Phương trình tuyến tính cấp n hệ số hằng

Định nghĩa:

PT vp tuyến tính cấp n hệ số hằng là ptvp có dạng

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (1)$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (2)$$

Trong đó a_1, a_2 , … , a_n là các hằng số thực

PT (1) gọi là pt thuần nhất

PT (2) gọi là pt không thuần nhất

Phương trình tuyến tính cấp n hệ số hằng

Hệ hàm độc lập tuyến tính trên (a,b)

Hệ $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ được gọi là độc lập tuyến tính trong (a,b) nếu từ đẳng thức

$$\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\ldots+\lambda_n y_n(x)=0$$

Ta suy ra $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

Định thức Wronski của các hàm $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ có đạo hàm đến cấp (n-1) trong (a,b) là

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Phương trình tuyến tính cấp n hệ số hằng

Định lý: Cho các hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ có đạo hàm đến cấp (n-1) trong (a,b).

Nếu $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ thì hệ trên đltt trong (a,b)

Ví dụ: 2 hàm $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$ đltt với mọi x

Ta đi tính định thức Wronski của 2 hàm đã cho

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(1+x) \end{vmatrix} = e^{2x}(1+x) - xe^{2x}$$

$$= e^{2x} \neq 0, \forall x$$

Phương trình tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

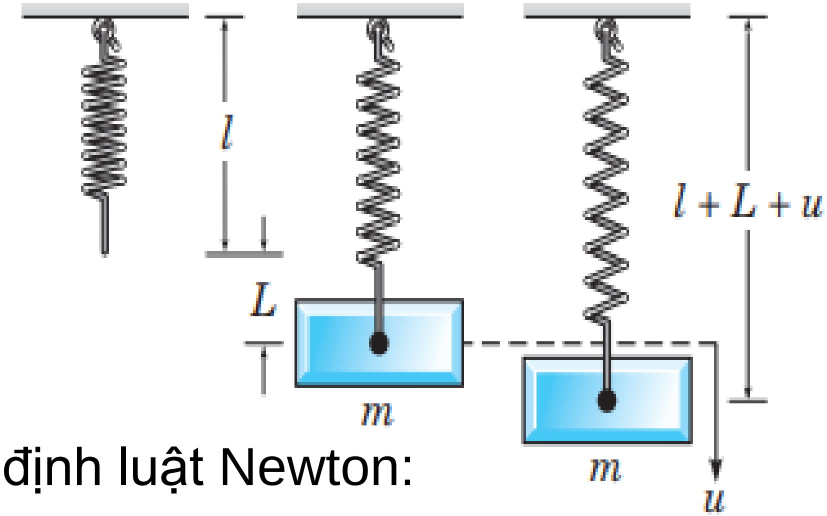
Một trong những lý do tại sao các phương trình tuyến tính bậc 2 với các hệ số không đổi (hằng) đáng để nghiên cứu là chúng đóng vai trò là mô hình toán học của một số quy trình vật lý quan trọng.

Hai lĩnh vực quan trọng của ứng dụng là các lĩnh vực dao động cơ và điện. Ví dụ: dao động của con lắc lò xo, dao động xoắn của trục với bánh đà, dòng điện chạy trong một mạch nối tiếp đơn giản và nhiều vấn đề vật lý khác đều được mô tả bằng giải pháp cho một bài toán giá trị ban đầu có dạng: $ay'' + by' + c = f(t), y(0) = y_0, y'(0) = y_0'$

Điều này minh họa một mối quan hệ cơ bản giữa toán học và vật lý: nhiều vấn đề vật lý có thể có cùng một mô hình toán học. Do đó, khi chúng ta biết cách giải bài toán giá trị ban đầu trên, chỉ cần tìm các hằng số a, b, c và hàm f(t) với từng bài toán vật lý, ta sẽ có lời giải cho bài toán đó.

