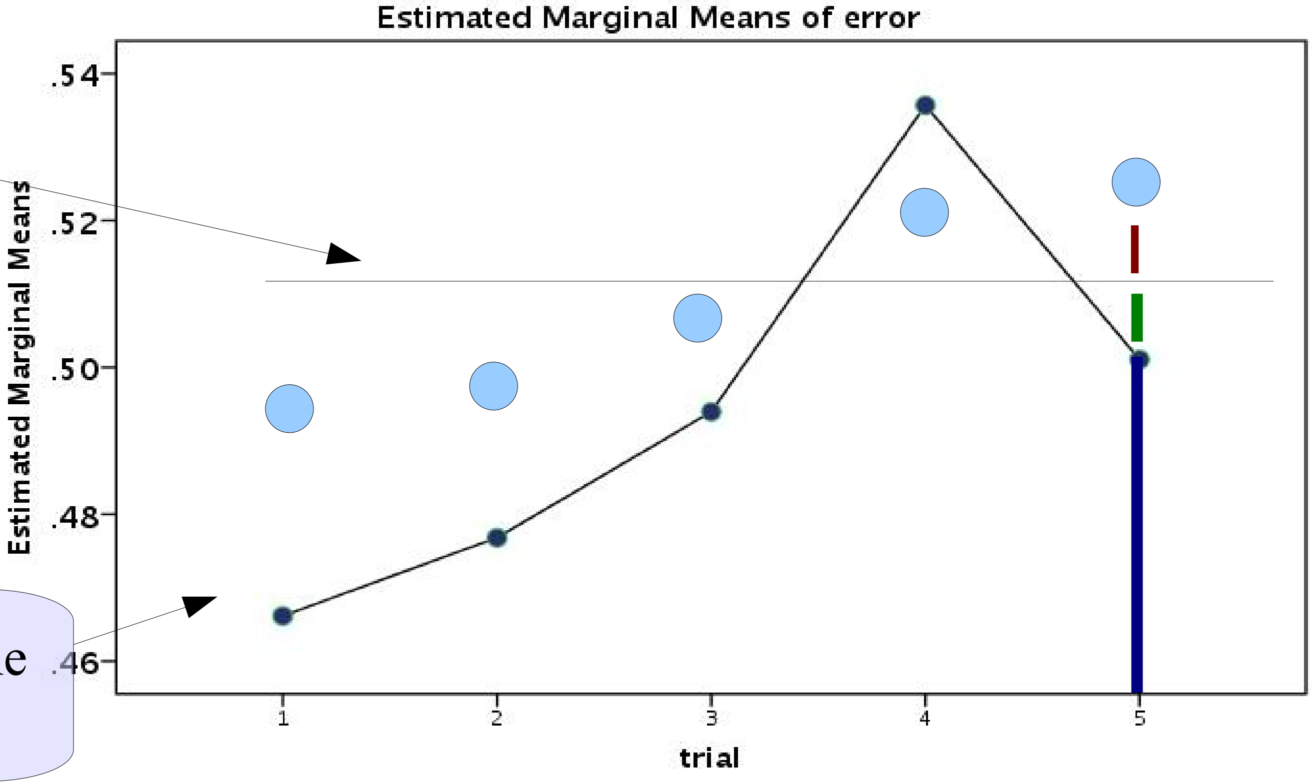
Stesso soggetto, stesso errore

Componente individuale

Esempio per un soggetto

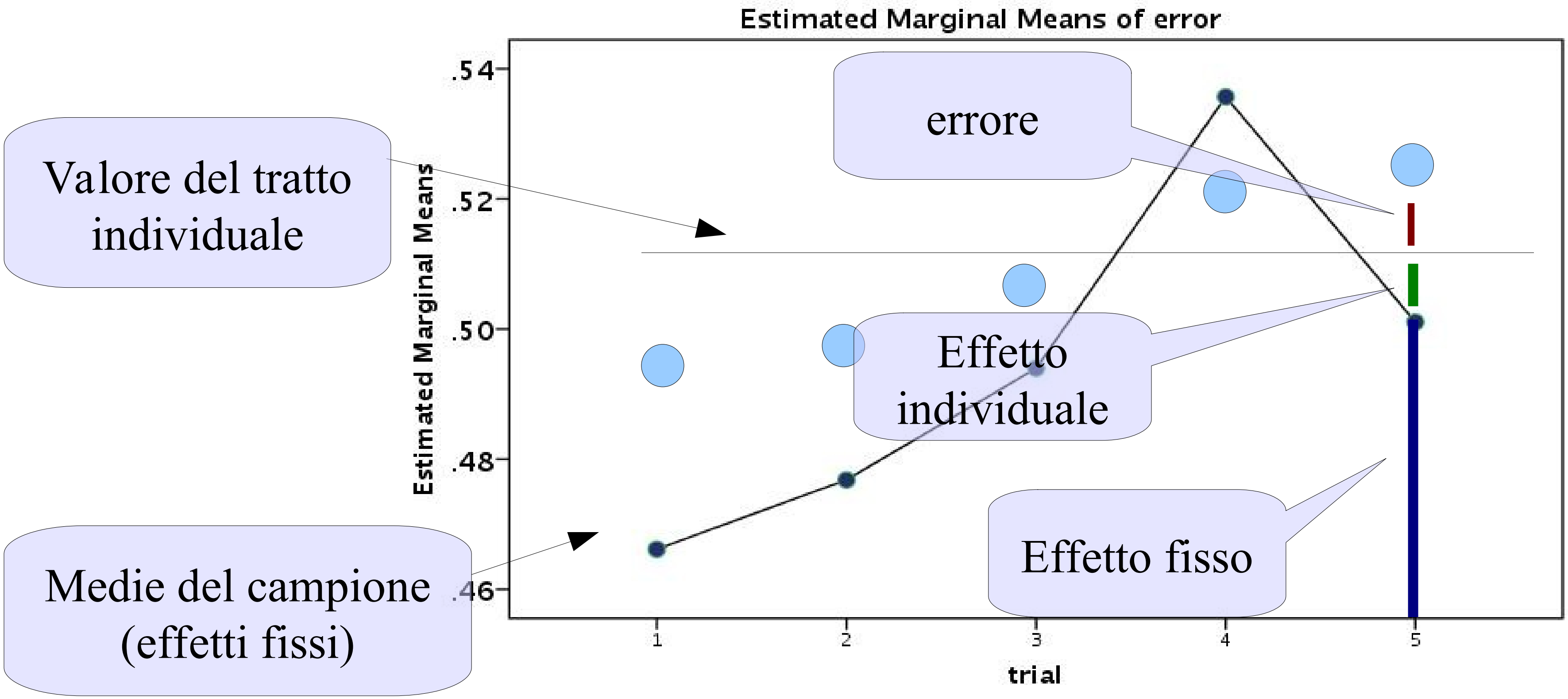
Valore del tratto individuale

Medie del campione (effetti fissi)



