CHƯƠNG V : PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

I. Phương trình vi phân cấp 1

II. Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính

III. Hệ phương trình vi phân tuyến tính

Phương trình vi phân – Khái niệm chung

Bài toán 1: Tìm tất cả đường cong y=f(x) có tiếp tuyến tại mọi điểm P luôn cắt 2 trục tọa độ tại 2 điểm A, B nhận P là trung điểm.

Pt tiếp tuyến tại P(x_P,y_P): $y - y_P = y'(x - x_P)$

Giao điểm của tiếp tuyến với trục Oy là A(0;y_A) và y_A=2y_P nên

$$y_A - y_P = y'(P)(0 - x_P) \leftrightarrow y_P = y'(P)(-x_P)$$

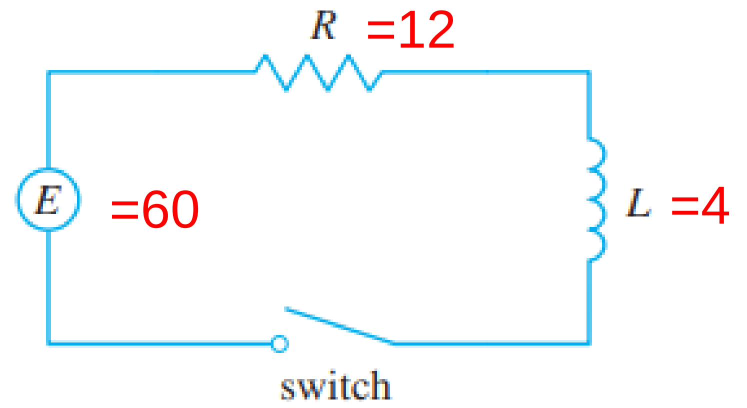
Vì P là điểm bất kỳ thuộc đường cong nên: $y = -y'x$

Bài toán 2: Một ly nước nóng 95^0C đặt trong căn phòng có nhiệt độ không đổi là 28^0C thì tốc độ nguội đi của ly nước tỉ lệ với độ chênh lệch nhiệt độ của ly nước và căn phòng. Tìm nhiệt độ của ly nước theo thời gian t kể từ khi đặt ly nước.

Gọi nhiệt độ của ly nước vào thời điểm t phút sau khi 9em vào phòng là T(t), ta được: $T'(t) = k(T - 28)$

Phương trình vi phân – Khái niệm chung

Bài toán 3: Mạch điện đơn giản như trong hình chứa một suất điện động (thường là pin hoặc máy phát) tạo ra điện áp E(t) volts (V) và dòng điện I(t) amperes (A) tại thời điểm t. Mạch cũng chứa một điện trở có điện trở R (t) ohms (Ω) và một cuộn cảm có độ tự cảm L henries (H). Định luật Ohm cho biết sự sụt điện áp do điện trở gây ra là R.I. Điện áp giảm do cuộn cảm là L.dI/dt . Một trong những định luật Kirchhoff nói rằng tổng điện áp giảm bằng với điện áp được cung cấp E(t). Do đó, ta có đẳng thức:

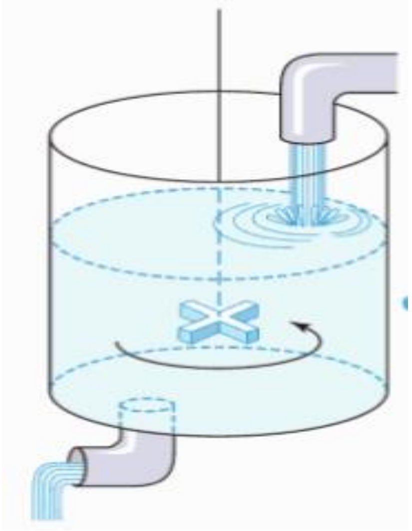


$$L.\frac{dI}{dt} + R.I = E \xrightarrow[R=12]{E=60, L=4} 4\frac{dI}{dt} + 12I = 60$$

Ta gọi đây là phương trình vi phân cấp 1 với hàm cần tìm là I(t) theo thời gian t (pt chứa đạo hàm cấp 1 của hàm I(t))

Phương trình vi phân – Khái niệm chung

Bài toán 4: Một hồ chứa 5000lít nước với 20kg muối hòa tan. Người ta cho nước muối nồng độ 0.03kg muối/lít nước vào hồ với tốc độ 10lít/phút và quậy liên tục, đồng thời cho nước chảy ra với cùng tốc độ. Gọi y(t) là lượng muối trong hồ sau t phút, tìm hệ thức biểu diễn quá trình trên.



Ta có: y(0)=20 và y'(t) là tốc độ thay đổi của lượng muối trong hồ

Do đó: $y'(t) = \dfrac{dy}{dt} =$ Tốc độ vào – Tốc độ ra

Tốc độ này là tốc độ mà muối được cho vào và cho ra khỏi hồ

Tốc độ vào = $\left(0.03\dfrac{kg}{lit}\right)\left(10\dfrac{lit}{phut}\right) = 0.3\dfrac{kg}{phut}$

Phương trình vi phân – Khái niệm chung

Hồ luôn chứa 5000l nước muối nên nồng độ muối tại thời điểm t là y(t)/5000; và nước chảy ra với tốc độ 10l/phút nên:

Tốc độ ra = $\left(\frac{y(t)}{5000}\frac{kg}{lit}\right)\left(10\frac{lit}{phut}\right) = \frac{y(t)}{500}\frac{kg}{phut}$

