CHƯƠNG 3: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

3.1 Đạo hàm hàm y=f(x), hàm ngược, hàm cho bởi phương trình tham số

3.2 Đạo hàm cấp cao

3.3 Vi phân và ứng dụng. Vi phân cấp cao

3.4 Công thức Taylor – Maclaurint.

3.5 Quy tắc L'Hospital

3.6 Ứng dụng đạo hàm giải các bài toán tối ưu.

3.7 Ứng dụng đạo hàm giải để khảo sát hàm cho bởi pt tham số

Bài toán mở đầu 1:

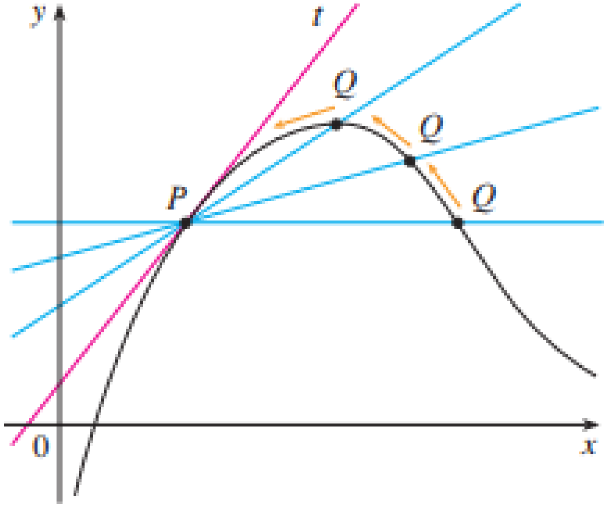
Xét đường cong y=f(x) với một điểm P(a,f(a)) cố định trên đường cong.

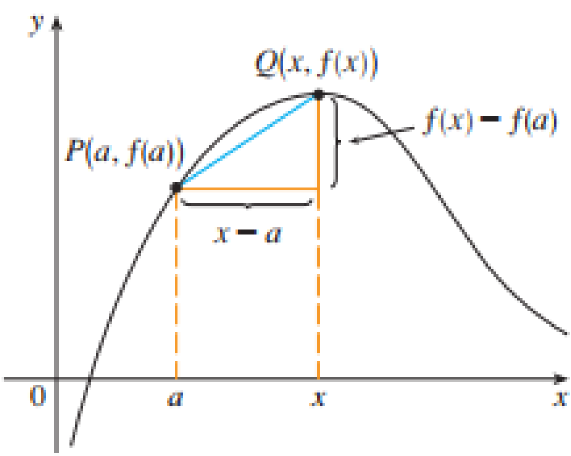
Cho điểm Q(x,f(x)) chạy trên đường cong tới điểm P.

Nếu cát tuyến PQ dần đến vị trí giới hạn Pt (Q≡P) thì đường thẳng Pt được gọi là tiếp tuyến của đường cong tại P

Tiếp tuyến có hệ số góc:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$





Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm nào lớn hơn thì độ biến thiên của hàm số tại điểm đó lớn hơn

Đạo hàm

Bài toán mở đầu 2:

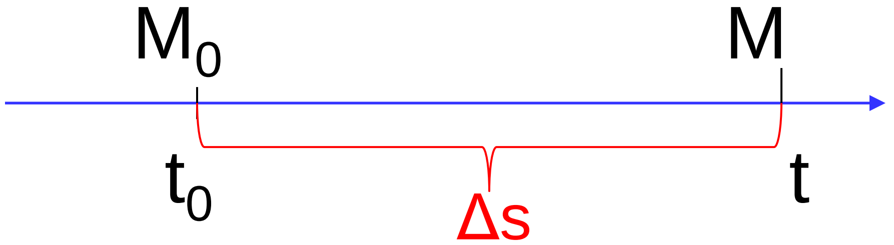
Xét một vật chuyển động trên đường thẳng.

Tại thời điểm t_0 nó ở vị trí M_0 với hoành độ $s_0 = s(t_0)$.

Yêu cầu tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t_0 .

Tại thời điểm t nó ở vị trí M với hoành độ $s = s(t)$

Ta tính được quãng đường $\Delta s = s - s_0$ trong khoảng thời gian $\Delta t = t - t_0$.



Vận tốc trung bình là tỉ số $\Delta s / \Delta t$. Vận tốc này sẽ càng gần với vận tốc tức thời tại t_0 nếu khoảng thời gian càng nhỏ. Do đó, vận tốc tức thời được định nghĩa bởi:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Nhận xét:

Cho y=f(x) (y phụ thuộc vào x). Nếu x biến thiên từ x_1 đến x_2, thì độ biến thiên của x (còn được gọi là số gia của x) là $\Delta x=x_2-x_1$ và độ biến thiên tương ứng của hàm y= f(x) là $\Delta f=f(x_2)-f(x_1)$.

Tỉ suất $\Delta f/\Delta x$ được gọi là tốc độ biến thiên trung bình của y tương ứng với x

Cả 2 bài toán trên đều dẫn ta đến việc tính giới hạn của tỉ suất $\Delta f/\Delta x$ khi $\Delta x \to 0$, tức là tính tốc độ biến thiên tức thời của y tương ứng với x tại thời điểm $x=x_1$. Trong giải tích, người ta gọi tốc độ này là đạo hàm của hàm y=f(x)

Như vậy: *đạo hàm của hàm f(x) tại 1 điểm x_0 là tốc độ biến thiên tức thời của hàm tại thời điểm $x=x_0$ và là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong y=f(x) tại điểm $(x_0,f(x_0))$*

Đạo hàm

Định nghĩa: Cho hàm f(x) xác định trong lân cận của x_0, đạo hàm tại x_0 của hàm f(x) là

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Nếu giới hạn trên là hữu hạn

Có 3 cách để kí hiệu đạo hàm $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0)$

Các quy tắc tính đạo hàm của tổng, tích, thương

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$$

$$\left(f(x).g(x)\right)' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$$

Đạo hàm

Bảng đạo hàm các hàm cơ bản

$$1/\left(a^x\right)' = a^x \ln a \Rightarrow \left(e^x\right)' = e^x$$

$$2/\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a} \Rightarrow \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$3/\left(x^a\right)' = a.x^{a-1}$$

$$4/\left(\sin x\right)' = \cos x$$

$$5/\left(\cos x\right)' = -\sin x$$

$$6/\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$7/\left(\cot x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

$$8/\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$9/\left(\arccos x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$10/\left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$11/\left(\mathrm{arc}\cot x\right)' = \frac{-1}{1 + x^2}$$

$$12/\left(shx\right)' = chx$$

$$13/\left(chx\right)' = shx$$

$$14/\left(thx\right)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$15/\left(cthx\right)' = -\frac{1}{sh^2 x}$$

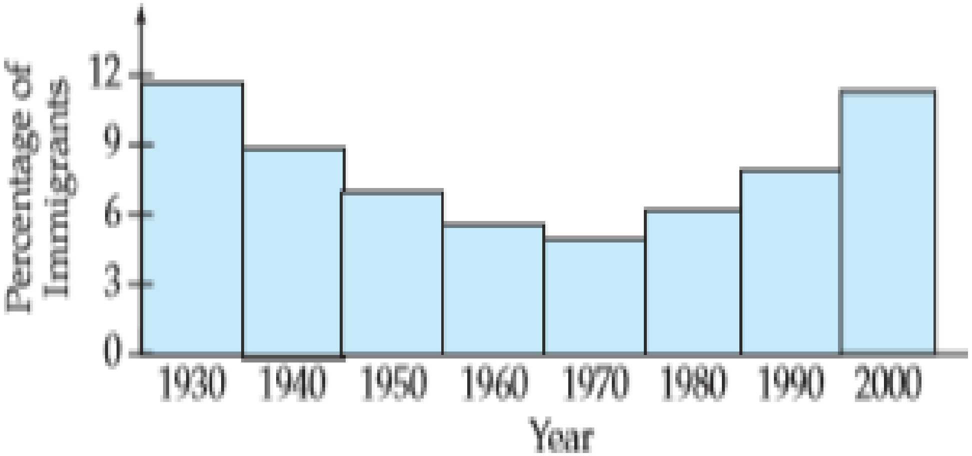
Ý nghĩa của đạo hàm

Trong Khoa học Xã hội: Tỷ lệ người dân ở Mỹ là người nhập cư (nghĩa là được sinh ra ở nơi khác) trong nhiều thập kỷ khác nhau được trình bày dưới đây.

Các tỷ lệ này được xấp xỉ bởi hàm:

$$f(x) = 0.5x^2 - 3.7x + 12$$

trong đó x là số thập kỷ kể từ năm 1930 (VD x = 5, sẽ là tỉ lệ của năm 1980).



Sources: Center for Immigration Studies and U.S Census Bureau

a. Tìm f '(1) và giải thích kết quả.

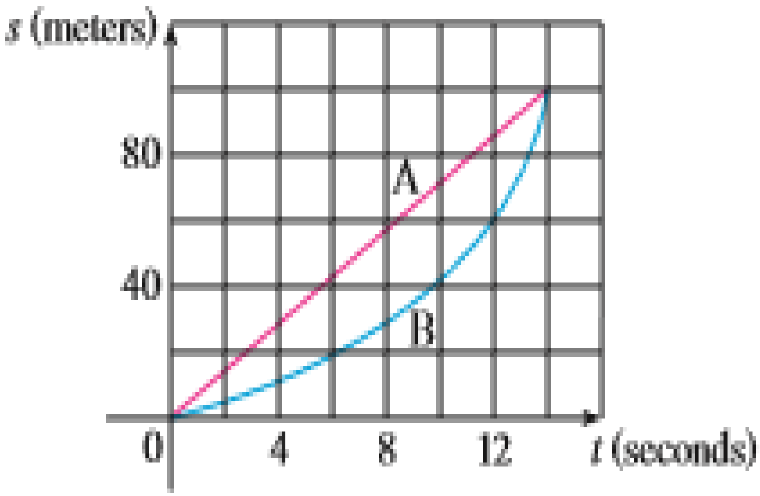
b. Ước tính tỷ lệ thay đổi của phần trăm người nhập cư trong những năm 2000 đến 2010.

a. $f'(1) = -2.7$: trong thập kỷ 40, tỉ lệ người nhập cư giảm với tốc độ khoảng 0.27% mỗi năm

Ý nghĩa của đạo hàm

Trong Khoa học Xã hội: Hai người chạy đua 100m có đồ thị hàm vị trí được cho dưới đây.

a/ Mô tả và so sánh cách chạy của 2 người.
b/ Vào thời điểm nào khoảng cách giữa 2 người lớn nhất?
c/ Vào thời điểm nào họ có cùng vận tốc?



Chú ý: Nếu $s(t)$ là hàm vị trí của 1 chất điểm di chuyển dọc theo đường thẳng thì $s'(t_0)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=t_0$.

Ý nghĩa của đạo hàm

Trong Kinh doanh: Bảng dưới đây cho biết số lượng N thuê bao điện thoại (triệu) tại Mỹ vào giữa mỗi năm thứ t

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

a/ Tìm mức tăng trưởng trung bình của số lượng thuê bao

i. Từ 2002 đến 2006

ii. Từ 2002 đến 2004

iii. Từ 2000 đến 2002

b/ Ước tính mức tăng trưởng tức thời vào năm 2002 bằng cách lấy trung bình cộng 2 tốc độ biến thiên trung bình. Đơn vị tính là gì?

c/ Ước tính mức tăng trưởng tức thời vào năm 2002 bằng cách đo hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị.

Ý nghĩa của đạo hàm

Trong Vật lý: Vị trí của 1 hạt được cho bởi phương trình

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

Trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây

a/Tìm vận tốc của hạt tại thời gian t?

b/ Vận tốc hạt sau 2 giây, 6 giây là bao nhiêu?

c/ Khi nào hạt đứng yên?

d/ Khi nào hạt chuyển động về phía trước?

e/ Tìm quãng đường hạt đi được trong 5 giây đầu tiên.

f/ Tìm gia tốc của hạt tại thời gian t và sau 4 giây.

g/ Vẽ đồ thị các hàm vị trí, vận tốc, gia tốc của hạt với $0 \le t \le 5$ trên cùng 1 hệ trục bằng 1 phần mềm tùy ý.

h/ Khi nào hạt tăng tốc? Giảm tốc?

