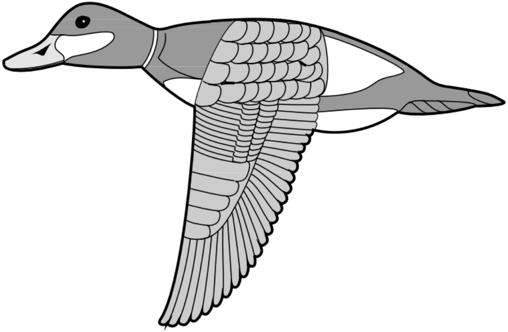
Interpolace spliny

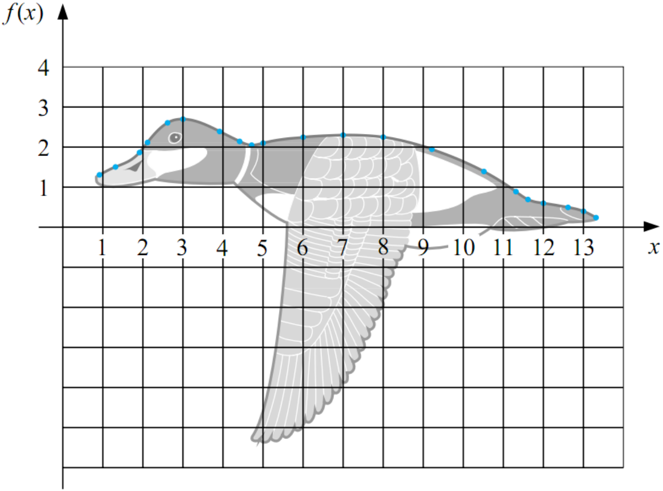
Michal Čihák

16. listopadu 2011

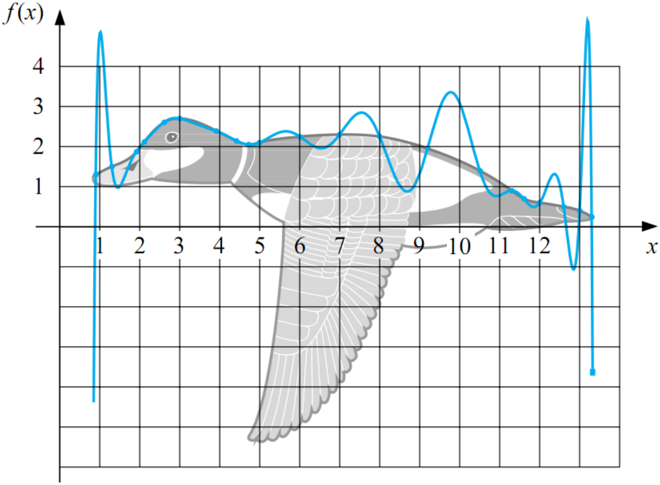
Nevýhody Lagrangeovy interpolace



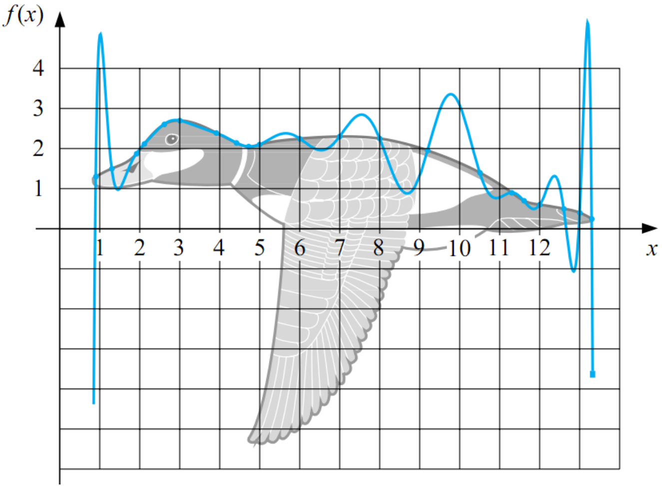
Nevýhody Lagrangeovy interpolace



Nevýhody Lagrangeovy interpolace



Nevýhody Lagrangeovy interpolace



V případě většího počtu uzlů mají Lagrangeovy polynomy tendenci oscilovat.