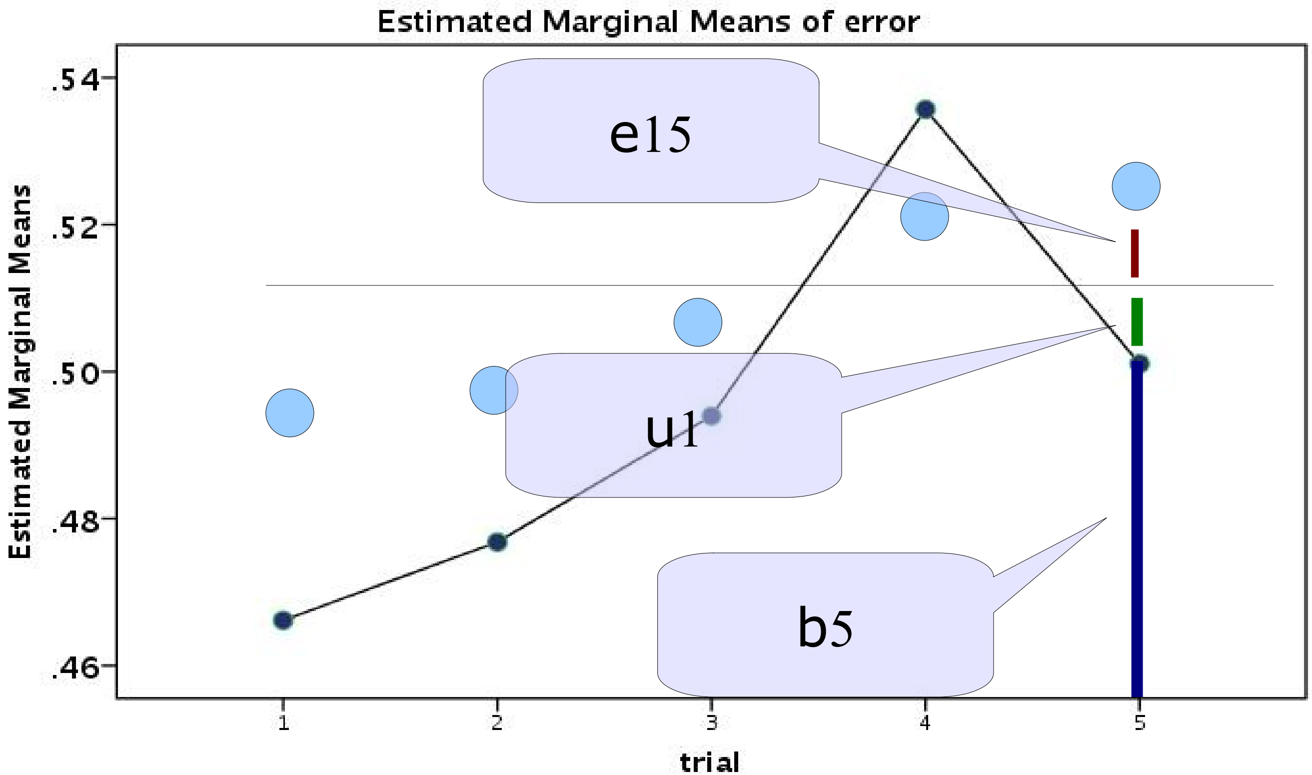
Componente individuale

Esempio per un soggetto



Componente individuale

$$Y_{11} = a + b \cdot T_1 + u_1 + e_{11}$$



Soluzione (1)

Dato che **u** è la stesso dentro ogni soggetto, le componenti delle misure ripetute che non sono legate agli effetti fissi saranno correlate

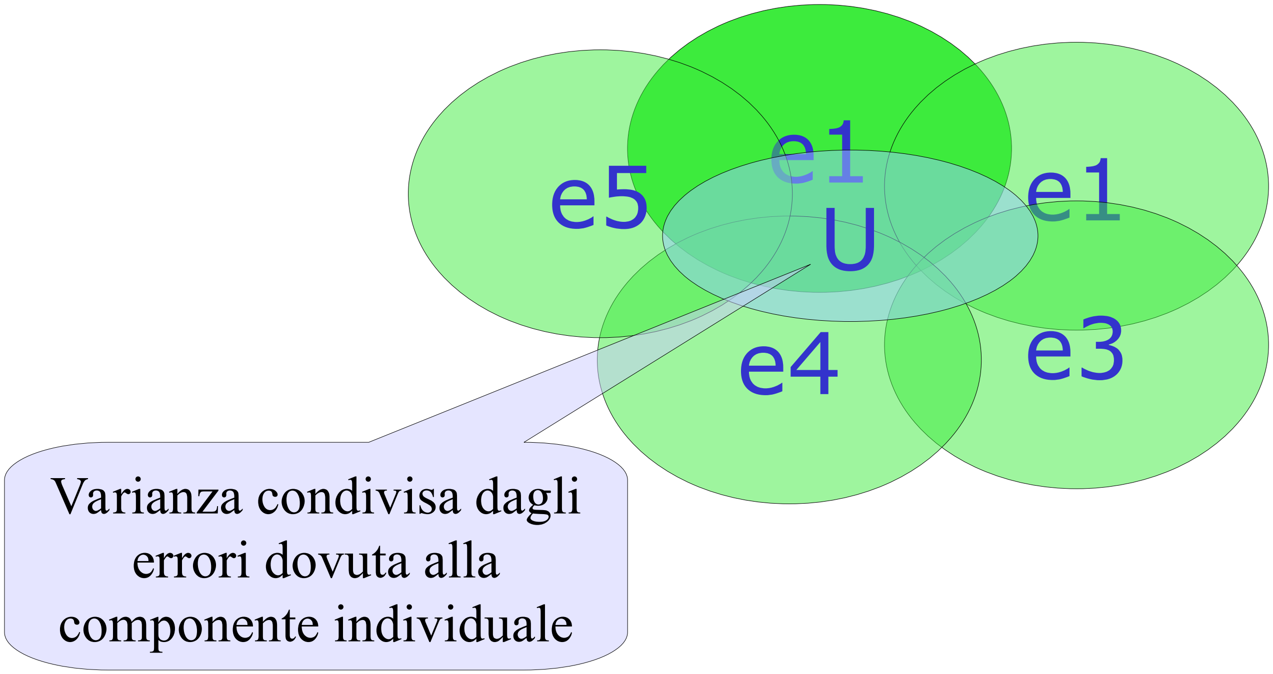
$$\left.\begin{aligned} Y_{11} &= a + b \cdot T_1 + u_1 + e_{11} \\ Y_{12} &= a + b \cdot T_2 + u_1 + e_{12} \\ Y_{13} &= a + b \cdot T_3 + u_1 + e_{13} \end{aligned}\right\} \quad \text{Stesso soggetto, stesso errore}$$

$$\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{aligned} Y_{i1} &= a + b \cdot T_1 + u_i + e_{i1} \\ Y_{i2} &= a + b \cdot T_2 + u_i + e_{i2} \\ Y_{i3} &= a + b \cdot T_2 + u_i + e_{i3} \end{aligned}\right\} \quad \text{Stesso soggetto, stesso errore}$$

Soluzione (1)

Dato che **u** è la stesso dentro ogni soggetto, le componenti delle misure ripetute che non sono legate agli effetti fissi saranno correlate



Modello misto

- Si può specificare il modello in maniera alternativa, più in linea con la teoria dei modelli misti vista fin ora
- Possiamo modellare la componente individuale come un parametro random

$$Y_{ij} = \bar{a} + a_i + b \cdot T_j + e_{ij}$$

Intercetta media
(Effetto fisso)

Intercetta random,
diversa per ogni
soggetto

Definizione del modello

Riportiamo il modello con la terminologia del MM

$$Y_{ij} = a + b \cdot T_i + u_j + e_{ij}$$

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + \bar{b} \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

Definizione del modello

- Modello completo

$$Y_{ij} = \bar{a} + a_i + b \cdot T_j + e_{ij}$$

Intercetta
(Effetto fisso)

Intercetta
random

Effetto fisso di
Trial

Errore
Random
(IID)