Ý nghĩa của đạo hàm

a/ Vận tốc của hạt tại thời gian t: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

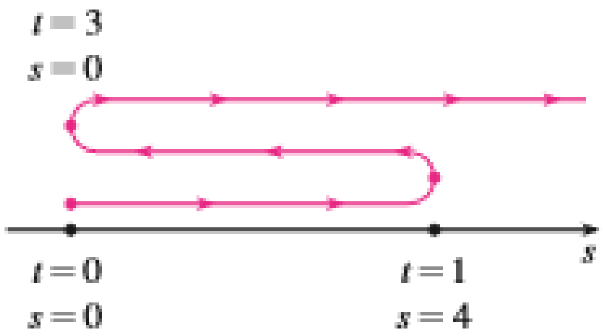
b/ Vận tốc hạt sau 2 giây là v(2)=-3 (m/s)

c/ Hạt đứng yên khi $v(t) = 0 \leftrightarrow t = 1 \vee t = 3$

d/ Hạt chuyển động về phía trước khi:

$$v(t) > 0 \leftrightarrow t < 1 \vee t > 3$$

e/ Tìm quãng đường hạt đi được trong 5 giây đầu tiên bằng cách vẽ hình.



$$|s(1) - s(0)| + |s(3) - s(1)| + |s(5) - s(3)| = 28(m)$$

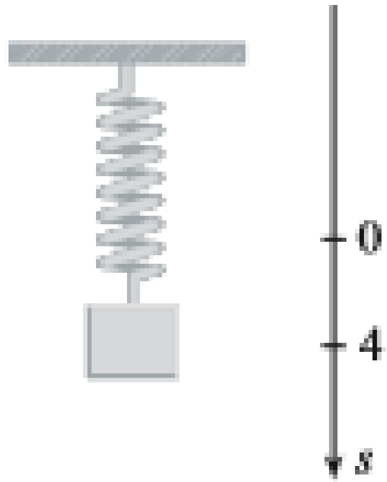
f/ Gia tốc của hạt là: $a(t) = v(t) = 6t - 12$

h/ Hạt tăng tốc khi vận tốc dương và tăng lên hoặc âm và giảm đi tức là v(t) và a(t) cùng dấu

Ý nghĩa của đạo hàm

Trong Vật lý: Một vật treo cuối 1 lò xo được kéo căng ra khỏi vị trí đứng yên của nó (vị trí cân bằng) và thả 4cm vào thời gian t=0 như trong hình, lưu ý hướng của trục là hướng đi xuống. Vị trí của vật tại thời gian t là

$$s = f(t) = 4\cos t$$



a/ Tìm vận tốc và gia tốc của vật tại thời gian t?

b/ Sử dụng kết quả trên để phân tích chuyển động của vật

Vật dao động từ điểm thấp nhất (s=4cm) đến điểm cao nhất (s=-4cm)

Vận tốc lớn nhất khi vật đi qua vị trí cân bằng và vận tốc bằng 0 khi nó đi đến các điểm cao nhất và thấp nhất

Gia tốc đạt giá trị lớn nhất (vận tốc biến thiên nhanh nhất) tại các điểm cao nhất và thấp nhất

Ý nghĩa của đạo hàm

Trong Kinh tế: Giả sử tổng chi phí để sản xuất x đơn vị hàng hóa là C(x) thì hàm C(x) được gọi là hàm chi phí

Nếu số lượng hàng hóa sản xuất tăng từ x_1 đến x_2 thì chi phí tăng thêm là $\Delta C=C(x_2)-C(x_1)$ và tốc độ biến thiên trung bình của chi phí là:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{C(x_2)-C(x_1)}{x_2-x_1}\underline{\underline{\Delta x=x_2-x_1}}\frac{C(x_1+\Delta x)-C(x_1)}{\Delta x}$$

Giới hạn của tỉ suất trên khi $\Delta x \to 0$ là tốc độ biến thiên tức thời của chi phí sản xuất theo số sản phẩm được sản xuất

Trong kinh tế chi phí đó được gọi là *chi phí cận biên*.

Lấy $\Delta x=1$ và n lớn (sao cho $\Delta x<n$), ta có: $C'(n)\approx C(n+1)-C(n)$

Do đó:

Chi phí cận biên để sản xuất n đơn vị sản phẩm xấp xỉ bằng chi phí sản xuất thêm 1 đơn vị sản phẩm thứ n+1 hoặc thứ n

Ý nghĩa của đạo hàm

VD: Doanh nghiệp có thể mua nhiều bản quyền (license) cho phần mềm nén dữ liệu PowerZip với tổng chi phí xấp xỉ

$C(x) = 24x^{2/3}$ đô la cho x bản quyền .

Nguồn: Trident Software

1/ Tính C'(8), nêu đơn vị tính và ý nghĩa của kết quả. .

2/ Tính C'(64), so sánh với kết quả câu trên. .

3/ Tính C(64) - C(63) và so sánh với C'(64)

$$C'(x) = 16x^{-1/3}$$

1/ C'(8)=8 (đô la/bản quyền), tức là mua bản quyền thứ 8 với giá 8 đô la

2/ C'(64)=4, tức là mua bản quyền thứ 64 chỉ với giá 4 đô la

3/ C(64)-C(63)=4,01 tức là chi phí cận biên để có bản quyền thứ 64 xấp xỉ với chi phí mua bản quyền thứ 64.

Ý nghĩa của đạo hàm

Trong Y tế dự phòng: Số người mới nhiễm bệnh đến ngày thứ t của 1 đợt dịch cúm là hàm $f(t) = 13t^2 - t^3 \ (0 \le t \le 13)$

Tính $f'(t_0)$ và giải thích ý nghĩa của nó khi $t_0=5$, $t_0=10$

Trong ngành quảng cáo: Người ta ước tính rằng số người sẽ xem 1 loại quảng cáo trên báo đã đăng trong x ngày liên tiếp có dạng: $N(x) = T - \dfrac{T}{2x}$ trong đó T là số độc giả của báo

Tìm xem số lượng khách hàng sẽ xem quảng cáo này tăng như thế nào khi quảng cáo này đã đăng 5 ngày biết tờ báo có lượng độc giả khoảng 400.000 người.

Trong Kinh doanh: Số lượng (tính bằng pound) của 1 loại cà phê được bán với giá p đô la/ 1 pound là Q=f(p)

a/ Ý nghĩa và đơn vị tính của f '(8) là gì?

b/ Giá trị f(8) là dương hay âm?

Đạo hàm 1 phía

Đạo hàm 1 phía:

Đạo hàm trái: $f'_{-}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}$

Đạo hàm phải: $f'_{+}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}$

Định lý: Hàm f(x) có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi nó có đạo hàm trái, đạo hàm phải tại x_0 và 2 đạo hàm đó bằng nhau

Định lý: (Mối liên hệ giữa hàm có đh và hàm liên tục)

Hàm có đạo hàm tại $x=x_0$ $\cancel{\Longleftarrow}\!\!\Longrightarrow$ hàm liên tục tại $x=x_0$

Đạo hàm 1 phía

Ví dụ: Tính đạo hàm và dùng phần mềm tùy ý để vẽ đồ thị và các tiếp tuyến trái, phải của hàm sau tại các điểm hàm không có đạo hàm. $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

Ta viết lại hàm đã cho bằng cách bỏ dấu trị tuyệt đối

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty) \\ -\left(x^2 - 2x - 3\right), x \in (-1, 3) \end{cases}$$

Tính đạo hàm tại 2 điểm x=-1, x=3

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \\ -(2x - 2), x \in (-1, 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(-1) = -4 = f'_-(3) \\ f'_+(-1) = 4 = f'_+(3) \end{cases}$$

Tìm tiếp tuyến tại x=-1, x=3

$$x = -1 : y = \pm 4(x+1); x = 3 : y = \pm 4(x-3)$$

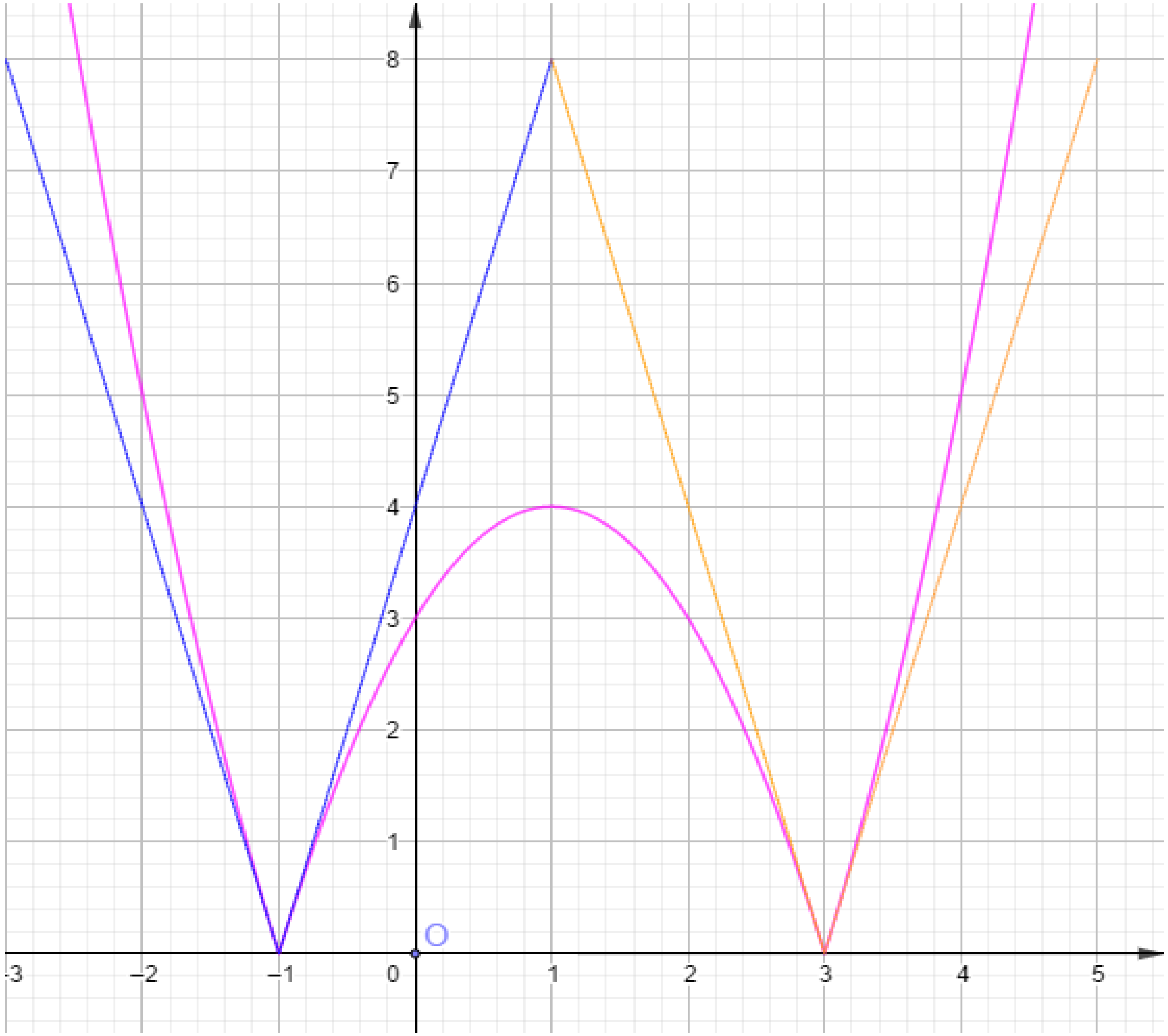
Đạo hàm 1 phía

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3|$$

Các tiếp tuyến:

$$y = \pm 4(x+1);$$

$$y = \pm 4(x-3)$$



Đạo hàm 1 phía

Ví dụ: Cho hàm:

$$f(x)=\begin{cases}-2-x^2, x\le 0\\ \dfrac{-2}{x+1}, x>0\end{cases}$$

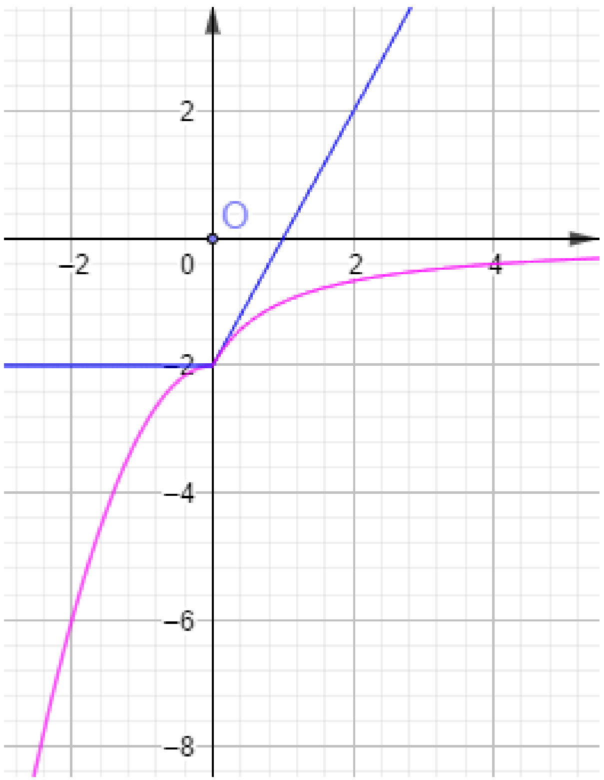
Tìm tiếp tuyến trái, phải (nếu có) của hàm tại x=0, sau đó dùng máy tính vẽ đồ thị và các tiếp tuyến đó

Ta tính hệ số góc của tiếp tuyến trái, phải

$$f'(x)=\begin{cases}-2x, x<0\\ \dfrac{2}{\left(x+1\right)^2}, x>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'_-\left(0\right)=-2.0=0\\ f'_+\left(0\right)=\dfrac{2}{\left(0+1\right)^2}=2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ tt trái : $y=-2$,tt phải : $y=-2+2x$



Vi phân

Định nghĩa: Hàm y=f(x) được gọi là khả vi tại $x=x_0$ nếu nó có đạo hàm tại x_0. Hàm khả vi trong khoảng (a,b) nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

VD: Khảo sát sự khả vi của hàm $f(x)=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$ tại x=0, x=1

Ta tính đạo hàm của hàm f tại x=0, x=1 bằng định nghĩa

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\sqrt[3]{\frac{1+\Delta x}{\Delta x}}=\pm\infty$$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\sqrt[3]{\left(\frac{\Delta x-1}{\Delta x}\right)^2}=+\infty$$

Các giới hạn trên ra vô cực nên hàm không có đạo hàm tức là hàm không khả vi

Dùng máy tính vẽ hình để trông thấy hình ảnh của hàm không khả vi tại 1 điểm

Vi phân

Nhắc lại rằng đạo hàm của hàm f tại $x=x_0$ còn được kí hiệu là

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Định nghĩa: Hàm f(x) khả vi tại $x=x_0$, ta gọi vi phân của biến x là dx và được coi như 1 biến độc lập (dx có thể được cho 1 giá trị bất kỳ). Khi đó, ta có vi phân của hàm tại $x=x_0$ được kí hiệu và xác định bởi công thức $df(x_0) = f'(x_0)dx$

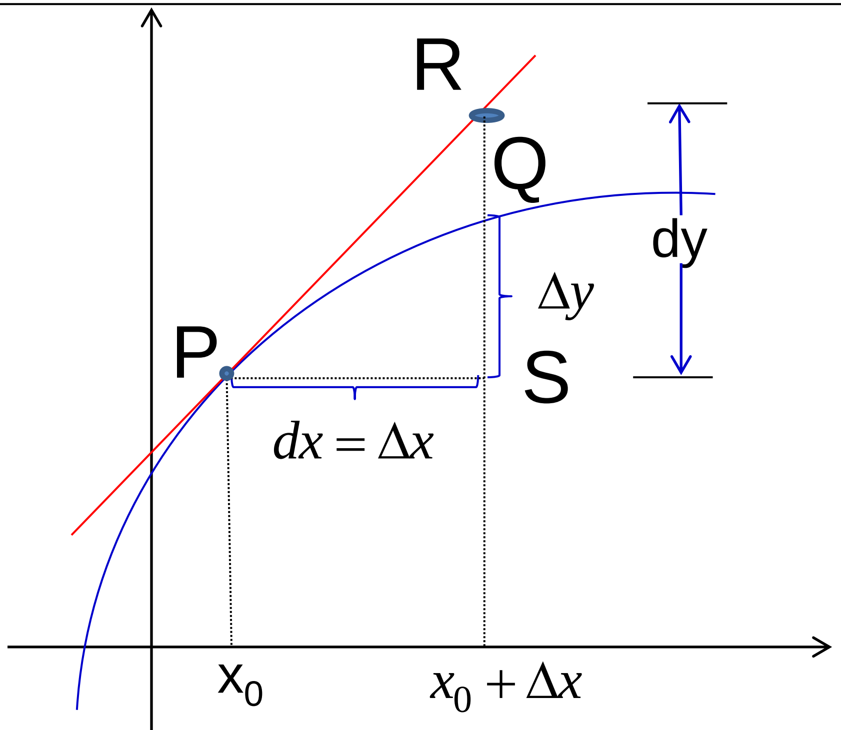
Ý nghĩa hình học của vi phân:

Cho đường cong y=f(x) và 2 điểm P, Q trên đường cong.

