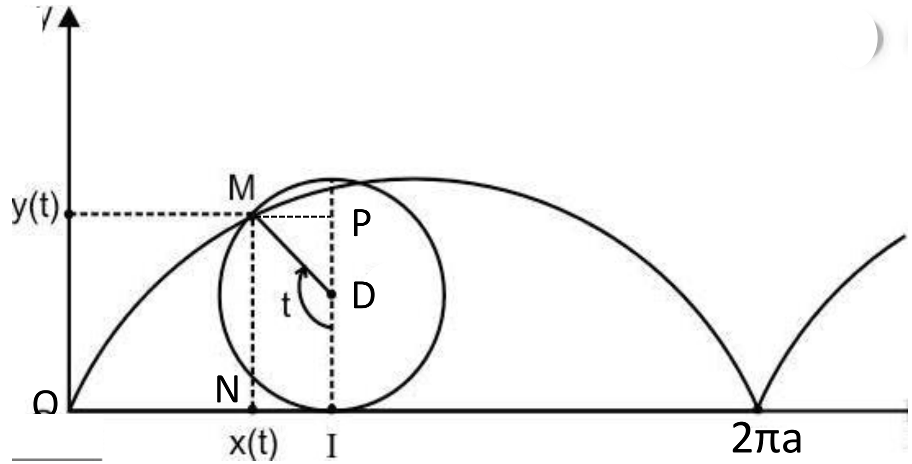
Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

Ví dụ mở đầu: Cho đường tròn bán kính bằng a và 1 điểm M nằm trên đường tròn. Quỹ đạo của M khi đường tròn lăn không trượt trên 1 đường thẳng gọi là Cycloid. Lập pt Cycloid.

Giả sử đường tròn (D,a) lăn trên trục Ox theo hướng dương, vị trí ban đầu của điểm M là gốc O



Đặt $t = MDI \to \begin{cases} PM = a\sin t \\ PD = a\left(-\cos t\right) \end{cases}$

Vì lăn không trượt nên $OI = MI = at$

Tọa độ M được tính như sau: $x = ON = OI - PM = at - a\sin t$

$$y = PI = DI + PD = a + a\left(-\cos t\right)$$

Tức là pt tham số của đường cong Cycloid là :

$$\boxed{x = a\left(t - \sin t\right), y = a\left(1 - \cos t\right)}$$

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

Các bước khảo sát và dựng đồ thị hàm cho bởi pt tham số

1. Tìm MXĐ, tính chẵn, lẻ, chu kỳ tuần hoàn (nếu có)

Từ đó tìm được mọi giá trị $t_i \notin$ MXĐ của 2 hàm x(t), y(t)

2. Tìm tiệm cận: Tính giới hạn khi $t \to t_i$, $t \to \infty$

TCĐ x=a nếu: $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_i} x(t) = a \\ \lim\limits_{t \to t_i} y(t) = \infty \end{cases}$ TCN y=b nếu: $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_i} x(t) = \infty \\ \lim\limits_{t \to t_i} y(t) = b \end{cases}$

TCX y=ax+b nếu: $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_i} x(t) = \infty \\ \lim\limits_{t \to t_i} y(t) = \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_i} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a < \infty \\ \lim\limits_{t \to t_i} \left[y(t) - a.x(t) \right] = b \end{cases}$

3. Tìm cực trị, khoảng tăng giảm: Tính đạo hàm cấp 1

$x'(t) > 0:$ x tăng từ trái qua phải và ngược lại

$y'(t) > 0:$ y tăng từ dưới lên trên và ngược lại

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}:\quad \begin{cases} y'(t_i)=0, x'(t_i)\neq 0: y'(x)=0 \\ y'(t_i)\neq 0, x'(t_i)=0: y'(x)=\infty \\ y'(t_i)=0, x'(t_i)=0: y'(x)=\lim\limits_{t\to t_i}\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \end{cases}$$

Nếu $y'(x)=0$: Tiếp tuyến nằm ngang

Nếu $y'(x)=\infty$: Tiếp tuyến thẳng đứng

4. Tìm điểm uốn, khoảng lồi lõm: Tính đạo hàm cấp 2

Nếu $y''(x)>0$: Hàm lõm (tiếp tuyến nằm dưới đường cong)

Nếu $y''(x)<0$: Hàm lồi (tiếp tuyến nằm trên đường cong)

5. Lập bảng biến thiên:

Có 6 dòng giá trị của: t, x’(t), x(t), y’(t), y(t), y’(x)

6. Vẽ đồ thị: Vẽ lần lượt các tiệm cận, các tiếp tuyến đặc biệt, *vẽ đồ thị theo hướng tăng giá trị của biến x*

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

VD: Tìm tất cả tiệm cận của hàm $x=\dfrac{1}{\cos t}, y=\tan t$

Tìm MXĐ, tính chẵn, lẻ, chu kỳ tuần hoàn (nếu có)

Hàm x(t) tuần hoàn với chu kì là 2π, y(t) tuần hoàn với chu kỳ là π. Do vậy, ta chỉ tìm tiệm cận trong 1 chu kỳ 2π

2 hàm xác định khi $\cos t \neq 0 \leftrightarrow t \neq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$

$$\lim_{t\to\pi/2} x(t)=+\infty, \lim_{t\to3\pi/2} x(t)=-\infty, \lim_{t\to\pi/2} y(t)=+\infty, \lim_{t\to3\pi/2} y(t)=-\infty$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to\pi/2} \dfrac{y(t)}{x(t)}=1 \\ \lim\limits_{t\to3\pi/2} \dfrac{y(t)}{x(t)}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to\pi/2} \left(y(t)-x(t)\right)=0 \\ \lim\limits_{t\to3\pi/2} \left(y(t)+x(t)\right)=0 \end{cases}$$

Hàm có 2 TCX: y=x, y=-x

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số (Tự đọc)

VD: Tìm các điểm trên đường cong $x=t^3-3t$, $y=2t^3-3t^2$ mà tại đó tiếp tuyến nằm ngang hoặc thẳng đứng.

