



## *Quarta giornata*

### I modelli misti

Marcello Gallucci  
Univerisità Milano-Bicocca

## Modello Lineare Generale

### vantaggi

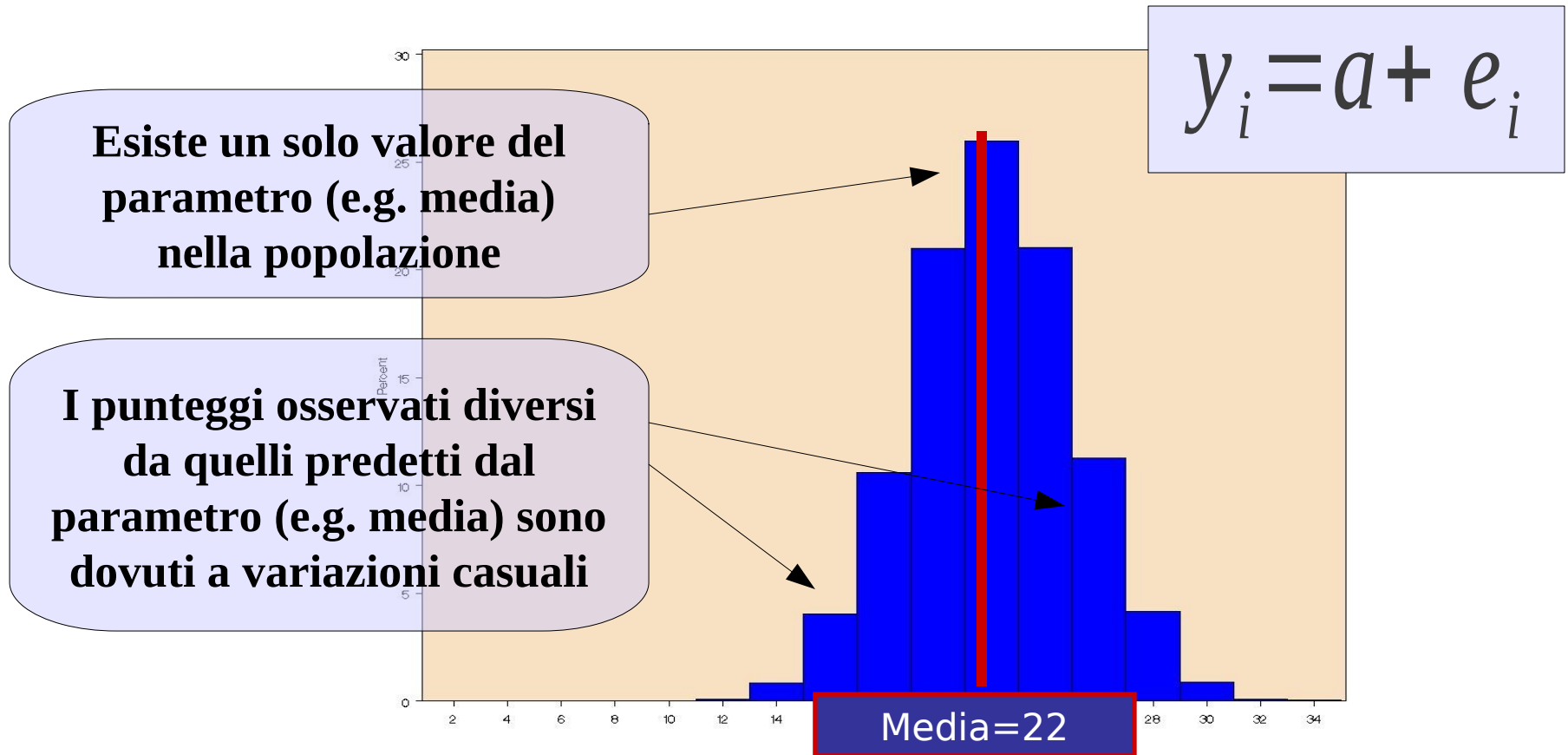
- Consente di stimare le relazioni fra due o più variabili
- Si applica ad una ampio spettro di tipi di dati
- Consente di stimare vari tipi di effetti

### svantaggi

- Assume una struttura dei dati molto semplice
- Non consente di modellare una ampia serie di relazioni e dipendenza tra unità di misurazione

# Assunzioni GLM

## Modello Lineare Generale



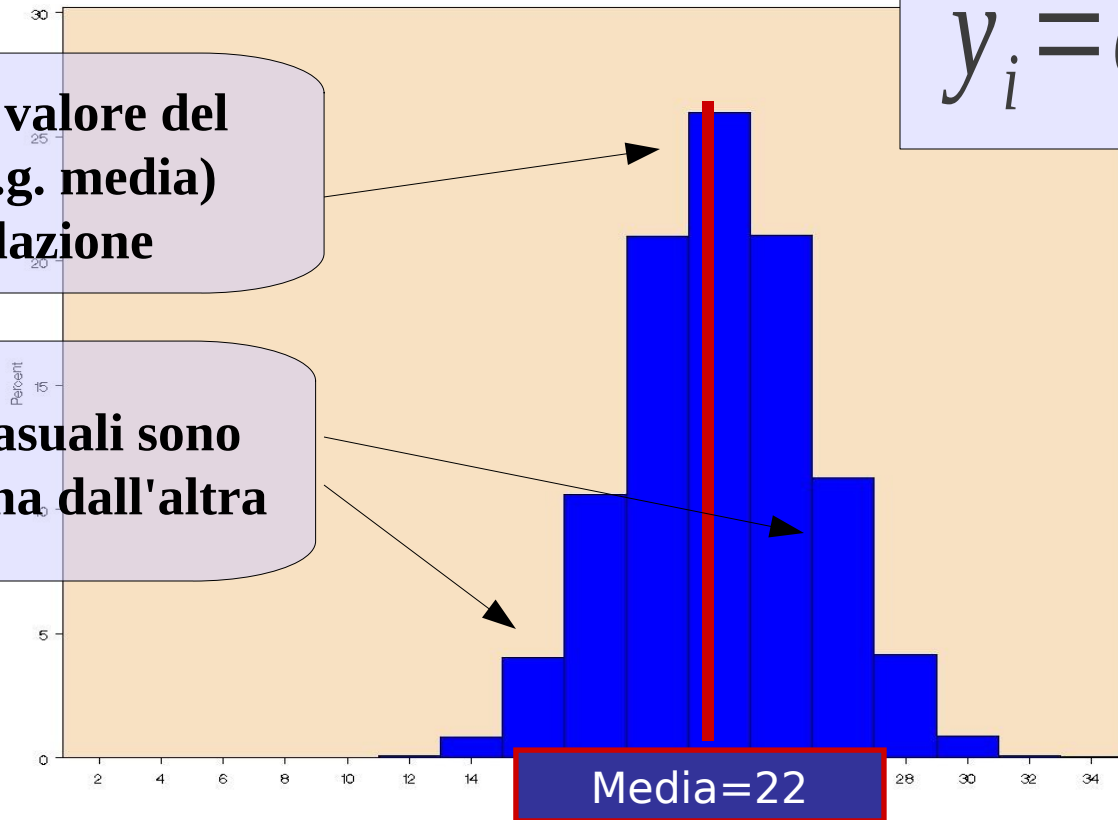
# Assunzioni GLM

## Modello Lineare Generale

**Esiste un solo valore del parametro (e.g. media) nella popolazione**

**Le variazioni casuali sono indipendenti l'una dall'altra**

$$y_i = a + e_i$$



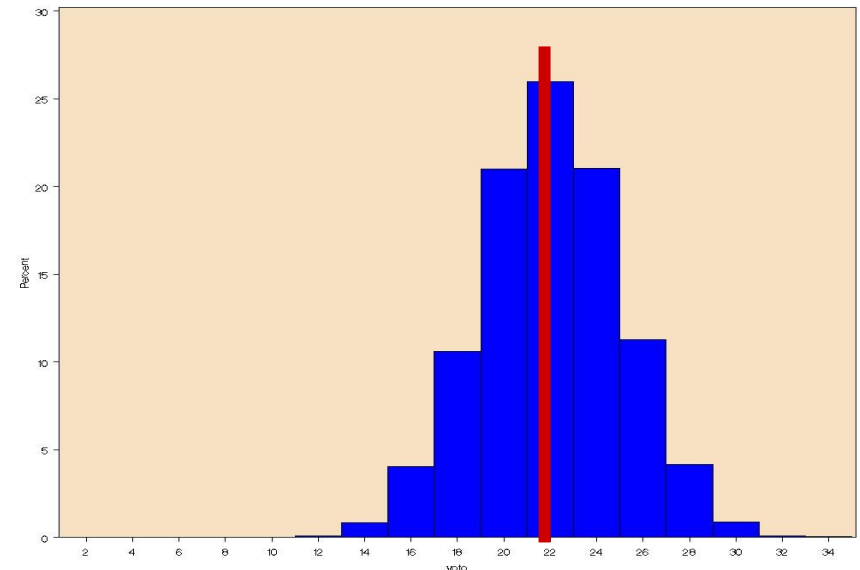
# Assunzioni GLM

## Modello Lineare Generale

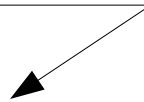
Il valore stimato della popolazione si definisce FISSO (fixed parameter)



$$y_i = a + e_i$$
$$\text{corr}(e_i, e_j) = 0$$



Le variazioni casuali sono indipendenti l'una dall'altra



# Violazioni delle assunzioni

Le assunzioni di unicità degli effetti (effetti fissi) e indipendenza delle misurazioni (errori indipendenti) non sono rispettate in tutti i seguenti casi:

- Misurazioni correlate
- Disegni a misure ripetute
- Disegni longitudinali
- Dati con strutture gerarchiche
- Dati con misurazioni multi-livello

# I modelli misti

**Non esiste un solo valore  
fisso che intendiamo  
stimare**

**Le variazioni casuali non  
sono indipendenti l'una  
dall'altra**

I modelli misti consentono di estendere il modello lineare generale in tutte quelle situazioni in cui le due assunzioni fondamentali del GLM non sono rispettate

# I modelli misti

## GLM

Regressione

T-test

ANOVA

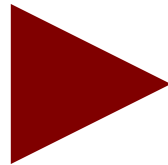
ANCOVA

Moderazione

Mediazione

Path Analysis

Regressione  
Logistica



## LMM

Random coefficients models

Random intercept regression models

One-way ANOVA with random effects

One-way ANCOVA with random effects

Intercepts-and-slopes-as-outcomes models

Generalized mixed model



# Estensione del GLM al **modello misto**

## Esempio “birre” 2

Consideriamo il caso in cui abbiamo ampliato il nostro campione di “bevitori di birra”, avendo raccolto ulteriori dati in diversi bar della città

**bar**

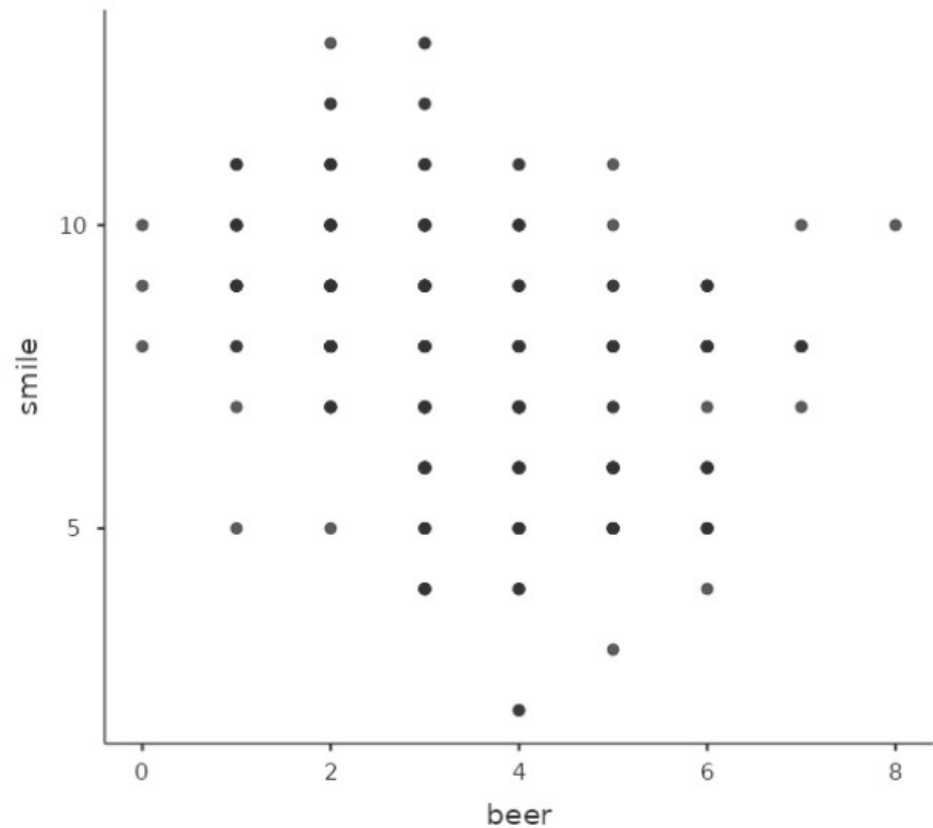
	Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid a	3	1.3	1.3	1.3
b	14	6.0	6.0	7.3
c	22	9.4	9.4	16.7
d	21	9.0	9.0	25.6
e	14	6.0	6.0	31.6
f	20	8.5	8.5	40.2
g	24	10.3	10.3	50.4
h	12	5.1	5.1	55.6
i	16	6.8	6.8	62.4
l	22	9.4	9.4	71.8
m	21	9.0	9.0	80.8
n	15	6.4	6.4	87.2
o	16	6.8	6.8	94.0
p	11	4.7	4.7	98.7
q	3	1.3	1.3	100.0
Total	234	100.0	100.0	

Totale di 234 soggetti

# Esempio “birre” 2

Lo scatterplot mostra una distribuzione differente dall'esempio precedente

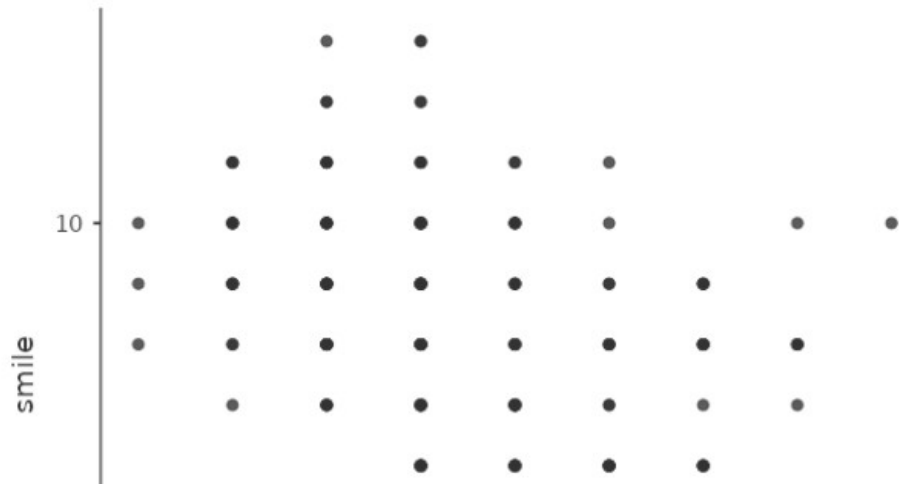
Scatterplot



# Esempio “birre” 2

La regressione semplice conferma il risultato assai differente

Scatterplot



**Relazione  
negativa**

Fixed Effects Parameter Estimates

Names	Estimate	SE	95% Confidence Interval		$\beta$	df	t	p
			Lower	Upper				
(Intercept)	7.765	0.130	7.508	8.022	0.000	232	59.503	< .001
beer	-0.440	0.085	-0.608	-0.271	-0.320	232	-5.147	< .001

# Possibili spiegazioni

I risultati potrebbero essere distorti (e ciò spiegherebbe il risultato inatteso) dal non aver considerato la struttura dei dati

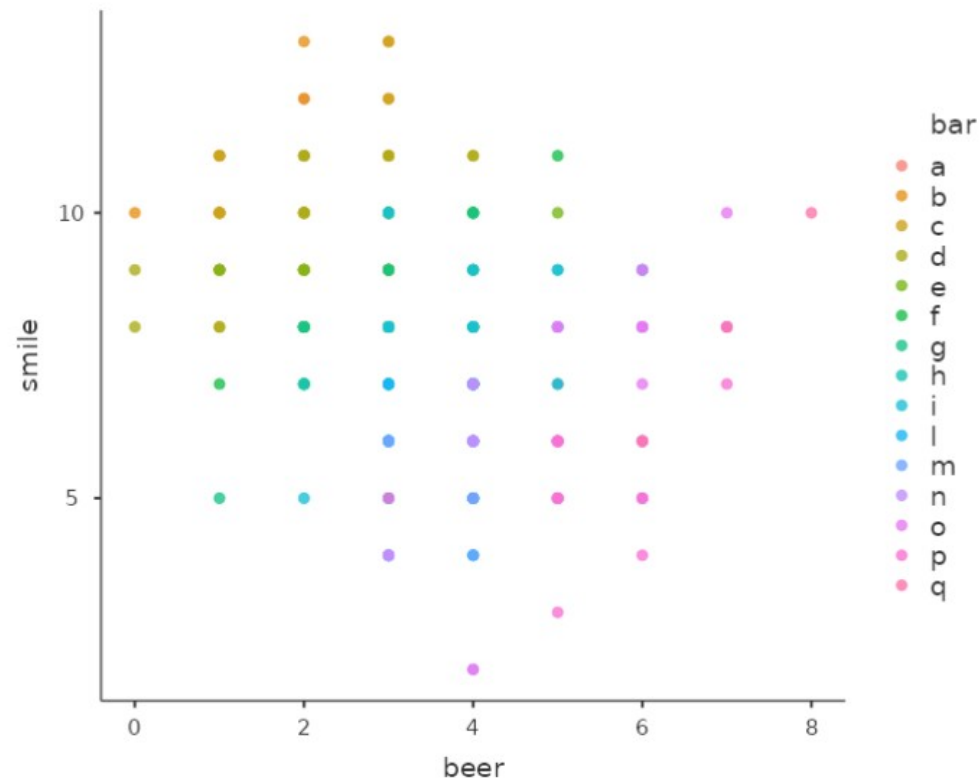
- I dati infatti:
  - I soggetti sono stati campionati in diversi bar
  - Ogni bar potrebbe avere caratteristiche particolari (ambiente, qualità della birra, etc) che condizionano la relazione tra le variabili
  - I soggetti in ogni singolo bar potrebbero essere più simili tra loro di quando lo siano soggetti in bar diversi

