Numerická integrace

Michal Čihák

29. listopadu 2011

Výpočty integrálů v praxi

- V přednáškách z matematické analýzy jste se seznámili s mnoha metodami výpočtu integrálů.
- V praxi se ale poměrně často můžeme setkat s případy, kdy žádná z těchto metod nevede k cíli.
- Potom je jedinou možností použít některou z přibližných metod výpočtu integrálu.

Výpočty integrálů v praxi

- V přednáškách z matematické analýzy jste se seznámili s mnoha metodami výpočtu integrálů.
- V praxi se ale poměrně často můžeme setkat s případy, kdy žádná z těchto metod nevede k cíli.
- Potom je jedinou možností použít některou z přibližných metod výpočtu integrálu.

Výpočty integrálů v praxi

- V přednáškách z matematické analýzy jste se seznámili s mnoha metodami výpočtu integrálů.
- V praxi se ale poměrně často můžeme setkat s případy, kdy žádná z těchto metod nevede k cíli.
- Potom je jedinou možností použít některou z přibližných metod výpočtu integrálu.

Výpočty integrálů v praxi

Příklad: V matematické statistice často pracujeme s tzv. *normovaným normálním rozdělením*, jehož hustota je dána funkcí

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Výpočty integrálů v praxi

Příklad: V matematické statistice často pracujeme s tzv. *normovaným normálním rozdělením*, jehož hustota je dána funkcí

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Chceme-li určit pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny s normálním rozdělením leží v intervalu $\langle a, b \rangle$, pak musíme vypočítat

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx.$$

Výpočty integrálů v praxi

Příklad: V matematické statistice často pracujeme s tzv. *normovaným normálním rozdělením*, jehož hustota je dána funkcí

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Chceme-li určit pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny s normálním rozdělením leží v intervalu $\langle a, b \rangle$, pak musíme vypočítat

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx.$$

Tento integrál ale nelze exaktními metodami určit.

Dělené diference

Představme si, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f v $n+1$ bodech $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Pro těchto $n+1$ bodů existuje $n+1$ tzv. *nultých dělených diferencí* funkce f

$$f[x_i] = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Dělené diference

Představme si, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f v $n+1$ bodech $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Pro těchto $n+1$ bodů existuje $n+1$ tzv. *nultých dělených diferencí* funkce f

$$f[x_i] = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Dále existuje n tzv. *prvních dělených diferencí* funkce f

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dělené diference

Představme si, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f v $n+1$ bodech $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Pro těchto $n+1$ bodů existuje $n+1$ tzv. *nultých dělených diferencí* funkce f

$$f[x_i] = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Dále existuje n tzv. *prvních dělených diferencí* funkce f

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dále pokračujeme indukcí. Pokud známe $(k-1)$-ní dělené diference

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}], \qquad f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}],$$

potom pro *k-tou dělenou diferenci* platí

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Dělené diference

Celý proces ukončíme určením jediné n-*té dělené diference*

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Dělené diference

Celý proces ukončíme určením jediné *n-té dělené diference*

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

S pomocí dělených diferencí lze Lagrangeův interpolační polynom pro funkci f s uzly $x_0, x_1, \dots, x_n$ vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

který se nazývá *Newtonův vzorec dělených diferencí*.

Základní metody výpočtu určitých integrálů

- Funkci, jejíž určitý integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ chceme určit, nahradíme Lagrangeovým interpolačním polynomem.
- Z tohoto polynomu určíme určitý integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$.
- Otázkou je, jaký stupeň Lagrangeova interpolačního polynomu zvolit (kolik uzlů zvolit).

Základní metody výpočtu určitých integrálů

- Funkci, jejíž určitý integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ chceme určit, nahradíme Lagrangeovým interpolačním polynomem.
- Z tohoto polynomu určíme určitý integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$.
- Otázkou je, jaký stupeň Lagrangeova interpolačního polynomu zvolit (kolik uzlů zvolit).