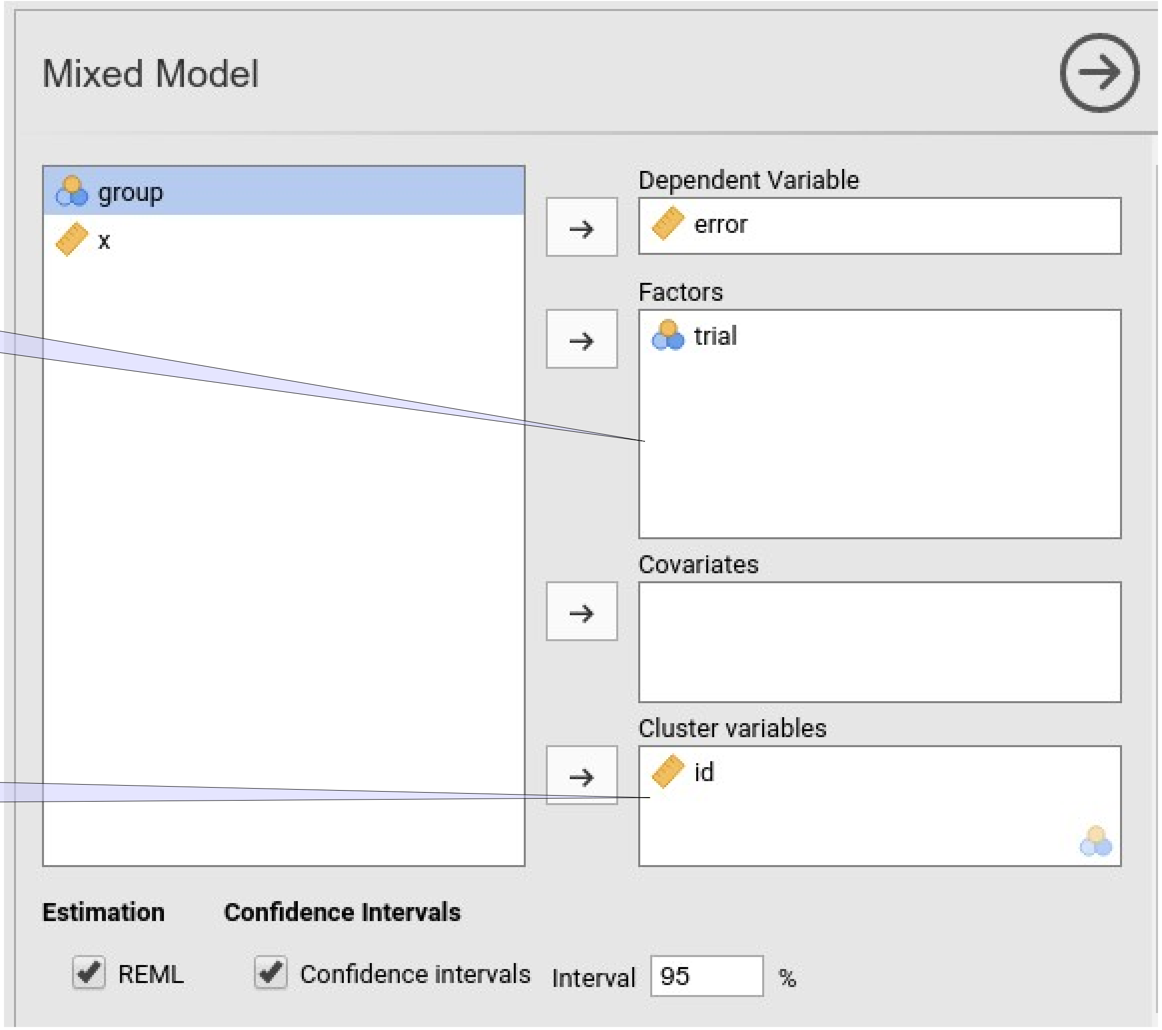
i=soggetti, j=trials

Definizione del modello

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + \bar{b} \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

- Quali sono gli effetti fissi? Intercetta e effetto di trial
- Quali sono gli effetti random? Intercetta
- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random? Soggetto (id)

Input



Variabile categoriale

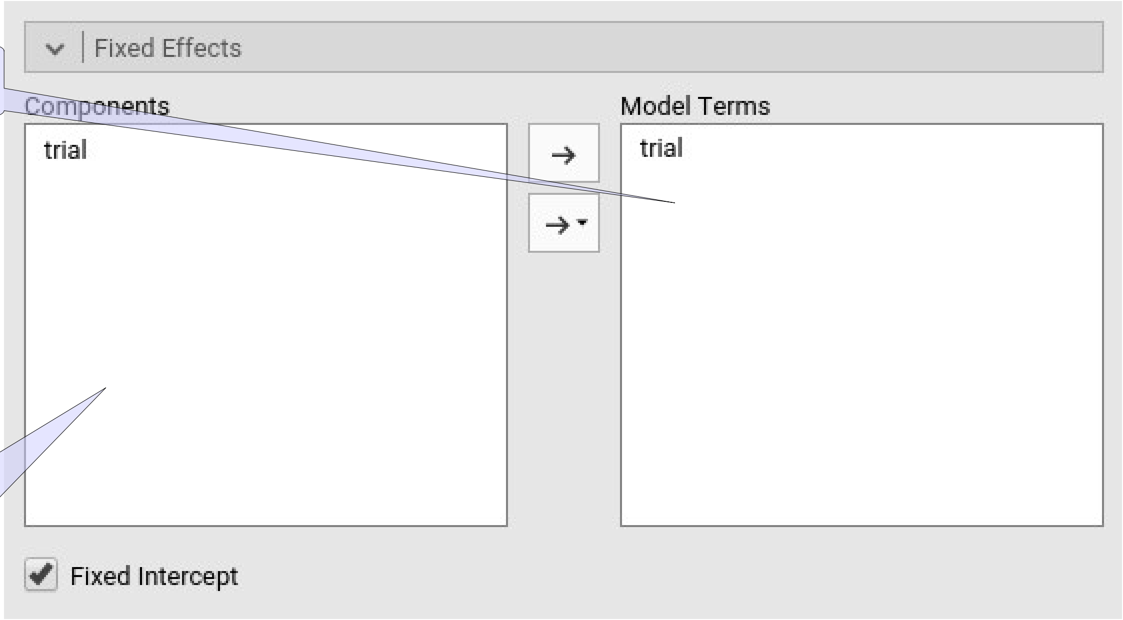
Variabile cluster

Coefficienti random

Intercette random

Tutti i possibili coefficienti

Effetti fissi



Effetti fissi

Tutti i possibili effetti

Risultati: modello

Model Info

Info	
Estimate	Linear mixed model fit by REML
Call	error ~ 1 + (1 | id) + trial
AIC	−463.8270
R-squared Marginal	0.0148
R-squared Conditional	0.2171

R-quadro

R-squared Marginal: Quanta varianza è spiegata dai fixed effects da soli

R-squared Conditional: quanta varianza è spiegata dai fixed e dai random effects tutti insieme

