Interpolace
– Lagrangeovy polynomy –

Michal Čihák

27. prosince 2011

Problematika interpolace

- V praxi máme často k dispozici údaje z různých měření – tzv. **data**.
- Data mohou mít například podobu n uspořádaných dvojic $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ – představme si, že jsme provedli n měření hodnot nějakých dvou veličin.
- Mezi těmito veličinami může být určitý funkční vztah – my jej neznáme, ale můžeme se pokusit neznámou funkci nějakým způsobem aproximovat (přibližně vyjádřit).
- Pro účely aproximace spojitých funkcí jsou vhodnou (a současně nejjednodušší) volbou funkce polynomické.

Problematika interpolace

- V praxi máme často k dispozici údaje z různých měření – tzv. **data**.
- Data mohou mít například podobu n uspořádaných dvojic $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ – představme si, že jsme provedli n měření hodnot nějakých dvou veličin.
- Mezi těmito veličinami může být určitý funkční vztah – my jej neznáme, ale můžeme se pokusit neznámou funkci nějakým způsobem aproximovat (přibližně vyjádřit).
- Pro účely aproximace spojitých funkcí jsou vhodnou (a současně nejjednodušší) volbou funkce polynomické.

Problematika interpolace

- V praxi máme často k dispozici údaje z různých měření – tzv. **data**.
- Data mohou mít například podobu n uspořádaných dvojic $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ – představme si, že jsme provedli n měření hodnot nějakých dvou veličin.
- Mezi těmito veličinami může být určitý funkční vztah – my jej neznáme, ale můžeme se pokusit neznámou funkci nějakým způsobem aproximovat (přibližně vyjádřit).
- Pro účely aproximace spojitých funkcí jsou vhodnou (a současně nejjednodušší) volbou funkce polynomické.

Problematika interpolace

- V praxi máme často k dispozici údaje z různých měření – tzv. **data**.
- Data mohou mít například podobu n uspořádaných dvojic $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ – představme si, že jsme provedli n měření hodnot nějakých dvou veličin.
- Mezi těmito veličinami může být určitý funkční vztah – my jej neznáme, ale můžeme se pokusit neznámou funkci nějakým způsobem aproximovat (přibližně vyjádřit).
- Pro účely aproximace spojitých funkcí jsou vhodnou (a současně nejjednodušší) volbou funkce polynomické.

Weierstrassova věta o aproximaci funkce polynomem

Věta (Weierstrass): Předpokládejme, že f je definovaná a spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje takový polynom $P(x)$, že

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon$$

pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$.

- Věta nám říká, že pro libovolnou spojitou funkci můžeme nalézt polynom, který ji v daném intervalu aproximuje s libovolnou předem danou přesností.
- Problémem ale zůstává, jak takový polynom nalézt.
- Taylorovy polynomy nejsou pro tento účel vhodné – aproximují funkci pouze v blízkém okolí nějakého pevně zvoleného bodu, dále od tohoto bodu mohou být hodnoty funkce a polynomu dosti rozdílné.

Weierstrassova věta o aproximaci funkce polynomem

Věta (Weierstrass): Předpokládejme, že f je definovaná a spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje takový polynom $P(x)$, že

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon$$

pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

- Věta nám říká, že pro libovolnou spojitou funkci můžeme nalézt polynom, který ji v daném intervalu aproximuje s libovolnou předem danou přesností.
- Problémem ale zůstává, jak takový polynom nalézt.
- Taylorovy polynomy nejsou pro tento účel vhodné – aproximují funkci pouze v blízkém okolí nějakého pevně zvoleného bodu, dále od tohoto bodu mohou být hodnoty funkce a polynomu dosti rozdílné.

Weierstrassova věta o aproximaci funkce polynomem

Věta (Weierstrass): Předpokládejme, že f je definovaná a spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje takový polynom $P(x)$, že

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon$$

pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

- Věta nám říká, že pro libovolnou spojitou funkci můžeme nalézt polynom, který ji v daném intervalu aproximuje s libovolnou předem danou přesností.
- Problémem ale zůstává, jak takový polynom nalézt.
- Taylorovy polynomy nejsou pro tento účel vhodné – aproximují funkci pouze v blízkém okolí nějakého pevně zvoleného bodu, dále od tohoto bodu mohou být hodnoty funkce a polynomu dosti rozdílné.

Weierstrassova věta o aproximaci funkce polynomem

Věta (Weierstrass): Předpokládejme, že f je definovaná a spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje takový polynom $P(x)$, že

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon$$

pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

- Věta nám říká, že pro libovolnou spojitou funkci můžeme nalézt polynom, který ji v daném intervalu aproximuje s libovolnou předem danou přesností.
- Problémem ale zůstává, jak takový polynom nalézt.
- Taylorovy polynomy nejsou pro tento účel vhodné – aproximují funkci pouze v blízkém okolí nějakého pevně zvoleného bodu, dále od tohoto bodu mohou být hodnoty funkce a polynomu dosti rozdílné.