Phương trình tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

Xét một vật khối lượng m treo ở cuối một lò xo thẳng đứng có chiều dài ban đầu l , như trong hình bên. Vật gây ra độ giãn dài L của lò xo theo hướng đi xuống (dương). Đặt *u(t)* là vị trí của nó ở thời điểm t từ vị trí cân bằng của nó. :



Chuyển động của vật được xác định bởi định luật Newton:

$$mu''(t) = f(t)(1)$$

Trong đó *u''* là gia tốc của vật và *f* là lực tổng hợp tác dụng lên vật, cả *u* và *f* đều là các hàm của thời gian. Trong bài toán này hiện có bốn lực riêng biệt phải được xem xét.

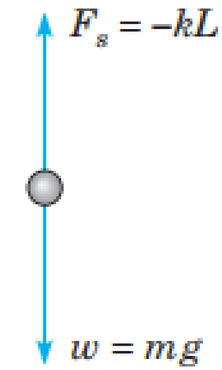
1. Trọng lượng *w = mg* của vật luôn hướng xuống dưới.

2. Lực đàn hồi *Fs* được giả định là tỷ lệ với tổng độ giãn dài L + u của lò xo và luôn có tác dụng khôi phục lò xo về vị trí lò xo có chiều dàitự nhiên. Với *k là hằng số lò xo,* ta có: $F_s = -k(L+u)(2)$

3. Lực giảm chấn hoặc lực cản Fd luôn tác dụng theo hướng ngược với hướng chuyển động của vật: $F_d = -\gamma u'(t)(3), \gamma$ *là hệ số cản*

Phương trình tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

4. Một lực bên ngoài được áp dụng F (t) được hướng xuống dưới hoặc lên trên vì F (t) là dương hoặc âm. Đây có thể là một lực do chuyển động của vật gắn mà lò xo được gắn vào, hoặc nó có thể là một lực tác dụng trực tiếp lên khối lượng.



Khi tính đến các lực này, ta có được mối liên hệ:

$$mu'' = mg + F_s(t) + F_d(t) + F(t)$$

$$mu'' = mg - k(L+u) - \gamma u' + F(t)$$

Khi vật ở vị trí cân bằng, hai lực cân bằng nhau (hình bên), có nghĩa là

$$mg = kL$$

Vậy phương trình trên trở thành $\boxed{mu'' + \gamma u' + ku = F(t), (m, \gamma, k > 0)}$

Chúng ta đã bỏ qua khối lượng của lò xo so với khối lượng của vật đính kèm. Công thức hoàn chỉnh của bài toán này yêu cầu chúng ta xác định hai điều kiện ban đầu là vị trí ban đầu u_0 và vận tốc ban đầu v_0 của khối lượng:

$$\boxed{u(0) = u_0, u'(0) = v_0}$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng thuần nhất

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (1.1)$$

Cấu trúc nghiệm: Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là 2 nghiệm riêng đltt của (1.1) thì NTQ của pt (1.1) là

$$y_{tn} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Ta đi tìm nghiệm của (1.1) ở dạng $y = e^{kx}$

Thay vào (1.1) : $k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0$

$$\Leftrightarrow k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \quad (3)$$

Vậy hàm $y = e^{kx}$ là nghiệm của pt (1.1) khi và chỉ khi

k là nghiệm của pt (3)

Ta gọi pt (3) là pt đặc trưng của pt (1.1)

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng thuần nhất

Pt thuần nhất : $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

Pt đặc trưng : $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ (3)

TH 1: (3) có 2 nghiệm thực

$$k_1 \neq k_2 : \; y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x} \quad \textit{đltt}$$

TH 2: (3) có 1 nghiệm thực

$$k = k_1 = k_2 : y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx} \quad \textit{đltt}$$

TH 3: (3) có cặp nghiệm phức liên hợp

$$k = \alpha \pm i\beta : \; y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \quad \text{đltt}$$

NTQ của pt thuần nhất là $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng thuần nhất

Ví dụ: Tìm NTQ của các pt $1. y'' - 5y' + 6y = 0$

$2. y'' + 4y' + 4y = 0$

$3. y'' + y = 0$

$$1. k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 2 \\ k_2 = 3 \end{array}\right. \Rightarrow y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

$$2. k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -2$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

$$3. k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 0 \pm i$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Phương trình tt cấp cao hệ số hằng thuần nhất

