Hledání kořenů rovnic jedné reálné proměnné – metoda Regula Falsi –

Michal Čihák

26. října 2011

Metoda Regula Falsi

- hybridní metoda – je kombinací metody sečen a metody půlení intervalů
- předpokladem je (podobně jako u metody půlení intervalů), že funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá a $f(a)$ a $f(b)$ mají rozdílná znaménka
- tato metoda vždy nalezne s předem danou přesností interval, ve kterém leží kořen rovnice $f(x) = 0$

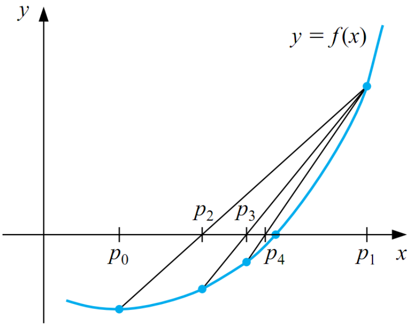
Metoda Regula Falsi

- hybridní metoda – je kombinací metody sečen a metody půlení intervalů
- předpokladem je (podobně jako u metody půlení intervalů), že funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá a $f(a)$ a $f(b)$ mají rozdílná znaménka
- tato metoda vždy nalezne s předem danou přesností interval, ve kterém leží kořen rovnice $f(x) = 0$

Metoda Regula Falsi

- hybridní metoda – je kombinací metody sečen a metody půlení intervalů
- předpokladem je (podobně jako u metody půlení intervalů), že funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá a $f(a)$ a $f(b)$ mají rozdílná znaménka
- tato metoda vždy nalezne s předem danou přesností interval, ve kterém leží kořen rovnice $f(x) = 0$

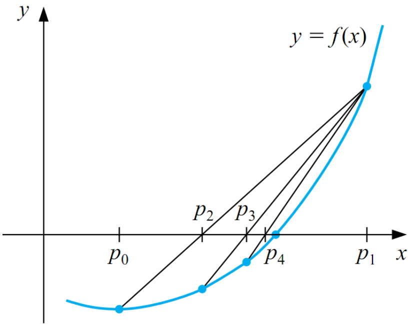
Algoritmus metody Regula Falsi



Na začátku položíme $a_1 = a, b_1 = b$. Rovnice sečny grafu funkce f v bodech $[a_1, f(a_1)]$ a $[b_1, f(b_1)]$ je

$$y = f(a_1) + \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}(x - a_1).$$

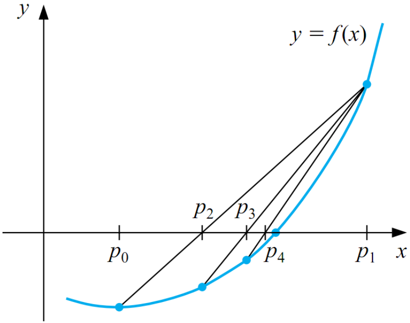
Algoritmus metody Regula Falsi



Hodnota p_2 (další iterace) se určí jako průsečík sečny s osou x soustavy souřadnic (stejně jako u metody sečen):

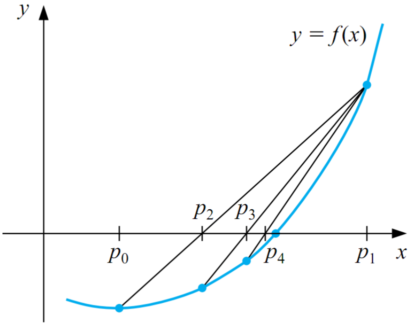
$$p_2 = a_1 - \frac{f(a_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}.$$

Algoritmus metody Regula Falsi



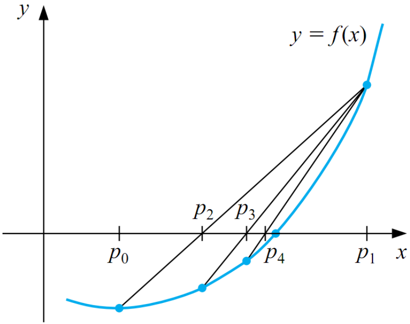
Pokud je $f(p_2) = 0$, pak je p_2 hledaným kořenem rovnice.

Algoritmus metody Regula Falsi



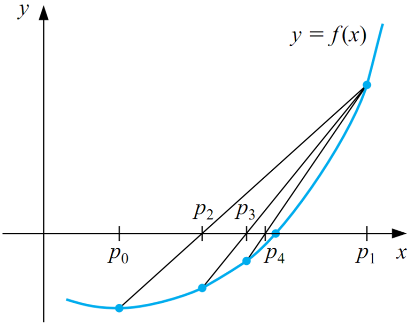
V opačném případě má $f(p_2)$ stejné znaménko buď jako $f(a_1)$, nebo jako $f(b_1)$.

Algoritmus metody Regula Falsi



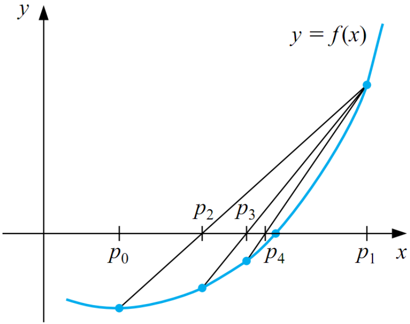
Pokud má $f(p_2)$ stejné znaménko jako $f(a_1)$, pak hledaný kořen rovnice leží v intervalu $\langle p_2, b_1 \rangle$ a položíme $a_2 = p_2, b_2 = b_1$.