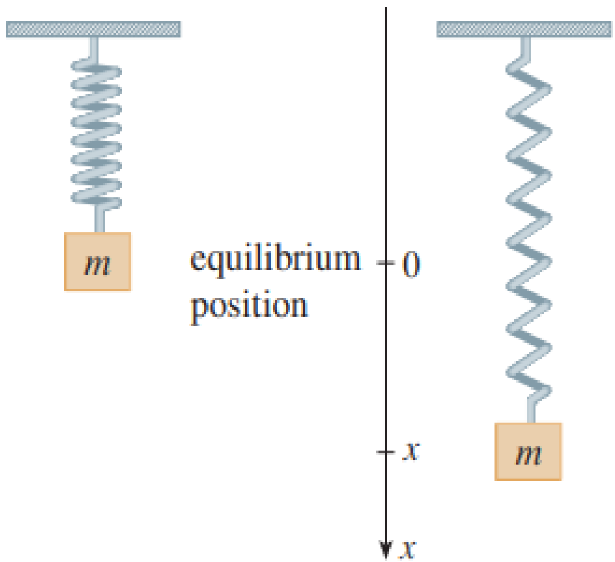
Suy ra: $$\frac{dy}{dt} = 0.3 - \frac{y(t)}{500}$$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{3}{10} - \frac{1}{500}y(t)$$

Ta gọi đẳng thức trên là 1 ptvp cấp 1: pt có chứa hàm cần tìm y(t) và đạo hàm cấp 1 của hàm y(t)

Phương trình vi phân – Khái niệm chung

Bài toán 3: Ta khảo sát chuyển động của vật thể có khối lượng m treo cuối 1 lò xo như trong hình.



Nếu lò xo bị kéo dãn ra hoặc co lại x (đơn vị độ dài) theo thời gian t (*x=x(t)*) so với chiều dài ban đầu thì nó sẽ tạo ra 1 lực tỉ lệ với x mà ta gọi là *lực đàn hồi = -k.x(t) (k>0)*

Nếu bỏ qua các lực cản khác, theo định luật 2 Newton (lực tạo ra bằng khối lượng nhân gia tốc) ta được:

$$mx''(t) = -kx(t)$$

Đây được gọi là ptvp cấp 2 với hàm cần tìm là x theo biến t

Phương trình vi phân – Khái niệm chung

Định nghĩa 1: Phương trình vi phân là phương trình chứa đạo hàm hoặc vi phân của 1 hoặc vài hàm cần tìm

Định nghĩa 2: Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình

Ví dụ:

Ptvp cấp 1: $y' - 2xy = x^2$

$$(x^2 - xy)dx + (e^x + 3y)dy = 0$$

Ptvp cấp 2 : $y''y + y'x - 3xy = 1$

Ptvp cấp 3 : $y''' + 3y'' + 3y' + y = \ln x$

Phương trình vi phân – Khái niệm chung

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp n là

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

hoặc giải ra với $y^{(n)}$ là $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

Nghiệm của phương trình vi phân trên khoảng (a,b) là một hàm số y=y(x) sao cho khi thay vào phương trình ta được một đồng nhất thức trên (a,b) (đẳng thức luôn đúng với mọi x trên (a,b)). Giải ptvp là tìm tất cả các nghiệm của phương trình

Ví dụ: Phương trình $y'' - 3y' + 2y = 0$ có nghiệm là

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

Đồ thị của hàm số y=y(x) được gọi là đường cong tích phân của ptvp

Phương trình vi phân cấp 1– Khái niệm chung

Dạng tổng quát của ptvp cấp 1: $F(x, y, y') = 0 (1)$

hoặc đã giải ra đạo hàm: $y' = f(x, y) (2)$

Nếu có thêm điều kiện $y(x_0)=y_0$ (3) thì ta gọi đây là điều kiện đầu của ptvp

Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (2) – (3)

Nếu hàm số sơ cấp f(x,y) xác định với $\forall x \in (a, b), \forall y \in (c, d)$
Thì $\forall x_0 \in (a, b), \forall y_0 \in (c, d)$ bài toán (2) – (3) có nghiệm xác định trong 1 lân cận của x_0.

Hơn nữa, nếu coi x là hằng số (y là biến), đạo hàm của hàm f(x,y) cũng là hàm sơ cấp xác định như hàm f(x,y) thì nghiệm này là nghiệm duy nhất.

Với một bài toán cụ thể, thông thường ta sẽ quan tâm đến việc tìm nghiệm với 1 điều kiện điều kiện đầu của ptvp và nghiệm thỏa điều kiện đầu gọi là 1 nghiệm riêng của ptvp

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến

Dạng : $f(x)dx + g(y)dy = 0$

Cách giải : Lấy tích phân 2 vế phương trình

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

Ví dụ: Tìm pt đường cong đi qua điểm (0,1) và hệ số góc tại (x,y) là xy

Theo giả thiết, ta có pt $y' = xy, y(0) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = xdx \quad \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx \quad \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\Leftrightarrow y = e^{0.5x^2 + C} \quad \Leftrightarrow y = Ce^{0.5x^2}$$

Thay điều kiện đầu: $y(0) = 1 \leftrightarrow 1 = C$

Vậy nghiệm của ptvp là : $y(x) = e^{0.5x^2}$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến

Ví dụ: Đặt y (t) là giá trị của một tòa nhà thương mại (tính bằng triệu đô la) sau t năm. Biết tốc độ tăng trưởng của giá trị của tòa nhà bằng 2 lần của giá trị hiện tại của nó lũy thừa 1/2

a. Tìm ptvp cho hàm y(t) nếu tại thời điểm ban đầu (t=0), giá trị của tòa nhà là 9 triệu đô la.

b. Giải phương trình vi phân và tìm giá trị của toà nhà sau 5 năm xây dựng.

