CAPÍTULO 3

Álgebra de Boole e Simplificação de Circuitos Lógicos

3.1 Introdução

No capítulo anterior, trabalhamos com os circuitos lógicos sem nos preocuparmos com simplificações. Na prática, porém, estes circuitos obtidos admitem geralmente simplificações.

Para entrarmos no estudo da simplificação dos circuitos lógicos, teremos que fazer um breve estudo da Álgebra de Boole, pois é através de seus postulados, propriedades, teoremas fundamentais e identidades que efetuamos as mencionadas simplificações, e além disso, notamos que é na Álgebra de Boole que estão todos os fundamentos da Eletrônica Digital.

3.2 Variáveis e Expressões na Álgebra de Boole

Como vimos anteriormente, as variáveis booleanas são representadas através de letras, podendo assumir apenas dois valores distintos: 0 ou 1. Denominamos expressão booleana à sentença matemática composta de termos cujas variáveis são booleanas, da mesma forma, podendo assumir como resultado final 0 ou 1.

3.3 Postulados

A seguir, apresentaremos os postulados da complementação, da adição e da multiplicação da Álgebra de Boole, e suas respectivas identidades resultantes.

3.3.1 Postulados da Complementação

Este postulado, mostra como são as regras da complementação na álgebra de Boole. Chamaremos de $\overline{A}$ o complemento de A:

1º) Se $A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1$

2º) Se $A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0$

Através do postulado da complementação, podemos estabelecer a seguinte identidade:

$\overline{\overline{A}} = \mathbf{A}$

Se A = 1, temos: $\overline{A} = 0$ e se $\overline{A} = 0 \rightarrow \overline{\overline{A}} = 1$.

Se A = 0, temos: $\overline{A} = 1$ e se $\overline{A} = 1 \rightarrow \overline{\overline{A}} = 0$.

Assim sendo, podemos escrever: $\overline{\overline{A}} = A$.

O bloco lógico que executa o postulado da complementação é o Inversor.

3.3.2 Postulado da Adição

Este postulado, mostra como são as regras da adição dentro da Álgebra de Boole.

1º) $0 + 0 = 0$

2º) $0 + 1 = 1$

3º) $1 + 0 = 1$

4º) $1 + 1 = 1$

Através deste postulado, podemos estabelecer as seguintes identidades:

A+0 = A. A pode ser 0 ou 1, vejamos, então, todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow 0 + 0 = 0$

$A = 1 \rightarrow 1 + 0 = 1$

Notamos que o resultado será sempre igual à variável A.

A + 1 = 1. Vejamos todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow 0 + 1 = 1$

$A = 1 \rightarrow 1 + 1 = 1$

Notamos que se somarmos 1 a uma variável, o resultado será sempre 1.

A + A = A. Vejamos todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow 0 + 0 = 0$

$A = 1 \rightarrow 1 + 1 = 1$

Notamos que se somarmos a mesma variável, o resultado será ela mesma.

$\mathbf{A + \overline{A} = 1}$. Vejamos todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1 \rightarrow 0 + 1 = 1$

$A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0 \rightarrow 1 + 0 = 1$

Notamos que sempre que somarmos a uma variável o seu complemento, teremos como resultado 1.

O bloco lógico que executa o postulado da adição é o OU.

3.3.3 Postulado da Multiplicação

É o postulado que determina as regras da multiplicação booleana:

1º) $0 . 0 = 0$

2º) $0 . 1 = 0$

3º) $1 . 0 = 0$

4º) $1 . 1 = 1$

Através deste postulado, podemos estabelecer as seguintes identidades:

A . 0 = 0. Podemos confirmar, verificando todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow 0 . 0 = 0$

$A = 1 \rightarrow 1 . 0 = 0$

Notamos que todo número multiplicado por 0 é 0.

A . 1 = A. Analisando todas as possibilidades, temos:

$A = 0 \rightarrow 0 . 1 = 0$

$A = 1 \rightarrow 1 . 1 = 1$

Notamos que o resultado destas expressões numéricas será sempre igual a A.

A . A = A. Esta identidade, à primeira vista estranha, é verdadeira, como podemos confirmar pela análise de todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow 0 . 0 = 0$

$A = 1 \rightarrow 1 . 1 = 1$

Notamos que os resultados serão sempre iguais a A.

A . $\overline{A}$ = 0. Vamos analisar todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow 0 . 1 = 0$

$A = 1 \rightarrow 1 . 0 = 0$

Notamos que para ambos os valores possíveis que a variável pode assumir, o resultado da expressão será sempre 0.

O bloco lógico que executa o postulado da multiplicação é o E.

3.4 Propriedades

A seguir, descreveremos as principais propriedades algébricas, úteis principalmente, no manuseio e simplificação de expressões. Tal como na matemática comum, valem na Álgebra de Boole as propriedades comutativa, associativa e distributiva.

3.4.1 Propriedade Comutativa

Esta propriedade é válida tanto na adição, bem como na multiplicação:

Adição: $A + B = B + A$

Multiplicação: $A . B = B . A$

3.4.2 Propriedade Associativa

Da mesma forma que na anterior, temos a propriedade associativa válida na adição e na multiplicação:

Adição: $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

Multiplicação: $A . (B.C) = (A.B) . C = A.B.C$

3.4.3 Propriedade Distributiva

$A . (B + C) = A.B + A.C$

Vamos verificar esta propriedade através da tabela verdade, analisando todas as possibilidades:

A	B	C	A(B+C)	AB + AC
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Tabela 3.1

Notamos, pela tabela 3.1, que as expressões se equivalem.

