MAT1a Hjemmeopgave 1

s255792

September 28, 2025

Problem a. Afgør om følgende to logiske udsagn er logisk ækvivalente: $(P \Leftrightarrow Q) \land P$ og $P \Rightarrow Q$.

Betragt følgende sandhedstabel for de logiske udsagn

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$(P \Leftrightarrow Q) \land P$	$P \Rightarrow Q$
T	T	T	T	T
F	T	F	F	T
T	F	F	F	F
F	F	T	F	T

Da de to logiske udsagn ikke har de samme sandhedsværdier, er de ikke logiske ækvivalente $\therefore (P \Leftrightarrow Q) \land P \not\equiv P \Rightarrow Q$

Problem b. Givet funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med forskriften

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - 3 * |x - 1|$$

1. Afgør om funktionen er injektiv.

Funktionen er ikke injektiv, da to værdier i domænet -1 og 1 begge mapper til den samme værdi i codomænet

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - 3 * (-1) + 2 - 3 * |-2| = 0 \\ f(1) &= 1^2 - 3 * 1 + 2 - 3 * |1 - 1| = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

2. Beregn funktionens værdimængde.

Funktionen kan opdeles mellem 2 x-værdier med definitionen af den numeriske værdi. Den negative $(x < 1)$ kan udregnes

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - 3x + 2 - 3 * |x - 1| \\ &= x^2 - 3x + 2 + 3x - 3 \Rightarrow x^2 - 1 \\ f_1'(x) &= 2x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_1(0) &= -1 \Rightarrow Vm(f_1) = [-1, \infty[\end{aligned} \tag{2}$$

Dvs. værdimængden for $(x < 1)$ er $Vm(f_1) = [-1, \infty[$. Det gælder tilmed for $(x \geq 1)$ at

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= x^2 - 3x + 2 - 3 * |x-1| \\
&= x^2 - 6x + 5 \\
f_2'(x) &= 2x - 6 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \\
f_2(3) &= 3^2 - 6 * 3 + 5 = -4 \\
Vm(f_2) &= [-4, \infty[= \mathbb{R}_{\geq -4}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Da $Vm(f_1) \subseteq Vm(f_2)$, er den endelige værdimængde $Vm(f) = [-4, \infty[= \mathbb{R}_{\geq -4}$

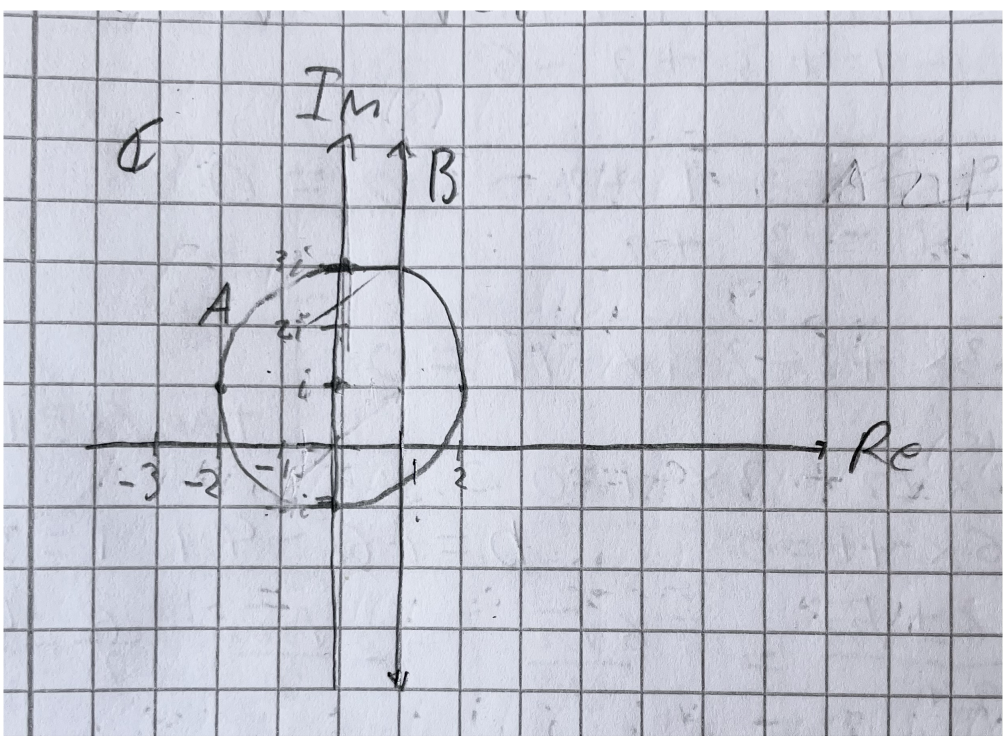
Problem c. Der opgives to delmængder af de komplekse tal.

