R3.08 - PROBABILITE

UN PEU D'HISTOIRE

Le calcul des probabilités s'intéresse aux phénomènes **aléatoires**, c'est-à-dire aux phénomènes dont on ne peut pas prévoir le résultat. On dit que le **hasard** intervient.
D'où vient le mot hasard ?

- **Alea :** jeu de dé en latin.
  « alea jacta est » : les dés sont jetés, le sort en est jeté
- **Hasard** : jeu dé en arabe andalou.

Ces étymologies nous montrent qu'un jeu comme le jeu de dé nous a permis d'appréhender la notion de hasard. Et c'est d'ailleurs, dans un premier temps, de l'analyse des jeux de hasard qu'est né le calcul de probabilité.

XVI^{EME} ET XVII^{EME} : LES PROBLEMES DE JEUX DE HASARD – ORIGINE DU CALCUL DES PROBABILITES

Même si on situe habituellement l'origine du calcul des probabilités au XVII^{ème} siècle, la réflexion a commencé au siècle précédent avec le mathématicien **Cardan* et son traité sur le jeu,** *Liber de ludo aleae* (*Livre du jeu de hasard*)**.** Celui-ci n'a été publié qu'au siècle suivant, au siècle de Pascal.

*Cardan est connu pour la **formule de Cardan** qui permet de résoudre des équations du troisième degré*

C'est donc bien au XVII^{ème} siècle que la réflexion a pris son essor. On attribue l'origine du calcul des probabilités à une correspondance entre les deux mathématiciens **Pascal et Fermat**. En 1654, ils échangent au sujet de problèmes de jeux, notamment **le problème des partis** (qui débouchera sur le triangle de Pascal) et un problème de dés, appelé aujourd'hui le **problème du Chevalier de Méré :**
Qu'est-ce qui est plus probable ? obtenir au moins un 6 en lançant quatre fois un dé ou obtenir au moins un double 6 en lançant vingt-quatre fois deux dés ?
Pascal et Fermat ne sont pas seuls, au même siècle d'autres savants réfléchissent à ces notions : Huygens, Leibniz…

Le point commun des études de l'époque : toutes portent sur des jeux de hasard qui sont des expériences dans lesquelles l'hypothèse « **d'équiprobabilité** » est acceptable et intuitive. On suppose que chaque résultat possible a la même chance de se réaliser, ainsi, pour un dé non pipé, chaque face a la même chance de sortir. La probabilité devient alors une proportion de **cas « favorables »** parmi les **cas possibles**.

XVIII ET XIX^{EME} UNE VISION DETERMINISTE

Au cours des siècles suivants, le calcul des probabilités progresse, les savants commencent à s'y intéresser pour des situations plus complexes, en lien en général avec la physique et l'astronomie. Mais cette notion garde dans le paysage scientifique une place à part. Pour certains d'ailleurs, ce n'est pas une science. Comment pourrait-on modéliser le hasard ? Le calcul des probabilités est plutôt vu, même par les mathématiciens qui le formalisent, comme un pis-aller **en attendant de mieux connaître** les lois de l'Univers.

Cette idée est très bien exprimée par Pierre Simon Laplace qui, au passage, était un grand probabiliste :

« Une intelligence qui, à un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était suffisamment vaste pour soumettre ces données à

l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome ; **rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux**. »
Pierre Simon Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*

Pour les **déterministes laplaciens** tous les événements s'enchainent selon un principe de **causalité** et le **hasard** n'est que le signe d'une **impuissance** à appréhender la complexité des phénomènes naturels.
Nous avons bien des exemples dans l'histoire de l'humanité d'événements qui ont perdu leur caractère « aléatoires » (ou de volonté divine) avec le progrès de la connaissance scientifique. La Mécanique Céleste en est un exemple. La loi de l'attraction universelle de Newton nous a permis de prévoir avec précision les mouvements des planètes ainsi que la survenue des éclipses. Alors que, par le passé, celles-ci pouvaient apparaitre comme étant le fruit du hasard ou, dans certaines mythologies, le résultat du d'une intervention divine ou monstrueuse.

La notion de déterminisme et de causalité est inhérente à la pensée scientifique, mais dans le **déterminisme Laplacien** (ou **déterminisme absolu**), il y a l'idée que **tout** est causalité et qu'à partir de lois, nous pourrions « calculer, prévoir » le monde. Cette idée a fortement remise en cause au XX^{ème} siècle, sur deux aspects : celui de la causalité et celui de la prévisibilité.

XX ^{EME} SIECLE, LA FIN DU « REVE » DETERMINISTE

Deux idées vont battre en brèche le déterminisme absolu de Laplace, la **théorie du Chaos** et la **mécanique quantique**, avec l'idée d'une nature intrinsèquement probabiliste au cœur même de la matière.

LA THEORIE DU CHAOS

Au début du XX^{ème} siècle Henri Poincaré montre, que dans la prédiction du comportement d'un système complexe, une **très faible modification** sur l'un des paramètres a de **grandes conséquences** sur les prévisions du modèle, il s'agit de la théorie du Chaos. Ce qui signifie que **même si nous connaissons la loi** qui régit l'apparition d'un phénomène complexe, il faudrait pour le prévoir, une précision infinie sur chacun des paramètres en jeu, ce qui n'est pas possible. Même si nous connaissons les lois qui expliquent un phénomène, nous ne pouvons pas forcément le prévoir.

Dans le domaine météorologique, cette idée a été imagée par Edward Lorenz en 1979 dans une conférence intitulée « La prédictibilité : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil déclenche-t-il une tornade au Texas ? ». **L'effet papillon** illustre la théorie du Chaos : une infime modification des conditions initiales peut engendrer rapidement des effets très importants.

LE CARACTERE INTRINSEQUEMENT PROBABILISTE DE LA MATIERE ? DIEU JOUE-T-IL AUX DES ?

Le XX^{ème} siècle a été le témoin de découvertes scientifiques révolutionnaires, notamment en mécanique quantique. Celles-ci ont bouleversé notre croyance en une **causalité absolue**. La théorie quantique ne peut que calculer des probabilités de réalisations : nous pouvons prédire la trajectoire d'une planète dans l'Univers, mais nous ne savons pas prédire la trajectoire d'un électron particulier parmi ses chemins possibles.

Ce qui suggère un hasard intrinsèque dans la matière et rompt avec le déterminisme « absolu » de Laplace. D'où la célèbre expression d'Einstein, qui n'acceptait pas cette idée, « Dieu ne joue pas aux dés ». Einstein s'opposait alors à Niels Bohr et à l'École dite de Copenhague. Quelques expériences réalisées dans le courant du XX^{ème} siècle ont plutôt donné raison à Niels Bohr et l'on admet aujourd'hui le caractère non déterministe et intrinsèquement probabiliste de la matière : un électron unique a une trajectoire imprédictible, mais le comportement d'une population d'électrons est prévisible.

Le déterminisme ne s'applique pas à l'individuel mais au collectif ! (idée intéressante qui laisse un peu de place au libre arbitre)

ET LE XXI EME SIECLE ?

Nous sommes à l'ère des données, de l'Intelligence Artificielle. Grâce à l'apprentissage profond, nous obtenons aujourd'hui des prévisions sans loi, sans causalité ou sans compréhension du phénomène étudié.

La théorie du Chaos nous a appris que comprendre n'était pas prévoir, l'Intelligence Artificielle nous permet aujourd'hui de prévoir sans comprendre. Appliqué à certains domaines, le rêve IA est sans doute tout aussi illusoire que le rêve déterministe de Laplace (une justice sans juge, un art sans artiste, un enseignement sans professeur…).

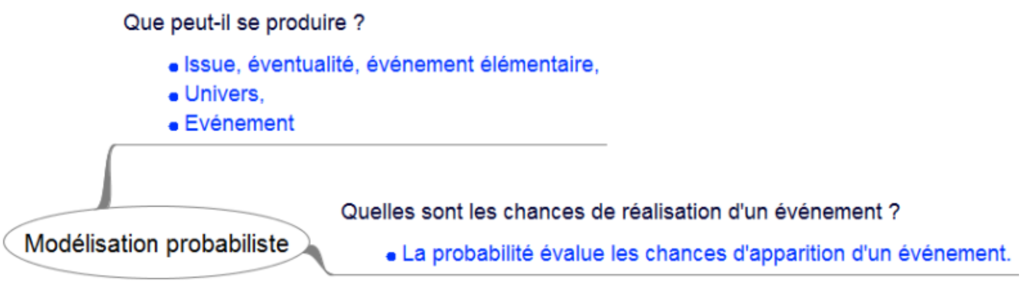
INTRODUCTION AU CALCUL DE PROBABILITES

Le calcul des probabilités est donc une branche des mathématiques qui permet de modéliser les **expériences aléatoires**, c'est-à-dire les expériences pour lesquelles on ne peut pas prévoir le résultat.

MODELISATION

La construction du **modèle probabiliste** se fait en deux étapes :

1. Description de ce qui peut se produire (ensemble des résultats possibles).
2. Calcul de la probabilité (mesurant les chances d'apparition d'un résultat).



UNIVERS : QUE PEUT-IL SE PRODUIRE ?

Introduisons un peu de vocabulaire

Issue ou éventualité ou événement élémentaire : résultat possible de l'expérience aléatoire.
Univers : ensemble des issues, c'est-à-dire des résultats possibles de l'expérience aléatoire. On le note Ω.
Événement : propriété du résultat qui peut être réalisée ou pas. Un événement est **un sous-ensemble de Ω**. Il y a ainsi une correspondance entre le langage des événements et la théorie des ensembles.

EXEMPLE

Expérience aléatoire : jet d'un dé
Issue ou éventualité ou événement élémentaire : « obtenir la face 1 »
Univers, ensemble des issues : $\Omega = \{"Obtenir\ 1", \dots, "Obtenir\ 6"\}$, pour simplifier $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$,
Événement : A : « Obtenir une face paire » $\Leftrightarrow A = \{2,4,6\}$, A est un sous-ensemble de Ω

LANGAGE DES EVENEMENTS - ENSEMBLES

Un événement étant un sous-ensemble de Ω, il y a une correspondance entre le vocabulaire du calcul des probabilités et celui de la théorie des ensembles.

Événements	Ensembles
A événement	$A \subset \Omega$ (A sous-ensemble de Ω)
Événement **certain** (il est toujours réalisé)	Ω
Événement **impossible** (il n'est jamais réalisé)	$\varnothing$
$\bar{A}$, événement **contraire** de A, il se réalise lorsque A n'est pas réalisé	$\bar{A}$ complémentaire de A dans Ω
A et B sont **incompatibles** : A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps	$A \cap B = \varnothing$: A et B disjoints
A $\boldsymbol{et}$ B se réalisent tous les deux : $A \cap B$ est réalisé	Intersection $A \cap B$
A $\boldsymbol{ou}$ B (éventuellement les deux) se réalise : $A \cup B$ est réalisé	Réunion $A \cup B$
A est réalisé et B ne l'est pas : $A - B$ est réalisé	Différence $A - B = A \cap \bar{B}$
$\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ **système complet d'événements**	$\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ partition de Ω.

EXEMPLE
Expérience aléatoire : jet d'un dé
Univers : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
Événements :
A : « Obtenir une face paire » $\Leftrightarrow A = \{2,4,6\}$
B : « Obtenir un numéro de face inférieur ou égal à 4 » $\Leftrightarrow B = \{1,2,3,4\}$
$\bar{B}$, événement **contraire** de B : « Obtenir un numéro de face strictement supérieur à 4 » $\Leftrightarrow \bar{B} = \{5,6\}$
B et $\bar{B}$ sont **incompatibles**
$A \cap B$: « Le numéro de la face est pair **et** inférieur ou égal à 4 » $\Leftrightarrow A \cap B = \{2,4\}$
$A \cup B$: « Le numéro de la face est pair **et** inférieur ou égal à 4 » $\Leftrightarrow A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$
$A - B$: « le numéro de la face est pair et strictement supérieur à 4 » $\Leftrightarrow A - B = A \cap \bar{B} = \{6\}$

ET LES VARIABLES ALEATOIRES ?

Elles permettent, elles aussi, d'exprimer ou de décrire la réponse à la question « Que peut-il se produire ? ».

On utilise en effet des **variables aléatoires réelles** lorsque, à l'issue de l'expérience aléatoire, le résultat qui nous intéresse s'exprime sous forme **numérique** (« réelle » signifie que les valeurs de la variable sont des nombres réels).