Tương tự cho các pt tuyến tính cấp cao hệ số hằng thuần nhất. Ta sẽ làm với ví dụ sau

Ví dụ: Tìm NTQ của các pt

$$1.\ y''' + 5y'' + 4y' = 0 \quad \Rightarrow y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-4x}$$

$$2.\ y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

$$(y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x})$$

$$3.\ y''' - 8y = 0$$

$$(y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \cos\sqrt{3}x + C_3 e^{-x} \sin\sqrt{3}x)$$

$$4.\ y^{(4)} + y = 0$$

$$(y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right))$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (2.1)}$$

Cấu trúc nghiệm của pt không thuần nhất

Ta gọi y_{tn} là nghiệm tổng quát của pt thuần nhất (1.1)

và y_r là 1 nghiệm riêng của pt không thuần nhất (2.1)

Thì NTQ của pt không thuần nhất (2.1) là

$$\boxed{y_{tq} = y_{tn} + y_r}$$

NTQ của pt thuần nhất (1.1) là y_{tn} ta đã tìm ở trên

Ta chỉ cần tìm 1 nghiệm riêng của pt không thuần nhất là y_r

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Trường hợp đặc biệt : f(x) có thể viết dưới dạng

$$\boxed{f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)}$$

Ta sẽ viết y_r dưới dạng sau

$$\boxed{y_r = x^h e^{\alpha x}\left(T_s(x)\cos\beta x + R_s(x)\sin\beta x\right)}$$

Trong đó : $s = \max\{m, n\},$

$\alpha + i\beta$ là nghiệm bội *h* của pt đặc trưng

Sau đó, ta sẽ tính các đh cấp 1, cấp 2 của hàm y_r rồi thay vào pt ban đầu để tìm các đa thức $T_s(x)$ và $R_s(x)$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Ví dụ: Gpt $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$

PT đặc trưng: $k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = 2, 3$

NTQ của pt thuần nhất: $y_{tn} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

Hàm vế phải có dạng đặc biệt :

$$f(x) = xe^{2x} = e^{2x}(x^1.\cos 0x + x^0.\sin 0x)$$

So với dạng chính tắc:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$$

Ta được: $\alpha = 2, \beta = 0, n = 1, m = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \pm i\beta = 2 \\ s = \max(m, n) = 1 \end{cases}$ Là nghiệm đơn (bội 1) của ptđt, h=1

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

$$1.\ y'' - 5y' + 6y = xe^{2x} \qquad y_{tn} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

$$y_r = x^h e^{\alpha x}\left(T_s(x)\cos\beta x + R_s(x)\sin\beta x\right)$$

$$= x^1 e^{2x}\Big((ax^1 + b)\cos 0x + (cx^1 + d)\sin 0x\Big)$$

$$= e^{2x}(ax^2 + bx^1)$$

Ta tính đh cấp 1, cấp 2 của y_r và thay vào pt đã cho

$$y_r' = e^{2x}(2ax^2 + 2bx^1 + 2ax + b)$$

$$y_r'' = e^{2x}(4ax^2 + (4b + 4a)x + 4ax + 2a + 4b)$$

Ta được: $\big((-2a)x + (2a - b)\big)e^{2x} = (1.x + 0)e^{2x}$

Đồng nhất hệ số 2 vế: *a=-1/2, b=-1*

Vậy NTQ: $y_{tq} = y_{tn} + y_r = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^{2x}\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Ví dụ: Tìm dạng nghiệm riêng của các pt

$$1.\ y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$$

$$2.\ y'' - 2y' + y = 2e^{x}$$

$$3.\ y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\left(\sin x - \cos x\right)$$