Základní metody výpočtu určitých integrálů

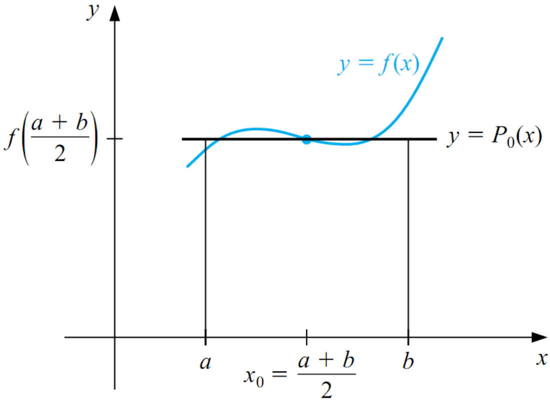
- Funkci, jejíž určitý integrál na intervalu $\langle a, b \rangle$ chceme určit, nahradíme Lagrangeovým interpolačním polynomem.
- Z tohoto polynomu určíme určitý integrál na intervalu $\langle a, b \rangle$.
- Otázkou je, jaký stupeň Lagrangeova interpolačního polynomu zvolit (kolik uzlů zvolit).

Obdélníkové pravidlo

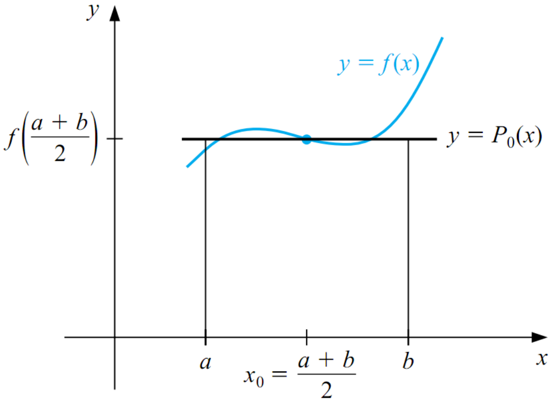
Začneme tím, že zvolíme jeden uzel (stupeň Lagrangeova interpolačního polynomu bude 0). Tento uzel zvolíme uprostřed intervalu $\langle a, b\rangle$.

Obdélníkové pravidlo

Začneme tím, že zvolíme jeden uzel (stupeň Lagrangeova interpolačního polynomu bude 0). Tento uzel zvolíme uprostřed intervalu $\langle a, b\rangle$.



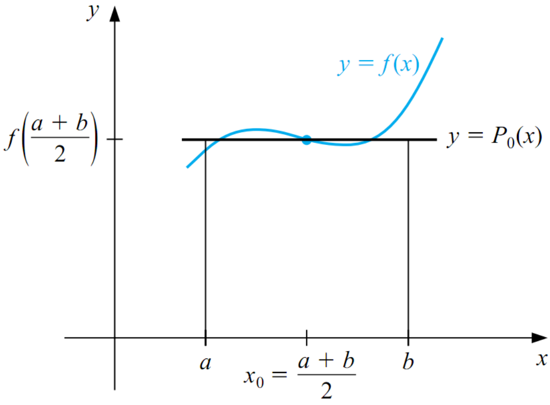
Obdélníkové pravidlo



Potom lze vyjádřit

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_0(x)dx = \int_a^b f[x_0]dx = f[x_0](b-a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

Obdélníkové pravidlo



Obdélníkové pravidlo:

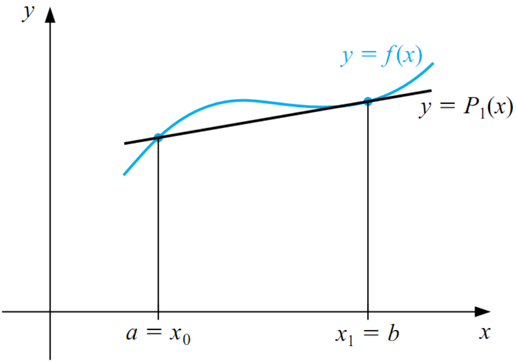
$$\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

Lichoběžníkové pravidlo

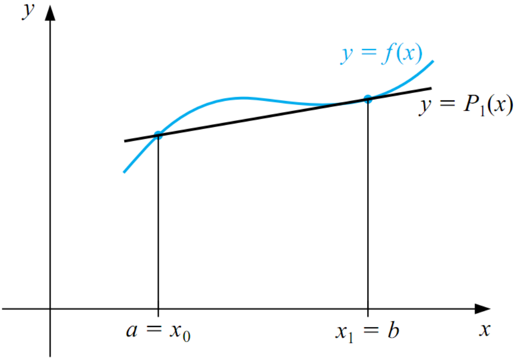
Nyní zvolíme dva uzly (stupeň Lagrangeova interpolačního polynomu bude 1). Za uzly zvolíme krajní body intervalu $\langle a, b \rangle$.