Cho $dx=\Delta x$ thì $\Delta y=SQ$

Suy ra độ dài đoạn SR là

$$f'(x)dx = f'(x)\Delta x = dy$$



Vậy khi x biến thiên 1 lượng dx thì *Δy là độ biến thiên tương ứng của đường cong*, còn *dy là độ biến thiên tương ứng của tiếp tuyến*.

Ta dùng vi phân để tính xấp xỉ và ước tính sai số.

VD: Một hình cầu có chu vi đường tròn lớn đo được là 84cm với sai số cho phép là 0.5cm. Dùng vi phân để ước tính sai số, sai số tỉ đối của diện tích bề mặt và thể tích hình cầu.

Công thức tính diện tích, thể tích hình cầu: $S_{xq} = 4\pi r^2, V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Sai số của x là Δx thì sai số tương ứng của hàm là Δf được tính xấp xỉ bằng vi phân df. Ta được:

$$\Delta S \approx dS = S'.dr = 8\pi r.dr, \Delta V \approx dV = V'.dr = 4\pi r^2.dr$$

Trong đó, bán kính hình cầu và sai số của nó được cho trong công thức tính chu vi đường tròn lớn

$$C = 2\pi r, \Delta C \approx dC = 2\pi.\Delta r$$

Do đó: $r = \dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{84}{2\pi} = 13,37; \Delta r = \dfrac{\Delta C}{2\pi} = \dfrac{0,5}{2\pi} = 0,08$

Vậy: $\Delta S \approx 8\pi.\dfrac{C}{2\pi}.\dfrac{\Delta C}{2\pi} = \dfrac{84}{\pi} = 26,74$

$$\Delta V \approx 4\pi.\frac{C^2}{4\pi^2}.\frac{\Delta C}{2\pi} = \frac{1764}{\pi^2} = 178,73$$

Sai số tỉ đối: $\dfrac{\Delta S}{S}100\% = \dfrac{1}{84}100\% \approx 1,2\%$

$$\frac{\Delta V}{V}100\% \approx 1,8\%$$

Ta suy ra các quy tắc tính vi phân cũng như bảng vi phân các hàm cơ bản giống như đạo hàm.

Ví dụ: Tính dy nếu $y = arctan(x^2+x)$

Ta tính đạo hàm, sau đó thay vào công thức vi phân

$$y' = \frac{2x+1}{1+(x^2+x)^2} \Rightarrow dy = y'.dx = \frac{2x+1}{1+(x^2+x)^2}dx$$

Ví dụ: Tính dy nếu $y = ln(sinx+cosx)$

$$y' = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \Rightarrow dy = y'.dx = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx$$

Ví dụ: Tìm a, b sao cho hàm

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+4x, x\le -2 \\ \sinh(x+2)+2bx, x>-2 \end{cases}$$

k/vi và lt tại x=-2. Vẽ hình minh họa

Tìm đk để hàm lt trước, k/vi sau

$f(x)$ lt tại $x=-2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=f(-2)$

$$\Leftrightarrow -4b=4a-8 \quad (1)$$

$f(x)$ k / vi tại $x=-2 \Leftrightarrow f(x)$ có đh $x=-2$

$$\Leftrightarrow -4a+4=2b+1 \quad (2)$$

Từ 2 pt (1) và (2), ta có kết quả: $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{5}{2}$

Đạo hàm hàm hợp

Đạo hàm hàm hợp

$$\boxed{h = f \circ g \Rightarrow h' = f'.g'}$$

Tức là $y = g(x), h(x) = f(y) \Rightarrow h'(x) = f'(y).g'(x)$

Ví dụ: Tính đạo hàm các hàm : $a. f(x) = \tan\left(x^3 + x\right)$

$b. g(x) = \ln\left(\sinh x^2\right)$

$$f'(x) = \frac{(x^3 + x)'}{\cos^2(x^3 + x)} = \frac{3x^2 + 1}{\cos^2(x^3 + x)}$$

$$g'(x) = \frac{\left(\sinh x^2\right)'}{\sinh x^2} = \frac{2x.\cosh x^2}{\sinh x^2} = 2x.\coth x^2$$

Đạo hàm hàm hợp

Đạo hàm của các hàm hợp cơ bản

$$1/\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}.f'(x)$$

$$2/\left(\ln f(x)\right)' = \frac{1}{f(x)}.f'(x)$$

$$3/\left(f(x)^{a}\right)' = a.f(x)^{a-1}.f'(x)$$

$$4/\left(\sin f(x)\right)' = \cos f(x).f'(x)$$

$$5/\left(\cos f(x)\right)' = -\sin f(x).f'(x)$$

$$6/\left(\tan f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$$

$$7/\left(\cot f(x)\right)' = \frac{-f'(x)}{\sin^2 f(x)}$$

$$8/\left(\arcsin f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$9/\left(\arccos f(x)\right)' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$10/\left(\arctan f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

$$11/\left(\operatorname{arccot} f(x)\right)' = \frac{-f'(x)}{1+f^2(x)}$$

Đạo hàm hàm hợp

Ví dụ: Một thùng hình nón ngược cao 6m, đường kính tại đỉnh là 4m đang bị chảy nước với tốc độ 10.000cm^3/phút. Cùng lúc đó nước được bơm vào thùng với tốc độ không đổi. Nếu mực nước tăng lên với tốc độ 20cm/phút khi độ cao của nước là 2m thì tốc độ nước bơm vào là bao nhiêu?

Gọi mực nước trong thùng là x (m) thì thể tích nước trong thùng là:

$$V(x) = \frac{1}{3}x.\pi\left(\frac{x}{3}\right)^2$$

Tuy nhiên, mực nước trong thùng lại phụ thuộc vào thời gian t tức là x=x(t). Do đó, ta có hàm V là hàm hợp

Tốc độ thay đổi của thể tích là: $V'(t) = \frac{\pi}{27}.3x'(t).x^2(t)$ (1)

Tại thời điểm $t=t_0$, độ cao và tốc độ thay đổi của mực nước là:

$$x(t_0) = 2(m),$$

$$x'(t_0) = 0,2(m/p)$$

Thay vào (1), ta có tốc độ thay đổi của thể tích, suy ra tốc độ nước bơm vào

Đạo hàm hàm hợp

Ví dụ: Tính đạo hàm của $y = e^{f\left(x^2+1\right)}$

$$y' = e^{f\left(x^2+1\right)}.\left(f\left(x^2+1\right)\right)'.\left(x^2+1\right)' = 2x.f'\left(x^2+1\right).e^{f\left(x^2+1\right)}$$

Ví dụ: Mức carbon monoxide (CO) trong một thành phố được dự đoán là $0.02x^{3/2}+1$ phần triệu (parts per million), trong đó x là dân số (tính hàng ngàn). Trong t năm, dân số của thành phố được dự đoán là x (t) = 12 + 2t nghìn người.

a/ Trong t năm , mức độ CO sẽ là bao nhiêu? (P(t)=?)
b/ Tìm tốc độ ô nhiễm CO trong 2 năm.

$$P(t) = 0.02(12+2t)^{3/2} + 1 \Rightarrow P'(t) = 0,02.2.1,5(12+2t)^{1/2}$$

$$\Rightarrow P'(2) = 0,02.2.1,5(12+2.2)^{1/2} = 0.24$$

Đạo hàm hàm ngược

Giả sử hàm 1-1: $y = f(x)$ có hàm ngược là $x = g(y)$.

Tại $x = x_0$ hàm f(x) có đạo hàm hữu hạn khác 0 thì hàm g(y) sẽ có đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$ hay ta còn viết $$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$$

Đạo hàm hàm ngược

Ví dụ: Tìm đạo hàm của hàm *y = arcsinx*

Ta tính đạo hàm của hàm *x = siny:* $(\sin y)' = \cos y$

Áp dụng công thức đạo hàm hàm ngược:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ví dụ: Tìm đạo hàm của hàm *y = ch*$^{-1}$*x*

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\cosh^{-1} x\right)' = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Đạo hàm hàm cho bởi pt tham số

Đạo hàm của hàm cho bởi phương trình tham số

Cho hàm y=f(x) được cho bởi pt tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Đạo hàm của hàm y được tính bởi $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

Ví dụ: Tính *y'(x)* biết $y(t) = e^t \cos t$, $x(t) = e^t \sin t$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(e^t \cos t)'}{(e^t \sin t)'} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t(\sin t + \cos t)}$$

$$y'(x) = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$$

Đạo hàm dạng $u(x)^{v(x)}$:

Ta viết lại dạng u^v thành $\boxed{u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}}$

Suy ra : $\left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)'$

$$= e^{v(x)\ln u(x)}.\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

$$\boxed{\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$

Lấy ln 2 vế hàm đã cho

$$\ln y = \ln((\ln x)^x) - \ln(x^{\ln x})$$

Lấy đạo hàm 2 vế:

$$\frac{y'}{y} = \left(\ln((\ln x)^x)\right)' - \left(\ln(x^{\ln x})\right)'$$

Vậy:
$$y' = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x} - \frac{2\ln x}{x}\right)$$

Đạo hàm cấp cao

Cho hàm *y* = *f(x)* có đạo hàm *z* = *f '(x)*. Lấy đạo hàm của hàm z, ta được đạo hàm cấp 2 của hàm *f(x)* – kí hiệu là

$$\boxed{f''(x)}$$

Tiếp tục quá trình đó, ta gọi đạo hàm của đạo hàm cấp (n-1) là đạo hàm cấp n

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

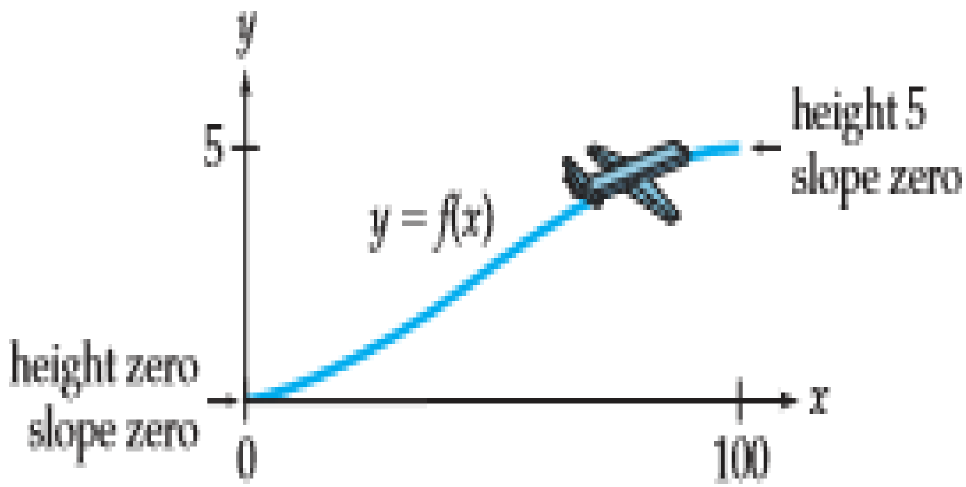
Ví dụ: Tính đạo hàm cấp 1, 2 của hàm *y* = *tan(x²+1)*

$$y' = \frac{2x}{\cos^2(x^2+1)} \Rightarrow y'' = \frac{2\cos(x^2+1) + 2.2x.2x.\sin(x^2+1)}{\cos^3(x^2+1)}$$

Ví dụ: Một máy bay bắt đầu cất cánh và đạt độ cao 5 dặm sau khi di chuyển quãng đường 100 dặm theo chiều ngang (như hình vẽ). Cho biết đường bay có phương trình là

$$y = -0,00001x^3 + 0,0015x^2$$

Tìm điểm uốn của đường cong và giải thích lý do đó là điểm đi lên dốc nhất của máy bay



$$y'' = -0,00006x + 0,003$$

$$y'' = 0 \leftrightarrow x = 50$$

Khi x<50: $y' > 0, y'' > 0$ tức là máy bay đi lên với tốc độ biến thiên tăng dần cho đến khi x=50 (ĐU) thì tốc độ biến thiên đạt GTLN, sau đó khi x>50: $y' > 0, y'' < 0$ tức là máy bay đi lên với tốc độ biến thiên giảm dần