EXEMPLE

- **Expérience aléatoire** : jet de dé, on peut introduire la variable X : **numéro de la face obtenue**
  - → L'événement **« obtenir la face 1 »** se notera $X = 1$

    *Attention au vocabulaire : **X** est une **variable aléatoire** et **$X = 1$** est un **événement***
  - → L'événement B : **« Obtenir un numéro de face inférieur ou égal à 4 »** ou $B = \{1,2,3,4\}$ se notera : $X \leq 4$
  - → L'événement A : **« Obtenir une face paire »** ou $A = \{2,4,6\}$ se notera : $(X = 2) \cup (X = 4) \cup (X = 6)$

- **Expérience aléatoire** : tirage d'un individu dans la population d'étudiants
  - → Un résultat de cette expérience est un individu de la population, $Pierre$ par exemple. L'ensemble des résultats possibles est donc l'ensemble des individus de la population, l'ensemble des étudiants : $\Omega = \{Pierre, Paul, \ldots\}$
  - → On interroge chaque individu choisi sur son âge : cela revient à introduire la variable aléatoire A : **âge de l'étudiant choisi**

    ***« On interroge chaque individu sur son âge » :** cela signifie que l'on associe à chaque individu de l'univers Ω, son âge. Mathématiquement, une variable aléatoire est une application de Ω dans ℝ*

    - L'événement **« l'étudiant choisi a 17 ans »** se notera $A = 17$
    - L'événement **« l'étudiant choisi a plus de 20 ans »** se notera $A > 20$ …

    *Là encore, **A** est une variable aléatoire alors que **$A = 17$** et **$A > 20$** sont des événements*

Notion associée à la variable aléatoire, **l'univers image : ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.** Pour une variable X, l'univers image se note $\boldsymbol{X(\Omega)}$

Dans les exemples précédents :

- **Expérience aléatoire** : on jette un d et X est le numéro de la face obtenue

  L'univers image est $\boldsymbol{X}(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$
- **Expérience aléatoire** : on choisit au hasard un individu dans une population d'étudiants et A est l'âge de l'étudiant choisi.

  L'univers image est par exemple $\boldsymbol{A}(\Omega) = \{17,18,19,20,24,28\}$

DES VARIABLES UN PEU PARTICULIERES MAIS TRES IMPORTANTES, LES VARIABLES DE BERNOULLI

Pour définir une variable aléatoire réelle, il faut associer une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience : numéro de la face obtenue, âge de l'individu choisi… ces valeurs sont des réponses numériques à une question que l'on se pose à l'issu de l'expérience : Quel est le numéro de la face ? quel âge à l'individu choisi ?
Si la question posée à l'issue de l'expérience n'a pas de réponse numérique, par exemple « quelle est la couleur des yeux de l'individu choisi ? », nous pourrions introduire un codage numérique, **réel**, de la réponse (1 : « marron », 2 : « vert »…) mais les calculs effectués sur cette variable n'auraient pas beaucoup de sens. Une exception, le cas des réponses binaires (Oui/non, Vrai/Faux…).
Par exemple, si la question posée est « L'individu choisi est-il un garçon ? », il est possible d'introduire une variable numérique :

$$X = \begin{cases} 1 \text{ si l'individu choisi est un garçon} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La variable X, ne prenant pour valeurs que 0 et 1 est appelée **variable de Bernoulli.** Nous verrons par la suite qu'il est possible de faire des calculs simples et avec du sens sur ces variables.

EXEMPLE

Expérience aléatoire : tirage d'un individu dans une population d'étudiants dans laquelle il y 70% d'étudiants originaires de Nouvelle Aquitaine.

Un résultat de cette expérience est un individu de la population, $Pierre$ par exemple. L'ensemble des résultats possibles est l'ensemble des étudiants : $\Omega = \{Pierre,\ Paul,\ Lucie \ldots\}$

On demande à chaque étudiant choisi : « Êtes-vous originaire de Nouvelle Aquitaine ? »

Il est possible d'introduire **la variable de Bernoulli** traduisant la réponse :

$$X = \begin{cases} 1 \text{ si l'étudiant choisi est originaire de Nouvelle Aquitaine (réponses oui)} \\ 0 \text{ sinon (réponse non)} \end{cases}$$

Revenons maintenant à notre modèle probabiliste :
1. **Description de ce qui peut se produire** (ensemble des résultats possibles).
2. **Calcul de la probabilité** (mesurant les chances d'apparition d'un résultat).

Nous venons d'introduire le vocabulaire nécessaire à la description de **ce qui peut se produire**, précisons maintenant la notion de **probabilité**.

PROBABILITE : QUELLES SONT LES CHANCES DE REALISATION D'UN EVENEMENT ?

PROBABILITE : nombre compris entre 0 et 1 mesurant les chances de réalisation d'un événement.

La probabilité d'un événement **impossible** est **0**.
La probabilité d'un événement **certain** est **1**.

Dans le langage courant, la probabilité est aussi exprimée en pourcentage de « chances » de réalisation de l'événement : par exemple, pour une probabilité de 0,1, on dira aussi qu'« il y a 10% de chances que l'événement se réalise ». Le mode de calcul de la probabilité va nous permettre de préciser la nature de ce pourcentage.

COMMENT CALCULE-T-ON UNE PROBABILITE ?

Deux approches :

- L'approche théorique qui repose sur l'hypothèse d'équiprobabilité
- L'approche fréquentiste

PROBABILITE « THEORIQUE » OU PROBABILITE « A PRIORI »

On la détermine sans expérimenter, en analysant le phénomène aléatoire.
Les cas de déterminations « a priori » des probabilités correspondent aux situations d'équiprobabilité.

Équiprobabilité : il y a équiprobabilité lorsque **les issues (événements élémentaires)** d'une expérience aléatoire sont toutes également vraisemblables c'est-à-dire **ont la même probabilité**.

Mathématiquement : s'il y a équiprobabilité sur l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n\}$ alors :

$$p(\omega_1) = p(\omega_2) = \cdots = p(\omega_n) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow p(\omega_i) = \frac{1}{n} \ \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$$

C'est le cas, en général, des **jeux de hasard** (jet de dé, tirage de cartes…) qui ont permis aux mathématiciens de poser les premières briques du calcul des probabilités.

Définition de la probabilité dans une situation d'équiprobabilité : dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement E correspond la proportion de résultats favorables à cet événement parmi les résultats possibles (les éléments de l'univers Ω) :

$$p(E) = \frac{card\ E}{card\ \Omega}$$

On désigne parfois cette définition de la probabilité comme « définition de Pascal »

Exemples

1. Lorsqu'on jette un dé non pipé, la probabilité d'avoir un nombre pair est de 0,5 car 50% des résultats possibles (3 sur 6) donnent un nombre pair et on suppose qu'il y a **équiprobabilité** (chaque face a la même chance de sortir) :
   - $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
   - A, l'événement « obtenir un nombre pair » : $A = \{2,4,6\}$

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = 0,5$$

2. **IMPORTANT - Tirage « au hasard » dans une population** : le terme « **au hasard** » signifie « **équiprobabilité** », on suppose donc que chaque individu de la population a la même chance d'être choisi.
   Imaginons une population d'étudiants parmi lesquels 70% sont des garçons.
   Expérience aléatoire : tirage au hasard d'un étudiant dans cette population, on suppose donc l'équiprobabilité.
   Univers : Ω est l'ensemble des étudiants
   Événement : on note G l'événement « l'étudiant choisi est un garçon »
   Probabilité : comme il y a 70% de garçons dans la population (l'univers Ω)
   $$p(G) = \frac{card(G)}{card(\Omega)} = 0{,}7$$
   Dans le cas de tirages « au hasard » dans une population, la probabilité d'un événement correspond exactement à sa fréquence dans la population.

Probabilite "experimentale" - Definition frequentiste de la probabilite

Il n'est pas toujours possible de compter les cas favorables et les cas possibles, ou de supposer « l'équiprobabilité ». Il suffit pour cela d'imaginer un dé pipé. Dans la pratique, une autre façon de définir la probabilité s'impose, fondée sur des résultats expérimentaux.

Pour connaître la probabilité d'avoir un « six » avec un dé pipé que ferions-nous ? Nous lancerions le dé un très grand nombre de fois.

Cette approche, appelée « **fréquentiste** », présente la probabilité d'un événement comme étant sa **fréquence de réalisation** sur un nombre « **infini** » d'expériences.

Loi des grands nombres : à mesure que le nombre d'expériences augmente, la fréquence d'apparition d'un événement tend vers sa probabilité.

Plus précisément, répétons une expérience N fois. À chaque essai, on note le résultat de l'épreuve. Soit N_E, le nombre de réalisations de l'événement E au cours des N expériences.

$\frac{N_E}{N}$ est la fréquence de réalisation de l'événement E au cours des N expériences, $\frac{N_E}{N}$ tend vers la probabilité $p(E)$ quand N tend vers l'infini :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{N_E}{N} = p(E)$$

*Cette définition permet de préciser l'interprétation de la probabilité : **la probabilité d'un événement correspond à sa fréquence de réalisation sur un très grand nombre d'expériences aléatoires.***

Bilan

Deux interprétations de la notion de probabilité :

- Une interprétation toujours possible (approche **fréquentiste**) : la probabilité d'un événement correspond à sa fréquence de réalisation sur un très grand nombre d'expériences aléatoires (plus précisément sur un nombre infini !).
- Lorsqu'il y a **équiprobabilité**, la probabilité d'un événement correspond à sa **proportion** dans l'univers des possibilités.

Revenons à l'interprétation d'une probabilité en « pourcentage de chances »

Lorsque nous jetons un dé, nous avons une probabilité 0,5 d'avoir une face paire, « 50% de chances d'avoir une face paire » ce qui signifie que :

- 50% des faces possibles sont paires (en supposant que chaque face à la même « chance » de sortir)
- Si nous répétions le jet un nombre « infini » de fois, 50% des faces obtenues seraient paires

ET POUR LES VARIABLES ALEATOIRES ? LA LOI DE PROBABILITE

Avec une variable aléatoire, nous chercherons à associer à toute valeur ou tout intervalle de valeur, sa probabilité. Ce qui reviendra à déterminer la loi de probabilité de la variable.

La loi de probabilité ne se détermine pas de la même façon selon le type de la variable, **discret** ou **continu** :

- **Variable discrète** : X est une variable aléatoire discrète quand X(Ω) est un ensemble **dénombrable** (ensemble dont les éléments peuvent être numérotées).
- **Variable continue** : X est une variable aléatoire continue quand X(Ω) est un **intervalle** ou une **réunion d'intervalles**.

Dans un premier nous nous limiterons aux **variables discrètes** pour nous consacrer ultérieurement aux variables continues, dans un chapitre dédié.

LOI DE PROBABILITE D'UNE VARIABLE DISCRETE

La loi de probabilité doit nous permettre d'associer à toute **valeur** possible de la variable, sa **probabilité**. Nous avons donc besoin, pour la déterminer, de deux informations :

- $\boldsymbol{X}(\Omega)$, **l'univers image**, ensemble des valeurs prises par la variable : $\boldsymbol{X}(\Omega) = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$
- Les probabilités de ces valeurs : $p(X = x_1),\ p(X = x_2) \dots\ p(X = x_n)$

On peut donc présenter la **loi de probabilité** d'une variable discrète X de différentes façons.
Les plus usuelles sont :

- La forme tabulaire :

$\boldsymbol{x_k}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	**…**	$\boldsymbol{x_n}$
$\boldsymbol{p_k = p(X = x_k)}$	$p_1 = p(X = x_1)$	$p_2 = p(X = x_2)$	…	$p_n = p(X = x_n)$

- La forme ensembliste : $\{(x_k, p_k)$ où $p_k = p(X = x_k)$ et $x_k \in X(\Omega)\}$

Remarque : avec les notations ci-dessus, nous avons bien sûr la propriété :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} p(X = x_k) = 1$$

EXEMPLE

Expérience aléatoire : jet d'un dé.
Variable aléatoire : X la variable représentant le gain au jeu suivant :

- Si on obtient un « six », on gagne 10€ ($X = 10$)
- Si on obtient une autre face, on perd 5€ ($X = -5$)

Loi de probabilité :

- $\boldsymbol{X}(\Omega) = \{-5,10\}$
- $p(X = -5) = {}^{5}/_{6},\ p(X = x_2) = {}^{1}/_{6}$

Présentation de la loi sous forme **tabulaire** :

x_k	-5	10
$p_k = p(X = x_k)$	$5/6$	$1/6$

Forme **ensembliste** : $\left\{\left(-5, {}^{5}/_{6}\right), \left(10, {}^{1}/_{6}\right)\right\}$

CAS DES VARIABLES DE BERNOULLI

Dans le cas d'une variable de Bernoulli X, l'**univers image** est toujours $X(\Omega) = \{0,1\}$ et si $p(X = 1) = p$ alors $p(X = 0) = 1 - p$.