Hàm x(t), y(t) xác định với mọi t

$$x'(t)=3t^2-3=0\leftrightarrow t=\pm 1$$

$$y'(t)=6t^2-6t=0\leftrightarrow t=0,1$$

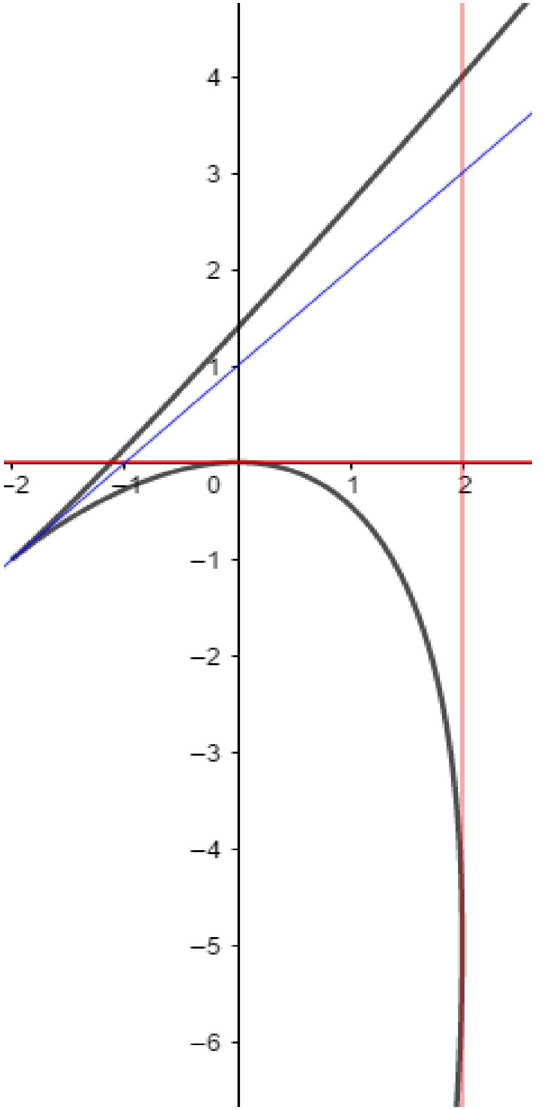
$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{6t^2-6t}{3t^2-3}=\frac{2t}{t+1}$$

$$y'(x)=0\leftrightarrow t=0,\ \lim_{t\to -1} y'(x)=\infty$$

Tiếp tuyến thẳng đứng x=2 tại (2,-5)

Hàm có tiếp tuyến nằm ngang tại điểm O

Hàm có 1 điểm kì dị tại t=1 và $\lim_{t\to 1} y'(x)=1$



Khảo sát hàm cho bởi pt tham số (Tự đọc)

VD: Tìm các điểm kì dị của hàm và tiếp tuyến tại các điểm đó (nếu có): $x = 2\cos t + \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t$

Tìm MXĐ, tính chẵn, lẻ, chu kỳ tuần hoàn (nếu có)

Hàm x(t), y(t) xác định với mọi t và tuần hoàn với chu kì là 2π.

Do vậy, ta chỉ tìm trong 1 chu kỳ 2π

$$x'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t,\ y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t$$

$$x'(t) = 0 \leftrightarrow -\sin t = \sin 2t \quad \leftrightarrow t = 0, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 2\pi$$

$$y'(t) = 0 \leftrightarrow \cos t = \cos 2t \quad \leftrightarrow t = 0, 2\pi/3, 4\pi/3, 2\pi$$

Hàm có 3 điểm kì dị tại: $t = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$

$$\lim_{t\to 0} y'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0,\ \lim_{t\to 2\pi/3} \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\sqrt{3},\ \lim_{t\to 4\pi/3} \frac{y'(t)}{x'(t)} = +\sqrt{3}$$

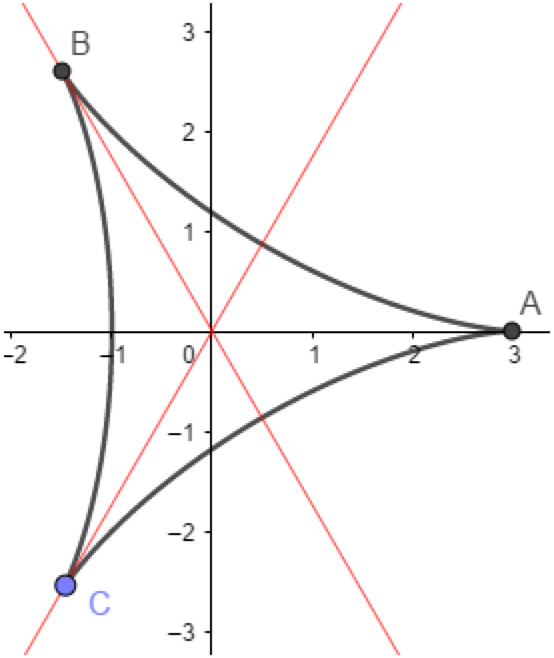
Khảo sát hàm cho bởi pt tham số (Tự đọc)

Tiếp tuyến tại các điểm kì dị:

Tại $A(3,0)(t=0): y=0$

Tại $\mathrm{B}\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(t=\frac{2\pi}{3}\right): y=-\sqrt{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Tại $\mathrm{C}\left(-\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(t=\frac{4\pi}{3}\right): y=\sqrt{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{3\sqrt{3}}{2}$



Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

VD: Tìm khoảng biến thiên và cực trị của hàm $x = t^3, y = t^2$

Hàm x(t), y(t) xác định với mọi t

$$x'(t) = 3t^2, y'(t) = 2t \quad \Rightarrow Khi\ t = 0 : x'(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2}{3t}, \quad \lim_{t \to 0^{\pm}} y'(x) = \pm\infty$$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
x’		$+$	0	$+$	
x	$+\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
y’		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Suy ra: *hàm y=y(x) nghịch biến khi t < 0, đồng biến khi t ≥ 0*.

và *hàm y=y(x) đạt cực tiểu tại (0,0)*.

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

VD: Tìm khoảng biến thiên và cực trị của hàm

$$x = t^2 - 2t,\ y = e^t(2-t)$$

Hàm x(t), y(t) xác định với mọi t

$$x'(t) = 2(t-1),\ y'(t) = e^t(1-t) \quad \Rightarrow Khi\ t = 1:\ x'(1) = 0 = y'(1)$$

$y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\dfrac{e^t}{2}$, tiếp tuyến tại (x(1),y(1)): $y = -\dfrac{e}{2}(x+1) + e$

t	$-\infty$		1		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	e	$\searrow$	

Suy ra: *hàm y=y(x) nghịch biến* $\forall t$.

và *hàm y=y(x) đạt cực đại tại* $(-1, e)$.

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

VD: Tìm khoảng lồi lõm của hàm $x = e^t, y = te^{-t}$

Hàm x(t), y(t) xác định với mọi t

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{e^{-t}(1-t)}{e^t} = (1-t)e^{-2t}$$

$$y''(x) = \frac{\left(y'(x)\right)'}{x'(t)} = \frac{\left((1-t)e^{-2t}\right)'}{e^t} = (2t-3)e^{-3t}$$

$$y''(x) = 0 \leftrightarrow t = 3/2$$

Hàm lõm khi và chỉ khi $y''(x) > 0 \leftrightarrow t > 3/2 \leftrightarrow x > e^{3/2}$

Hàm lồi khi và chỉ khi $y''(x) < 0 \leftrightarrow t < 3/2 \leftrightarrow x < e^{3/2}$

<u>Khảo sát hàm cho bởi pt tham số</u>

VD: KS và vẽ đồ thị hàm cho bởi

$$x = a(t - \sin t),\, y = a(1 - \cos t),\, a > 0$$

1. <u>Tìm MXĐ, tính chẵn, lẻ, chu kỳ tuần hoàn (nếu có)</u>

Cả 2 hàm x(t), y(t) có MXĐ là $\mathbb{R}$; không chẵn hay lẻ;

Hàm y(t) tuần hoàn với chu kì là 2π, với mỗi chu kì tuần hoàn của y(t) thì x(t) thay đổi 1 đoạn là 2πa

Do vậy, ta chỉ khảo sát và vẽ đồ thị trong 1 chu kỳ

2. <u>Tìm tiệm cận</u>

2 hàm xác định với mọi t nên ta chỉ tính khi $t \to \infty$

Khi $t \to \infty$ cả 2 hàm sint, cost đều không có giới hạn.

