Hjem1

Magnus Chr. Hvidtfeldt

Technical University of Denmark, Lyngby, DK,

s255792@dtu.dk

1 Jacobi-matrix af et neuralt netværk

1.1 Bestem den mellemliggende vektor $\mathbf{z_0} = \mathbf{f}(\mathbf{1}, -\mathbf{1})$ samt netværkets endelige output $\mathbf{p_0} = \mathbf{g}(\mathbf{z_0})$.

Vektoren z_0 bestemmes ved at indsætte punktet $x = (1, -1)$ i f funktionen således

$$f(1,-1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \\ 1 + 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = z_0$$

Derudover kan vi evaluere netværkets endelige output $g(z_0)$ ved at indsætte z_0 ind i softmax funktionen g således

$$g(z_0) = \frac{1}{2 + e^2} \begin{bmatrix} e^0 \\ e^2 \\ e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2+e^2} \\ \frac{e^2}{2+e^2} \\ \frac{1}{2+e^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1065 \\ 0.7870 \\ 0.1065 \end{bmatrix} = p_0$$

Som var det, vi ville finde (med beregning af numerisk udtryk fra Python).

1.2 Bestem Jacobimatricen $\mathbf{J_f}(\mathbf{1}, -\mathbf{1})$ og beregn $\mathbf{J_g}(\mathbf{z_0})$.

Givet funktionen f findes Jacobimatricen ved at finde de partielt afledte til funktionen, mht. x1 og x2 for f1, f2, f3. Givet f har vi

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 + 1 \end{bmatrix} \to J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette kan dermed evalueres ved punktet $x = (1, -1)$ ved at indsætte således

$$J_f(1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Derudover kan vi beregne $J_g(p_0)$ ved at indsætte punktet $p_0 = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0.1065 & 0.7870 & 0.1065 \end{pmatrix}^T$ i matricen opgivet således

$$J_g(p_0) = \begin{bmatrix} 0.0952 & -0.0838 & -0.0113 \\ -0.0838 & 0.1676 & -0.0838 \\ -0.0113 & -0.0838 & 0.0952 \end{bmatrix}$$

Med numerisk udtryk beregnet i Python.

1.3 Argumenter for at den sammensatte funktion er differentiabel. Anvend kædereglen til at bestemme $\mathbf{J_h(1,-1)}$.

Den sammensatte funktion $h = g \circ f$ er differentiabel hvis g og f er differentiable. Vi kan se at f er differentiabel, da det er en affin funktion. Derudover er g differentiabel da det er Softmax funktionen, og den består af e^z som også er differentiabel.

Per kædereglen har vi, at $J_h = J_g \cdot J_f$. Vi indsætter og udregner

$$J_h(1,-1) = \begin{bmatrix} 0.0952 & -0.0838 & -0.0113 \\ -0.0838 & 0.1676 & -0.0838 \\ -0.0113 & -0.0838 & 0.0952 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1065 & 0.1676 \\ 0 & -0.3353 \\ -0.1065 & 0.1676 \end{bmatrix}$$

Med numerisk udtryk beregnet i Python.

2 Differentiabilitet af Softmax

2.1 Find de partielle afledte af S med hensyn til $\mathbf{z_j}$.

Da vi differentierer mht. til z_i og det er summation, ser vi, at de andre behandles som konstanter og derved

$$\frac{\partial S}{\partial z_1}(\mathbf{z}) = e^{z_1}$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial S}{\partial z_n}(\mathbf{z}) = e^{z_n}$$

Hvor for partiel differentiation mht. z_i er resultatet e^{z_i}.

2.2 Benyt kvotientreglen til at differentiere $\mathbf{p_i = e^{z_i}/S(z)}$ med hensyn til $\mathbf{z_i}$.

Vi har kvotient reglen

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \to h'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$$

Givet $f(z) = e^{z_i}$ og $g(z) = S(z)$. Dermed kan vi finde de partielt afledte af p_i mht. z_i ved at indsætte således

$$\frac{\partial p_i}{\partial z_i} = \frac{e^{z_i}(S(z)) - e^{z_i}e^{z_i}}{S(z)^2}$$

Da vi differentierer mht. z_i, er $g'(z) = e^{z_i}$.

Derudover kan resultatet skrives som følgende

$$\frac{\partial p_i}{\partial z_i} = \frac{e^{z_i}(S(z)) - e^{z_i}e^{z_i}}{S(z)^2} = \frac{e^{z_i}}{S(z)} \cdot \frac{S(z)}{S(z)} - \frac{e^{2z_i}}{S(z)^2}$$
$$= \frac{e^{z_i}}{S(z)} - \frac{e^{2z_i}}{S(z)^2} = \frac{e^{z_i}}{S(z)}\left(1 - \frac{e^{z_i}}{S(z)}\right) = p_i(1-p_i)$$

Hvilket var det, vi ville vise.

2.3 Benyt kvotientreglen til at differentiere $\mathbf{p_i = e^{z_i}/S(z)}$ med hensyn til $\mathbf{z_j}$, hvor $\mathbf{j \neq i}$.