Lagrangeovy polynomy

Představme si pro začátek, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f ve dvou bodech x_0 a x_1, tj. víme, že $f(x_0) = y_0$ a $f(x_1) = y_1$.

Lagrangeovy polynomy

Představme si pro začátek, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f ve dvou bodech x_0 a x_1, tj. víme, že $f(x_0) = y_0$ a $f(x_1) = y_1$.

Naším úkolem je nalézt polynom P prvního stupně, který má v bodech x_0 a x_1 stejné hodnoty jako neznámá funkce, tj. $P(x_0) = y_0$ a $P(x_1) = y_1$.

Lagrangeovy polynomy

Představme si pro začátek, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f ve dvou bodech x_0 a x_1, tj. víme, že $f(x_0) = y_0$ a $f(x_1) = y_1$.

Naším úkolem je nalézt polynom P prvního stupně, který má v bodech x_0 a x_1 stejné hodnoty jako neznámá funkce, tj. $P(x_0) = y_0$ a $P(x_1) = y_1$.

Budeme postupovat tak, že nejprve definujeme funkce

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Lagrangeovy polynomy

Představme si pro začátek, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f ve dvou bodech x_0 a x_1, tj. víme, že $f(x_0) = y_0$ a $f(x_1) = y_1$.

Naším úkolem je nalézt polynom P prvního stupně, který má v bodech x_0 a x_1 stejné hodnoty jako neznámá funkce, tj. $P(x_0) = y_0$ a $P(x_1) = y_1$.

Budeme postupovat tak, že nejprve definujeme funkce

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Všimněte se, že $L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1$.

Lagrangeovy polynomy

Všimněte se, že $L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1.$

Nyní definujeme polynom

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1).$$

Lagrangeovy polynomy

Všimněte se, že $L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1.$

Nyní definujeme polynom

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1).$$

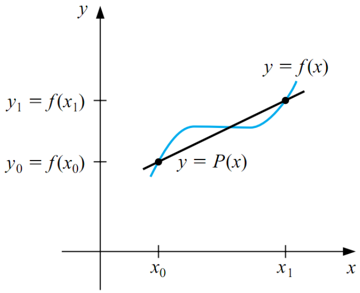
Všimněte se, že

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0,$$

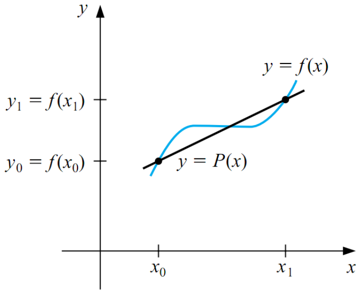
a

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

Lagrangeovy polynomy – příklad

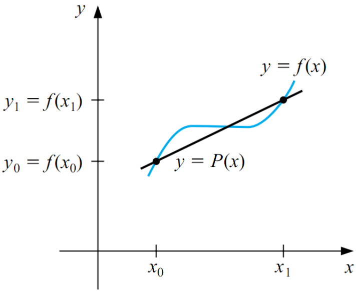


Lagrangeovy polynomy – příklad



Příklad: Známe hodnoty neznámé spojité funkce $f(2) = 3$ a $f(6) = 5$.

Lagrangeovy polynomy – příklad



Příklad: Známe hodnoty neznámé spojité funkce $f(2) = 3$ a $f(6) = 5$. Máme tedy $x_0 = 2, y_0 = f(x_0) = 3$ a $x_1 = 6, y_1 = f(x_1) = 5$. Interpolační polynom má tvar

$$
\begin{aligned}
P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) = \\
&= \frac{x-6}{2-6} \cdot 3 + \frac{x-2}{6-2} \cdot 5 = \frac{1}{2}x + 2.
\end{aligned}
$$

Lagrangeovy polynomy

Nyní zobecníme předchozí postup. Představme si, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f v $n+1$ bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tj. víme, že $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$.

Lagrangeovy polynomy

Nyní zobecníme předchozí postup. Představme si, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f v $n+1$ bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tj. víme, že $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$.

Naším úkolem je nalézt polynom P nejvýše n-tého stupně, který má v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ stejné hodnoty jako neznámá funkce, tj. $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \ldots, P(x_n) = y_n$.

Lagrangeovy polynomy

Nyní zobecníme předchozí postup. Představme si, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f v $n+1$ bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tj. víme, že $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$.

Naším úkolem je nalézt polynom P nejvýše n-tého stupně, který má v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ stejné hodnoty jako neznámá funkce, tj. $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \ldots, P(x_n) = y_n$.

Budeme postupovat tak, že nejprve definujeme polynomy

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdots(x_0-x_n)} \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} \\
&\ldots \\
L_n(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned}
$$

Lagrangeovy polynomy

Všimněte se, že například
$L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_0(x_2) = 0, \ldots, L_0(x_n) = 0.$

Lagrangeovy polynomy

Všimněte se, že například
$L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_0(x_2) = 0, \ldots, L_0(x_n) = 0.$

Obecně $L_k(x_k) = 1$ a $L_k(x_j) = 0$ pro $j \neq k$.