Lichoběžníkové pravidlo

Nyní zvolíme dva uzly (stupeň Lagrangeova interpolačního polynomu bude 1). Za uzly zvolíme krajní body intervalu $\langle a, b\rangle$.



Lichoběžníkové pravidlo



Potom lze vyjádřit

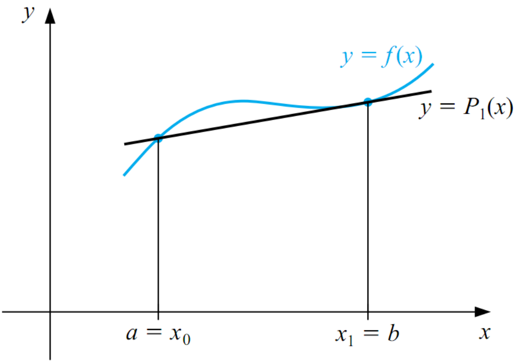
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b \big(f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)\big)dx.$$

Lichoběžníkové pravidlo

Postupně vypočítáme

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b \big(f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0)\big)dx = \\ = \left[f[a]x + f[a,b]\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^b = \\ = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(a-a)^2}{2}\right] = \\ = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.\end{aligned}$$

Lichoběžníkové pravidlo



Lichoběžníkové pravidlo:

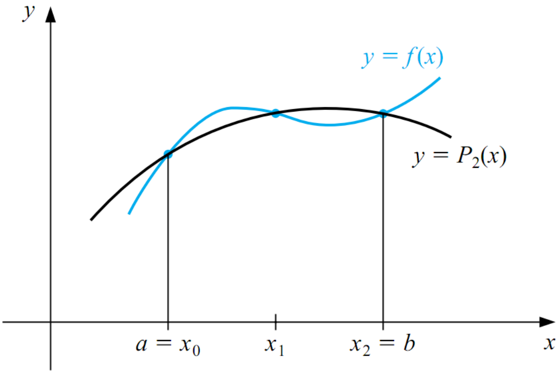
$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Simpsonovo pravidlo

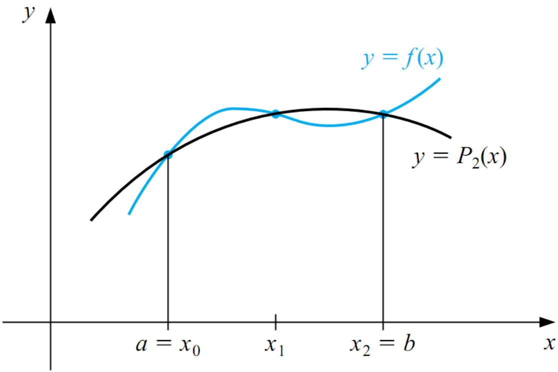
Nyní zvolíme tři uzly (stupeň Lagrangeova interpolačního polynomu bude 2). Za uzly zvolíme krajní body a střed intervalu $\langle a, b \rangle$.

Simpsonovo pravidlo

Nyní zvolíme tři uzly (stupeň Lagrangeova interpolačního polynomu bude 2). Za uzly zvolíme krajní body a střed intervalu $\langle a, b \rangle$.



Simpsonovo pravidlo



Potom lze vyjádřit

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx.$$

Simpsonovo pravidlo

$$\int_a^b P_{0,1,2}(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left\{ f(a) + f\left[a, \frac{a+b}{2}\right](x-a) + f\left[a, \frac{a+b}{2}, b\right](x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right\} dx$$

$$= \left[f(a)x + f\left[a, \frac{a+b}{2}\right]\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^b$$

$$+ f\left[a, \frac{a+b}{2}, b\right]\int_a^b (x-a)\left[(x-a) + \left(a - \frac{a+b}{2}\right)\right]\ dx$$

$$= f(a)(b-a) + \frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a}\frac{(b-a)^2}{2}$$