Do đó, ĐU là điểm mà tại đó máy bay đi lên dốc nhất

Đạo hàm cấp cao của hàm cho bởi pt tham số

Cho hàm *y = y(x)* xác định bởi *x = x(t), y = y(t)*

Đạo hàm cấp 1: $\boxed{y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}}$

Tức là đạo hàm cấp 1 cũng là hàm cho bởi pt tham số

$$x = x(t), y' = \frac{y'(t)}{x'(t)} = g(t)$$

Đạo hàm cấp 2: $\boxed{y''(x) = \dfrac{g'(t)}{x'(t)} = \dfrac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}}$

Tương tự, đạo hàm cấp (n-1) vẫn là hàm cho bởi pt tham số nên đạo hàm cấp n được tính theo cách trên

$$\boxed{y^{(n)}(x) = \frac{\left(y^{(n-1)}(x)\right)'}{x'(t)}}$$

Ví dụ: Tính y', y'' biết $x = e^{2t}\,sht$, $y = e^{2t}cht$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{e^{2t}(2cht + sht)}{e^{2t}(2sht + cht)} = \frac{2cht + sht}{2sht + cht}$$

$$y''(x) = \frac{\left(\dfrac{2cht + sht}{2sht + cht}\right)'}{x'(t)} = \frac{\dfrac{(2sht + cht)^2 - (2cht + sht)^2}{(2sht + cht)^2}}{e^{2t}(2sht + cht)}$$

$$= \frac{3(sh^2t - ch^2t)}{e^{2t}(2sht + cht)^3} = -\frac{3}{e^{2t}(2sht + cht)^3}$$

Đạo hàm cấp cao của hàm hợp – CT Leibnitz

Cho hàm hợp $h = f \circ g$

Đh cấp 1: $h' = f'.g'$

Suy ra đh cấp 2: $h''(x) = (f''(u).g'(x)).g'(x) + f'(u).g''(x)$

Đạo hàm của tích

Bằng QUY NẠP, ta chứng minh được

CT Leibnitz: $$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . f^{(k)} . g^{(n-k)}$$

Trong đó, ta quy ước $f^{(0)} = f$ (đh hàm cấp 0 bằng chính nó)

Ví dụ: Tính đạo hàm cấp 3 của hàm *y = sinx.ln(x+1)*

$$y^{(3)} = \sum_{k=0}^{3} C_3^k (\sin x)^{(k)} (\ln(x+1))^{(3-k)}$$

$$y^{(3)} = C_3^0 (\sin x)^{(0)} (\ln(x+1))^{(3)} + \ldots + C_3^3 (\sin x)^{(3)} (\ln(x+1))^{(0)}$$

$$y^{(3)} = \sin x \frac{2}{(x+1)^3} + 3\cos x \frac{-1}{(x+1)^2} - 3\sin x \frac{1}{x+1} - \cos x.\ln(x+1)$$

Ví dụ: Tính đạo hàm cấp n của các hàm

$$a.\ y = x^a \qquad\qquad b.\ y = \ln(1+x)$$

$$y = x^a:\ y' = ax^{a-1},\quad y'' = a(a-1)x^{a-2},\ \ldots,$$

$$y^{(n)} = \left(x^a\right)^{(n)} = a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}$$

Đặc biệt: khi a=-1, ta được

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n)(1+x)^{(-1-n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$y = \ln(1+x):\quad y' = \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow y^{(n)} = (\ln(1+x))^{(n)} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

Đạo hàm cấp cao

Đh cấp cao một số hàm thường gặp

$$1/\ (x^a)^{(n)} = a(a-1)...(a-n+1)x^{a-n} \Rightarrow \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$2/\ (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

$$3/\ (\ln(x+1))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$

$$4/\ (\sin ax)^{(n)} = a^n \sin(ax + n\frac{\pi}{2})$$

$$5/\ (\cos ax)^{(n)} = a^n \cos(ax + n\frac{\pi}{2})$$

Ví dụ: Tính $y^{(n)}$ biết $y = (2x^2-x+3)\sin(2x+1)$

Đặt $f(x) = 2x^2-x+3$, $g(x) = \sin(2x+1)$ thì $y = f.g$

Áp dụng CT Leibnitz với lưu ý: với mọi $k>2$ thì $f^{(k)}=0$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$= C_n^0 f^{(0)} g^{(n)} + C_n^1 f' g^{(n-1)} + C_n^2 f'' g^{(n-2)}$$

$$= (2x^2 - x + 3)2^n \sin(2x + 1 + n\frac{\pi}{2})$$

$$+ n(4x-1)2^{n-1}\sin(2x+1+(n-1)\frac{\pi}{2})$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} 4.2^{n-2} \sin(2x+1+(n-2)\frac{\pi}{2})$$

Ví dụ: Tính $y^{(n)}$ nếu $y = \dfrac{1}{2x^2 - 5x + 2}$

$$y = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x-2}\right)$$

$$y^{(n)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x - {}^{1}\!/_{2}} - \frac{1}{x-2}\right)^{(n)}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} n!}{3}\left(\frac{1}{\left(x - {}^{1}\!/_{2}\right)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right)$$

Phương pháp tính đạo hàm cấp cao.

1. Phân tích thành tổng các hàm đã có đh cấp n và sử dụng công thức đh của tổng bằng tổng các đh.

2. Phân tích thành tích của hai hàm: f và g là các hàm đã có CT tính đh cấp n sau đó sử dụng công thức Leibnitz

3. Sử dụng khai triển Maclaurint, Taylor (sẽ học)

Vi phân cấp cao (Tự đọc)

Vi phân cấp 2 của hàm f(x) là vi phân (nếu có) của vi phân cấp 1: $d^2f = d(df)$

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x).dx)$$

$$= d(f'(x))dx + f'(x).d(dx)$$

$$= f''(x)dx^2$$

Vi phân cấp n của hàm f(x) là vi phân (nếu có) của vi phân cấp (n-1). Tương tự như trên, ta được:

$$\boxed{d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n}$$

Vi phân cấp cao (Tự đọc)

Ví dụ: Cho hàm $f(x) = \ln(e^{2x} - e^{-x} + 1)$. Tính *df*, *d²f* tại x=0

Ta tính đạo hàm rồi thay vào công thức vi phân

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x} + 1} \qquad \Rightarrow f'(0) = 3$$

$$f''(x) = \frac{4e^{2x} - 9e^{x} - e^{-x}}{\left(e^{2x} - e^{-x} + 1\right)^2} \qquad \Rightarrow f''(0) = -6$$

Vậy: $$df(x) = \frac{2e^{2x} + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x} + 1} dx \Rightarrow df(0) = 3dx$$

$$d^2 f(x) = \frac{4e^{2x} - 9e^{x} - e^{-x}}{\left(e^{2x} - e^{-x} + 1\right)^2} dx^2 \Rightarrow d^2 f(0) = -6dx^2$$

Ví dụ: Tính dy, d^2y nếu $y = f(e^x)$

Tính đạo hàm hàm hợp lần thứ 1:

$$y'(x) = y'(u).u'(x) \quad = f'(u).e^x$$

$$\Rightarrow dy = f'(e^x).e^x.dx$$

Tính đạo hàm hàm hợp lần thứ 2:

$$y''(x) = \left(f''(u).u'(x) \right).u'(x) + y'(u).u''(x)$$

$$= f''(u).(e^x)^2 + f'(u).e^x$$

$$= f''(e^x).e^{2x} + f'(e^x).e^x$$

$$\Rightarrow d^2y = y''(x).dx^2 = \left(f''(e^x).e^{2x} + f'(e^x).e^x \right) dx^2$$

Quy tắc L'Hospital

Định lý 1 (dạng $\frac{0}{0}$)

Cho 2 hàm f(x), g(x) khả vi trên khỏang (a,b) thỏa

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=0, \quad \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=0 \\ 2.\ g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b) \\ 3.\ \lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A \end{array}\right\} \text{ Khi đó: } \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

Chú ý:

1. Định lý vẫn đúng khi $x\to a+$
2. Định lý vẫn đúng khi $b=+\infty$, $a=-\infty$
3. Định lý vẫn đúng nếu ta phải tính đạo hàm k lần

Quy tắc L'Hospital

Ví dụ: Tính các giới hạn

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3} \qquad 2.\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+\tan^2 x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

$$2.\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{\cos 2x} = 0$$

Quy tắc L'Hospital

Định lý 2 (dạng $\frac{\infty}{\infty}$)

Cho 2 hàm f(x), g(x) khả vi trên khỏang (a,b) thỏa

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = \infty \\ 2. g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b) \\ 3.\ \lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \end{array}\right\}$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Chú ý:

1. Định lý vẫn đúng khi $x \to a+$
2. Định lý vẫn đúng khi $b = +\infty$, $a = -\infty$ hoặc $A = +\infty$
3. Định lý vẫn đúng nếu ta phải tính đạo hàm k lần

Ví dụ: Tính các giới hạn

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}(\alpha>0)$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{chx}{x}$

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}(\alpha>0) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{chx}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{shx}{1}=\infty$

Cách khử các dạng vô định bằng quy tắc L'Hospital

$$0.\infty = \left[\begin{array}{l} \dfrac{0}{\dfrac{1}{\infty}} = \dfrac{0}{0} \\ \\ \dfrac{\infty}{\dfrac{1}{0}} = \dfrac{\infty}{\infty} \end{array}\right.$$

$$\infty - \infty = \infty\left(1 - \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$1^{\infty} = e^{\infty.\ln 1} = e^{\infty.0}$$

$$0^{0} = e^{0.\ln 0} = e^{0.\infty}$$

$$(+\infty)^{0} = e^{0\ln(+\infty)} = e^{0.\infty}$$

Ví dụ: Tính các giới hạn

$$L_1 = \lim_{x \to \pi/4} (\tan x)^{\frac{1}{x - \pi/4}} = \lim_{x \to \pi/4} e^{\frac{1}{x - \pi/4} \ln(\tan x)} = e^{\lim\limits_{x \to \pi/4} \frac{\ln \tan x}{x - \pi/4}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to \pi/4} \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}} = e^2$$

$$L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^2 . x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(1 + \tan^2 x\right)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

Quy tắc L'Hospital

$$L_3 = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x+2^x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{1+2^x\ln 2}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{2^x\ln^2 2}} = 2$$

$$L_4 = \lim_{x\to0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to0^+} e^{\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}} = 1$$

Các trường hợp không dùng được quy tắc L'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\sin x}{1}$$

$$\overline{\exists} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Sau khi dùng L'H thì vẫn chỉ được giới hạn ban đầu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{\cot x}$$

Giới hạn dạng $\frac{0}{\infty} = 0$

Ví dụ: Tính các giới hạn

$$1.\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$$

$$2.\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

Nhận xét:

1. Các giới hạn trên đều có dạng $\frac{0}{0}$ và đều có kết quả khác 0

tức là khi $x \to x_0$ *tốc độ dần về 0 của tử số và mẫu số như nhau*

2. Trong lân cận của x_0, liệu có tồn tại hàm đa thức $P_n(x-x_0)$ xấp xỉ với hàm trên tử số hay không?

Công thức Taylor - Maclaurint

Bài toán: Hàm y=f(x) khả vi đến cấp (n+1) trong lân cận của điểm x_0. Tìm đa thức $P_n(x)$ có dạng

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$ sao cho :

$$P_n(x_0) = f(x_0), P_n'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Sử dụng từng đẳng thức điều kiện, ta được:

$$\begin{cases} a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), \\ a_2 = \dfrac{1}{2} f''(x_0), a_3 = \dfrac{1}{2.3} f'''(x_0) \\ \ldots \\ \quad a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Vậy: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Đặt $R(x) = f(x) - P_n(x-x_0)$ và tính giới hạn

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}$$ dạng $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$$

Suy ra: $R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = 0\left((x-x_0)^n\right)$

Định lý Taylor: Cho hàm f(x) khả vi đến cấp (n+1) trong khoảng (a,b). Khi ấy, ta có công thức:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + 0\left((x - x_0)^n\right)$$

Ta gọi $R_n = 0\left((x - x_0)^n\right)$ là phần dư Peano

Chú ý: Phần dư trong công thức Taylor của hàm f(x) còn có các dạng khác như: dạng Lagrange, dạng tích phân. Tùy thuộc vào việc ta sử dụng công thức Taylor để làm gì, ta sẽ dùng phần dư dạng thích hợp.

Công thức Taylor - Maclaurint

Khi $x_0 = 0$ thì CT Taylor được gọi là CT Maclaurint

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n$$

$$= f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + 0\left(x^n\right)$$

Không tính phần dư, ta có công thức xấp xỉ một hàm khả vi đến cấp (n+1) trong 1 lân cận của điểm x_0 với 1 đa thức bậc n theo $(x-x_0)$

Ví dụ: Khai triển Maclaurint hàm *y=sinx* đến bậc 3, 4

$y(0) = 0$

$y' = \cos x \Rightarrow y'(0) = 1$

$y'' = -\sin x \Rightarrow y''(0) = 0$

$y''' = -\cos x \Rightarrow y'''(0) = -1$

$y^{(4)} = \sin x \Rightarrow y^{(4)}(0) = 0$

Vậy:

$$\sin x = 0 + 1.x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}.x^3 + 0\left(x^3\right)$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + 0\left(x^3\right) \qquad \text{(bậc 3)}$$

$$\sin x = 0 + 1.x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}.x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + 0\left(x^4\right)$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + 0\left(x^4\right) \qquad \text{(bậc 4)}$$

Công thức Maclaurint một số hàm cơ bản với phần dư Peano

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + 0(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \left[\begin{array}{l} 0\left(x^{2n+1}\right) \\ 0\left(x^{2n+2}\right) \end{array}\right.$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \left[\begin{array}{l} 0\left(x^{2n}\right) \\ 0\left(x^{2n+1}\right) \end{array}\right.$$

Công thức Maclaurint một số hàm cơ bản với phần dư Peano

$$shx = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \begin{bmatrix} 0\left(x^{2n+1}\right) \\ 0\left(x^{2n+2}\right) \end{bmatrix}$$

$$chx = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ... + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \begin{bmatrix} 0\left(x^{2n}\right) \\ 0\left(x^{2n+1}\right) \end{bmatrix}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + 0\left(x^{2n+1}\right)$$

Công thức Maclaurint một số hàm cơ bản với phần dư Peano

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + 0\left(x^n\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + 0\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + 0\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + 0\left(x^n\right)$$

Ví dụ: Khai triển Maclaurint hàm $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

đến cấp 2, 5

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \quad = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1 - x/2} + \frac{1}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + 0(x^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \frac{31}{32}x^4 + \frac{63}{64}x^5 + 0(x^5)$$

Nếu bỏ phần dư trong 2 khai triển trên, ta sẽ được 2 hàm xấp xỉ với hàm f(x) ban đầu.