Lagrangeovy polynomy

Budeme postupovat tak, že nejprve definujeme polynomy

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}$$

$$\dots$$

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

Nyní definujeme tzv. **Lagrangeův interpolační polynom**

$$P_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + \cdots + L_n(x)f(x_n).$$

Lagrangeův interpolační polynom

- Je-li dáno $n+1$ různých čísel $x_0, x_1, \ldots, x_n$ a neznámá funkce f, jejíž hodnoty pro $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou známy, potom polynom P_n má pro $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tytéž hodnoty jako funkce f.

Lagrangeovy polynomy – příklad

Příklad: Použijte čísla (uzly) $x_0 = 2, x_1 = 2{,}5$ a $x_2 = 4$ pro nalezení Lagrangeova interpolačního polynomu druhého stupně pro funkci $f(x) = 1/x$.

Lagrangeovy polynomy – příklad

Příklad: Použijte čísla (uzly) $x_0 = 2, x_1 = 2{,}5$ a $x_2 = 4$ pro nalezení Lagrangeova interpolačního polynomu druhého stupně pro funkci $f(x) = 1/x$.

Nejprve vyjádříme

$$L_0(x) = \frac{(x-2{,}5)(x-4)}{(2-2{,}5)(2-4)} = x^2 - 6{,}5x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2{,}5-2)(2{,}5-4)} = \frac{x^2-6x+8}{-0,75}$$

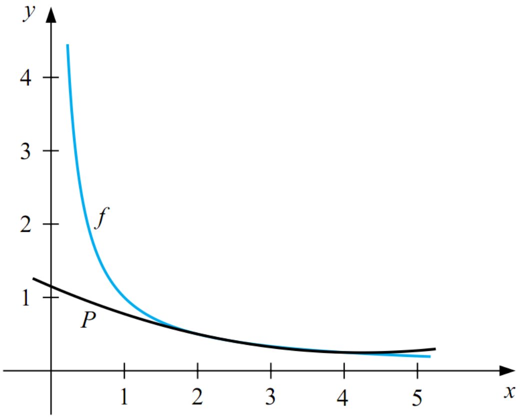
$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2{,}5)}{(4-2)(4-2{,}5)} = \frac{x^2-4{,}5x+5}{3}$$

Lagrangeovy polynomy – příklad

Protože $f(x_0) = f(2) = 0{,}5$, $f(x_1) = f(2{,}5) = 0{,}4$ a $f(x_2) = f(4) = 0{,}25$ obdržíme

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) = \\ &= 0{,}5(x^2 - 6{,}5x + 10) + 0{,}4\frac{x^2 - 6x + 8}{-0,75} + 0{,}25\frac{x^2 - 4{,}5x + 5}{3} = \\ &= 0{,}05x^2 - 0{,}425x + 1{,}15. \end{aligned}$$

Lagrangeovy polynomy – příklad



Ukázka aproximace funkce $f(x) = 1/x$ Lagrangeovým polynomem $P_2(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}425x + 1{,}15$ s uzly $x_0 = 2, x_1 = 2{,}5$ a $x_2 = 4$.

Praktické problémy Lagrangeovy interpolace

- Mějme data v podobě n uspořádaných dvojic $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, přičemž mezi veličinami x a y je nějaký funkční vztah daný funkcí f.
- Paradoxní (na první pohled) je, že nejlepší aproximaci funkce f v určitém bodě nezískáme vždy použitím Lagrangeova polynomu $P_n(x)$, ale mnohdy použitím Lagrangeova polynomu nižšího stupně než n – například $P_{n-1}(x)$, nebo $P_{n-2}(x)$, nebo i nižšího.
- Pro určení například Lagrangeova polynomu $P_{n-1}(x)$ nám ale stačí pouze $n-1$ uspořádaných dvojic (tedy jednu uspořádanou dvojici nevyužijeme – otázka je kterou).
- Podobně pro určení $P_{n-2}(x)$ nám stačí pouze $n-2$ uspořádaných dvojic (tedy dvě uspořádané dvojici nevyužijeme – otázka je které).

Praktické problémy Lagrangeovy interpolace

- Mějme data v podobě n uspořádaných dvojic $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, přičemž mezi veličinami x a y je nějaký funkční vztah daný funkcí f.
- Paradoxní (na první pohled) je, že nejlepší aproximaci funkce f v určitém bodě nezískáme vždy použitím Lagrangeova polynomu $P_n(x)$, ale mnohdy použitím Lagrangeova polynomu nižšího stupně než n – například $P_{n-1}(x)$, nebo $P_{n-2}(x)$, nebo i nižšího.
- Pro určení například Lagrangeova polynomu $P_{n-1}(x)$ nám ale stačí pouze $n-1$ uspořádaných dvojic (tedy jednu uspořádanou dvojici nevyužijeme – otázka je kterou).
- Podobně pro určení $P_{n-2}(x)$ nám stačí pouze $n-2$ uspořádaných dvojic (tedy dvě uspořádané dvojici nevyužijeme – otázka je které).