Det samme kan gøres, i tilfældet hvor $j \neq i$. Vi sætter $f(z) = e^{z_i}$ og $g(z) = S(z)$, og udregner vha. kædereglen således

$$\frac{\partial p_i}{\partial z_j} = \frac{0(S(z)) - e^{z_i}e^{z_j}}{S(z)^2} = \frac{-e^{z_i}e^{z_j}}{S(z)^2}$$

Derudover kan vi skrive resultatet som følgende

$$\frac{\partial p_i}{\partial z_j} = \frac{-e^{z_i}e^{z_j}}{S(z)^2} = -\frac{e^{z_i}}{S(z)}\frac{e^{z_j}}{S(z)} = -p_i p_j$$

Hvor $g'(z) = e^{z_j}$ med hensyn til z_j, hvilket var det, vi ville vise.

2.4 Opskriv Jacobimatricen $\mathbf{J_g(z)}$ for $\mathbf{n = 4}$.

Nu kan Jacobimatricen opstilles for $n = 4$. Vi tager de partielle afledte i diagonalen og opstiller dem hvor $j = i$, og tager de andre hvor $j \neq i$ og opstiller de resterende steder således

$$J_g(z) = \begin{bmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & -p_1p_3 & -p_1p_4 \\ -p_2p_1 & p_2(1-p_2) & -p_2p_3 & -p_2p_4 \\ -p_3p_1 & -p_3p_2 & p_3(1-p_3) & -p_3p_4 \\ -p_4p_1 & -p_4p_2 & -p_4p_3 & p_4(1-p_4) \end{bmatrix}$$

Hvilket var det, vi ville vise. □

3 Et nyt indreprodukt

3.1 Vis, at $\mathbf{A^*A = B}$ og at $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er hermitiske.

Vi viser først $A^*A = B$. Indsætter definitionen på A således

$$A^*A = (UDU^*)^*(UDU^*) = U^{**}D^*U^*UDU^* = UD^*IDU^* = UD^*DU^*$$

Da $U^*U = I$, og da $D^* = D$, givet det er en diagonalmatrix og $\lambda_i > 0$, har vi at

$$A^*A = UD^2U^* = U\Lambda U^* = B$$

Da matricen D^2 har elementerne $d_i^2 = \sqrt{\lambda_i}^2 = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n$ i diagonalen.

For A og B at være hermitiske, skal vi have at $A^* = A$ og $B^* = B$. Indsætter definitionen for A og får

$$A^* = (UDU^*)^* = U^{**}D^*U^* = UD^*U^* = UDU^* = A$$

Da vi lige har fastslået at $D^* = D$. Derudover har vi

$$B^* = (U\Lambda U^*)^* = U^{**}\Lambda^*U^* = U\Lambda^*U^* = U\Lambda U^* = B$$

Da vi ligedeles har $\Lambda^* = \Lambda$ givet det er en diagonalmatrix med positive elementer. □

3.2 Bestem den inverse matrix A^{-1}.

Indsætter definitionen for A således

$$A^{-1} = (UDU^*)^{-1} = (U^*)^{-1}D^{-1}U^{-1}$$

Da U er unitær, har vi at $U^{-1} = U^*$, dermed har vi

$$A^{-1} = (U^*)^{-1}D^{-1}U^{-1} = (U^{**})D^{-1}U^* = UD^{-1}U^*$$

Hvilket er den inverse. □

3.3 Vis at $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\mathbf{B} = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{Ay} \rangle$.

Fra definitionen har vi

$$\langle x, y \rangle_B = \langle Bx, y \rangle = \langle A^*(Ax), y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle$$

Af reglen $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ på side 41 i lærebogen, og da $A^* = A$. $\square$

3.4 Vis at $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\mathbf{B}$ faktisk er et indreprodukt på $\mathbb{C}^n$.

Givet at $\langle x, y \rangle$ er et indreprodukt i $\mathbb{C}^n$ givet $x, y \in \mathbb{C}^n$, har vi, at

$$\langle x, y \rangle_B = \langle Bx, y \rangle$$

Dermed definerer vi en ny vektor

$$\bar{x} = Bx = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

Hvor $\bar{x}, x \in \mathbb{C}^n$ og $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Da $\bar{x}, y \in \mathbb{C}^n$, har vi at det indre produkt $\langle \bar{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle_B$ er over $\mathbb{C}^n$. $\square$

3.5 Angiv to vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^2$ der er ortogonale på hinanden mht. $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mathbf{B}$.

Vælg x således at

$$Bx = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi, for $\langle x, y \rangle_B = 0$, at

$$2y_1 + 5y_2 = 0 \to 2y_1 = -5y_2 \to y_1 = -\frac{5}{2} y_2$$

Nu kan vi vælge y således

$$y = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Beregningen tjekkes

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_B = 2 \cdot (-5/2) + 5 \cdot 1 = 0$$

Hvilket var det vi ville have. Derfor er

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vores to vektorer $x, y \in \mathbb{C}^2$ der er ortogonale på hinanden og ikke er nulvektoren.