Vậy hàm y(x) không có tiệm cận

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

3. Khoảng biến thiên, cực trị *(Chỉ lấy trong 1 chu kỳ [0,2π])*

$$x'(t)=a(1-\cos t),\ y'(t)=a\sin t,\ y'(x)=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\frac{t}{2}$$

$$x'(t)=0\leftrightarrow t=0,2\pi;\ y'(t)=0\leftrightarrow t=0,\pi,2\pi$$

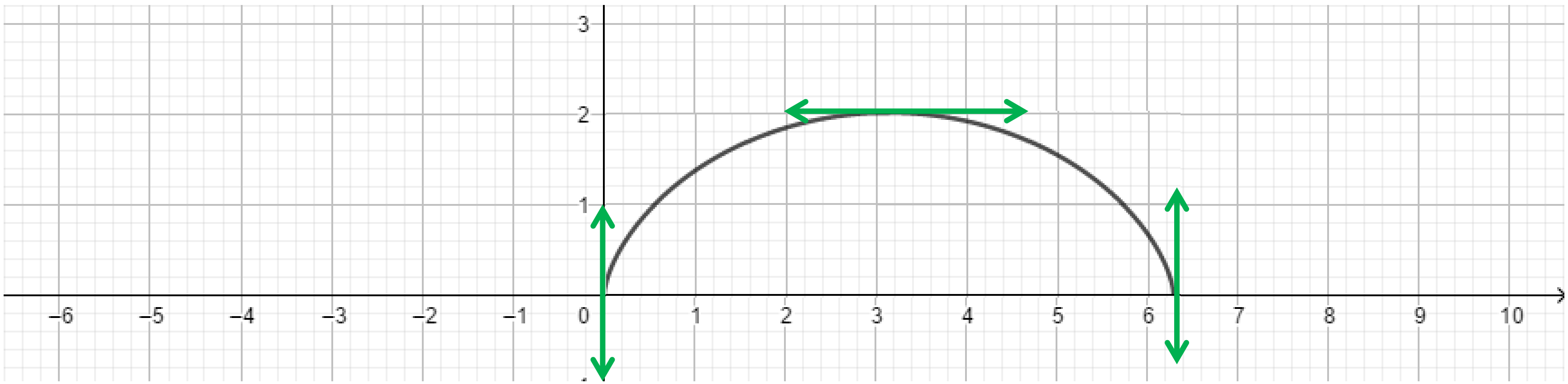
Hàm có các điểm kì dị là $\left(x(0),y(0)\right),\left(x(2\pi),y(2\pi)\right)$

$$y'(\pi)=0;\ \lim_{t\to 0}y'(x)=+\infty,\ \lim_{t\to 2\pi}y'(x)=-\infty$$

4. Lập bảng biến thiên:

t	0		π		2π
x'(t)	0	+		+	0
x	0	↗	aπ	↗	2aπ
y'(t)	0	+	0	−	0
y	0	↗	2a	↘	0
y'(x)	+∞	+	0	−	−∞

5. ***Vẽ đường cong theo chiều tăng của x với a=1***



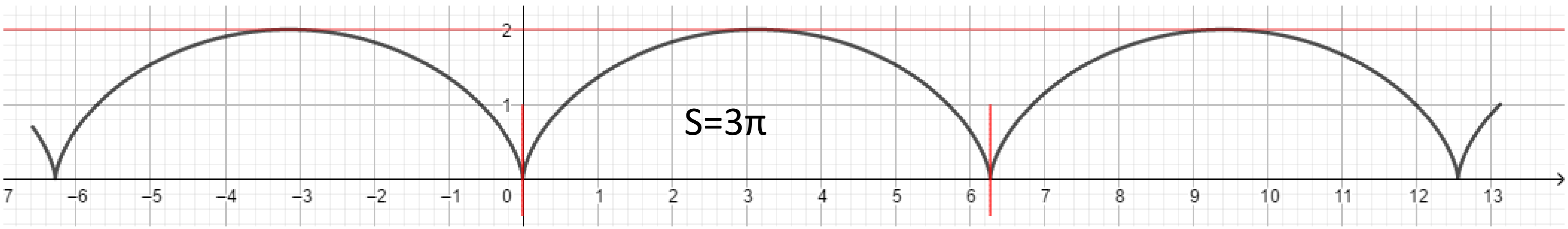
Bảng biến thiên:

t	0	*Hàm đồng biến*	π	*Hàm nghịch biến*	2π
$x'(t)$	0	+		+	0
x	0	$\nearrow$	$a\pi$	$\nearrow$	$2a\pi$
$y'(t)$	0	+	0	−	0
y	0	$\nearrow$	$2a$	$\searrow$	0
$y'(x)$	$+\infty$	+	0	−	$-\infty$

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

5. Vẽ đồ thị với a=1:Cực đại tại (π,2).

Tiếp tuyến đặc biệt: Thẳng đứng tại O và các điểm $A_i\left(2\pi i,0\right)$, nằm ngang tại các điểm $B_i\left(\pi\left(2i+1\right),2\right)$



Một số điểm đặc biệt của đường Cycloid:

1/ Diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi cung Cycloid ứng với $t\in\left[0,2\pi\right]$ và trục Ox bằng 3 lần diện tích hình tròn

2/ Độ dài cung Cycloid ứng với $t\in\left[0,2\pi\right]$ bằng 8 lần bán kính đường tròn

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

Một số điểm đặc biệt của đường Cycloid:

3/ Bài toán Brachistochronous (đường đoản thời) là bài toán của Johann Bernoulli:
Cho hai điểm A và B nằm trong mặt phẳng thẳng đứng P (A cao hơn B). Hãy xác định đường nối hai điểm A và B và nằm trong mặt phẳng P sao cho một điểm chỉ chịu trọng lực chạy từ A đến B trong thời gian ngắn nhất.

Lời giải cho bài toán brachistochrone (theo đường link dưới đây)
https://toanhoctuoidep.wordpress.com/2012/05/04/brachistochrone-duong-doan-thoi-cua-john-bernoulli/

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

VD: KS và vẽ đồ thị hàm cho bởi $x=\dfrac{3at}{1+t^3}, y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}, a>0$

1. Tìm MXĐ, tính chẵn, lẻ, chu kỳ tuần hoàn (nếu có)

Cả 2 hàm x(t), y(t) có MXĐ là $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; không chẵn hay lẻ; không tuần hoàn

2. Tìm tiệm cận: Tính giới hạn khi $t\to -1, t\to\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to -1\pm 0} x(t)=\mp\infty \\ \lim\limits_{t\to -1\pm 0} y(t)=\pm\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to -1}\dfrac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to -1} t=-1 \\ \lim\limits_{t\to -1}\left[y(t)+x(t)\right]=\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{3at(t+1)}{1+t^3}=-a \end{cases}$$