3.5 Teoremas de De Morgan

Os teoremas de De Morgan são muito empregados na prática, em simplificações de expressões booleanas e, ainda, no desenvolvimento de circuitos digitais, como veremos em tópicos posteriores.

3.5.1 1º Teorema de De Morgan

O complemento do produto é igual à soma dos complementos:

$$\left(\overline{A \cdot B}\right) = \overline{A} + \overline{B}$$

Para provar este teorema, vamos montar a tabela da verdade de cada membro e comparar os resultados:

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Tabela 3.2

Notamos a igualdade de ambas as colunas.

Este teorema foi aplicado no item referente à equivalência entre blocos lógicos (capítulo 2).

O teorema pode ser estendido para mais de duas variáveis:

$$\left(\overline{A.B.C \ \ldots \ N}\right) = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \ \ldots \ + \overline{N}$$

3.5.2 2º Teorema de De Morgan

O complemento da soma é igual ao produto dos complementos.

Este teorema é uma extensão do primeiro:

$$\left(\overline{A.B}\right) = \overline{A} + \overline{B} \quad \leftarrow 1^{\text{º}} \text{ Teorema}$$

Podemos reescrevê-lo da seguinte maneira:

$$A.B = \left(\overline{\overline{A} + \overline{B}}\right)$$

Notamos que A é o complemento de $\overline{A}$ e que B é o complemento de $\overline{B}$. Vamos chamar $\overline{A}$ de X e $\overline{B}$ de Y. Assim sendo, temos:

$$\overline{X}.\overline{Y} = \left(\overline{X + Y}\right)$$

Reescrevendo, em termos de A e B, temos:

$$\overline{A}.\overline{B} = \left(\overline{A + B}\right) \quad \leftarrow 2^{\text{º}} \text{ Teorema}$$

Da mesma forma que no anterior, o teorema pode ser estendido para mais de duas variáveis:

$$\left(\overline{A + B + C + \ \ldots \ + N}\right) = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} \ldots \ \overline{N}$$

Notamos, também, a aplicação deste teorema no item relativo à equivalência entre blocos lógicos.

3.6 Identidades Auxiliares

A seguir, vamos deduzir três identidades úteis para a simplificação de expressões.

3.6.1) A + A . B = A

Provamos esta identidade, utilizando a propriedade distributiva. Vamos evidenciar A no 1º termo:

$$A(1 + B) = A$$

Do postulado da soma temos: $1 + B = 1$, logo podemos escrever:

$$A \cdot 1 = A \ \therefore \ A + AB = A$$

3.6.2) (A+B) . (A+C) = A + B.C

Vamos agora, provar esta identidade:

(A+B) . (A+C)

= A.A + A.C + A.B + B.C → Propriedade distributiva

= A + A.C + A.B + B.C → Identidade A.A = A

= A.(1 + B+C) + B.C → Propriedade distributiva

= A . 1 + B.C → Identidades: 1+ X = 1 e A . 1= A

∴ (A+B) . (A+C) = A + BC

3.6.3) $A + \overline{A}B = A + B$

Vamos, agora, provar esta identidade:

$A+\overline{A}.B = \overline{\overline{\left(A+\overline{A}.B\right)}}$ → Identidade $\overline{\overline{X}} = X$

$= [\overline{\overline{A}.(\overline{\overline{A}.B})}]$ → 2º Teorema de De Morgan: $\overline{\left(X + Y\right)} = \overline{X}.\overline{Y}$

$= [\overline{\overline{A}.(A+\overline{B})}]$ → 1º Teorema de De Morgan aplicado no parênteses: $\overline{X.Y} = \left(\overline{X}+\overline{Y}\right)$

$= (\overline{\overline{A}.A + \overline{A}.\overline{B}})$ → propriedade distributiva e identidade $\overline{A}.A = 0$

$= (\overline{\overline{A}.\overline{B}})$

= (A + B) → 1º Teorema de De Morgan

∴ $(A + \overline{A}.B) = A+B$

3.7 Quadro Resumo

POSTULADOS		
Complementação	**Adição**	**Multiplicação**
$A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1$ $A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0$	0 + 0 = 0 0 + 1 = 1 1 + 0 = 1 1 + 1 = 1	0 . 0 = 0 0 . 1 = 0 1 . 0 = 0 1 . 1 = 1
IDENTIDADES		
Complementação	**Adição**	**Multiplicação**
$\overline{\overline{A}} = A$	A + 0 = A A + 1 = 1 A + A = A $A + \overline{A} = 1$	A . 0 = 0 A . 1 = A A . A = A $A . \overline{A} = 0$
PROPRIEDADES		
Comutativa:	A + B = B + A A . B = B . A	
Associativa:	A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C A . (B . C) = (A . B) . C = A . B . C	
Distributiva:	A . (B + C) = A . B + A . C	
TEOREMAS DE MORGAN		
	$\left(\overline{A . B}\right) = \overline{A}+\overline{B}$ $\left(\overline{A + B}\right) = \overline{A}.\overline{B}$	
IDENTIDADES AUXILIARES		
	A + A . B = A $A + \overline{A} . B = A + B$ (A + B) . (A + C) = A + B . C	

Tabela 3.3

$B + \overline{B}C = B + C$