L'expression ensembliste de la loi d'une variable de Bernoulli est de la forme : $\{(1, p), (0,1 - p)\}$

EXERCICES - VOCABULAIRE – VARIABLES

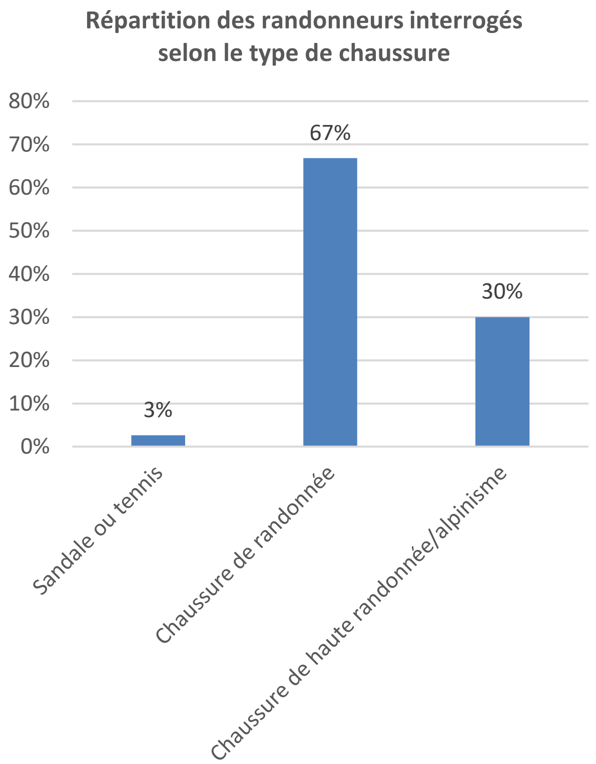
QCM D'ENTRAINEMENT

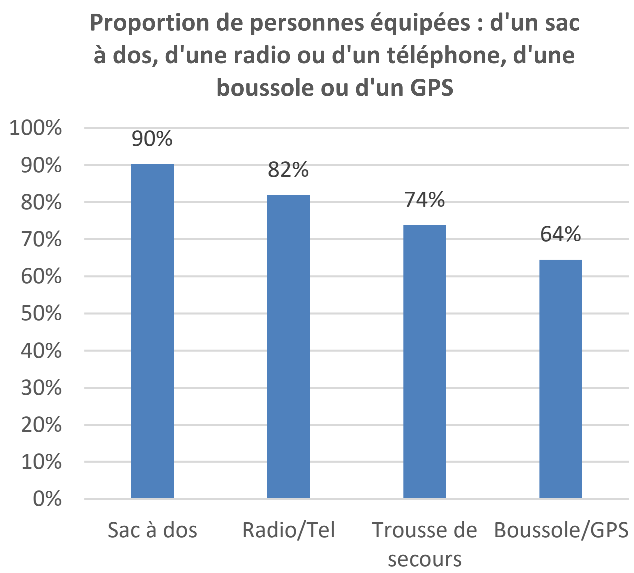
QCM d'entrainement
Vocabulaire

EXERCICE I - ENQUETE – CORRIGE P26

Une enquête a été réalisée au cours des étés 2004 et 2005, auprès de 4318 randonneurs effectuant l'ascension d'un des trois sommets suivants : Aneto, Posets, Mont Perdu (pyrénées aragonaises).
Les diagrammes ci-dessous résument les pourcentages de randonneurs enquêtés qui ont répondu aux questions suivantes :

- *Quel type de chaussure avez-vous ? (Sandales, Chaussures de randonnée, Chaussures de Haute randonnée)*
- *Avez-vous une boussole ? une trousse de secours ? une carte ? un téléphone portable ?*





QUESTIONS

A. On choisit au hasard un randonneur parmi les **4318 randonneurs interrogés au cours des étés 2004 et 2005**.
   1. Donner un univers associé à cette expérience.
   2. Donner un exemple d'événement associé à cette expérience pour lequel on peut donner une probabilité. S'agit-il d'une valeur exacte ou approchée ?

B. On choisit au hasard un randonneur dans la montagne **parmi ceux effectuant l'ascension de l'Aneto, des Posets ou du Mont Perdu.**
   1. Donner un univers associé à cette expérience. Quelle est la différence avec la situation de la question A ?
   2. Donner un exemple d'événement associé à cette expérience pour lequel on peut donner une probabilité. S'agit-il d'une valeur exacte ou approchée ?

C. **Événements compatibles et incompatibles**
   On choisit au hasard un randonneur parmi les 4318 randonneurs interrogés au cours des étés 2004 et 2005 (comme dans la question A)
   1. Donner un exemple de deux événements incompatibles associés à cette expérience aléatoire.
   2. Donner trois événements « deux à deux » incompatibles

EXERCICE II : CLIENTELE D'UNE AGENCE DE VOYAGE – CORRIGE P27

On s'intéresse à la fidélité des clients d'une agence de voyage.
Une enquête a été menée auprès des 6542 clients qui ont effectués leur premier séjour avec cette agence en 2010.
Une première étude a montré que :

- 70% de ces clients étaient satisfaits ou très satisfaits de leur premier séjour.
- 33% ont effectué avec l'agence un autre séjour sur la période 2010-2013 :

Nombre de séjours sur la période 2010-2013	1	2	3	4	Total
Nb de clients	4383	1112	720	327	6542
%	67%	17%	11%	5%	100%

Ce qui donne un nombre moyen de 1,5 séjour avec l'agence sur la période 2010-2013

ON CHOISIT UN CLIENT AU HASARD PARMI LES 6542

1. Introduire deux variables, dont une de Bernoulli, associées à cette expérience aléatoire.
2. Donner la loi de ces deux variables

AXIOMES ET PROPRIETES DES PROBABILITES

À l'origine du calcul des probabilités, à partir XVIIème siècle, tant que l'on ne s'intéressait qu'à l'étude de problèmes de jeux de hasard, il n'était pas nécessaire de fonder la probabilité sur un cadre théorique strict et l'on pouvait se contenter d'une approche intuitive.

L'ampleur des succès des probabilités, dans de nombreuses sciences notamment, a conduit les probabilistes à fonder leur discipline sur un **cadre axiomatique** rigoureux.

Qu'est-ce que cela signifie ?

Cela signifie que les mathématiciens ont cherché à réduire à des principes de plus en plus simples et généraux la notion de probabilité. Jusqu'à ne garder que trois axiomes, les **axiomes de Kolmogorov**, qui sont, comme tout axiome, des propositions non démontrées sur lesquels repose une théorie (ici, la théorie des probabilités).

Un « non-mathématicien » pourrait être sceptique… Une axiomatique ne cherche pas à définir « en soi » ce qu'est la probabilité pas plus que la géométrie d'Euclide ne définit ce qu'est « en soi » le point ou la droite. Par ailleurs, à partir des axiomes, la théorie se construit de façon purement déductive, sans recours à l'intuition ou à l'expérience.

Rappelons que ces axiomes n'ont pas été établis par hasard et sont le résultat d'efforts de réflexions, poursuivis par des générations, et qui se sont appuyés initialement sur les données de l'expérience **sensible**. Et que ce cadre théorique strict a permis ensuite de définir de façon rigoureuse de nombreuses notions du calcul des probabilités, permettant ainsi de modéliser des situations complexes.

Dans ce cours, nous ne prendrons pas la direction d'approfondir cette approche théorique. Notre objectif étant de bien comprendre et manipuler le concept de probabilité, en lien avec des exemples réels. En essayant de rester proche de l'expérience sensible.

AXIOMES ET PROPRIETES DU CALCUL DES PROBABILITES (AXIOMES DE KOLMOGOROV)

Soit Ω un univers et A un événement :

→ La probabilité de l'événement A est un nombre positif ou nul : $p(A) \geq 0$

→ La probabilité de l'univers Ω est égale à 1 : $p(\Omega) = 1$.

→ Si $A_1, A_2 \dots A_n \dots$ sont des événements deux à deux incompatibles alors la probabilité de réalisation de leur union est égale à la somme de leurs probabilités

$$p(A_1 \cup A_2 \dots) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots$$

Ces trois **axiomes de Kolmogorov**, du nom du mathématicien russe, Andreï Kolmogorov (1903-1987) qui les a définis, permettent de construire toute la théorie des probabilités et notamment de démontrer les propriétés suivantes :

- Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ alors :

$$\sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\}) = 1$$

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

EXERCICES - PROPRIETES

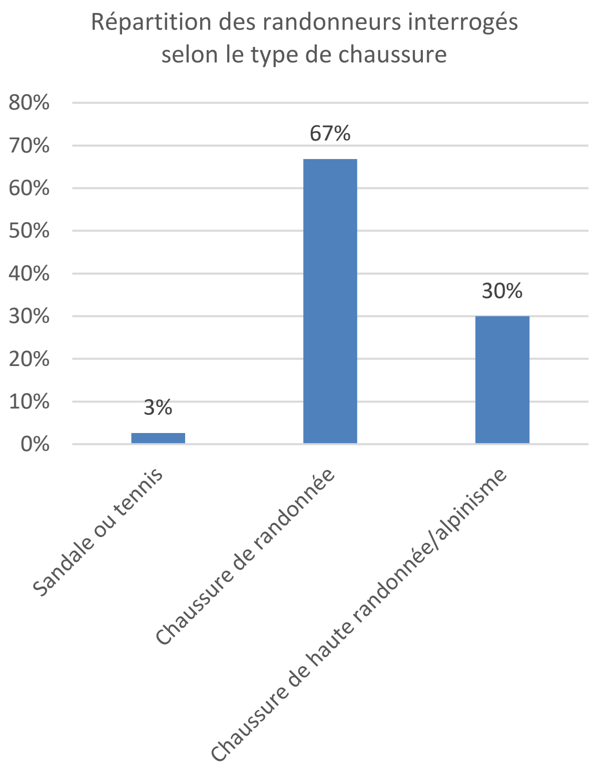
EXERCICE III : AXIOMES DE KOLMOGOROV ET PROPRIETES (FACULTATIF) – CORRGE P 27

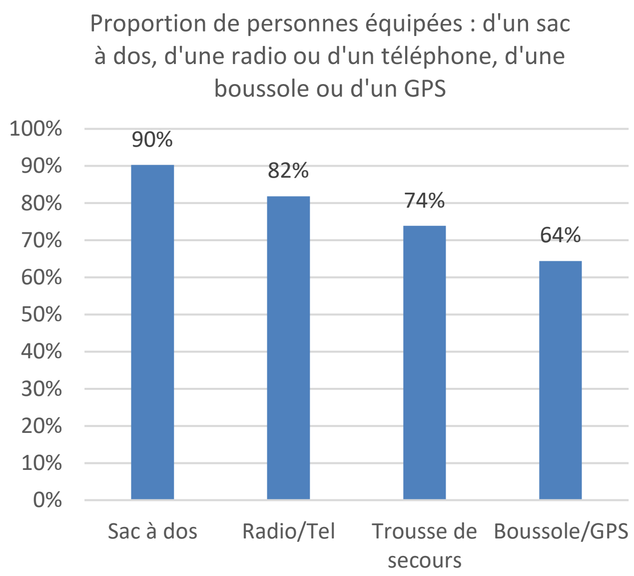
A partir des axiomes de Kolmogorov, montrer les propriétés suivantes :

- $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- $p(\emptyset) = 0$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

EXERCICE IV - ENQUETE – CORRIGE P28

Revenons à notre enquête de l'exercice 1.





On choisit au hasard un randonneur parmi les **4318 randonneurs interrogés au cours des étés 2004 et 2005**.