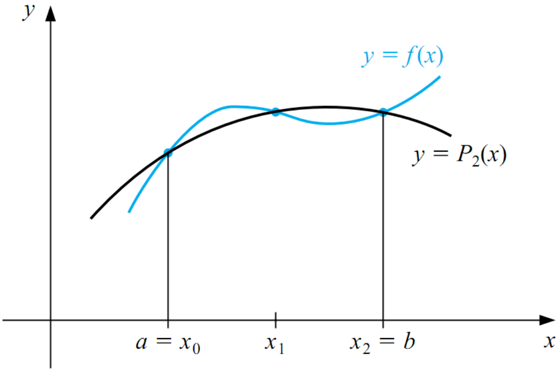
$$+ \frac{f[\frac{a+b}{2}, b] - f[a, \frac{a+b}{2}]}{b-a}\left[\frac{(x-a)^3}{3} + \frac{(x-a)^2}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)\right]_a^b$$

$$= (b-a)\left[f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right]$$

$$+ \left(\frac{1}{b-a}\right)\left[\frac{f(b) - f(\frac{a+b}{2})}{\frac{b-a}{2}} - \frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{\frac{b-a}{2}}\right]\left[\frac{(b-a)^3}{3} - \frac{(b-a)^3}{4}\right]$$

$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{2}{(b-a)^2}\left[f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a)\right]\frac{(b-a)^3}{12}.$$

Simpsonovo pravidlo



Simpsonovo pravidlo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Porovnání jednotlivých metod

V první tabulce jsou uvedeny hodnoty určitých integrálů různých funkcí vypočtené na intervalu $\langle 1; 1{,}2 \rangle$ různými metodami – obdélníkovým pravidlem (Midpoint), lichoběžníkovým pravidlem (Trapezoidal) a Simpsonovým pravidlem. V prvním řádku tabulky jsou přitom uvedeny přesné hodnoty.

Porovnání jednotlivých metod

V první tabulce jsou uvedeny hodnoty určitých integrálů různých funkcí vypočtené na intervalu $\langle 1; 1{,}2 \rangle$ různými metodami – obdélníkovým pravidlem (Midpoint), lichoběžníkovým pravidlem (Trapezoidal) a Simpsonovým pravidlem. V prvním řádku tabulky jsou přitom uvedeny přesné hodnoty.

$f(x)$	x^2	x^4	$1/(x+1)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin x$	e^x
Exact value	0.24267	0.29766	0.09531	0.29742	0.17794	0.60184
Midpoint	0.24200	0.29282	0.09524	0.29732	0.17824	0.60083
Trapezoidal	0.24400	0.30736	0.09545	0.29626	0.17735	0.60384
Simpson's	0.24267	0.29767	0.09531	0.29742	0.17794	0.60184

Porovnání jednotlivých metod

Ve druhé tabulce jsou uvedeny hodnoty určitých integrálů různých funkcí vypočtené na intervalu $\langle 0; 2 \rangle$ různými metodami – obdélníkovým pravidlem (Midpoint), lichoběžníkovým pravidlem (Trapezoidal) a Simpsonovým pravidlem. V prvním řádku tabulky jsou přitom uvedeny přesné hodnoty.

Porovnání jednotlivých metod

Ve druhé tabulce jsou uvedeny hodnoty určitých integrálů různých funkcí vypočtené na intervalu $\langle 0; 2 \rangle$ různými metodami – obdélníkovým pravidlem (Midpoint), lichoběžníkovým pravidlem (Trapezoidal) a Simpsonovým pravidlem. V prvním řádku tabulky jsou přitom uvedeny přesné hodnoty.

$f(x)$	x^2	x^4	$1/(x+1)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin x$	e^x
Exact value	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389
Midpoint	2.000	2.000	1.000	2.818	1.682	5.436
Trapezoidal	4.000	16.000	1.333	3.326	0.909	8.389
Simpson's	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421

Jak zvýšit přesnost numerické integrace

Příklad: Určete pomocí Simpsonova pravidla $\int_0^2 e^x dx$.

