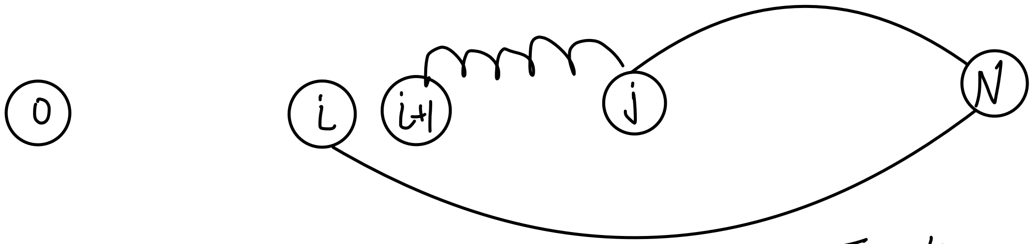
5. dp is symmetric, scine $E(a,b)=E(b,a)$

(a)

$$dp(i,j)=\begin{cases} \text{Null} & , i=j \\ dp(j,i) & , i>j \\ E(0,j) & , i=0, j=1 \\ dp(i,j-1)+E(j-1,j) & , i+1<j \\ \min\limits_{0\le k<i}\left(E(k,j)+dp(k,k+1)+\sum\limits_{k<l<i} E(l,l+1)\right) & , \text{else } (i+1=j) \end{cases}$$