Jiné možnosti interpolace – interpolace po částech

- Interval, ve kterém aproximujeme neznámou funkci f rozdělíme na několik podintervalů.
- Na každém z těchto dílčích intervalů zkonstruujeme jiný aproximační polynom.
- Nejjednodušší je na každém dílčím intervalu použít polynom prvního stupně (lineární).

Jiné možnosti interpolace – interpolace po částech

- Interval, ve kterém aproximujeme neznámou funkci f rozdělíme na několik podintervalů.
- Na každém z těchto dílčích intervalů zkonstruujeme jiný aproximační polynom.
- Nejjednodušší je na každém dílčím intervalu použít polynom prvního stupně (lineární).

Jiné možnosti interpolace – interpolace po částech

- Interval, ve kterém aproximujeme neznámou funkci f rozdělíme na několik podintervalů.
- Na každém z těchto dílčích intervalů zkonstruujeme jiný aproximační polynom.
- Nejjednodušší je na každém dílčím intervalu použít polynom prvního stupně (lineární).

Interpolace po částech lineárními polynomy

- Představme si, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f v $n+1$ bodech $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, tj. víme, že $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$.
- Potom můžeme v jednotlivých intervalech $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$ aproximovat funkci f úsečkami s krajními body v příslušných uzlech.
- Nevýhodou tohoto postupu je, že získaná interpolační funkce nemá derivaci v uzlových bodech (interpolační funkce není v uzlových bodech „hladká“).

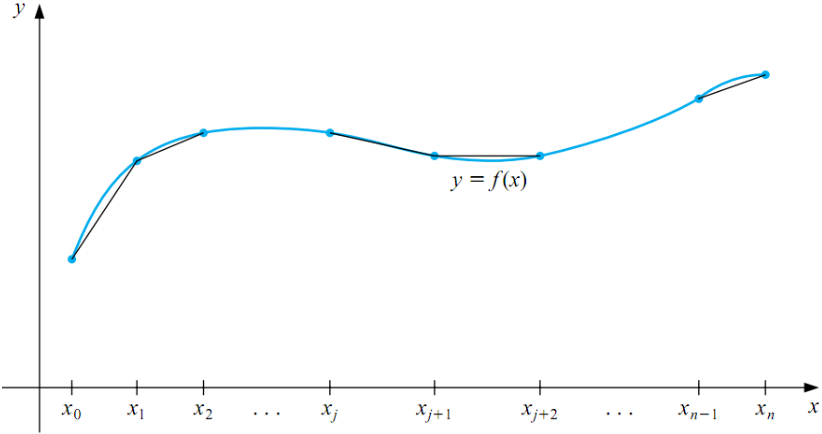
Interpolace po částech lineárními polynomy

- Představme si, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f v $n+1$ bodech $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, tj. víme, že $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$.
- Potom můžeme v jednotlivých intervalech $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$ aproximovat funkci f úsečkami s krajními body v příslušných uzlech.
- Nevýhodou tohoto postupu je, že získaná interpolační funkce nemá derivaci v uzlových bodech (interpolační funkce není v uzlových bodech „hladká“).

Interpolace po částech lineárními polynomy

- Představme si, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f v $n+1$ bodech $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, tj. víme, že $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$.
- Potom můžeme v jednotlivých intervalech $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$ aproximovat funkci f úsečkami s krajními body v příslušných uzlech.
- Nevýhodou tohoto postupu je, že získaná interpolační funkce nemá derivaci v uzlových bodech (interpolační funkce není v uzlových bodech „hladká“).

Interpolace po částech lineárními polynomy



Interpolace kubickými spliny

- Ani v případě použití kvadratických polynomů pro aproximací funkce f v jednotlivých intervalech $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ nejsme schopni zajistit diferencovatelnost (axistenci první derivace) interpolační funkce ve všech uzlových bodech.
- Tohoto požadavku ale lze dosáhnout v případě použití kubických polynomů.
- Obecný tvar kubického polynomu obsahuje 4 koeficienty, což nám dává prostor pro to, aby měla interpolační funkce spojitou první i druhou derivaci.
- Samozřejmě ale obecné neplatí, že by interpolační funkce měla stejné derivace jako funkce f.