1. Donner un exemple de deux événements compatibles.
2. **Justifiez pourquoi ils sont compatibles.**

COMPLEMENTS

1. **Probabilités conditionnelles et indépendance**
2. **Espérance et variance d'une variable aléatoire**

COMPLEMENT 1 : PROBABILITES CONDITIONNELLES ET INDEPENDANCE

EXEMPLE D'INTRODUCTION – CORRIGE P 29

Revenons sur l'exercice des randonneurs

On choisit au hasard un randonneur parmi les 4318 randonneurs interrogés. On note H et E les événements suivants : H : « le randonneur choisi est un homme » ; E : « le randonneur choisi est espagnol »

Dans la population étudiée, on a observé que 82% des randonneurs espagnols étaient des hommes.

1. Écrire $0{,}82$ comme quotient de deux cardinaux utilisant les ensembles H et E.
2. En déduire, à partir de l'hypothèse d'équiprobabilité, une expression de $0{,}82$ comme quotient de deux probabilités.
   Le quotient obtenu permet de définir la notion de probabilité conditionnelle : $0{,}82 = p_E(H)$
3. De même, comment pourrait-on écrire, de même, la probabilité $0{,}18$?
4. En déduire, en la justifiant, une propriété : $p_B(\bar{A}) = \cdots$

PROBABILITE CONDITIONNELLES

DEFINITION DES PROBABILITES CONDITIONNELLES

Soit A et B deux événements, B de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé ou **probabilité de A sachant B** le nombre :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{P(B)}$$

*Numériquement, travailler avec des probabilités conditionnelles « sachant B » revient à « ramener » l'univers initial à l'événement B (B « devient » l'événement certain). Dans le cas de l'équiprobabilité, la probabilité $p_B(A)$ correspond à la proportion**, dans $\boldsymbol{B}$**, des éléments de $\boldsymbol{A}$ (donc de $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$).*

<u>Remarques</u> :

- $p_B(\bar{A}) = 1 - p_B(A)$ mais il n'y a pas de relation directe entre $p_B(\bar{A})$ et $p_B(A)$
- $p(A \cap B) = p_B(A)p(B)$

FORMULE DES PROBABILITES TOTALES

Notion préliminaire : un système complet d'événements {A_1, A_2 ,.. A_n} est une partition de Ω.

Exemple de système complet d'événements (partition de Ω).

Une usine de fabrication de pièces métalliques comprend trois unités de fabrication : U1, U2 et U3.

Ces unités fabriquent le même type de pièces en proportions différentes : 50%, 30% et 20%.

Expérience aléatoire : on choisit une pièce au hasard dans la production.

On note :

→ $\boldsymbol{U_1}$: « la pièce choisie est fabriquée par U1 »,

→ $\boldsymbol{U_2}$ **:** « la pièce choisie est fabriquée par U2 »,

→ $\boldsymbol{U_3}$: « la pièce choisie est fabriquée par U3 »,

L'univers Ω **est l'ensemble des pièces fabriquées par l'usine**.
Une pièce choisie au hasard est forcément fabriquée dans l'une des trois unités de fabrication :

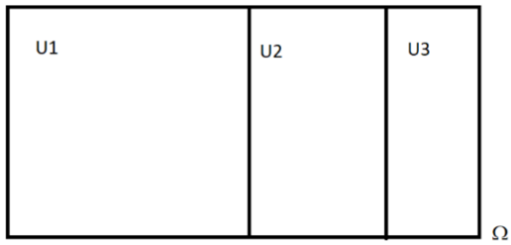
$$\boldsymbol{U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \Omega}$$

Une pièce choisie au hasard ne peut pas être fabriquée par plusieurs unités à la fois :

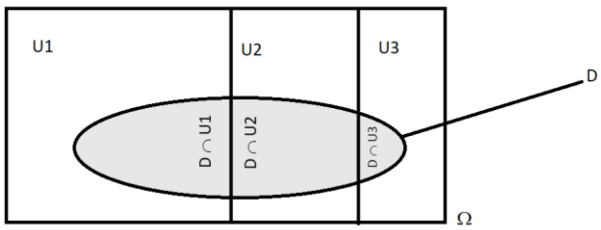
Les événements $\boldsymbol{U_i}$ sont deux à deux incompatibles : $\boldsymbol{U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_2} = \emptyset$

→ $\{\boldsymbol{U_1, U_2, U_3}\}$ est une partition ou un système complet d'événements de $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \Omega} \\ \text{Les événements } \boldsymbol{U_i} \text{ sont deux à deux incompatibles} \end{cases}$$



Introduction à la formule des probabilités totales
Continuons sur la production de pièces et imaginons un quatrième événement,
D : « la pièce choisie est défectueuse »



$$D = (D \cap \boldsymbol{U_1}) \cup (D \cap \boldsymbol{U_2}) \cup (D \cap \boldsymbol{U_3})$$
$$\boldsymbol{p(D) = p(D \cap U_1) + p(D \cap U_2) + p(D \cap U_3)}$$

car les événements $\boldsymbol{D \cap U_i}$ sont deux à deux incompatibles

Nous connaissons les taux de pièces défectueuses par unité (probabilités conditionnelles)
L'entreprise précise que les taux de pièces défectueuses ne sont pas les mêmes selon les unités : 5% des pièces fabriquées par U1, 3% des pièces fabriquées par U2 et 4% des pièces fabriquées par U3 sont défectueuses.
Ces informations se traduisent de la sorte :

$$p_{U_1}(D) = 0{,}05 \;\; ; \quad p_{U_2}(D) = 0{,}03 \quad ; \quad p_{U_3}(D) = 0{,}04$$

Question : peut-on calculer la probabilité d'avoir une pièce défectueuse $\boldsymbol{p(D)}$, à partir de ces probabilités ?

Il suffit de partir de la relation $\boldsymbol{p(D) = p(D \cap U_1) + p(D \cap U_2) + p(D \cap U_3)}$
et de se rappeler que : $\boldsymbol{p(D \cap U_i) = p_{U_i}(D) p(U_i)}$
On obtient ainsi la relation (formule des probabilités totales) :

$$\boldsymbol{p(D) \;=\; p_{U_1}(D) p(U_1) + p_{U_2}(D) p(U_2) + p_{U_3}(D) p(U_3)}$$

On obtient numériquement : $\boldsymbol{p(D) = 0,05} \times 0{,}5 + \boldsymbol{0,03} \times 0{,}3 + \boldsymbol{0,04} \times 0{,}2$ = 0,042

Il y a 4,2% de pièces défectueuses sur l'ensemble de la production, ce pourcentage correspond à une moyenne pondérée des pourcentages de pièces défectueuses fabriquées par U1, U2 et U3.
De façon générale, la formule des probabilités totales permet d'exprimer la probabilité d'un événement comme moyenne pondérée de probabilités conditionnelles de cet événement sur un système complet d'événements.

BILAN FORMULE DES PROBABILITES TOTALES

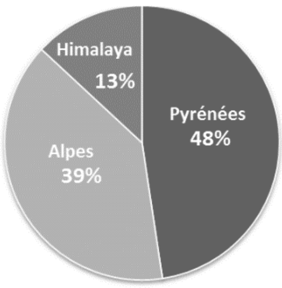
Soit A un événement et $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un système complet d'événements. La probabilité de l'événement A s'exprime comme "moyenne" des probabilités conditionnelles $\boldsymbol{p_{A_i}(A)}$ pondérée par les $\boldsymbol{p(A_i)}$:

$$\boldsymbol{p(A) = \sum_{i=1}^{n} p_{A_i}(A)\, p(A_i)}$$

EXERCICE – PROBABILITES CONDITIONNELLES

EXERCICE V : CLIENTELE AGENCE DE VOYAGE – CORRIGE P30

On s'intéresse à la clientèle d'une agence de voyage spécialisée dans les randonnées. Celle-ci est constituée de 6785 randonneurs (clients).
L'agence, située dans les Pyrénées, offre trois types de destinations : les Pyrénées, les Alpes et l'Himalaya.



On s'intéresse à la clientèle retraitée de cette agence.
Le tableau suivant donne la proportion de retraités par destination :

	Proportion de retraités (par destination)
Pyrénées	27%
Alpes	18%
Himalaya	8%

Tirage d'un client

On choisit au hasard un client de l'agence

1. Donner un univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Traduire les données du graphique et du tableau par des probabilités.
3. Quelle est la probabilité que le client choisi soit retraité ?
4. Quelle est la probabilité que le client soit retraité et ait choisi les Pyrénées pour destination.
5. Le client tiré au sort a choisi comme destination les Pyrénées. Quelle est la probabilité qu'il soit retraité ?
6. Le client tiré au sort est retraité. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi les Pyrénées comme destination ?

INDEPENDANCE

INTRODUCTION

Reprenons l'exemple des pièces dans l'usine

Une usine de fabrication de pièces métalliques comprend trois unités de fabrication : U1, U2 et U3.
Ces unités fabriquent le même type de pièce en proportion différentes : 50%, 30% et 20%.
On choisit une pièce au hasard.
Imaginons que les taux de pièces défectueuses soient les mêmes pour chaque unité : 5% des pièces fabriquées par U1, U2 ou par U3.

$$p_{U1}(D) = p_{U2}(D) = p_{U3}(D) = 0{,}05$$

On aura donc aussi 5% de pièces défectueuses dans l'ensemble de la production : $p(D) = 0{,}05$

$\boldsymbol{p_{U1}(D) = p(D)}$ **: la probabilité de réalisation de D est la même que U1 soit réalisé ou pas, on dit que les événements U1 et D sont indépendants.**

SIGNIFICATION DE L'INDEPENDANCE

- Deux événements **A et B** sont **indépendants** si la probabilité de réalisation de l'un n'est pas liée à la réalisation de l'autre c'est-à-dire si $p_B(A) = p(A)$ ou $p_A(B) = p(B)$

- **L'événement impossible** est indépendant de tout autre événement.

- Deux événements (non impossibles) incompatibles ne sont **jamais indépendants** car la réalisation de l'un rend impossible la réalisation de l'autre :

Comme $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, on peut dire que $p(A \cap B) = 0 \Longrightarrow p_B(A) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{p_B(A) \neq p(A)}$

NOTION INTUITIVE ?

L'indépendance de deux événements n'est pas toujours une notion intuitive :

- Elle l'est lorsque les événements sont issus d'**expériences indépendantes.**
  Prenons, par exemple, comme expérience le jet de deux dés, un rouge et un bleu.
  Notons R et B, les événements suivants :
  R : « obtenir un six avec le dé rouge »
  B : « obtenir un six avec le dé bleu »
  Les événements R et B sont indépendants, la probabilité d'avoir un six avec le dé bleu, ne dépend pas du résultat du dé rouge : $p_R(B) = p(B)$. Ce résultat est intuitif, il traduit le fait que les deux expériences sont indépendantes, les deux jets sont indépendants.

- Elle l'est un peu moins lorsqu'il n'y a qu'une seule expérience.
  Prenons, par exemple, comme expérience le jet s'un dé.
  Notons A, B et C, les événements suivants :
  A : « obtenir un numéro de face pair » $\Leftrightarrow A = \{2, 4, 6\}$

B : « obtenir un numéro de face inférieur ou égal à 2 » $\Leftrightarrow B = \{1,2\}$: $p(B) = {}^{1}/_{3}$

C : « obtenir un numéro de face inférieur ou égal à 3 » $\Leftrightarrow C = \{1,2,3\}$: $p(C) = {}^{1}/_{2}$

On remarque que : $p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} = {}^{1}/_{3} = p(B)$ et que $p_A(C) = \frac{p(A\cap C)}{p(A)} = {}^{1}/_{3} \neq p(C)$

Bilan : A et B sont indépendants, A et C ne sont pas indépendants.

Ces résultats peuvent paraître contre-intuitifs, surtout si l'on pense à la situation précédente des expériences indépendantes. Ils ne le sont pas tant que ça.

L'indépendance (avec l'hypothèse d'équiprobabilité) ici de A et B signifie que la proportion de résultats favorables à B est la même dans A que dans Ω. Ce qui n'est pas le cas pour A et C (évidemment pour pouvoir comparer une probabilité à une proportion de résultats favorables, il faut supposer l'équiprobabilité)

DEFINITION « OFFICIELLE » DE L'INDEPENDANCE

Pour ne pas avoir à introduire de discussion sur l'éventuelle impossibilité des événements en jeu, on préfère habituellement utiliser la définition suivante valable que les événements soient possibles ou non. Cette définition perd en signification

Soit A et B deux événements, A et B sont **indépendants** si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

La définition obtenue perd en signification et nous n'oublierons pas la première approche :

A et B sont **indépendants** si la probabilité de réalisation A n'est pas liée à la réalisation de B c'est-à-dire si $p_B(A) = p(A)$.

