MAT1a Hjemmeopgave 2

Magnus Chr. Hvidtfeldt

26. oktober 2025

Opgave a. Givet komplekse tal z_1 og z_2. Det oplyses at $Arg(z_1) = 2\pi/3$ og $Arg(z_2) = 5\pi/6$. Vis at $z_1 z_2$ er et rent imaginært tal.

Det gælder, at $|z_1 z_2| = |z_1| * |z_2|$ samt at $\arg(z_1 * z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$. Antag nu, at $z_1 = r * e^{i2\pi/3}$ og $z_2 = d * e^{i5\pi/6}$. Derfor kan vi udregne

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r * d \\ \arg(z_1 z_2) &= \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Da vores argument ligger på den imaginære akse, er $z_1 z_2$ et rent imaginært tal.

Opgave b. Find to forskellige løsninger til ligningen $e^z = 2 - 2i$.

Vi kan bruge Lemma 4.6.1 i lærebogen til at finde to forskellige løsninger således

$$\begin{aligned} |w| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} \\ \text{Arg}(w) &= \arctan(\frac{-2}{2}) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned} \tag{2}$$

Der kan nu findes to løsninger således

$$\begin{aligned} z &= \ln(\sqrt{8}) + (-\frac{\pi}{4} + p2\pi)i, \quad p \in \mathbb{Z} \\ z_1 &= \ln(\sqrt{8}) - \frac{\pi}{4}i \\ z_2 &= \ln(\sqrt{8}) + (-\frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4})i = \ln(\sqrt{8}) + \frac{7\pi}{4}i \end{aligned} \tag{3}$$

To givet løsninger er $z_1 = \ln(\sqrt{8}) - \pi/4i$ og $z_2 = \ln(\sqrt{8}) + 7\pi/4i$.

Opgave c.1. Vis ved hjælp af divisionsalgoritmen at polynomiet $Z^2 - 3Z + 2$ er en faktor i polynomiet $2Z^4 - 6Z^3 + 8Z^2 - 12Z + 8$.

Divisionsalgoritmen kan bruges til at bestemme om polynomiet er en faktor. Hvis vi får 0 i rest, er den en faktor.

$$
\begin{array}{llll}
\underline{Z^2-3Z+2\,|} & 2Z^4-6Z^3+8Z^2-12Z+8 & \underline{|\,2Z^2+4} \\
& \underline{2Z^4-6Z^3+4Z^2} & \\
& 0 \quad +0 \qquad +4Z^2 & \\
& \qquad\qquad\quad \underline{4Z^2-12Z+8} & \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array} \tag{4}
$$

Da vi får 0 i rest, er $Z^2 - 3Z + 2$ en faktor i polynomiet.

Opgave c.2. Find nu samtlige rødder i polynomiet $2Z^4 - 6Z^3 + 8Z^2 - 12Z + 8$.

Rødderne kan findes ved at løse de to andengradspolynomier. Jeg finder først løsning til andengradspolynomiet $Z^3 - 3Z + 2$ således

$$
\begin{aligned}
D &= (-3)^2 - 4 * 2 = 1 \\
z_1 &= \frac{3+\sqrt{1}}{2*1} = 2 \\
z_2 &= \frac{3-\sqrt{1}}{2*1} = 1
\end{aligned} \tag{5}
$$

Vi kan nu finde en løsning til andengradspolynomiet $2Z^2 + 4$

$$
\begin{aligned}
D &= (0)^2 - 4 * 2 * 4 = -32 \\
z_1 &= \frac{i\sqrt{32}}{2*2} = \frac{\sqrt{8}*\sqrt{4}}{4}i = \frac{2\sqrt{8}}{4}i = \frac{\sqrt{8}}{2}i \\
z_2 &= \frac{-i\sqrt{32}}{2*2} = \frac{-\sqrt{8}*\sqrt{4}}{4}i = \frac{-2\sqrt{8}}{4}i = \frac{-\sqrt{8}}{2}i
\end{aligned} \tag{6}
$$

Dvs. $\{2, 1, \sqrt{8}/2i, -\sqrt{8}/2i\}$ er rødder i polynomiet.