Interpolace kubickými spliny

- Ani v případě použití kvadratických polynomů pro aproximací funkce f v jednotlivých intervalech $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$ nejsme schopni zajistit diferencovatelnost (axistenci první derivace) interpolační funkce ve všech uzlových bodech.
- Tohoto požadavku ale lze dosáhnout v případě použití kubických polynomů.
- Obecný tvar kubického polynomu obsahuje 4 koeficienty, což nám dává prostor pro to, aby měla interpolační funkce spojitou první i druhou derivaci.
- Samozřejmě ale obecné neplatí, že by interpolační funkce měla stejné derivace jako funkce f.

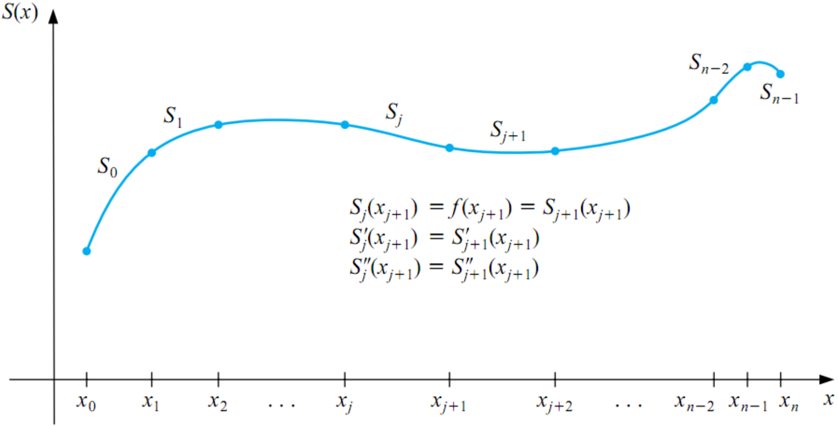
Interpolace kubickými spliny

- Ani v případě použití kvadratických polynomů pro aproximací funkce f v jednotlivých intervalech $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$ nejsme schopni zajistit diferencovatelnost (axistenci první derivace) interpolační funkce ve všech uzlových bodech.
- Tohoto požadavku ale lze dosáhnout v případě použití kubických polynomů.
- Obecný tvar kubického polynomu obsahuje 4 koeficienty, což nám dává prostor pro to, aby měla interpolační funkce spojitou první i druhou derivaci.
- Samozřejmě ale obecné neplatí, že by interpolační funkce měla stejné derivace jako funkce f.

Interpolace kubickými spliny

- Ani v případě použití kvadratických polynomů pro aproximací funkce f v jednotlivých intervalech $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$ nejsme schopni zajistit diferencovatelnost (axistenci první derivace) interpolační funkce ve všech uzlových bodech.
- Tohoto požadavku ale lze dosáhnout v případě použití kubických polynomů.
- Obecný tvar kubického polynomu obsahuje 4 koeficienty, což nám dává prostor pro to, aby měla interpolační funkce spojitou první i druhou derivaci.
- Samozřejmě ale obecné neplatí, že by interpolační funkce měla stejné derivace jako funkce f.

Interpolace kubickými spliny



Kubické interpolační spliny

[Cubic Spline Interpolation] Given a function f defined on $[a,b]$ and a set of nodes, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, a cubic spline interpolant, S, for f is a function that satisfies the following conditions:

(a) For each $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $S(x)$ is a cubic polynomial, denoted by $S_j(x)$, on the subinterval $[x_j, x_{j+1})$.

(b) $S(x_j) = f(x_j)$ for each $j = 0, 1, \ldots, n$.

(c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ for each $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

(d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ for each $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

(e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ for each $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

(f) One of the following sets of boundary conditions is satisfied:

(i) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (natural or free boundary);

(ii) $S'(x_0) = f'(x_0)$ and $S'(x_n) = f'(x_n)$ (clamped boundary).