Jak zvýšit přesnost numerické integrace

Příklad: Určete pomocí Simpsonova pravidla $\int_0^2 e^x dx$.

$$\int_0^2 e^x dx \approx \frac{1}{3}(e^0 + 4e^1 + e^2) = 6{,}4207278.$$

Jak zvýšit přesnost numerické integrace

Příklad: Určete pomocí Simpsonova pravidla $\int_0^2 e^x dx$.

$$\int_0^2 e^x dx \approx \frac{1}{3}(e^0 + 4e^1 + e^2) = 6{,}4207278.$$

Přesná hodnota je přitom

$$\int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - e^0 = 6{,}3890561.$$

Jak zvýšit přesnost numerické integrace

Příklad: Určete pomocí Simpsonova pravidla $\int_0^2 e^x dx$.

$$\int_0^2 e^x dx \approx \frac{1}{3}(e^0 + 4e^1 + e^2) = 6{,}4207278.$$

Přesná hodnota je přitom

$$\int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - e^0 = 6{,}3890561.$$

Absolutní chyba aproximace je tedy 0,0316717. Takováto chyba může být pro některé aplikace nepřijatelně vysoká.

Jak zvýšit přesnost numerické integrace

Zkusme zvýšit přesnost aproximace tím, že rozdělíme interval $\langle 0, 2\rangle$ na dva podintervaly $\langle 0, 1\rangle$ a $\langle 1, 2\rangle$ a na každém z nich použijeme Simpsonovo pravidlo

Jak zvýšit přesnost numerické integrace

Zkusme zvýšit přesnost aproximace tím, že rozdělíme interval $\langle 0, 2\rangle$ na dva podintervaly $\langle 0, 1\rangle$ a $\langle 1, 2\rangle$ a na každém z nich použijeme Simpsonovo pravidlo

$$\int_0^2 e^x dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx \approx \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{0,5} + e^1) + \frac{1}{6}(e^1 + 4e^{1,5} + e^2) =$$
$$= \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{0,5} + 2e^1) + 4e^{1,5} + e^2) = 6{,}3912102.$$

Jak zvýšit přesnost numerické integrace

Zkusme zvýšit přesnost aproximace tím, že rozdělíme interval $\langle 0, 2\rangle$ na dva podintervaly $\langle 0, 1\rangle$ a $\langle 1, 2\rangle$ a na každém z nich použijeme Simpsonovo pravidlo

$$\int_0^2 e^x dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx \approx \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{0{,}5} + e^1) + \frac{1}{6}(e^1 + 4e^{1{,}5} + e^2) =$$
$$= \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{0{,}5} + 2e^1) + 4e^{1{,}5} + e^2) = 6{,}3912102.$$

Absolutní chyba aproximace se zmenšila o více než 90 % na 0,0021541.

Jak zvýšit přesnost numerické integrace

Zkusme ještě dále rozdělit intervaly $\langle 0, 1 \rangle$ a $\langle 1, 2 \rangle$ na další podintervaly. Při použití Simpsonova pravidla dostaneme

Jak zvýšit přesnost numerické integrace

Zkusme ještě dále rozdělit intervaly $\langle 0, 1\rangle$ a $\langle 1, 2\rangle$ na další podintervaly. Při použití Simpsonova pravidla dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^x dx &= \int_0^{0{,}5} e^x dx + \int_{0{,}5}^1 e^x dx + \int_1^{1{,}5} e^x dx + \int_{1{,}5}^2 e^x dx \approx \\ &\approx \frac{1}{12}(e^0 + 4e^{0{,}25} + e^{0{,}5}) + \frac{1}{12}(e^{0{,}5} + 4e^{0{,}75} + e^1) + \\ &+ \frac{1}{12}(e^1 + 4e^{1{,}25} + e^{1{,}5}) + \frac{1}{12}(e^{1{,}5} + 4e^{1{,}75} + e^2) = \\ &= \frac{1}{12}(e^0 + 4e^{0{,}25} + 2e^{0{,}5} + 4e^{0{,}75} + e^1 + 4e^{1{,}25} + 2e^{1{,}5} + 4e^{1{,}75} + e^2) \\ &= 6{,}3891937.\end{aligned}$$