Trong lân cận của 0, ta lấy x=0.001 và tính giá trị 3 hàm trên:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \rightarrow f\left(0,001\right) = 0.50075087593847\color{red}{0}$$

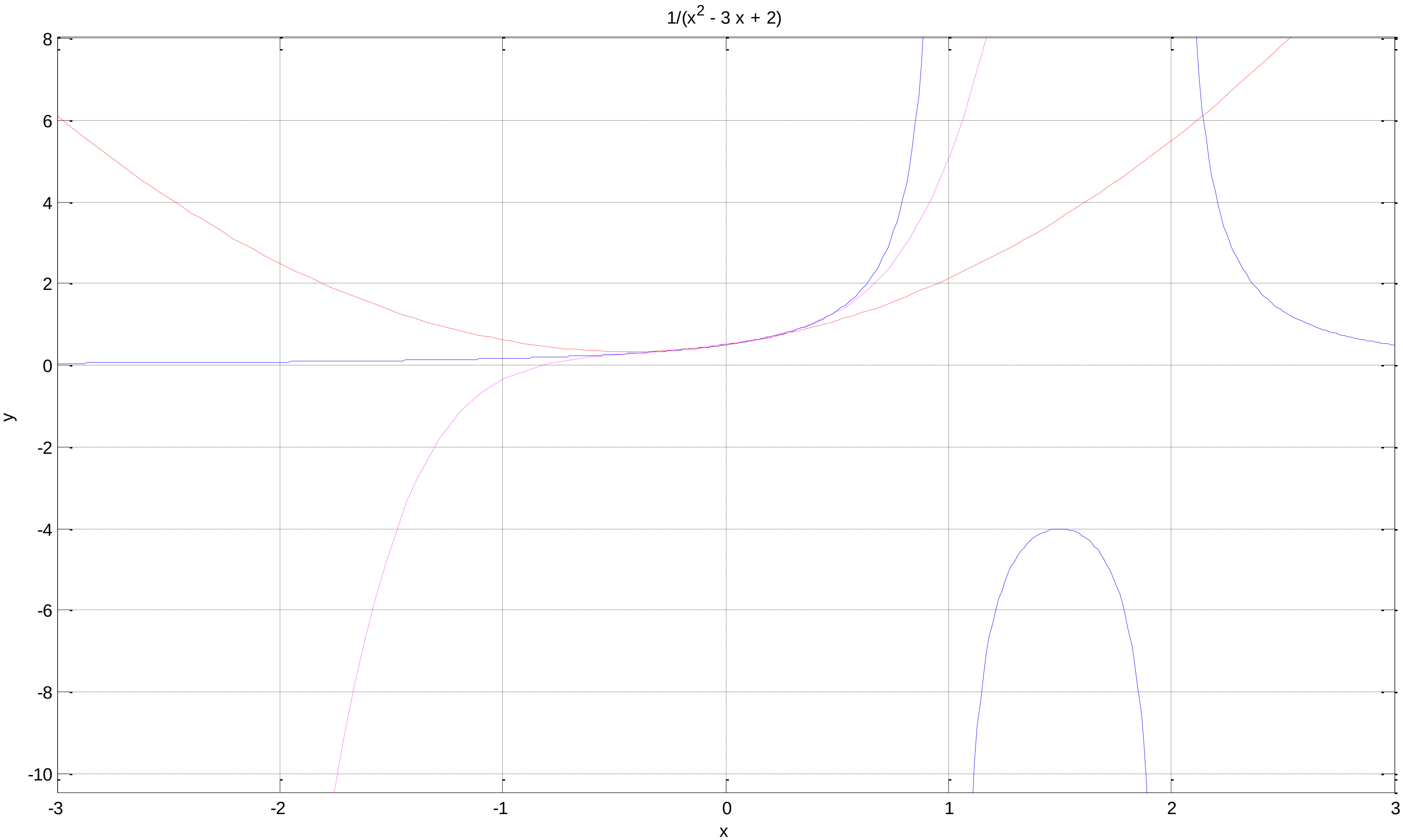
$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 \rightarrow \qquad g\left(0,001\right) = 0.500750875$$

$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \frac{31}{32}x^4 + \frac{63}{64}x^5$$

$$\rightarrow h\left(0,001\right) = 0.500750875938481$$

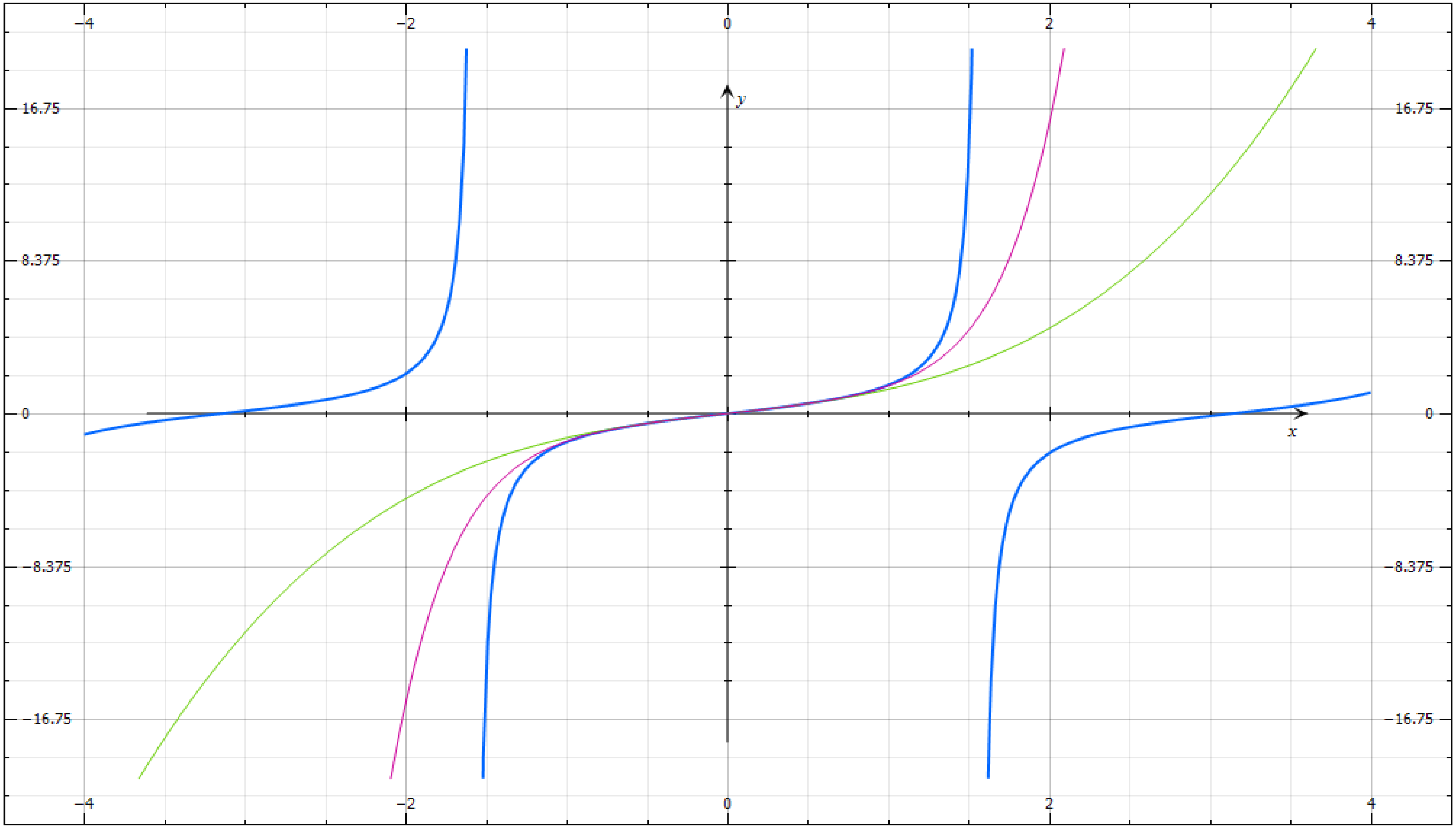
Ta sẽ vẽ đồ thị lần lượt 3 hàm : f(x), g(x) và h(x) đến bậc 5 để so sánh trong lân cận $x_0=0$

Công thức Taylor - Maclaurint



Đa thức xấp xỉ bậc càng lớn thì sai số càng nhỏ

Công thức Taylor - Maclaurint



Hàm y=tanx, khai triển Taylor đến bậc 3: $x+\frac{x^3}{3}$

Và khai triển Taylor đến bậc 7: $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Khai triển Maclaurint hàm $f(x) = ln(x^2+5x+4)$ và tính $f^{(10)}(0)$

$$f(x) = \ln(x+1) + \ln(x+4) \quad = \ln(x+1) + \ln 4 + \ln(1+\frac{x}{4})$$

$$= \ln 4 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4^2}\right)x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)x^n + 0(x^n)$$

Vậy: $f(x) = \ln 4 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(1+\frac{1}{4^k}\right)x^k + 0(x^n)$

Theo CT Taylor:

$\frac{f^{(10)}(0)}{10!}$ là hệ số của x^{10} trong khai triển trên

Suy ra: $f^{(10)}(0) = 10!\frac{(-1)^9}{10}(1+\frac{1}{4^{10}}) = -9!\frac{1+4^{10}}{4^{10}}$

Ví dụ: Khai triển Maclaurint đến cấp 5 hàm $y = sin^2x$

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + 0.(2x) - \frac{1}{2!}(2x)^2 + 0.(2x)^3 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + 0.(2x)^5 + 0(x^5)\right)$$

Vậy: $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + 0(x^5)$

Chú ý: Vì hệ số của x^5 trong khai triển trên là bằng 0 và yêu cầu khai triển đến bậc 5 nên ta phải viết phần dư là $0(x^5)$

Nếu trong ví dụ trên, chỉ yêu cầu khai triển đến bậc 4 thì phần dư là $0(x^4)$:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + 0(x^4)$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Khai triển Maclaurint đến cấp 3 hàm *y=tanx*

$$y = \sin x.\frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + 0\left(x^3\right)\right).\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}x^2 + 0.x^3 + 0\left(x^3\right)\right)}$$

X

$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + 0\left(x^3\right)\right)\left(1 + X + X^2 + 0\left(X^2\right)\right)$$

Vậy: $\boxed{\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + 0(x^3)}$

Ví dụ: Khai triển Maclaurint đến cấp 3 hàm *y=arcsinx*

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-x^2\right) + 0\left(x^2\right)$$

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + 0(x^3)}$$

Cách khai triển Taylor hàm *f(x)* tại $x=x_0$

Bước 1: Đặt X = X(x) sao cho $X(x_0)=0$, đồng thời tính bậc của X theo $(x-x_0)$ và viết lại hàm f theo X

Bước 2: Viết hàm f thành tổng hoặc tích, hoặc tính đạo hàm hay tích phân hàm f (theo X) để xuất hiện các hàm đã có sẵn khai triển Maclaurint

Bước 3: Khai triển Maclaurint hàm f theo X đến bậc cần thiết, rút gọn, sắp xếp theo thứ tự bậc tăng dần.

Bước 4: Thay X theo x, ta được khai triển Taylor hàm f theo yêu cầu

Công thức Taylor – Maclaurint (Đọc thêm)

Ví dụ: Tìm bậc của các VCB sau (khi x→0) so với x và kiểm tra lại bằng MatLab

$$\alpha_1(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \qquad \alpha_2(x) = e^x - x\sqrt{1+x} - 1$$

$$\alpha_3(x) = e^x - \sqrt{1+2x+2x^2}$$

Trong VCB đã cho có bao nhiêu hàm, ta sẽ khai triển Maclaurint của bấy nhiêu hàm cùng bậc như nhau đồng thời.