Hàm có TCX: *y=-x-a*

$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=0$ Hàm không có TCN, TCĐ

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

3. Khoảng biến thiên, cực trị

$$x'(t) = 3a\frac{1-2t^3}{\left(1+t^3\right)^2}, y'(t) = 3a\frac{t\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2} \to y'(x) = \frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}$$

$$x'(t) = 0 \leftrightarrow t = {}^{1}\!/\!{}_{\sqrt[3]{2}}, y'(t) = 0 \leftrightarrow t = 0, \sqrt[3]{2}$$

$$y'(x) = 0 \leftrightarrow t = 0, \sqrt[3]{2}; \lim_{t \to 1/\sqrt[3]{2}} y'(x) = \infty, \lim_{t \to \infty} y'(x) = \infty$$

Hàm không có điểm kì dị

4. Lập bảng biến thiên:

4. Lập bảng biến thiên:

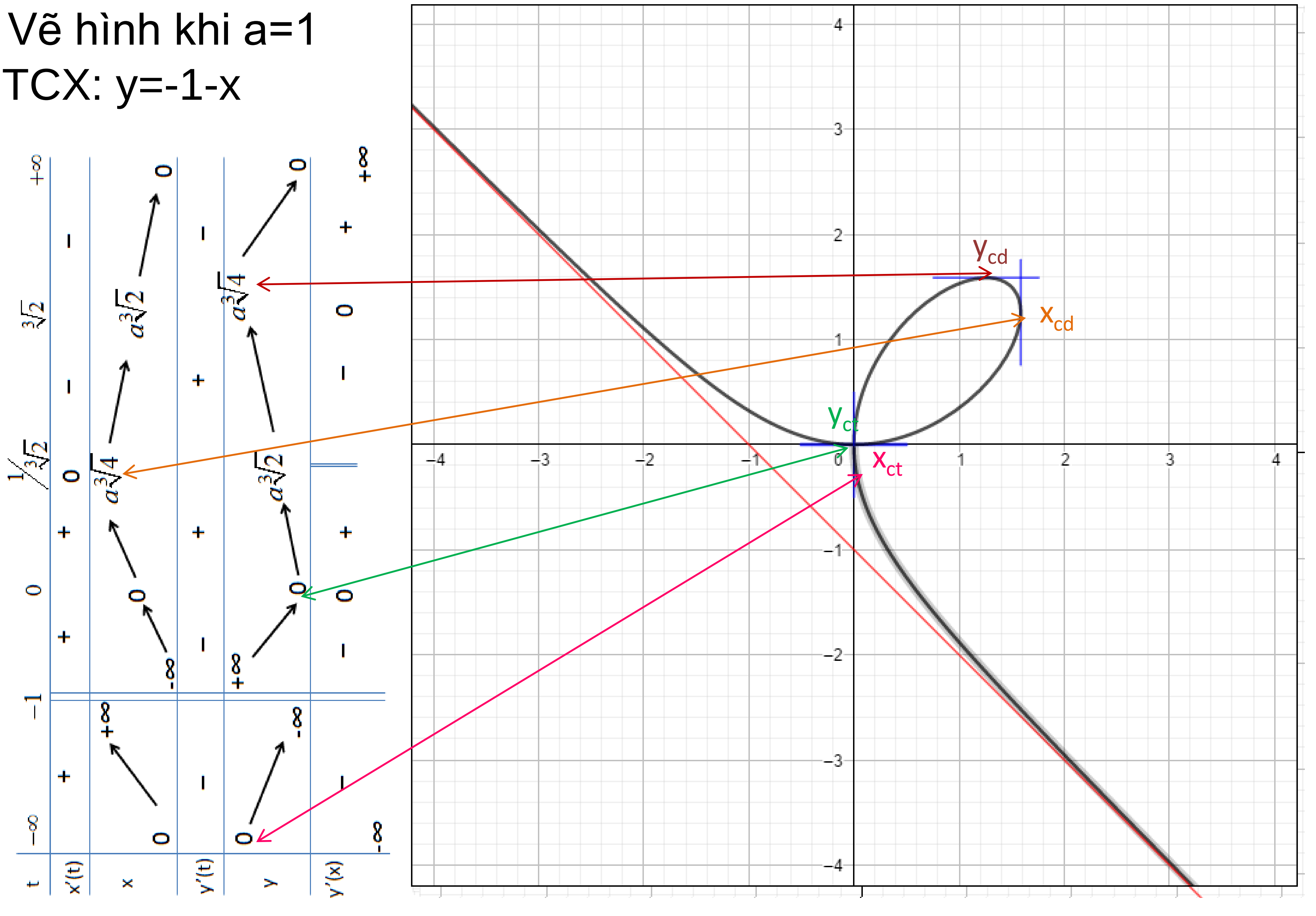
t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$x'(t)$		+	||	+		+	0	−		−	
x	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0	↗	$a\sqrt[3]{4}$	↘	$a\sqrt[3]{2}$	↘	0
$y'(t)$		−	||	−		+		+		−	
y	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0	↗	$a\sqrt[3]{2}$	↗	$a\sqrt[3]{4}$	↘	0
$y'(x)$	$-\infty$	−	||	−	0	+	||	−	0	+	$+\infty$

Hàm đạt cực tiểu tại (0,0) và cực đại tại $\left(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}\right)$