Praktické problémy Lagrangeovy interpolace

- Mějme data v podobě n uspořádaných dvojic $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, přičemž mezi veličinami x a y je nějaký funkční vztah daný funkcí f.
- Paradoxní (na první pohled) je, že nejlepší aproximaci funkce f v určitém bodě nezískáme vždy použitím Lagrangeova polynomu $P_n(x)$, ale mnohdy použitím Lagrangeova polynomu nižšího stupně než n – například $P_{n-1}(x)$, nebo $P_{n-2}(x)$, nebo i nižšího.
- Pro určení například Lagrangeova polynomu $P_{n-1}(x)$ nám ale stačí pouze $n-1$ uspořádaných dvojic (tedy jednu uspořádanou dvojici nevyužijeme – otázka je kterou).
- Podobně pro určení $P_{n-2}(x)$ nám stačí pouze $n-2$ uspořádaných dvojic (tedy dvě uspořádané dvojici nevyužijeme – otázka je které).

Praktické problémy Lagrangeovy interpolace

- Mějme data v podobě n uspořádaných dvojic $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, přičemž mezi veličinami x a y je nějaký funkční vztah daný funkcí f.
- Paradoxní (na první pohled) je, že nejlepší aproximaci funkce f v určitém bodě nezískáme vždy použitím Lagrangeova polynomu $P_n(x)$, ale mnohdy použitím Lagrangeova polynomu nižšího stupně než n – například $P_{n-1}(x)$, nebo $P_{n-2}(x)$, nebo i nižšího.
- Pro určení například Lagrangeova polynomu $P_{n-1}(x)$ nám ale stačí pouze $n-1$ uspořádaných dvojic (tedy jednu uspořádanou dvojici nevyužijeme – otázka je kterou).
- Podobně pro určení $P_{n-2}(x)$ nám stačí pouze $n-2$ uspořádaných dvojic (tedy dvě uspořádané dvojici nevyužijeme – otázka je které).

Praktické problémy Lagrangeovy interpolace

- Mějme data v podobě n uspořádaných dvojic $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, přičemž mezi veličinami x a y je nějaký funkční vztah daný funkcí f.
- Paradoxní (na první pohled) je, že nejlepší aproximaci funkce f v určitém bodě nezískáme vždy použitím Lagrangeova polynomu $P_n(x)$, ale mnohdy použitím Lagrangeova polynomu nižšího stupně než n – například $P_{n-1}(x)$, nebo $P_{n-2}(x)$, nebo i nižšího.
- Pro určení například Lagrangeova polynomu $P_{n-1}(x)$ nám ale stačí pouze $n-1$ uspořádaných dvojic (tedy jednu uspořádanou dvojici nevyužijeme – otázka je kterou).
- Podobně pro určení $P_{n-2}(x)$ nám stačí pouze $n-2$ uspořádaných dvojic (tedy dvě uspořádané dvojici nevyužijeme – otázka je které).

Praktické problémy Lagrangeovy interpolace

- V praxi se většinou postupuje tak, že pro daných n uspořádaných dvojic (uzlových bodů) se postupně vypočítají Lagrangeovy polynomy určené dvěma uzlovými body, dále třemi uzlovými body, atd.
- Pro tyto polynomy se přitom zkoumá, jak dobře aproximují hodnotu funkce f v daném bodě.
- S výpočtem každého Lagrangeova polynomu je ale spojeno nezanedbatelné množství práce (s rostoucím n roste kvadraticky složitost výpočtu každého jednotlivého Lagrangeova polynomu, navíc je potřeba vypočítat více polynomů.
- Proto bylo snahou nalézt efektivnější postup, který by nám alespoň část práce (a tím i času) ušetřil.

Praktické problémy Lagrangeovy interpolace

- V praxi se většinou postupuje tak, že pro daných n uspořádaných dvojic (uzlových bodů) se postupně vypočítají Lagrangeovy polynomy určené dvěma uzlovými body, dále třemi uzlovými body, atd.
- Pro tyto polynomy se přitom zkoumá, jak dobře aproximují hodnotu funkce f v daném bodě.
- S výpočtem každého Lagrangeova polynomu je ale spojeno nezanedbatelné množství práce (s rostoucím n roste kvadraticky složitost výpočtu každého jednotlivého Lagrangeova polynomu, navíc je potřeba vypočítat více polynomů.
- Proto bylo snahou nalézt efektivnější postup, který by nám alespoň část práce (a tím i času) ušetřil.

Praktické problémy Lagrangeovy interpolace

- V praxi se většinou postupuje tak, že pro daných n uspořádaných dvojic (uzlových bodů) se postupně vypočítají Lagrangeovy polynomy určené dvěma uzlovými body, dále třemi uzlovými body, atd.
- Pro tyto polynomy se přitom zkoumá, jak dobře aproximují hodnotu funkce f v daném bodě.
- S výpočtem každého Lagrangeova polynomu je ale spojeno nezanedbatelné množství práce (s rostoucím n roste kvadraticky složitost výpočtu každého jednotlivého Lagrangeova polynomu, navíc je potřeba vypočítat více polynomů.
- Proto bylo snahou nalézt efektivnější postup, který by nám alespoň část práce (a tím i času) ušetřil.