PROPRIETES

- Si B est de probabilité non nulle : **« A et B indépendant » $\Leftrightarrow$ $p_B(A) = p(A)$**
- Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ ont indépendants.
- Des événements issus **d'expériences indépendantes** sont (**mutuellement**) **indépendants** (ex : tirage avec remise)

EN RESUME : DEUX REGLES IMPORTANTES DU CALCUL DES PROBABILITES

Règle d'addition p(A∪ B)

A et B sont-ils incompatibles ?

- oui : P(A∪B)=p(A)+p(B)
- non : P(A∪B)=p(A)+p(B) – p(A∩B)

Règle de multiplication p(A∩ B)

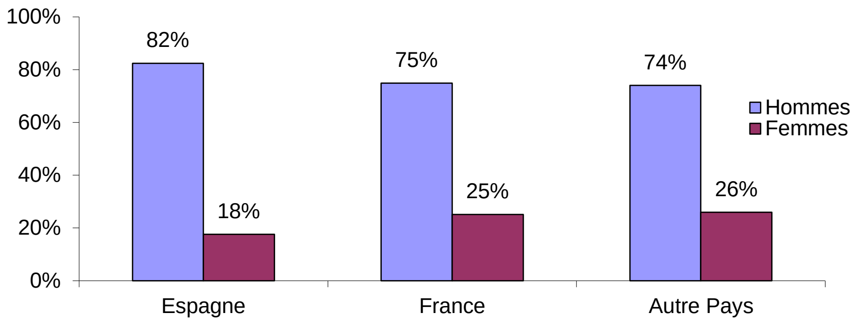
A et B sont-ils indépendants ?

- oui : P(A∩B)=p(A)×p(B)
- non : P(A∩B)=p(A)×p_A(B)

EXERCICES – PROBABILITES CONDITIONNELLES ET INDEPENDANCE

EXERCICE VI – ENQUETE – CORRIGE P31

On choisit au hasard un individu parmi les randonneurs les 4318 randonneurs.



1. À quelles probabilités correspondent les pourcentages du graphique ci-dessus ?
2. A partir de ces probabilités, peut-on calculer la probabilité que l'individu choisi soit un homme ?
3. Peut-on dire que les événements « l'individu choisi est un homme » et « l'individu choisi est espagnol » sont indépendants ?
4. *Peut-on dire que les événements « l'individu choisi est un homme » et « l'individu choisi est français » sont indépendants ?

Corrigé exo VI (Vidéo)

Test d'entrainement

QCM – PROBABILITES CONDITIONNELLES ET INDEPENDANCE

EXERCICE VII – RECAPITULATIF – CORRIGE P32

Un virus circule dans une population, parmi les personnes infectées par celui-ci certaines ne présentent aucun symptôme, d'autres développent une maladie grave.
Un test de dépistage a été mis au point, mais comme tout test, il ne donne pas toujours le bon résultat et deux types d'erreurs existent :

- Certains individus ne sont pas porteurs du virus obtiennent un test positif : ce sont les « faux positifs ». Pour le test qui a été élaboré, il y a « 1% de faux positif » ce qui signifie que 1% des individus non porteurs du virus sont positifs.
- De même pour les « faux négatifs » (diagnostic plus problématique), nous avons pour ce test « 30% de faux négatifs », c'est-à-dire que 30% des individus porteurs du virus ont un test négatif.

A. On choisit un individu au hasard dans la population. Pourquoi peut-on déduire directement des taux de « faux positifs » et de « faux négatifs » que les événements « l'individu choisi est positif » et « l'individu choisi est malade » ne sont pas indépendants *(ce qui est assez intuitif au passage…)*
B. On suppose que 2% des individus de la population sont porteurs du virus.
    a. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans cette population soit positif au test ?
    b. Un individu est positif au test, quelle est la probabilité qu'il soit vraiment porteur du virus ?
    c. Les événements P et M sont
C. Même questions en supposant maintenant que 10% des individus de la population soient porteurs du virus.
D. *Plus difficile.* On ne connait pas la proportion de porteurs du virus dans la population, par contre on sait que 5% des individus de cette population ont un test positif.
   Quelle est la proportion de porteur du virus dans la population ?

EXERCICE VIII - RECAPITULATIF – CORRIGE P33

La population des 4650 allocataires de la CAF d'une partie du Béarn a été étudiée en décembre 2008.
On s'intéresse à deux caractéristiques de ces allocataires :

- Leur nombre d'enfants,
- S'ils sont ou non bénéficiaires du RMI.

RMI	non bénéficiaire	bénéficiaire	Total général
pas d'enfant	86%	14%	984
1 ou 2 enfants	98%	2%	1024
au moins 3 enfants	97%	3%	2039

A. <u>Tirage d'un allocataire</u>
   On choisit un allocataire au hasard
   1. Donner un univers associé à cette expérience aléatoire.
   2. Traduire les données du tableau par des probabilités
   3. Quelle est la probabilité que l'allocataire choisi soit bénéficiaire du RMI ?
   4. Quelle est la probabilité que l'allocataire choisi soit sans enfant et bénéficiaire du RMI ?
   5. L'allocataire choisi est sans enfant. Quelle est la probabilité qu'il soit bénéficiaire du RMI ?
   6. L'allocataire choisi est bénéficiaire du RMI. Quelle est la probabilité qu'il soit sans enfant ?

B. Erreurs de traitements dans les données

Lors du traitement statistique du fichier, les 4650 allocataires ont été classés en deux catégories :

- Catégorie A : « avec enfant(s) »,
- Catégorie S : « sans enfant »

Il y a malheureusement eu des erreurs manipulation du fichier. En conséquence 6% des allocataires sans enfant ont été classés A et 2% des allocataires avec enfant(s) ont été classé S.

On choisit un allocataire au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait été classé A ?
2. L'allocataire choisi a été classé S. Quelle est la probabilité qu'il soit réellement sans enfant ?
3. Quelle est la probabilité que l'allocataire choisi ait été mal classé ?
4. L'allocataire choisi a été mal classé. Quelle est la probabilité qu'il ait été classé A ?

COMPLEMENT 2 : VARIABLES ALEATOIRES – ESPERANCE ET VARIANCE

ESPERANCE

Reprenons l'exemple suivant :

Expérience aléatoire : on jette un dé.

Variable aléatoire : on définit la variable X représentant le gain au jeu suivant :

- Si on obtient un « six », on gagne 10€ ($X = 10$)
- Si on obtient une autre face, on perd 5€ ($X = -5$)

Loi de probabilité : $\left\{\left(-5, {}^{5}/_{6}\right), \left(10, {}^{1}/_{6}\right)\right\}$

SIMULATIONS SOUS PYTHON

1. **Module random**

   Le module **random** est un module qui regroupe des fonctions permettant de simuler le hasard et générant des nombres aléatoires (en fait pseudo-aléatoires puisqu'ils sont générés à partir d'algorithmes et quoi de plus déterministe qu'un algorithme ?).

   Les fonctions les plus usuelles sont les suivantes :

   - **random()** : renvoie un nombre réel (float) choisi a hasard dans l'intervalle $[0,1[$
   - **randint(a,b)** : renvoie un entier choisi au hasard entre **a** et **b** (compris)
   - **uniform(a,b)** : renvoie un réel (float) choisi au hasard entre **a** et **b** (compris)
   - **choice(liste)** : renvoie un élément choisi au hasard dans **liste**
   - **choices(liste, k=nombre)** : renvoie **k** éléments choisi au hasard, par un tirage **avec remise**, dans **liste**

     Il est possible d'affecter des poids aux éléments de la liste :

     choices(liste, weights = liste_poids, k= nombre)

     liste et **liste_poids** doivent bien sûr avoir le même nombre d'éléments et les valeurs de **liste_poids** peuvent être réelles.

   - **sample(liste, k=nombre)** : renvoie **k** éléments choisi au hasard, par un tirage **sans remise**, dans **liste**

     Depuis la version 3.9 de Python, il est possible d'affecter des poids aux éléments de la liste :

     sample(liste, counts = liste_poids, k= nombre)

     liste et **liste_poids** doivent bien sûr avoir le même nombre d'éléments.

EXEMPLES

```
rd.random()
# --> 0.22793383728382877 (réel au hasard entre 0 et 1
rd.uniform(3.5, 11)
# --> 4.188029020310396 (réel au hasard entre 3,5 et 11
rd.randrange(10)
# --> 4 (entier au hasard entre 0 et 10
rd.randrange(0, 51, 2)
# --> 44 (entier pair au hasard entre 0 et 50)
rd.choice(['un peu', 'beaucoup', 'passionément', 'à la folie', 'pas du tout'])
# --> 'beaucoup' (choix au hasard d'un élément de la liste['un peu',…])
rd.choices(['Bayonne', 'Anglet', 'Biarritz'], [50, 15, 10], k=6)
# --> ['Bayonne', 'Anglet', 'Bayonne', 'Bayonne', 'Bayonne', 'Bayonne']
# Choix de six éléments de la liste ['Bayonne', 'Anglet', 'Biarritz']
# Avec les pondérations 50 pour Bayonne, 15 pour Anglet et 10 pour Biarritz
```

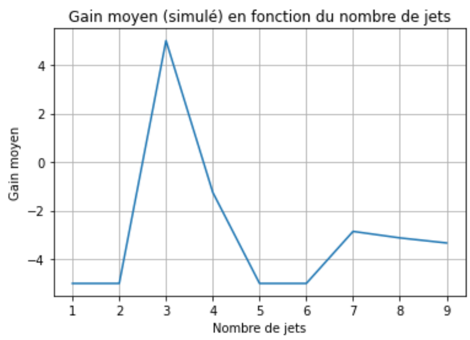
2. **Simulation de l'expérience : 10 jets d'un dé**
   - Simuler les 10 tirages et les enregistrer dans une liste **tirages**
   - À partir de **tirages** créer une liste **gains** des 10 gains correspondants.
     Ex : **tirages=[5,1,3,6,3,6,1,3,3,2] ⇒ gains=[-5,-5,-5,10,-5,10,-5,-5,-5,-5]**
   - Calculer le gain moyen
     Pour calculer le gain moyen, on pourra chercher une librairie proposant une fonction moyenne (et autres statistiques) ou, tout simplement, utiliser les fonctions **sum** et **len** disponibles.
3. **Simulation directe**
   Simuler directement un vecteur **gain** contenant les **10** gains correspondant aux **10** tirages.

4. **Evolution du nombre moyen de gain en fonction du nombre de jets**
   On souhaite comparer les gains moyens obtenus selon le nombre de jets.
   Le programme ci-dessous (à compléter) permet de représenter graphiquement l'évolution du gain moyen obtenu lors de la simulation du jet de 1,2…9 dés.

   Le programme non commenté

```
import matplotlib.pyplot as plt
x = [i for i in range(1,10)]
y=[]
for val in x :
   simul = [redacted]
   prop = [redacted]
   y.append(prop)
plt.plot(x,y)
plt.ylabel('Gain moyen')
plt.xlabel('Nombre de jets')
plt.title('Gain moyen (simulé) en fonction du nombre de jets')
plt.grid(True)
plt.show()
```

   Un résultat (dépend des simulations)



nme ci-dessus

   b. Augmentez le nombre de jets et commentez le graphique obtenu.

5. Le graphique obtenu dans la question 4.b laisse entrevoir l'existence d'une valeur « limite » E .
   a. Quelle est la valeur exacte de cette limite E.
   b. On jette un dé, et on note G la variable aléatoire associée au gain.
      - Rappelez la loi de G
      - Exprimez E en utilisant la loi de G

DEFINITION DE L'ESPERANCE

Si X est une variable aléatoire de loi $\{(x_i, p_i) \ / x_i \in X(\Omega\}, p_i = p(X = x_i)$ alors l'espérance $E(X)$ se calcule de la façon suivante :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

INTERPRETATION

E(X) est la moyenne que l'on obtiendrait en répétant "indéfiniment" l'expérience aléatoire

L'espérance est **un paramètre de tendance centrale** des valeurs de la variable aléatoire, c'est **un nombre réel, qui n'est pas aléatoire** et il ne correspond pas nécessairement à une valeur prise par la variable.

