Hledání kořenů rovnic jedné reálné proměnné
– Newtonova metoda –

Michal Čihák

26. října 2011

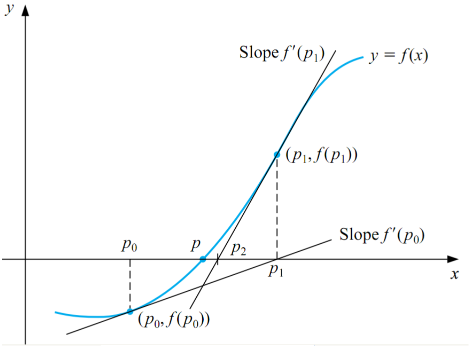
Newtonova metoda (metoda tečen)

- využívá myšlenku, že tečna v daném bodě grafu funkce nejlépe aproximuje graf funkce v blízkém okolí daného bodu
- v metodě sečen jsme pracovali se sečnami grafu funkce – tečna grafu funkce je limitním případem sečny

Newtonova metoda (metoda tečen)

- využívá myšlenku, že tečna v daném bodě grafu funkce nejlépe aproximuje graf funkce v blízkém okolí daného bodu
- v metodě sečen jsme pracovali se sečnami grafu funkce – tečna grafu funkce je limitním případem sečny

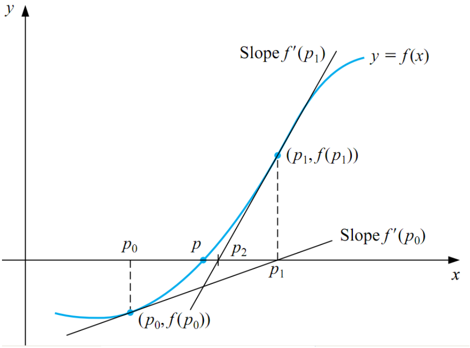
Algoritmus Newtonovy metody



Předpokládejme, že p_0 je počáteční aproximace pro kořen p rovnice $f(x) = 0$ a že $f'(x)$ existuje v intervalu obsahujícím všechny aproximace kořenu p. Směrnice tečny grafu funkce f v bodě $[p_0, f(p_0)]$ je $f'(p_0)$ a tedy rovnice tečny grafu funkce f v bodě $[p_0, f(p_0)]$ je

$$y = f(p_0) + f'(p_0)(x - p_0).$$

Algoritmus Newtonovy metody

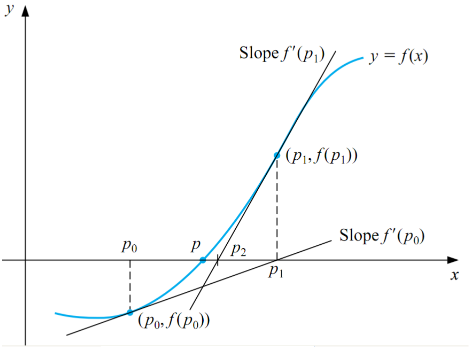


Hodnota p_1 (další iterace) se určí jako průsečík tečny grafu funkce f v bodě $[p_0, f(p_0)]$ s osou x soustavy souřadnic. Do předchozí rovnice tedy dosadíme $y = 0$

$$0 = f(p_0) + f'(p_0)(x - p_0)$$

a rovnici vyřešíme (vyjádříme neznámou x)

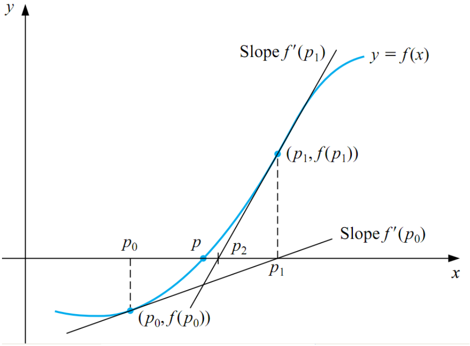
Algoritmus Newtonovy metody



$$x = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)},$$

za předpokladu, že $f'(p_0) \neq 0$. Získanou hodnotu označíme p_1. Stejným způsobem určíme aproximaci p_2 z aproximace p_1, atd.

Algoritmus Newtonovy metody – shrnutí



Pro $n > 1$ se aproximace p_{n+1} hodnoty kořenu rovnice $f(x) = 0$ vypočítá z aproximace p_n pomocí vztahu

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}.$$

Newtonova metoda

Pro ukončení algoritmu Newtonovy metody používáme dvě kritéria:

1. hodnota $|p_n - p_{n-1}|$ klesne pod předem danou toleranci TOL
2. počet iterací algoritmu překročí předem danou mez N_0 (pojistka pro případ, že by metoda nekonvergovala)

Newtonova metoda

Pro ukončení algoritmu Newtonovy metody používáme dvě kritéria:

1. hodnota $|p_n - p_{n-1}|$ klesne pod předem danou toleranci TOL
2. počet iterací algoritmu překročí předem danou mez N_0 (pojistka pro případ, že by metoda nekonvergovala)

Příklad

Zadání: Najděte kořen rovnice $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ s tolerancí $0{,}0005$. Počáteční aproximace je $p_0 = 1$.

