Optimering i containerbranchen

Alexander, Magnus og Tao

9. oktober 2025

Generelt 0.

Vi er blevet hyret af et rederi til at minimere brændstofudgifterne med deres containerskibe på en angivet rute mellem Mombasa og Salalah. Dette er ruten som rederiet angiver

Havn	Forbrug til næste havn	Reserve (ved ankomst til)
Mombasa	700	1000 (start)
Zanzibar	1800	1200
Victoria	2200	1800
Salalah	2800	2800

Opgave 1. Hvilke betingelser er ikke opfyldt i den angivede løsning?

Vi starter med 1000 mt. Derefter bliver der påfyldt følgende

$$\begin{aligned} 1000 + 2000 + 2000 - 700 &= 4300 \text{ mt} \\ 4300 + 1000 + 1000 - 1800 &= 4500 \text{ mt} \\ 4500 + 1000 + 1000 - 2200 &= 4300 \text{ mt} \\ 4300 + 0 - 2800 &= 1500 \text{ mt} \end{aligned} \tag{1}$$

Betingelsen at der skal være 1000 mt. ved start i Mombasa er ikke opfyldt i denne løsning, da der er 1500 mt efter Salalah er sejlet tilbage til Mombasa.

Opgave 2.a. Er alle betingelser nu opfyldt i den rettede løsning?

Vi beregner på samme måde for at tjekke om betingelserne nu overholdes

$$\begin{aligned} 1000 + 2000 + 2000 - 700 &= 4300 \text{ mt} \\ 4300 + 1000 + 1000 - 1800 &= 4500 \text{ mt} \\ 4500 + 750 + 750 - 2200 &= 3800 \text{ mt} \\ 3800 + 0 - 2800 &= 1000 \text{ mt} \end{aligned} \tag{2}$$

Da alle reserver er overholdt, kan vi konkludere, at betingelserne nu er opfyldt.

Opgave 2.b. Hvor meget koster den rettede løsning selskabet?

Vi beregner omkostningen ved at multiplere prisen for påfyldning i en havn i med mængden der fyldes på i tank s

$$600 * (2000 + 2000) + 900 * (1000 + 1000) + 1100 * (750 + 750) = 5.850.000 \tag{3}$$

Dvs. denne løsning koster selskabet \$ 5.850.000.

Opgave 3. Skriv en funktion for omkostningen til brændstoffet ved brug af l_{is}.

Vi kan tage vores beregning fra 2.b og omskrive det til en funktion for omkostningen. Lad p_i være prisen per havn i. Nu kan vi bruge mængden påfyldt l_{is} således

$$\sum_{i=0}^{3} \sum_{s=1}^{2} p_i * l_{is} \qquad p \in \{600, 900, 1100, 1200\} \tag{4}$$

el.

$$obj := 600 * (l_{01} + l_{02}) + 900 * (l_{11} + l_{12}) + 1100 * (l_{21} + l_{22}) + 1200 * (l_{31} + l_{32})$$

Opgave 4. Forklar med ord følgende udtryk: $f_{is} \leq h_{is}, \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad s \in \{1, 2\}$

Brændstofsforbruget fra havn til havn, skal være lig med eller mindre end den mængde brændstof der befinder sig i tankene når vi forlader havnen.

Opgave 5. Beskriv med ord: $h_{is} = h_{i-1,s} + l_{is} - f_{i-1,s}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad s \in \{1, 2\}$

Mængden af brændstoffet i en given havn er lig mængden fra sidste havn, det der blev fyldt på i denne havn fratrukket det brændstof det blev brugt på turen fra sidste havn til nuværende havn.

Beskriv desuden med ord: $h_{0s} = h_{3s} + l_{0s} - f_{3s}$
Mængden af brændstof i Mombasa er lig mængden vi havde i Salalah og det brændstof vi fylder på i Mombasa, fratrukket mængden vi brugte på vej til Mombasa.

Opgave 6. Opstil kravene for brændstofmængden i tankene ved afgang fra Zanzibar og Victoria.

Vi opskriver kravene for mængden af brændstof. Den samlede mængde af brændstof skal være større end eller lig reserven ved ankomst til næste havn, og forbruget fra nuværende havn til næste havn. Vi opskriver for Zanzibar h_{1s} således

$$h_{11} + h_{12} \geq R_2 + F_1 = 1800 + 1800 = 3600 \tag{5}$$

Ligeledes for Victoria h_{2s}

$$h_{21} + h_{22} \geq R_3 + F_2 = 2800 + 2200 = 5000 \tag{6}$$

Dvs. den samlede mængde brændstof ved afgang fra Zanzibar skal være mindst 3600 mt., og for afgang fra Victoria skal mængden være mindst 5000 mt.

Opgave 7. Beskriv med ord: $f_{i1} + f_{i2} = F_i, \quad \forall i \in 1, 2, 3$

Det samlede brændstofforbrug fra havn til havn i begge tanke er det samme som det totale forbrug fra havn til havn.

Opgave 8. Skriv omkostningen, som I ønsker at minimere, i Python.

Vi refererer til filen "opg8.py", hvor vi har opskrevet omkostningen vi ønsker at minimere (objektiv funktionen) samt vores variabler for l_{is} ind.

Opgave 9. Indskriv betingelserne i Python.

Før vi kan indtaste vores begrænsninger bliver vi nødt til at tilføje alle vores variable. Vi tilføjer derfor vores variabler h_{is}, f_{is} og konstanter R_i, F_i. Nu kan vi lave en liste kaldt *cnsts* og indtaster alle vores begrænsninger som er opgivet. Se dette i den vedhæftede fil "opg9-10.py".