# Scatterplot per Bar

Lo scatterplot, distinguendo per bar, offre indicazioni

Bar

Scatterplot

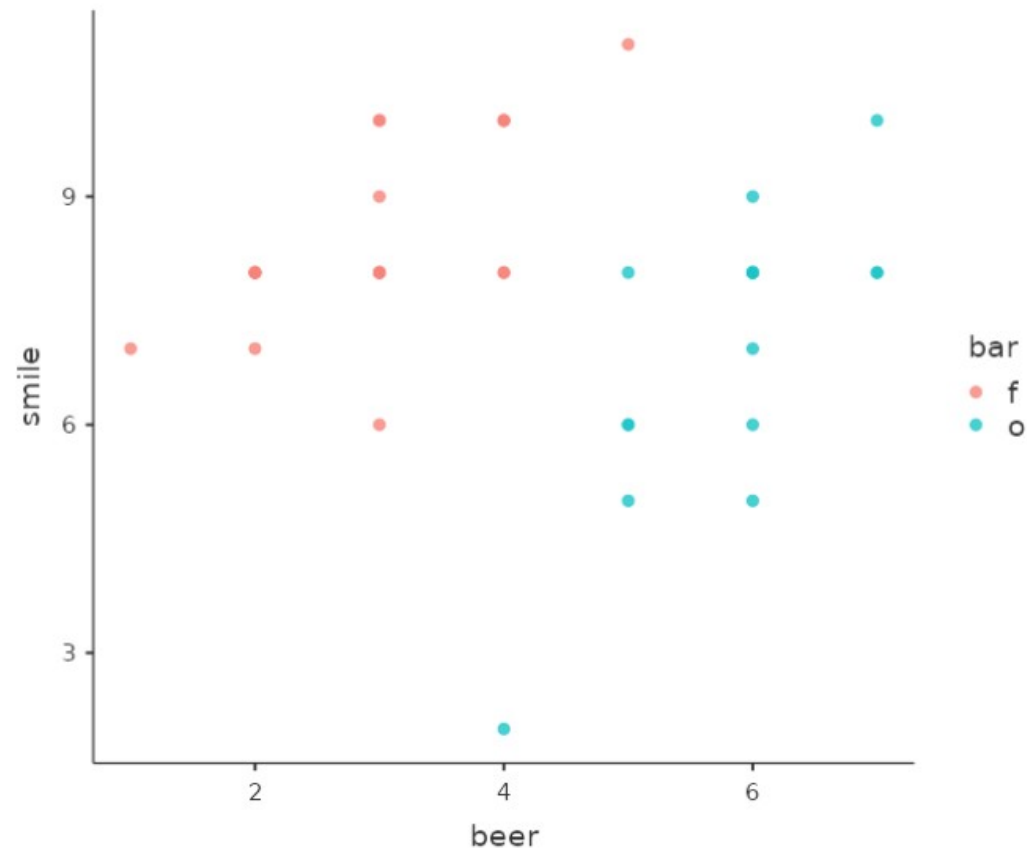


# Scatterplot

Dati per bar “f” e “o”

Bar

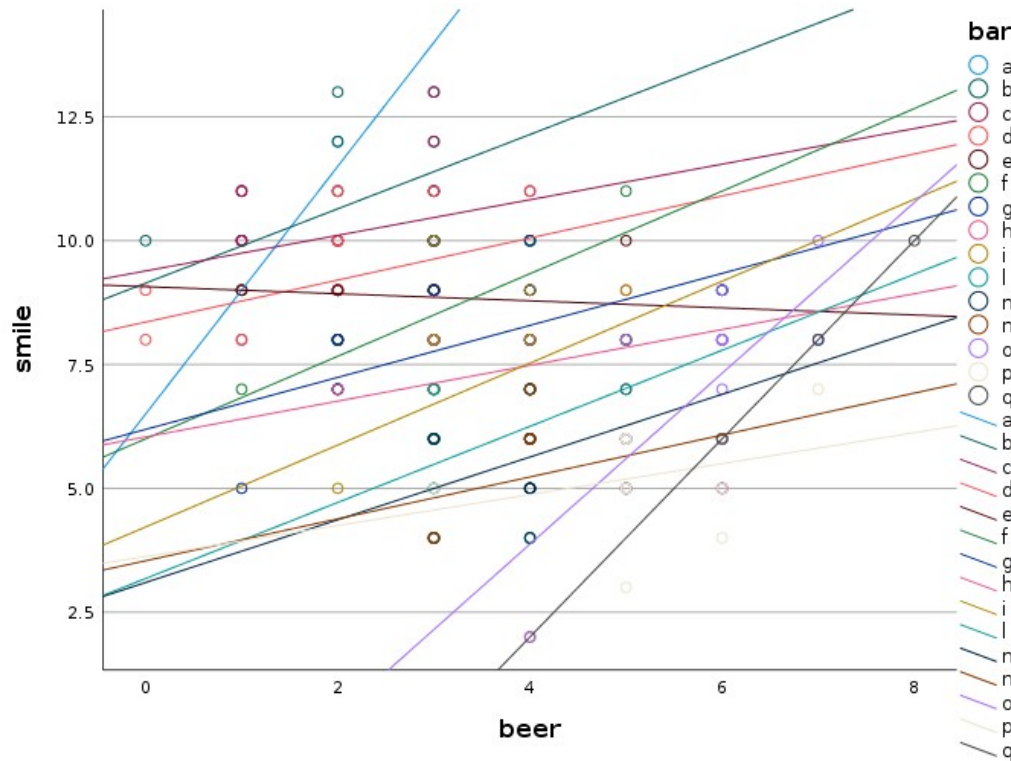
Scatterplot



# Scatterplot per Bar

Lo scatterplot, distinguendo per bar, offre indicazioni

Bar

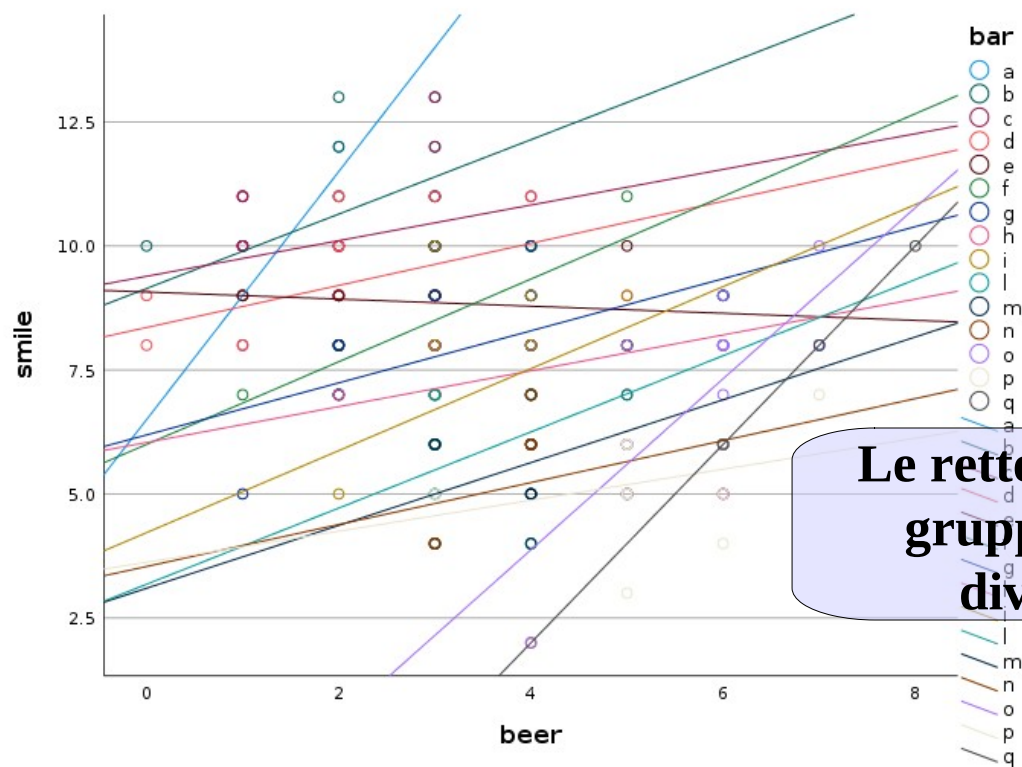




# Scatterplot per Bar

Lo scatterplot, distinguendo per bar, offre indicazioni

Bar



Le rette sono tutte positive

Le rette nei vari gruppi sono diverse

# Modello

- Sembrerebbe che considerando tutti i soggetti come equivalenti ed indipendenti (assunzione della regressione) otteniamo un risultato distorto
- Se stimassimo un modello in cui la retta di regressione (intercetta e coefficiente  $B$ ) sia diversa in ogni gruppo, avremmo dei risultati più soddisfacenti

# Modello

- Definiamo dunque una regressione per ogni gruppo

 $y_{ij}$ 

Numero di sorrisi del soggetto i nel gruppo j

$$\hat{y}_{ia} = a_a + b_a \cdot x_{ia}$$

$$\hat{y}_{ib} = a_b + b_b \cdot x_{ib}$$

$$\hat{y}_{ic} = a_c + b_c \cdot x_{ic}$$

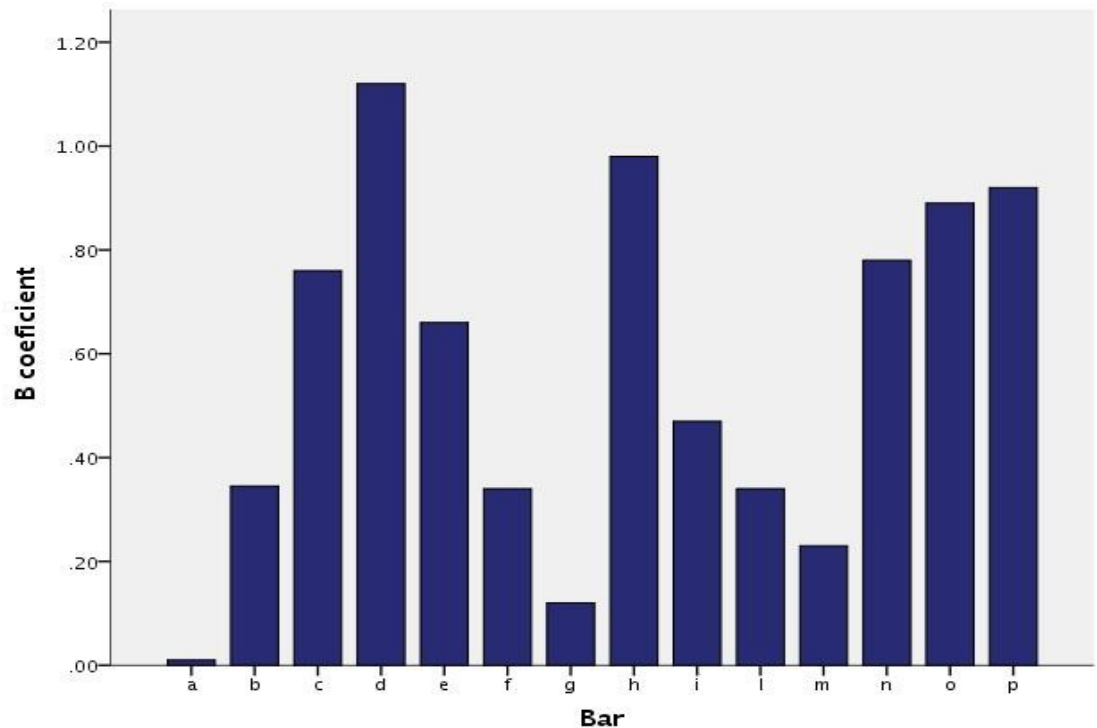
$$\hat{y}_{ij} = a_j + b_j \cdot x_{ij}$$

**In queste regressioni, sia  
l'intercetta che i  
coefficienti sono diversi  
(non fissi) nei vari gruppi**

# Coefficienti variabili

- Se i coefficienti cambiano nei vari gruppi, ovviamente non sono fissi (!!!)

**I coefficienti avranno una distribuzione rispetto ai bar per i quali sono calcolati**

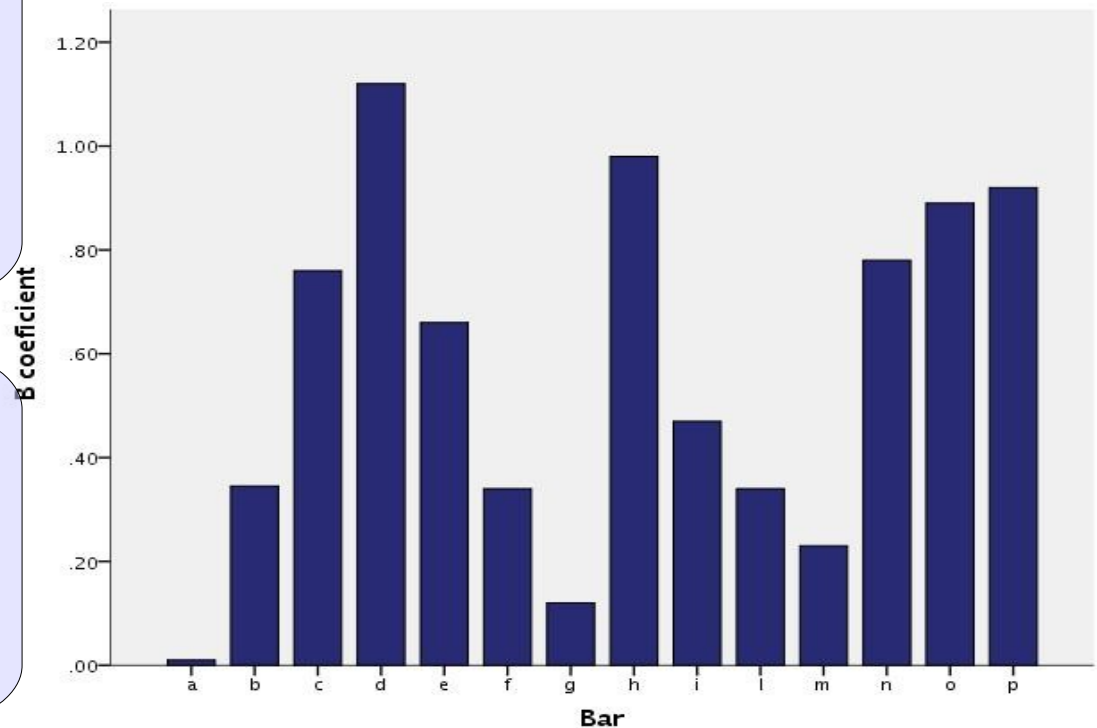


# Coefficienti random

- I coefficienti che cambiano sono definiti **coefficienti random**

**I coefficienti avranno una distribuzione random (cioè avranno una loro variabilità)**

**Cioè, nella popolazione esiste una variazione random dei coefficienti**

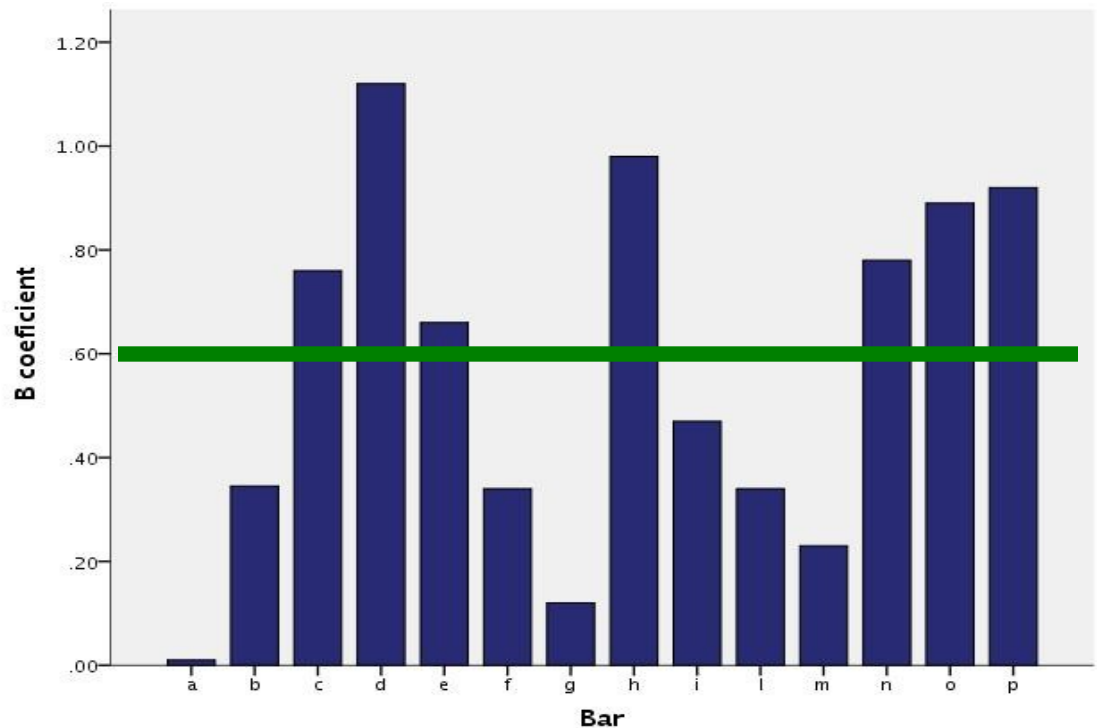


# Media dei Coefficiente

- Se i coefficienti sono delle variabili, avranno una loro **media** ed una loro **varianza**