***Rermarque** : dans le cas de tirages dans une population P, sous l'hypothèse d'**équiprobabilité**, l'espérance d'une variable aléatoire correspond aussi **exactement** à la moyenne dans P de la variable statistique associée. Il y a, dans ce cas-là, deux interprétations de l'**espérance** comme **moyenne** : l'une **« limite »** sur une population infinie, l'autre **« exacte »** sur la population finie P, dans laquelle se fait le tirage.*

Application : une population d'étudiants comprend 20 étudiants âgés de 18 ans, 50 étudiants âgés de 19 ans et 30 étudiants âgés de 20 ans. On choisit un étudiant au hasard dans cette population et on s'intéresse à l'âge de l'étudiant choisi.

C'est une variable X dont l'espérance se calcule de la façon suivante :

$$E(X) = 0{,}2 \times 18 + 0{,}5 \times 19 + 0{,}3 \times 20 = 19{,}1$$

Deux interprétations de cette espérance :

- ***Sur un très grand nombre de tirages, on obtiendrait un âge moyen proche de 19,1ans***
- ***L'âge moyen dans la population P est de 19,1ans***

VARIANCE ET ECART-TYPE (FACULTATIF POUR L'INSTANT)

La variance est un paramètre de dispersion de la loi, elle permet de mesurer la dispersion des valeurs de la variable autour de son espérance. Comme l'espérance, c'est un **nombre réel** qui n'a **rien d'aléatoire**.

La variance de la variable aléatoire discrète X est le nombre réel positif noté $V(X)$ ou $VarX$ défini par :

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(X = x_i) \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \ \ (\sigma(X) : écart - type)$$

EXERCICES – VARIABLE ALEATOIRE ET ESPERANCE

EXERCICE IX – CORRIGE P35

Lors d'élections municipales dans le département des Landes, les résultats suivants ont été obtenus :

- 331 maires ont été élus,
- 15% des maires sont des femmes,
- On observe que le nombre moyen de mandats (de maire) chez ces élus est de 2 avec un écart-type de 1,15

On choisit un maire parmi les 331.

1. Introduire deux variables aléatoires X et Y associées à cette expérience aléatoire
2. Que sait-on de ces variables ? Connaît-on leur loi ? leur espérance ?

EXERCICE X – CORRIGE P35

Reprenons les données de l'exercice 2 de la page 11.

On s'intéresse à la fidélité des clients d'une agence de voyage. Une enquête a été menée auprès des 6542 clients qui ont effectués leur premier séjour avec cette agence en 2010.

Une première étude a montré que :

- 70% de ces clients étaient satisfaits ou très satisfaits de leur premier séjour.
- 33% ont effectué avec l'agence un autre séjour sur la période 2010-2013 :

Nombre de séjours sur la période 2010-2013	1	2	3	4	Total
Nb de clients	4383	1112	720	327	6542
%	67%	17%	11%	5%	100%

Ce qui donne un nombre moyen de 1,54 séjour avec l'agence sur la période 2010-2013

On choisit un client au hasard parmi les 6542

1. On note X, le nombre de séjour(s) du client choisi (nombre de séjours effectués dans l'agence sur la période 2010-2013).
   a. Donner la loi de X.
   b. Par quel calcul numérique obtiendrait-on l'espérance de X ?
   c. Quelle est la valeur de cette espérance (il n'y a pas de calcul à faire) ? Il s'agit en même temps d'une valeur exacte et limite, expliquer pourquoi.
2. Définir, sur cette expérience, une variable aléatoire de Bernoulli. Donner sa loi et son espérance. Que remarque-t-on ?

CORRIGES EXERCICES ET APPLICATIONS

CORRECTION EXERCICE I - P10

A. On choisit au hasard un randonneur parmi les 4318 randonneurs interrogés au cours des étés 2004 et 2005.

1. Donner un univers associé à cette expérience.

   L'univers est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience. Le résultat d'un tirage étant un randonneur, l'univers est l'ensemble des randonneurs.

   $$\boldsymbol{card(\Omega) = 4318}$$

2. Donner un exemple d'événement associé à cette expérience pour lequel on peut donner une probabilité. S'agit-il d'une valeur exacte ou approchée ?

   30% des randonneurs portent des chaussures de haute montagne.
   On note H l'événement « le randonneur choisi porte des chaussures de haute montagne ».
   On suppose que chaque randonneur a la même chance d'être choisi, d'où l'équiprobabilité :

   $$\boldsymbol{p(H) = \frac{cardH}{card\Omega}}$$

   Or le quotient $\frac{cardH}{card\Omega}$ correspond exactement à 30%, proportion dans la population.
   $\boldsymbol{p(H) = 0,3}$: cette probabilité est une valeur exacte : elle a été obtenue grâce à l'hypothèse d'équiprobabilité et il n'a pas été nécessaire d'expérimenter pour l'obtenir.

B. On choisit au hasard un randonneur parmi ceux effectuant l'ascension de l'Aneto, des Posets ou du Mont Perdu.

1. Donner un univers associé à cette expérience.

   Cette fois-ci l'univers est l'ensemble des randonneurs effectuant l'ascension de l'Aneto, des Posets ou du Mont Perdu. On ne connait pas précisément l'univers et notamment son cardinal.

2. Donner un exemple d'événement associé à cette expérience pour lequel on peut donner une probabilité. S'agit-il d'une valeur exacte ou approchée ?

   Comme on ne connait pas le cardinal de l'univers on ne peut pas utiliser la formule $\frac{cardH}{card\Omega}$ et déterminer de façon exacte les probabilités.
   Par contre 30% correspond à la fréquence obtenue pour l'événement H au cours d'une répétition de l'expérience 4318 fois. 0,3 peut être considéré comme une valeur approchée (on ne connaît pas trop la précision) de p(H) selon la loi des grands nombres.

C. Événements compatibles et incompatibles

On choisit au hasard un randonneur parmi les 4318 randonneurs interrogés au cours des étés 2004 et 2005.

1. Donner un exemple de deux événements incompatibles associés à l'expérience précédente du A.

   On suppose qu'un randonneur ne peut pas porter deux types de chaussures différentes.
   Si on note S l'événement, « le randonneur chois porte des sandales », on peut donc en déduire que :

   $$\boldsymbol{S \cap H} = \emptyset$$

   Les événements S et H sont incompatibles

1. Donner trois événements « deux à deux » incompatibles

   Soit l'événement R : « le randonneur choisi porte des chaussures de randonnée »
   Les événements S,H et R sont deux à deux incompatibles

CORRECTION EXERCICE II – P11

On s'intéresse à la fidélité des clients d'une agence de voyage.
Une enquête a été menée auprès des 6542 clients qui ont effectués leur premier séjour avec cette agence en 2010.
Une première étude a montré que :

- 70% de ces clients étaient satisfaits ou très satisfaits de leur premier séjour.
- 33% ont effectué avec l'agence un autre séjour sur la période 2010-2013 :

Nombre de séjours sur la période 2010-2013	1	2	3	4	Total
Nb de clients	4383	1112	720	327	6542
%	67%	17%	11%	5%	100%

Ce qui donne un nombre moyen de 1,5 séjour avec l'agence sur la période 2010-2013

ON CHOISIT UN CLIENT AU HASARD PARMI LES 6542

1. Introduire deux variables, dont une de Bernoulli, associées à cette expérience aléatoire.
   On note X, le nombre de séjour(s) du client choisi (nombre de séjours effectués dans l'agence sur la période 2010-2013).
   Exemple de variable de Bernoulli.
   $$\boldsymbol{Y = \begin{cases} 1 \text{ si le client choisi est satisfait de son premier séjour} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$
2. Donner la loi de ces deux variables
   <u>Loi de X</u>
   Forme tabulaire :

$\boldsymbol{x_i}$	1	2	3	4
$\boldsymbol{p(X = x_i)}$	0,67	0,17	0,11	0,05

Forme ensembliste : $\{(\mathbf{1}; \mathbf{0,67}), (\mathbf{2}; \mathbf{0,17}), (\mathbf{3}; \mathbf{0,11}), (\mathbf{4}; \mathbf{0,05})\}$

<u>Loi de Y</u>
Forme tabulaire :

$\boldsymbol{y_i}$	0	1
$\boldsymbol{p(Y = y_i)}$	0,3	0,7

Forme ensembliste : $\{(\mathbf{1}; \mathbf{0,7}), (\mathbf{0}; \mathbf{0,3})\}$

CORRIGE EXERCICE III : AXIOMES DE KOLMOGOROV ET PROPRIETES -P13

A partir des axiomes de Kolmogorov, montrer les propriétés suivantes :

- $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- $p(\emptyset) = 0$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Rappel des axiomes

1. $\boldsymbol{p(A) \geq 0}$
2. $\boldsymbol{p(\Omega) = 1}$
3. $\boldsymbol{A_1, A_2 \ldots A_n \ldots}$ événements deux à deux incompatibles : $\boldsymbol{p(A_1 \cup A_2 \ldots) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots}$

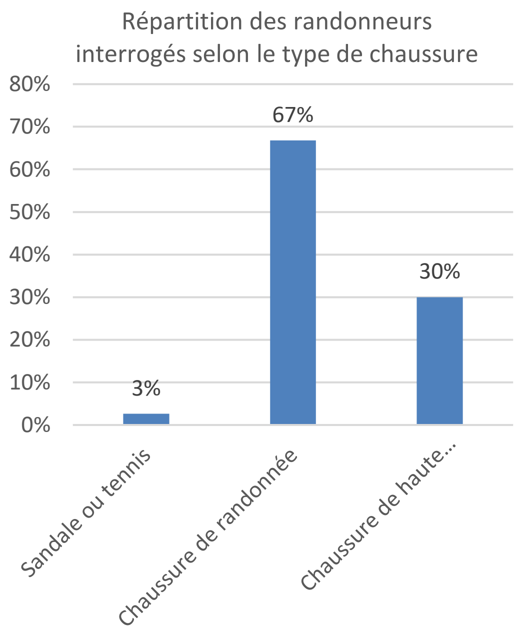
- $\boldsymbol{p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)}$
  $\mathbf{A - B}$ et $\mathbf{A \cap B}$ sont incompatibles et $\mathbf{A = (A - B) \cup (A \cap B)}$
  D'après l'axiome 3, on obtient donc : $\mathbf{p(A) = p(A - B) + p(A \cap B)}$
  D'où la propriété : $\mathbf{p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)}$

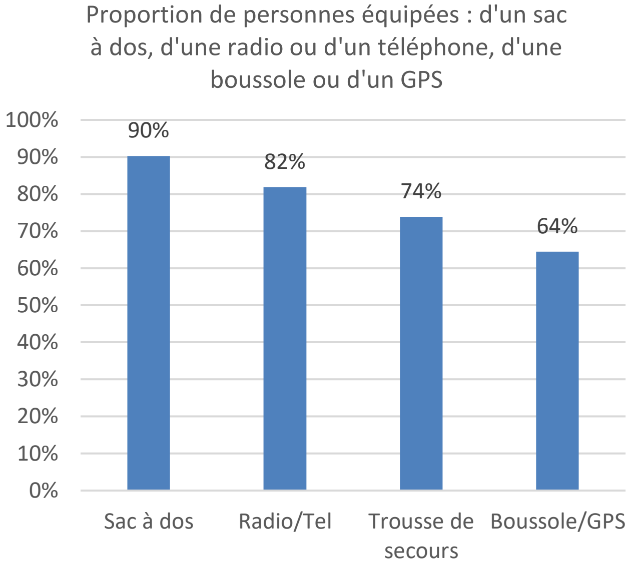
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
  De même $\mathbf{A}$ et $\bar{\mathbf{A}}$ sont incompatibles et $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{A} \cup \bar{\mathbf{A}}$
  D'après l'axiome 3 : $\mathbf{p}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{p}(\mathbf{A}) + \mathbf{p}(\bar{\mathbf{A}})$
  D'après l'axiome 2 : $\mathbf{p}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{1}$
  Donc $\mathbf{p}(\mathbf{A}) + \mathbf{p}(\bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{1}$ et $\mathbf{p}(\bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{1} - \mathbf{p}(\mathbf{A})$

- $p(\emptyset) = 0$
  $\emptyset = \bar{\boldsymbol{\Omega}}$
  D'après la propriété précédente : $\mathbf{p}(\emptyset) = \mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\Omega}}) = \mathbf{1} - \mathbf{p}(\boldsymbol{\Omega})$
  D'après l'axiome 2 : $\mathbf{p}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{1}$
  Donc : $\mathbf{p}(\emptyset) = \mathbf{1} - \mathbf{1} = \mathbf{0}$

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ et $\mathbf{B}$ sont incompatibles et $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup \mathbf{B}$
  D'après l'axiome 3, on obtient donc : $\mathbf{p}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{p}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{p}(\mathbf{B})$
  D'après la première propriété démontrée : $\mathbf{p}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{p}(\mathbf{A}) - \mathbf{p}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$
  Donc : $\mathbf{p}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{p}(\mathbf{A}) - \mathbf{p}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + \mathbf{p}(\mathbf{B}) = \mathbf{p}(\mathbf{A}) + \mathbf{p}(\mathbf{B}) - \mathbf{p}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

CORRIGE EXERCICE IV - ENQUETE -P13





On choisit au hasard un randonneur parmi les **4318 randonneurs interrogés au cours des étés 2004 et 2005**.