Praktické problémy Lagrangeovy interpolace

- V praxi se většinou postupuje tak, že pro daných n uspořádaných dvojic (uzlových bodů) se postupně vypočítají Lagrangeovy polynomy určené dvěma uzlovými body, dále třemi uzlovými body, atd.
- Pro tyto polynomy se přitom zkoumá, jak dobře aproximují hodnotu funkce f v daném bodě.
- S výpočtem každého Lagrangeova polynomu je ale spojeno nezanedbatelné množství práce (s rostoucím n roste kvadraticky složitost výpočtu každého jednotlivého Lagrangeova polynomu, navíc je potřeba vypočítat více polynomů.
- Proto bylo snahou nalézt efektivnější postup, který by nám alespoň část práce (a tím i času) ušetřil.

Rekurzivní výpočet Lagrangeových polynomů

Představme si opět, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f v $n+1$ bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tj. víme, že
$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$.

Rekurzivní výpočet Lagrangeových polynomů

Představme si opět, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f v $n+1$ bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tj. víme, že $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$.
Nechť $m_1, m_2, \ldots, m_k$ je k různých celých čísel vybraných z posloupnosti $0, 1, 2, \ldots, n$. Lagrangeův polynom, který má v bodech $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}$ stejné hodnoty jako funkce f budeme značit $P_{m_1, m_2, \ldots, m_k}(x)$. Při tomto značení můžeme vyjádřit:

Rekurzivní výpočet Lagrangeových polynomů

Představme si opět, že známe hodnoty neznámé spojité funkce f v $n+1$ bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tj. víme, že
$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$.
Nechť $m_1, m_2, \ldots, m_k$ je k různých celých čísel vybraných z posloupnosti $0, 1, 2, \ldots, n$. Lagrangeův polynom, který má v bodech $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}$ stejné hodnoty jako funkce f budeme značit $P_{m_1,m_2,\ldots,m_k}(x)$. Při tomto značení můžeme vyjádřit:

$$P_{0,1,\ldots,k}(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{x_i - x_j}, \tag{1}$$

kde x_i a x_j jsou libovolná dvě čísla z množiny $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

Aitkenovo-Nevillovo schéma

S pomocí vzorce (1) můžeme postupně sestavit následující schéma:

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & & & & & \\
x_1 & Q_{0,0} & & & & \\
x_2 & Q_{1,0} & Q_{1,1} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
x_{n-1} & Q_{n-1,0} & Q_{n-1,1} & \cdots & Q_{n-1,n-1} & \\
x_n & Q_{n,0} & Q_{n,1} & \cdots & Q_{n,n-1} & Q_{n,n}
\end{array}
$$

Použili jsme označení $Q_{i,j} = P_{i-j,i-j+1,i-j+2,\dots,i-1,i}$.

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

Příklad: V tabulce jsou uvedeny hodnoty funkce f v pěti různých bodech. Aproximujte hodnotu $f(1{,}5)$ pomocí Lagrangeových polynomů z Aitkenova-Nevillova schématu.

x	$f(x)$
1,0	0,7651977
1,3	0,6200860
1,6	0,4554022
1,9	0,2818186
2,2	0,1103623

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

Příklad: V tabulce jsou uvedeny hodnoty funkce f v pěti různých bodech. Aproximujte hodnotu $f(1{,}5)$ pomocí Lagrangeových polynomů z Aitkenova-Nevillova schématu.

x	$f(x)$
1,0	0,7651977
1,3	0,6200860
1,6	0,4554022
1,9	0,2818186
2,2	0,1103623

Řešení: Nejprve označíme

x	$f(x)$
$x_0 = 1{,}0$	$0{,}7651977 = Q_{0,0}$
$x_1 = 1{,}3$	$0{,}6200860 = Q_{1,0}$
$x_2 = 1{,}6$	$0{,}4554022 = Q_{2,0}$
$x_3 = 1{,}9$	$0{,}2818186 = Q_{3,0}$
$x_4 = 2{,}2$	$0{,}1103623 = Q_{4,0}$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

x	$f(x)$
$x_0 = 1{,}0$	$0{,}7651977 = Q_{0,0}$
$x_1 = 1{,}3$	$0{,}6200860 = Q_{1,0}$
$x_2 = 1{,}6$	$0{,}4554022 = Q_{2,0}$
$x_3 = 1{,}9$	$0{,}2818186 = Q_{3,0}$
$x_4 = 2{,}2$	$0{,}1103623 = Q_{4,0}$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

x	$f(x)$
$x_0 = 1{,}0$	$0{,}7651977 = Q_{0,0}$
$x_1 = 1{,}3$	$0{,}6200860 = Q_{1,0}$
$x_2 = 1{,}6$	$0{,}4554022 = Q_{2,0}$
$x_3 = 1{,}9$	$0{,}2818186 = Q_{3,0}$
$x_4 = 2{,}2$	$0{,}1103623 = Q_{4,0}$