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

Vẽ hình khi a=1

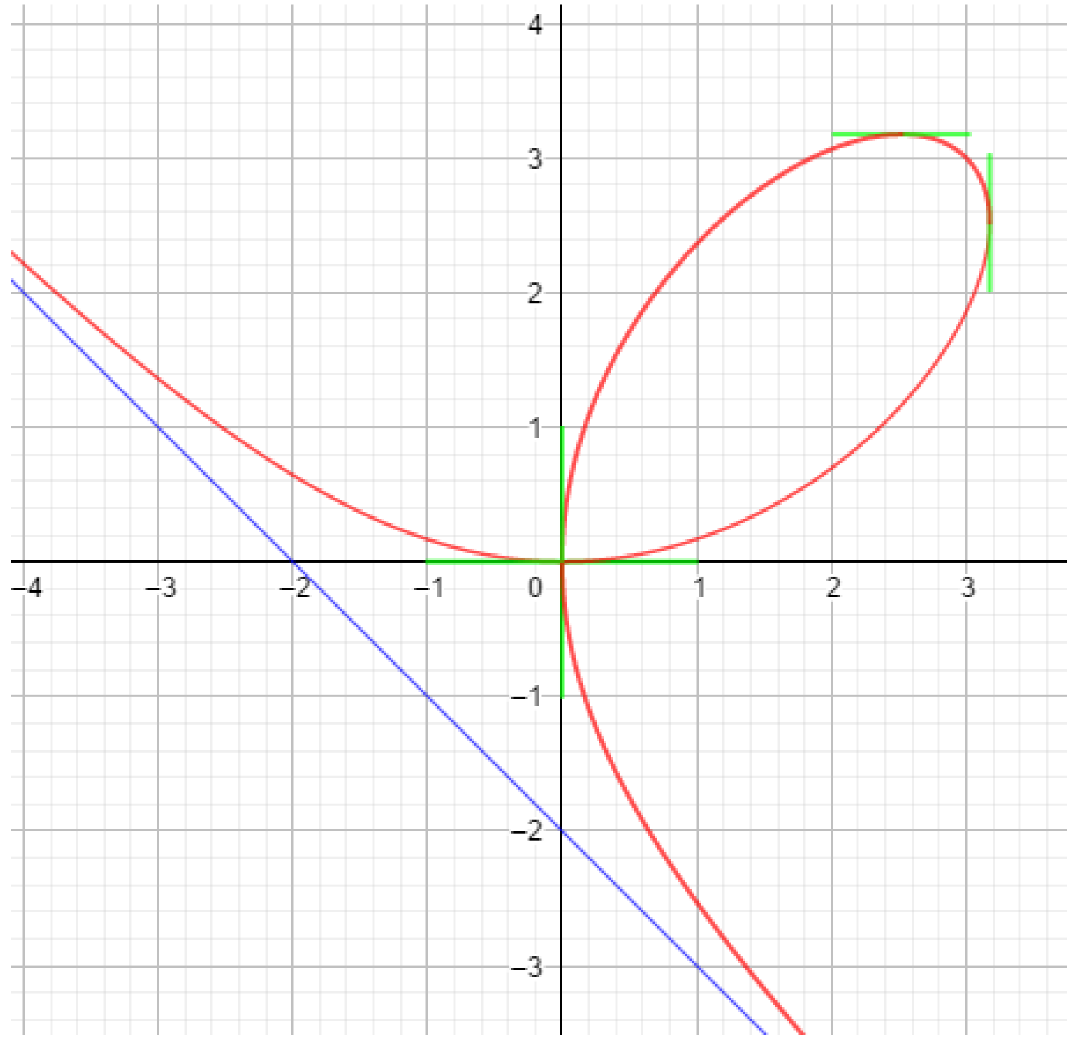
TCX: y=-1-x



Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

5. *Vẽ đường cong theo chiều tăng của x với a=2*

Vẽ TCX: *y=-x-a*



Các tiếp tuyến đặc biệt:

$$Khi\ t \to \pm\infty : y'(x) = \mp\infty$$

Tiếp tuyến thẳng đứng tại gốc O

Tiếp tuyến nằm ngang tại gốc O và $A\left(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}\right)$

$$Khi\ t \to {}^{1}\!/\!{}_{\sqrt[3]{2}} : y'(x) \to \infty$$

Tiếp tuyến gần thẳng đứng tại $B\left(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}\right)$

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số (Tự đọc)

VD: KS và vẽ đồ thị hàm cho bởi

$$x = 4\cos t - \cos 4t,\ y = 4\sin t - \sin 4t$$

1. Tìm MXĐ, tính chẵn, lẻ, chu kỳ tuần hoàn (nếu có)

Cả 2 hàm x(t), y(t) có MXĐ là $\mathbb{R}$; không chẵn hay lẻ; tuần hoàn với chu kỳ 2π

2. Tìm tiệm cận: Tính giới hạn khi $t \to \infty$

$\nexists \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ $\nexists \lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ Hàm không có tiệm cận

3. Khoảng biến thiên (tính trong 1 chu kỳ [0, 2π])

$$x'(t) = (-4\sin t + 4\sin 4t),\ y'(t) = (4\cos t - 4\cos 4t)$$

$$\left.\begin{aligned} x'(t) = 0 \leftrightarrow t = 0, \tfrac{2\pi}{3}, \tfrac{4\pi}{3}, \tfrac{\pi}{5}, \tfrac{3\pi}{5}, \pi, \tfrac{7\pi}{5}, \tfrac{9\pi}{5} \\ y'(x) = 0 \leftrightarrow t = 0, \tfrac{2\pi}{3}, \tfrac{4\pi}{3}, \tfrac{2\pi}{5}, \tfrac{4\pi}{5}, \tfrac{6\pi}{5}, \tfrac{8\pi}{5} \end{aligned}\right\}$$

3 Điểm lùi tại (3,0), (-1.5,2.6), (-1.5,-2.6)

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số (Tự đọc)

4. Lập bảng biến thiên:

t	0		$\pi/5$		$2\pi/5$		$3\pi/5$		$2\pi/3$		$4\pi/5$		$5\pi/5$
x'(t)	0	+	0	−		−	0	+	0	−		−	0
x	3	↗	4,05	↘	0,93	↘	-1,55	↗	-1,5	↘	-2,43	↘	-5
y'(t)	0	+		+	0		−		0	+	0	−	
y	0	↗	1,76	↗	4,76	↘	2,85	↘	2,59	↗	2,94	↘	0
y'(x)	0	+	∞	−	0	+	∞	−	$-\sqrt{3}$	−	0	+	∞

$$x'(t) = -4\sin t + 4\sin 4t,\ y'(t) = 4\cos t - 4\cos 4t$$

$$y'(x) = \frac{\cos t - \cos 4t}{\sin 4t - \sin t}$$

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số (Tự đọc)

4. Lập bảng biến thiên:

t	5π/5		6π/5		4π/3		7π/5		8π/5		9π/5		2π
x'(t)	0	+		+	0	–	0	+		+	0	–	0
x	-5	↗	-2,43	↗	-1,5	↘	-1,55	↗	0,93	↗	4,05	↘	3
y'(t)		–	0	+	0		–		0	+		–	0
y	0	↘	-2,94	↗	-2,59	↘	-2,85	↘	-4,76	↗	-1,76	↗	0
y'(x)	∞	–	0	+	$\sqrt{3}$	+	∞	–	0	+	∞	+	

$$y'(x) = \frac{\cos t - \cos 4t}{\sin 4t - \sin t},$$

$$\lim_{t\to 0} y'(x) = 0, \lim_{t\to 2\pi/3} y'(x) = -\sqrt{3}, \lim_{t\to 4\pi/3} y'(x) = \sqrt{3}$$

Khảo sát hàm cho bởi pt tham số (Tự đọc)

5. Vẽ đồ thị

Các điểm lùi và tiếp tuyến tại đó: $(0,0): y=0; \left(\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right): y=\mp\sqrt{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

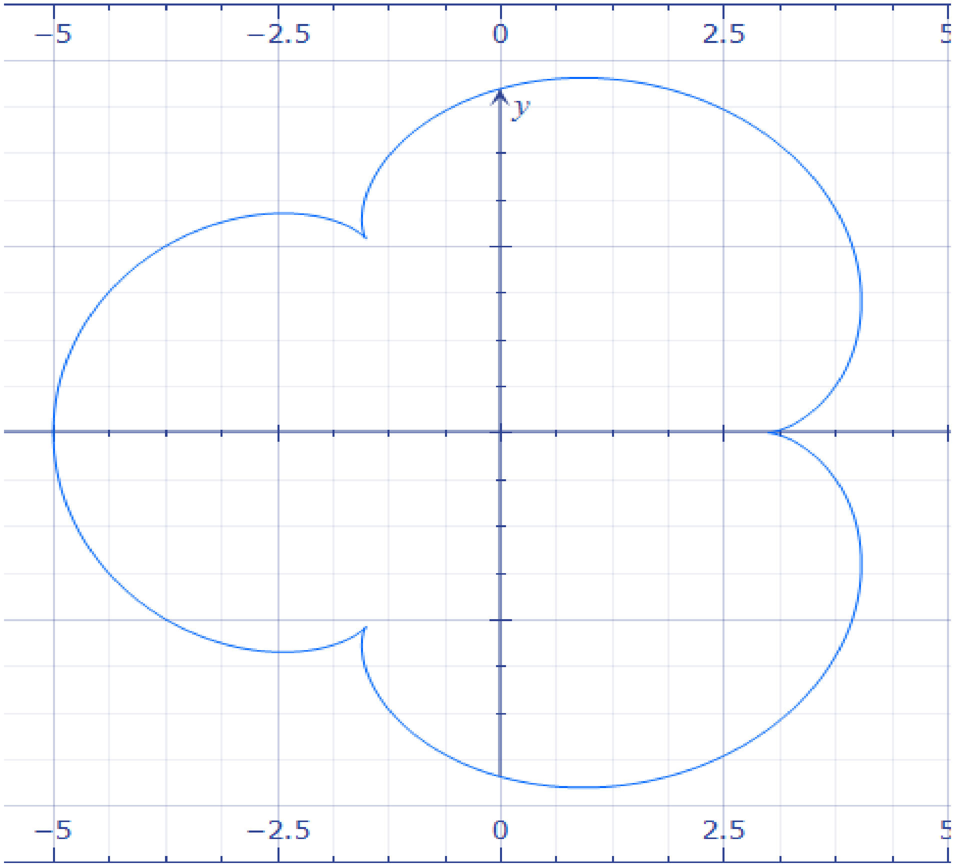
Tiếp tuyến nằm ngang tại:

$(0.93, \pm 4.76), (-2.43, \pm 2.94)$

Tiếp tuyến thẳng đứng tại:

$(4.05, \pm 1.76), (-5, 0),$

$(-1.55, \pm 2.85)$



Khảo sát hàm cho bởi pt tham số

Bài tập tham khảo

1. Tìm tiệm cận của các hàm:

$$a/\ x = te^{t},\ y = te^{-t}$$

$$b/\ x = \frac{t}{t-1},\ y = \frac{t}{t^2-1}$$

2. Tìm khoảng lồi lõm, điểm uốn của các hàm:

$$a/\ x = t\ln t,\ y = 6et - 3t^2$$

$$b/\ x = (1+t)^{1/t},\ y = (1+t)^{1+1/t}$$

3. Tìm các điểm mà tại đó hàm có tiếp tuyến thẳng đứng hoặc nằm ngang:

$$a/\ x = t\ln t,\ y = 6et - 3t^2$$

$$b/\ x = e^{\sin t},\ y = e^{\cos t}$$

4. Tìm các điểm kì dị và tiếp tuyến tại đó của hàm:

$$b/\ x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$$

5/ Khảo sát và vẽ:

$$a/\ x = 2t - t^2,\ y = 4t - t^3$$

$$b/\ x = \frac{2e^t}{1-t},\ y = \frac{te^t}{t-1}$$

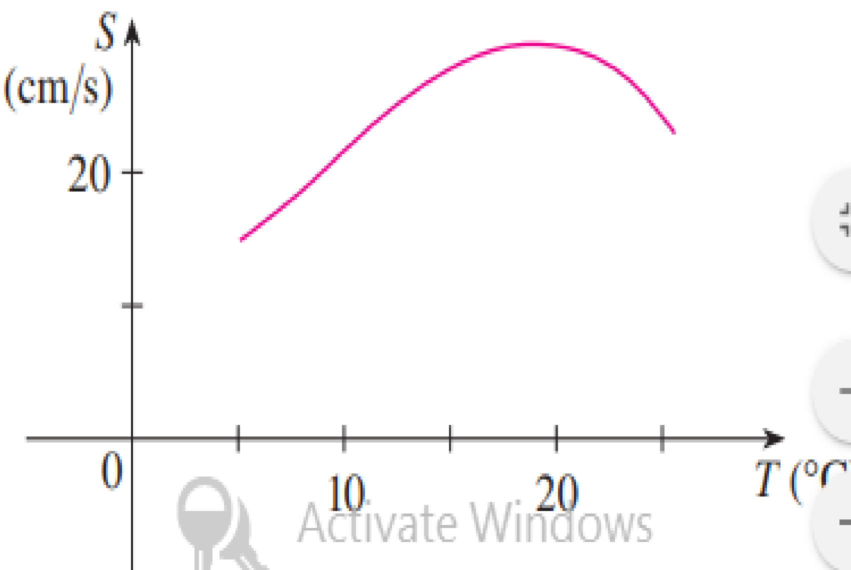
Đạo hàm – Bài tập

Bài 1: Nitroglycerin thường được kê đơn để phóng to các mạch máu đã trở nên quá hẹp. Biết diện tích cắt ngang của mạch máu sau khi dùng nitroglycerin t giờ là

$$A(t) = 0,01t^2 \,(1 \le t \le 5)\, cm^2$$

hãy tìm tốc độ thay đổi tức thời của vùng cắt ngang 4 giờ sau việc sử dụng nitroglycerin.

Bài 2: Biểu đồ cho thấy ảnh hưởng của nhiệt độ đến tốc độ bơi bền vững tối đa của cá hồi Coho.

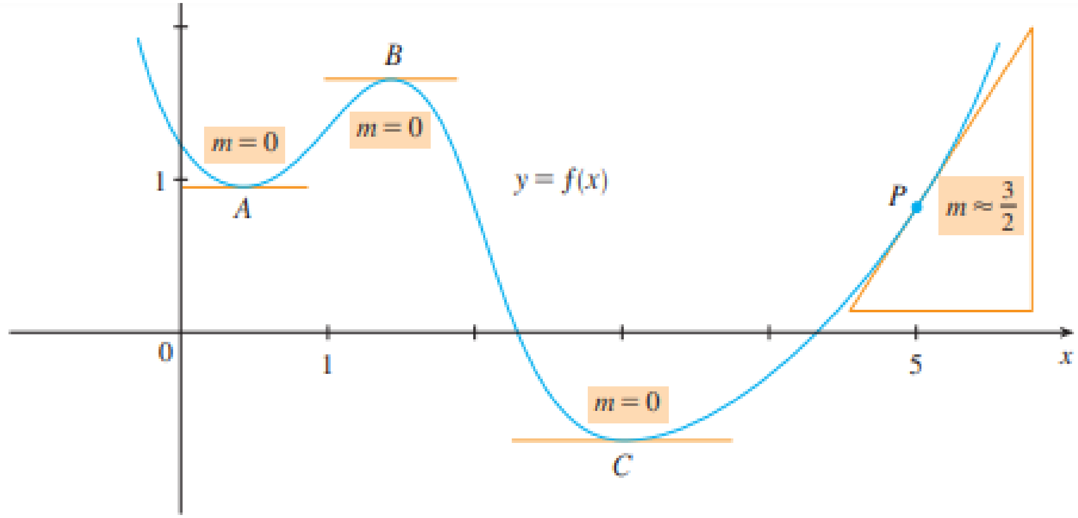


(a) Ý nghĩa của đạo hàm là gì? Đơn vị của đạo hàm?