Opgave d.1. Vis at tallet -2 er en rod i polynomiet $Z^4 + 4Z^3 + 5Z^2 + 4Z + 4$.

Vi kan indsætte $Z = -2$ for at tjekke om det er en rod i polynomiet

$$
(-2)^4 + 4(-2)^3 + 5(-2)^2 + 4(-2) + 4 = 16 - 32 + 20 - 8 + 4 = 40 - 40 = 0 \tag{7}
$$

Da vi får 0 når -2 indsættes i polynomiet, er det dermed en rod i polynomiet.

Opgave d.2. Beregn multipliciteten af roden -2 i polynomiet $Z^4 + 4Z^3 + 5Z^2 + 4Z + 4$.

Vi indser, at roden -2 kan skrives således at $(Z + 2)$ er en faktor af polynomiet. Nu kan vi dividere denne faktor med polynomiet

$$
\begin{array}{l l l}
\underline{Z+2\,|} & Z^4+4Z^3+5Z^2+4Z+4 & \underline{|\,Z^3+2Z^2+Z+2} \\
 & \underline{Z^4+2Z^3} & \\
 & 0 \quad +2Z^3 & \\
 & \quad \underline{2Z^3+4Z^2} & \\
 & \quad 0 \quad + \quad Z^2 & \\
 & \qquad \quad \underline{Z^2+2Z} & \\
 & \qquad \quad 0 \quad +2Z & \\
 & \qquad \qquad \underline{2Z+4} & \\
 & \qquad \qquad \quad 0 &
\end{array}
\tag{8}
$$

Dvs. at roden -2 går op mindst 1 gang. Vi dividerer nu med polynomiet Z^3+2Z^2+Z+2 igen således

$$
\begin{array}{l l l}
\underline{Z+2\,|} & Z^3+2Z^2+Z+2 & \underline{|\,Z^2+1} \\
 & \underline{Z^3+2Z^2} & \\
 & 0 \quad + \quad 0 & \\
 & \qquad \quad \underline{Z+2} & \\
 & \qquad \qquad 0 &
\end{array}
\tag{9}
$$

Dvs. roden -2 går op 2 gange. Vi prøver igen således

$$
\begin{array}{l l l}
\underline{Z+2\,|} & Z^2+0Z+1 & \underline{|\,Z-2} \\
 & \underline{Z^2+2Z} & \\
 & 0 \quad -2Z & \\
 & \quad \underline{-2Z-4} & \\
 & \qquad \quad 5 &
\end{array}
\tag{10}
$$

Da $Z+2$ ikke går op i Z^2+1 er dette ikke en faktor. Så multipliciteten af roden -2 er 2.

Opgave e. Givet $r \in \mathbb{R}_{>0}$

Jeg vil nu bevise påstanden $P(n)$, hvor $(1+r)^n \geq 1+nr$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ved brug af induktion efter n.

Basistrin: For $P(1)$ har vi $(1+r)^1 \geq 1+1*r$. Vi ser at $1+r=1+r$. Derfor er $P(1)$ opfyldt.

Induktionstrin: Vi antager $P(k)$ er udsagnet $(1+r)^k \geq 1+kr$ hvor $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, og vil gerne finde $P(k+1)$, altså $(1+r)^{k+1} \geq 1+(k+1)r$. Herudover ved vi at $(1+r)^{k+1} = (1+r)(1+r)^k$. Vi kan derfor gange begge sider med $(1+r)$ således at

$$
\begin{aligned}
(1+r)(1+r)^k &\geq (1+r)(1+kr) \\
&= (1+r)(1) + kr*(1+r) \\
&= 1+r+kr+kr^2 \\
&= 1+(k+1)r+kr^2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Siden $kr^2 > 0$ kan vi ombytte således at højre side bliver endnu mindre end venstre side, hvilket beholder uligheden

$$\begin{aligned}(1+r)^{k+1} &\geq 1+(k+1)r+kr^2 > 1+(k+1)r \\ (1+r)^{k+1} &\geq 1+(k+1)r\end{aligned} \tag{12}$$

Dette viser at $P(k+1)$ er sandt. $\square$