Sau mỗi bước ta cộng lại, nếu tổng bằng 0 thì làm tiếp; đến khi tổng khác 0 thì dừng

Công thức Taylor – Maclaurint (Đọc thêm)

$$\alpha_1(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \quad = \frac{1}{4!}x^4 + 0(x^4) \sim \frac{1}{4!}x^4$$

Vậy bậc của $\alpha_1(x)$ là 4 (so với x)

$$\left.\begin{aligned} e^x - 1 &= -1 + 1 + x \quad + \frac{1}{2}x^2 \quad + \frac{1}{3!}x^3 \quad + 0(x^3) \\ -x(1+x)^{1/2} &= \quad -x(1 \quad + \frac{1}{2}x \quad - \frac{1}{8}x^2 \quad + 0(x^2)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1(x) \sim \frac{7}{24}x^3$$

Đến bậc 1, tổng là 0; đến bậc 2, tổng là 0; đến bậc 3, tổng khác 0 nên ta ngừng lại. Vậy bậc của $\alpha_2(x)$ là 3

$$e^x = 1 + x \quad + \frac{1}{2}x^2 \quad + \frac{1}{6}x^3 \quad + 0\left(x^3\right)$$

$$-\left(1 + 2x + 2x^2\right)^{1/2} = -(1 + \frac{1}{2}\left(2x + 2x^2\right)$$

$$-\frac{1}{8}(2x + 2x^2)^2 + \frac{1}{16}(2x + 2x^2)^3 + 0\left(x^3\right)$$

$$= -1 - x \quad - \frac{1}{2}x^2 \quad + \frac{1}{2}x^3 \quad + 0\left(x^3\right)$$

Đến bậc 3, tổng khác 0

$$\alpha_3(x) \sim \frac{2}{3}x^3$$ Bậc 3

Ví dụ: Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^3\right) - 2\sin x + 2x\cos x^2}{\tan x - \sin x}$

Vì: $\tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$ *Nên trên tử số ta cũng khai triển các hàm đến x^3.*

$$\ln(1+x^3) = x^3 + 0\left(x^3\right) \qquad -2\sin x = -2\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + 0(x^3)\right)$$

$$2x\cos x^2 = 2x\left(1 + 0.x^2 + 0(x^2)\right)$$

k.tr hàm $\cos x^2$ đến bậc 2 vì đã có 2x nhân vào

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x^3 + 0\left(x^3\right)\right) - 2\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + 0\left(x^3\right)\right) + 2x\left(1 + 0.x^2 + 0\left(x^2\right)\right)}{\frac{1}{2}x^3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

Công thức Taylor – Maclaurint (Đọc thêm)

Ví dụ: Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$

Dưới mẫu số, ta chỉ cần khai triển đến cấp 2 là khác 0 nên tử số ta cũng khai triển đến cấp 2

$$\ln(1+x) - x = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + 0(x^2) \right) - x \sim -\frac{1}{2}x^2$$

$$1 + x\cos x - \sqrt{1+2x} =$$

$$= 1 + x\big(1 - 0.x + 0(x)\big) - \left(1 + \frac{1}{2}2x + \frac{{}^1\!/_2({}^1\!/_2 - 1)}{2!}(2x)^2 + 0(x^2) \right) \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{{}^1\!/_2\, x^2}{-{}^1\!/_2\, x^2} = -1$$

Công thức Taylor – Maclaurint (Đọc thêm)

Ví dụ: Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - \sin x}{e^x + \ln(1-x) - 1}$

Khai triển tử số trước vì 2 hàm trên tử số chỉ có bậc lẻ

$$\arcsin x - \sin x = \left(x + \frac{1}{6}x^3 + 0(x^3) \right) - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + 0(x^3) \right) \sim \frac{1}{3}x^3$$

$$e^x + \ln(1-x) - 1 =$$

$$= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + 0(x^3) \right) + \left((-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 + 0(x^3) \right) - 1$$

$$\sim -\frac{1}{6}x^3$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1/3x^3}{-1/6x^3} = -2$$

Công thức Taylor – Maclaurint (Đọc thêm)

Ví dụ: Tính giới hạn $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{\sin x}}{\sin^3 x}$

Dưới mẫu số, ta chỉ cần thay VBC: *$\sin^3 x \sim x^3$*.

Do đó, ta khai triển Maclaurint trên tử số đến bậc 3.

$$e^x - e^{\sin x} = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + 0\left(x^3\right)\right) - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + 0\left(x^3\right)\right)$$

$$\sim \frac{1}{6}x^3$$

Vậy: $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

Các bước khảo sát và dựng đồ thị hàm y=f(x)

1. Tìm MXĐ, tính chẵn, lẻ, chu kỳ tuần hoàn (nếu có)

2. Tìm tiệm cận

3. Tìm cực trị, khoảng tăng giảm.

4. Tìm khỏang lồi, lõm và điểm uốn (nếu cần)

5. Lập bảng biến thiên

6. Dựng đồ thị

1. Tìm MXĐ, hàm chẵn lẻ, tính tuần hoàn

Hàm chẵn nếu $f(x) = f(-x)$, khi đó đồ thị hàm nhận trục Oy là trục đối xứng

Hàm lẻ nếu $f(x) = -f(-x)$, khi đó đồ thị nhận gốc tọa độ O là tâm đối xứng

Hàm tuần hoàn nếu tồn tại hằng số T sao cho $f(x) = f(x+T)$. Hằng số $T>0$ được gọi là chu kỳ tuần hoàn của hàm f(x) nếu T là số dương nhỏ nhất thỏa $f(x)=f(x+T)$ và khi đó ta chỉ phải khảo sát hàm trong 1 chu kỳ

2. Tìm tiệm cận

Với x_0 là điểm không thuộc MXĐ của hàm,

Nếu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ thì hàm có *TCĐ* $x = x_0$

Nếu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0$ Thì hàm có *TCN* $y = y_0$

Nếu $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left[f(x) - ax \right] = b \end{cases}$ Thì hàm có *TCX* $y = ax+b$

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

Ví dụ: Tìm tiệm cận của hàm $y = \dfrac{2x}{x^2 - 5x + 6}$

MXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{2,3\}$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = \infty$$

Hàm có TCĐ: $x = 2$

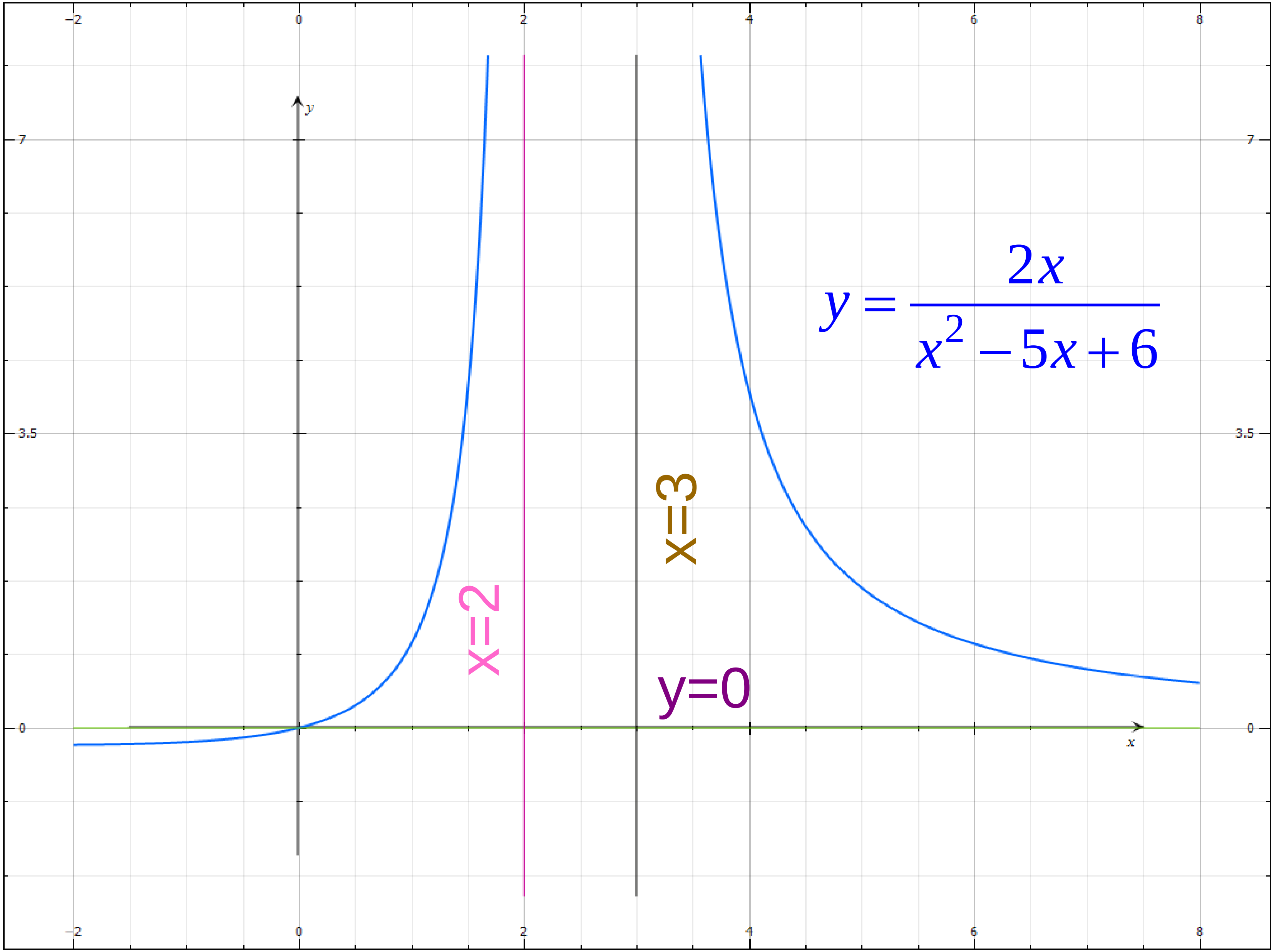
$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = \infty$$

Hàm có TCĐ: $x = 3$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = 0$$

Hàm có TCN: $y = 0$

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)



Ví dụ: Tìm tiệm cận của hàm $y = xe^{2/x} + 1$

MXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} xe^{2/x} + 1 = 1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2/x}}{1/x} = 1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{x^2}e^{2/x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0^+} 2e^{2/x} = +\infty$$

Hàm có TCĐ *x = 0 từ bên phải, lên trên*

$$\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^-} xe^{2/x} + 1 = 1$$

Hàm không có TCĐ từ bên trái

$$\lim_{x\to\infty} y = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} (y - x) = 3$$

Hàm có TCX *y = x+3*

Cách tìm TCX nhờ khai triển Maclaurint

$$Khi\ x \to \infty : \frac{2}{x} \to 0 \quad \Rightarrow y = xe^{2/x} + 1 \to \infty$$

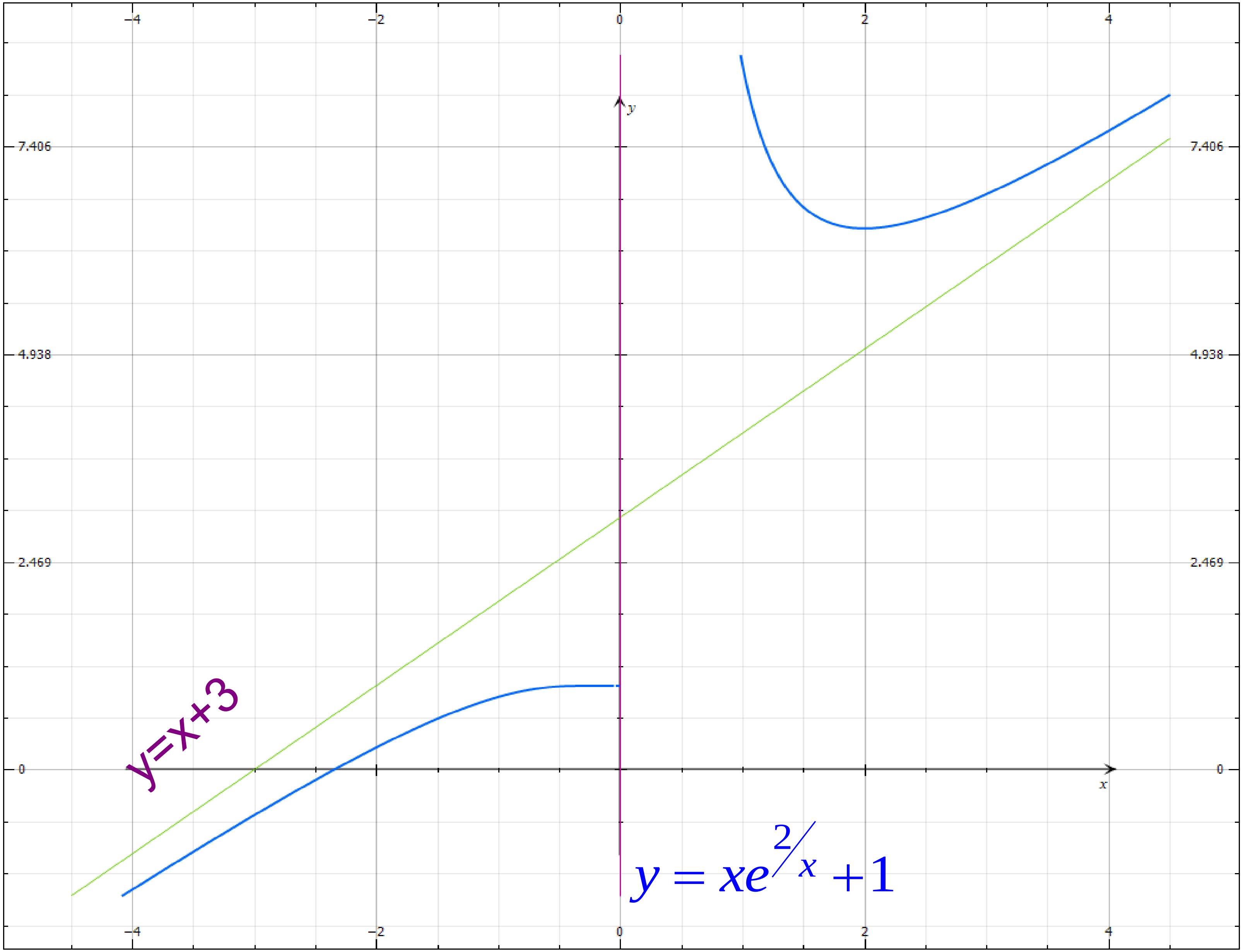
$$y = xe^{\frac{2}{x}} + 1 = x\left(1 + \frac{2}{x} + 0\left(\frac{2}{x}\right)\right) + 1 \xrightarrow{x\to\infty} = x + 3$$

Tức là khi $x \to \infty$ thì đường cong dần đến đường thẳng

$y = x+3$

Vậy hàm đã cho có 1 TCĐ $x = 0$ và 1 TCX $y = x+3$

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)



Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

Ví dụ: Tìm tiệm cận của hàm $y = x\left(\arctan\frac{1}{x} - \sin\frac{2}{x}\right)$

MXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}\left(x\arctan\frac{1}{x} - x\sin\frac{2}{x}\right) = 0$$

$$Khi\ x\to\infty:\quad y = x\left(\arctan\frac{1}{x} - \sin\frac{2}{x}\right) \sim x\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right) = -1$$

Tức là khi $x \to \infty$ thì đường cong dần đến đường thẳng
y = *-1*

Vậy hàm đã cho có 1 TCN *y* = -*1*

Ví dụ: Tìm tiệm cận của hàm $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