PT	k_1, k_2	$\alpha + i\beta$	h	n, m	s	y_r
1	2, 3	2	1	1, 0	1	$y_r = x^1 e^{2x}\left(\left(ax+b\right)\cos 0x\right)$
2	1, 1	1	2	0, 0	0	$y_r = x^2 e^{1x}\left(\left(a\right)\cos 0x\right)$
3	$2 \pm i$	$2 + i$	1	0	0	$y_r = x^1 e^{2x}\left(a.\cos(1.x) + b.\sin(1.x)\right)$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Nếu f(x) có thể tách được thành tổng 2 hàm $f_1(x)$ và $f_2(x)$ có dạng đặc biệt

Ta sử dụng nguyên lý chồng nghiệm như sau:

Nếu y_1, y_2 là nghiệm riêng của pt sau

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x),\ y'' + a_1 y' + a_2 = f_2(x)$$

Thì y_1+y_2 là nghiệm riêng của pt

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x)$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Ví dụ: Gpt $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$

$$y_{tn} = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

$$f(x) = 3x + 5\sin 2x = f_1(x) + f_2(x)$$

$$y_{r1} = ax + b, y_{r2} = c\cos 2x + d\sin 2x$$

$$y'_{r1} = a, y''_{r1} = 0$$

$$y'_{r2} = -2c\sin 2x + 2d\cos 2x, y''_{r2} = -4c\cos 2x - 4d\sin 2x$$

Thay y_{r1}, y_{r2} vào 2 pt tương ứng, ta được:

$$a = \tfrac{3}{2}, b = \tfrac{9}{4}, c = \tfrac{3}{4}, d = \tfrac{-1}{4}$$

Vậy NTQ là $\boxed{y_{tq} = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x}$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Trường hợp hàm f(x) không thể viết như trên

Ta sẽ dùng phương pháp biến thiên hằng số *bằng cách*

khi NTQ của pt thuần nhất (1.1) là

$$y_{tn} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

tìm NTQ của pt không thuần nhất (2) ở dạng

$$y_{tq} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \qquad (*)$$

Từ (*) :

$$y'_{tq} = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x)$$

Để việc tính toán đơn giản hơn, ta thêm điều kiện

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \qquad \text{(a)}$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Khi đó: $$y'_{tq} = C_1(x)y'_1(x) + C_2(x)y'_2(x)$$

Ta tính tiếp đh cấp 2, rồi thay y', y'' vào pt không t.nhất

$$y''_{tq} = C_1{}'(x)y'_1(x) + C_1(x)y''_1(x) + C_2{}'(x)y'_2(x) + C_2(x)y''_2(x)$$

Lưu ý rằng y_1, y_2 là nghiệm của pt t.nhất, tức là

$$y''_1 + a_1y'_1 + a_2y_1 = 0,\ y''_2 + a_1y'_2 + a_2y_2 = 0$$

Ta được $$C_1{}'(x)y'_1(x) + C_2{}'(x)y'_2(x) = f(x) \quad \text{(b)}$$

Suy ra, $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ là nghiệm của hpt (a), (b)

$$\begin{cases} C_1{}'(x)y_1(x) + C_2{}'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1{}'(x)y'_1(x) + C_2{}'(x)y'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Phương pháp biến thiên hằng số để giải pt

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (2)$$

1. Giải pt đặc trưng $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$

2. Viết 2 nghiệm riêng $y_1(x)$, $y_2(x)$ của pt thuần nhất

3. Tìm NTQ ở dạng $y_{tq} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$

Rồi đi tìm $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ bằng cách giải hpt

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

4. Lấy tích phân $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ rồi thay vào y_{tq}

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Ví dụ: Gpt $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$

Từ pt đ.tr $k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow y_1(x) = e^{-2x}, y_2(x) = xe^{-2x}$

Ta giải hpt $\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)xe^{-2x} = 0 \\ C_1'(x)(-2)e^{-2x} + C_2'(x)e^{-2x}(1-2x) = e^{-2x}\ln x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -x\ln x \\ C_2'(x) = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{x^2}{4} + C_1 \\ C_2(x) = x\ln x - x + C_2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của pt đã cho là

$$y_{tq} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

$$\boxed{y_{tq} = C_1 e^{-2x} + C_2 xe^{-2x} + e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4}\right)}$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng – pt Euler-Cauchy