Nyní pomocí vzorce (1) určíme

$$\begin{aligned} Q_{1,1}(1{,}5) &= \frac{(1{,}5 - 1{,}0)Q_{1,0} - (1{,}5 - 1{,}3)Q_{0,0}}{1{,}3 - 1{,}0} = \\ &= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6200860 - 0{,}2 \cdot 0, 7651977}{0{,}3} = 0{,}5233449. \end{aligned}$$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

x	$f(x)$
$x_0 = 1{,}0$	$0{,}7651977 = Q_{0,0}$
$x_1 = 1{,}3$	$0{,}6200860 = Q_{1,0}$
$x_2 = 1{,}6$	$0{,}4554022 = Q_{2,0}$
$x_3 = 1{,}9$	$0{,}2818186 = Q_{3,0}$
$x_4 = 2{,}2$	$0{,}1103623 = Q_{4,0}$

Nyní pomocí vzorce (1) určíme

$$Q_{1,1}(1{,}5) = \frac{(1{,}5 - 1{,}0)Q_{1,0} - (1{,}5 - 1{,}3)Q_{0,0}}{1{,}3 - 1{,}0} = \\ = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6200860 - 0{,}2 \cdot 0,7651977}{0{,}3} = 0{,}5233449.$$

Podobně

$$Q_{2,1}(1{,}5) = \frac{(1{,}5 - 1{,}3)Q_{2,0} - (1{,}5 - 1{,}6)Q_{1,0}}{1{,}6 - 1{,}3} = \\ = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}4554022 - (-0{,}1) \cdot 0{,}6200860}{0{,}3} = 0{,}5102968,$$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

x	$f(x)$
$x_0 = 1{,}0$	$0{,}7651977 = Q_{0,0}$
$x_1 = 1{,}3$	$0{,}6200860 = Q_{1,0}$
$x_2 = 1{,}6$	$0{,}4554022 = Q_{2,0}$
$x_3 = 1{,}9$	$0{,}2818186 = Q_{3,0}$
$x_4 = 2{,}2$	$0{,}1103623 = Q_{4,0}$

Nyní pomocí vzorce (1) určíme

$$Q_{1,1}(1{,}5) = \frac{(1{,}5 - 1{,}0)Q_{1,0} - (1{,}5 - 1{,}3)Q_{0,0}}{1{,}3 - 1{,}0} = \\ = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6200860 - 0{,}2 \cdot 0,7651977}{0{,}3} = 0{,}5233449.$$

Podobně

$$Q_{2,1}(1{,}5) = \frac{(1{,}5 - 1{,}3)Q_{2,0} - (1{,}5 - 1{,}6)Q_{1,0}}{1{,}6 - 1{,}3} = \\ = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}4554022 - (-0{,}1) \cdot 0{,}6200860}{0{,}3} = 0{,}5102968,$$

podobně vypočteme $Q_{3,1}(1{,}5) = 0{,}5132634$ a $Q_{4,1}(1{,}5) = 0{,}5104270$.

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

$x_0 = 1{,}0$	$Q_{0,0} = 0{,}7651977$	
$x_1 = 1{,}3$	$Q_{1,0} = 0{,}6200860$	$Q_{1,1} = 0{,}5233449$
$x_2 = 1{,}6$	$Q_{2,0} = 0{,}4554022$	$Q_{2,1} = 0{,}5102968$
$x_3 = 1{,}9$	$Q_{3,0} = 0{,}2818186$	$Q_{3,1} = 0{,}5132634$
$x_4 = 2{,}2$	$Q_{4,0} = 0{,}1103623$	$Q_{4,1} = 0{,}5104270$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

$x_0 = 1{,}0$	$Q_{0,0} = 0{,}7651977$	
$x_1 = 1{,}3$	$Q_{1,0} = 0{,}6200860$	$Q_{1,1} = 0{,}5233449$
$x_2 = 1{,}6$	$Q_{2,0} = 0{,}4554022$	$Q_{2,1} = 0{,}5102968$
$x_3 = 1{,}9$	$Q_{3,0} = 0{,}2818186$	$Q_{3,1} = 0{,}5132634$
$x_4 = 2{,}2$	$Q_{4,0} = 0{,}1103623$	$Q_{4,1} = 0{,}5104270$

Pokračujeme dalším sloupcem ve schématu:

$$Q_{2,2}(1{,}5) = \frac{(1{,}5 - 1{,}0)Q_{2,1} - (1{,}5 - 1{,}6)Q_{1,1}}{1{,}6 - 1{,}0} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5102968 - (-0{,}1) \cdot 0{,}5233449}{0{,}6} = 0{,}5124715,$$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

$x_0 = 1{,}0$	$Q_{0,0} = 0{,}7651977$	
$x_1 = 1{,}3$	$Q_{1,0} = 0{,}6200860$	$Q_{1,1} = 0{,}5233449$
$x_2 = 1{,}6$	$Q_{2,0} = 0{,}4554022$	$Q_{2,1} = 0{,}5102968$
$x_3 = 1{,}9$	$Q_{3,0} = 0{,}2818186$	$Q_{3,1} = 0{,}5132634$
$x_4 = 2{,}2$	$Q_{4,0} = 0{,}1103623$	$Q_{4,1} = 0{,}5104270$