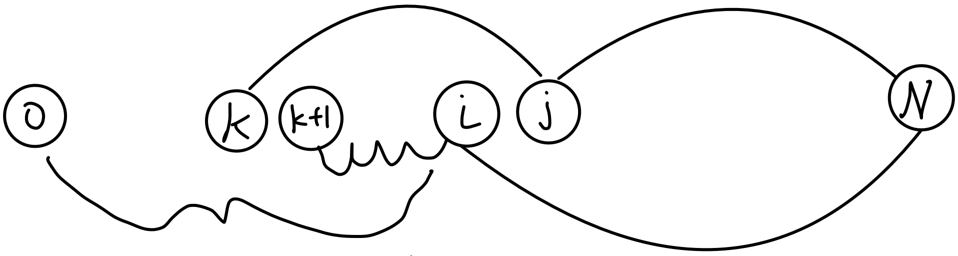
Case 1 : $j-i>1$



由於 $i+1$ 到 j 每一步都要走

所以從 $dp(i,i+1)$ 開始往後每步算一次就好

Case 2 : $j-i=1$

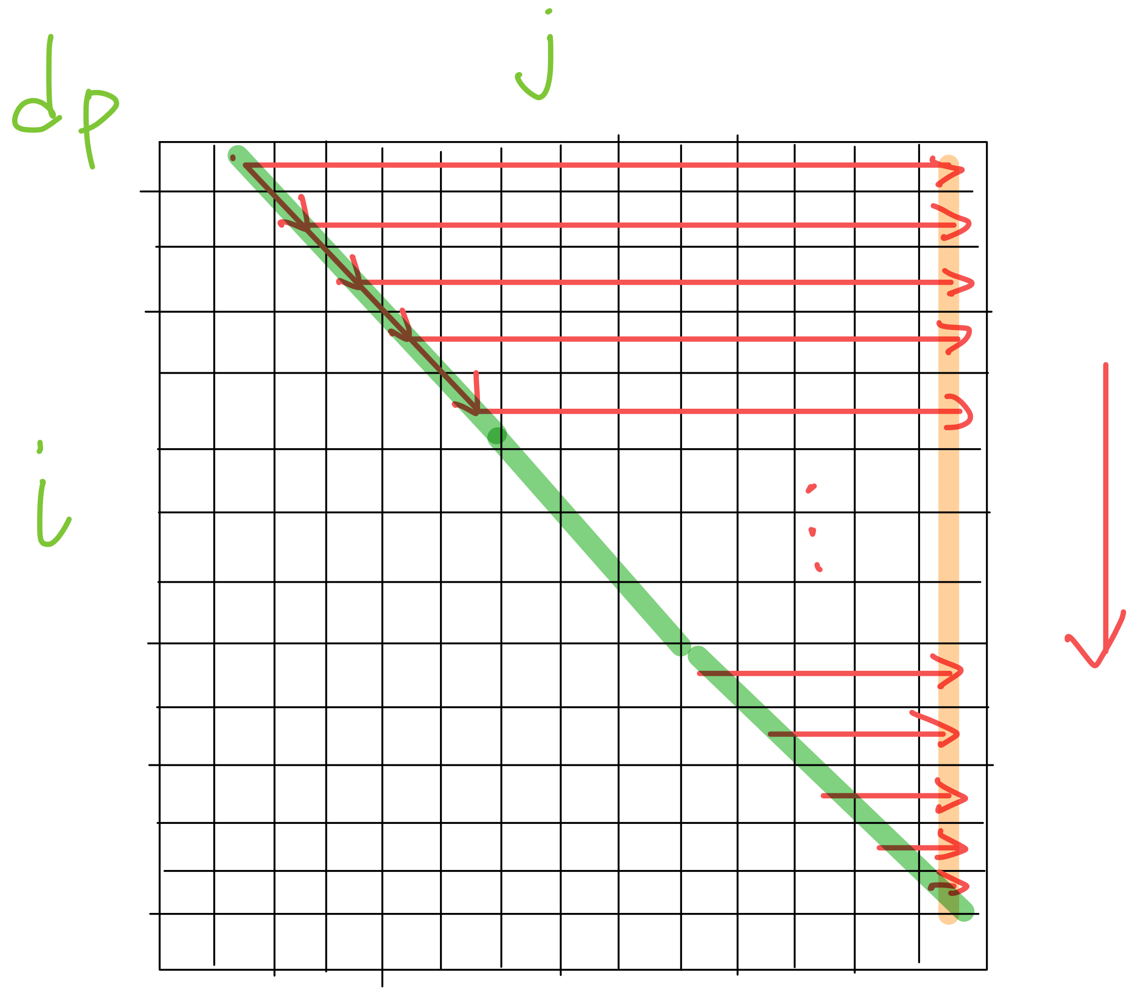


i 種可能

找出 j 的前一步 k，使得（$E(j,k)$，i 到 $k+1$ 每步都走，加上 $dp(k,k+1)$）最小的 k 就好

（$i \sim k+1$ 的 sum 可以使用 prefix sum 的方法讓每次都是 $O(1)$）

Time & Space complexity



每一層需 i 的時間找 k

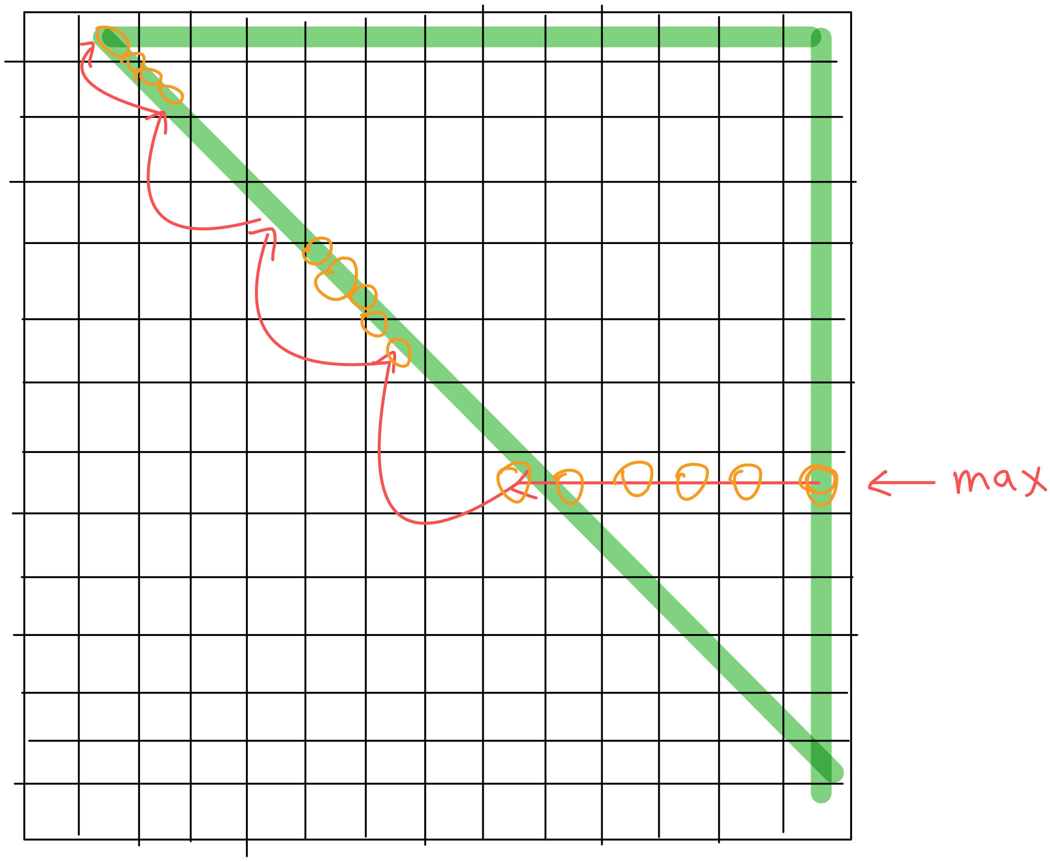
，N-i 的時間掃過整層

$(i+N-i) \times N$ 層 $= O(N^2)$ for time complexity

(2) 只需要存 ● ● 所畫的部份，其它都不會在後面用到 ⇒ $O(N)$ for space complexity

(3) 紀錄每次 case 2 找到的 k

再由以下路徑，每單數的箭頭把經過的點加入 S_{go} (前往 N 的路) 其它的為 S_{left}



(b)

(1) Let $Sum\_h = \sum D_n$

(2) $dp(i,j,h) =$

$$
\begin{cases}
\text{Null} & , i=j \\
dp(j,i,Sum\_h-h) & , i>j \\
E(0,j) & , i=0, j=1 \\
dp(i,j-1,h-D_j)+E(j-1,j) \text{ if } D_j<h, \text{else } -1 & , i+1<j \\
\min\limits_{0\le k<i, D_k<h}\left(E(k,j)+dp(k,k+1,h-D_k)+\sum\limits_{k<l<i} E(l,l+1)\right) & , i+1=j \\
-1 & , h\le 0
\end{cases}
$$

只需在原DP上每個點紀錄H個值就好, Time complexity $O(HN^2)$

Space complexity $O(HN)$

6.

(1) 9814121 0 under no assumption

981120 under assumption 3

(2) 由大到小串接 (排序 $O(n\log n)$)

(3) 由大到小串接 (比較高→低位，若比完其中一位數較少的，將它重覆一次再繼續比。e.g.

123 123 123124 ✓

123 123 123122 ✓

(4) 統計 0, 3, 6, 9 個數 in arr

串接 9 * arr[9], 6 * arr[6], 3 * arr[3], 0 * arr[0]

(5) 98653

(6)