Jak zvýšit přesnost numerické integrace

Zkusme ještě dále rozdělit intervaly $\langle 0, 1\rangle$ a $\langle 1, 2\rangle$ na další podintervaly. Při použití Simpsonova pravidla dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^x dx &= \int_0^{0,5} e^x dx + \int_{0,5}^{1} e^x dx + \int_1^{1,5} e^x dx + \int_{1,5}^{2} e^x dx \approx \\
&\approx \frac{1}{12}(e^0 + 4e^{0,25} + e^{0,5}) + \frac{1}{12}(e^{0,5} + 4e^{0,75} + e^1) + \\
&+ \frac{1}{12}(e^1 + 4e^{1,25} + e^{1,5}) + \frac{1}{12}(e^{1,5} + 4e^{1,75} + e^2) = \\
&= \frac{1}{12}(e^0 + 4e^{0,25} + 2e^{0,5} + 4e^{0,75} + e^1 + 4e^{1,25} + 2e^{1,5} + 4e^{1,75} + e^2) \\
&= 6{,}3891937.
\end{aligned}$$

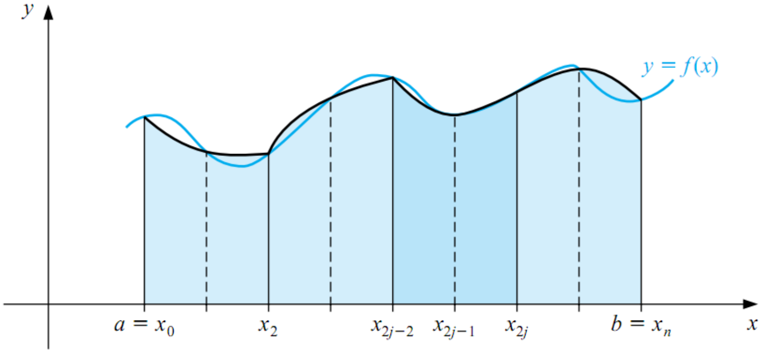
Absolutní chyba aproximace se zmenšila na 0,0001376, což je už jen 0,4 % původní chyby (při použití Simpsonova pravidla na celý interval $\langle 0, 2\rangle$).

Složené Simpsonovo pravidlo

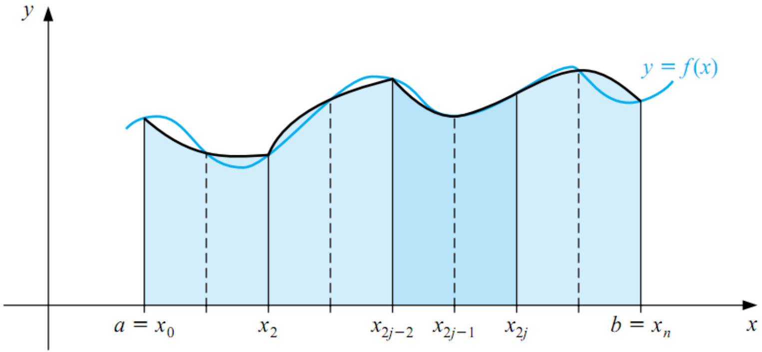
Zobecněním předchozího postupu získáme tzv. *Simpsonovo složené pravidlo*.

Složené Simpsonovo pravidlo

Zobecněním předchozího postupu získáme tzv. *Simpsonovo složené pravidlo*.



Složené Simpsonovo pravidlo



Zvolíme *sudé* číslo n a rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ na n podintervalů. Označíme-li $h = (b-a)/n$, potom krajní body podintervalů jsou $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, kde $x_j = x_0 + jh$ pro každé $j = 0, 1, \ldots, n$. Na každém z podintervalů použijeme Simpsonovo pravidlo

Složené Simpsonovo pravidlo

Zvolíme *sudé* číslo n a rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ na n podintervalů. Označíme-li $h = (b-a)/n$, potom krajní body podintervalů jsou $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, kde $x_j = x_0 + jh$ pro každé $j = 0, 1, \ldots, n$. Na každém z podintervalů použijeme Simpsonovo pravidlo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)dx &= \\
&= \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{h}{3} \left[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j}) \right] \right) = \\
&= \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right].
\end{aligned}
$$

Absolutní chyba aproximace Simpsonovým pravidlem

Lze odvodit (metodami diferenciálního a integrálního počtu), že absolutní chyba aproximace Simpsonovým pravidlem je rovna

$$\left| \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) \right|,$$

kde $f^{(4)}(\xi)$ je čtvrtá derivace funkce f v bodě ξ, přičemž ξ je nějaké číslo z intervalu (a, b).

Složené Simpsonovo pravidlo – příklad

Příklad: Určete pomocí složeného Simpsonova pravidla $\int_0^\pi \sin dx$ s absolutní chybou menší než 0,00002. Kolik podintervalů intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ budeme pro tento účel potřebovat?