Pokračujeme dalším sloupcem ve schématu:

$$\begin{aligned} Q_{2,2}(1{,}5) &= \frac{(1{,}5 - 1{,}0)Q_{2,1} - (1{,}5 - 1{,}6)Q_{1,1}}{1{,}6 - 1{,}0} = \\ &= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5102968 - (-0{,}1) \cdot 0{,}5233449}{0{,}6} = 0{,}5124715, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{3,2}(1{,}5) &= \frac{(1{,}5 - 1{,}3)Q_{3,1} - (1{,}5 - 1{,}9)Q_{2,1}}{1{,}9 - 1{,}3} = \\ &= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5132634 - (-0{,}4) \cdot 0{,}5102968}{0{,}6} = 0{,}5112857, \end{aligned}$$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

$x_0 = 1{,}0$	$Q_{0,0} = 0{,}7651977$	
$x_1 = 1{,}3$	$Q_{1,0} = 0{,}6200860$	$Q_{1,1} = 0{,}5233449$
$x_2 = 1{,}6$	$Q_{2,0} = 0{,}4554022$	$Q_{2,1} = 0{,}5102968$
$x_3 = 1{,}9$	$Q_{3,0} = 0{,}2818186$	$Q_{3,1} = 0{,}5132634$
$x_4 = 2{,}2$	$Q_{4,0} = 0{,}1103623$	$Q_{4,1} = 0{,}5104270$

Pokračujeme dalším sloupcem ve schématu:

$$\begin{aligned} Q_{2,2}(1{,}5) &= \frac{(1{,}5-1{,}0)Q_{2,1} - (1{,}5-1{,}6)Q_{1,1}}{1{,}6-1{,}0} = \\ &= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5102968 - (-0{,}1) \cdot 0{,}5233449}{0{,}6} = 0{,}5124715, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{3,2}(1{,}5) &= \frac{(1{,}5-1{,}3)Q_{3,1} - (1{,}5-1{,}9)Q_{2,1}}{1{,}9-1{,}3} = \\ &= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5132634 - (-0{,}4) \cdot 0{,}5102968}{0{,}6} = 0{,}5112857, \end{aligned}$$

Podobně se vypočte $Q_{4,2}(1{,}5) = 0{,}5137361$.

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

$x_0 = 1{,}0$	$0{,}7651977$		
$x_1 = 1{,}3$	$0{,}6200860$	$0{,}5233449$	
$x_2 = 1{,}6$	$0{,}4554022$	$0{,}5102968$	$Q_{2,2}(1{,}5) = 0{,}5124715$
$x_3 = 1{,}9$	$0{,}2818186$	$0{,}5132634$	$Q_{3,2}(1{,}5) = 0{,}5112857$
$x_4 = 2{,}2$	$0{,}1103623$	$0{,}5104270$	$Q_{4,2}(1{,}5) = 0{,}5137361$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

$x_0 = 1{,}0$	$0{,}7651977$		
$x_1 = 1{,}3$	$0{,}6200860$	$0{,}5233449$	
$x_2 = 1{,}6$	$0{,}4554022$	$0{,}5102968$	$Q_{2,2}(1{,}5) = 0{,}5124715$
$x_3 = 1{,}9$	$0{,}2818186$	$0{,}5132634$	$Q_{3,2}(1{,}5) = 0{,}5112857$
$x_4 = 2{,}2$	$0{,}1103623$	$0{,}5104270$	$Q_{4,2}(1{,}5) = 0{,}5137361$

Pokračujeme dále ve schématu:

$$Q_{3,3}(1{,}5) = \frac{(1{,}5 - 1{,}0)Q_{3,2} - (1{,}5 - 1{,}9)Q_{2,2}}{1{,}9 - 1{,}0} = $$
$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5112857 - (-0{,}4) \cdot 0{,}5124715}{0{,}9} = 0{,}5118127,$$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

$x_0 = 1{,}0$	$0{,}7651977$		
$x_1 = 1{,}3$	$0{,}6200860$	$0{,}5233449$	
$x_2 = 1{,}6$	$0{,}4554022$	$0{,}5102968$	$Q_{2,2}(1{,}5) = 0{,}5124715$
$x_3 = 1{,}9$	$0{,}2818186$	$0{,}5132634$	$Q_{3,2}(1{,}5) = 0{,}5112857$
$x_4 = 2{,}2$	$0{,}1103623$	$0{,}5104270$	$Q_{4,2}(1{,}5) = 0{,}5137361$

Pokračujeme dále ve schématu:

$$\begin{aligned} Q_{3,3}(1{,}5) &= \frac{(1{,}5 - 1{,}0)Q_{3,2} - (1{,}5 - 1{,}9)Q_{2,2}}{1{,}9 - 1{,}0} = \\ &= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5112857 - (-0{,}4) \cdot 0{,}5124715}{0{,}9} = 0{,}5118127, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{4,3}(1{,}5) &= \frac{(1{,}5 - 1{,}3)Q_{4,2} - (1{,}5 - 2{,}2)Q_{3,2}}{2{,}2 - 1{,}3} = \\ &= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5137361 - (-0{,}7) \cdot 0{,}5112857}{0{,}9} = 0{,}5118302. \end{aligned}$$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