Từ giả thiết, ta có ptvp: $y' = 2y^{1/2}, y(0) = 9$

$$y = (t + C)^2$$

Thay điều kiện đầu: *C=3* , suy ra: $y(t) = (t + 3)^2$

Sau 5 năm, giá trị tòa nhà là

$y(5) = 8^2 = 64$ (triệu đô la)

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến

Ví dụ: Tìm nghiệm của bài toán hỗn hợp

Một bể chứa 20 kg muối hòa tan trong 5000 lít nước. Nước muối chứa 0,03 kg muối mỗi lít nước được cho vào bể với tốc độ 25 lít/phút. Hỗn hợp luôn được quậy đều và cho chảy ra khỏi bể với cùng tốc độ. Tính lượng muối y (kg) vẫn còn trong bể sau nửa giờ?

Tương tự như bài toán mở đầu, ta có ptvp cho hàm y(t), t: phút

$$y' = 0.75 - \frac{y}{200}, \mathrm{y}(0) = 20$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{150 - y}{200} \Leftrightarrow \frac{dy}{150 - y} = 0.005dt \quad \Leftrightarrow 150 - y = C.e^{0.005t}$$

Thay điều kiện đầu: *C=130*, suy ra: $y(t) = 150 - 130e^{-0.005t}$

Vậy sau nửa giờ, lượng muối trong bể là

$$y(30) = 150 - 130e^{-0.15} \approx 38.1(kg)$$

Phương trình vi phân cấp 1– PT tách biến

Mô hình Logistic: *(Được đề xuất bởi nhà toán học người Bỉ, Pierre Verhulst (1838))*.Ở một vùng đất, tốc độ tăng dân số thường tỉ lệ với số dân khi số dân còn ít. Tuy nhiên, với các điều kiện môi trường sống ở lãnh thổ đó thì số dân không thể cứ tăng mãi như vậy mà sẽ bắt đầu tăng chậm lại và sẽ giảm đi khi số dân vượt quá khả năng chịu đựng của môi trường.

Gọi P(t) là số dân tại thời điểm t, M là số dân tối đa có thể sinh sống ở vùng lãnh thổ này với điều kiện môi trường cho trước. Biểu thức đơn giản nhất biểu diễn tốc độ tăng trưởng dân số tương đối phù hợp với giả định trên là

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

PT này được gọi là ptvp logistic.

Ban đầu số dân ít tức là P khá nhỏ: $P/M \approx 0 \quad \Rightarrow dP/dt \approx kP$

Khi dân số tăng dần, nếu $P \to M$ thì $P/M \to 1 \quad \Rightarrow dP/dt \to 0$

Như vậy, mô hình Logistic cho chúng ta ptvp tách biến

Phương trình vi phân cấp 1– PT tuyến tính (Đọc thêm)

Áp dụng mô hình Logistic để giải bài toán sau: Năm 1990, dân số thế giới khoảng 5.3 tỉ người. Tỉ lệ sinh trong những năm 1990 khoảng 35-40 triệu người/năm và tỉ lệ tử vong dao động khoảng 15-20 triệu người/năm. Giả sử khả năng trái đất có thể chứa được tối đa 100 tỉ người

1. Vì số dân ban đầu khá nhỏ so với sức chứa tối đa nên ta chọn hệ số k là bằng tỉ lệ ước tính số dân tăng ban đầu với số dân (k=0.02/5.3). Lập và giải ptvp logistic với dữ liệu này

2. Sử dụng kết quả trên để tính dân số thế giới năm 2000 và so sánh với số thực tế là 6.1 tỉ người.

3. Ước tính dân số thế giới năm 2100?

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến (Đọc thêm)

Hai dạng ptvp có thể đưa về pt tách biến:

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

$$y' = f(ax + by + c)$$

Đặt : $z(x)=ax+by+c$ $\Rightarrow y' = \dfrac{z' - a}{b}$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến (Tự đọc)

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $xy^2dy = -(y+1)dx$

$$xy^2dy = -(y+1)dx \Rightarrow \frac{y^2}{y+1}dy + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{y^2}{y+1}dy + \int \frac{dx}{x} = C$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} - y + \ln|y+1| + \ln|x| = C$$

Trường hợp này, việc biến đổi để được y=y(x,C) rất khó nên ta sẽ để nguyên dạng trên (dạng pt φ(x,y,C)=0. Ta gọi đây là tích phân tổng quát của ptvp

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến (Tự đọc)

Ví dụ: Tìm nghiệm riêng của pt

$$y' = x^2 + 2xy + y^2 - 1, y(0) = 1$$

$$y' = x^2 + 2xy + y^2 - 1 \Rightarrow y' = (x+y)^2 - 1$$

Đặt $z=x+y$ $\Rightarrow y' = z' - 1$ thay vào pt trên

$$z' - 1 = z^2 - 1 \quad \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = dx \quad \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + C$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x+C} = x + y \quad \Rightarrow y = -x - \frac{1}{x+C}$$

Thay điều kiện đầu vào : $1 = -C$

Nghiệm riêng cần tìm là: $\boxed{y = \frac{1}{1-x} - x}$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến

Bài tập: Giải các bài toán sau

1. Trong hơn 75 năm, Công ty Cao su Flexfast ở Massachusetts đã thải các dung môi toluene độc hại xuống đất với tốc độ 5 tấn mỗi năm. Mỗi năm, khoảng 10% các chất ô nhiễm tích lũy đã bay hơi vào không khí. Gọi y (t) là khối lượng (tấn) dung môi toluene tích lũy trong lòng đất sau t năm, lập và giải ptvp để tìm hàm y(t).