Risultati: variance

Varianza dell'intercette

Random Components

Groups	Name	SD	Variance
id	(Intercept)	0.0883	0.00780
Residual		0.1738	0.03020

Note. Numer of Obs: 1000 , groups: id , 200

Se è maggiore di 0, ok

GAMLj: Results: fixed

F-tests

Fixed Effect ANOVA

	F	Num df	Den df	p
trial	4.72	4	796	< .001

Note. Satterthwaite method for degrees of freedom

Coefficienti

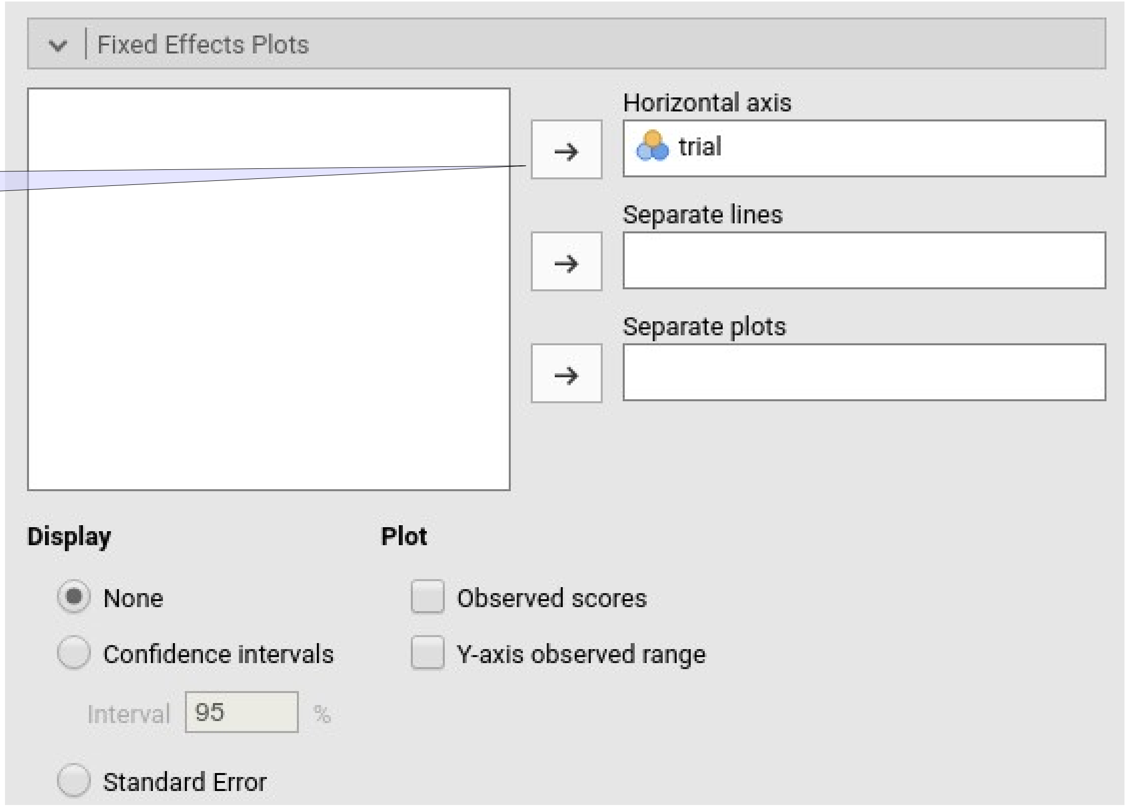
Fixed Effects Parameter Estimates

				95% Confidence Interval				
Effect	Contrast	Estimate	SE	Lower	Upper	df	t	p
(Intercept)	Intercept	0.49474	0.00832	0.4784	0.51104	199	59.4620	< .001
trial1	2 - (1, 2, 3, 4, 5)	−0.01791	0.01099	−0.0395	0.00363	796	−1.6296	0.104
trial2	3 - (1, 2, 3, 4, 5)	−7.92e−4	0.01099	−0.0223	0.02075	796	−0.0720	0.943
trial3	4 - (1, 2, 3, 4, 5)	0.04094	0.01099	0.0194	0.06248	796	3.7246	< .001
trial4	5 - (1, 2, 3, 4, 5)	0.00634	0.01099	−0.0152	0.02788	796	0.5764	0.564

Constrasti

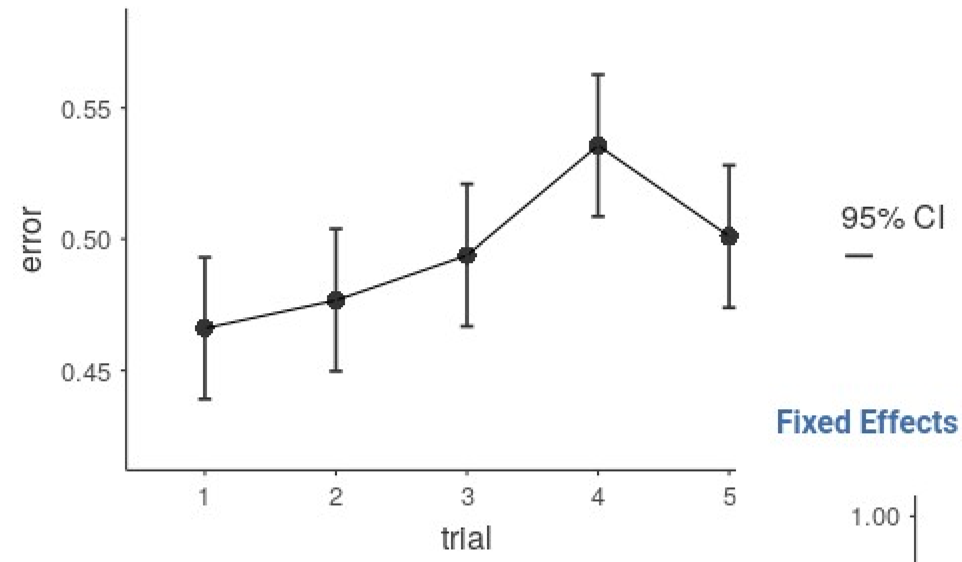
GAMLj: plot

Plot degli effetti

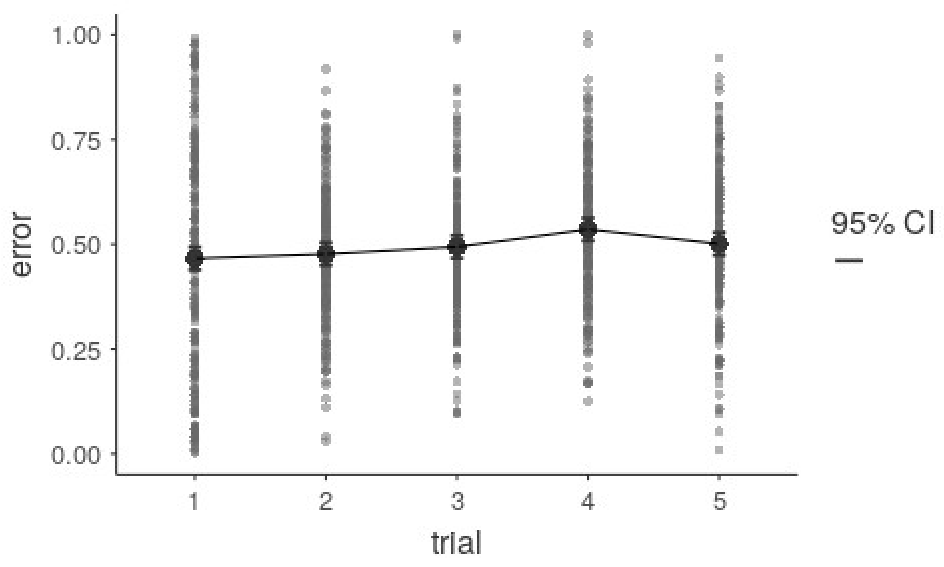


Risultati: plot

Fixed Effects Plots



Fixed Effects Plots



MM nelle misure ripetute

- Il modello misto permette di analizzare le misure ripetute con una vasta gamma di opzioni
- Applicazione delle varie tecniche come in regressione/Anova
- Gestione efficente dei valori mancanti
- Possibilità di modellare variabili continue come variabili ripetute nel tempo
- Possibilità di combinare il disegno a misure ripetute con disegni gerachici o clusterizzati

Moderazione

Interazione → Moderazione

- Come per il modello lineare generale la moderazione si stima mediante l'interazione
- L'interazione nel modello misto funziona **esattamente** come nel modello lineare generale

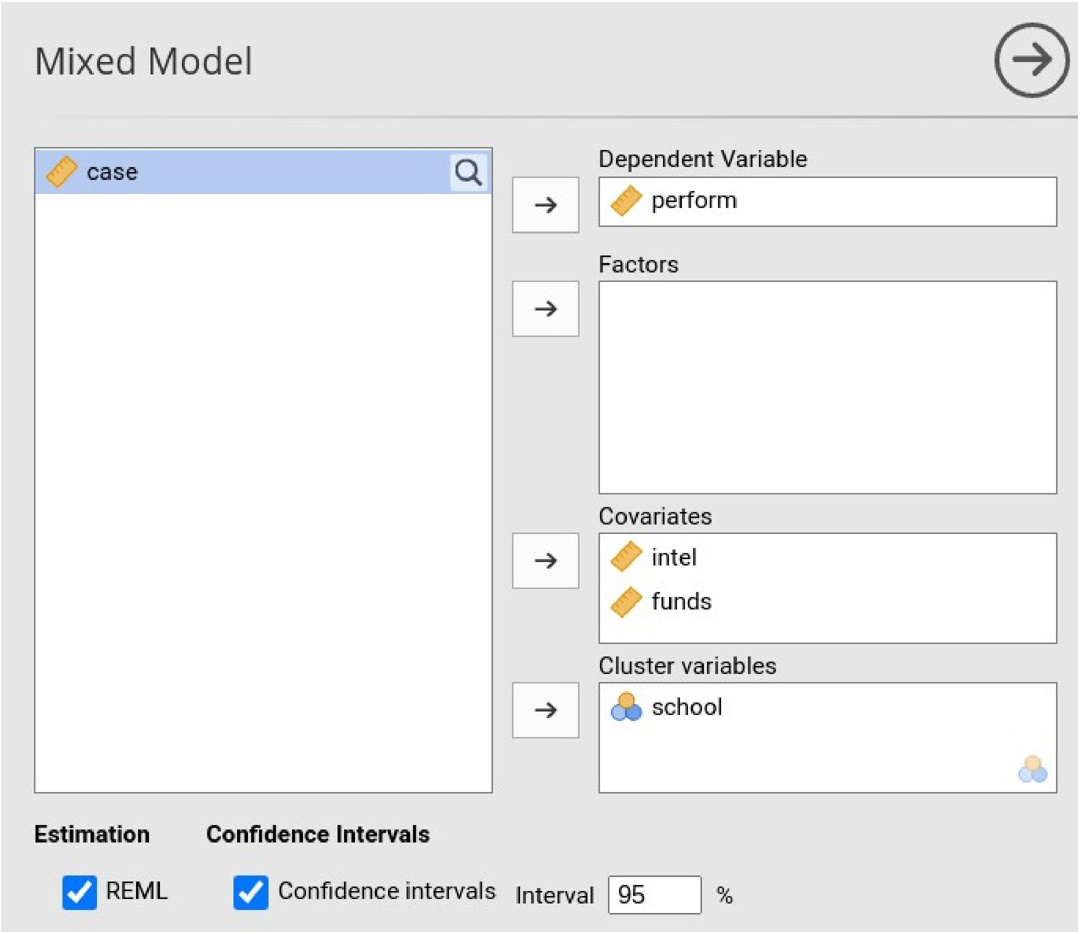
Variabili continue

- Abbiamo Una serie di scuole. In ogni scuola abbiamo misurato il QI degli studenti (*intel*). Di ogni scuola abbiamo anche la dotazione economica annuale (*funds*).
- La variabile dipendente è uno score di performance
- Vogliamo sapere se il QI è associato alla performance, e se tale relazione è moderata dai fondi a disposizione della scuola