1. Donner un exemple de deux événements compatibles.
   On note T l'événement « le randonneur choisi a un téléphone », on peut a priori penser qu'il existe des randonneurs ayant un téléphone et des chaussures de haute montagne : T et A sont compatibles.

2. Justifiez pourquoi ils sont compatibles.
   $p(A) + p(T) = 0,3 + 0,82 = 1,12 > 1$
   Or $p(A \cup T) = p(A) + p(T) - p(A \cap T)$, ce qui implique que $p(A \cap T) = p(A) + p(T) - p(A \cup T)$

$$p(A \cup T) \leq 1 \Longrightarrow p(A \cap T) \geq p(A) + p(T) - 1$$

$$\Rightarrow p(A \cap T) \geq 1,12 - 1 \Rightarrow p(A \cap T) \geq 0,12$$

On est certain qu'il y a au moins 12% des randonneurs qui ont, à la fois des chaussures de haute montagne et un téléphone, et donc que les deux événements sont compatibles.

CORRIGE EXEMPLE D'INTRODUCTION

On choisit au hasard un randonneur parmi les 4318 randonneurs interrogés. On note H et E les événements suivants : H : « le randonneur choisi est un homme » ; E : « le randonneur choisi est espagnol »

Dans la population étudiée, on a observé que 82% des randonneurs espagnols étaient des hommes.

1. Écrire 0,82 comme quotient de deux cardinaux utilisant les ensembles H et E.

   Le pourcentage 82% ne porte pas sur toute la population, mais uniquement sur les randonneurs espagnols.

   $$0,82 = \frac{\text{nombre de randonneurs espagnols et masculins}}{\text{nombre de randonneurs espagnols}}$$

   $$\Rightarrow 0,82 = \frac{card(H \cap E)}{card(E)}$$

2. En déduire, à partir de l'hypothèse d'équiprobabilité, une expression de 0,82 comme quotient de deux probabilités.

   Si on suppose s'équiprobabilité :

   $$p(H \cap E) = \frac{card(H \cap E)}{card(\Omega)} \text{ et } p(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)}$$

   $$\Rightarrow 0,82 = \frac{card(H \cap E)}{card(E)} = \frac{card(H \cap E)/card(\Omega)}{card(E)/card(\Omega)} = \frac{p(H \cap E)}{p(E)}$$

   Le quotient obtenu permet de définir la notion de probabilité conditionnelle : $0,82 = p_E(H)$

   Pour traduire ce pourcentage en probabilité, il faudrait que l'univers ne soit plus l'ensemble des randonneurs mais l'ensemble des randonneurs espagnols.

   0,82 est la probabilité d'avoir un homme si on choisit un randonneur parmi les espagnols.

   On dit aussi que 0,82 est LA PROBABILITE <u>CONDITIONNELLE</u> D'AVOIR UN HOMME <u>SACHANT</u> QU'IL EST ESPAGNOL, elle se note $p_E(H)$.

   $$0,82 = p_E(H) = \frac{p(H \cap E)}{p(E)}$$

   De façon générale : $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

3. De même, comment pourrait-on écrire, de même, la probabilité 0,18 ?

   0,18 correspond à la proportion de femmes ($\overline{H}$) parmi les espagnols et donc à la probabilité conditionnelle $p_E(\overline{H})$

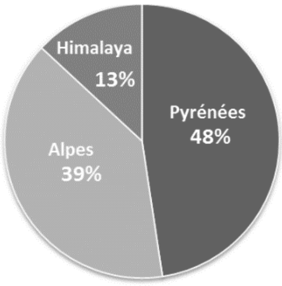
   $$\Rightarrow 0,18 = \frac{card(\overline{H} \cap E)}{card(E)} = \frac{p(\overline{H} \cap E)}{p(E)} = p_E(\overline{H})$$

4. En déduire, en la justifiant, une propriété : $p_B(\bar{A}) = \cdots$

   $p_E(\overline{H}) = 1 - p_E(H)$ et de façon générale $p_B(\overline{A}) = 1 - p_B(A)$

CORRIGE EXERCICE V : CLIENTELE AGENCE DE VOYAGE – P16

On s'intéresse à la clientèle d'une agence de voyage spécialisée dans les randonnées. Celle-ci est constituée de 6785 randonneurs (clients).
L'agence, située dans les Pyrénées, offre trois types de destinations : les Pyrénées, les Alpes et l'Himalaya.



On s'intéresse à la clientèle retraitée de cette agence.
Le tableau suivant donne la proportion de retraités par destination :

	Proportion de retraités (par destination)
Pyrénées	27%
Alpes	18%
Himalaya	8%

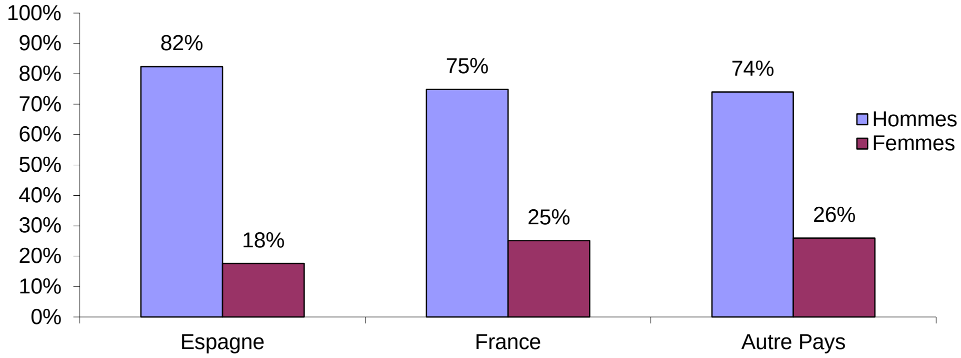
On choisit au hasard un client de l'agence

1. Donner un univers associé à cette expérience aléatoire.
   L'univers est l'ensemble des 6785 clients de l'agence
2. Traduire les données du graphique et du tableau par des probabilités.
   On note :
   H : « l'Himalaya est la destination du séjour du client choisi »
   P : « les Pyrénées sont la destination du séjour du client choisi »
   A : « les Alpes sont la destination du séjour du client choisi »
   R : « le client choisi est retraité »
   Traduction des données du graphique :
   $$p(P) = 0,48\,;\ p(A) = 0,39\,;\ p(H) = 0,13$$
   Données su tableau :
   $$p_P(R) = 0,27\ ;\ p_A(R) = 0,18\ ;\ p_H(R) = 0,08$$
3. Quelle est la probabilité que le client choisi soit retraité ?
   $\{H, P, A\}$ est un système complet d'événements, on applique la formule des probabilités totales :
   $$p(R) = p_P(R)p(P) + p_A(R)p(A) + p_H(R)p(H)$$
   $$p(R) = 0,27 \times 0,48 + 0,18 \times 0,39 + 0,08 \times 0,13 = 0,21$$
4. Quelle est la probabilité que le client soit retraité et qu'il ait choisi les Pyrénées pour destination.
   $$p(R \cap P) = p_P(R)p(P) = 0,27 \times 0,48 = 0,13$$
5. Le client tiré au sort a choisi comme destination les Pyrénées. Quelle est la probabilité qu'il soit retraité ?
   $$p_P(R) = 0,27$$
6. Le client tiré au sort est retraité. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi les Pyrénées comme destination ?
   $$p_R(P) = \frac{p(R \cap P)}{p(R)} = \frac{p_P(R)p(P)}{p(R)} = \frac{0,27 \times 0,48}{0,21} = 0,62$$

CORRIGE EXERCICE VI – PROBABILITES CONDITIONNELLES ET INDEPENDANCES P19

ENQUETE PYRENEES

On choisit au hasard un individu parmi les randonneurs les 4318 randonneurs.



1. À quelles probabilités correspondent les pourcentages du graphique ci-dessus ?
   On note :
   E : « Le randonneur choisi habite en Espagne »
   F : « Le randonneur choisi habite en France »
   A : « Le randonneur choisi habite dans un autre pays »
   H : « Le randonneur choisi est un homme »
   $\overline{\mathbf{H}}$: « le randonneur choisi est une femme »

   Les pourcentages du graphique peuvent se traduire par les probabilités suivantes :
   $$p_E(H) = 0,82\ ;\ p_E(\overline{H}) = 0,18$$
   $$p_F(H) = 0,75\ ;\ p_F(\overline{H}) = 0,25$$
   $$p_A(H) = 0,74\ ;\ p_A(\overline{H}) = 0,26$$

2. A partir de ces probabilités, peut-on calculer la probabilité que l'individu choisi soit un homme ?
   Pour calculer $p(H)$ il faudrait pouvoir appliquer la formule des probabilités totales qui nécessite la connaissance de $p(E)$, $p(F)$ et $p(A)$: $p(H) = p_E(H)p(E) + p_F(H)p(F) + p_A(H)p(A)$
   On ne connait pas $p(E,)$ $p(F)$ et $p(A)$, on ne peut donc pas calculer $p(H)$.
   Ce que l'on peut dire, c'est que $p(H)$ est une moyenne de $p_E(H)$, $p_F(H)$, $p_A(H)$
   Comme : $p_E(H) > p_F(H) > p_A(H)$, on est sûr que $p_E(H) > p(H) > p_A(H)$

3. Peut-on dire que les événements « l'individu choisi est un homme » et « l'individu choisi est espagnol » sont indépendants ?
   D'après la remarque précédente : $p_E(H) > p(H)$ donc $p_E(H) \neq p(H)$
   E et H ne sont pas indépendants

4. *Peut-on dire que les événements « l'individu choisi est un homme » et « l'individu choisi est français » sont indépendants ?
   D'après la remarque de la question 2, on sait que $p_E(H) \neq p(H)$ et $p_A(H) \neq p(H)$ par contre on ne peut pas être sûr que $p_F(H)$ est différent de p(H).
   On ne sait donc pas si H et F sont indépendants ou liés.

CORRIGE EXERCICE VII – PROBABILITES CONDITIONNELLES – P20

- Certains individus ne sont pas porteurs du virus obtiennent un test positif : ce sont les « faux positifs ». Pour le test qui a été élaboré, il y a « 1% de faux positif » ce qui signifie que 1% des individus non porteurs du virus sont positifs.
- De même pour les « faux négatifs » (diagnostic plus problématique), nous avons pour ce test « 30% de faux négatifs », c'est-à-dire que 30% des individus porteurs du virus ont un test négatif.

A. On choisit un individu au hasard dans la population. Pourquoi peut-on déduire directement des taux de « faux positifs » et de « faux négatifs » que les événements « l'individu choisi est positif » et « l'individu choisi est malade » ne sont pas indépendants *(ce qui est assez intuitif au passage…)*

On introduit les notations suivantes :
$\boldsymbol{V}$: « l'individu choisi est porteur du virus »
$\boldsymbol{P}$: « L'individu choisi a un test positif »
Les données de l'énoncé se traduisent de la façon suivante :

Faux positifs : $\boldsymbol{p_{\overline{V}}(P) = 0,01 \implies p_{\overline{V}}(\overline{P}) = 0,99}$

Faux négatifs : $\boldsymbol{p_V(\overline{P}) = 0,3 \Rightarrow p_V(P) = 0,7}$

On a donc notamment : $\boldsymbol{p_{\overline{V}}(P) \neq p_V(P)}$: $\left(\boldsymbol{p_{\overline{V}}(P) < p_V(P)}\right)$

Or $\{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\overline{V}}\}$ étant un système complet d'événements, on sait que la formule des probabilités totales nous permet de calculer $\boldsymbol{p(P)}$ comme MOYENNE de $\boldsymbol{p_{\overline{V}}(P)}$ et $\boldsymbol{p_V(P)}$

$\implies \boldsymbol{p_{\overline{V}}(P) < p(P) < p_V(P)} \implies \boldsymbol{p(P) \neq p_V(P)}$: P et V ne sont donc pas indépendants

B. On suppose que 2% des individus de la population sont porteurs du virus.

a. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans cette population soit positif au test ?