MXĐ: $\mathbb{R}$

$Khi\ \ x \to \infty : y \sim x(\to \infty)$

$$y = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/3} = x\left(1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x}\right) + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right) \to x - \frac{1}{3}$$

Vậy hàm đã cho có TCX: $y = x - 1/3$

3. Tìm khỏang tăng giảm, cực trị - GTLN, GTNN trên 1 đoạn :

Tìm các điểm x_i thỏa: $\left[\begin{array}{l} y'(x_i)=0 \quad \text{(điểm dừng)} \\ \nexists\, y'(x_i) \end{array}\right.$

(điểm tới hạn)

➡ $\left[\begin{array}{l} y' \text{ đổi dấu khi qua } x=x_i \\ y''(x_i)\neq 0 \end{array}\right.$ *thì hàm đạt cực trị tại* $x=x_i$

➡ $Trong\,(a,b):$

- $y'>0:$ *hàm tăng*
- $y'<0:$ *hàm giảm*

➡ Trên$[a,b]$: Tính giá trị của hàm tại các điểm x_i, a, b và so sánh để tìm y_{min}, y_{max}

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm y=|x|(x+2)

$$y = \begin{cases} x(x+2), x \geq 0 \\ -x(x+2), x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x+2, x > 0 \\ -2x-2, x < 0 \\ \nexists, x = 0 \end{cases} \qquad y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Như vậy, ta có 2 điểm *nghi ngờ hàm đạt cực trị* là x = 0 và x = -1

Để xác định cực trị, khỏang tăng giảm, ta lập bảng biến thiên

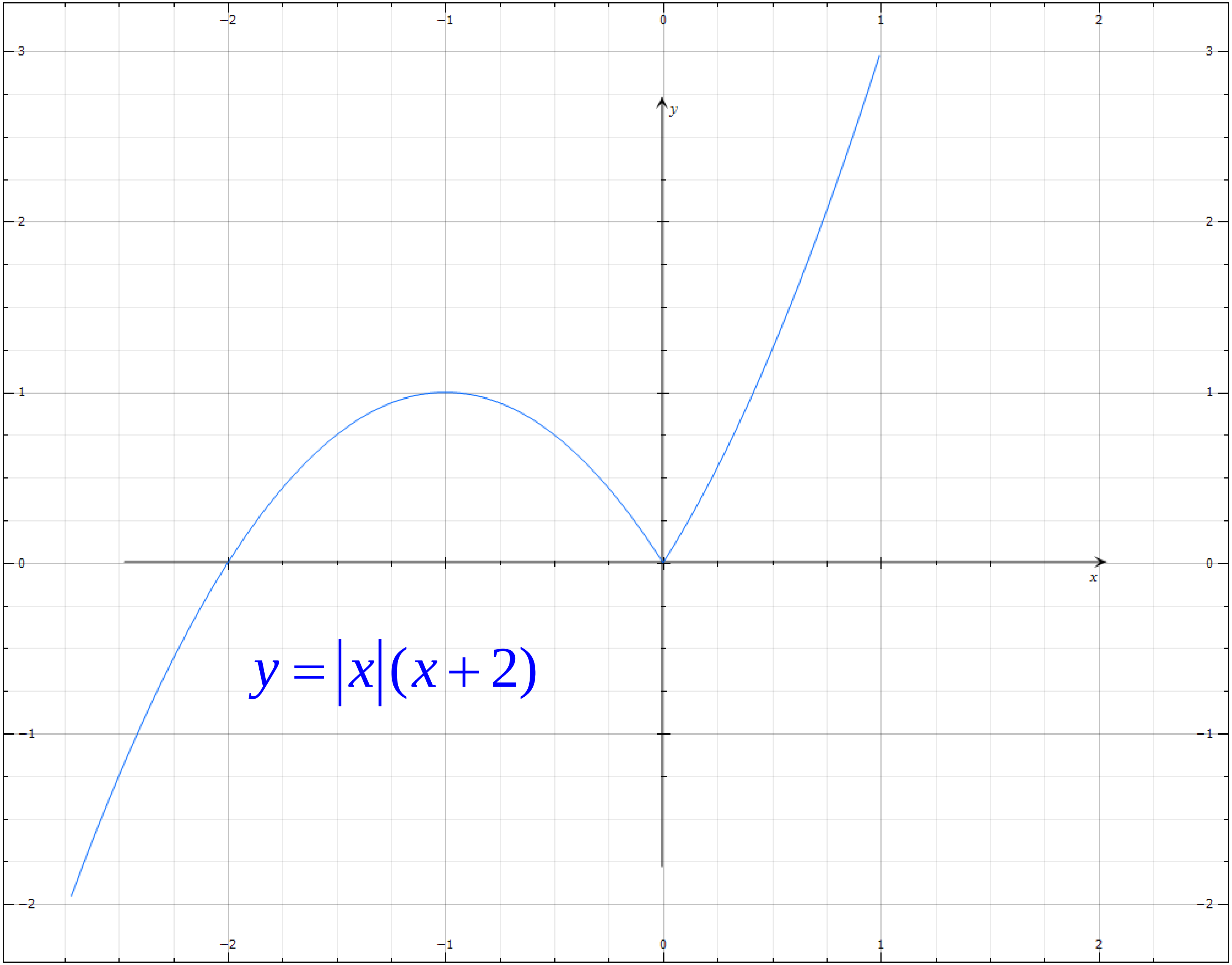
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	+	
y		↗	1	↘	0	↗	

Vậy hàm có 2 cực trị :

$y_{cđ}=y(-1)=1$,

$y_{ct}=y(0)=0$

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)



Ví dụ: Tìm GTLN, GTNN của hàm $y=\sqrt[3]{x^2-4x-5}$

trên đoạn [1;6]

$$y'=\frac{2x-4}{3\sqrt[3]{\left(x^2-4x-5\right)^2}} \longrightarrow \begin{cases} y'=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \nexists\, y'(5) \end{cases}$$

Để tìm y_{max}, y_{min} ta tính giá trị của hàm tại 4 điểm :

$$y(1)=-2, y(2)=\sqrt[3]{-9}, y(5)=0, y(6)=\sqrt[3]{7}$$

Vậy : $y_{\min}=y(2)=-\sqrt[3]{9}, y_{\max}=y(6)=\sqrt[3]{7}$

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

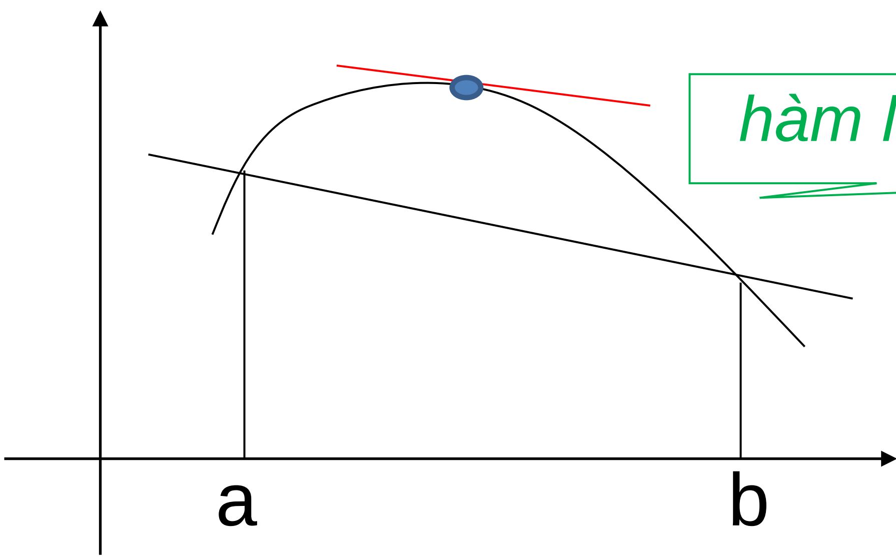
4. Tìm khỏang lồi lõm, điểm uốn

Tìm các điểm x_i thỏa: $\left[\begin{array}{l} y''(x_i) = 0 \\ \nexists y''(x_i) \end{array}\right.$

➡ y'' đổi dấu khi qua $x = x_i$ *thì hàm có ĐU* $(x_i, y(x_i))$

➡ $Trong\,(a,b):$

- $y'' > 0:$ *hàm lõm*
- $y'' < 0:$ *hàm lồi*



hàm lồi trong (a,b):

Đường cong nằm *<u>trên dây cung</u>* hoặc <u>nằm dưới tiếp tuyến</u>

Ví dụ: Tìm khỏang lồi lõm, điểm uốn của hàm $y=x^2\ln x$

MXĐ : $\mathbb{R}^+$

$y'' = 2\ln x + 3$, xác định $\forall x > 0$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = {}^{1}\!/_{\sqrt{e^3}}$

Suy ra:

$x < \dfrac{1}{\sqrt{e^3}} \Leftrightarrow y'' < 0$ Hàm lồi trong khỏang $\left(0, {}^{1}\!/_{\sqrt{e^3}}\right)$

$x > \dfrac{1}{\sqrt{e^3}} \Leftrightarrow y'' > 0$ Hàm lõm trong khỏang $\left({}^{1}\!/_{\sqrt{e^3}}, +\infty\right)$

Và có điểm uốn là $\left({}^{1}\!/_{\sqrt{e^3}}, {}^{-3}\!/_{2\sqrt{e^6}}\right)$

Ví dụ: Tìm a, b để (1,3) là điểm uốn của hàm $y = ax^3 + bx^2$

MXĐ : $\mathbb{R}$

$$y'' = 6ax + 2b \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

Dễ thấy y" đổi dấu khi qua điểm $M\left(-\frac{b}{3a}, y\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$

Tức là điểm uốn duy nhất là M

Suy ra: a, b thỏa yêu cầu đề bài chính là thỏa hpt

$$\begin{cases} -\frac{b}{3a} = 1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3/2 \\ b = 9/2 \end{cases}$$

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y = e^{1/x} - x$

MXĐ : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Tiệm cận:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty}(y+x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{1/x} = 1 \\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y = -x+1 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{TCX: } y=-x+1$$

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+}(e^{1/x} - x) = +\infty \longrightarrow \textit{TCĐ: } x=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^-}(e^{1/x} - x) = 0$$

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

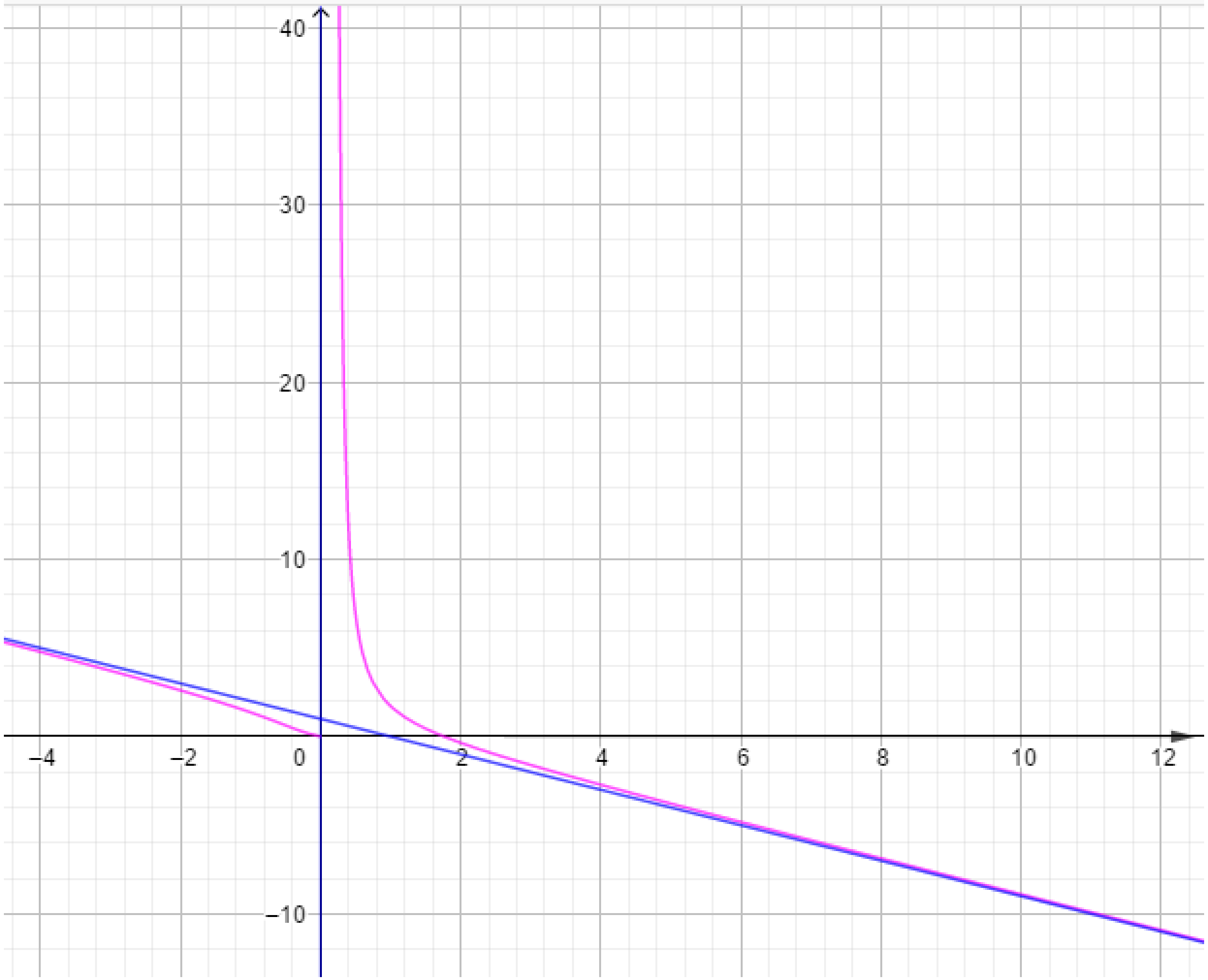
$$y = e^{1/x} - x$$

Cực trị: $y' = -\dfrac{1}{x^2} e^{1/x} - 1 = -\dfrac{e^{1/x} + x^2}{x^2}$

$$y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

x	$-\infty$		0		$-$	$+\infty$
y'		$-$	‖			
y	$+\infty$	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$		$\searrow$	$-\infty$