MEDIA

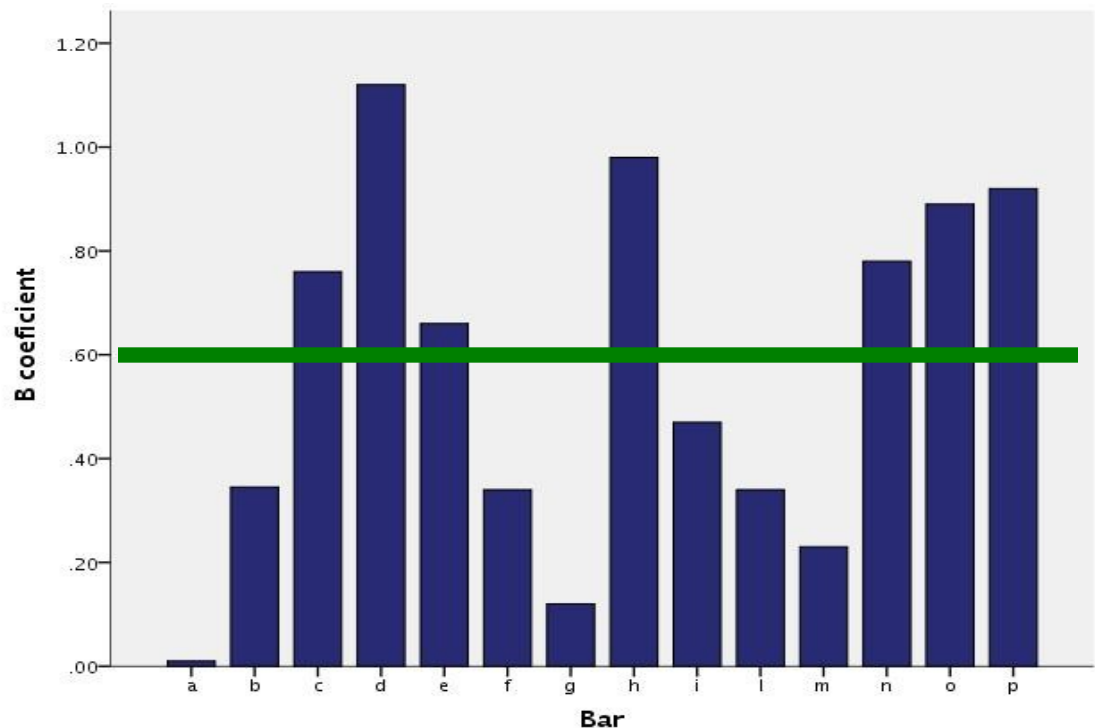
$$\bar{b} = \frac{\sum_j b_j}{k}$$



# Coefficienti fissi

- La media dei coefficienti per bar indica la relazione (media) tra birre e sorrisi in tutto il campione

**La media (come visto prima) è un parametro fisso del modello che descrive la distribuzione dei coefficienti nei cluster (bar)**



# Modello

- Definiamo ora un modello con le varie regressioni per cluster e la loro media

**Una regressione per cluster**

$$\hat{y}_{ij} = a_j + b_j \cdot x_{ij}$$

**Ogni coefficiente è espresso come deviazione dalla media dei coefficienti**

$$b'_j = b_j - \bar{b}$$

**Modello generale**

$$\hat{y}_{ij} = a_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$



# Modello

- Definiamo ora un modello con le varie regressioni per cluster e la loro media

## Modello generale

$$\hat{y}_{ij} = a_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

**Coefficienti  
random**

**Coefficiente fisso**

# Modello Misto

- Analogamente

**Una regressione per cluster**

$$\hat{y}_{ij} = a_j + b_j \cdot x_{ij}$$

**Ogni intercetta espressa come deviazione dalla media delle intercette**

$$a'_j = a_j - \bar{a}$$

**Modello generale**

$$\hat{y}_{ij} = \bar{a} + a'_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

# GLM come sottocaso

La corrispondenza logica tra le varie tecniche inerenti al Modello Lineare Generale con le tecniche inerenti ai Modelli Misti è data dal fatto che il GLM può essere pensato come sottocaso dei MM

MM

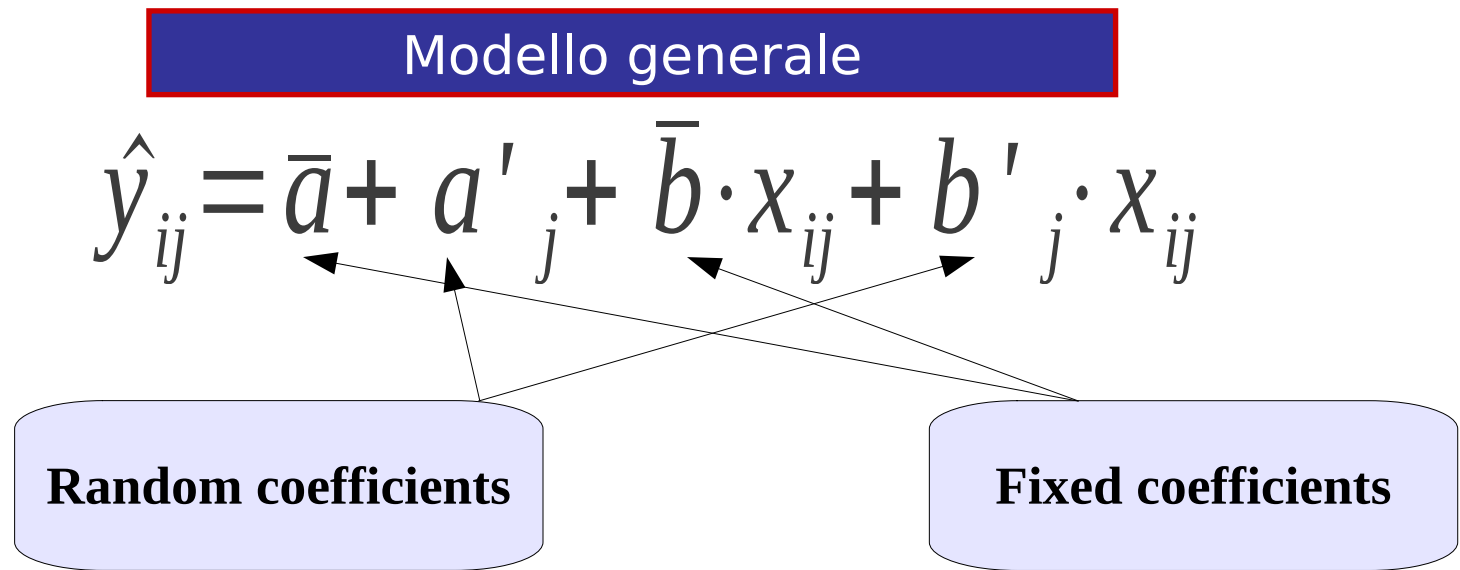
$$\hat{y}_{ij} = \bar{a} + a'_j + b'_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

GLM

$$\hat{y}_{ij} = \bar{a} + \bar{b} \cdot x_{ij}$$

# Modello Misto

- Definiamo ora un modello con le varie regressioni per cluster e la loro media



I modelli che contengono coefficienti sia random che fissi sono definiti **modelli misti** (mixed models)

# Notazione

Per chiarezza, useremo questa notazione

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + b_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

$y_{ij}, x_{ij}$

**Variabili osservate per caso i nel cluster j**

$\bar{a}, \bar{b}$

**Effetti fissi**

$a_j, b_j$

**Effetti random calcolati nel cluster j  
espressi come deviazione dalla loro media**

$e_{ij}$

**Errore associato al singolo caso i**

# Varianze

Per chiarezza, useremo questa notazione

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + b_j \cdot x_{ij} + \bar{b} \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

 $\sigma_a$ 

**Varianza dei coefficienti a**

 $\sigma_b$ 

**Varianza dei coefficienti b**

 $\sigma$ 

**Varianza di errore**

 $\sigma_{ab}$ 

**Covarianza tra i coefficienti a e b**

- In sostanza, i modelli misti consentono di stimare gli effetti di VI su una VD, consentendo a tali effetti di variare in diverse unità di misurazione (cluster).
- Gli effetti che variano sono detti **effetti random**
- Gli effetti che non variano (cioè gli effetti medi uguali per tutto il campione) sono detti **effetti fissi**

- Per stimare correttamente un modello misto, si deve semplicemente capire quale siano gli effetti random, e per quali unità variano (quali sono i cluster)
- Una volta stimato il modello, gli **effetti fissi** si interpretano esattamente come nel GLM (regressione/anova etc)
- Gli **effetti random** generalmente non si interpretano, ma se ne può studiare la variabilità
- La definizione corretta del modello, consente di ottenere stime e errori standard (e dunque test inferenziali) corretti



# Costruire il modello

Per costruire il modello, dobbiamo rispondere a tre semplici domande

- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random?
- Quali sono gli effetti fissi?
- Quali sono gli effetti random?

# Variabili cluster

- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random?
- Quali sono gli effetti fissi?
- Quali sono gli effetti random?
  - Qualunque variabile che raggruppa le osservazioni (i casi o le osservazioni) in modo che i punteggi possano essere più simili entro i gruppi che tra gruppi
  - Una variabili i cui livelli **rappresentano un campione casuale di gruppi estratti da una popolazione più ampia di gruppi**

# Effetti Fissi

- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random?
- **Quali sono gli effetti fissi?**
- Quali sono gli effetti random?
  - Qualunque effetto che ci interessa in generale (equivalenti agli effetti nel GLM)
  - Esempio: L'effetto di birra sui sorrisi

# Effetti Random

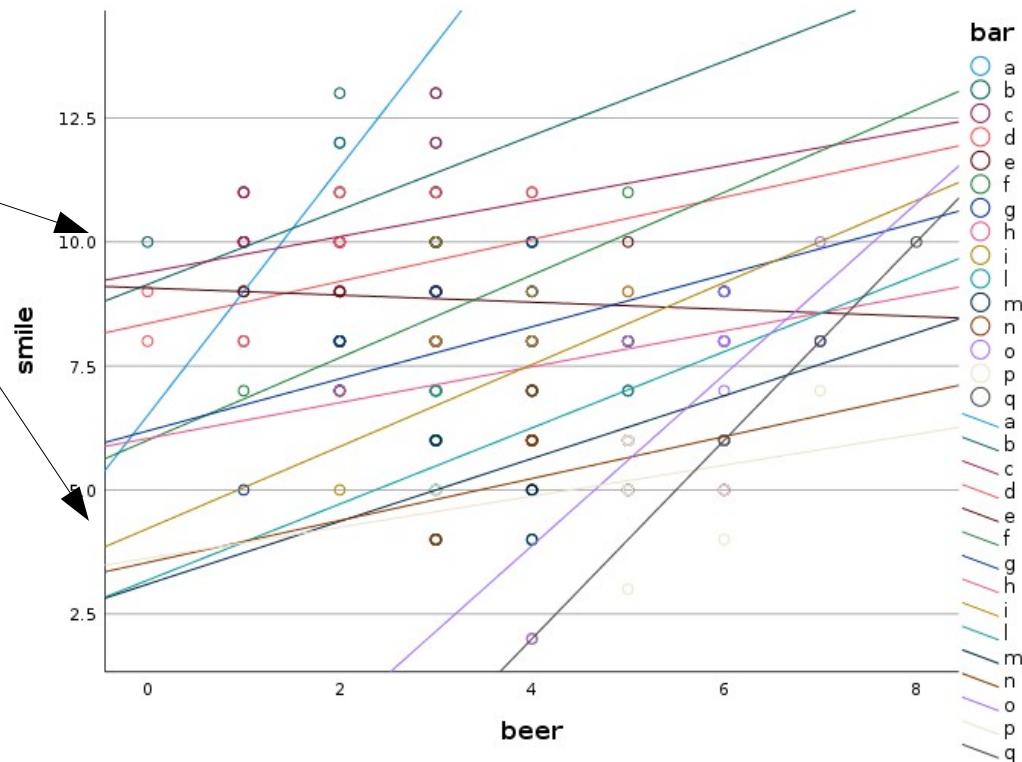
- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random?
- Quali sono gli effetti fissi?
- **Quali sono gli effetti random?**
  - Qualunque effetto che può variare da cluster a cluster
  - (Dunque:) **Qualunque effetto (coefficiente) che può essere calcolato dentro ogni cluster**
  - Esempio: le intercette e il B di birre su sorrisi

# Birre al Bar

Definiamo il modello, iniziando dal più semplice

Bar

Le intercette nei  
vari gruppi sono  
diverse



# Birre al Bar

Definiamo un modello dove le intercette possono variare nei diversi bar, mentre il coefficiente  $b$  è fisso ed uguale per tutti i bar

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + \bar{b} \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

- Quali sono gli effetti fissi?
- Quali sono gli effetti random?
- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random?

# Birre al Bar

Definiamo un modello dove le intercette possono variare nei diversi bar, mentre il coefficiente  $b$  è fisso ed uguale per tutti i bar

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + \bar{b} \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

- Quali sono gli effetti fissi? **Intercetta e effetto di birre**
- Quali sono gli effetti random? **Intercetta**
- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random? **bar**

Vari autori e libri definiscono questomodello:

**Random-intercepts regression**

altri

**Intercepts-as-outcomes model**

- In jamovi “mixed model” è nel modulo GAMLj

The screenshot displays the jamovi software interface with the 'Mixed Model' analysis module selected. The top menu bar includes 'Data' and 'Analyses'. The 'Analyses' menu is open, showing various statistical tests: Exploration, T-Tests, ANOVA, Regression, Frequencies, Factor, Base R, TOSTER, MAJOR, medmod, Linear Models, and Modules. The 'Mixed Model' module is highlighted.

The 'Mixed Model' panel on the left contains a list of variables (A, case, smile, beer, bar) and four input fields for 'Dependent Variable', 'Factors', 'Covariates', and 'Cluster variables'. Below these fields are checkboxes for 'REML' and 'Confidence intervals', with a dropdown for 'Interval' set to '95 %'. A list of options is visible at the bottom: Fixed Effects, Random Effects, Factors Coding, Covariates Scaling, Post Hoc Tests, Fixed Effects Plots, Simple Effects, and Estimated Marginal Means.

The right panel, titled 'Mixed Model', displays the 'Model Info' section with a table of instructions:

Model Info	
Get started	Select the dependent variable
Get started	Select at least one cluster variable
Get started	Select at least one term in Random Effects
Optional	Select factors and covariates

Below this is the 'Fixed Effect ANOVA' section with a table structure:

	F	Num df	Den df	p

Next is the 'Fixed Effects Parameter Estimates' section with a table structure:

Effect	Contrast	Estimate	SE	Lower	Upper	df	t	p



Finally, the 'Random Components' section has a table structure:


Groups	Name	SD	Variance



## Definiamo il ruolo delle variabili


Mixed Model

 A  
 case

→  smile


→

Covariates

→  beer

→

Cluster variables

→  bar

Estimation      Confidence Intervals

☒ REML      ☒ Confidence intervals      Interval  %

**Definiamo gli effetti fissi**

▼ Fixed Effects

Components		Model Terms
beer	→	beer
	→ ▼	

☒ Fixed Intercept

**Definiamo la componente random**

▼ | Random Effects

Components

beer | bar

→

Random Coefficients

Intercept | bar

☒ Correlated Effects

# Risultati

- Una volta definita la componente random, otteniamo i risultati

## Model Results

Model Fit

Type	R <sup>2</sup>	df	LRT X <sup>2</sup>	p
Conditional	0.818	2	201.438	< .001
Marginal	0.090	1	38.630	< .001

[4]

>

**R-squared Marginal: Quanta  
varianza è spiegata dai fixed  
effects da soli**

**R-squared Conditional: quanta  
varianza è spiegata dai fixed e  
dai random effects tutti insieme**

# Componente random

**La varianza delle intercette è diversa da zero, dunque le intercette variano, dunque ok che siano random**

## Random Components

Groups	Name	SD	Variance	ICC
bar	(Intercept)	2.412	5.817	0.800
	Residual	1.205	1.451	

*Note.* Number of Obs: 234 , groups: bar 15

# ICC

- The intra-class correlation indica la proporzione di varianza spiegata dalle differenze tra clusters

Random Components				
Groups	Name	SD	Variance	ICC
bar	(Intercept)	2.412	5.817	0.800
	Residual	1.205	1.451	

Note. Number of Obs: 234 , groups: bar 15

**ICC=Intra-class  
correlation**

$$ICC = \frac{\sigma_a}{\sigma_a + \sigma}$$

$$ICC = \frac{5.817}{5.817 + 1.451} = .8$$

## F-test per l'effetto fisso di beer

### Fixed Effect ANOVA

	F	Num df	Den df	p
beer	46.0	1	229	< .001

Note. Satterthwaite method for degrees of freedom

# Output

Se tutto è ok, guarderemo gli effetti fissi per valutare ed interpretare la relazione tra VD e VI

Fixed Effects Parameter Estimates

Effect	Contrast	Estimate	SE	95% Confidence Interval		df	t	p
				Lower	Upper			
(Intercept)	Intercept	7.778	0.6276	6.548	9.008	13.2	12.39	< .001
beer	beer	0.548	0.0808	0.390	0.706	229.4	6.79	< .001



# Output

Se tutto è ok, guarderemo gli effetti fissi per valutare ed interpretare la relazione tra VD e VI

Fixed Effects Parameter Estimates

Effect	Contrast	Estimate	SE	95% Confidence Interval		df	t	p
				Lower	Upper			
(Intercept)	Intercept	7.778	0.6276	6.548	9.008	13.2	12.39	< .001
beer	beer	0.548	0.0808	0.390	0.706	229.4	6.79	< .001