Příklad

Zadání: Najděte kořen rovnice $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ s tolerancí $0{,}0005$.
Počáteční aproximace je $p_0 = 1$.
Řešení: Nejprve určíme první derivaci funkce $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x.$$

Poté postupně vypočítáme $p_1, p_2, \ldots$

n	p_n	$f(p_n)$
1	1.4545454545	1.5401953418
2	1.3689004011	0.0607196886
3	1.3652366002	0.0001087706
4	1.3652300134	0.0000000004

Příklad

Zadání: Najděte kořen rovnice $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ s tolerancí $0{,}0005$. Počáteční aproximace je $p_0 = 1$.
Řešení: Nejprve určíme první derivaci funkce $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x.$$

Poté postupně vypočítáme $p_1, p_2, \dots$

n	p_n	$f(p_n)$
1	1.4545454545	1.5401953418
2	1.3689004011	0.0607196886
3	1.3652366002	0.0001087706
4	1.3652300134	0.0000000004

Všimněte si, že $|p_4 - p_3| = 0{,}0000065868$, což je hodnota výrazně menší než daná hodnota TOL.

Konvergence Newtonovy metody

- Newtonova metoda je úspěšná za předpokladu, že derivace funkce f je nenulová v aproximacích kořenu p.)
- Je-li f' spojitá, pak je pro bezpečné fungování metody nutné, aby $f'(p) \neq 0$ a aby byla zvolena dostatečně přesná počáteční aproximace kořenu p.
- Kořen p rovnice $f(x) = 0$, pro který platí $f'(p) \neq 0$ se nazývá *jednoduchý*.
- Není-li kořen p rovnice $f(x) = 0$ jednoduchý, může Newtonova metoda i přesto konvergovat, konvergence je ale mnohem pomalejší.

Konvergence Newtonovy metody

- Newtonova metoda je úspěšná za předpokladu, že derivace funkce f je nenulová v aproximacích kořenu p.)
- Je-li f' spojitá, pak je pro bezpečné fungování metody nutné, aby $f'(p) \neq 0$ a aby byla zvolena dostatečně přesná počáteční aproximace kořenu p.
- Kořen p rovnice $f(x) = 0$, pro který platí $f'(p) \neq 0$ se nazývá *jednoduchý*.
- Není-li kořen p rovnice $f(x) = 0$ jednoduchý, může Newtonova metoda i přesto konvergovat, konvergence je ale mnohem pomalejší.

Konvergence Newtonovy metody

- Newtonova metoda je úspěšná za předpokladu, že derivace funkce f je nenulová v aproximacích kořenu p.)
- Je-li f' spojitá, pak je pro bezpečné fungování metody nutné, aby $f'(p) \neq 0$ a aby byla zvolena dostatečně přesná počáteční aproximace kořenu p.
- Kořen p rovnice $f(x) = 0$, pro který platí $f'(p) \neq 0$ se nazývá *jednoduchý*.
- Není-li kořen p rovnice $f(x) = 0$ jednoduchý, může Newtonova metoda i přesto konvergovat, konvergence je ale mnohem pomalejší.

Konvergence Newtonovy metody

- Newtonova metoda je úspěšná za předpokladu, že derivace funkce f je nenulová v aproximacích kořenu p.)
- Je-li f' spojitá, pak je pro bezpečné fungování metody nutné, aby $f'(p) \neq 0$ a aby byla zvolena dostatečně přesná počáteční aproximace kořenu p.
- Kořen p rovnice $f(x) = 0$, pro který platí $f'(p) \neq 0$ se nazývá *jednoduchý*.
- Není-li kořen p rovnice $f(x) = 0$ jednoduchý, může Newtonova metoda i přesto konvergovat, konvergence je ale mnohem pomalejší.

Příklad

Příklad: Kořen $p = 0$ rovnice $f(x) = e^x - x - 1 = 0$ není jednoduchý, protože $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ a také $f'(0) = e^0 - 1 = 0$. Z tabulky je vidět, že Newtonova metoda konverguje ke kořenu $p = 0$ výrazně pomaleji než v předchozím příkladu.

Příklad

Příklad: Kořen $p = 0$ rovnice $f(x) = e^x - x - 1 = 0$ není jednoduchý, protože $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ a také $f'(0) = e^0 - 1 = 0$. Z tabulky je vidět, že Newtonova metoda konverguje ke kořenu $p = 0$ výrazně pomaleji než v předchozím příkladu.

n	p_n	n	p_n
0	1.0	9	2.7750×10^{-3}
1	0.58198	10	1.3881×10^{-3}
2	0.31906	11	6.9411×10^{-4}
3	0.16800	12	3.4703×10^{-4}
4	0.08635	13	1.7416×10^{-4}
5	0.04380	14	8.8041×10^{-5}
6	0.02206		
7	0.01107		
8	0.005545