Hjemmeopgavesæt A

Magnus Chr. Hvidtfeldt

Technical University of Denmark, Lyngby, DK,

s255792@dtu.dk

1 Multiple choice

Hermed gives svarene til multiple-choice delen af denne aflevering.

Opgave (nr.)	1	2	3	4	5
Svar (nr.)	1.5	2.2	3.5	4.3	5.1

Beregningerne medtages ikke.

6 Matrixfaktoriseringer

6.1 Find en nedre enheds trekantsmatrix L og en øvre trekantsmatrix U så A = LU.

Hvis vi række reducerer A, fås

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Dermed har vi fundet vores øvre trekantsmatrix U. For at finde vores L, så kigger vi først på elementæroperationernes matricer således

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi $E_2 E_1 A = U$. For at finde vores L, skal vi have $L = E_1^{-1} E_2^{-1}$. Derfor

$$E_1^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Samt har vi

$$E_2^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Nu kan vores L beregnes således

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvilket er vores L.

6.2 Find en diagonal matrix D og en nedre enheds trekantsmatrix L så A = LDL.T.

Da vi nu har fundet L, mangler vi kun at finde en diagonalmatrix D således at $A = LDL^T$.

Det er givet på side 367 i lærebogen, at $D = U(L^T)^{-1}$. Derfor har vi

$$(L^T)^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Nu kan vi finde D således

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvilket var det, vi ville finde.

6.3 Afgør om der findes en nedre trekantsmatrix L' så A = L'L'^T og i bekræftende fald find sådant en matrix

Hvis den eksisterer, så skal vi have at matricen A er positivt definit og symmetrisk, dvs $A^T = A$ og alle egenværdier > 0.

Vi kan se at A er symmetrisk, da $A^T = A$ (nedre trekants matrix er lig øvre trekants matrix uden diagonalen). Derudover betragter vi (som nævnt på side 370 i lærebogen), at hvis A er positiv definit, så er matricen D positiv definit og dets elementer positive. Da vi har, fra vores tidligere beregning, at matricen D er positiv definit, så må A være positiv definit.

Da vi nu har konkluderet at den nedre trekantsmatrix eksisterer, kan vi finde den. Vi er givet, at $L_n = L \cdot D^{1/2}$ fra side 370 i lærebogen. Dermed har vi, at

$$L_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Som var det, vi gerne ville finde.

7 Cholesky-faktorisering og følg en pseudokode

Jeg følger pseudokoden på side 370. Bemærk indekseringen fra 1 - 3 for k.

Beregninger for k=1,

$$l_{11} = (1-0)^{1/2} = 1$$
$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$
$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

Beregninger for k=2,

$$l_{22} = (3 - l_{21}^2)^{1/2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$$
$$l_{32} = \frac{4 - 2 * 1}{l_{22}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Beregninger for k=3,

$$l_{33} = (5 - l_{31}^2 - l_{32}^2)^{1/2} = \sqrt{5 - 2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{5-4-2} = \sqrt{-1}$$

Da vi ikke kan tage kvadratroden af et negativt tal, når vi arbejder over reelle resultater, så har vi ikke en Cholesky faktorisering for A.

8 Følsomhedsanalyse

Vi ønsker at finde det mindste k, så der gælder at $\|\delta b\|_2 \leq \sqrt{n}k$, for den givne grænse $|\delta b_i| \leq 0.002$.

Betragt, at vi har $\|\delta b\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta b_i^2} \leq \sqrt{n(0.002^2)}$. Dermed kan vi løse for k ved at indsætte i sympy således

```
from sympy import *
init_printing()

n, k, j = symbols('n k j')
eq1 = Eq(sqrt(n * (0.002**2)), sqrt(n) * k)
k = simplify(solve([eq1], k))
display(k)
```

$\{k : 0.002\}$

Dvs det mindste k er $k = 0.002$ så det gælder, at $\sqrt{n}k$, da $k \geq 0.002$.

Nu kan vi vurdere den øvre grænse for den relative fejl på løsningen for $n = 500$. Vi kender uligheden

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}$$

Tilmed er vi givet, at $\kappa(A) = 10.2$, $\|b\|_2 = 1.70$. Vi kan finde den øvre grænse for $\|\delta b\|_2$ således

```
k, n, cond, bn = 0.002, 500, 10.2, 1.70
dbn = sqrt(n) * k
display(dbn.evalf())
```

0.0447213595499958

Nu har vi fundet den øvre grænse for $\|\delta b\|_2$, og kan nu finde den øvre grænse for den fulde relative fejl ved at indsætte vores parametre således

```
display((cond * (dbn / bn)).evalf())
```

0.268328157299975

Dvs. den øvre grænse for $n = 500$ er 0.2683, eller. 26.83%.