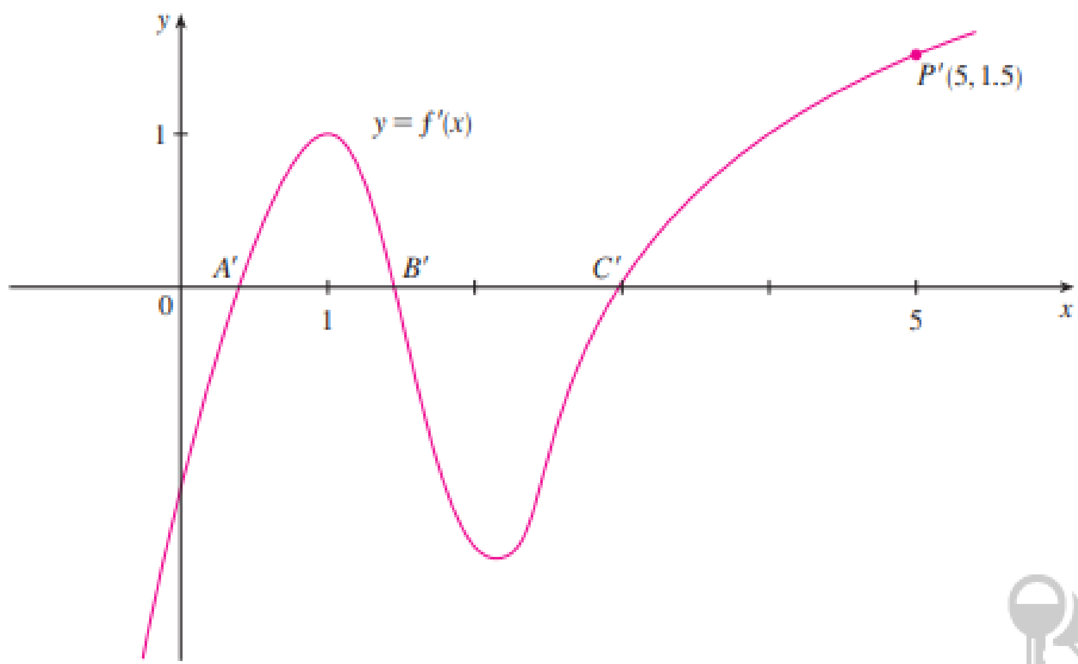
(b) Ước tính các giá trị và giải thích chúng

Đạo hàm – Bài tập

Bài 3: 2 hình vẽ bên cạnh là đồ thị của hàm y=f(x) và y=f’(x). Giải thích lý do?

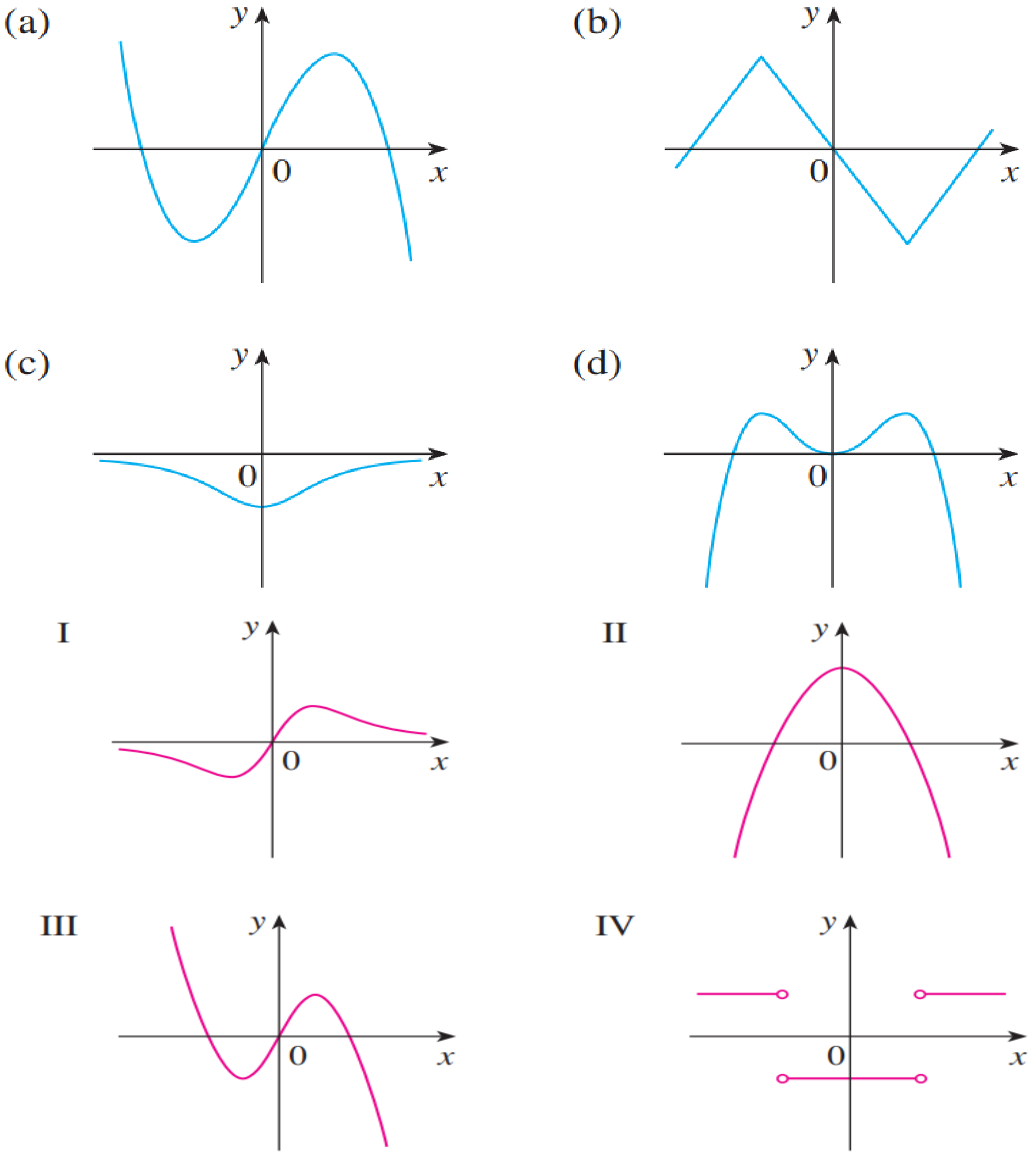


(a)



Đạo hàm – Bài tập

Bài 4: Cho đồ thị của hàm y=f(x) là (a), (b), (c), (d) và của hàm y=f’(x) là I, II, III, IV. Ghép cặp đồ thị của 2 hàm tương ứng với nhau.



Đạo hàm – Bài tập

Bài 5: Người ta ước tính nếu số dân trong 1 khu vực là x (nghìn người) thì tỉ lệ khí CO trong không khí sẽ là

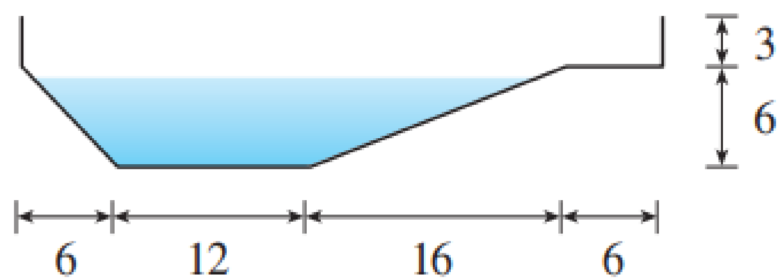
$$L(x) = 10 + 0.4x + 0.0001x^2 \left({}^{0}\!/_{000} \right)$$

Số dân trong khu vực ước tính theo năm kể từ năm 2019 là

$$x(t) = 752 + 23t + 0.5t^2$$

(a) Tìm tốc độ thay đổi của tỉ lệ khí CO theo sự thay đổi dân số
(b) Tìm tốc độ thay đổ dân số vào năm 2021
(c) Mức độ thay đổi tỉ lệ khí CO nhanh nào vào năm 2021?