Dati

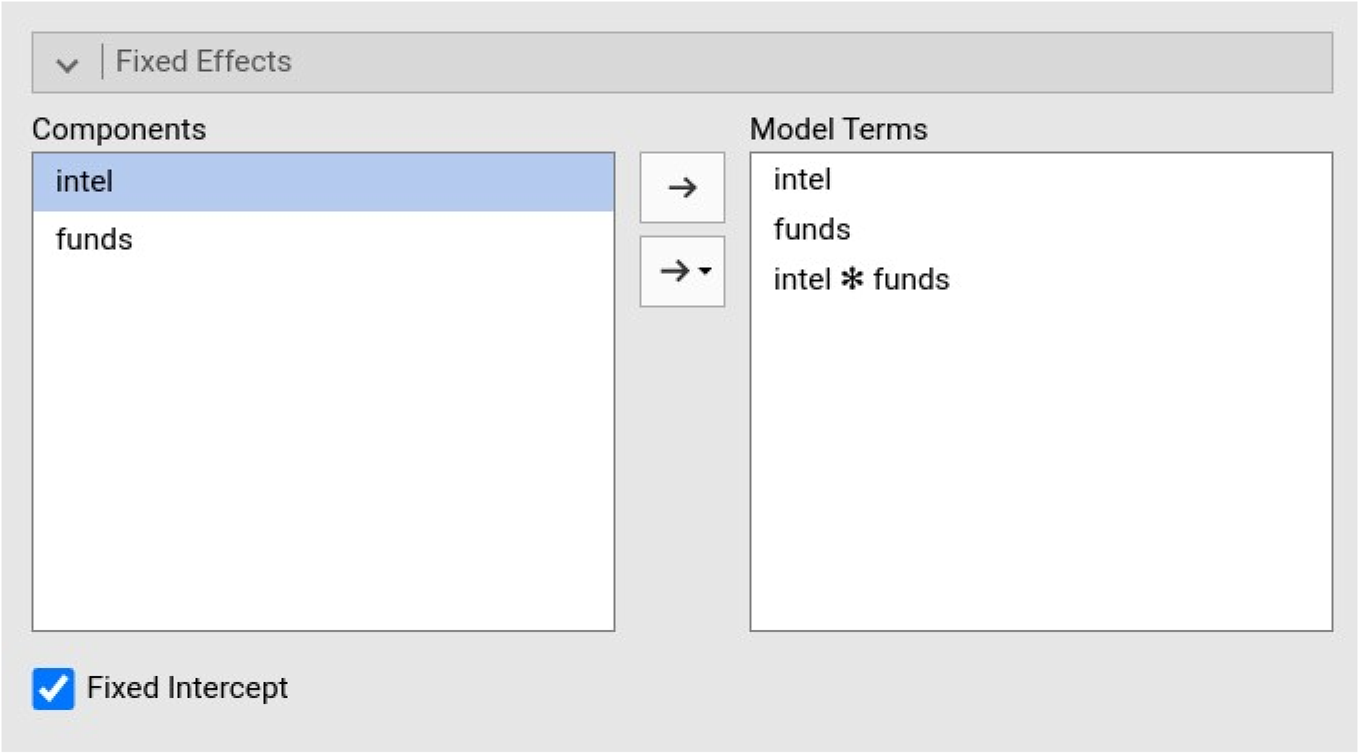
	school	funds	perform	intel
5	1	372.327	10.029	102.145
6	1	372.327	9.196	90.859
7	1	372.327	10.187	103.771
8	1	372.327	9.124	91.466
9	1	372.327	10.752	108.944
0	1	372.327	9.493	96.176
1	1	372.327	9.954	101.083
2	1	372.327	9.752	99.053
3	1	372.327	9.459	95.260
4	1	372.327	10.367	106.097
5	1	372.327	9.788	98.727
6	2	368.685	12.081	109.591
7	2	368.685	6.328	80.896
8	2	368.685	10.551	101.516
9	2	368.685	8.189	90.094
0	2	368.685	9.145	94.737
1	2	368.685	7.815	87.620
2	2	368.685	10.799	103.318

Input

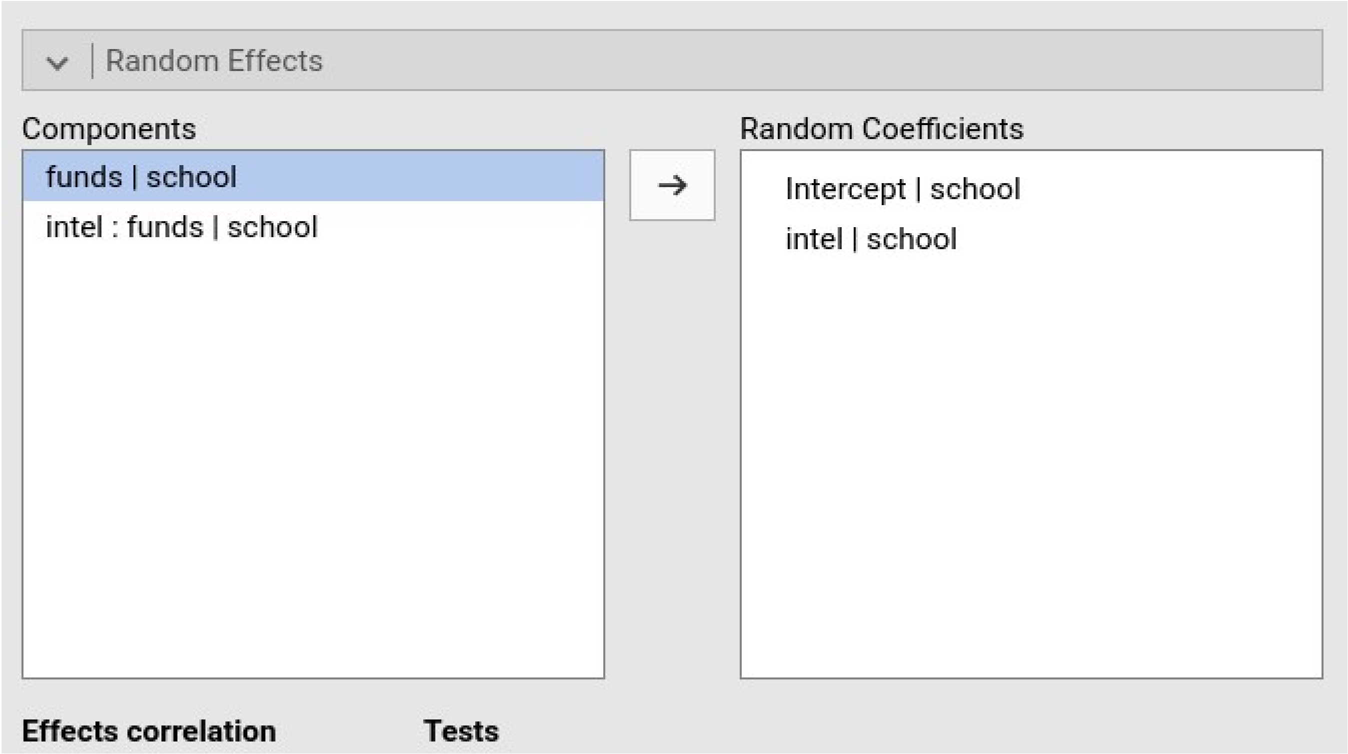


Mixed Model
case
Dependent Variable
perform
Factors
Covariates
intel
funds
Cluster variables
school
Estimation
Confidence Intervals
REML
Confidence intervals
Interval
95
%

Effetti fissi



Effetti random



Risultati

Spieghiamo tanto (dati didattici!)