$x_0 =$ 1,0	$0{,}7651977$			
$x_1 =$ 1,3	$0{,}6200860$	$0{,}5233449$		
$x_2 =$ 1,6	$0{,}4554022$	$0{,}5102968$	$0{,}5124715$	
$x_3 =$ 1,9	$0{,}2818186$	$0{,}5132634$	$0{,}5112857$	$Q_{3,3}(1{,}5) = 0{,}5118127$
$x_4 =$ 2,2	$0{,}1103623$	$0{,}5104270$	$0{,}5137361$	$Q_{4,3}(1{,}5) = 0{,}5118302$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

$x_0 = 1{,}0$	$0{,}7651977$			
$x_1 = 1{,}3$	$0{,}6200860$	$0{,}5233449$		
$x_2 = 1{,}6$	$0{,}4554022$	$0{,}5102968$	$0{,}5124715$	
$x_3 = 1{,}9$	$0{,}2818186$	$0{,}5132634$	$0{,}5112857$	$Q_{3,3}(1{,}5) = 0{,}5118127$
$x_4 = 2{,}2$	$0{,}1103623$	$0{,}5104270$	$0{,}5137361$	$Q_{4,3}(1{,}5) = 0{,}5118302$

Nyní poslední sloupec (poslední hodnota) schématu:

$$Q_{4,4}(1{,}5) = \frac{(1{,}5 - 1{,}0)Q_{4,3} - (1{,}5 - 2{,}2)Q_{3,3}}{2{,}2 - 1{,}0} =$$
$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5118302 - (-0{,}7) \cdot 0{,}5118127}{1{,}2} = 0{,}5118200.$$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

Kompletní Aitkenovo-Nevillovo schéma pro 5 uzlů:

1,0	0,7651977				
1,3	0,6200860	0,5233449			
1,6	0,4554022	0,5102968	0,5124715		
1,9	0,2818186	0,5132634	0,5112857	0,5118127	
2,2	0,1103623	0,5104270	0,5137361	0,5118302	0,5118200

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

Kompletní Aitkenovo-Nevillovo schéma pro 5 uzlů:

1,0	0,7651977				
1,3	0,6200860	0,5233449			
1,6	0,4554022	0,5102968	0,5124715		
1,9	0,2818186	0,5132634	0,5112857	0,5118127	
2,2	0,1103623	0,5104270	0,5137361	0,5118302	0,5118200

Představme si nyní, že jsme dodatečně získali další hodnotu funkce f. Nechť například $f(2{,}5) = -0{,}04838380$. Potom se můžeme pokusit dále zpřesnit aproximaci neznámé hodnoty $f(1{,}5)$.

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

Kompletní Aitkenovo-Nevillovo schéma pro 5 uzlů:

1,0	0,7651977				
1,3	0,6200860	0,5233449			
1,6	0,4554022	0,5102968	0,5124715		
1,9	0,2818186	0,5132634	0,5112857	0,5118127	
2,2	0,1103623	0,5104270	0,5137361	0,5118302	0,5118200

Představme si nyní, že jsme dodatečně získali další hodnotu funkce f.
Nechť například $f(2{,}5) = -0{,}04838380$. Potom se můžeme pokusit dále zpřesnit aproximaci neznámé hodnoty $f(1{,}5)$.
V Aitkenově-Nevillově schématu stačí pro dopočítání hodnot dalších Lagrangeových polynomů přidat další řádek:

$$x_5 \qquad Q_{5,0} \qquad Q_{5,1} \qquad Q_{5,2} \qquad Q_{5,3} \qquad Q_{5,4} \qquad Q_{5,0}$$

Aitkenovo-Nevillovo schéma – příklad

Kompletní Aitkenovo-Nevillovo schéma pro 5 uzlů:

1,0	0,7651977				
1,3	0,6200860	0,5233449			
1,6	0,4554022	0,5102968	0,5124715		
1,9	0,2818186	0,5132634	0,5112857	0,5118127	
2,2	0,1103623	0,5104270	0,5137361	0,5118302	0,5118200

Představme si nyní, že jsme dodatečně získali další hodnotu funkce f. Nechť například $f(2{,}5) = -0{,}04838380$. Potom se můžeme pokusit dále zpřesnit aproximaci neznámé hodnoty $f(1{,}5)$.
V Aitkenově-Nevillově schématu stačí pro dopočítání hodnot dalších Lagrangeových polynomů přidat další řádek:

$$x_5 \qquad Q_{5,0} \qquad Q_{5,1} \qquad Q_{5,2} \qquad Q_{5,3} \qquad Q_{5,4} \qquad Q_{5,0}$$

Po vyčíslení získáme tyto hodnoty:
2,5 -0,0483838 0,4807699 0,5301984 0,5119070
0,5118430 0,5118277