Nguồn: Greater Boston Legal Services

ĐS: $y'=5-0.1y$, $y(0)=0$

2. Bệnh nhân trong bệnh viện thường được truyền glucose (đường trong máu) qua tĩnh mạch bằng cách cho nhỏ gọi từ chai glucose. Giả sử rằng cách nhỏ giọt này cung cấp glucose với tốc độ 25 mg mỗi phút và mỗi phút 10% glucose tích lũy được cơ thể tiêu thụ. Gọi lượng glucose (vượt quá mức bình thường) trong cơ thể sau t phút là y(t), lập và giải ptvp để tìm y(t)

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến

Bài tập: Giải các bài toán sau

3. Cho biết một quần thể vi khuẩn ban đầu có 10.000 con và tốc độ tăng trưởng của đàn mỗi giờ bằng tám lần số lượng hiện tại của nó lũy thừa 3/4. Gọi số lượng đàn vi khuẩn sau t giờ là y(t) con. Lập và giải ptvp để tìm số lượng đàn vi khuẩn sau 24 giờ. ĐS: $y' = 8y^{3/4}, y(0) = 10.000$

4. Một công ty đã phát triển một sản phẩm mới và bộ phận tiếp thị của công ty đã dự đoán tốc độ tăng trưởng của doanh số sẽ gấp sáu lần doanh số lũy thừa ½ sau khi bán được 1 tháng. Đặt y (t) là doanh số (mỗi tháng) của sản phẩm sau t tháng.

a. Lập phương trình vi phân cho biết tháng đầu tiên doanh số là 1000.
b. Giải ptvp vừa lập để dự đoán doanh số tháng thứ 12 sau khi bắt đầu bán.

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến

Bài tập: Giải các bài toán sau

5. Trong phòng thể tích 180m^3 ban đầu chứa 0,15% carbon dioxide (CO_2). Không khí sạch chỉ với 0,05% CO_2 được bơm vào phòng với tốc độ 2m^3/phút, không khí được trộn đều và hút ra ngoài với cùng tốc độ. Gọi tỷ lệ phần trăm của CO_2 trong phòng là hàm y(t) theo thời gian t (phút).

a. Lập ptvp với hàm y(t) và giải pt để tìm y(t).
b. Chuyện gì xảy ra sau thời gian dài làm như trên?

6. Tìm đường cong đi qua điểm (3,2) biết tất cả các pháp tuyến của đường cong đều cắt trục Oy tại y=6

7. Xem lại mạch điện ở bài toán mở đầu 1. Cho biết dòng điện đóng khi bắt đầu tức là I(0)=0. Tìm:

a. I(t) và dòng điện trong mạch sau 1, 5, 7 giây.
b. Dòng điện sẽ thế nào sau thời gian dài?

Phương trình vi phân cấp 1- PT đẳng cấp

Dạng : $y' = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ Hoặc: $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$

trong đó, 2 hàm f, g là các hàm đẳng cấp cùng bậc tức là:

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y), g(tx,ty) = t^k g(x,y)$$

Cách giải : Chia 2 cả 2 hàm f(x,y), g(x,y) cho x^k, sau đó đặt $u = y/x$ để đưa về pt tách biến
.

Ví dụ: Tìm NTQ của phương trình $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

Pt đẳng cấp bậc 2 nên ta chia 2 vế pt cho x^2:

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - \frac{y}{x}dy = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{y/x} + \frac{y}{x}$$

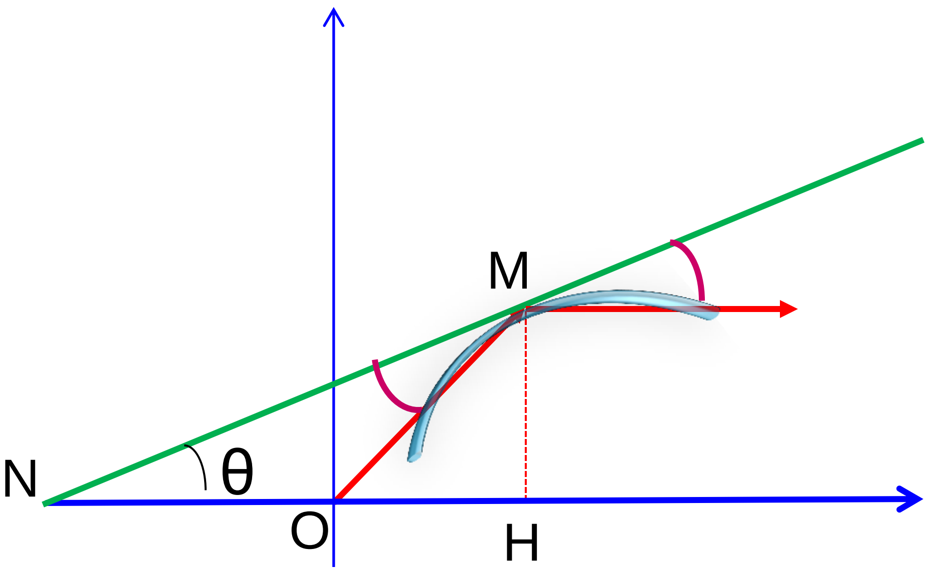
Đặt: $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$ Thay vào pt:

$$u + u'x = \frac{1}{u} + u \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \ln Cx \Rightarrow y^2 = 2x^2 \ln|Cx|$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT đẳng cấp

Ví dụ: Tìm hình dạng của mặt gương phản chiếu các tia xuất phát từ 1 điểm thành các tia song song.