Model Info

Info	
Estimate	Linear mixed model fit by REML
Call	perform ~ 1 + intel + funds + intel:funds+(1 + intel | school)
AIC	−1252.950
BIC	−1177.120
LogLikel.	613.418
R-squared Marginal	0.599
R-squared Conditional	0.999
Converged	yes
Optimizer	bobyqa

[3]

Risultati: variance

Le varianze non sono 0: ok

Random Components

Groups	Name	SD	Variance	ICC
school	(Intercept)	0.1026	0.01053	0.792
	intel	0.0885	0.00783	
Residual		0.0526	0.00277	

Note. Number of Obs: 500 , groups: school 20

Random Parameters correlations

Groups	Param.1	Param.2	Corr.
school	(Intercept)	intel	0.487

Risultati: effetti fissi

Test F

Fixed Effect Omnibus tests

	F	Num df	Den df	p
intel	24.1264	1	18.0	< .001
funds	0.0471	1	18.0	0.831
intel ✻ funds	6.4748	1	18.0	0.020

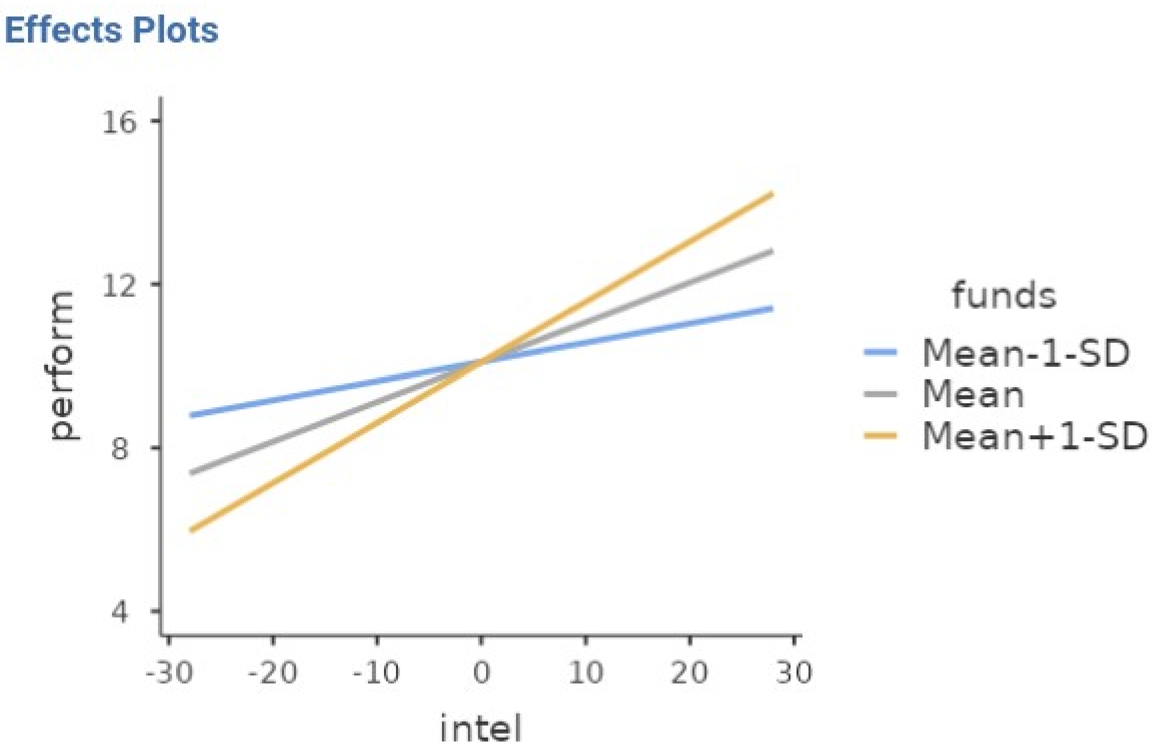
Note. Satterthwaite method for degrees of freedom

Coefficienti

Fixed Effects Parameter Estimates

			95% Confidence Interval				
Names	Estimate	SE	Lower	Upper	df	t	p
(Intercept)	10.0981	0.0231	10.0529	10.14331	18.0	437.597	< .001
intel	0.0972	0.0198	0.0584	0.13602	18.0	4.912	< .001
funds	−5.63e−5	2.60e−4	−5.65e−4	4.52e−4	18.0	−0.217	0.831
intel ✻ funds	5.67e−4	2.23e−4	1.30e−4	0.00100	18.0	2.545	0.020

Risultati: plot



Plot effetti fissi

Disegno a misure ripetute

- Abbiamo 2 gruppi - Control vs Treatment, measurati in 4 tempi diversi. I tempi sono: 1 (pretest), 2 (one month posttest), 3 (3 months follow-up), and 4 (6 months follow-up).

- La variabile dipendente è uno score di depressione (e.g. Beck Depression Inventory) e il trattamento è l’utilizzo di un farmaco versus nessun farmaco. Ci aspettiamo un miglioramento in tutte e due gruppi, ma vogliamo testare che il gruppo in treatment migliori più rapidamente

*) https://www.uvm.edu/~dhowell/StatPages/More_Stuff/Mixed-Models-Repeated/Mixed-Models-for-Repeated-Measures1.html

Disegno a misure ripetute

- Abbiamo 2 gruppi - Control vs Treatment, measurati in 4 tempi diversi. I tempi sono: 1 (pretest), 2 (one month posttest), 3 (3 months follow-up), and 4 (6 months follow-up).

96 osservazioni
24 soggetti

Contingency Tables

Contingency Tables

	group		
time	1	2	Total
0	12	12	24
1	12	12	24
3	12	12	24
6	12	12	24
Total	48	48	96

*) https://www.uvm.edu/~dhowell/StatPages/More_Stuff/Mixed-Models-Repeated/Mixed-Models-for-Repeated-Measures1.html

Disegno a misure ripetute: dati

- Data sono in “long format”

Ogni soggetto ha 4 righe

	subj	time	group	dv
1	1	0	1	296
2	1	1	1	175
3	1	3	1	187
4	1	6	1	192
5	2	0	1	376
6	2	1	1	329
7	2	3	1	236
8	2	6	1	76
9	3	0	1	309
10	3	1	1	238
11	3	3	1	150
12	3	6	1	123
13	4	0	1	222
14	4	1	1	60
15	4	3	1	82
16	4	6	1	85
17	5	0	1	150
18	5	1	1	271
19	5	3	1	250