PT Euler – Cauchy là pt có dạng

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(x)$$

Ta đưa về pt tt hệ số không đổi bằng cách đặt $x = e^t$ (x>0) hoặc $x = -e^t$ (x<0)

Sau đây, giả sử $x=e^t$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t (= x\frac{dy}{dx}) \quad \Rightarrow \boxed{xy'_x = y'_t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(x\frac{dy}{dx}) = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} \quad \Rightarrow \boxed{x^2 y''_x = y''_t - y'_t}$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng – pt Euler-Cauchy

Thay $x^2 y''_x = y''_t - y'_t, xy'_x = y'_t$ vào pt ban đầu cấp 2:

$$a_2 x^2 y'' + a_1 xy' + a_2 y = f(x)$$

Ta được pt tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

$$a_2\left(y''_t - y'_t\right) + a_1 y'_t + a_2 y = f(e^t)$$

$$\Leftrightarrow a_2 y''_t + (a_1 - a_2) y'_t + a_2 y = f(e^t)$$

Giải pt trên rồi thay $x=e^t$, ta được nghiệm của pt Euler – Cauchy cấp 2

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng – pt Euler-Cauchy

Ví dụ: Gpt $x^2y'' - xy' + y = \ln x$ *(x>0)*

Vì *x>0* nên ta có thể đặt $x=e^t$

Thay $x^2y''_x = y''_t - y'_t, xy'_x = y'_t$ vào pt đã cho, ta được

$$y'' - 2y' + y = t$$

$$y_{tn} = C_1e^t + C_2te^t$$

$y_r = at + b \quad \Rightarrow y'_r = a, y''_r = 0$ Thay vào pt trên

$$y_r = t + 2$$

Vậy nghiệm của pt đã cho là

$$\boxed{y_{tn} = C_1x + C_2x\ln x + \ln x + 2}$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng – pt Euler-Cauchy

Ví dụ: Tìm nghiệm riêng của pt

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2, y'(1) = y(1) = -\tfrac{1}{2}$$

Đặt $x=e^t$, ta được pt $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$

$$y_{tn} = C_1e^t + C_2e^{2t},$$

$$y_r = ate^{2t} \Rightarrow y_r' = ae^{2t}(1+2t), y_r'' = ae^{2t}(4+4t)$$

Thay vào pt trên, ta được : $a=1$

Suy ra, NTQ của pt đã cho $y_{tq} = C_1x + C_2x^2 + x^2\ln x$

Tính thêm y'_{tq}, thay điều kiện đầu vào, tìm được C_1, C_2

Vậy nghiệm riêng là: $\boxed{y = \frac{1}{2}x - x^2 + x^2\ln x}$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng – Bài tập

Tìm NTQ hoặc nghiệm riêng của các pt

$$1.\ y'' - 5y' + 6y = x\cos x$$

$$2.\ y'' - 5y' + 4y = (x^2 + 1)\sin x$$

$$3.\ y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$$

$$4.\ y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$$

$$5.\ y'' + 4y = \cos 2x + x\sin 2x$$

$$6.\ y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + \cos 2x,$$

$$7.\ y'' + y = tgx$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng – Bài tập

