Úlohy z numerické matematiky

Metoda půlení intervalu

1. Metodou půlení intervalu určete s tolerancí 10^{-5} řešení rovnice $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ na intervalu:
a) $\langle 0; 1\rangle$ b) $\langle 1; 3{,}2\rangle$ c) $\langle 3{,}2; 4\rangle$

2. Metodou půlení intervalu určete s tolerancí 10^{-4} řešení rovnice $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$ na intervalu:
a) $\langle -2; -1\rangle$ b) $\langle 0; 2\rangle$ c) $\langle 2; 3\rangle$ d) $\langle -1; 0\rangle$

3. Načrtněte grafy funkcí $y = x$ a $y = 2\sin x$. Použijte metodou půlení intervalu s tolerancí 10^{-5} k nalezení nejmenší kladné hodnoty x, pro kterou $y = 2\sin x$.

4. Načrtněte grafy funkcí $y = x$ a $y = \tan x$. Použijte metodou půlení intervalu s tolerancí 10^{-5} k nalezení nejmenší kladné hodnoty x, pro kterou $y = \tan x$.

Metoda sečen

1. Metodou sečen určete s tolerancí 10^{-5} řešení rovnice $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$, jsou-li dány výchozí hodnoty:
a) $p_0 = 0, p_1 = 1$ b) $p_0 = 1, p_1 = 3{,}2$ c) $p_0 = 3{,}2, p_1 = 4$

2. Metodou sečen určete s tolerancí 10^{-3} řešení rovnice $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$, jsou-li dány výchozí hodnoty:
a) $p_0 = -2, p_1 = -1$ b) $p_0 = 0, p_1 = 2$ c) $p_0 = 2, p_1 = 3$ d) $p_0 = -1, p_1 = 0$

3. Načrtněte grafy funkcí $y = x$ a $y = 2\sin x$. Použijte metodou sečen s tolerancí 10^{-5} k nalezení nejmenší kladné hodnoty x, pro kterou $y = 2\sin x$.

4. Načrtněte grafy funkcí $y = x$ a $y = \tan x$. Použijte metodou sečen s tolerancí 10^{-5} k nalezení nejmenší kladné hodnoty x, pro kterou $y = \tan x$.

Metoda regula falsi

1. Metodou regula falsi určete s tolerancí 10^{-5} řešení rovnice $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ na intervalu:
a) $\langle 0; 1\rangle$ b) $\langle 1; 3{,}2\rangle$ c) $\langle 3{,}2; 4\rangle$

2. Metodou regula falsi určete s tolerancí 10^{-4} řešení rovnice $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$ na intervalu:
a) $\langle -2; -1\rangle$ b) $\langle 0; 2\rangle$ c) $\langle 2; 3\rangle$ d) $\langle -1; 0\rangle$

3. Načrtněte grafy funkcí $y = x$ a $y = 2\sin x$. Použijte metodou regula falsi s tolerancí 10^{-5} k nalezení nejmenší kladné hodnoty x, pro kterou $y = 2\sin x$.

4. Načrtněte grafy funkcí $y = x$ a $y = \tan x$. Použijte metodou regula falsi s tolerancí 10^{-5} k nalezení nejmenší kladné hodnoty x, pro kterou $y = \tan x$.

Newtonova metoda

1. Newtonovou metodou určete s tolerancí 10^{-5} řešení rovnice $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$, je-li dána výchozí hodnota:
a) $p_0 = 0$ b) $p_0 = 1$ c) $p_0 = 3{,}2$ d) $p_0 = 4$

2. Newtonovou metodou určete s tolerancí 10^{-3} řešení rovnice $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$, je-li dána výchozí hodnota:
a) $p_0 = -2$ b) $p_0 = -1$ c) $p_0 = 0$ d) $p_0 = 1$ e) $p_0 = 2$

3. Načrtněte grafy funkcí $y = x$ a $y = 2\sin x$. Použijte Newtonovu metodu s tolerancí 10^{-5} k nalezení nejmenší kladné hodnoty x, pro kterou $y = 2\sin x$.

4. Načrtněte grafy funkcí $y = x$ a $y = \tan x$. Použijte Newtonovu metodu s tolerancí 10^{-5} k nalezení nejmenší kladné hodnoty x, pro kterou $y = \tan x$.

Lagrangeovy polynomy

1. Pro danou funkci $f(x)$ jsou dány uzlové body $x_0 = 0, x_1 = 0{,}6$ a $x_2 = 0{,}9$. Použijte Lagrangeovy interpolační polynomy (i) stupně nejvýše 1 (ii) stupně nejvýše 2, pro aproximaci dané funkce na intervalu $\langle -0{,}9; 1{,}5\rangle$. Sestrojte graf dané funkce i příslušného interpolačního polynomu do jedné soustavy souřadnic.
a) $f(x) = \cos x$ b) $f(x) = \sqrt{1+x}$ c) $f(x) = \log_2(x+1)$ d) $f(x) = \tan x$

2. Použijte Aitken-Nevilleovu metodu k aproximaci hodnoty $\sqrt{3}$ pomocí Lagrangeova polynomu funkce $f(x) = 3^x$ s uzlovými body $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = -0, x_3 = 1$ a $x_4 = 2$.

3. Použijte Aitken-Nevilleovu metodu k aproximaci hodnoty $\sqrt{3}$ pomocí Lagrangeova polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ s uzlovými body $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$ a $x_4 = 5$. Porovnejte přesnost aproximace s předchozí úlohou.

Numerická kvadratura

1. Použijte (i) obdélníkové pravidlo (ii) lichoběžníkové pravidlo (iii) Simpsonovo pravidlo pro výpočet přibližné hodnoty následujících integrálů:
a) $\int_{0{,}5}^{1} x^4 dx$ b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx$ c) $\int_{1}^{1{,}5} x^2 \log x dx$ d) $\int_{0}^{\pi/4} x \sin x dx$

2. Použijte (i) složené obdélníkové pravidlo (ii) složené lichoběžníkové pravidlo (iii) složené Simpsonovo pravidlo pro výpočet přibližné hodnoty následujících integrálů z předchozí úlohy. Volte $n = 10$ (počet podintervalů intervalu, přes který integrujeme).

Přibližné řešení soustav rovnic

1. Řešte (i) Jacobiovou metodou (ii) Gauss-Seidlovou metodou následující soustavy rovnic s tolerancí 10^{-5}:

$$a) \qquad \begin{aligned} 3x - y + z &= 1 \\ 3x + 6y + 2z &= 0 \\ 3x + 3y + 7z &= 4 \end{aligned}$$

$$b) \qquad \begin{aligned} 10x - y &= 9 \\ -x + 10y - 2z &= 7 \\ -2y + 10z &= 6 \end{aligned}$$

2. Metodou SOR řešte soustavy rovnic z předchozí úlohy s tolerancí 10^{-5}. Volte nejprve $\lambda = 1{,}1$, poté vyzkoušejte i $\lambda = 1{,}2$.