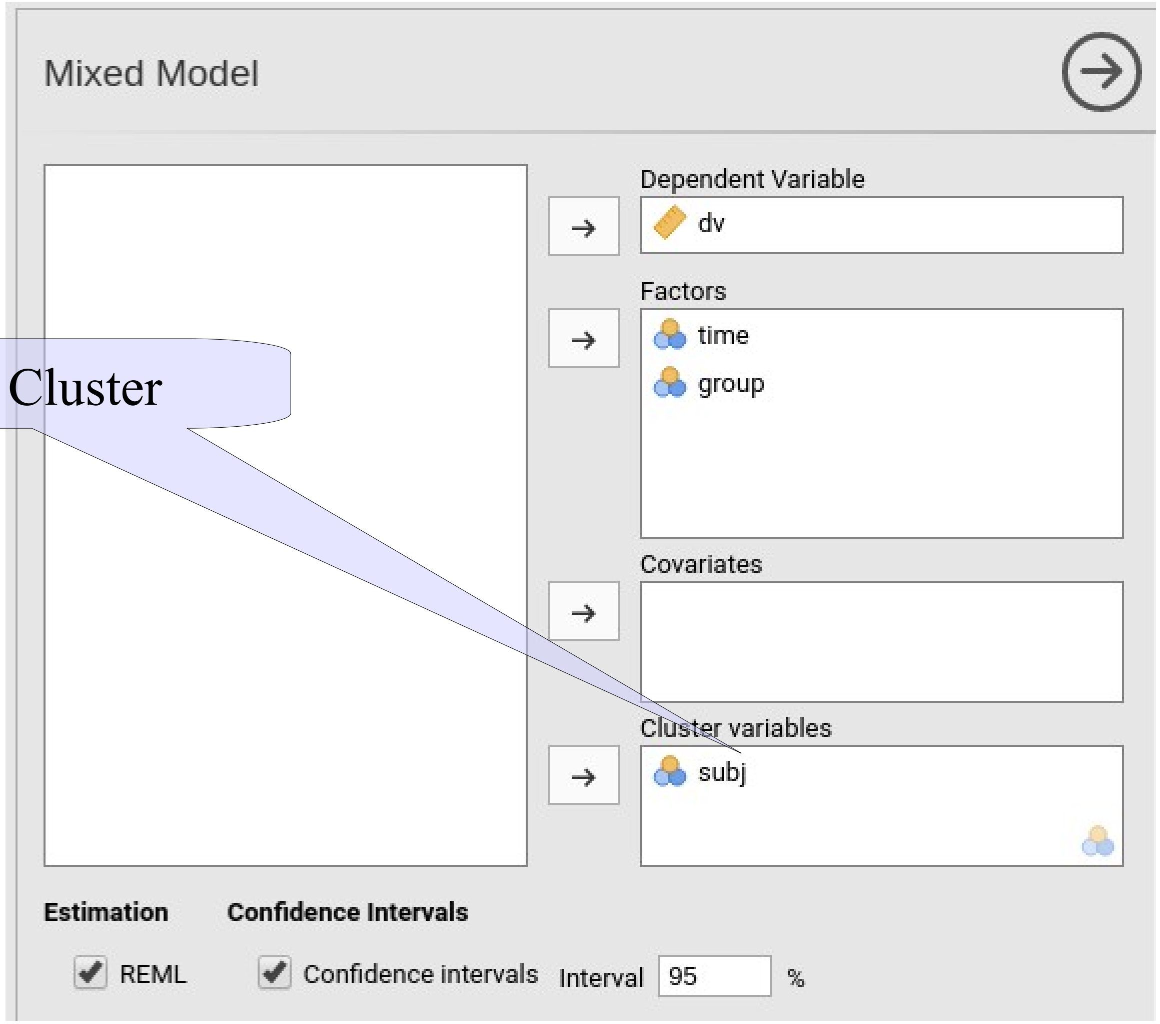
Mixed model

Traduciamo il disegno in un modello misto

- Effetti Fissi? Intercetta group,time, la loro interazione
- Effetti Random? Intercetta
- Clusters? Soggetto (subj)

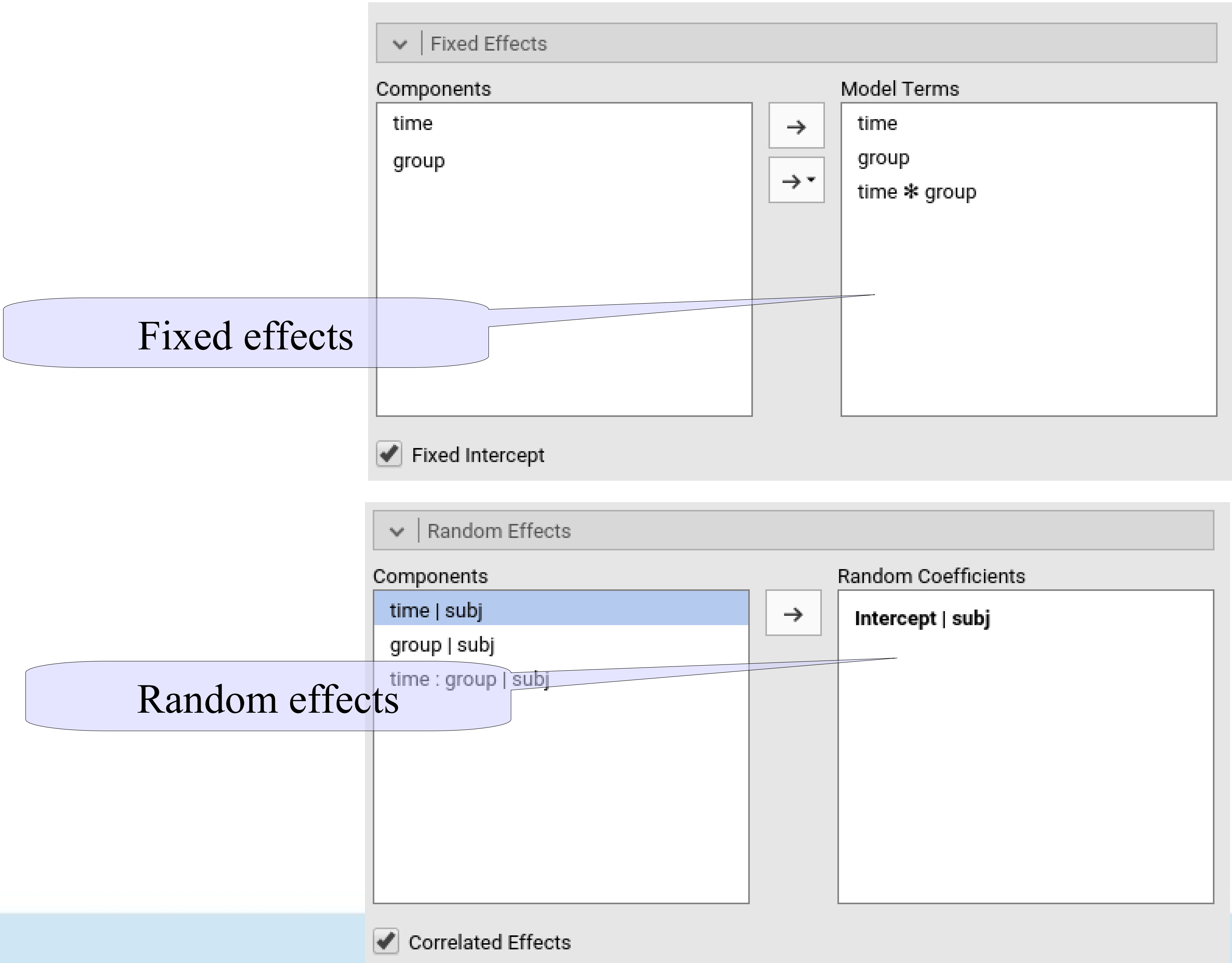
Variables

- Definisco le variabili



Variabile Cluster

Modello


Fixed Effects
Components
time
group
Model Terms
time
group
time ✻ group
Fixed effects
Fixed Intercept
Random Effects
Components
time | subj
group | subj
time : group | subj
Random Coefficients
Intercept | subj
Random effects
Correlated Effects

Risultati

- Interpretazione dei risultati

Mixed Model

Modello

Model Info

Info	
Estimate	Linear mixed model fit by REML
Call	dv ~ 1 + (1 | subj) + time + group + time:group
AIC	1011.895
R-squared Marginal	0.554
R-squared Conditional	0.768

Effetti random

Random Components

Groups	Name	SD	Variance
subj	(Intercept)	50.4	2539
Residual		52.5	2761

Note. Numer of Obs: 96 , groups: subj , 24

Risultati

- Interpretazione dei risultati

F-tests per gli effetti fissi

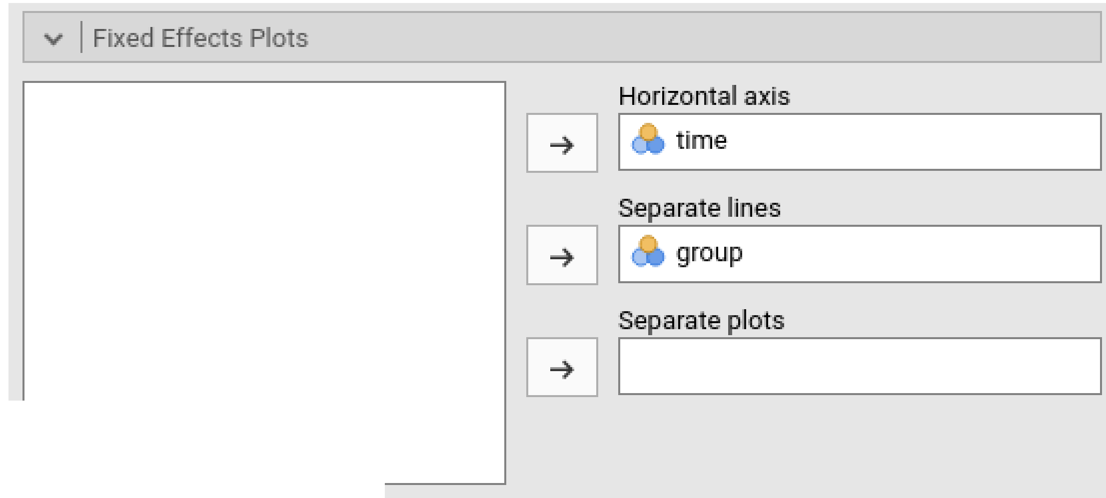
Fixed Effect ANOVA

	F	Num df	Den df	p
time	45.14	3	66.0	< .001
group	13.71	1	22.0	0.001
time:group	9.01	3	66.0	< .001