**Coefficiente b:** In media, per ogni birra in più i sorrisi aumentano di .548

**Intercetta:** In media, per zero (media di) birre ci attendiamo 7.7 sorrisi

- Plots

▼ | Fixed Effects Plots

→

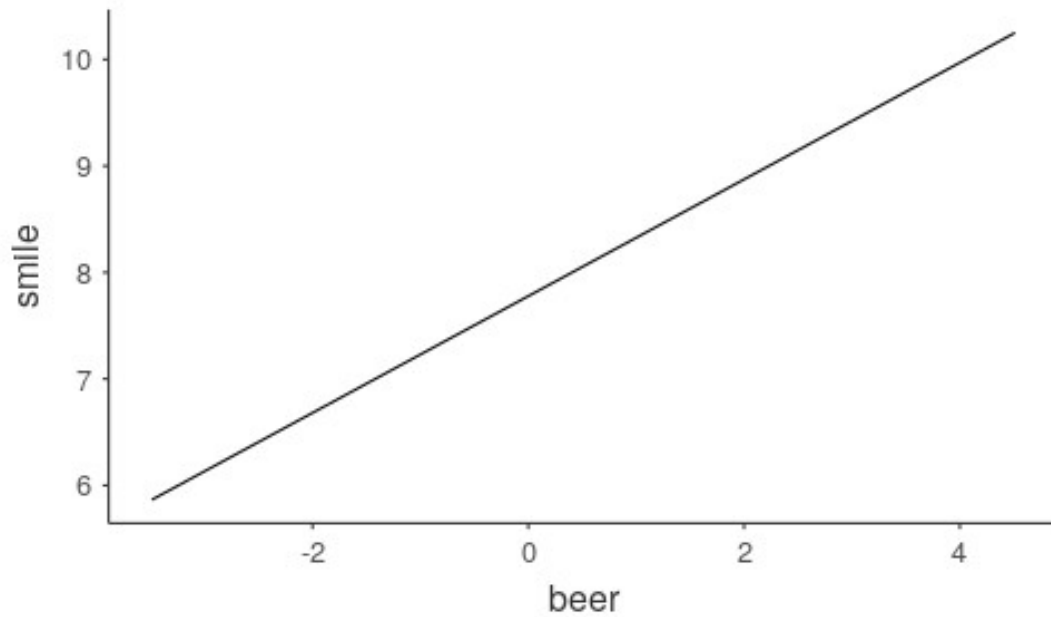
beer

→

→

## Plot dell'effetto fisso

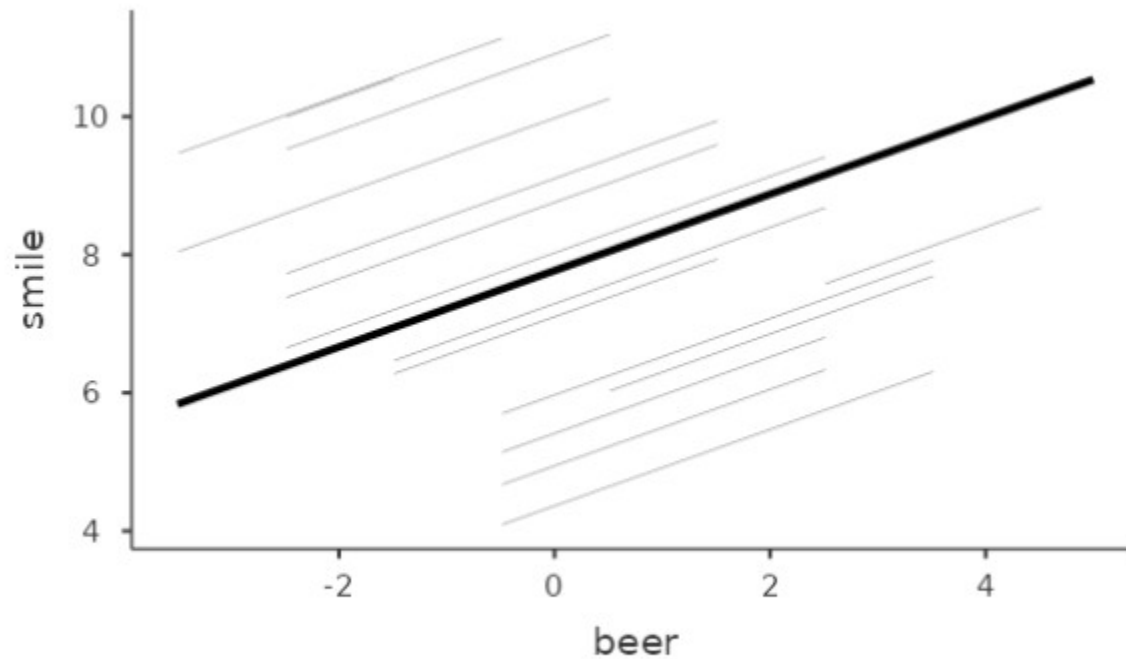
### Fixed Effects Plots



# R Plot

Possiamo anche plottare gli effetti random

Effects Plots



Note: Random effects are plotted by bar

# Birre al Bar

Definiamo un modello dove le intercette e i coefficienti di regressione possono variare nei diversi bar,

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + \bar{b} \cdot x_{ij} + b \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

- Quali sono gli effetti fissi? **Intercetta e effetto di birre**
- Quali sono gli effetti random? **Intercetta ed effetto di birre**
- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random? **bar**

Vari autori e libri definiscono questo modello:

**Random-coefficients regression**

Altri come

**Intercepts- and Slopes-as-outcomes model**

# Effetti random

Definiamo un modello dove le intercette possono variare nei diversi bar, mentre il coefficiente  $b$  è fisso ed uguale per tutti i bar

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + \bar{b} \cdot x_{ij} + b \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

The screenshot shows a software interface for defining random effects. At the top, there is a dropdown menu labeled "Random Effects" with a downward arrow. Below this, the interface is divided into two main sections: "Components" on the left and "Random Coefficients" on the right. A right-pointing arrow button is located between these two sections. The "Random Coefficients" section contains two lines of text: "Intercept | bar" and "beer | bar". At the bottom of the interface, there are two tabs: "Effects visualization" and "Tests".

# Output

Poi guarderemo la variabilità degli effetti random, per capire se è  
abbiamo fatto bene a settarli come tali

## Random Components

Groups	Name	SD	Variance	ICC
bar	(Intercept)	2.417	5.8417	0.803
	beer	0.167	0.0278	
Residual		1.196	1.4314	

Note. Number of Obs: 234 , groups: bar 15

## Random Parameters correlations

Groups	Param.1	Param.2	Corr.
bar	(Intercept)	beer	-0.766

**La varianza dei b è piccola  
dunque i b variano molto  
poco, dunque potremmo  
tenere il modello precedente**

# Loglikelihood ratio test

- E' possibile anche testare la significatività delle varianze rispetto a zero

Random Effects

Components

Intercept | bar  
beer | bar

Random Coefficients

Intercept | bar

List components

☒ Model terms

Add None

Effects correlation

☒ Correlated  
☐ Not correlated  
☐ Correlated by block

Tests

☒ LRT for Random Effects

Random Effect LRT

Test	N. par	AIC	LRT	df	p
(1   bar)	3.00	997	179	1.00	< .001



# Varianze

La varianza degli effetti random ci indica quanta variabilità c'è tra i cluster nell'effetto

- L'effetto random lo lasciamo anche se la varianza è molto piccola
- Se è zero (esattamente), l'effetto random deve essere tolto dal modello

# Effetti fissi

Guarderemo gli effetti fissi per valutare ed interpretare la relazione tra VD e VI

Fixed Effects Parameter Estimates

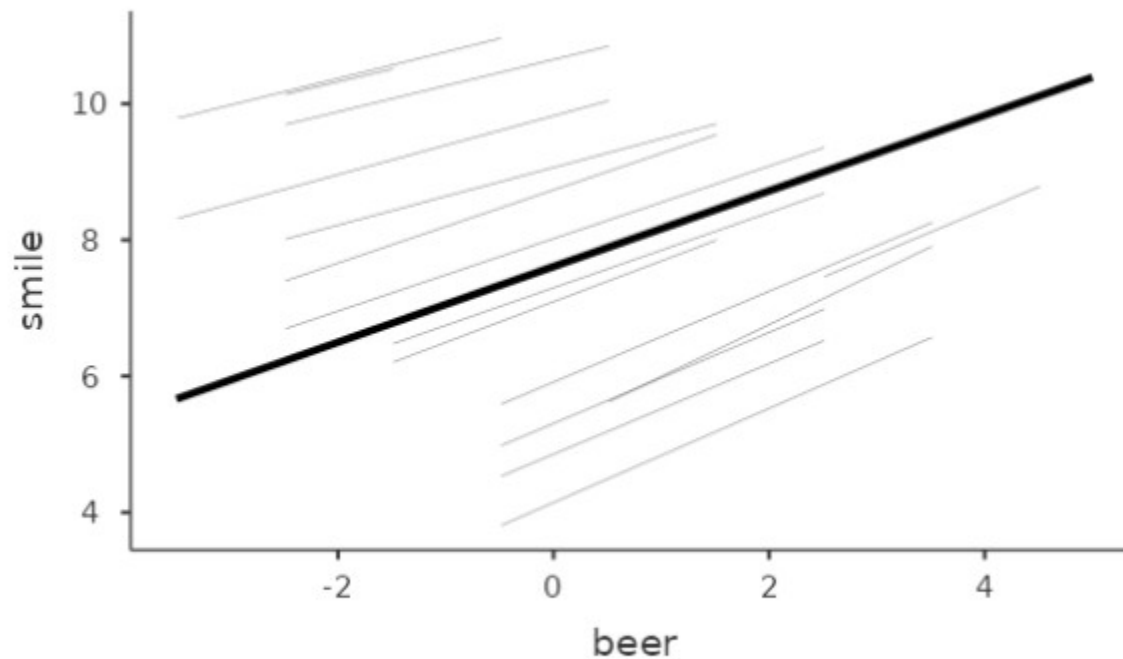
Names	Estimate	SE	95% Confidence Interval		df	t	p
			Lower	Upper			
(Intercept)	7.610	0.6335	6.368	8.851	12.93	12.01	< .001
beer	0.555	0.0925	0.374	0.737	7.23	6.00	< .001

**Effetti non diversi da prima**

# Plots

- Plottando gli effetti random vediamo che non sono più tutti paralleli

Effects Plots



Note: Random effects are plotted by bar

# Morale

- Il modello misto consente di estendere il modello lineare generale a cui problemi di analisi dei dati in cui la struttura dei dati non si adatta naturalmente
- I semplici concetti visti oggi, combinati alle conoscenze relative al GLM, ci consentiranno di stimare modelli misti per (quasi) tutte i problemi di ricerca (plausibili)

# Il disegno a misure ripetute

# Disegno a misure ripetute

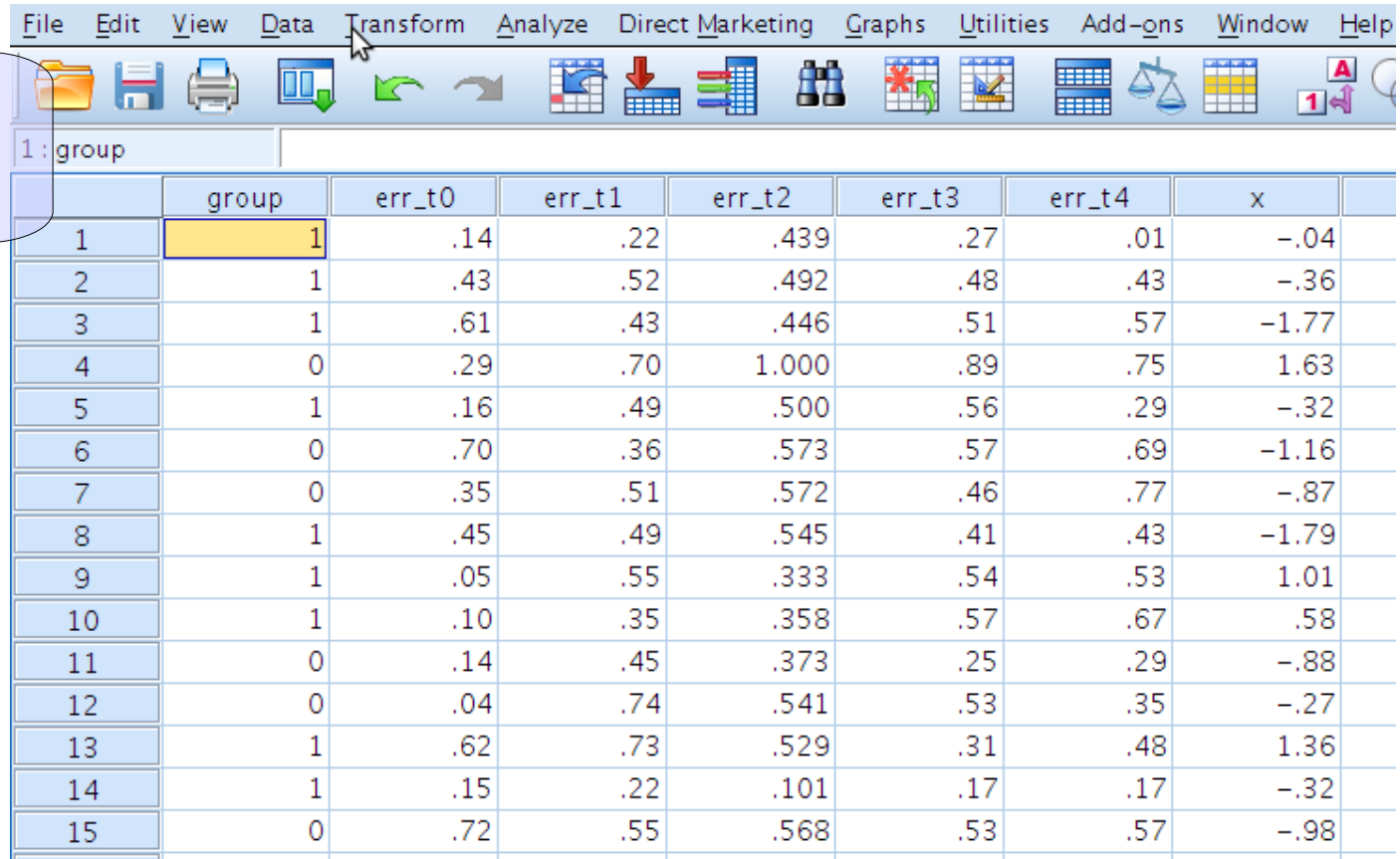
- Consideriamo un disegno a misure ripetute classico (within-subjects) in cui i livelli del fattore WS (5 differenti trials) sono

		Condition				
		1	2	3	4	5
Participants	1	Y11	Y21	Y31	Y41	Y51
	2	Y12	Y22	Y32	Y42	Y52
	3	Y13	Y23	Y33	Y43	Y53
	....					
	N	Y1n	Y2n	Y3n	Y4n	Y5n

# Formato file Standard

- Spesso (in SPSS) il file è organizzato nel formato “wide”, una riga un soggetto

Una riga, un  
soggetto



	group	err_t0	err_t1	err_t2	err_t3	err_t4	x
1	1	.14	.22	.439	.27	.01	-.04
2	1	.43	.52	.492	.48	.43	-.36
3	1	.61	.43	.446	.51	.57	-1.77
4	0	.29	.70	1.000	.89	.75	1.63
5	1	.16	.49	.500	.56	.29	-.32
6	0	.70	.36	.573	.57	.69	-1.16
7	0	.35	.51	.572	.46	.77	-.87
8	1	.45	.49	.545	.41	.43	-1.79
9	1	.05	.55	.333	.54	.53	1.01
10	1	.10	.35	.358	.57	.67	.58
11	0	.14	.45	.373	.25	.29	-.88
12	0	.04	.74	.541	.53	.35	-.27
13	1	.62	.73	.529	.31	.48	1.36
14	1	.15	.22	.101	.17	.17	-.32
15	0	.72	.55	.568	.53	.57	-.98

# Formato file “Long”

- Per l'utilizzo dei modelli misti è necessario un formato “una misura, una riga”

Ogni riga  
rappresenta una  
misurazione

id	group	x	Condition	Y	value
1	1	-.037	1	.140	
1	1	-.037	2	.220	
1	1	-.037	3	.439	
1	1	-.037	4	.271	
1	1	-.037	5	.009	
2	1	-.360	1	.431	
2	1	-.360	2	.518	
2	1	-.360	3	.492	
2	1	-.360	4	.483	
2	1	-.360	5	.433	
3	1	-1.767	1	.612	
3	1	-1.767	2	.431	
3	1	-1.767	3	.446	
3	1	-1.767	4	.509	
3	1	-1.767	5	.573	
4	0	1.634	1	.291	
4	0	1.634	2	.702	