1. Indtegn mængderne A og B i den komplekse talplan.

Mængden B kan indtegnes på den komplekse talplan som alle komplekse tal, der har en realdel lig 1. Vi betragter mængden $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 2 \}$. Antag $z = a + bi$ hvor $z \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
|a + bi - i| = 2 \Leftrightarrow |a + (b-1)i| = 2 \\
\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = 2 \Rightarrow a^2 + (b-1)^2 = 2^2 \\
\Leftrightarrow (a+0)^2 + (b-1)^2 = 2^2
\end{aligned} \tag{4}
$$

Dermed kan mængden A indtegnes som en cirkel med radius 2 med centrum i (0,1), se Billede 1



Billede 1: Plot af mængderne A og B i den komplekse talplan.

2. Beregn A ∩ B.

Ud fra definitionen på fællesmængden gælder $A \cap B = \{ z \in \mathbb{C} \mid (|z - i| = 2) \wedge (Re(z) = 1) \}$. Hvor det gælder, at $z = a + bi$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$, kan følgende skrives da vi kender realdelen

$$\begin{aligned} |1 + bi - i| = 2 \Leftrightarrow |1 + (b-1)i| = 2 \Leftrightarrow \\ \sqrt{1^2 + (b-1)^2} = 2 \Rightarrow 1^2 + (b-1)^2 = 2^2 \Leftrightarrow \\ b^2 - 2b - 2 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Hvorved diskriminanten kan udregnes fra dette andengradspolynomie og finde løsninger for imaginærdelen

$$\begin{aligned} D &= (-2)^2 - 4 * 1 * (-2) = 12 \\ b &= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{2} \\ \frac{\sqrt{12}}{2} &= \frac{\sqrt{4} * \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ b &= 1 \pm \sqrt{3} \end{aligned} \tag{6}$$

Dvs. $A \cap B = \{ 1 + (1 + \sqrt{3})i, 1 + (1 - \sqrt{3})i \}$

Problem d. Vis at det komplekse tal $(1 - i)^{80}$ er et reelt tal.

Vi kan bruge polære form til at udregne det komplekse tal. Derfor findes først modulus og argumentet for at opsætte det på polær form således

$$\begin{aligned} |1 - i| &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \arg(1 - i) &= \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned} \tag{7}$$

Dvs. på polære form: $\sqrt{2} * e^{-i\pi/4}$

Vi kan nu indsætte den polære form ind i det komplekse tal og udregne

$$\begin{aligned} (1 - i)^{80} &= (\sqrt{2} * e^{-i\pi/4})^{80} \\ &= \sqrt{2}^{80} * e^{-i80\pi/4} = \sqrt{2}^{80} * e^{-i20\pi} \\ &= \sqrt{2}^{80} * (\cos(20\pi) + \sin(20\pi)i) \\ &= \sqrt{2}^{80} * (\cos(2\pi) + \sin(2\pi)i) \\ &= 2^{40} * (1 + 0i) \\ &= 2^{40} * 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Da 2^{40} er et reelt tal, er det hermed vist. $\square$

Problem e. Afgør om følgende udsagn er sande:

1. $Arg(z) = \pi \Rightarrow z \in \mathbb{R}_{<0}$
Hvis hovedargumentet af z er π implikerer det af z er i de negative reelle tal. Dette udsagn er sandt, da vinklen i det komplekse talplan vil ligge på den negative reelle akse siden $Arg(z) \in]-\pi, \pi]$.

2. $z \in \mathbb{R} \Rightarrow Arg(z) = 0$
Hvis z er et reelt tal, implikerer det at hovedargumentet af z er lig 0. Dette er et falsk udsagn, da $Arg(z) = \pi$ hvor $z \in \mathbb{R}_{<0}$ og dermed ikke gælder for alle z, kun for $z > 0$.