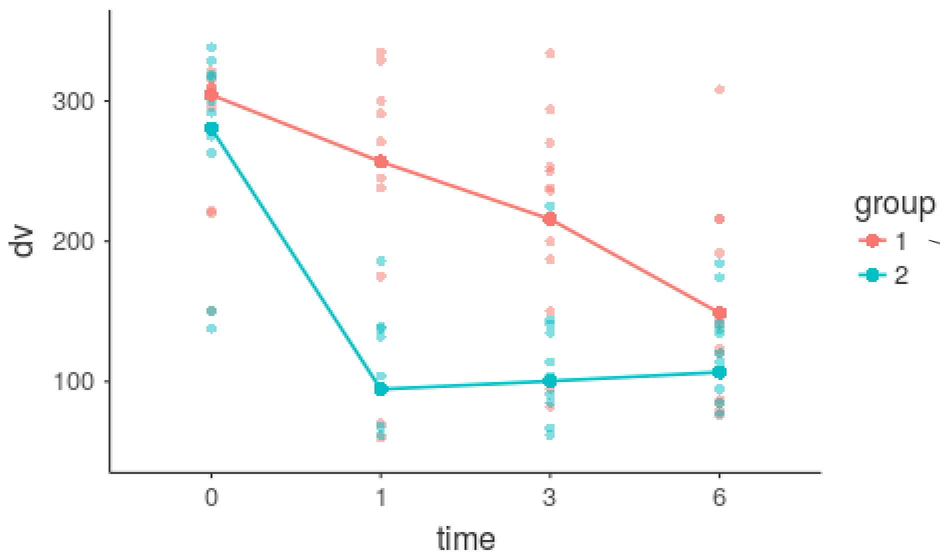
Note. Satterthwaite method for degrees of freedom

- Per il momento ignoriamo la stima dei coefficienti

Results: plot



Fixed Effects Plots



Rosso è il gruppo di controllo

Analisi sulla interazione

- Per analizzare ulteriormente l'interazione possiamo fare (come nel GLM):

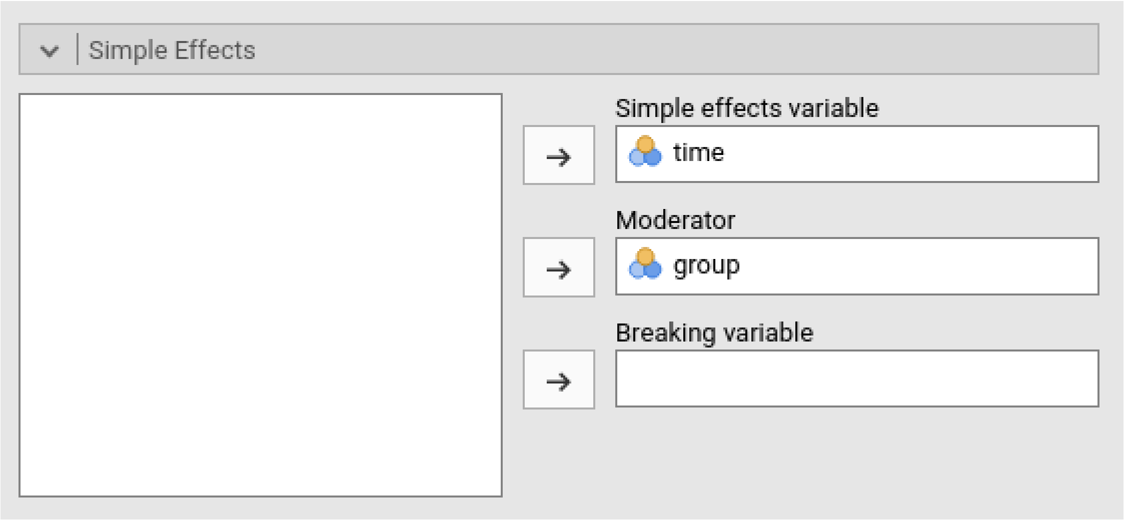
- Simple effects: Testare se l'effetto di tempo è presente in ognuno dei gruppi

- Trend analysis: Testare dei trend specifici nelle nostre medie

- Post-hoc test: confronto delle medie tutto contro tutto

Simple effects

- Chiediamo di stimare gli effetti ti tempo in ogni gruppo



Simple effects

- Chiediamo di stimare gli effetti ti tempo in ogni gruppo

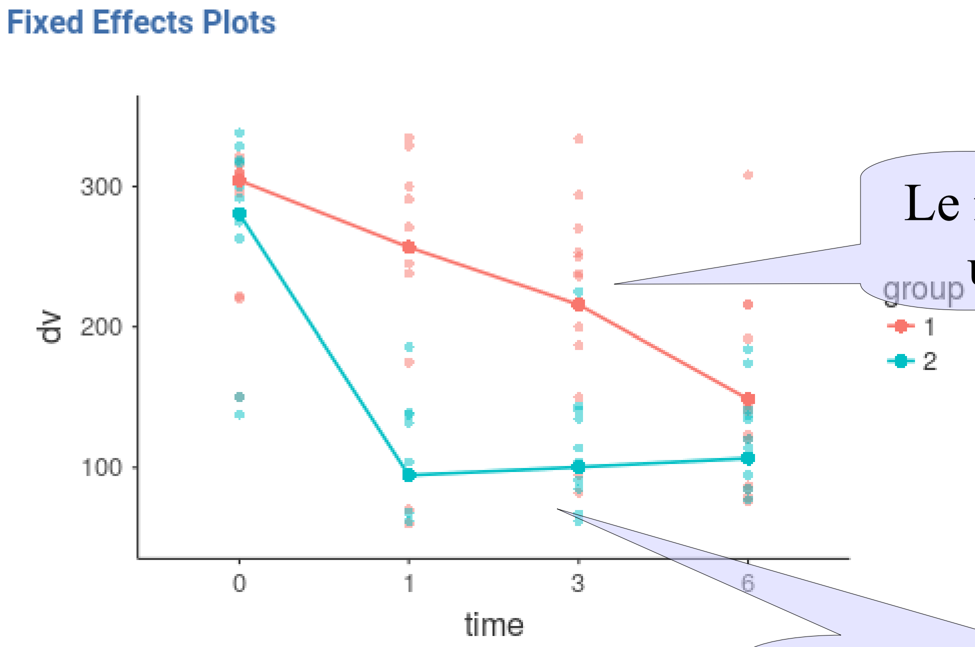
Simple Effects ANOVA

Simple effects of time

Effect	Moderator Levels	df Num	df Den	F	p
time	group at 1	3.00	66.0	18.9	< .001
time	group at 2	3.00	66.0	35.3	< .001

In entrambi i gruppi le medie cambiano nel tempo

Results: plot



Le medie rosse mostrano un effetto di tempo

Le medie verdi mostrano un effetto di tempo

Ricapitolando

- Dunque, i disegni a misure ripetute possono essere analizzati come qualunque altro disegno “Anova”, ma deve essere modellata la componente individuale che cambia da soggetto a soggetto

- Ciò consente di applicare tutte le conoscenze dell'ANOVA/Regressione al caso delle misure ripetute

- I modelli misti consentono dunque di stimare modelli a misure ripetute combinandoli con altre strutture complesse dei dati