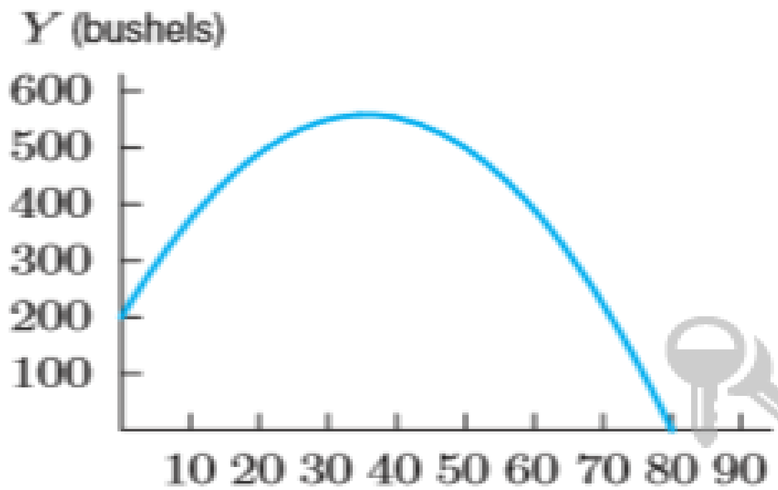
Bài 6: Một hồ bơi có chiều dài 200ft và mặt cắt với kích thước như hình vẽ. Nếu cho nước chảy vào hồ với tốc độ cố định là 0.8 ft^3/phút thì mực nước tăng với tốc độ bao nhiêu khi độ sâu là 5ft



(1ft ≈ 0.3 mét)

Đạo hàm – Bài tập

Bài 7: Năng suất, Y, của một vườn táo (tính theo giạ) như là một phần của số lượng, a, của phân bón (pound) được sử dụng trên vườn được thể hiện trong hình bên



(a) Mô tả ảnh hưởng của lượng phân bón đến năng suất của vườn cây.
(b) Giao điểm với trục Oy là gì? Giải thích ý nghĩa của nó.
(c) Giao điểm với trục Ox là gì? Giải thích ý nghĩa của nó.
(d) MGT của hàm này cho $0 \leq a \leq 80$ là gì?
(e) Hàm tăng hay giảm ở $a = 60$?
(f) Đồ thị lõm hay lồi gần $a = 40$

Đạo hàm – Bài tập

Bài 8: Hàm lợi nhuận của một công ty bán rượu là P (x) = 6x-200 đô la, trong đó x là số chai rượu

a. Tìm hàm lợi nhuận trung bình.

b. Tìm hàm lợi nhuận trung bình cận biên.

c. Đánh giá hàm lợi nhuận trung bình cận biên tại x = 10 và giải thích câu trả lời của bạn.

Bài 0: Một cửa hàng bán xe đạp bán được 20 xe mỗi tuần với giá 400 đôla/1 xe. Người quản lý nhận thấy nếu mỗi lần cửa hàng giảm giá 10 đôla/1 xe thì sẽ bán thêm được 2 xe. Biết giá vốn của mỗi xe là 200 đôla.

a/ Nếu gọi x là số lần giảm giá, hãy tìm giá bán mỗi xe (p) và số lượng xe bán được (q) như 1 hàm theo x.

b/ Tìm doanh thu (R), lợi nhuận (P) của cửa hàng tương ứng với số lần giảm giá

c/ Hãy tính số lần giảm giá để tối đa lợi nhuận cho cửa hàng mỗi tuần? Tính lợi nhuận tối đa?

Đạo hàm – Bài tập

Tính đạo hàm hàm ngược của các hàm

$$1/\ y=\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$2/\ y=2e^{-x}-e^{-2x}$$

$$3/\ y=\sinh x$$

Tính đạo hàm của các hàm cho bởi pt tham số

$$\begin{cases} x(t)=t\ln\left(t^2+1\right) \\ y(t)=\left(t^2+1\right)\ln t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t)=\arctan t \\ y(t)=\ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$$

Tính đạo hàm của các hàm hợp

$$1.\ y=e^{f(x)}$$

$$2.\ y=f\left(\ln\left(e^x+1\right)\right)$$

$$3.\ y=f\left(x^2+1\right)e^{f\left(x^2+1\right)}$$

$$4.\ y=\frac{e^{f(x)+1}}{f\left(e^x+1\right)}$$

Đạo hàm – Bài tập

Ví dụ: Tính dy, d^2y của các hàm sau

$1. y = \ln\left(1+t^2\right), t = \tan x$ $\quad 2. y = f\left(e^x\right)$ $\quad 3. y = \sinh\left(e^{f(x)}\right)$

Bài tập: Tính đh hoặc vp đến cấp tương ứng của các hàm sau

$1/\ f(x) = x^x,\ f''$

$2/\ f = \ln(\sin x + \cos x),\ f''$

$3/\ x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, y''$

$4/\ f(x) = \sinh(x^2+1),\ f''$

$5/\ f(x) = e^{2x}(x^2+x-2),\ f^{(n)}$

$6/\ y = \ln(f(x)), y''$

$7/\ y = e^{f(x^2)}, y''$

$8/\ y = \sin(f(x) + f(2x+1)), y''$

$9/\ y = \dfrac{1}{x^2-1}, y^{(n)}$

$10/\ y = \dfrac{x}{x^2-3x+2}, y^{(n)}$

$11/\ y = (x^2+x)\sin 3x, y^{(n)}$

$12/\ y = (2x^2-1)e^{2x}, y^{(n)}$

$13/\ y = \sin^4 x + \cos^4 x, y^{(n)}$

$14/\ y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}, y^{(10)}$

Đạo hàm – Bài tập

Bài tập: Khai triển Taylor đến cấp n tại $x=x_0$

$$f_1(x)=\frac{x}{x-1}, n=3, x_0=2$$

$$f_2(x)=e^{x^2-2x+2}, n=6, x_0=1$$

$$f_3(x)=\frac{x+1}{x^2-5x+6}, n=4, x_0=-1$$

$$f_4(x)=\frac{x^4+1}{x^2+1}, n=4, x_0=0$$

$$f_5(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), n=5, x_0=0$$

$$f_6(x)=\frac{1}{\left(x^2+x\right)+1}, n=3$$

$$f_7(x)=\ln\frac{2x+1}{2-5x}, n=3, x_0=0 \to f_7'''(0)$$

$$f_8(x)=\ln(\cos x), x_0=0, n=6 \to f_8^{(6)}(0)$$

$$f_9(x)=e^{\cos x}, x_0=0, n=4 \to f_9^{(4)}(0)$$

$$f_{10}(x)=\tan x, x_0=0, n=5 \to f_{10}^{(5)}(0)$$