Ta đặt hệ trục tọa độ sao cho tâm O là nguồn sáng, hướng dương của trục Ox là hướng của các tia phản xạ (như hình vẽ). Trong đó, M(x,y) là điểm bất kỳ trên gương.



Gọi giao tuyến của gương và mặt phẳng (M,Ox) là *y=y(x)*

Tiếp tuyến của đường y=y(x) tại M cắt Ox tại N

Góc tới bằng góc phản xạ nên: $\theta = NMO \Rightarrow OM = ON$

Ta có: $\tan\theta = \dfrac{MH}{HO+ON} = \dfrac{MH}{HO+OM} \Leftrightarrow y' = \dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$

Ta được 1 pt đẳng cấp

Phương trình vi phân cấp 1- PT đẳng cấp

Tìm NTQ của pt:

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} = \frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}{x^2+y^2-x^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}$$

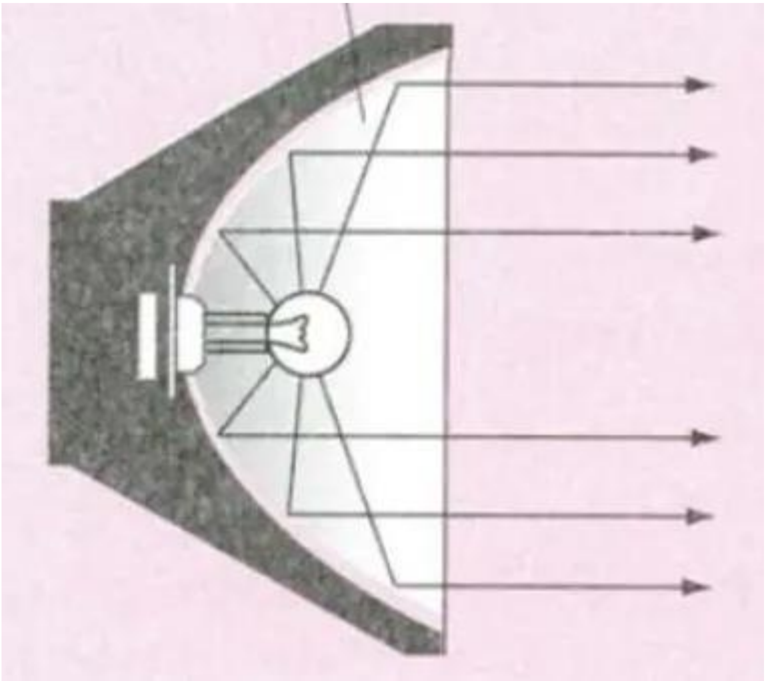
$$\rightarrow ydy + xdx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx \;\rightarrow \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = dx$$

$$\rightarrow d\sqrt{x^2+y^2} = dx \;\rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = x + C$$

$$\rightarrow y^2 = 2Cx + C^2$$

Tức là giao tuyến là 1 đường parabol

Gương có hình dạng một paraboloid tròn xoay (gương cầu lõm)



Phương trình vi phân cấp 1- PT đẳng cấp (Đọc thêm)

Dạng ptvp có thể đưa về pt đẳng cấp:

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

Ta xét hpt $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ định thức chính $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

D≠0: hpt có nghiệm duy nhất $x=x_0$, $y=y_0$. *Đặt $X=x-x_0$, $Y=y-y_0$*

$D=0 \leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k \leftrightarrow \begin{cases} a_1 = ka_2 \\ b_1 = kb_2 \end{cases}$ thay vào pt ban đầu:

$$y' = f\left(k + \frac{c_1 - kc_2}{a_2x+b_2y+c_2}\right) = g\left(a_2x+b_2y+c_2\right)$$

là dạng pt đưa được về pt tách biến bằng cách đổi biến

Phương trình vi phân cấp 1- PT đẳng cấp (Đọc thêm)

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $y' = \dfrac{x-y+1}{x+y-3}$

Hpt: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y-2 \end{cases}$

Thay vào pt trên: $Y' = \dfrac{X-Y}{X+Y} = \dfrac{1-Y/X}{1+Y/X}$ Đặt $u = \dfrac{Y}{X}$

$$\Rightarrow \frac{(1+u)du}{1-2u-u^2} = \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1-2u-u^2\right| = \ln|X| - \frac{1}{2}\ln C$$

Thay x, y vào, ta được NTQ của pt đã cho :

$$\boxed{x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C}$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT đẳng cấp

Bài tập: Tìm NTQ hoặc nghiệm riêng của các pt

$$1.\ y' = e^{y/x} + \frac{y}{x} + 1$$

$$2.\ x^2 y' + y^2 + xy + x^2 = 0$$

$$3.\ (x^2 - xy)dy + y^2 dx = 0$$

$$4.\ xy' = y \ln\frac{y}{x},\ y(1) = 1)$$

$$5.\ \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx - x dy = 0,\ y(1) = 0$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tuyến tính