Opgave 10. Kør Python modellen og angiv værdierne h_{is}, f_{is} og l_{is}

Betragt vores værdier i denne tabel (og se evt. filen "opg9-10.py")

i, s	h_{is}	l_{is}	f_{is}
0,1	125000000000	125000000000	-125000000000
0,2	125000000000	125000000000	125000000000
1,1	250000000000	0	250000000000
1,2	-250000000000	-250000000000	-250000000000
2,1	5000	5000	5000
2,2	0	-1800	-2800
3,1	3800	3800	2800
3,2	0	-2800	0

Tabel 1: Værdier for h_{is}, l_{is}, og f_{is} for hver (i, s) i mt.

Opgave 11. Er løsningen lovlig?

Nej, løsningen er ikke lovlig, da h_{is} overskrider at tank 1 og tank 2 kun kan holde 3500 mt. hver. Derudover overskrider de alle, at der ikke kan være negativ mængde af brændstof.

Opgave 12. Angiv domænet for h_{is}. Behøver vi domæne for l_{is} og f_{is}?

Lad domænet for $h_{is} \in [0, 3500]$, hvor der mindst kan være 0 mt per tank, og maks være 3500 mt. per tank s. Dette gælder desuden for hver havn i.

For l_{is} og f_{is} behøver vi et domæne på $l_{is},\ f_{is} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Det gør vi, da man ikke fysisk kan dræne brændstof fra tanken i forbindelse med påfyldning (l_{is}). Ligeledes med behovet for brændstof f_{is}, som ikke kan være negativt, da man ikke fysisk kan bruge en negativ mængde brændstof, kun ≥ 0. Vi behøver dog ikke et maksimum for l_{is} og f_{is}, da det er muligt at fylde mere og mere i tanken, selv om den overflyder, samt det er muligt at have behov for ethvert (positivt) mængde brændstof.

Opgave 13. Tilføj domæne betingelserne til *cnsts*. Minimer med LPSolve og skriv omkostning samt værdierne for variablerne l_{is}, h_{is} og f_{is}.

Vi har nu tilføjet domænet til vores variabler, se den vedhæftede fil "opg12-13.py".

Omkostning: $ 5.110.000

i, s	h_{is}	l_{is}	f_{is}
0,1	3500	2500	0
0,2	3500	3500	700
1,1	3500	0	1000
1,2	3500	700	800
2,1	2500	0	1500
2,2	3500	800	700
3,1	1000	0	0
3,2	2800	0	2800

Tabel 2: Værdier for h_{is}, l_{is}, og f_{is} for hver (i, s) i mt.

Opgave 14. Tankene er placeret på hver sin side af skibet. For at skibet ligger lige i vandet, skal niveauet på tankene være ens, både ved ankomst og afgang fra havn. Tilføj dette til modellen.

Vi har nu tilføjet en constraint på, at for brændstof i tankene h_{is}, skal tank 1 og tank 2 være lig hinanden $h_{01} = h_{02}, ..., h_{31} = h_{32}$. Se den vedhæftede fil "opg14-15.py"

Opgave 15. Find løsningen og angiv værdierne for variablerne l_{is}, h_{is} og f_{is}. Sammenlign med løsningen fra opgave 13.

Vi har nu opdateret modellen, således at hhv. tank 1 og tank 2 skal være ens for hver havn i. Vi kan derfor finde løsningen ved at køre modellen. Betragt vores værdier her.

Omkostning: $ 5.110.000

i,s	h_{is}	l_{is}	f_{is}
0,1	3500	3500	700
0,2	3500	2500	0
1,1	3500	700	500
1,2	3500	0	1300
2,1	3000	0	1100
2,2	3000	800	1100
3,1	1900	0	1900
3,2	1900	0	900

Tabel 3: Værdier for h_{is}, l_{is}, og f_{is} for hver (i,s) i mt.

Når vi sammenligner med løsningen fra opgave 13, kan vi se at omkostningen er den samme. Endvidere kan vi se, at h_{is} er ens for begge tanke i de respektive havne hvilket ikke er tilfældet i s.13, hvilket gør, at forbruget f_{is} på de forskellige tanke ændres. Det gør også, at der fyldes 700 mt. på ved Zanzibar på tank 2 i stedet for tank 1. Vi kan opsummere, at når tankene skal være ens, ændrer det i hvilken tank der fyldes på, og hvilken tank der bruges til forbruget mellem havne, men resultatet og omkostningen er det samme.

Opgave 16. Hvor meget er sparet i forhold til deres oprindelige tankning?

Deres oprindelige tankning i Opgave 2, var \$ 5.850.000. Vi har derfor sparet dem \$ 740.000.

Opgave 17. Kan i på nogen måde reducere antallet af begrænsninger og/eller antallet af variable i jeres model?

Ja, da tankene 1 og 2 skal være ens, behøver vi ikke dele dem op i 2, her kan vi bare lave en enkelt tank og forholde os til den. Det ville fungere som en samlet tank, og vi ville få det samme resultat (se evt. den vedhæftede fil ”opg17.py”for vores reducerede model).

Opgave 19. Det er nu angivet at der er ekstra omkostninger hvis man tanker i en given havn. Tilføj dette til modellen.

Vi tilføjer de ekstra omkostninger til vores reducerede model, og får, at minimumsomkostningen bliver \$ 5.790.000 efter at have betalt afgift i 3/4 havne. Det er værd at bemærke, at der nu bliver påfyldt i Salalah i stedet for Victoria på grund af de ekstra omkostninger for at tanke i Victoria. Se den vedhæftede fil ”opg19.py”.