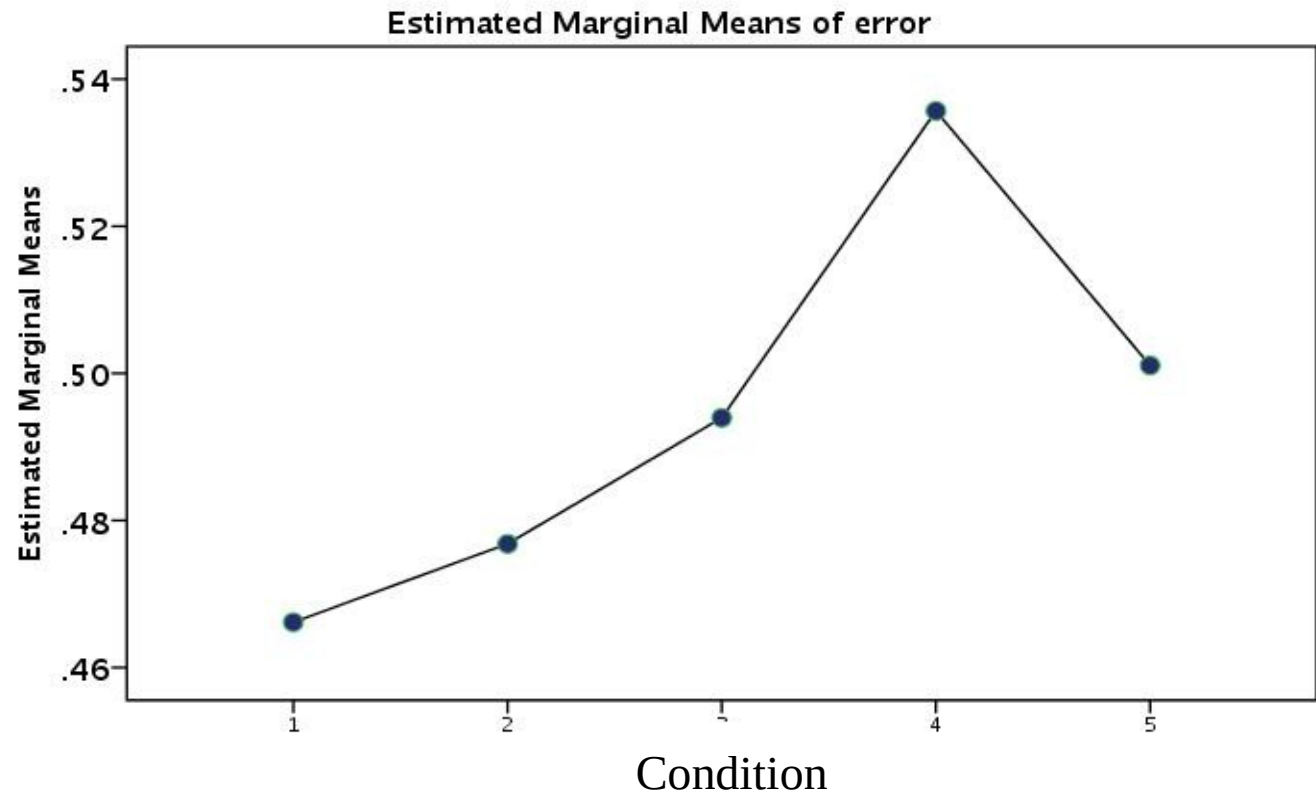


# GLM

- Potremmo analizzare questi dati mediante un modell GLM, ma incontreremo dei (gravi) problemi

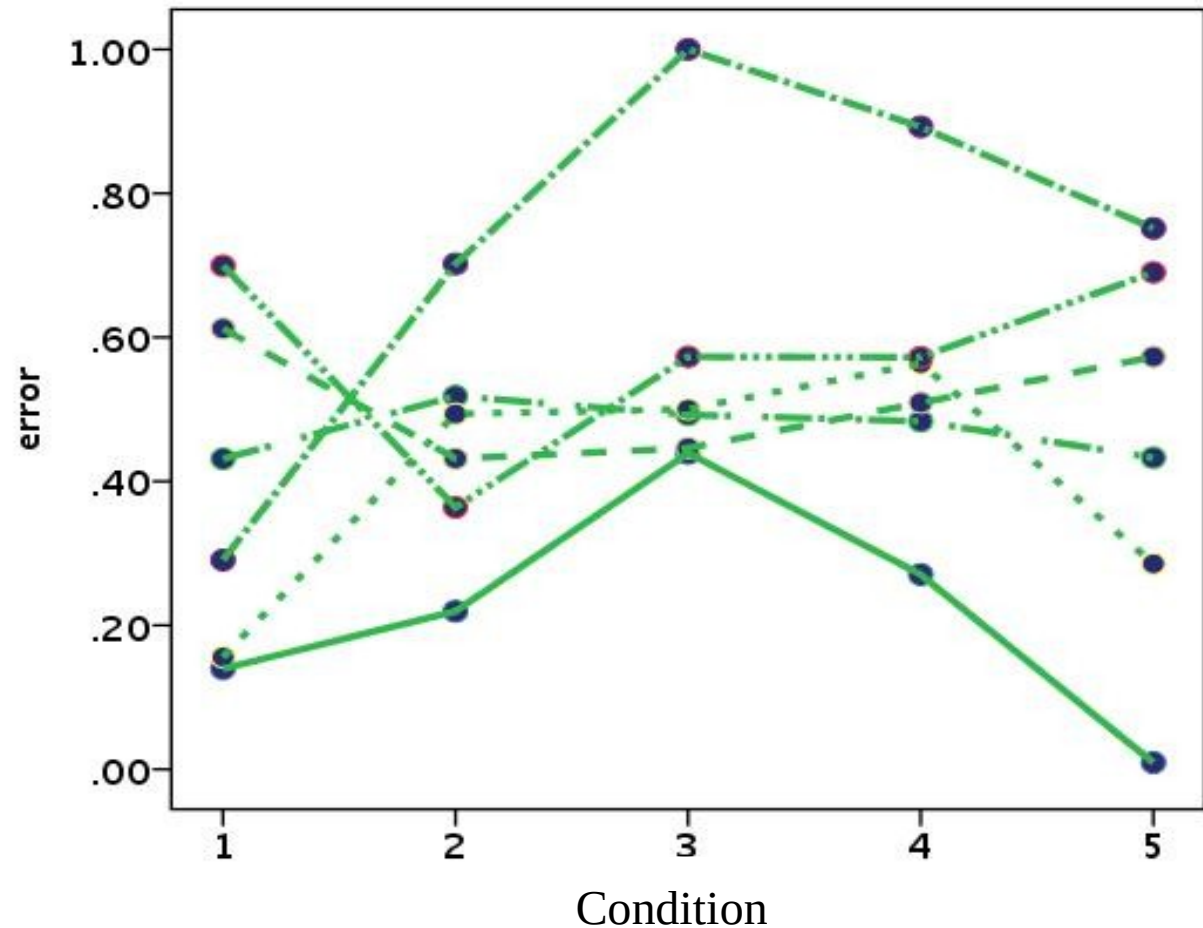
Effetti fissi

Medie dei 5 trials



# Problemi

- Il primo problema è ogni soggetto, avendo tutte le misurazioni, esprime il suo proprio effetto di trial



Esempio per 6  
soggetti

## Soluzione (1)

Dunque per analizzare correttamente il disegno, dobbiamo considerare nel modello un termine che rappresenti la specificità di ogni soggetto. Questo termine sarà lo stesso in ogni soggetto

$$\begin{aligned} Y_{11} &= a + b \cdot T_1 + u_1 + e_{11} \\ Y_{12} &= a + b \cdot T_2 + u_1 + e_{12} \\ Y_{13} &= a + b \cdot T_3 + u_1 + e_{13} \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} Y_{i1} &= a + b \cdot T_1 + u_i + e_{i1} \\ Y_{i2} &= a + b \cdot T_2 + u_i + e_{i2} \\ Y_{i3} &= a + b \cdot T_2 + u_i + e_{i3} \end{aligned}$$

Stesso soggetto,  
stesso errore

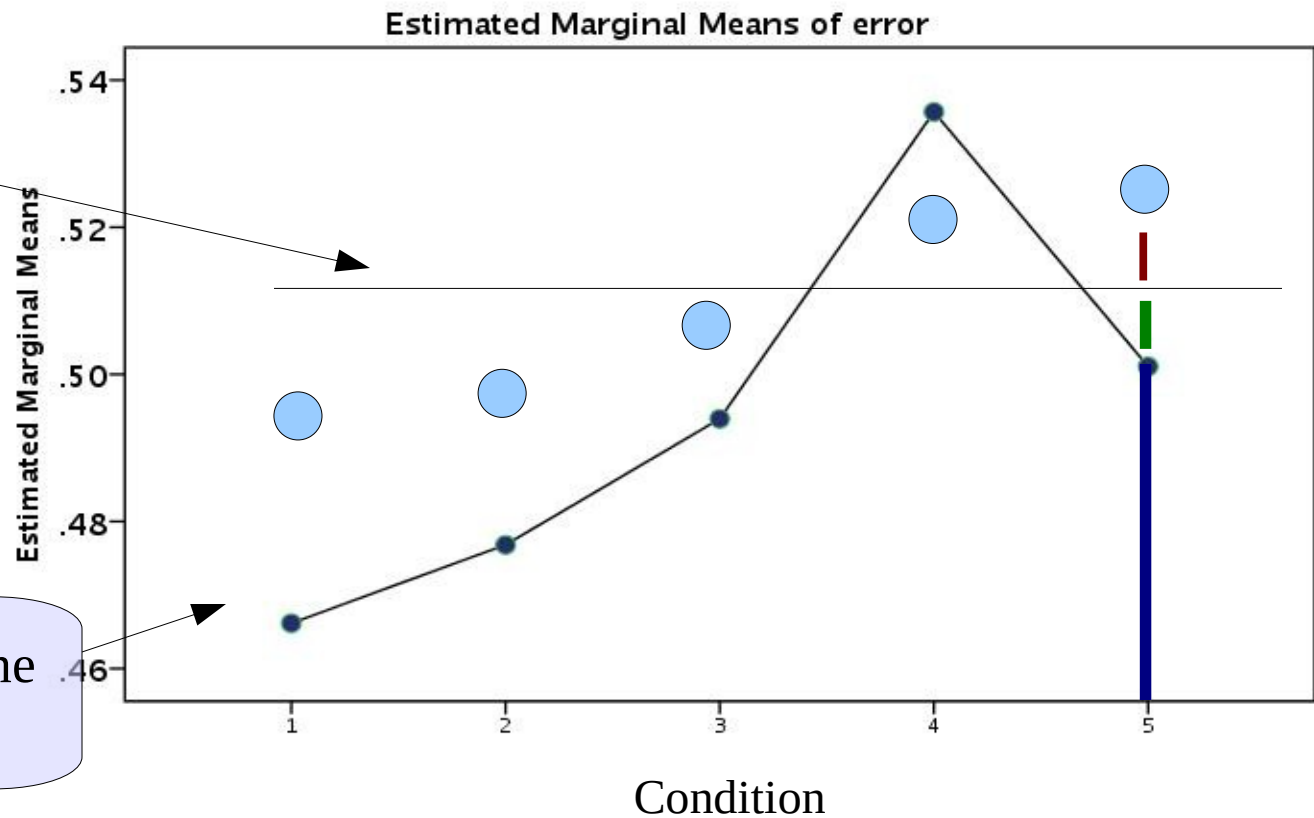
Stesso soggetto,  
stesso errore

# Componente individuale

Esempio per un  
soggetto

Valore del tratto  
individuale

Medie del campione  
(effetti fissi)

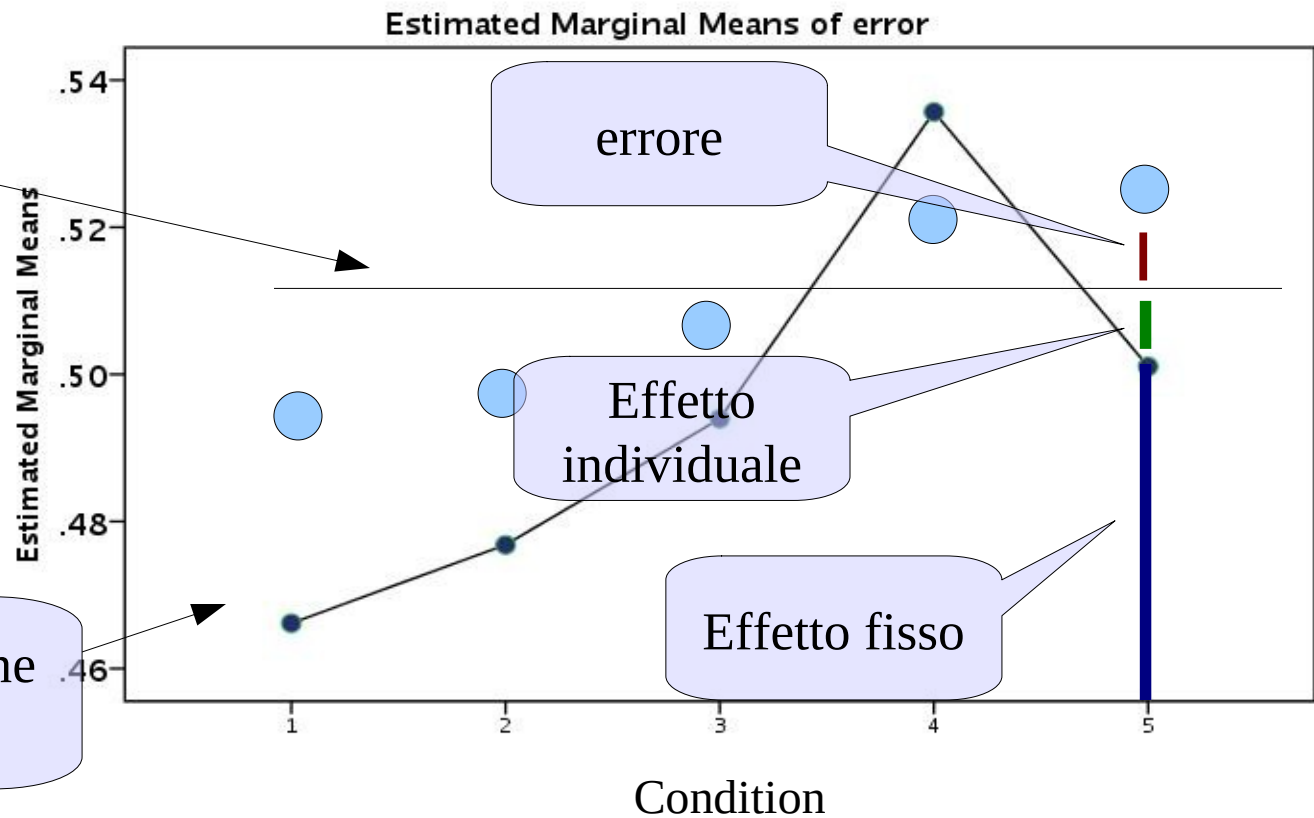


# Componente individuale

Esempio per un  
soggetto

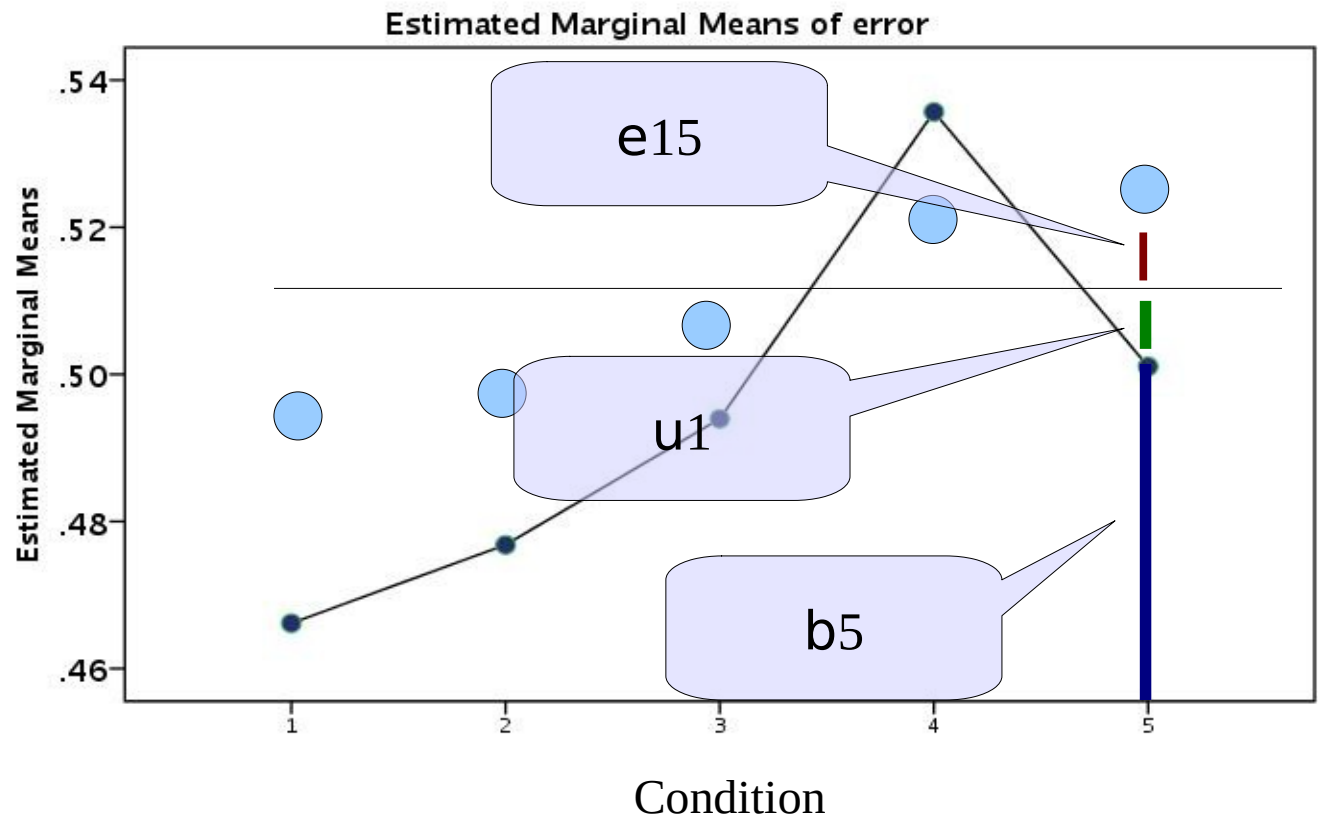
Valore del tratto  
individuale

Medie del campione  
(effetti fissi)



# Componente individuale

$$Y_{11} = a + b \cdot T_1 + u_1 + e_{11}$$



## Soluzione (1)

Dato che  $\mathbf{u}$  è la stesso dentro ogni soggetto, le componenti delle misure ripetute che non sono legate agli effetti fissi saranno correlate

$$\begin{aligned} Y_{11} &= a + b \cdot T_1 + u_1 + e_{11} \\ Y_{12} &= a + b \cdot T_2 + u_1 + e_{12} \\ Y_{13} &= a + b \cdot T_3 + u_1 + e_{13} \end{aligned}$$