Dạng :

$$y' + p(x)y = q(x)$$ pt không thuần nhất

$$y' + p(x)y = 0$$ pt thuần nhất

Cách giải : Nhân 2 vế pt với $e^{\int p(x)dx}$

$$y'e^{\int p(x)dx} + y\left(p(x)e^{\int p(x)dx}\right) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Hoặc dùng công thức

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tuyến tính

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $y' - 2xy = 1 - 2x^2$

Sử dụng công thức nghiệm với

$$p(x) = -2x, q(x) = 1 - 2x^2$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

$$y = e^{x^2}\left(\int (1-2x^2)e^{-x^2}dx + C\right)$$

$$y = e^{x^2}\left(\int e^{-x^2}dx + \int xe^{-x^2}d(-x^2) + C\right)$$

$$\boxed{y = x + Ce^{x^2}}$$

Phương trình vi phân cấp 1– PT tuyến tính

VD: Một hồ chứa 5000l nước với 20kg muối hòa tan. Người ta thêm nước muối nồng độ 0.02kg muối/lit nước vào hồ với tốc độ 25 lít/phút và cho nước chảy ra với tốc độ 20lít/phút. Tính lượng muối có trong hồ sau t phút?

Gọi y(t) là lượng muối (kg) trong hồ sau t phút.

Thì y(0)=20 và y'(t) là tốc độ thay đổi của lượng muối

Ta có: $\dfrac{dy}{dt} = 0.02 \times 25 - \dfrac{y}{5000+5t}.20$

$$\Rightarrow y' + \frac{4}{1000+t} y = 0.5$$

$$\Rightarrow y = e^{\int \frac{-4}{1000+t} dt} \left(\int 0.5 e^{\int \frac{4}{1000+t} dt} dt + C \right)$$

Phương trình vi phân cấp 1– PT tuyến tính

$$\Rightarrow y = e^{\int \frac{-4}{1000+t}dt}\left(\int 0.5e^{\int \frac{4}{1000+t}dt}dt + C\right)$$

$$\Rightarrow y = 0.1(1000+t) + C(1000+t)^{-4}$$

Thay điều kiện đầu y(0)=20 vào nghiệm TQ trên, ta được:

$$C = \frac{-80}{1000^{-4}} = -8\times 10^{13}$$

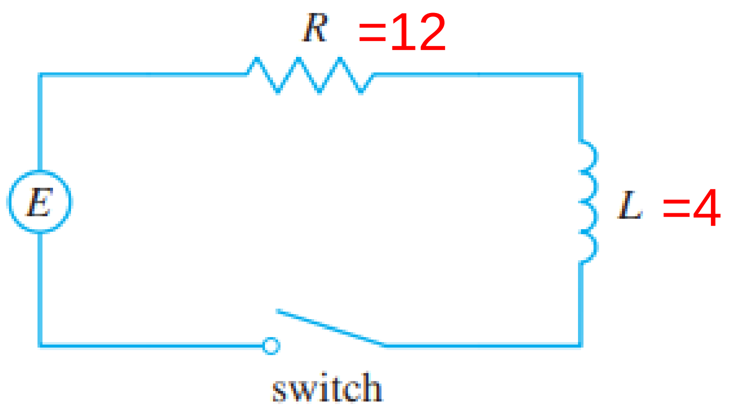
Sau t phút, lượng muối trong hồ là:

$$\Rightarrow y(t) = 100 + 0.1t - 8\times(1000+t)^{-4}\times 10^{13}$$

Phương trình vi phân cấp 1– PT tuyến tính

VD: Mạch điện đơn giản như trong hình, người ta thay pin bằng một máy phát điện làm sản sinh một hiệu điện thế biến thiên là E(t) = 60.sint (V). Giả thiết rằng mạch điện đóng khi bắt đầu tức là I(0)=0. Tìm I(t)

Ta có pt: $4\frac{dI}{dt}+12I=60\sin t$



NTQ:

$$I=\frac{15}{10}\left(3\sin t-\cos t\right)+Ce^{-3t}$$

Thay điều kiện đầu I(0)=0 vào NTQ trên, ta được: $C=\frac{15}{10}$

Vậy: $I=\frac{3}{2}\left(3\sin t-\cos t\right)+\frac{3}{2}e^{-3t}$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tuyến tính

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $y'(x+y^2)=y$

Ta biến đổi để đưa về thành pt khi xem x=x(y)

$$x'=\frac{x+y^2}{y} \Rightarrow x'-x\frac{1}{y}=y$$

Dùng công thức

$$x=e^{\int \frac{1}{y}dy}\left(\int ye^{\int \frac{-1}{y}dy}dy+C\right)$$

$$x=y\left(\int y\frac{1}{y}dy+C\right) \Rightarrow \boxed{x=y^2+Cy}$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tuyến tính

Bài tập:

I. Tìm NTQ hoặc nghiệm riêng của các pt

$$1.\ y' = \frac{1}{x}\left(2y + xe^{x} - 2e^{x}\right)$$

$$2.\ (1+x^2)y' + y = \arctan x$$

$$3.\ ydx - (x + y^2 \sin y)dy = 0$$

$$4.\ y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x,\ y(0) = 0$$

$$5.\ y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x},\ y(1) = 1$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tuyến tính

II. Tìm nghiệm của các bài toán:

1. Một cái ao ban đầu chứa 10 triệu gal nước ngọt. Nước có chứa một loại hóa chất không mong muốn chảy vào ao với tốc độ 5 triệu gal / năm, và hỗn hợp trong ao chảy ra với cùng tốc độ . Nồng độ γ (t) của hóa chất trong nước chảy vào thay đổi định kỳ theo thời gian theo biểu thức $\gamma(t)=2+\sin 2t$ g/gal. Gọi Q(t) (grams) là lượng hóa chất trong ao vào năm thứ t thì Q(0)=0. Tìm 1 ptvp cho hàm Q(t) và giải ptvp đó để tìm lượng hóa chất trong ao sau 10 năm.