$$8.\ y'' + 9y = 2\sin x \sin 2x$$

$$9.\ y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$$

$$10.\ x^2 y'' + xy' + y = \sin(2\ln x)$$

$$11.\ x^2 y'' + 3xy' + y = {}^{1}\!/_{x}$$

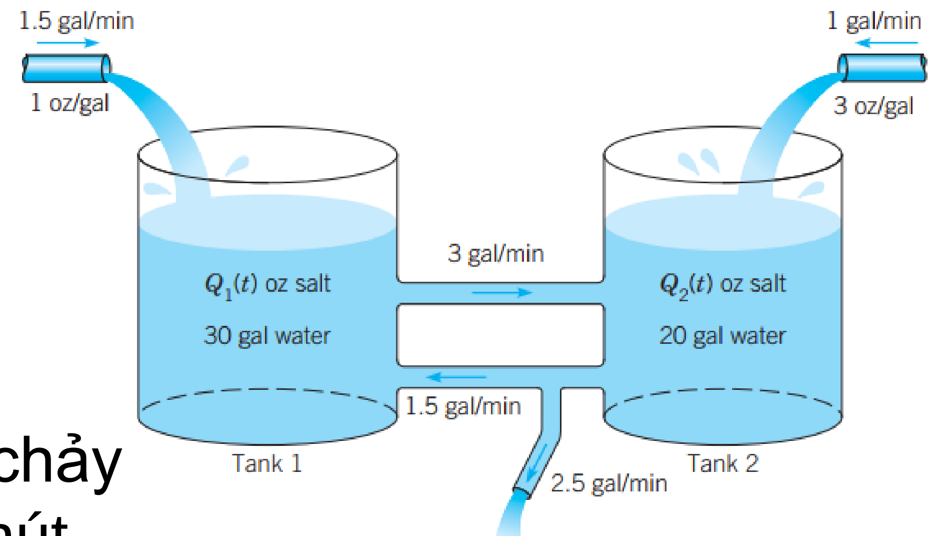
$$12.\ x^2 y'' - 3xy' + 4y = \frac{x^3}{2}$$

$$13.\ (4x-1)^2 y'' - 2(4x-1)y' + 8y = 0$$

$$14.\ x^2 y'' - xy' + y = \cos \ln x$$

Hệ ptvp tuyến tính hệ số hằng

Hãy xem xét hai bể liên kết với nhau như trong hình. Bể 1 ban đầu chứa 30 gal nước và 25 oz muối, và bể 2 ban đầu chứa 20 gal nước và 15 oz muối.



Nước chứa 1 oz / gal muối chảy vào bể 1 với tốc độ 1,5 gal / phút.
Hỗn hợp chảy từ bể 1 đến bể 2 với tốc độ 3 gal / phút.
Nước chứa 3 oz / gal muối cũng chảy vào Bể 2 với tốc độ 1 gal / phút (từ bên ngoài). Hỗn hợp thoát ra từ Bể 2 với tốc độ 4 gal / phút, trong đó một số chảy trở lại vào Bể 1 với tốc độ 1,5 gal / phút, trong khi phần còn lại rời khỏi hệ thống.

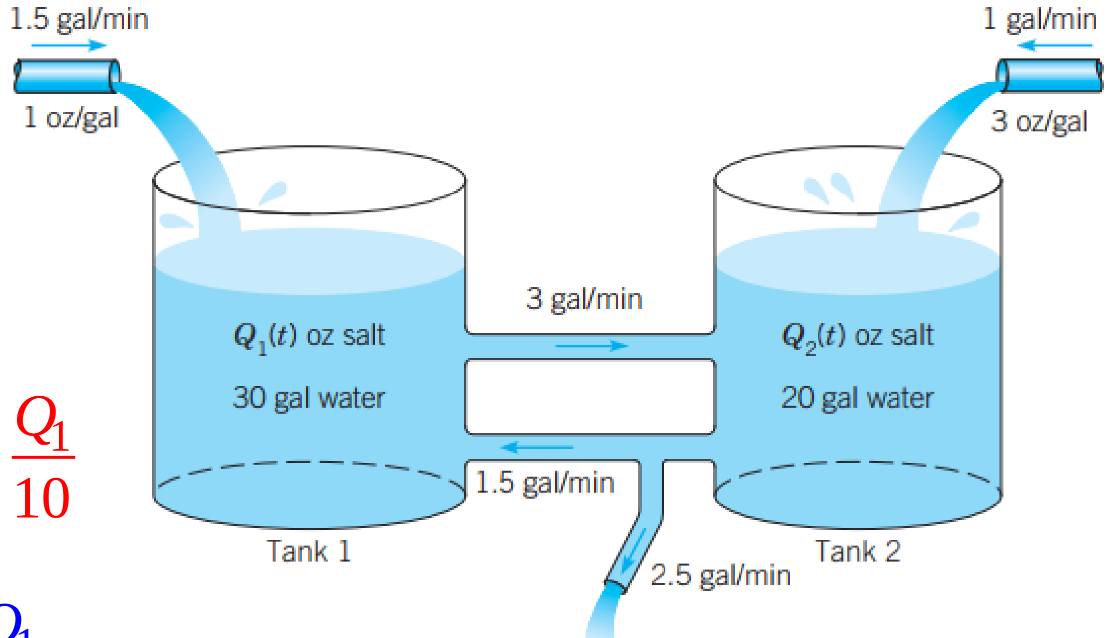
Gọi $Q_1(t)$ và $Q_2(t)$ lần lượt là lượng muối trong mỗi bể tại thời điểm t. Viết các ptvp và các điều kiện ban đầu mô hình hóa quá trình dòng chảy.