Stesso soggetto,  
stesso errore

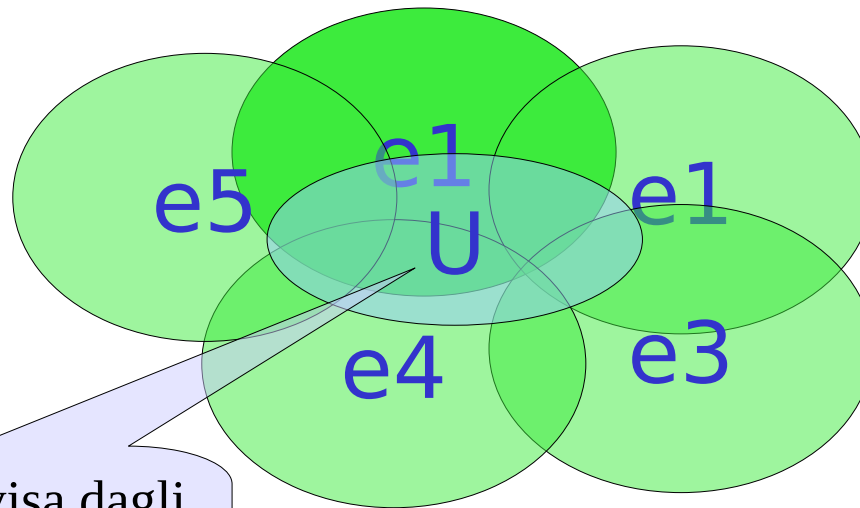
.....

$$\begin{aligned} Y_{i1} &= a + b \cdot T_1 + u_i + e_{i1} \\ Y_{i2} &= a + b \cdot T_2 + u_i + e_{i2} \\ Y_{i3} &= a + b \cdot T_2 + u_i + e_{i3} \end{aligned}$$

Stesso soggetto,  
stesso errore

## Soluzione (1)

Dato che  $\mathbf{u}$  è la stesso dentro ogni soggetto, le componenti delle misure ripetute che non sono legate agli effetti fissi saranno correlate



Varianza condivisa dagli  
errori dovuta alla  
componente individuale



# Modello misto

- Si può specificare il modello in maniera alternativa, più in linea con la teoria dei modelli misti vista fin ora
- Possiamo modellare la componente individuale come un parametro random

$$Y_{ij} = \bar{a} + a_i + b \cdot T_j + e_{ij}$$

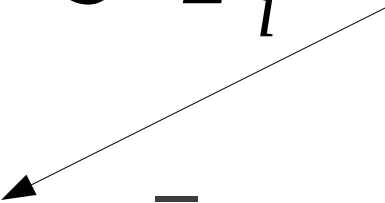
Intercetta media  
(Effetto fisso)

Intercetta random,  
diversa per ogni  
soggetto

# Definizione del modello

Riportiamo il modello con la terminologia del MM

$$Y_{ij} = a + b \cdot T_i + u_j + e_{ij}$$


$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + \bar{b} \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

# Definizione del modello

- Modello completo

$$Y_{ij} = \bar{a} + a_i + b \cdot T_j + e_{ij}$$

Intercetta  
(Effetto fisso)

Intercetta  
random

Effetto fisso di  
Trial

Errore  
Random  
(IID)

$i$ =soggetti,  $j$ =condition

# Definizione del modello

$$y_{ij} = \bar{a} + a_j + \bar{b} \cdot x_{ij} + e_{ij}$$

- Quali sono gli effetti fissi? Intercetta e effetto di trial
- Quali sono gli effetti random? Intercetta
- Quali sono i cluster su cui variano gli effetti random? Soggetto (id)

# Input

Variabile categoriale

Variabile cluster

Linear Mixed Model

group  
x

Dependent Variable  
y

Factors  
condition

Covariates

Cluster variables  
id

**Estimation**  
☒ REML  
☐ Do not run

**Confidence Intervals**  
☒ Fixed parameters  
☐ Random variances  
Confidence level 95

**Model comparison**  
☐ Activate  
☐ More Fit Indices

# Coefficienti random

Intercette random

Tutti i possibili  
coefficienti

Random Effects

Components

- Intercept | id
- condition | id

Random Coefficients

- Intercept | id

List components

☒ Model terms

Effects correlation

☒ Correlated

Tests

☐ LRT for Random Effects

# Effetti fissi

Effetti fissi

Tutti i possibili effetti

The screenshot displays a software interface for defining fixed effects. At the top, a tab labeled 'Fixed Effects' is selected. Below this, there are two main panels: 'Components' on the left and 'Model Terms' on the right. The 'Components' panel contains a list with the item 'condition'. The 'Model Terms' panel also contains a list with the item 'condition'. Between these two panels are two buttons: a right-pointing arrow and a right-pointing arrow followed by a downward-pointing chevron. At the bottom right of the interface, there is a checked checkbox labeled 'Fixed Intercept'.

# Risultati: modello

## Model Results

Model Fit

Type	R <sup>2</sup>	df	LRT X <sup>2</sup>	p
Conditional	0.217	5	78.931	< .001
Marginal	0.015	4	18.773	< .001

[4]

**R-squared Marginal: Quanta  
varianza è spiegata dai fixed  
effects da soli**

**R-squared Conditional: quanta  
varianza è spiegata dai fixed e  
dai random effects tutti insieme**



# Risultati: variance

Varianza dell'intercette

## Random Components

Groups	Name	Variance	SD	ICC
id	(Intercept)	0.00780	0.0883	0.205
Residual		0.03020	0.1738	

*Note.* Number of Obs: 1000 , Number of groups: id 200

**Se è maggiore di 0, ok**

# GAMLj: Results: fixed

## F-tests

Fixed Effects Omnibus Tests

	F	df	df (res)	p
condition	4.72	4	796	< .001

## Coefficienti

Parameter Estimates (Fixed coefficients)

Names	Effect	Estimate	SE	95% Confidence Intervals		df	t	p
				Lower	Upper			
(Intercept)	(Intercept)	0.4947	0.00832	0.47841	0.5111	199	59.462	< .001
condition1	2 - 1	0.0107	0.01738	-0.02344	0.0448	796	0.613	0.540
condition2	3 - 1	0.0278	0.01738	-0.00632	0.0619	796	1.598	0.110
condition3	4 - 1	0.0695	0.01738	0.03541	0.1036	796	4.000	< .001
condition4	5 - 1	0.0349	0.01738	8.03e-4	0.0690	796	2.009	0.045

## Constrasti

# GAMLj: plot

Plot degli effetti

Plots

Horizontal axis

→ condition

Separate lines

→

Separate plots

→

Display

☐ None

☒ Confidence intervals

☐ Standard Error

Plot

☐ Observed scores

☐ Y-axis observed range

Use

☐ Original scale

☐ Varying line types

Random Effects

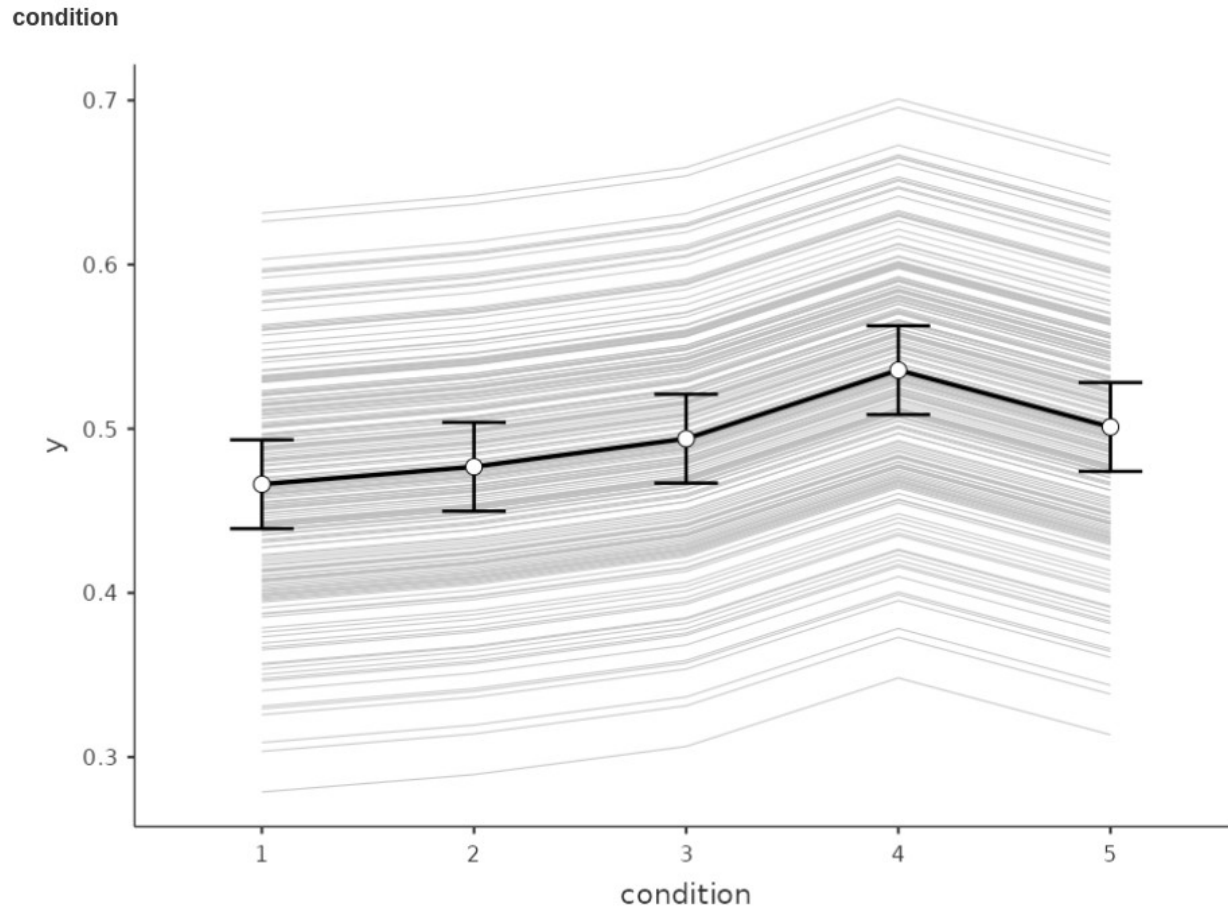
☒ Random effects

☒ Average method

☐ Full predicted method

# Risultati: plot

Results Plots



# MM nelle misure ripetute

- Il modello misto permette di analizzare le misure ripetute con una vasta gamma di opzioni
- Applicazione delle varie tecniche come in regressione/Anova
- Gestione efficiente dei valori mancanti
- Possibilità di modellare variabili continue come variabili ripetute nel tempo
- Possibilità di combinare il disegno a misure ripetute con disegni gerarchici o clusterizzati

Moderazione

# Interazione → Moderazione





- Come per il modello lineare generale la moderazione si stima mediante l'interazione
- L'interazione nel modello misto funziona **esattamente** come nel modello lineare generale

# Variabili continue

- Abbiamo Una serie di scuole. In ogni scuola abbiamo misurato il QI degli studenti (*intel*). Di ogni scuola abbiamo anche la dotazione economica annuale (*funds*).
- La variabile dipendente è uno score di performance
- Vogliamo sapere se il QI è associato alla performance, e se tale relazione è moderata dai fondi a disposizione della scuola



# Dati

Empire		variables			rows
	 school	 funds	 perform	 intel	
5	1	372.327	10.029	102.145	
6	1	372.327	9.196	90.859	
7	1	372.327	10.187	103.771	
8	1	372.327	9.124	91.466	
9	1	372.327	10.752	108.944	
0	1	372.327	9.493	96.176	
1	1	372.327	9.954	101.083	
2	1	372.327	9.752	99.053	
3	1	372.327	9.459	95.260	
4	1	372.327	10.367	106.097	
5	1	372.327	9.788	98.727	
6	2	368.685	12.081	109.591	
7	2	368.685	6.328	80.896	
8	2	368.685	10.551	101.516	
9	2	368.685	8.189	90.094	
0	2	368.685	9.145	94.737	
1	2	368.685	7.815	87.620	
2	2	368.685	10.799	103.318	

# Input

Mixed Model

case

→

Dependent Variable

perform

→

Factors

→

Covariates

intel  
funds

→

Cluster variables

school

Estimation

Confidence Intervals

☒ REML

☒ Confidence intervals

Interval

95

%

# Effetti fissi

▼ | Fixed Effects

Components

intel

funds

→

→ ▼

Model Terms

intel

funds

intel \* funds

☒ Fixed Intercept

# Effetti random

▼ | Random Effects

Components

funds | school

intel : funds | school

→

Random Coefficients

Intercept | school

intel | school

Effects correlation

Tests

# Risultati

**Spieghiamo tanto (dati  
didattici!)**

## Model Info

Info	
Estimate	Linear mixed model fit by REML
Call	perform ~ 1 + intel + funds + intel:funds+( 1 + intel   school )
AIC	-1252.950
BIC	-1177.120
LogLikel.	613.418
R-squared Marginal	0.599
R-squared Conditional	0.999
Converged	yes
Optimizer	bobyqa

# Risultati: variance

**Le varianze non sono  
0: ok**

## Random Components

Groups	Name	SD	Variance	ICC
school	(Intercept)	0.1026	0.01053	0.792
	intel	0.0885	0.00783	
Residual		0.0526	0.00277	

*Note.* Number of Obs: 500 , groups: school 20

## Random Parameters correlations

Groups	Param.1	Param.2	Corr.
school	(Intercept)	intel	0.487

# Risultati: effetti fissi

## Test F

### Fixed Effect Omnibus tests

	F	Num df	Den df	p
intel	24.1264	1	18.0	< .001
funds	0.0471	1	18.0	0.831
intel * funds	6.4748	1	18.0	0.020

Note. Satterthwaite method for degrees of freedom

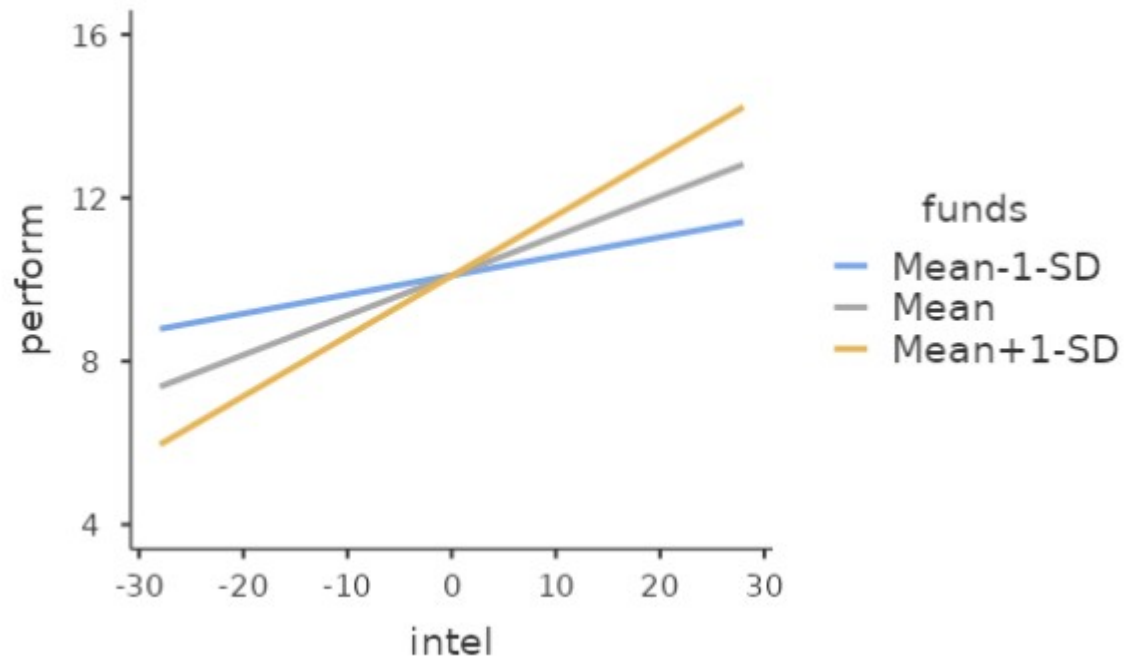
## Coefficienti

### Fixed Effects Parameter Estimates

Names	Estimate	SE	95% Confidence Interval		df	t	p
			Lower	Upper			
(Intercept)	10.0981	0.0231	10.0529	10.14331	18.0	437.597	< .001
intel	0.0972	0.0198	0.0584	0.13602	18.0	4.912	< .001
funds	-5.63e-5	2.60e-4	-5.65e-4	4.52e-4	18.0	-0.217	0.831
intel * funds	5.67e-4	2.23e-4	1.30e-4	0.00100	18.0	2.545	0.020

# Risultati: plot

Effects Plots



**Plot effetti fissi**



# Disegno a misure ripetute

- Abbiamo 2 gruppi - Control vs Treatment, misurati in 4 tempi diversi. I tempi sono: 1 (pretest), 2 (one month posttest), 3 (3 months follow-up), and 4 (6 months follow-up).
- La variabile dipendente è uno score di depressione (e.g. Beck Depression Inventory) e il trattamento è l'utilizzo di un farmaco versus nessun farmaco. Ci aspettiamo un miglioramento in tutte e due gruppi, ma vogliamo testare che il gruppo in treatment migliori più rapidamente

# Disegno a misure ripetute

- Abbiamo 2 gruppi - Control vs Treatment, misurati in 4 tempi diversi. I tempi sono: 1 (pretest), 2 (one month posttest), 3 (3 months follow-up), and 4 (6 months follow-up).