Složené Simpsonovo pravidlo – příklad

Příklad: Určete pomocí složeného Simpsonova pravidla $\int_0^\pi \sin dx$ s absolutní chybou menší než 0,00002. Kolik podintervalů intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ budeme pro tento účel potřebovat?

$$\left| \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) \right| = \frac{h^4 \pi}{180} \sin \xi \leq \frac{h^4 \pi}{180} \cdot 1 = \frac{\pi^5}{180 n^4} < 0{,}00002.$$

Složené Simpsonovo pravidlo – příklad

Příklad: Určete pomocí složeného Simpsonova pravidla $\int_0^\pi \sin dx$ s absolutní chybou menší než 0,00002. Kolik podintervalů intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ budeme pro tento účel potřebovat?

$$\left| \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) \right| = \frac{h^4\pi}{180} \sin \xi \leq \frac{h^4\pi}{180} \cdot 1 = \frac{\pi^5}{180n^4} < 0{,}00002.$$

Z poslední nerovnosti určíme, že $n > 18$. Můžeme tedy zvolit například $n = 20$ a $h = \pi/20$.

Složené Simpsonovo pravidlo – příklad

Příklad: Určete pomocí složeného Simpsonova pravidla $\int_0^\pi \sin dx$ s absolutní chybou menší než 0,00002. Kolik podintervalů intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ budeme pro tento účel potřebovat?

$$\left| \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) \right| = \frac{h^4\pi}{180} \sin\xi \leq \frac{h^4\pi}{180} \cdot 1 = \frac{\pi^5}{180n^4} < 0{,}00002.$$

Z poslední nerovnosti určíme, že $n > 18$. Můžeme tedy zvolit například $n = 20$ a $h = \pi/20$. S použitím těchto hodnot obdržíme pomocí složeného Simpsonova pravidla

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx \frac{\pi}{60} \left[\sin 0 + 2 \sum_{j=1}^{9} \sin\left(\frac{j\pi}{10}\right) + 4 \sum_{j=1}^{10} \sin\left(\frac{(2j-1)j\pi}{20}\right) + \sin\pi \right] =$$

$$= 2,000006.$$

Složené Simpsonovo pravidlo – příklad

Příklad: Určete pomocí složeného Simpsonova pravidla $\int_0^\pi \sin dx$ s absolutní chybou menší než 0,00002. Kolik podintervalů intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ budeme pro tento účel potřebovat?

$$\left| \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) \right| = \frac{h^4\pi}{180} \sin\xi \le \frac{h^4\pi}{180} \cdot 1 = \frac{\pi^5}{180n^4} < 0{,}00002.$$

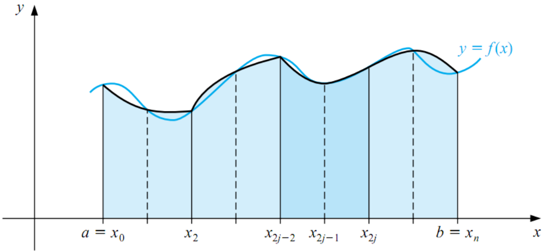
Z poslední nerovnosti určíme, že $n > 18$. Můžeme tedy zvolit například $n = 20$ a $h = \pi/20$. S použitím těchto hodnot obdržíme pomocí složeného Simpsonova pravidla

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx \frac{\pi}{60} \left[\sin 0 + 2\sum_{j=1}^{9} \sin\left(\frac{j\pi}{10}\right) + 4\sum_{j=1}^{10} \sin\left(\frac{(2j-1)j\pi}{20}\right) + \sin\pi \right] =$$

$$= 2,000006.$$

Přesná hodnota je přitom $\int_0^\pi \sin x dx = 2$, tedy absolutní chyba je v tomto případě rovna 0,000006, což je skutečně méně než zadaná maximální přípustná chyba 0,00002.