2. Sau một thí nghiệm, một bể chứa 200 L dung dịch thuốc nhuộm với nồng độ 1 gr/L. Để chuẩn bị cho thí nghiệm tiếp theo, bể phải được rửa sạch bằng cách cho nước sạch chảy vàovới tốc độ 2 L / phút, dung dịch được khuấy đều chảy ra với tốc độ tương tự. Tìm thời gian để khi nồng độ thuốc nhuộm trong bể đạt 1% giá trị ban đầu.

Phương trình vi phân cấp 1- PT tuyến tính

II. Tìm nghiệm của các bài toán:

3. Một bể chứa ban đầu chứa 100 lít nước tinh khiết. Sau đó, nước chứa 2 grams muối mỗi lít được đổ vào bể với tốc độ 2 lít / phút, và hỗn hợp này được cho chảy ra với cùng tốc độ . Sau 10 phút, quá trình được trên dừng lại và nước tinh khiết được đổ vào bể với tốc độ 2 lít / phút, rồi hỗn hợp lại cho chảy ra với tốc độ 3 lít/phút. Tìm lượng muối trong bể sau 10 phút nữa.

4. Một bể chứa có dung tích 500 lít ban đầu chứa 200 lít nước với 1kg muối trong dung dịch. Nước chứa 10 gr muối/lít chảy vào với tốc độ 3 lít/phút, hỗn hợp này cho chảy ra khỏi bể với tốc độ 2 lít / phút. Tìm lượng muối trong bể bất cứ lúc nào trước thời điểm ngay khi dung dịch bắt đầu tràn. Tìm nồng độ (tính bằng grams trên mỗi lít) muối trong bể khi nó ở điểm tràn. So sánh nồng độ này với nồng độ giới hạn lý thuyết nếu bể có dung tích vô hạn.

Phương trình vi phân cấp 1- PT Bernoulli

Dạng : $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$

Trong đó: α≠0 vì nếu α=0 thì ta được pt tuyến tính

α≠1 vì nếu α=1 thì ta được pt tách biến

Cách giải : Đặt $z = y^{1-\alpha}$

$$\Rightarrow z' = (1-\alpha)y'.y^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{z'.y^{\alpha}}{1-\alpha}$$ Thay vào pt trên

$$\frac{z'y^{\alpha}}{1-\alpha} + yp(x) = q(x)y^{\alpha}$$

$$z' + z.(1-\alpha)p(x) = (1-\alpha)q(x)$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT Bernoulli

Bài tập: Tìm NTQ hoặc nghiệm riêng của các pt

$$1.\ y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$$

$$2.\ y' = y(y^3\cos x + \tan x)$$

$$3.\ ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$$

$$4.\ 3dy + (1+3y^3)y\sin x dx = 0,\ y(\pi/2) = 1$$

$$5.\ (y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0,\ y(1) = 0$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT Bernoulli

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $y' - 2y\tan x = -y^2 \sin^2 x$

Đây là pt Bernoulli với *α = 2*

Đặt $z = y^{-1} \Rightarrow y' = -z'.y^2$ Thay vào pt trên

$$-z'y^2 - 2y\tan x = -y^2 \sin^2 x$$

$$z' + 2z\tan x = \sin^2 x$$

$$z = e^{-\int 2\tan x dx}\left(\int \sin^2 x e^{\int 2\tan x dx} dx + C\right)$$

$$y = \frac{1}{\cos^2 x(\tan x - x + C)}$$

PTVP cấp 1- PT vp toàn phần (Đọc thêm)

Dạng : $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Trong đó: $P'_y = Q'_x$

Cách giải : Ta tìm nghiệm pt dưới dạng ***U(x,y)=C*** trong đó hàm U(x,y) được tìm bằng 2 cách

Cách 1: Chọn điểm (x_0,y_0) sao cho tại đó 2 hàm P, Q liên tục thì :

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

Cách 2: Ta tìm U(x,y) sao cho

$$U'_x = P(x,y), U'_y = Q(x,y)$$

PTVP cấp 1- PT vp toàn phần (Đọc thêm)

Ví dụ: Tìm NTQ của pt

$$(e^{x+y}+2y)dx+(e^{x+y}+2x-2)dy=0$$

$$\left.\begin{array}{l} P=e^{x+y}+2y \Rightarrow P'_y=e^{x+y}+2 \\ Q=e^{x+y}+2x-2 \Rightarrow Q'_x=e^{x+y}+2 \end{array}\right\} \Rightarrow P'_y=Q'_x$$

Cách 1: Chọn $(x_0,y_0)=(0,0)$

$$U=\int_0^x (e^{x+y}+2y)dx+\int_0^y (e^{0+y}+2.0-2)dy$$

$$U=\Big((e^{x+y}+2xy)-(e^y-0)\Big)+\Big((e^y-2y)-(e^0-0)\Big)$$

$$U=e^{x+y}+2xy-2y$$

PTVP cấp 1- PT vp toàn phần (Đọc thêm)