**96 osservazioni**  
**24 soggetti**

## Contingency Tables


Contingency Tables

time	group		Total
	1	2	
0	12	12	24
1	12	12	24
3	12	12	24
6	12	12	24
Total	48	48	96

# Disegno a misure ripetute: dati

- Data sono in “long format”

Ogni soggetto ha 4 righe



	subj	time	group	dv
1	1	0	1	296
2	1	1	1	175
3	1	3	1	187
4	1	6	1	192
5	2	0	1	376
6	2	1	1	329
7	2	3	1	236
8	2	6	1	76
9	3	0	1	309
10	3	1	1	238
11	3	3	1	150
12	3	6	1	123
13	4	0	1	222
14	4	1	1	60
15	4	3	1	82
16	4	6	1	85
17	5	0	1	150
18	5	1	1	271
19	5	3	1	250

# Mixed model


Traduciamo il disegno in un modello misto



- Effetti Fissi? Intercetta group,time, la loro interazione
- Effetti Random? Intercetta
- Clusters? Soggetto (subj)

# Variables



- Definisco le variabili

Mixed Model →

Dependent Variable  
→  dv

Factors  
→  time  
 group

Covariates  
→

Cluster variables  
→  subj 

Estimation      Confidence Intervals

☒ REML      ☒ Confidence intervals      Interval  %

Variable Cluster

# Modello

Fixed Effects

Components		Model Terms
time	→	time
group	→ ▾	group
		time * group

☒ Fixed Intercept

Fixed effects

Random Effects

Components		Random Coefficients
time   subj	→	Intercept   subj
group   subj		
time : group   subj		

☒ Correlated Effects

Random effects

# Risultati

- Interpretazione dei risultati

Modello

## Model Results

### Model Fit

Type	R <sup>2</sup>	df	LRT X <sup>2</sup>	p
Conditional	0.768	8	107.251	< .001
Marginal	0.554	7	101.043	< .001

[4]

Effetti random

### Random Components

Groups	Name	Variance	SD	ICC
subj	(Intercept)	2539	50.4	0.479
	Residual	2761	52.5	

Note. Number of Obs: 96 , Number of groups: subj 24

# Risultati

- Interpretazione dei risultati

F-tests per gli effetti fissi

Fixed Effect ANOVA

	F	Num df	Den df	p
time	45.14	3	66.0	< .001
group	13.71	1	22.0	0.001
time:group	9.01	3	66.0	< .001

Note. Satterthwaite method for degrees of freedom

- Per il momento ignoriamo la stima dei coefficienti



# Results: plot

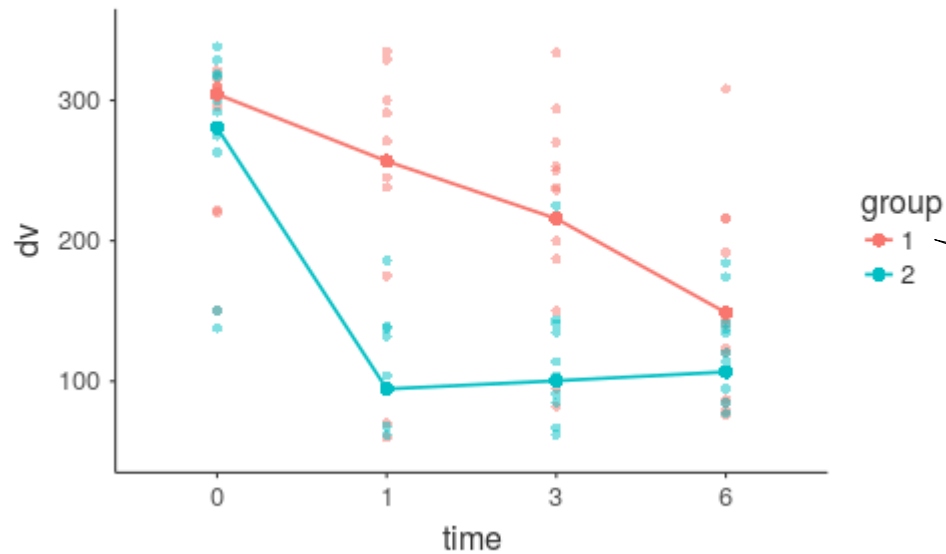
Fixed Effects Plots

Horizontal axis  
→ time

Separate lines  
→ group

Separate plots  
→

Fixed Effects Plots



Rosso è il gruppo di controllo

# Analisi sulla interazione

- Per analizzare ulteriormente l'interazione possiamo fare (come nel GLM):
- Simple effects: Testare se l'effetto di tempo è presente in ognuno dei gruppi
- Trend analysis: Testare dei trend specifici nelle nostre medie
- Post-hoc test: confronto delle medie tutto contro tutto


# Simple effects

- Chiediamo di stimare gli effetti ti tempo in ogni gruppo

▼ | Simple Effects


→

Simple effects variable

 time

→

Moderator

 group

→

Breaking variable

# Simple effects

- Chiediamo di stimare gli effetti ti tempo in ogni gruppo

## Simple Effects ANOVA

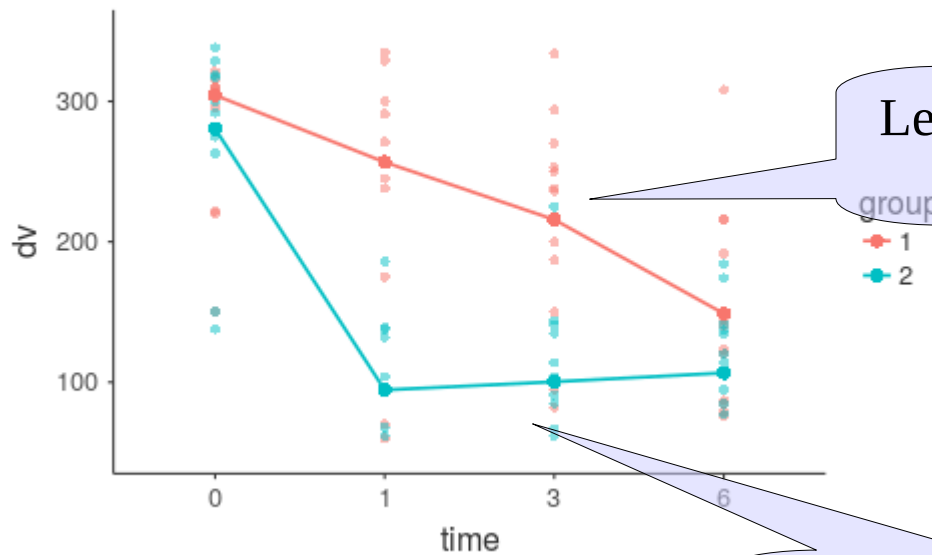
Simple effects of time

Effect	Moderator Levels	df Num	df Den	F	p
time	group at 1	3.00	66.0	18.9	< .001
time	group at 2	3.00	66.0	35.3	< .001

In entrambi i gruppi le medie cambiano nel tempo

# Results: plot

Fixed Effects Plots



Le medie rosse mostrano  
un effetto di tempo

Le medie verdi mostrano  
un effetto di tempo

# Ricapitolando

- Dunque, i disegni a misure ripetute possono essere analizzati come qualunque altro disegno “Anova”, ma deve essere modellata la componente individuale che cambia da soggetto a soggetto
- Ciò consente di applicare tutte le conoscenze dell'ANOVA/Regressione al caso delle misure ripetute
- I modelli misti consentono dunque di stimare modelli a misure ripetute combinandoli con altre strutture complesse dei dati

# Effetti non lineari nel tempo: The Individual Growth Model

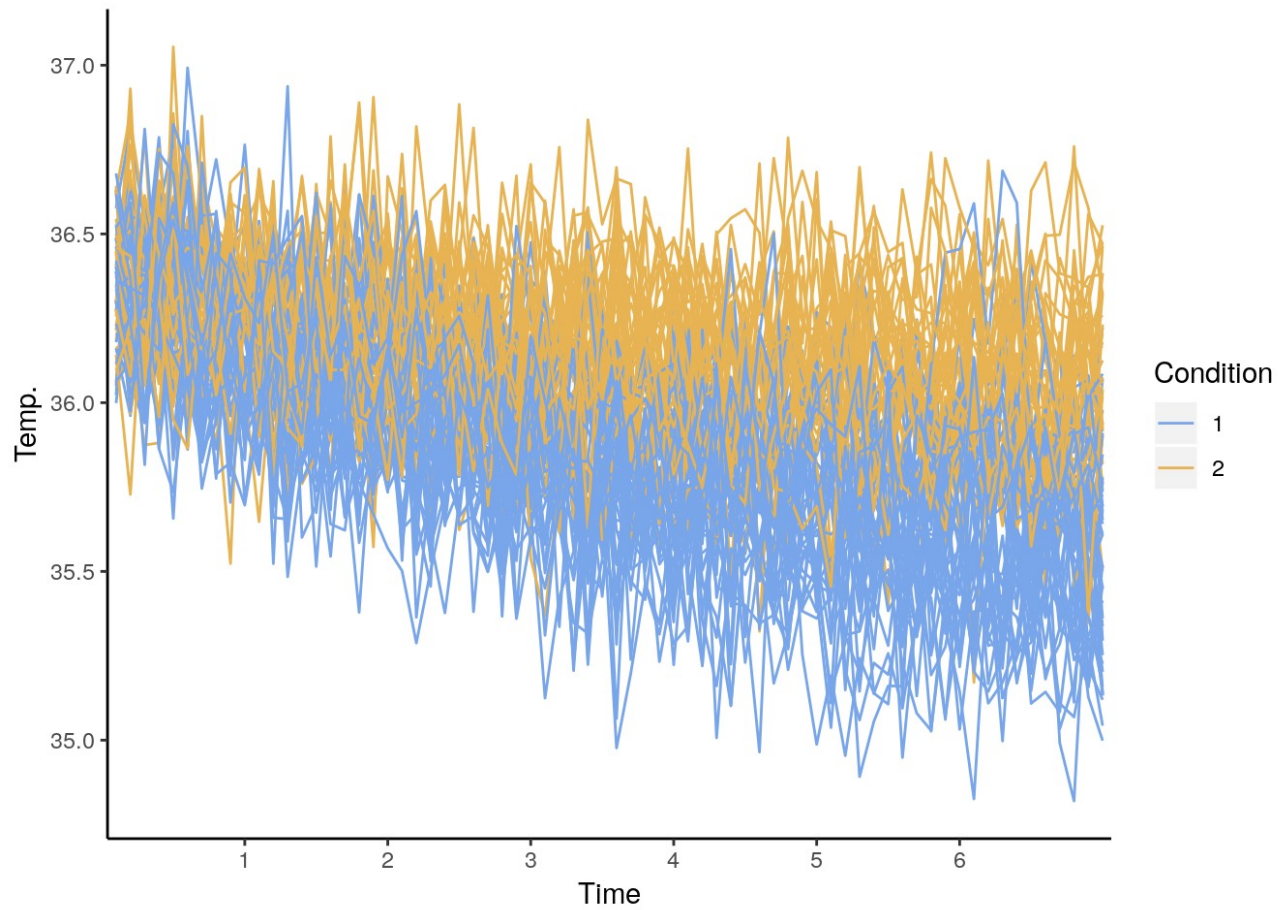
# Esempio

- Immagina il seguente scenario. Due procedure per abbassare la temperatura corporea dei partecipanti all'esperimento vengono testate. Le due procedure vengono somministrate a due gruppi diversi tra loro. Identifichiamoli come condizione 1 e condizione 2. La temperatura corporea di ciascun partecipante viene misurata per circa 6 minuti ogni 6 secondi. Il tempo è registrato in decimi di minuto (6 secondi = 0,1, 12 secondi = 0,2, ecc.). Vogliamo stabilire se la temperatura diminuisce nel tempo e se la diminuzione è diversa nelle due condizioni.



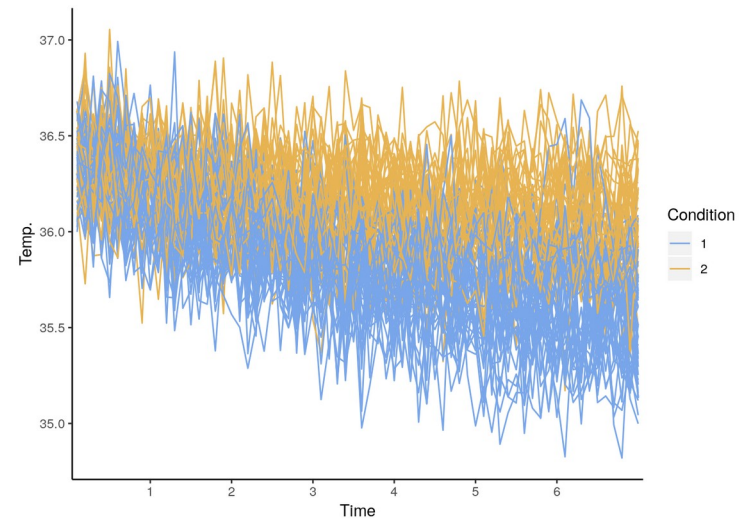
# Esempio

● I dati



# Caratteristiche del disegno

- È un disegno a misure ripetute.
- La variabile a misure ripetute è continua (tempo).
- Gli effetti non possono essere solo lineari (altrimenti le persone morirebbero!). Ogni partecipante può mostrare un diverso pattern di diminuzione della temperatura.



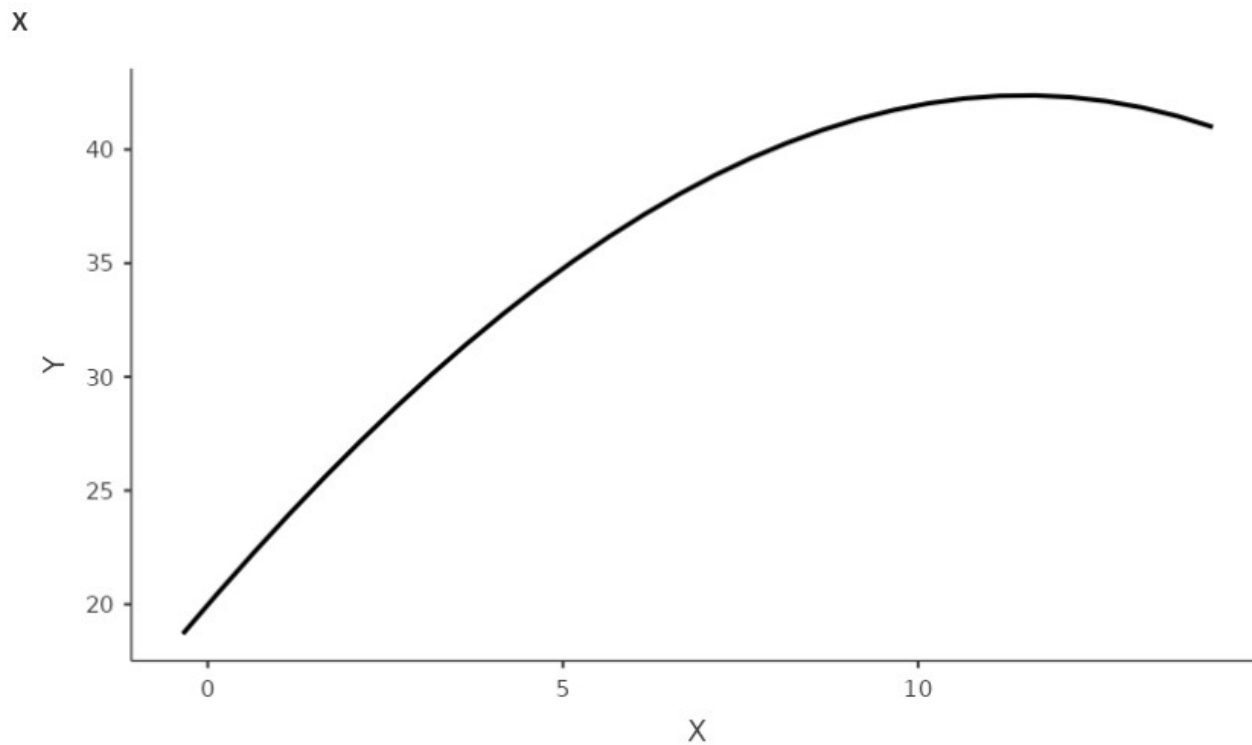
# Caratteristiche del disegno

- È un disegno a misure ripetute: **modello misto**.
- La variabile a misure ripetute è **continua (tempo)**: nessun problema.
- Gli effetti non possono essere solo lineari: abbiamo bisogno di **effetti quadratici** (o superiori).
- Ogni partecipante può mostrare un diverso pattern di diminuzione della temperatura: **ogni effetto deve essere lasciato variare tra i partecipanti**.

$$\hat{y}_{it} = a + b_{1i} \cdot x_{it} + b_{2i} \cdot x_{it}^2 + \dots$$

# Effetti non lineari

- In qualsiasi modello lineare, le trend non lineari possono essere stimati per gli effetti delle variabili indipendenti continue.



# Effetti non lineari

- I **trend** sono aggiunte al modello come potenze della variabile indipendente.

$$\hat{y} = a + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 x^3 \dots$$

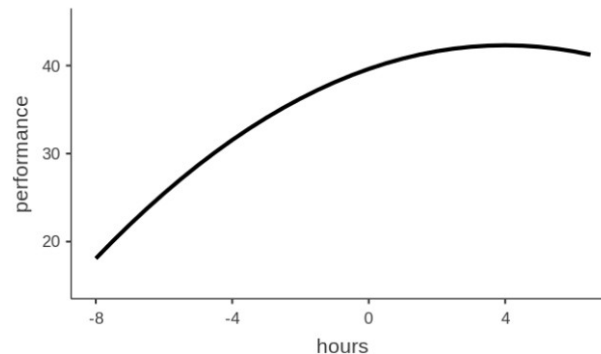
linear

quadratic

cubic

Ogni potenza rappresenta una tendenza, come nell'analisi dei trend polinomiali.