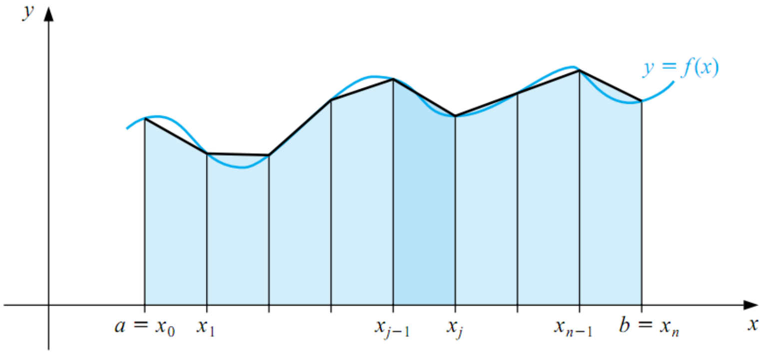
Složené Simpsonovo pravidlo – shrnutí



Předpokládejme, že funkce f má spojité derivace až do 4. řádu na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť dále n je sudé číslo, $h = (b-a)/n$ a $x_j = a + jh$ pro každé $j = 0, 1, \ldots, n$. Potom pro nějaké $\xi \in (a, b)$ platí

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \\ - \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi).$$

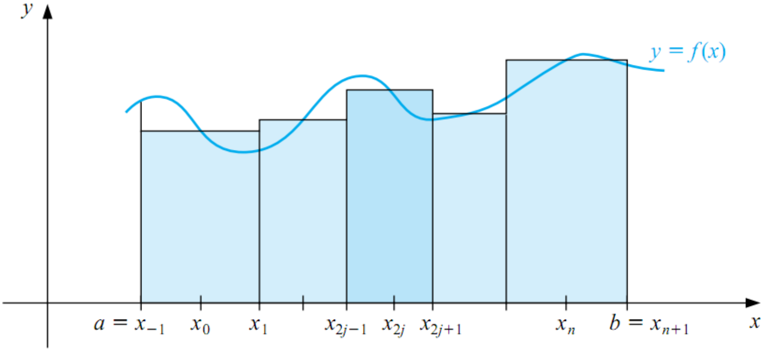
Složené lichoběžníkové pravidlo



Předpokládejme, že funkce f má spojité derivace až do 2. řádu na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť dále n je libovolné přirozené číslo, $h = (b-a)/n$ a $x_j = a + jh$ pro každé $j = 0, 1, \dots, n$. Potom pro nějaké $\xi \in (a, b)$ platí

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{h^2(b-a)}{12} f^{(2)}(\xi).$$

Složené obdélníkové pravidlo



Předpokládejme, že funkce f má spojité derivace až do 2. řádu na intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť dále n je sudé číslo, $h = (b-a)/(n+2)$ a $x_j = a + (j+1)h$ pro každé $j = -1, 0, 1, \ldots, n+1$. Potom pro nějaké $\xi \in (a, b)$ platí

$$\int_a^b f(x)dx = 2h \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{h^2(b-a)}{6} f^{(2)}(\xi).$$

Složené lichoběžníkové a obdélníkové pravidlo – příklad

Příklad: Určete pomocí složeného lichoběžníkového pravidla $\int_0^\pi \sin dx$ s absolutní chybou menší než 0,00002. Kolik podintervalů intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ budeme pro tento účel potřebovat?

Složené lichoběžníkové a obdélníkové pravidlo – příklad

Příklad: Určete pomocí složeného lichoběžníkového pravidla $\int_0^\pi \sin dx$ s absolutní chybou menší než 0,00002. Kolik podintervalů intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ budeme pro tento účel potřebovat?

$$\left| \frac{h^2(b-a)}{12} f^{(2)}(\xi) \right| = \frac{h^2\pi}{12} \sin \xi \leq \frac{h^2\pi}{12} \cdot 1 = \frac{\pi^3}{12n^2} \leq 0{,}00002.$$

Složené lichoběžníkové a obdélníkové pravidlo – příklad

Příklad: Určete pomocí složeného lichoběžníkového pravidla $\int_0^\pi \sin dx$ s absolutní chybou menší než 0,00002. Kolik podintervalů intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ budeme pro tento účel potřebovat?

$$\left| \frac{h^2(b-a)}{12} f^{(2)}(\xi) \right| = \frac{h^2\pi}{12} \sin \xi \leq \frac{h^2\pi}{12} \cdot 1 = \frac{\pi^3}{12n^2} \leq 0{,}00002.$$

Z poslední nerovnosti určíme, že $n > 360$.