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)



$$y = e^{1/x} - x,\ y = 1 - x,\ x = 0$$

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y=\sqrt[3]{x}(x-1)^2$

MXĐ : $\mathbb{R}$

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x}(x-1)^2 = \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}(x-1)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty$$

Hàm không có tiệm cận

Cực trị: $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-1)^2 + 2\sqrt[3]{x}(x-1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1/7 \end{array}\right.$$

Và y'(0)=+∞

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}(x-1)^2 + 2\sqrt[3]{x}(x-1)$$

Vì đạo hàm cấp 2 phức tạp nên ta sẽ không tính

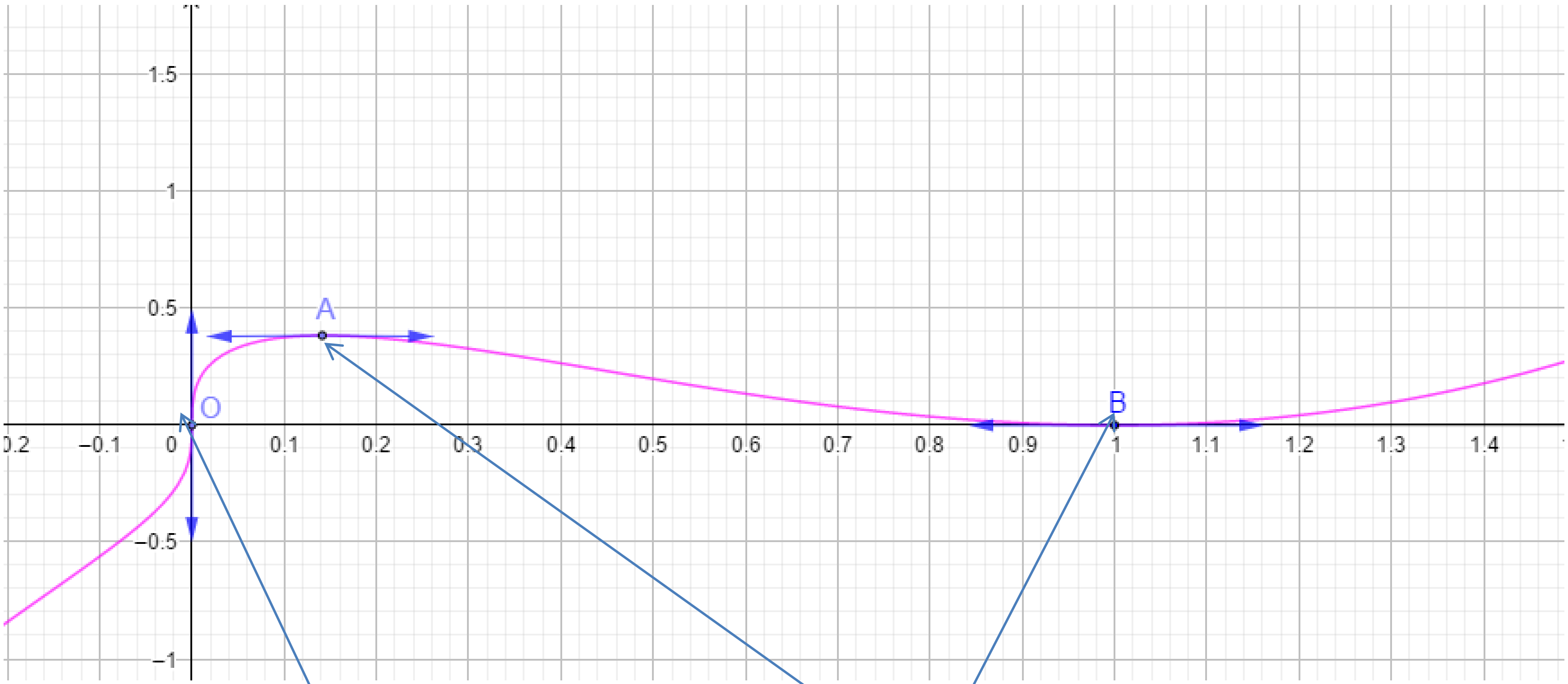
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1/7		1		$+\infty$
y'		+	||	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	0.3841	↘	0	↗	$+\infty$

Tiếp tuyến thẳng đứng	Tiếp tuyến nằm ngang

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

Đồ thị



Tiếp tuyến thẳng đứng

Tiếp tuyến nằm ngang

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$

MXĐ : $\mathbb{R}$

Tiệm cận: $Khi\ x\to\infty : y=\sqrt[3]{x.\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^2}=x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2/3}$

$$=x\left(1-\frac{2}{3}\frac{1}{x}+0\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sim x-\frac{2}{3}$$

Hàm có TCX: $y=x-\frac{2}{3}$

Cực trị:

$$y'=\frac{x-1/3}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}\Rightarrow\begin{cases}y'\left(1/3\right)=0\\ \nexists y'(1),y'(0)\end{cases}$$

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

$$y'' = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5(x-1)^4}} < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1/3		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	0	-	‖	+	
y''		+		-		-		-	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}/3$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

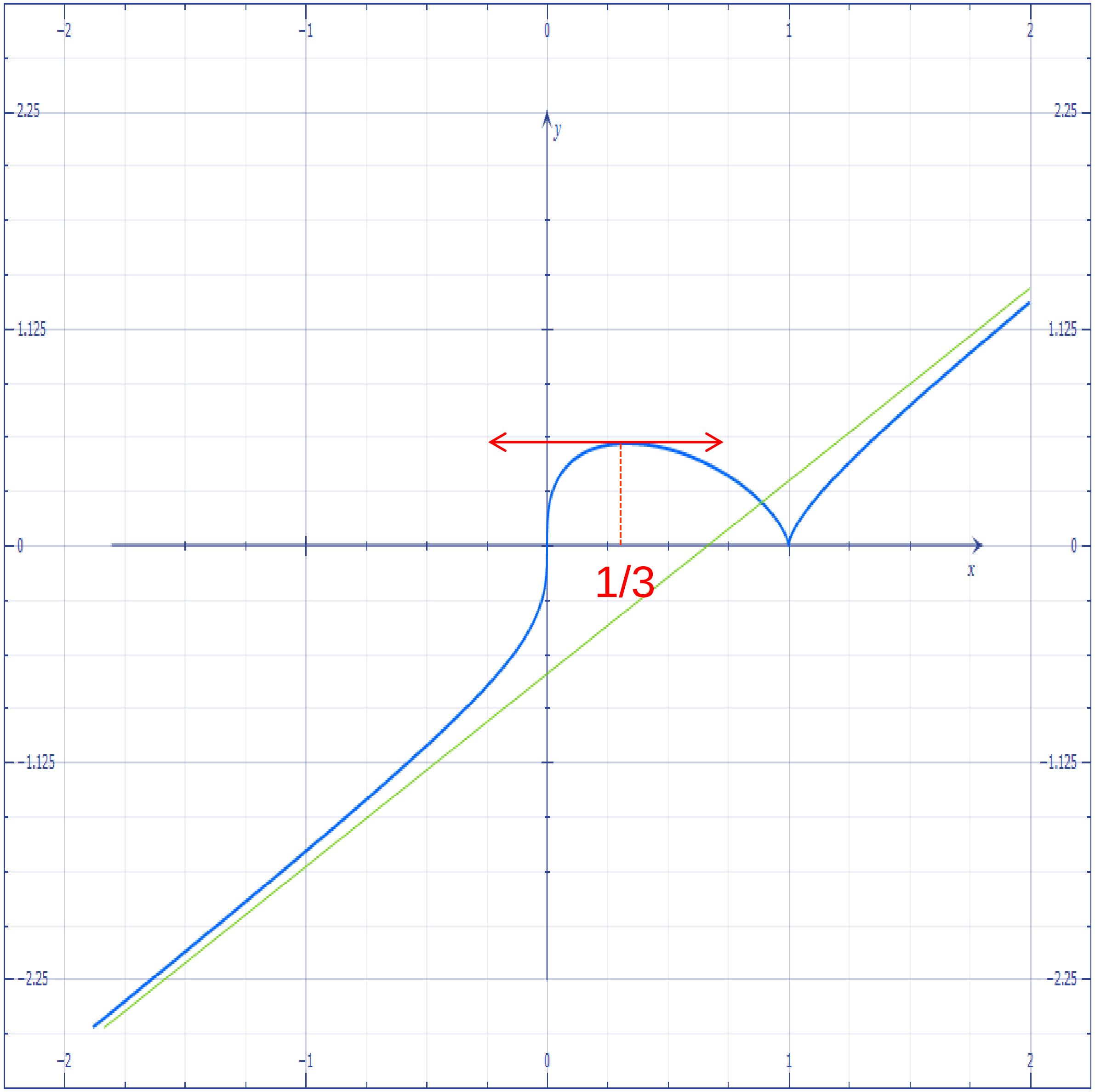
Tiếp tuyến nằm ngang

Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

$$y = \sqrt[3]{x\left(x-1\right)^2},$$

$$y = x - \frac{2}{3},$$

$$y = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$



Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x-2|}$

(HK161)

MXĐ : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Tiệm cận: $Khi\ x \to \infty : y \sim \dfrac{|x|}{|x-1|} \to 1$

$$\lim_{x \to 2} y = +\infty$$ Hàm có 2 TC: $y = 1, x = 2$

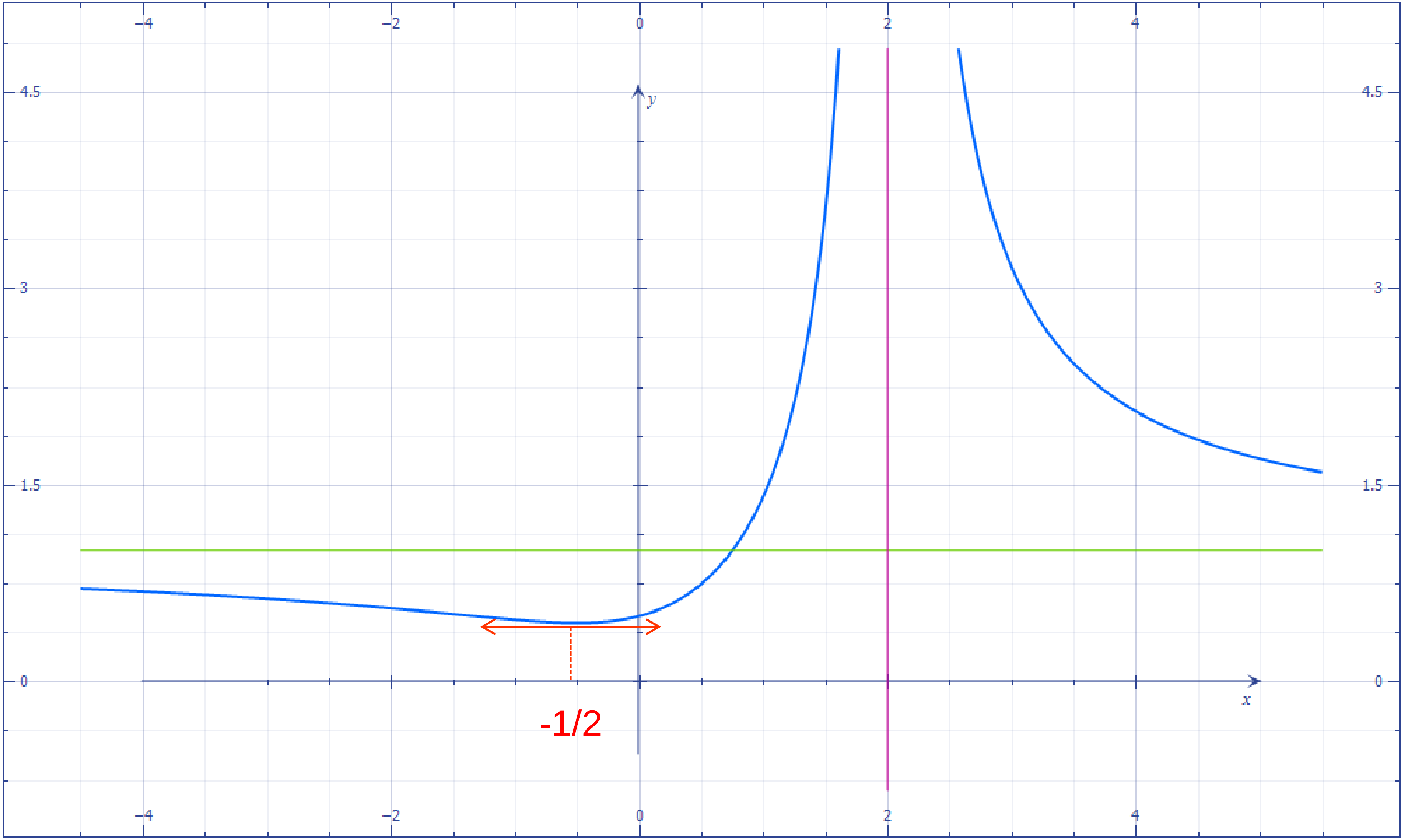
Cực trị:

$$y' = \begin{cases} \dfrac{-2x-1}{(x-2)^2\sqrt{x^2+1}}, x > 2 \\ \dfrac{2x+1}{(x-2)^2\sqrt{x^2+1}}, x < 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow y'\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1/2$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
y	1	$\searrow$	$\sqrt{5}/2$	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	1

Khảo sát hàm y=f(x)(Tự đọc)



Khảo sát hàm y=f(x) (Tự đọc)

Ví dụ: Tìm tiệm cận, cực trị hàm $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$

Ví dụ: Tìm khoảng lồi lõm, ĐU của hàm $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị (đề thi CHK171)

$$y = \sqrt{\frac{x^3-2}{x}}$$

$$y = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3+3x^2}, x \geq 0 \\ \arctan\dfrac{x}{x+1}, x < 0 \end{cases}$$