On sait maintenant que : $\boldsymbol{p(V) = 0,02 \implies p(\overline{V}) = 0,98}$

$\{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\overline{V}}\}$ étant un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales : $\boldsymbol{p(P) = p(\overline{V})p_{\overline{V}}(P) + p(V)p_V(P) = 0,98 \times 0,01 + 0,02 \times 0,7 = 0,0238}$

« 2,4% des individus de la population sont testés positifs »

b. Un individu est positif au test, quelle est la probabilité qu'il soit vraiment porteur du virus ?

$$\boldsymbol{p_P(V) = \frac{p(P \cap V)}{p(P)} = \frac{p(V)p_V(P)}{p(P)} = \frac{0,02 \times 0,7}{0,0238} = 0,588}$$

« 59% des positifs sont porteurs du virus »

C. Même questions en supposant maintenant que 10% des individus de la population soient porteurs du virus.

$$\boldsymbol{p(V) = 0,1 \implies p(\overline{V}) = 0,9}$$

$$\boldsymbol{p(P) = p(\overline{V})p_{\overline{V}}(P) + p(V)p_V(P) = 0,9 \times 0,01 + 0,1 \times 0,7 = 0,0079}$$

$$\boldsymbol{p_P(V) = \frac{p(P \cap V)}{p(P)} = \frac{p(V)p_V(P)}{p(P)} = \frac{0,1 \times 0,7}{0,0079} = 0,88}$$

« 7,9% des individus de la population sont testés positifs et 88% des positifs sont porteurs du virus»

D. *Plus difficile.* On ne connait pas la proportion de porteurs du virus dans la population, par contre on sait que 5% des individus de cette population ont un test positif.
Quelle est la proportion de porteur du virus dans la population ?
On connait maintenant : $\boldsymbol{p(P)=0,05}$
Et on cherche la probabilité $\boldsymbol{p(V)}$ que l'on notera $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{p=p(V)}$

On a toujours la formule des probabilités totales :

$$\boldsymbol{p(P)=p(\overline{V})p_{\overline{V}}(P)+p(V)p_V(P)}$$

Avec la notation $\boldsymbol{p=p(V)}$ on obtient :

$$\boldsymbol{p(P)=(1-p)p_{\overline{V}}(P)+pp_V(P)}$$
$$\boldsymbol{p(P)=p_{\overline{V}}(P)+p\left(p_V(P)-p_{\overline{V}}(P)\right)}$$
$$\boldsymbol{p=\frac{p(P)-p_{\overline{V}}(P)}{p_V(P)-p_{\overline{V}}(P)}=\frac{0,05-0,01}{0,7-0,01}=0,057}$$

« 5,7% des individus de la population sont porteurs du virus »

Corrige Exercice VIII – Recapitulatif - p33

La population des 4047 allocataires de la CAF d'une partie du Béarn a été étudiée en décembre 2008.
On s'intéresse à deux caractéristiques de ces allocataires :

- Leur nombre d'enfants,
- S'ils sont ou non bénéficiaires du RMI.

RMI	non bénéficiaire	bénéficiaire	Total général
pas d'enfant	86%	14%	984
1 ou 2 enfants	98%	2%	1024
au moins 3 enfants	97%	3%	2039

A. Tirage d'un allocataire
On choisit un allocataire au hasard

1. Donner un univers associé à cette expérience aléatoire.
L'univers est l'ensemble des 4047 allocataires

2. Traduire les données du tableau par des probabilités
On note :
B : « l'allocataire choisi est bénéficiaire du RMI »
P : « l'allocataire choisi n'a pas d'enfant »
U : « l'allocataire choisi a un ou deux enfants »
T : « l'allocataire choisi a au moins 3 enfants »

Les pourcentages du tableau peuvent se traduire par les probabilités suivantes :

$$\boldsymbol{p_P(B)=0,86\,;\ p_P(\overline{B})=0,14}$$
$$\boldsymbol{p_U(B)=0,98\,;\ p_U(\overline{B})=0,02}$$
$$\boldsymbol{p_T(B)=0,97\,;\ p_T(\overline{B})=0,03}$$

A partir de la dernière colonne, on peut calculer :

$$\boldsymbol{p(P)=\frac{984}{4047}\ ;\ p(U)=\frac{1024}{4047}\ ;\ p(T)=\frac{2039}{4047}}$$

3. Quelle est la probabilité que l'allocataire choisi soit bénéficiaire du RMI ?
   On applique la formule des probabilités totales :
   $$p(B) = p_P(B)p(P) + p_U(B)p(U) + p_T(B)p(T) = \cdots$$
4. Quelle est la probabilité que l'allocataire choisi soit sans enfant et bénéficiaire du RMI ?
   $$p(B \cap P) = p_P(B)p(P) = 0{,}86 \times \frac{984}{4047}$$
5. L'allocataire choisi est sans enfant. Quelle est la probabilité qu'il soit bénéficiaire du RMI ?
   $$p_P(B) = 0{,}86$$
6. L'allocataire choisi est bénéficiaire du RMI. Quelle est la probabilité qu'il soit sans enfant ?
   $$p_B(P) = \frac{p(B \cap P)}{p(B)} = \frac{p_P(B)p(P)}{p(B)} = \cdots$$

<u>Erreurs de traitements dans les données</u>

Lors du traitement statistique du fichier, les 4650 allocataires ont été classés en deux catégories :

- Catégorie A : « avec enfant(s) »,
- Catégorie S : « sans enfant »

Il y a malheureusement eu des erreurs de manipulation du fichier. En conséquence 6% des allocataires sans enfant ont été classés A et 2% des allocataires avec enfant(s) ont été classé S.

Traduction de l'énoncé :
A : « l'allocataire choisi a été classé avec enfant »
S : « l'allocataire chois a été classé sans enfant »
6% des allocataires sans enfant ont été classés A : $p_P(A) = 0{,}06$
2% des allocataires avec enfant(s) ont été classé S : $p_{\overline{P}}(S) = p_{\overline{P}}(\overline{A}) = 0{,}02$
On choisit un allocataire au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait été classé A ?
   On connaît p(P) : $p(P) = \frac{984}{4047}$ et donc $p(\overline{P}) = 1 - p(P)$
   Formule des probabilités totales :
   $$p(A) = p_P(A)p(P) + p_{\overline{P}}(A)p(\overline{P}) = p_P(A)p(P) + \left(1 - p_{\overline{P}}(\overline{A})\right)\left(1 - p(P)\right)$$
   $$p(A) = p_P(A)p(P) + \left(1 - p_{\overline{P}}(S)\right)\left(1 - p(P)\right)$$
2. L'allocataire choisi a été classé S. Quelle est la probabilité qu'il soit réellement sans enfant ?
   $$p_S(P) = \frac{p(P \cap S)}{p(S)} = \frac{p_P(S)p(P)}{1 - p(A)} = \frac{\left(1 - p_P(A)\right)p(P)}{1 - p(A)}$$
3. Quelle est la probabilité que l'allocataire choisi ait été mal classé ?
   L'allocataire a été mal classé. Deux possibilités :
   - soit il est parent et il est classé sans enfant : $\overline{P} \cap S$
   - soit il n'a pas d'enfant et il est classe comme en ayant : $P \cap A = P \cap \overline{S}$

   Il faut donc calculer :
   $$p(M) = p[(\overline{P} \cap S) \cup (P \cap A)] = p(\overline{P} \cap S) + p(P \cap A) = p_{\overline{P}}(S)p(\overline{P}) + p_P(A)p(P)$$
4. L'allocataire choisi a été mal classé. Quelle est la probabilité qu'il ait été classé A ?
   $$p_M(A) = \frac{p(A \cap M)}{p(M)} = \frac{p(P \cap A)}{p(M)} = \frac{p_P(A)p(P)}{p_{\overline{P}}(S)p(\overline{P}) + p_P(A)p(P)}$$

CORRIGE EXERCICE IX - P25

Lors d'élections municipales dans le département des Landes, les résultats suivants ont été obtenus :

- 331 maires ont été élus,
- 15% des maires sont des femmes,
- On observe que le nombre moyen de mandats (de maire) chez ces élus est de 2 avec un écart-type de 1,15

On choisit un maire parmi les 331.

1. Introduire deux variables aléatoires X et Y associées à cette expérience aléatoire

   X : Nombre de mandats du maire choisi

   Y : variable de Bernoulli associée au sexe du maire choisi (Y=1 si le maire est une femme)

2. Que sait-on de ces variables ? Connaît-on leur loi ? leur espérance ?

   Variable X

   On ne connaît pas la loi de X, on connaît le nombre moyen de mandats et son écart-type :

   $$\boldsymbol{E(X) = 2} \textbf{ et } \boldsymbol{\sigma(X) = 1.15}$$

   Rappel : $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{varX}}$

   Variable Y

   Y est une variable Bernoulli

   Loi de Y : $\boldsymbol{\{(1, 0.15), (0, 0.85)\}}$

   Espérance : $\boldsymbol{E(Y) = 1 \times 0.15 + 0 \times 0.85 = 0.15}$

CORRIGE EXERCICE X - P25

Reprenons les données de l'exercice 2 de la page 11.

On s'intéresse à la fidélité des clients d'une agence de voyage. Une enquête a été menée auprès des 6542 clients qui ont effectués leur premier séjour avec cette agence en 2010.

Une première étude a montré que :

- 70% de ces clients étaient satisfaits ou très satisfaits de leur premier séjour.
- 33% ont effectué avec l'agence un autre séjour sur la période 2010-2013 :

Nombre de séjours sur la période 2010-2013	1	2	3	4	Total
Nb de clients	4383	1112	720	327	6542
%	67%	17%	11%	5%	100%

Ce qui donne un nombre moyen de 1,54 séjour avec l'agence sur la période 2010-2013

On choisit un client au hasard parmi les 6542

1. On note X, le nombre de séjour(s) du client choisi (nombre de séjours effectués dans l'agence sur la période 2010-2013).

   a. Donner la loi de X.

   Forme tabulaire :

$\boldsymbol{x_i}$	1	2	3	4
$\boldsymbol{p(X = x_i)}$	0,67	0,17	0,11	0,05

   Forme ensembliste : $\boldsymbol{\{(1; 0,67), (2; 0,17), (3; 0,11), (4; 0,05)\}}$

   b. Par quel calcul numérique obtiendrait-on l'espérance de X ?

   $$\boldsymbol{E(X) = 1 \times 0.67 + 2 \times 0.17 + 3 \times 0.11 + 4 \times 0.05}$$

c. Quelle est la valeur de cette espérance (il n'y a pas de calcul à faire) ? Il s'agit en même temps d'une valeur exacte et limite, expliquer pourquoi.
Comme il s'agit d'un tirage au hasard dans la population (équiprobabilité) on sait que l'espérance correspond exactement à la moyenne dans la population donc $\boldsymbol{E(X) = 1.54}$
L'interprétation fréquentiste étant toujours possible, l'espérance est aussi une valeur limite : il s'agit du nombre moyen de séjours que l'on obtiendrait en répétant le tirage un nombre infini de fois.

2. Définir, sur cette expérience, une variable aléatoire de Bernoulli. Donner sa loi et son espérance. Que remarque-t-on ?

$$\boldsymbol{Y = \begin{cases} \textbf{1 si le client choisi est satisfait de son premier séjour} \\ \textbf{0 sinon} \end{cases}}$$

<u>Loi de Y</u>
Forme tabulaire :

$\boldsymbol{y_i}$	0	1
$\boldsymbol{p(Y = y_i)}$	0,3	0,7

Forme ensembliste : $\{(\mathbf{1}; \mathbf{0}, \mathbf{7}), (\mathbf{0}; \mathbf{0}, \mathbf{3})\}$

<u>Espérance de Y</u>

$$\boldsymbol{E(Y) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.7 = 0.7}$$

L'espérance correspond exactement à la proportion de clients satisfaits dans la population (ou à la probabilité d'avoir un client satisfait)
Ce qui signifie que même pour les variables de Bernoulli, dont les valeurs 0 et 1 correspondent à un codage d'une variable qualitative (oui/non, vrai/faux…), le calcul de l'espérance à un sens.