Plots



# Curvilinear effects

- We can evaluate the presence of a particular trend by checking the effect size (and significance) of the coefficient associated with it

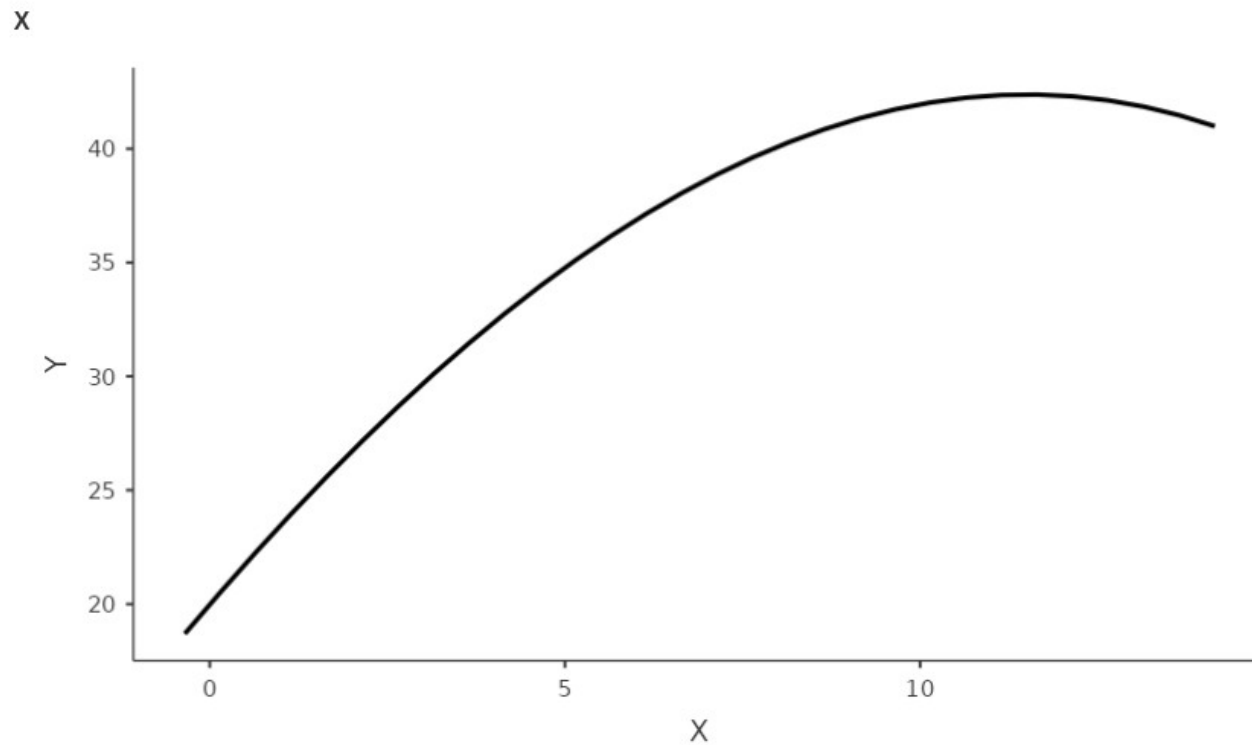
$$\hat{y} = a + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 x^3 \dots$$

Parameter Estimates (Coefficients)

Names	Estimate	SE	95% Confidence Intervals		$\beta$	df	t	p
			Lower	Upper				
(Intercept)	39.623	0.664	38.306	40.941	0.247	96	59.683	< .001
X	1.398	0.310	0.783	2.014	0.641	96	4.508	< .001
X <sup>2</sup>	-0.169	0.041	-0.250	-0.088	-0.250	96	-4.139	< .001
X <sup>3</sup>	-0.002	0.010	-0.023	0.018	-0.010	96	-0.204	0.839

# Effetti non lineari nel tempo

- Questo è particolarmente importante quando si trattano gli effetti del tempo, perché gli effetti del tempo sono raramente lineari.



# Building the model

Traduciamo questo nel modello misto standard.

$$\hat{y}_{it} = a + b_{1i} \cdot x_{it} + b_{2i} \cdot x_{it}^2 + \bar{b}_{1i} \cdot x_{it} + \bar{b}_{2i} \cdot x_{it}^2$$


The diagram illustrates the mapping of coefficients in the equation to random and fixed components. Two light blue rounded rectangular boxes are positioned below the equation. The box on the left is labeled "Random coefficients" and has two arrows pointing to the terms  $b_{1i} \cdot x_{it}$  and  $b_{2i} \cdot x_{it}^2$ . The box on the right is labeled "Fixed coefficients" and has two arrows pointing to the terms  $\bar{b}_{1i} \cdot x_{it}$  and  $\bar{b}_{2i} \cdot x_{it}^2$ .


- Effetti fissi: Intercetta, Effetti lineari del tempo, Effetti quadratici del tempo
- Effetti random: Intercette casuale, Effetti lineari del tempo, Effetti quadratici del tempo.
- Cluster: Partecipanti:




# Jamovi GAMLj


- Ruole delle variabili



Mixed Model 

 cond

Dependent Variable  
→  y

Factors  
←

Covariates  
→  timebin

Cluster variables  
→  subj 

**Estimation**      **Confidence Intervals**

☒ REML      ☒ Confidence intervals      Interval  %

# Jamovi GAMLj

- Fixed effects

Fixed Effects

Components

Component	Order
timebin	2

Model Terms

Model Term
timebin
timebin <sup>2</sup>

☒ Fixed Intercept

We change the order of the effect here

# Jamovi GAMLj

- Random effects

Random Effects

Components

Random Coefficients

- Intercept | subj
- timebin | subj
- timebin<sup>2</sup> | subj

Effects correlation

Tests

☒ Correlated

☐ Not correlated

☐ Correlated by block

☐ LRT for Random Effects

Ogni partecipante ha la sua  
curva (linear+quadratic)

# Jamovi GAMLj

- Varianze dei Random coefficients

Random Components

Groups	Name	SD	Variance	ICC
subj	(Intercept)	0.19480	0.03795	0.439
	timebin	0.04104	0.00168	
	timebin <sup>2</sup>	0.00696	4.84e-5	
Residual		0.22031	0.04854	

Note. Number of Obs: 5600 , groups: subj , 80

Ogni trend mostra una certa varianza, quindi è stato bene permettere loro di variare.

# Jamovi GAMLj

- Fixed coefficients

In media, la temperatura  
scende

Fixed Effects Parameter Estimates

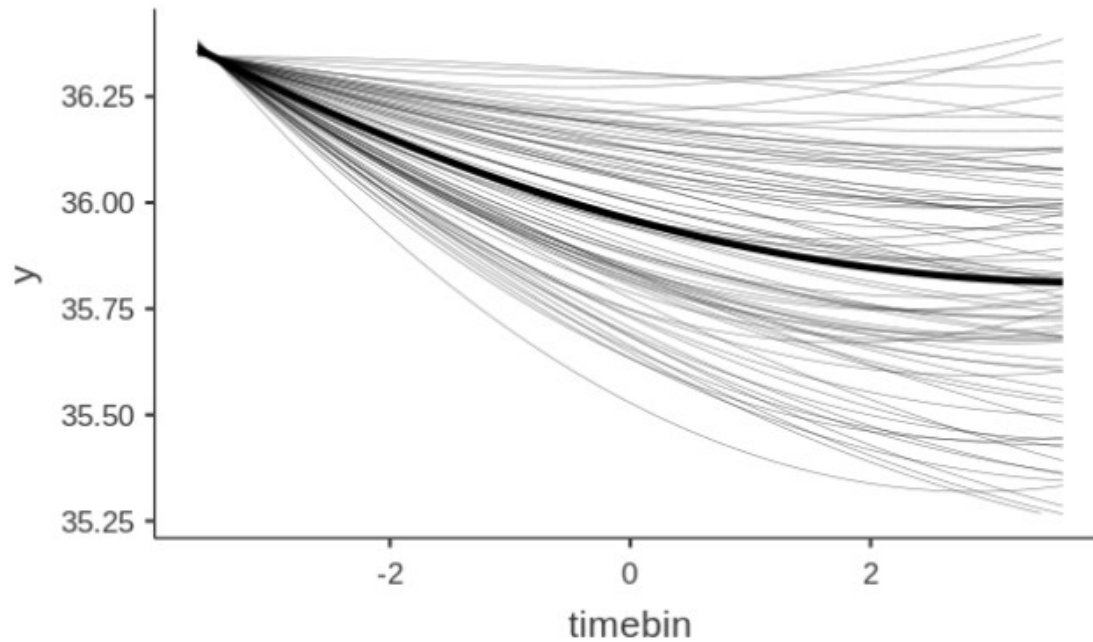
Names	Estimate	SE	95% Confidence Interval		df	t	p
			Lower	Upper			
(Intercept)	35.95982	0.02222	35.91627	36.0034	79.0	1618.15	< .001
timebin	-0.07630	0.00481	-0.08573	-0.0669	79.1	-15.85	< .001
timebin <sup>2</sup>	0.00984	0.00112	0.00764	0.0120	88.1	8.78	< .001

In media, le curva delle  
temperatura si incurva

# Jamovi GAMLj

- Plot

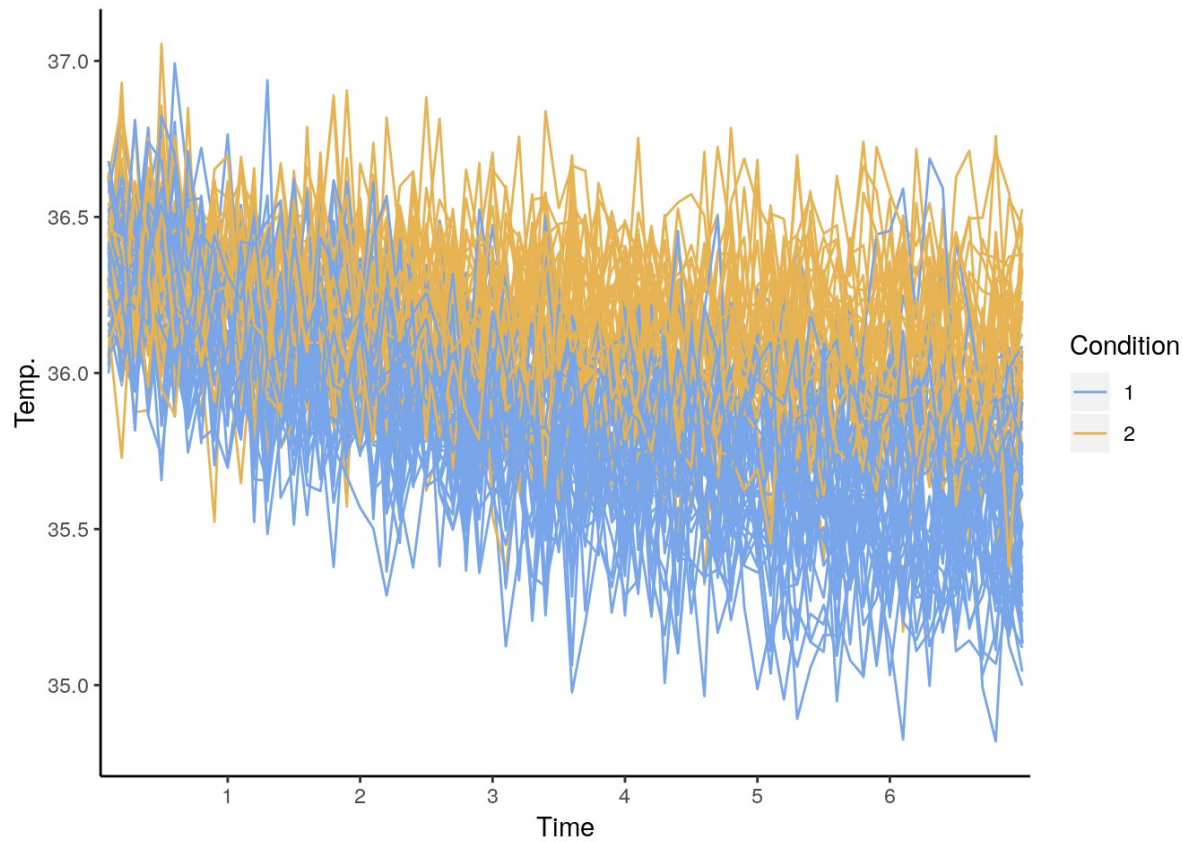
Effects Plots



The Individual Growth Model


# Interazione

- Possiamo inserire la condizione per vederne gli effetti




# Interazione

- Aggiungiamo condition

Mixed Model 


→

Dependent Variable

 y


→

Factors

 cond



→

Covariates

 timebin

→

Cluster variables

 subj 

**Estimation**      **Confidence Intervals**

☒ REML      ☒ Confidence intervals      Interval  %



# Interazione

- Aggiungiamo condition e tutte le possibili interazioni

▼ Fixed Effects

Components

cond	1
timebin	2

Model Terms

timebin  
cond  
timebin<sup>2</sup>  
cond \* timebin  
cond \* timebin<sup>2</sup>

☒ Fixed Intercept

# Interazioni

- Non modificare gli effetti casuali: la condizione non è un fattore a misure ripetute, quindi i suoi effetti non variano da soggetto a soggetto.

▼ Random Effects

Components

cond | subj  
cond : timebin<sup>2</sup> | subj

Random Coefficients

←  
→  
Intercept | subj  
timebin | subj  
timebin<sup>2</sup> | subj

Effects correlation

☒ Correlated  
☐ Not correlated  
☐ Correlated by block

Tests

☐ LRT for Random Effects

# Interazioni

- Results

Effetto principale di "cond": la temperatura media è diversa nei due gruppi.

Fixed Effects Parameter Estimates

Names	Effect	Estimate	SE	95% Confidence Interval		df	t	p
				Lower	Upper			
(Intercept)	(Intercept)	35.97249	0.01171	35.94954	35.99545	78.1	3071.32	< .001
timebin	timebin	-0.07404	0.00346	-0.08083	-0.06725	78.5	-21.37	< .001
cond1	2 - 1	0.33786	0.02342	0.29195	0.38378	78.1	14.42	< .001
timebin <sup>2</sup>	timebin <sup>2</sup>	0.00943	9.42e-4	0.00758	0.01127	102.3	10.01	< .001
timebin * cond1	timebin * 2 - 1	0.06014	0.00693	0.04656	0.07372	78.5	8.68	< .001
cond1 * timebin <sup>2</sup>	2 - 1 * timebin <sup>2</sup>	-0.01105	0.00188	-0.01474	-0.00736	102.3	-5.87	< .001

Interazione cond\*linear: i due gruppi mostrano tendenze lineari diverse.

Interazione cond\*quadratic: i due gruppi mostrano diverse curvature.

# Visualizziamo i risultati

- plot

Plots

→

Horizontal axis

timebin

→

Separate lines

cond

→

Separate plots

Display

☒ None

☐ Confidence intervals

Interval  %

☐ Standard Error

Plot

☐ Observed scores

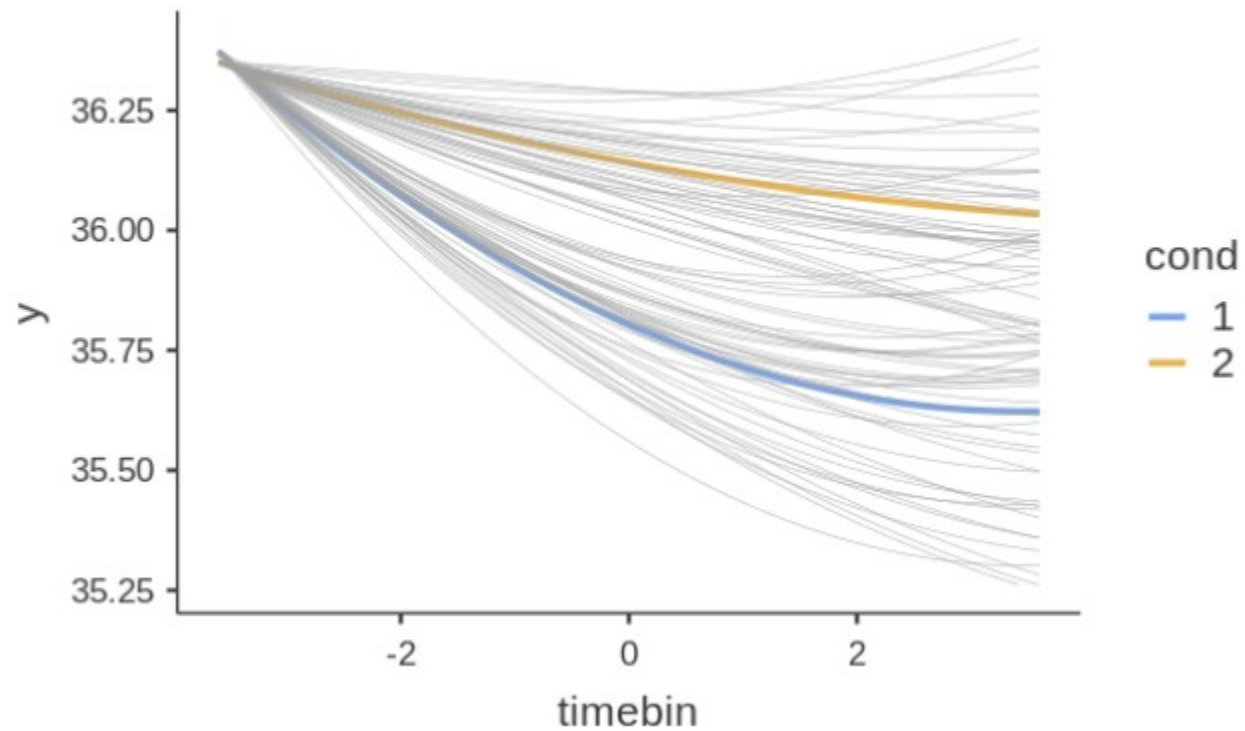
☐ Y-axis observed range

☒ Random effects

# Establish the effect of condition

- plot

Effects Plots



END  
SCHOOL  
ZONE

**The end**