define $a \oplus b = \begin{cases} a \times 10^{\text{digit of } b} + b & \text{, else} \\ \text{null} & \text{, } a=\text{null or } b=\text{null} \end{cases}$

$P_1 \sim P_n \quad M_1 \sim M_n$

$dp(i,j,k) =$ maximum satisfying value for $P_i \sim P_n$, $M_j \sim M_n$, at most k courses

$$\begin{cases} \max(P_i, M_j, dp(i+1,j,k), dp(i,j+1,k)) & , k=1 \\ \max(P_i \oplus dp(i+1,j,k-1), M_j \oplus dp(i,j+1,k-1), dp(i+1,j,k), dp(i,j+1,k)) & , k>1 \text{ and } i \le n \text{ and } j \le n \\ \text{null} & , (i>n \text{ or } j>n) \text{ and } k>1 \end{cases}$$

e.g. $P_i = [3,4,6,5,0]$, $M_i = [9,0,5,8,3]$, $k=5$

$k=1$

	3	4	6	5	0
9	9	9	9	9	9
0	8	8	8	8	8
5	8	8	8	8	8
8	8	8	8	8	8
3	6	6	6	5	3

and it's clear that (we fill $n \times n$ table and $O(1)$ for each slot) for k times

$\Rightarrow O(kn^2)$

$k=2$

	3	4	6	5	0
9	98	98	98	98	98
0	86	86	86	85	83
5	86	86	86	85	83
8	86	86	86	85	83
3	65	65	65	53	30

$k=3$

	3	4	6	5	0
9	986	986	986	985	983
0	853	853	853	853	830
5	853	853	853	853	830
8	865	865	865	853	830
3	653	653	653	530	null

k=4

	3	4	6	5	0
9	9865	9865	9865	9853	9830
0	8653	8653	8653	8530	5830
5	8653	8653	8653	8530	5830
8	8653	8653	8653	8530	null
3	6530	6530	6530	null	null

k=5

	3	4	6	5	0
9	98653	98653	98653	98530	95830
0	86530	86530	86530	58530	05830
5	86530	86530	86530	58530	null
8	86530	86530	86530	null	null
3	46530	46530	null	null	null