Hjemmeopgave 3, 23/11/25
Magnus Hvidtfeldt

a) Angiv en ordnet basis for W.

Der findes en ordnet basis ved at opstille de tre vektorer som søjler i en matrice, og finde dens reducerede trappeform således

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_1 + R_2 \\ 1/3 R_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - 9R_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_1 - 4R_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vores pivotelementer ligger i hhv. 1 og 2. søjle, så vi kigger på vores originale første og anden vektorer. Dvs. en ordnet basis er $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$.

b) Er L en lineær afbildning?

Der bruges definition 11.0.1 for at tjekke om det er en lineær afbildning.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad L(f+g) &= (f+g)' + (f+g) - 1 \\ &= f' + f + g' + g - 1 \\ &\neq L(f) + L(g) \end{aligned}$$

Så L er ikke en lineær afbildning.

Hjemmeopgave 3

c) Beregn afbildningsmatricen $_\beta[F]_\gamma$

Matricen kan skrives som ved Lemma 11.3.3

$$_\beta[F]_\gamma = \begin{bmatrix} \left[F\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)\right]_\beta & \left[F\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\right]_\beta \end{bmatrix}$$

Jeg beregner nu de lineære afbildninger

$$F\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 1\\-4 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \quad F\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 1\\-4 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$$

$$_\beta[F]_\gamma = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}_\beta & \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}_\beta \end{bmatrix}$$

Nu kan vi finde koordinaterne mht. β ved at opstille dem i en matrice med β således

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2-2R_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 5 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{1/5 R_2\\ R_1+2R_2}]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/5 & 11/5\\ 0 & 1 & -3/5 & 3/5 \end{array}\right]$$

DVS.

$$_\beta[F]_\gamma = \begin{bmatrix} 4/5 & 11/5\\ -3/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Hjemmeopgave 3

d) Beregn afbildningsmatricen ${}_\beta[M]_\beta$

Matricen kan skrives som

$${}_\beta[M]_\beta = \left[\left[M\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right) \right]_\beta \cdots \left[M\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right) \right]_\beta \right]$$

Nu beregnes de lineære afbildninger

$$M\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1&2\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}, \quad M\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2&0\\-2&0\end{bmatrix}$$

$$M\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0&1\\0&-1\end{bmatrix}, \quad M\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0&2\\0&-2\end{bmatrix}$$

Så

$${}_\beta[M]_\beta = \left[\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}_\beta \begin{bmatrix}2&0\\-2&0\end{bmatrix}_\beta \begin{bmatrix}0&1\\0&-1\end{bmatrix}_\beta \begin{bmatrix}0&2\\0&-2\end{bmatrix}_\beta \right]$$

Det er mht. en standardbasis, så matricen bliver hermed

$$\underline{\underline{{}_\beta[M]_\beta = \begin{bmatrix}1&2&0&0\\-1&-2&0&0\\0&0&1&2\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}}}$$

Hjemmeopgave 3

e) Bestem matricens egenværdier samt ordnede baser for egenrummene

Vi bestemmer først egenværdier vha. Sætning 12.1.1 fra lærebogen.

$$\det(\underline{A} - \lambda \cdot I_n) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)\Big((1-\lambda)(1-\lambda)-1\Big) = 0$$

Bemærk vores rødder i det karakteristiske polynomie er $\underline{\lambda = 2}$ og $\underline{\lambda = 0}$

Hvor $am(2) = 2$ og $am(0) = 1$

dvs. $gm(0) = 1$

Nu kan egenrummene beregnes

$$E_0 = \ker\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}R_1]{R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} a & = & 0 \\ b - c & = & 0 \\ c & = & c \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{E_0 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$$

$$E_2 = \ker\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) \xrightarrow[R_2 - R_1]{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{matrix} 2a - b - c & = & 0 \\ b & = & b \\ c & = & c \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{E_2 = \left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$$

Dvs. matricens egenværdier er $\lambda = 2$ og $\lambda = 0$, og de ordnede baser er

$$E_0 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{og} \quad E_2 = \left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Hjemmeopgave 3

f) Er vektoren $3 \cdot v_p$ en løsning til systemet?

Nej, $3 \cdot v_p$ er ikke en løsning til systemet, fordi det er inhomogent.

g) Angiv et underrum af V af dimension 5.

Vi er givet V af $\mathbb{R}^{3\times3}$. Det vides, at en udspænding af V altid giver et underrum, så lad

$$\text{span}_{\mathbb{R}^{3\times3}}\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)$$

Være et underrum af $\mathbb{R}^{3\times3}$. Dimensionen kan findes ved at finde underrummets ordnede basis. Da vores underrum kun består af lineært uafhængige vektorer, ved vi, at dimensionen af underrummet er 5.

Jeg vil gerne tjekke, om mit underrum af V passer, vha. Lemma 10.4.2

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&0\\0&0&0\end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix}f&g&h\\i&j&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+(k\cdot f) & b+(k\cdot g) & c+(k\cdot h)\\ d+(k\cdot i) & e+(k\cdot j) & 0\\ 0&0&0\end{bmatrix}$$

Vi ser at det befinder sig i underrummet, som var det, vi gerne ville tjekke.