Algoritmus metody Regula Falsi



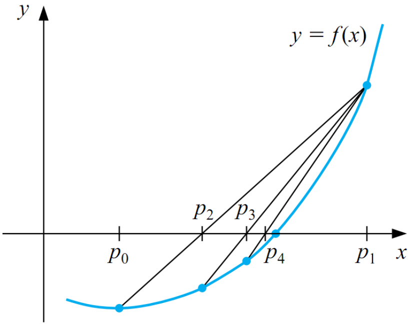
Pokud má $f(p_2)$ stejné znaménko jako $f(b_1)$, pak hledaný kořen rovnice leží v intervalu $\langle a_1, p_2 \rangle$ a položíme $a_2 = a_1, b_2 = p_2$

Algoritmus metody Regula Falsi



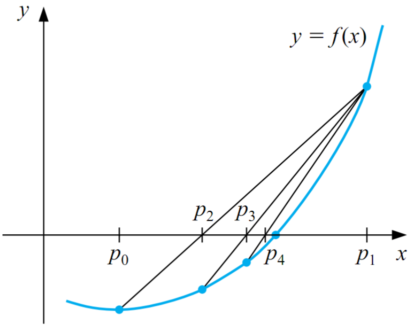
Nyní opakujeme stejný proces na interval $\langle a_2, b_2 \rangle$, poté na interval $\langle a_3, b_3 \rangle$, atd.

Algoritmus metody Regula Falsi



Každý nově vzniklý interval obsahuje hledaný kořen (podobně jako u metody půlení intervalu.

Algoritmus metody Regula Falsi – shrnutí



Interval $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle$, kde $n > 1$, obsahující kořen rovnice $f(x) = 0$ získáme z intervalu $\langle a_n, b_n \rangle$ obsahujícího kořen rovnice tak, že nejprve vypočteme

$$p_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

a poté položíme $a_{n+1} = a_n$ a $b_{n+1} = p_{n+1}$, pokud je $f(a_n) \cdot f(p_{n+1}) < 0$,
nebo $a_{n+1} = p_{n+1}$ a $b_{n+1} = b_n$, pokud je $f(a_n) \cdot f(p_{n+1}) > 0$.

Metoda Regula Falsi

Existují 3 základní kritéria pro ukončení algoritmu metody Regula Falsi:

1. některé p_{n+1} je přímo kořenem rovnice $f(p_{n+1}) = 0$
2. hodnota $|p_{n+1} - p_n|$ klesne pod předem danou toleranci TOL
3. počet iterací algoritmu překročí předem danou mez N_0

Metoda Regula Falsi

Existují 3 základní kritéria pro ukončení algoritmu metody Regula Falsi:

1. některé p_{n+1} je přímo kořenem rovnice $f(p_{n+1}) = 0$
2. hodnota $|p_{n+1} - p_n|$ klesne pod předem danou toleranci TOL
3. počet iterací algoritmu překročí předem danou mez N_0

Metoda Regula Falsi

Existují 3 základní kritéria pro ukončení algoritmu metody Regula Falsi:

1. některé p_{n+1} je přímo kořenem rovnice $f(p_{n+1}) = 0$
2. hodnota $|p_{n+1} - p_n|$ klesne pod předem danou toleranci TOL
3. počet iterací algoritmu překročí předem danou mez N_0

Příklad

Zadání: Najděte kořen rovnice $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ v intervalu $\langle 1, 2\rangle$ s tolerancí $0{,}0005$.

Příklad

Zadání: Najděte kořen rovnice $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ v intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ s tolerancí $0{,}0005$.
Řešení: Položíme $a_1 = 1, b_1 = 2$ a postupně vypočítáme:

n	a_n	b_n	p_{n+1}	$f(p_{n+1})$
1	1.00000000	2.00000000	1.26315789	−1.60227438
2	1.26315789	2.00000000	1.33882784	−0.43036475
3	1.33882784	2.00000000	1.35854634	−0.11000879
4	1.35854634	2.00000000	1.36354744	−0.02776209
5	1.36354744	2.00000000	1.36480703	−0.00698342
6	1.36480703	2.00000000	1.36512372	−0.00175521
7	1.36512372	2.00000000	1.36520330	−0.00044106

Příklad

Zadání: Najděte kořen rovnice $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ v intervalu $\langle 1, 2\rangle$ s tolerancí $0{,}0005$.
Řešení: Položíme $a_1 = 1, b_1 = 2$ a postupně vypočítáme:

n	a_n	b_n	p_{n+1}	$f(p_{n+1})$
1	1.00000000	2.00000000	1.26315789	−1.60227438
2	1.26315789	2.00000000	1.33882784	−0.43036475
3	1.33882784	2.00000000	1.35854634	−0.11000879
4	1.35854634	2.00000000	1.36354744	−0.02776209
5	1.36354744	2.00000000	1.36480703	−0.00698342
6	1.36480703	2.00000000	1.36512372	−0.00175521
7	1.36512372	2.00000000	1.36520330	−0.00044106

Všimněte si, že $|p_6 - p_5| = 0{,}00007958$, což je hodnota menší než daná hodnota TOL.

Výhody metody Regula Falsi

- metoda vždy konverguje (metoda vždy nalezne s předem danou přesností interval, ve kterém leží kořen rovnice $f(x) = 0$)
- jednoduchý princip a snadná implementace (naprogramování algoritmu v konkrétním programovacím jazyce)

Výhody metody Regula Falsi

- metoda vždy konverguje (metoda vždy nalezne s předem danou přesností interval, ve kterém leží kořen rovnice $f(x) = 0$)
- jednoduchý princip a snadná implementace (naprogramování algoritmu v konkrétním programovacím jazyce)

Nevýhody metody sečen

- metoda konverguje pomaleji než metoda sečen (v některých případech dokonce pomaleji než metoda půlení intervalu)

Rizika implementace metody na počítači

- stejná jako u předchozích metod (odečítání blízkých čísel)