Hệ ptvp tuyến tính hệ số hằng

$$Q_1 Vào = 1.5 gal/\min \times 1 oz/gal + $$
$$+ \frac{Q_2}{20} oz/gal \times 1.5 gal/\min$$

$$Q_1 Ra = \frac{Q_1}{30} oz/gal \times 3 gal/\min$$

$$Q_1' = Q_1 Vào - Q_1 Ra = 1.5 + \frac{3Q_2}{40} - \frac{Q_1}{10}$$



$$Q_2 Vào = 1 gal/\min \times 3 oz/gal + \frac{Q_1}{30} oz/gal \times 3 gal/\min$$

$$Q_2 Ra = \frac{Q_2}{20} oz/gal \times 4 gal/\min \Rightarrow Q_2' = Q_2 Vào - Q_2 Ra = 3 + \frac{Q1}{10} - \frac{Q_2}{5}$$

Ta được hpt
$$\begin{cases} Q_1' = 1.5 + \dfrac{3Q_2}{40} - \dfrac{Q_1}{10} \\ Q_2' = 3 + \dfrac{Q_1}{10} - \dfrac{Q_2}{5} \end{cases}$$

Gọi là hpt vi phân tuyến tính cấp 1 hệ số hằng

Hệ ptvp tuyến tính hệ số hằng

Hệ ptvp tuyến tính cấp 1 hệ số hằng là hệ ptvp có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Trong đó $f_i(t)$, $i=1,2, \ldots, n$ là các hàm liên tục trong (a,b)

Hệ ptvp tuyến tính hệ số hằng

Ta kí hiệu phép lấy đạo hàm là $D = \dfrac{d}{dt}$ Suy ra

$$D^2 = \frac{d^2}{dt^2},\quad D^3 = \frac{d^3}{dt^3},\ \ldots$$

Sau đó, ta dùng *phương pháp khử* như đối với hpt đại số tuyến tính

Ví dụ: Giải hpt
$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 + e^t \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 + t \end{cases}$$

Ta viết lại hpt
$$\begin{cases} (D-3)x_1 - x_2 = e^t & (1) \\ -2x_1 + (D-2)x_2 = t & (2) \end{cases}$$

Hệ ptvp tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ: Giải hpt
$$\begin{cases} x' = 5x - y + 2t + 1 \\ y' = x + 3y + e^{2t} \end{cases}$$

Ta viết lại hpt
$$\begin{cases} (D-5)x + y = 2t + 1 \quad (1) \\ -x + (D-3)y = e^{2t} \quad (2) \end{cases}$$

Ví dụ: Giải hpt
$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t^2 \\ x_2' = x_1 + 4x_2 - 2 \end{cases}$$

Ta viết lại hpt
$$\begin{cases} (D-1)x_1 + 2x_2 = t^2 \\ -x_1 + (D-4)x_2 = -2 \end{cases}$$

Hệ ptvp tuyến tính hệ số hằng

Giải các hpt sau

$$1.\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = 2x + 3y + t \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} x' + y' = 2x + 6y - \cos t \\ y' = x + 3y + \sin t \end{cases}$$