Cách 2: Tìm hàm U(x,y) sao cho

$$\begin{cases} U'_x = e^{x+y} + 2y & (1) \\ U'_y = e^{x+y} + 2x - 2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1): $U = e^{x+y} + 2y.x + C_1(y)$

Từ (2): $U = e^{x+y} + 2x.y - 2y + C_2(x)$

So sánh 2 đẳng thức trên, ta được

$$U = e^{x+y} + 2xy - 2y$$

Vậy NTQ của pt đã cho là $\boxed{e^{x+y} + 2xy - 2y = C}$

PTVP cấp 1- PT vp toàn phần (Đọc thêm)

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $(y+\frac{2}{x^2})dx+(x-\frac{3}{y^2})dy=0$

Kiểm tra điều kiện để pt trên là ptvp toàn phần

Tìm hàm U(x,y) sao cho $U'_x = y+\frac{2}{x^2}$

Đạo hàm theo x là y thì nguyên hàm là xy

Đh theo x là $\frac{2}{x^2}$ thì nguyên hàm là $-\frac{2}{x}$

Suy ra $U = xy - \frac{2}{x}$

Lấy đh U theo y và so sánh với $Q = x - \frac{3}{y^2}$

PTVP cấp 1- PT vp toàn phần (Đọc thêm)

Ta thấy thiếu nguyên hàm của $-\dfrac{3}{y^2}$

Thêm nguyên hàm là $\dfrac{3}{y}$

Suy ra : $U = xy - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y}$

Thử lại bằng cách lấy đạo hàm của U theo x (so sánh với P) và theo y (so sánh với Q)

Vậy NTQ của pt đã cho là $\boxed{xy - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = C}$

PTVP cấp 1- PT vp toàn phần (Đọc thêm)

Bài tập: Tìm NTQ hoặc nghiệm riêng của các pt

$$1.(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$$

$$2.(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$$

$$3.y\cos xdx + \sin xdy = \cos 2xdx, y(\frac{\pi}{2}) = 5$$

$$4.(3y^2 - x)dx + 2y(y^2 - 3x)dy = 0$$

Biết rằng khi nhân 2 vế phương trình với hàm

$h = h(x + y^2)$ thì ta được 1 ptvp toàn phần

Phương trình vi phân cấp1

Bài tập: Nhận dạng và giải các pt sau

$$1.\, xyy' = y^2 + 2x^2$$

Pt:

$$2.\, xy' = xe^{y/x} + y$$

Pt:

$$3.\, e^{1+x^2}\tan y\,dx = \frac{e^{2x}}{x-1}dy$$

Pt:

$$4.\, y' = 2^{x-y}$$

Pt:

$$5.\, (x+y-4)dy + (x+y-2)dx = 0$$

Pt:

$$6.\, y'\cos x + y = 1 - \sin x$$

Pt:

$$7.\, y'(x+y^2) = y$$

Pt:

$$8.\, 4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$$

Pt:

Phương trình vi phân cấp1

$9.\, y\ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0$

Pt:

$10.\, y' = e^{x+y} + e^{x-y}$

Pt:

$11.\, (x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2 + y^2)dy = 0$

Pt:

$12.\, (2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$ Pt:

$13.\, y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x$

Pt:

$14.\, y = xy' + y'\ln y$

Pt:

$15.\, ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$

Pt:

$16.\, y' = \dfrac{1}{1-xy}$

Pt:

Phương trình vi phân cấp1

$$17.(x^2\ln y - x)y' = y$$ Pt:

Pt:

$$18.y'x^3\sin y + 2y = xy'$$

$$19.y' = \frac{y^2}{2xy+3}$$ Pt:

$$20.\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{2x\sqrt{y}}{1+x^2} = 4\frac{arctgx}{\sqrt{1+x^2}}$$ Pt:

$$21.(y^2+2y+x^2)y' + 2x = 0$$ Pt:

$$22.y' = \frac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$$ Pt:

$$23.3y\sin({}^{3y}\!/_{x})dx + (y - 3x\sin({}^{3y}\!/_{x}))dy = 0$$ Pt:

$$24.y' = \frac{x+y}{x-y}$$ Pt:

Phương trình vi phân cấp1

$25.\ 2xdx = (x^2 + y^2 - 2y)dy$ Pt:

$26.\ y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$ Pt:

$27.\ y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}$ Pt:

$28.\ y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$ Pt:

$29.\ (e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + y)dy = 0$ Pt:

$30.\ 2(x+y)y' = (x+y)^2 + 1$ Pt:

$31.\ y' - y = 3e^x y^2$ Pt:

$32.\ (1+2x^2)y' + 2xy = \sqrt{(1+2x^2)^3}$ Pt:

Phương trình vi phân cấp1

$$34.(2x^2y\ln y - x)y' = y \to x' + \frac{1}{y}x = 2\ln y.x^2$$

$$35.y\cos x dx + \sin x dy = \cos 2x dx$$

$$\to \sin x dy - \quad \cos 2x - y\cos x \quad dx = 0 : vptp$$

$$36.e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0 : vptp$$

$$37.y'\sqrt{1+x^2} + y = \arcsin x : tt$$

$$38.y' - 2ytgx + y^2\sin^2 x = 0 : Ber, \alpha = 2$$

$$39.x^2y' - y^2 - xy = x^2 \to y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1$$